Coda con priorità

(e, p)

La priorità serve per stabilire l'ordine di uscita dalla coda del valore.

```
Insert(Q, e, p)

Minimum(Q) --> e

Extract-min(Q) --> e

Decrease-key(Q, e, p)
```

Lista

```
Insert - O(1)

Extract-min(Q) - O(n)

Decrease-key - O(n)
```

Lista ordinata

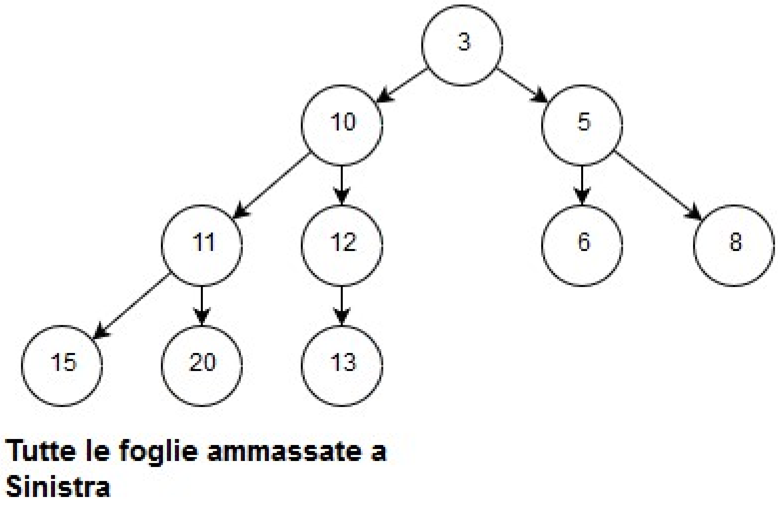
```
Insert - O(n)

Extract-min(Q) - O(1)

Decrease-key - O(n)
```

> L'implementazione tramite lista risulta avere costi per l'implementazione delle primitive molto sbilanciate.

Heap (binario)

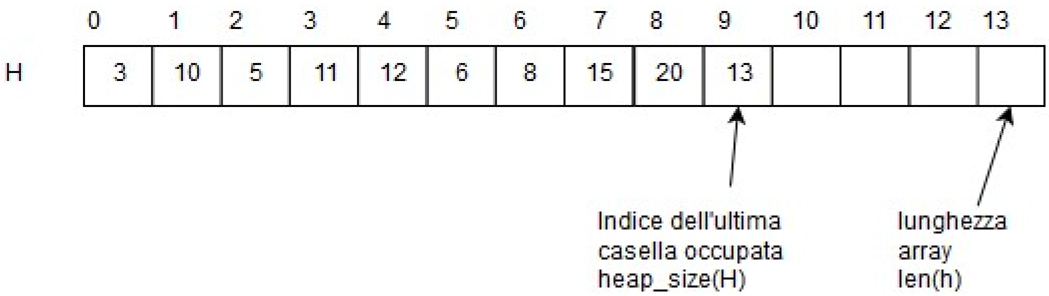
Albero binario completo quasi perfettamente bilanciato a sinistra $\rightarrow$ PROPRIETA' STRUTTURALE

Ogni nodo: 1 key



PROPRIETA' DI ORDINAMENTO: la chiave in v è $\leq$ delle chiavi nel sottoalbero

Memorizziamo le nostre chiavi in un array




```
Left(i) --> 2i+1

Riht(i) --> 2(i+1)

Parent(i) --> (i/2) - 1
```

per la proprietà delgi alberi binari completi.

Primitive

```
Build_Heap(H): costruisce heap a partire dai valori in H

Min_Heap(H)-->k: restituisce chiave minima in H

Decrease_Key(H, i, k)--> H[i] := k

Heapify(H, i): ripristina proprietà H in caso di problemi d'ordinamento

Delete_Min--> k

Insert(H, k)
```

Alcune di queste primitive sono simili a quelle della coda con priorità.
L'heap è alto $\Theta(logn)$

1. **Min_Heap(H)**

    ```
    Min_Heap(H)
        return H[0]
    ```

    Restituisce chiave nella radice

    Costo: $O(1)$

2. **Decrease_Key(H, i, k)**

    ```
    Decrease_Key(H, i, k)
        if k > H[i]
            then return "Chiave maggiore"
        H[i] := k
        while i >= 0 and H[padre(H, i] > k
            scambia(H[padre(H, i)], )
            i := (i / 2) - 1
    ```

    - Modificare H[i]
    - Confronto H[i] con la chiave del padre e scambio se necessario
    - Continuo fino a quando non sarà necessario fare lo scambio o sono arrivato alla radice

    Costo: $O(logn)$
    guadagno rispetto alla implementazione con le liste.

3. **Insert(H, k)**

    ```
    Insert(H,k)
        DimHeap[H] := Dim[H] + 1
        H[DimHeap[H]] := k
        Decrease_Key(H, DimHeap[H], k)
    ```

    1. Inserisco un nuovo nodo come foglia subito a dx dell'ultima
    2. lavoro come Decrease_Key per piazzare la chiave nella posizione corretta

    Costo: $O(logn)$

4. **Heapify(H, i)**

```
Heapify(H, i)
    num := i
    if FiglioSx(H, i) <= Dim[H] and H[FiglioSx(H, i)] < H[num]
        then num := FiglioSx(H, i)
    if FiglioDx(H, i) <= Dim[H] and H[FiglioSx(H, i)] < H[num]
        then num := FiglioDx(H, i)

    if num != i
        then
            tmp := H[i]
            H[i] := H[num]
            H[num] := tmp
            Heapify(H, num)
```

   1. Controllo se ho un figlio più piccolo
   2. se si: scambio con il minore dei miei figli

   i è l'indice del nodo problematico

   Ripristiniamo la proprietà di ordinamento di un Heap.

   Costo: $O(logn)$

5. **Delete_Min(H)**

```
Delete_Min(H)
    min := H[0]
    H[0] := H[DimHeap(H)]
    DimHeap(H) := DimHeap(H) - 1
    Heapify(H, 0)
    return min
```

   Estraggo la radice e metto la foglia più a destra al posto della radice.
   $\hookrightarrow$ ho creato un problema di ordinamento che posso risolvere con l'heapify.

   1. Sostituire chiave nella radice con quella dell'ultima foglia a destra.
      La dimensione dell'heap cala di 1.
   2. Chiamo Heapify sulla radice

   Costo: $O(logn)$

6. **Build_Heap(H)**

```
Build_Heap(H)
   DimHeap[H] := lengHeap[H]
   for i := Padre(H, DimHeap[H]) down to 0
      Heapify(H, i)
```

Se ho i numeri memorizzati un un array posso costruire un heap ma potrebbe avere valori che non rispettano la proprietà di ordinamento.
Ricorramo ad un approccio **Bottom-up**:

Chiamo Heapify sui sottoalberi a partire dal penultimo livello che non rispettano le proprietà di ordinamento fino a quando non arrivo alla radice.

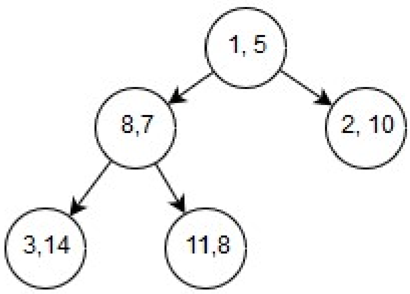
Costo: $O(nlogn)$ [chiamo heapify n volte]

in realtà l'algoritmo risulta essere più efficace di così

Costo: $O(n)$
Questo perchè vengono effettuate tante chiamate su alberi bassi e poche su alberi alti

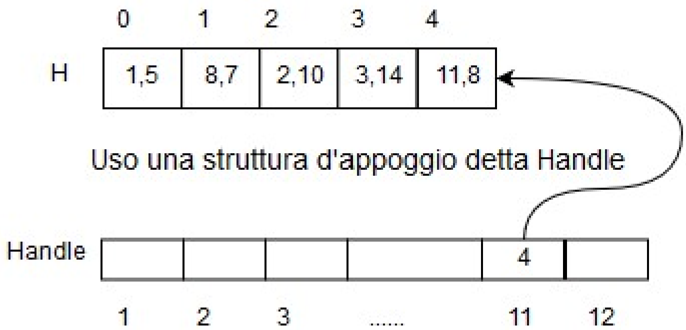
Ritorniamo ora alla **Coda con priorità**, per rappresentarla possiamo infatti usare un Heap con coppie (e, p) come elementi con la chiave data dalla priorità.

$e \in \{1, ..., n\}$



Coda:
Decrease_key(Q, 11, 6), nodo con valore 11 passa a priorità 6

Heap:
Decrease_Key(H, 4, 6), all'indice 4 la priorità diventa 6



Heapsort

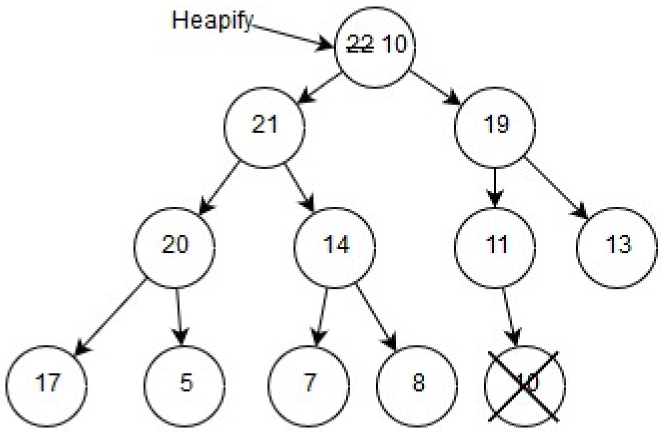
- **Input**: serquenza di numeri interi non ordinati.
- **Output**: sequenza ordinata in ordine crescente

$< 11, 14, 22, 5, 8, 19, 13, 17, 20, 7, 21, 10 >$

Costruisco Max_Heap

$< 22, 21, 19, 20, 14, 11, 13, 17, 5, 7, 8, 10 >$

esempio primo passo:
L'heap che ne esce non rispetta le proprietà d'ordinamento quindi eseguo un Heapify sulla radice.



Heap rimasto: $< 10, 21, 19, 20, 14, 11, 13, 17, 5, 7, \underbrace{8}_{\text{nuova heap size}} >$

Sequenza ordinata in fondo: $< 22 >$

L'heap size si riduce di uno e in fondo si trova l'elemento più grande nell'heap, andrò a ripetere questa procedura fino a quando nell'heap non rimarrà un solo valore.

Riesco a fare un ordinamento in-place: $O(nlogn)$.