ベクトルおよび部分空間の直行性

ベクトルの長さ

n次元ベクトル$x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$の長さ$\|x\|$は

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

の正の平方根

ベクトルの内積

$$x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

ベクトルが直交するとき内積は**0**

2.5.1

```
clear
x = [1,4,0,2]'
```

```
x =
        1
        4
        0
        2
```

```
y = [2,-2,1,3]'
```

```
y =
        2
       -2
        1
        3
```

```
x_lng = 1^2 + 4^2 + 2^2
```

```
x_lng =
       21
```

```
y_lng = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2
```

```
y_lng =
       18
```

```
dot(x,y) % x'*y
```

```
ans =
```

```
0
```

2.5.2

$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$は独立だが、直交していない

$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$は直交しているが独立でない

2.5.3

$$\frac{x_2}{x_1} \times \frac{y_2}{y_1} = -1$$

$$\frac{x_2 y_2}{x_1 y_1} = -1$$

$$x_2 y_2 = -x_1 y_1$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

ここで、

$$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

なので、

直交性の条件と等しい

2.5.4

$$B * B^{-1} = I$$

なので$i \neq j$ならばI_{ij}は0でなくてはならない

よって直交している

2.5.5

```
clear
v1 = [1,2,-2,1]'
```

```
v1 =

     1
     2
    -2
     1
```

```
v2 = [4,0,4,0]'
```

```
v2 =

     4
     0
```

```
     4
     0
```

```
v3 = [1,-1,-1,-1]'
```

```
v3 =
     1
    -1
    -1
    -1
```

```
dot(v1,v2)
```

```
ans =
    -4
```

```
dot(v1,v3)
```

```
ans =
     0
```

```
dot(v2,v3)
```

```
ans =
     0
```

2.5.6

```
clear
x = [1,1,1]'
```

```
x =
     1
     1
     1
```

```
y = [1,-1,0]'
```

```
y =
     1
    -1
     0
```

```
syms u v w
b = [u;v;w]
```

b =

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

```
eqn1 = dot(x,b) == 0
```

eqn1 = $u + v + w = 0$

```
eqn2 = dot(y,b) == 0
```

eqn2 = $u - v = 0$

$$\begin{aligned} &u = v \\ &2v + w = 0 \\ &w = -2v \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} v$$

よって $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T$ の乗数倍が直交

また単位ベクトルは

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

直交部分空間

部分空間VとWが直交する条件は「Vのすべてのベクトルv_nがWのすべてのベクトルw_nと直交している」

例

$$\begin{aligned} &v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

で張られる空間VとWは、w_1がv_1, v_2と直交するので直線Wは平面Vに直交している

2.5.7

```
clear
v1 = [1,0,0,0]
```

```
v1 = 
     1     0     0     0
```

```
v2 = [1,1,0,0]
```

```
v2 =
       1       1       0       0
```

```
w1 = [0,0,4,5]
```

```
w1 =
       0       0       4       5
```

```
syms a
w2 = [0,0,0,a]
```

w2 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

```
dot(v1,w2)
```

ans = 0

```
dot(v2,w2)
```

ans = 0

```
syms a b c d
v3 = [0,0,5,-4]
```

```
v3 =
       0       0       5      -4
```

```
dot(w1,v3)
```

```
ans =
       0
```

2.5.8

VとWが直交するということは、それぞれに含まれるベクトル同士の内積がすべて0でなければならない

もし、0ベクトル以外の共通ベクトルがあると、自身で内積をとることになるが、内積は0ベクトルでない限り0にならない

よって、$V \cap W = \{0\}$となる

基本部分空間の直交について

任意の$m \times n$行列Aについて、零空間と行空間は$\boldsymbol{R}^n$の直行する部分空間である

同様に、左零空間と列空間は$\boldsymbol{R}^m$の直交部分空間である

例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基底変数は第2列、他が自由変数

この時、順に各自由変数を1とおき、$Ux = 0$を解くとAの零空間の基底を得られる

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上記定理より、これらはすべてAの行と直交している

また、Aの列空間は 1 次元であり、基底変数の列$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$だけで張られる

左零空間は、$y^T A = 0$より$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$となる

そして、これらは

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

となり、直交している

また、零空間は行空間に直交するすべてのベクトルを含む

そのような空間を「直交補空間」とよぶ

線形代数の基本定理（その2）

1. 零空間は行空間の直交補空間であり、行空間は零空間の直交補空間
2. 左零空間は列空間の直交補空間であり、列空間は左零空間の直交補空間

$Ax = b$が解をもつのはbが左零空間に直交しているときに限る

bが列空間にあるのは、$A^T y = 0$のすべての解yにbが直交しているときに限る

部分空間が直交補空間になる条件

VとWが$\boldsymbol{R}^n$の部分空間の場合、以下の条件のうち1つを満たせば直交補空間となる

1. $W = V^{\perp}$
2. $V = W^{\perp}$
3. VとWは直交しており、かつ$\mathrm{dimV} + \mathrm{dimW} = n$

この節と前節の概要

ある行列$A(m \times n)$において

①4つの基本部分空間の次元が決定された

・行空間と列空間の次元は同じ（r）

②4つの基本部分空間の方向が決定された

・左零空間と列空間は$\boldsymbol{R}^m$においてたがいに直交補空間

・零空間と行空間は$\boldsymbol{R}^n$においてたがいに直交補空間

任意のxはx_rとx_nに分解され、この時、行列Aが持つ作用は

Aの行空間の成分x_rを列空間のベクトル$Ax_r = Ax$に移す

零空間の成分x_nを0($Ax_n = 0$)に移す

行空間から列空間への写像は正則⇒逆可能⇒列空間の全てのベクトルbがそれぞれ行空間のただ1つのベクトルxから移される

2.5.9

```
clear
A = [1,1,2;1,2,3]
```

```
A =
     1     1     2
     1     2     3
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -1
```

```
E21 =
     1     0
    -1     1
```

```
U = E21 * A
```

```
U =
     1     1     2
     0     1     1
```

```
syms u v w
U * [u;v;w]
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} u+v+2\,w \\ v+w \end{pmatrix}$$

$$u = -v - 2w$$

$$v = -w$$

$$u = -w$$

$$-w\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

よって、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$で張られる空間（直線）

2.5.10

解がベクトル(1,2,2)と(1,2,3)の線形結合であるような⇒零空間に解がある

つまり、これらとの内積が0になるようなベクトルを求めればよい

```
clear
A = [1,1,2;1,2,3]
```

```
A =
     1     1     2
     1     2     3
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -1
```

```
E21 =
     1     0
    -1     1
```

```
U = E21 * A
```

```
U =
     1     1     2
     0     1     1
```

```
syms u v w
U * [u;v;w]
```

ans =

$$\begin{pmatrix} u+v+2\,w \\ v+w \end{pmatrix}$$

$$u = -v - 2w$$

$$v = -w$$

$$u = -w$$

$$-w\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

よって、$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} = 0$

2.5.11

bを列空間と左零空間の成分に分解

$$b = b_r + b_{\mathrm{lz}}$$

この時

$$b_r = Ax$$

$$b_{\mathrm{lz}} = A^T y$$

なので、

$$b = b_r + b_{\mathrm{lz}} = Ax + A^T y = Ax$$

2.5.12

```
clear
A = [1,0,2;1,1,4]
```

```
A =
       1              0              2
       1              1              4
```

```
P12 = [0,1;1,0]
```

```
P12 =
       0              1
       1              0
```

```
PA = P12 * A
```

```
PA =
       1              1              4
       1              0              2
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -1
```

```
E21 =
       1              0
      -1              1
```

```
U = E21 * A
```

```
U =
       1              0              2
       0              1              2
```

```
syms u v w
U * [u;v;w]
```

$$u = -2w$$
$$v = -2w$$

$$\begin{bmatrix} -2w \\ -2w \\ w \end{bmatrix} = -w \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
x = [2;2;-1]

dot(A(1,:),x)
dot(A(2,:),x)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} u + 2\,w \\ v + 2\,w \end{pmatrix}$$

```
x =
       2
       2
      -1
ans =
       0
ans =
       0
```

2.5.13

$$(V + W)x = 0$$
$$Vx + Wx = 0$$

この時、VとWは空間⇒$Vx \neq -Wx$ なので、

$$Vx = Wx = 0$$

この辺りは実際の信号処理にどう役立つか

解に自由変数が多い⇒制限が少なすぎて、解が定まらない⇒実験がうまく収束しない

解がない⇒いくらやったところで理論的な解が得られない⇒実験でできても理由がわからないから製品に使えない

ここの章を理解していると、シミュレーション（モデル）の段階でそれがわかる

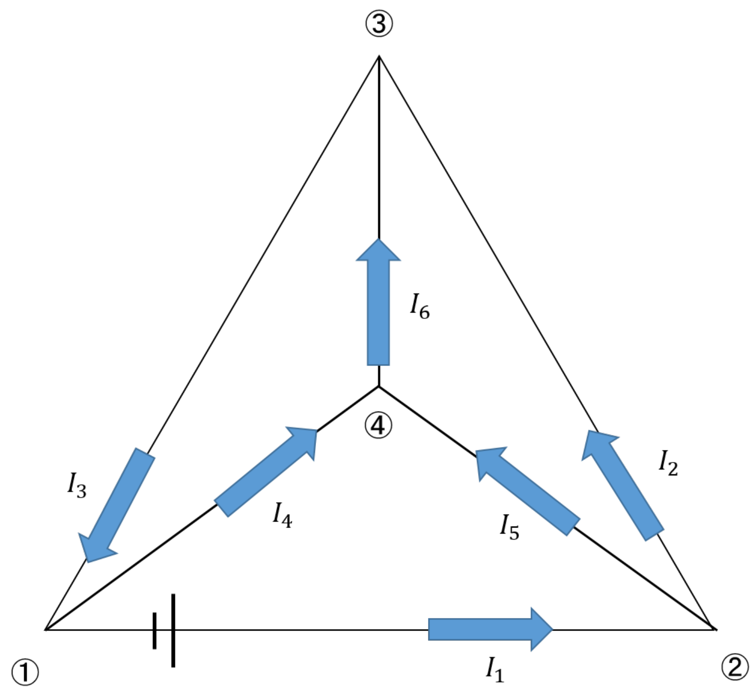
生起行列と**Kirchhoff**の法則

1. 全ての端点で入ってくる電流の和は出ていく電流の輪に等しい$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$
2. 全ての閉回路を一巡すれば、電圧降下の和は0である$\sum_{i=1}^{N} V_i = 0$

これらはグラフ理論に関係している

（端点がどのように結ばれているかとその方向に依存し、回路の抵抗には依存しない）

端点間の結合はグラフの生起行列によって記述できる



この図の生起行列は

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、行が端点1~4に、列が枝1~6に対応、+1と−1は枝の始点と終点を表す

また、6つの電流によって構成される列ベクトルをIとすると、キルヒホッフの第一法則により

$$MI = 0$$

となる⇒6つの未知数を持つ4つの方程式

電圧降下に関しては、端点の電圧をp_i、電圧降下をEとすると電位ベクトルpを用いて

$$M^T p = E$$

となる

このことから、IはMの零空間にあり、EはMの行空間にある

また、零空間と行空間は直交しているので、

$$E^T I = 0$$

2.5.15

例より

$$\begin{aligned} p_2 - p_3 &= p_3 - p_1 = 5 \\ p_3 &= p_4 \end{aligned}$$

となり、

$$p_1 = 0$$

より

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_2 &= 10 \\ p_3 &= 5 \\ p_4 &= 5 \end{aligned}$$

```
clear
M = [1,0,-1,1,0,0;-1,1,0,0,1,0;0,-1,1,0,0,-1;0,0,0,-1,-1,1]
```

```
M =
     1     0    -1     1     0     0
    -1     1     0     0     1     0
     0    -1     1     0     0    -1
     0     0     0    -1    -1     1
```

```
p = [0;10;5;5]
```

```
p =
     0
    10
     5
     5
```

```
E = M' * p
```

```
E =
   -10
     5
```

```
     5
    -5
     5
     0
```

```
I = [2;1;1;-1;1;0]
```

```
I =
     2
     1
     1
    -1
     1
     0
```

```
E' * I
```

```
ans =
     0
```

2.5.16