

## 部分空間の上への射影と最小2乗近似

### 最小2乗解

1つの未知数をもつ問題  $ax = b$  の最小2乗解は

$$\bar{x} = \frac{a^T b}{a^T a}$$

である。

幾何学的には、この解は  $a$  を通る直線上の、 $b$  に最も近い点、 $p = \bar{x}a$  と同一

### 3.2.1

```
mean([150,153,150,151])
```

```
ans =  
    151
```

### 3.2.2

```
clear  
a = [3,4]
```

```
a =  
     3     4
```

```
b = [10,5]
```

```
b =  
    10     5
```

```
dot(a,b)/dot(a,a)
```

```
ans =  
     2
```

### 多変数の最小2乗問題

$$Ax = b$$

この時、誤差ベクトル  $E$  は

$$E = \|Ax - b\|$$

となり、これを最小とする最小2乗解は列空間内の  $b$  にもっとも近い点  $p = A\bar{x}$  の位置を求めることと同義

また、誤差ベクトルはその部分空間に直角でなければならない

まとめると

1. 対象となる部分空間は、 $A$ の列空間である。
2. 誤差ベクトル $b - A\hat{x}$ はその列空間に直交する。
3. つまり、 $b - A\hat{x}$ は $A^T$ の零空間に存在する $\Rightarrow A^T(b - A\hat{x}) = 0$

正規方程式

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

もし、 $A$ の列が線形独立（可逆）ならば、

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

よって

$$p = A\hat{x} = A(A^T A)^{-1} A^T b$$

### 3.2.3

```
clear
A = [1,0;0,1;1,1]
```

```
A =
     1     0
     0     1
     1     1
```

```
b = [1;1;0]
```

```
b =
     1
     1
     0
```

```
t1 = A'*A
```

```
t1 =
     2     1
     1     2
```

```
t2 = t1^-1 * A'
```

```
t2 =
    2/3    -1/3    1/3
   -1/3    2/3    1/3
```

```
t2 * b
```

```
ans =
    1/3
```

1/3

```
A = [1;1;1]
```

A =

1  
1  
1

```
b = [1;3;5]
```

b =

1  
3  
5

```
t1 = A'*A
```

t1 =

3

```
t2 = t1^-1 * A'
```

t2 =

1/3                      1/3                      1/3

```
t2 * b
```

ans =

3

### 3.2.4

```
clear  
A = [1,0;0,1;1,1]
```

A =

1                      0  
0                      1  
1                      1

```
b = [1;3;4]
```

b =

1  
3  
4

```
syms u v  
x = [u;v]
```

x =

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

```
norm(A*x-b)^2
```

$$\text{ans} = |u - 1|^2 + |v - 3|^2 + |u + v - 4|^2$$