2.4 4つの基本部分空間

基底を具体的に求める

以下、$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathrm{m}1} & \cdots & a_{\mathrm{mn}} \end{bmatrix}$とする

1 Aの行空間

$A = LU$とすると（Uは階段形行列）Uの次元は階数r、基底はr行の0でない行

Aの次元と基底はUと同じで、行空間も同じ

2 Aの零空間

$Ax = 0$ならば$Ux = 0$なので、Aの零空間とUの零空間は同じ

$$x = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix}$$

上記の場合、基底は$v = 1, y = 0$の時$x_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$となり、$v = 0, y = 1$の時$x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$の二つ

また、線形結合$c_1x_1 + c_2x_2$の$c_1 = v, c_2 = y$なので、一般解が結合となり、零空間を張る

零空間は**A**の核とよばれ、Aの零空間の次元を**A**の退化次数と呼ぶ

つまり退化次数$\nu(A) = n - r$

3 Aの列空間

Aの値域とも呼ばれる

考え方①

Aの列を行としてもつ新しい行列を考える。（つまりA^T)

この時、$(A^T)_{\mathrm{ij}} = A_{\mathrm{ji}}$となる（鏡像）⇒言い方を変えるとAの行空間は$A^T$の列空間

```
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33
A = [a11,a12,a13;a21,a22,a23;a31,a32,a33]
```

A =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

```
At = transpose(A)
```

At =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

だが、この考え方は新しいA^Tの階数という数が出てきてしまい、好ましくない。

考え方②

列空間の場合、Aの列空間とUの列空間は同じではない（消去によって行空間と零空間は変わらないが列空間は変わってしまう）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

しかし、Uのある列がUの列空間の基底となっている場合、その列に対応するAの列はAの列空間の基底となる

<u>列空間の次元は階数**r**に等しく、行空間の次元と等しい＝行空間と列空間とが同じ次元をもつ</u>

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この時、列の独立性は、$c_1 \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} * \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$ が $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ でしか成り立たないことから証明される

4 A^Tの零空間

$A^T y = 0$のすべてのベクトルyからなる部分空間

$A^T y = 0$を転置すると$y^T A = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_m \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$となりこの方程式を満たす行ベクトル$y^T$はAの左零化ベクトルという

上記の式より、Aの行ベクトルは重み$y_1, \cdots y_m$によって0の行となる。

階数＋退化次数 = 列空間の次元 + 零空間の次元
= 列の個数

補足）退化次数=n(列数) − r(階数)

これをA^Tに当てはめると、Aの行空間がA^Tの列空間になるので、左零化ベクトルA^Tの次元は$m - r$となる

基底は$PA = LU$もしくは$L^{-1}PA = U$から階数がrなので、Uの最後から$m - r$行は0となり、$L^{-1}P$の最後から$m - r$行が左零空間の1組の基底となる

線形代数の基本定理（その1）

1. Aの行空間：r次元
2. Aの零空間：n-r次元
3. Aの列空間：r次元
4. Aの左零空間：m-r次元

2.4.1

等しいのは次元のみ

2.4.2

```
clear
A = [0,1,4,0;0,2,8,0]
```

```
A =

     0     1     4     0
     0     2     8     0
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =

     1     0
    -2     1
```

-

```
U = E21 * A
```

```
U =

     0     1     4     0
     0     0     0     0
```

```
syms u v w y
U * [u;v;w;y]
[u;-4*w;w;y]
```

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} v + 4\,w \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
ans =
```

$$\begin{pmatrix} u \\ -4\,w \\ w \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r = 1, m = 2, n = 4$ なので

1. 1次元 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
2. 3次元 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. 1次元 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
4. 1次元 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2.4.3

```
clear
A = [1,2,0,1;0,1,1,0;1,2,0,1]
```

```
A =
     1     2     0     1
     0     1     1     0
     1     2     0     1
```

-

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = -1
```

```
E31 =
     1     0     0
     0     1     0
    -1     0     1
```

```
U = E31 * A
```

```
U =
     1     2     0     1
     0     1     1     0
     0     0     0     0
```

-

```
syms u v w y
eqn = U * [u;v;w;y]
```

eqn =

$$\begin{pmatrix} u + 2\,v + y \\ v + w \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
solve(eqn(2)==0,v)
```

ans = $-w$

```
solve(eqn(1),u)
```

ans = $-2\,v - y$

$$x = \begin{bmatrix} 2w - y \\ -w \\ w \\ y \end{bmatrix} = w\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```

```

1. 2次元、$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$
2. 2次元、$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. 2次元、$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
4. 1次元、$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

2.4.4

```
clear
A = [0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1;0,0,0,0]
```

A =

```
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
```

```
A * [1;0;0;0]
transpose(A) * [0;0;0;1]
```

```
ans =
     0
     0
     0
     0
ans =
     0
     0
     0
     0
```

-

1. $\begin{bmatrix} 0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & d_3 & 0 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.4.5

$AB = 0$ ならば、BはAのすべての列を0にする

よってBはAの零空間に含まれる

2.4.6

2.4.7

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{c}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$
$$d = \frac{\mathrm{bc}}{a}$$

2.4.8

```
clear
A = [2,-2;4,-4;0,0]
```

```
A =
     2    -2
     4    -4
     0     0
```

-

```
B = [1,1,2;3,3,6]
```

```
B =
     1     1     2
     3     3     6
```

-

```
u = [1;2;0]
```

```
u =
     1
     2
     0
```

-

```
v = [2,-2]
```

```
v =
     2    -2
```

-

```
w = [1;3]
```

```
w =
     1
     3
```

-

```
z = [1,1,2]
```

```
z =
     1     1     2
```

```
x = u*z
```

```
x =
     1     1     2
     2     2     4
     0     0     0
```

-

```
A*B
```

```
ans =
    -4    -4    -8
    -8    -8   -16
     0     0     0
```

•

ABの積はuzの乗数倍である

```
y = dot(v,w)
```

```
y = -4
```

```
x * y
```

```
ans =
    -4    -4    -8
    -8    -8   -16
     0     0     0
```

•

以上より、 AB = uz $* \, v \cdot w$ となる

2.4.9

```
clear
A = [2,-2;4,-4;0,0]
```

```
A =
     2    -2
     4    -4
     0     0
```

•

```
E21 = eye(3);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =
     1     0     0
    -2     1     0
     0     0     1
```

•

```
U = E21*A
```

```
U =
     2    -2
     0     0
     0     0
```

•

行空間

基底(2,-2)の 1 次元

```
syms u v
eqn = U * [u;v]
```

eqn =

$$\begin{pmatrix} 2u - 2v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

逆行列の存在

存在：列が$\boldsymbol{R}^m$を張るとき（$r = m$）かつ$Ax = b$はすべてのbに対して少なくとも１つの解をもつ

この時、積がm次の単位行列$AC = I_m$となる$n \times m$の右逆行列Cが存在する（$m \leq n$のみ可能）

一意性：列が線形独立($r = n$)のときかつ$Ax = b$はすべてのbに対して多くて1つの解をもつ

この時、積がn次の単位行列$BA = I_n$となる$n \times m$の左逆行列Bが存在する($m \geq$ nのみ可能)