直交基底、直交行列、Gram–Schmidtの直行化法

正規直交

ベクトル$q_1 \cdots q_n$は

$$q_i^T q_j \begin{cases} 0 & i \neq j (\text{直交ベクトル}) \\ 1 & i = j (\text{単位ベクトル：} \|q_i\| = 1) \end{cases}$$

射影と最小2乗：正規直交の場合

もしAの列が正規直交ならば

$$A^T A = \begin{bmatrix} \cdots & a_1^T & \cdots \\ \cdots & a_2^T & \cdots \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & a_n^T & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

これにより、射影行列は

$$P = \mathrm{AA}^T, \ \ \bar{x} = A^T b$$

となる