2.2 未知数 n の方程式 m の解

長方形の行列に対する消去法

例

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
clear
A = [1,3,3,2; 2,6,9,5; -1,-3,3,0]
```

```
A =
     1     3     3     2
     2     6     9     5
    -1    -3     3     0
```

```
E21 = eye(3);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =
     1     0     0
    -2     1     0
     0     0     1
```

```
U1 = E21*A
```

```
U1 =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
    -1    -3     3     0
```

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = 1
```

```
E31 =
     1     0     0
     0     1     0
     1     0     1
```

```
U2 = E31 * U1
```

```
U2 =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     6     2
```

```
E32 = eye(3);
E32(3,2) = -2
```

```
E32 =
     1     0     0
     0     1     0
     0    -2     1
```

-

```
U3 = E32 * U2
```

```
U3 =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     0     0
```

-

ここで、U3は上台形行列となる

```
E32*E31*E21
```

```
ans =
     1     0     0
    -2     1     0
     5    -2     1
```

-

```
L = ans^-1
```

```
L =
    1.0000         0         0
    2.0000    1.0000         0
   -1.0000    2.0000    1.0000
```

-

```
L*U3
```

```
ans =
    1.0000    3.0000    3.0000    2.0000
    2.0000    6.0000    9.0000    5.0000
   -1.0000   -3.0000    3.0000    0.0000
```

-

$A = LU$の関係は今まで通り成り立つ

行の交換を行った場合、交換行列をPとすると$PA = LU$の関係になる

Uは上台形行列

```
syms u v w y
x = [u;v;w;y]
```

```
x =
```

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix}$$

```
exp = U3*x==[0;0;0]
```

exp =

$$\begin{pmatrix} u + 3\,v + 3\,w + 2\,y = 0 \\ 3\,w + y = 0 \\ 0 = 0 \end{pmatrix}$$

この時、uとwは0でないピボットをもつ列に対応する未知数（基底変数）である

また、vとyはピボットのない列に対応する未知数（自由変数）である

この方程式で一般な解を得るためには自由変数に任意の値を与えればよい

```
sol = solve(exp,u,w)
```

sol = フィールドをもつ *struct:*

```
u: [1×1 sym]
w: [1×1 sym]
```

```
x = [sol.u;v;sol.w;y]
```

x =

$$\begin{pmatrix} -3\,v - y \\ v \\ -\frac{y}{3} \\ y \end{pmatrix}$$

自由変数を含む解はこうなる

また、

$$x = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

となり、すべての解はこの2つのベクトルの線形結合となる

```

```

2.2.1

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h & i \\ 0 & j & k & l & m & n & o & p & q \\ 0 & 0 & r & s & t & u & v & w & x \\ 0 & 0 & 0 & y & z & \mathrm{aa} & \mathrm{bb} & \mathrm{cc} & \mathrm{dd} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{ee} & \mathrm{ff} & \mathrm{gg} & \mathrm{hh} & \mathrm{ii} \end{bmatrix}$$

```
clear
A = [1,1;0,0]
```

```
A =

     1     1
     0     0
```

-

```
B = [-1,0;0,1]
```

```
B =

    -1     0
     0     1
```

```
A + B
```

```
ans =

     0     1
     0     1
```

P62

```
clear
syms u v w y b1 b2 b3
x = [u;v;w;y]
```

x =

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix}$$

```
b = [b1;b2;b3]
```

b =

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

```
A = [1,3,3,2; 2,6,9,5; -1,-3,3,0]
```

```
A =

     1     3     3     2
     2     6     9     5
```

```
    -1    -3     3     0
```

```
E21 = eye(3);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =
     1     0     0
    -2     1     0
     0     0     1
```

```
U1 = E21*A
```

```
U1 =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
    -1    -3     3     0
```

-

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = 1
```

```
E31 =
     1     0     0
     0     1     0
     1     0     1
```

```
U2 = E31 * U1
```

```
U2 =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     6     2
```

```
E32 = eye(3);
E32(3,2) = -2
```

```
E32 =
     1     0     0
     0     1     0
     0    -2     1
```

```
U3 = E32 * U2
```

```
U3 =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     0     0
```

```
E32*E31*E21
```

```
ans =
     1     0     0
    -2     1     0
     5    -2     1
```

-

```
L = ans^-1
```

```
L =
    1.0000         0         0
    2.0000    1.0000         0
   -1.0000    2.0000    1.0000
```

```
c = L^-1 * b
```

c =

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2\,b_1 \\ 5\,b_1 - 2\,b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 - 2\,b_1 \\ 5\,b_1 - 2\,b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

2.2.2

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

2.2.3

```
clear
A = [1,2,0,1;0,1,1,0;1,2,0,1]
```

```
A =
     1     2     0     1
     0     1     1     0
     1     2     0     1
```

-

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = -1
```

```
E31 =
     1     0     0
     0     1     0
    -1     0     1
```

-

```
U = E31*A
```

```
U =
     1     2     0     1
     0     1     1     0
```

```
     0     0     0     0
```

```
L = E31^-1
```

```
L =

     1     0     0
     0     1     0
     1     0     1
```