ベクトルおよび部分空間の直行性

ベクトルの長さ

n次元ベクトル$x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$の長さ$\|x\|$は

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

の正の平方根

ベクトルの内積

$$x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

ベクトルが直交するとき内積は**0**

2.5.1

```
clear
x = [1,4,0,2]'
```

```
x =
       1
       4
       0
       2
```

```
y = [2,-2,1,3]'
```

```
y =
       2
      -2
       1
       3
```

```
x_lng = 1^2 + 4^2 + 2^2
```

```
x_lng =
      21
```

```
y_lng = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2
```

```
y_lng =
      18
```

```
dot(x,y) % x'*y
```

```
ans =
```

```
         0
```

2.5.2

$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$は独立だが、直交していない

$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$は直交しているが独立でない

2.5.3

$$\frac{x_2}{x_1} \times \frac{y_2}{y_1} = -1$$

$$\frac{x_2 y_2}{x_1 y_1} = -1$$

$$x_2 y_2 = -x_1 y_1$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

ここで、

$$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

なので、

直交性の条件と等しい

2.5.4

$$B * B^{-1} = I$$

なので$i \neq j$ならばI_{ij}は0でなくてはならない

よって直交している

2.5.5

```
clear
v1 = [1,2,-2,1]'
```

```
v1 =
         1
         2
        -2
         1
```

```
v2 = [4,0,4,0]'
```

```
v2 =
         4
         0
```

```
     4
     0
```

```
v3 = [1,-1,-1,-1]'
```

```
v3 =
     1
    -1
    -1
    -1
```

```
dot(v1,v2)
```

```
ans =
    -4
```

```
dot(v1,v3)
```

```
ans =
     0
```

```
dot(v2,v3)
```

```
ans =
     0
```

2.5.6

```
clear
x = [1,1,1]'
```

```
x =
     1
     1
     1
```

```
y = [1,-1,0]'
```

```
y =
     1
    -1
     0
```

```
syms u v w
b = [u;v;w]
```

b =

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

```
eqn1 = dot(x,b) == 0
```

eqn1 = $u + v + w = 0$

```
eqn2 = dot(y,b) == 0
```

eqn2 = $u - v = 0$

$$u = v$$
$$2v + w = 0$$
$$w = -2v$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} v$$

よって$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T$の乗数倍が直交
また単位ベクトルは

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

直交部分空間

部分空間VとWが直交する条件は「Vのすべてのベクトルv_nがWのすべてのベクトルw_nと直交している」

例

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

で張られる空間VとWは、w_1がv_1, v_2と直交するので直線Wは平面Vに直交している