# 2つの部分空間と行列の積

$V$ と $W$ とを同じベクトル空間の部分空間とすると、$V \bigcap W$ もそのベクトル空間の部分空間となる

①もし$V$と$W$が直交していたら、共通集合は部分空間$\{0\}$となる

②$n \times n$行列の集合をベクトル空間とし、上3角行列と下3角行列をそれぞれ部分空間$V, W$とすると、共通集合は$n \times n$の対角行列からなる部分空間となる

③$V$を$k \times n$行列$A$の零空間、$W$を$l \times n$行列$B$の零空間とすると$V \cap W$は$A$の$k$個の行と$B$の$l$個の行とで構成される行列

$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

の零空間

証明）

$$Cx = 0$$
$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = 0$$

より

$$Ax = 0, Bx = 0$$

$V$ と $W$ とを同じベクトル空間の部分空間とすると、その和 $V + W$ もまた部分空間である

和は$v, w$をそれぞれ $V, W$ の任意のベクトル、とすると全ての可能な結合$x = v + w$からなる

これは$V \cup W$によって張られる空間⇒$V$と$W$を含む最小の部分空間

$V$が行列$A$の列空間で、$W$が行列$B$の列空間とすると$V + W$は結合された行列$Q = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$の列空間である

この時、V+Wの次元の和がQの階数となる

また、

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$$

**2.6.1**

$$V = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{bmatrix}$$

$$V \cap W = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & 0 & g \end{bmatrix}$$

$$V + W = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & i & j & k \\ 0 & 0 & l & m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\dim(V + W) = 13 \\ &\dim(V \cap W) = 7 \\ &\dim(V) = 10 \\ &\dim(W) = 10 \end{aligned}$$

よって

$$\dim(V + W) + \dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W)$$

## 2.6.2

$V \cap W = \{0\}$ということは、$V$と$W$は直交している

$$\begin{aligned} &x = v + w \\ &x = \mathrm{v'} + \mathrm{w'} \\ &v + w = \mathrm{v'} + \mathrm{w'} \\ &v - \mathrm{v'} = \mathrm{w'} - w \end{aligned}$$

このとき、このベクトルは$V \cap W$に属するので、0

よって

$$\begin{aligned} &v = \mathrm{v'} \\ &w = \mathrm{w'} \end{aligned}$$

## 2.6.3

$$V \oplus W = R^4$$

$V$ と $W$ は直交、よって $\dim(V+W)=\dim(V)+\dim(W)$ なので、$\dim(W)=2$

直和なので $V$ を張るベクトルと $W$ を張るベクトルがそれぞれ独立ならばよい

$$\begin{bmatrix} x & 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & b & 1 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

の第1列と第2列が $W$ となる $(x \neq 0, y \neq 0)$

### 2.6.4

```
clear
A = [1,1,0,0;1,0,1,0;0,1,0,1;0,0,1,1]'
```

```
A =
     1     1     0     0
     1     0     1     0
     0     1     0     1
     0     0     1     1
```

```
E21 = eye(4);
E21(2,1) = -1
```

```
E21 =
     1     0     0     0
    -1     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
U = E21 * A
```

```
U =
     1     1     0     0
     0    -1     1     0
     0     1     0     1
     0     0     1     1
```

- 

```
E32 = eye(4);
E32(3,2) = 1
```

```
E32 =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     1     1     0
     0     0     0     1
```

- 

```
U = E32 * U
```

```
U =
     1     1     0     0
```

```
     0    -1     1     0
     0     0     1     1
     0     0     1     1
```

- 

```
E43 = eye(4);
E43(4,3) = -1
```

```
E43 =
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0    -1     1
```

```
U = E43 * U
```

```
U =
     1     1     0     0
     0    -1     1     0
     0     0     1     1
     0     0     0     0
```

よって、$\dim(V+W)=3$

基底は$v_1, v_2, w_1$

$\dim(V\cap W)=1$

基底は$v_1 - v_2$

### 2.6.5

積**AB**の基本部分空間

(i) $AB$の零空間は$B$の零空間を含む

$$Bx = 0$$
ならば
$$ABx = 0$$

(ii)$AB$の列空間は$A$の列空間に含まれる

$$ABx = b$$
$$y = Bx$$
とすると
$$Ay = b$$

(iii)$AB$の左零空間は$A$の左零空間を含む

$(AB)^T = B^T A^T$

なので、$(i)$より

$A^T x = 0$

ならば

$B^T A^T x = 0$

(iv)$AB$の行空間は$B$の行空間に含まれる

$(AB)^T = B^T A^T$

なので、$(\mathrm{ii})$より成立

### 2.6.6

```
clear
A = [0,1,1;0,0,1;0,0,0]
```

```
A =
       0              1              1
       0              0              1
       0              0              0
```

```
B = A'
```

```
B =
       0              0              0
       1              0              0
       1              1              0
```

```
AB = A*B
```

```
AB =
       2              1              0
       1              1              0
       0              0              0
```

```
E21 = eye(3);
E21(2,1) = -1/2
```

```
E21 =
       1              0              0
     -1/2             1              0
       0              0              1
```

```
U = E21 * AB
```

```
U =
       2              1              0
       0             1/2             0
       0              0              0
```

この場合、Aの零空間は $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ 、ABの零空間は $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$

よって含まない

列空間も同様に B が $\begin{bmatrix}0\\u\\u-v\end{bmatrix}$ 、ABが $\begin{bmatrix}2u+v\\u+\frac{3}{2}v\\0\end{bmatrix}$

よって含まれない

### 2.6.7

```
clear
A = [0,0]
```

```
A =
     0     0
```

```
B = A'
```

```
B =
     0
     0
```

```
AB = A*B
```

```
AB =
     0
```

### 2.6.8

```
clear
A = [0,1,4,0;0,2,8,0]
```

```
A =
     0     1     4     0
     0     2     8     0
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =
     1     0
    -2     1
```

```
U = E21*A
```

```
U =
```

```
     0     1     4     0
     0     0     0     0
```

```
Ub = U(1,:)
```

```
Ub =
     0     1     4     0
```

```
L = E21^-1
```

```
L =
     1     0
     2     1
```

```
Lb = L(:,1)
```

```
Lb =
     1
     2
```

```
Lb*Ub
```

```
ans =
     0     1     4     0
     0     2     8     0
```

### 2.6.9

```
clear
A = [0,0;1,2;4,8;0,0]
```

```
A =
     0     0
     1     2
     4     8
     0     0
```

```
P123 = [0,1,0,0;0,0,1,0;1,0,0,0;0,0,0,1]
```

```
P123 =
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     1     0     0     0
     0     0     0     1
```

```
PA = P123 * A
```

```
PA =
     1     2
     4     8
     0     0
     0     0
```

```
E21 = eye(4);
E21(2,1) = -4
```

```
E21 =

     1     0     0     0
    -4     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
U = E21 * PA
```

```
U =

     1     2
     0     0
     0     0
     0     0
```

```
L = E21^-1
```

```
L =

     1     0     0     0
     4     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
Pin = P123^-1
```

```
Pin =

     0     0     1     0
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     0     1
```

```
Ub = U(1,:)
```

```
Ub =

     1     2
```

```
Lb = L(:,1)
```

```
Lb =

     1
     4
     0
     0
```

```
Pin * Lb * Ub
```

```
ans =

     0     0
     1     2
     4     8
     0     0
```

## 2.6.10

```
clear
A = [1,3,3,2;2,6,9,5;-1,-3,3,0]
```

```
A =

     1     3     3     2
     2     6     9     5
    -1    -3     3     0
```

```
E21 = eye(3);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =

     1     0     0
    -2     1     0
     0     0     1
```

```
U = E21 * A
```

```
U =

     1     3     3     2
     0     0     3     1
    -1    -3     3     0
```

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = 1
```

```
E31 =

     1     0     0
     0     1     0
     1     0     1
```

```
U = E31 * U
```

```
U =

     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     6     2
```

```
E32 = eye(3);
E32(3,2) = -2
```

```
E32 =

     1     0     0
     0     1     0
     0    -2     1
```

```
U = E32 * U
```

```
U =

     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     0     0
```

```
Lin = E32 * E31 * E21;
L = Lin^-1
```

```
L =

     1     0     0
     2     1     0
```

```
    -1        2        1
```

```
Ub = U(1:2,:)
```

```
Ub =
     1        3        3        2
     0        0        3        1
```

```
Lb = L(:,1:2)
```

```
Lb =
     1        0
     2        1
    -1        2
```

```
Lb*Ub
```

```
ans =
     1        3        3        2
     2        6        9        5
    -1       -3        3        *
```

```
Lb1 = Lb(:,1)
```

```
Lb1 =
     1
     2
    -1
```

```
Lb2 = Lb(:,2)
```

```
Lb2 =
     0
     1
     2
```

```
Ub1 = Ub(1,:)
```

```
Ub1 =
     1        3        3        2
```

```
Ub2 = Ub(2,:)
```

```
Ub2 =
     0        0        3        1
```

```
Lb1*Ub1+Lb2*Ub2
```

```
ans =
     1        3        3        2
     2        6        9        5
    -1       -3        3        *
```

### 2.6.11

逆可能=特異でない なので

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Aの階数が1なので、部分行列は階数1の1x1行列

## 2.6.12

$\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(B) \leq n$となるが、$AB$は$m \times m$行列であり、$n < m$なので、$\mathrm{rank}(AB) < m$となり、特異