ベクトルおよび部分空間の直行性

ベクトルの長さ

n次元ベクトル$x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$の長さ$\|x\|$は

$$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

の正の平方根

ベクトルの内積

$$x^T y = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

ベクトルが直交するとき内積は**0**

2.5.1

```
clear
x = [1,4,0,2]'
```

```
x =
     1
     4
     0
     2
```

```
y = [2,-2,1,3]'
```

```
y =
     2
    -2
     1
     3
```

```
x_lng = 1^2 + 4^2 + 2^2
```

```
x_lng =
    21
```

```
y_lng = 2^2 + 2^2 + 1^2 + 3^2
```

```
y_lng =
    18
```

```
dot(x,y) % x'*y
```

```
ans =
```

```
        0
```

2.5.2

$\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$は独立だが、直交していない

$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$は直交しているが独立でない

2.5.3

$$\frac{x_2}{x_1} \times \frac{y_2}{y_1} = -1$$
$$\frac{x_2 y_2}{x_1 y_1} = -1$$
$$x_2 y_2 = -x_1 y_1$$
$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$$

ここで、

$$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

なので、

直交性の条件と等しい

2.5.4

$$B * B^{-1} = I$$

なので$i \neq j$ならばI_{ij}は0でなくてはならない

よって直交している

2.5.5

```
clear
v1 = [1,2,-2,1]'
```

```
v1 =
        1
        2
       -2
        1
```

```
v2 = [4,0,4,0]'
```

```
v2 =
        4
        0
```

```
     4
     0
```

```
v3 = [1,-1,-1,-1]'
```

```
v3 =

     1
    -1
    -1
    -1
```

```
dot(v1,v2)
```

```
ans =
    -4
```

```
dot(v1,v3)
```

```
ans =
     0
```

```
dot(v2,v3)
```

```
ans =
     0
```

2.5.6

```
clear
x = [1,1,1]'
```

```
x =

     1
     1
     1
```

```
y = [1,-1,0]'
```

```
y =

     1
    -1
     0
```

```
syms u v w
b = [u;v;w]
```

b =

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

```
eqn1 = dot(x,b) == 0
```

eqn1 = $u + v + w = 0$

```
eqn2 = dot(y,b) == 0
```

eqn2 = $u - v = 0$

$$
\begin{aligned}
&u = v \\
&2v + w = 0 \\
&w = -2v
\end{aligned}
$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} v$$

よって $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}^T$ の乗数倍が直交

また単位ベクトルは

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}
$$

直交部分空間

部分空間VとWが直交する条件は「Vのすべてのベクトルv_nがWのすべてのベクトルw_nと直交している」

例

$$
\begin{aligned}
&v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&w_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

で張られる空間VとWは、w_1がv_1, v_2と直交するので直線Wは平面Vに直交している

2.5.7

```
clear
v1 = [1,0,0,0]
```

```
v1 =
     1     0     0     0
```

```
v2 = [1,1,0,0]
```

```
v2 =
       1             1             0             0
```

```
w1 = [0,0,4,5]
```

```
w1 =
       0             0             4             5
```

```
syms a
w2 = [0,0,0,a]
```

w2 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

```
dot(v1,w2)
```

ans = 0

```
dot(v2,w2)
```

ans = 0

```
syms a b c d
v3 = [0,0,5,-4]
```

```
v3 =
       0             0             5            -4
```

```
dot(w1,v3)
```

```
ans =
       0
```

2.5.8

V と W が直交するということは、それぞれに含まれるベクトル同士の内積がすべて0でなければならない

もし、0ベクトル以外の共通ベクトルがあると、自身で内積をとることになるが、内積は0ベクトルでない限り0にならない

よって、$V \cap W = \{0\}$ となる

基本部分空間の直交について

任意の $m \times n$ 行列 A について、零空間と行空間は $\boldsymbol{R}^n$ の直行する部分空間である

同様に、左零空間と列空間は $\boldsymbol{R}^m$ の直交部分空間である

例

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基底変数は第2列、他が自由変数

この時、順に各自由変数を1とおき、$Ux = 0$を解くとAの零空間の基底を得られる

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

上記定理より、これらはすべてAの行と直交している

また、Aの列空間は 1 次元であり、基底変数の列$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$だけで張られる

左零空間は、$y^T A = 0$より$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix}$となる

そして、これらは

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

となり、直交している

また、零空間は行空間に直交するすべてのベクトルを含む

そのような空間を「直交補空間」とよぶ

線形代数の基本定理（その2）

1. 零空間は行空間の直交補空間であり、行空間は零空間の直交補空間
2. 左零空間は列空間の直交補空間であり、列空間は左零空間の直交補空間

$Ax = b$が解をもつのはbが左零空間に直交しているときに限る

bが列空間にあるのは、$A^T y = 0$のすべての解yにbが直交しているときに限る

VとWが$\boldsymbol{R}^n$の部分空間の場合、以下の条件のうち1つを満たせば直交補空間となる

1. $W = V^{\perp}$
2. $V = W^{\perp}$
3. VとWは直交しており、かつ$\mathrm{dimV} + \mathrm{dimW} = n$