2.1 ベクトル空間と部分空間

例**1**

$\boldsymbol{S}$はあるベクトルv（例えば$\begin{bmatrix}1 & 4 & -2\end{bmatrix}$）のすべての乗数倍からなる集合とすると、$\boldsymbol{S}$は《3次元空間$\mathbf{R}^3$の直線》

この直線は原点を通る

この集合の任意の2つのベクトルは必ず同一直線上に存在するので部分空間となる

例**2**

$\boldsymbol{S}$は2つのベクトル$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$と$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$のみを含む

この時、例えば$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$の乗数倍$5\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$は$\boldsymbol{S}$には存在しないので、部分空間の条件(2)を満たさない

また、$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$も$\boldsymbol{S}$には存在しないので条件(1)も満たさない

例**3**

$\boldsymbol{S}$はx軸に平行な1つの直線上にあるすべてのベクトルからなる集合とする

x成分は任意、$y = 3$ $z = 4$と固定されたベクトル

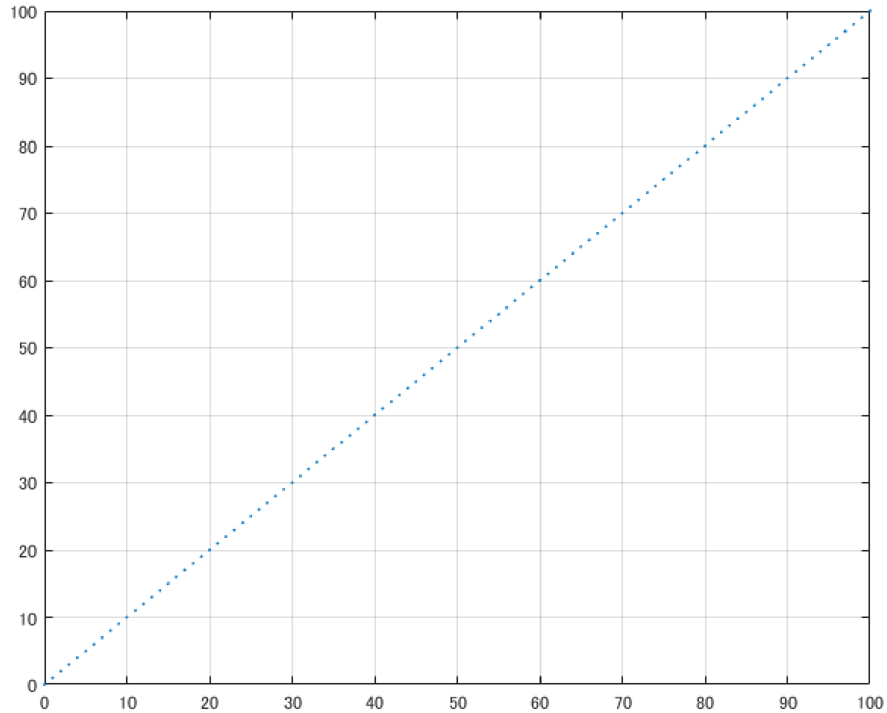
この集合は直線ではあるが、直線上の2つのベクトルの和は$y = 6$ $z = 8$となってしまい、条件(1)を満たさない

原点$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$は含まれていないが、0倍したときは原点を通らなければならないので条件(2)も満たさない

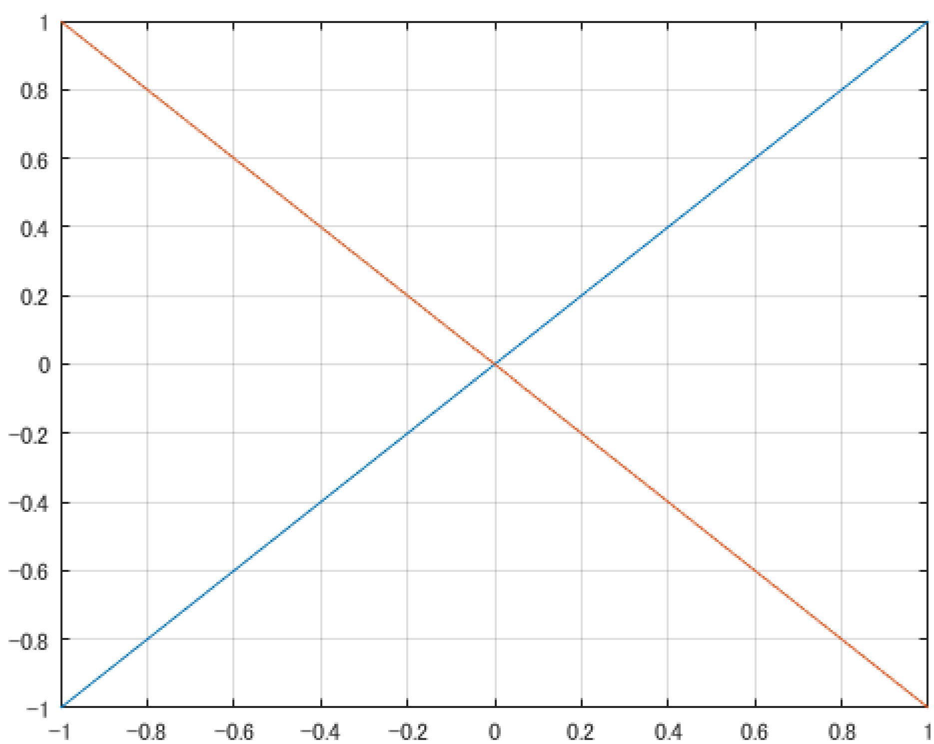
2.1.1

(a)等間隔で並んでいる、整数の点集合

点の感覚は等間隔なので、和に閉じているが、例えば0.1とかを掛けると集合に含まれないのでスカラー倍に閉じていない



(b)例えば$x^2 - y^2 = 0$



2.1.2

(a)原点を通るY-Z平面なので、条件(i)も(ii)も満たす

(b)原点を通らないのでスカラー倍の条件を満たさない（$0 \in W$が満たされない）

(c)謎

(d)スカラー倍が成り立つのはわかるが、一つしかベクトルがないので和に閉じている証明ができるのか謎

(e)謎

(f)$3b_1 - b_2 + b_3 = 0$、$3c_1 - c_2 + c_3 = 0$とすると$3(b_1 + c_1) - (b_2 + c_2) + (b_3 + c_3) = (3b_1 - b_2 + b_3) + (3c_1 - c_2 + c_3) = 0$となるので、和に閉じている

同様に、$3(\mathrm{ab}_1) - (\mathrm{ab}_2) + (\mathrm{ab}_3) = a(3b_1 - b_2 + b_3) = 0$となり、スカラー倍にも閉じている

2.1.3

$Ax = 0$、$Ay = 0$とすると、

$$A(x + y) = Ax + Ay = 0$$

となり和に閉じている

$$A(cx) = c(Ax) = 0$$

となり、スカラー倍にも閉じている

$b \neq 0$の場合、$0 \notin x$となり条件を満たさない