2.3 線形独立、基底、次元

例**1**

$c_1v_1 + \cdots + c_kv_k \neq 0$ の中で、v の中で一つでも0があれば与えらたベクトルは線形従属

例**2**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

この行列の3つの行をv_1, v_2, v_3とすると$5v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$なので、線形従属

これは、方程式が解をもつための条件

例**3**

$n \times n$ の単位行列 $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & 0 & 1 \end{bmatrix}$ の行は線形独立

行ベクトルを$e_1, e_2, \cdots e_n$で表す

$c_1e_1 + \cdots + c_ne_n = \left(c_1, \cdots, c_n\right)$となるので、cがすべて0の時以外は0ベクトルにならないから線形独立

ベクトル $v_1, v_2, \cdots v_k$ がある場合、$Ac = \left[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_k\right]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} = 0$ が自明でない解をもつときにベクトルは線形従属である

つまり、Aの階数がkであれば自由変数が存在せず、零空間も無くなる（$c = 0$は除く）ので線形独立となる

階数がkより小さければ、少なくとも1つは自由変数が存在し、0でない値を選択することが可能なので線形従属となる（上記例1参照）

上記の場合で、ベクトルvの成分をm個とした場合

$$Ac = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1\mathrm{m}} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_{\mathrm{k}1} & v_{\mathrm{k}2} & \cdots & v_{\mathrm{km}} \end{bmatrix}$$

このとき、$k > m$とすると階数はかならずkより小さくなる

よって$k > m$の場合、ベクトルは線形従属でなければならない

例5

```
clear
A = [1,2,1;1,3,2]
```

```
A =
     1     2     1
     1     3     2
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -1
```

```
E21 =
     1     0
    -1     1
```

```
U = E21*A
```

```
U =
     1     2     1
     0     1     1
```

2.3.1

```
clear
A = [1,1,0,0;1,0,0,1;0,1,1,0;0,0,1,1]
```

```
A =
     1     1     0     0
     1     0     0     1
     0     1     1     0
     0     0     1     1
```

```
E21 = eye(4);
E21(2,1) = -1
```

```
E21 =
     1     0     0     0
    -1     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0     0     1
```

```
U1 = E21*A
```

```
U1 =
     1     1     0     0
     0    -1     0     1
     0     1     1     0
```

```
     0     0     1     1
```

```
E32 = eye(4);
E32(3,2) = 1
```

```
E32 =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     1     1     0
     0     0     0     1
```

```
U2 = E32 * U1
```

```
U2 =

     1     1     0     0
     0    -1     0     1
     0     0     1     1
     0     0     1     1
```

```
E43 = eye(4);
E43(4,3) = -1
```

```
E43 =

     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
     0     0    -1     1
```

```
U = E43 * U2
```

```
U =

     1     1     0     0
     0    -1     0     1
     0     0     1     1
     0     0     0     0
```

この時、自由変数$c_4 = 1$とすると$-v_1 + v_2 - v_3 + v_4 = 0$となり線形従属

2.3.2

```
clear
A = [1,1;2,3;1,2]
```

```
A =

     1     1
     2     3
     1     2
```

```
E21 = eye(3);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =

     1     0     0
    -2     1     0
```

```
     0     0     1
```

```
U1 = E21 * A
```

```
U1 =
     1     1
     0     1
     1     2
```

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = -1
```

```
E31 =
     1     0     0
     0     1     0
    -1     0     1
```

```
U2 = E31 * U1
```

```
U2 =
     1     1
     0     1
     0     1
```

線形独立

2.3.3

どれかが0ならば、正方行列なので必ず$k > r$となり、自由変数が存在する。

よって線形従属となる

2.3.4

$$
\begin{aligned}
&c_1 w_1 + c_2 w_2 + c_3 w_3 = c_1 (v_1 + v_2) + c_2 (v_1 + v_3) + c_3 (v_2 + v_3) \\
&= (c_1 + c_2) v_1 + (c_1 + c_3) v_2 + (c_2 + c_3) v_3
\end{aligned}
$$

ここでvは線形独立なので

$$
\begin{aligned}
c_1 + c_2 &= 0 \\
c_1 + c_3 &= 0 \\
c_2 + c_3 &= 0
\end{aligned}
$$

となるので、これを満たすのは$c_i = 0$のみ

よってwも線形独立

例**10**

```
clear
U = [1,3,3,2;0,0,3,1;0,0,0,0]
```

```
U =
     1     3     3     2
     0     0     3     1
     0     0     0     0
```

列空間の規定は第1列と第3列

ピボットが0でない列

U の列空間は、この場合x-y平面となる

2.3.5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

列空間は $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ の乗数倍からなる直線

行空間は $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ と原点を通る直線

2.3.6

```
w1 = [1;0;0;0]
```

```
w1 =
     1
     0
     0
     0
```

```
w2 = [4;2;0;0]
```

```
w2 =
     4
     2
     0
     0
```

```
w4 = 7*w1 - w2
```

```
w4 =
     3
    -2
     0
```

```
     0
```

2.3.7

基底ベクトルは $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ になるこれならば、スカラー倍して足し合わせることで2*2行列の空間を再現することができる

2.3.8

たとえば

```
v1 = [1,1,0]
```

```
v1 =
     1     1     0
```

```
v2 = [0,0,1]
```

```
v2 =
     0     0     1
```

2.3.9

$v_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ は $\mathbf{R}^4$ の基底だが、W が $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix}$ を通る直線の部分空間だった場合、

v_i は W の基底にはならない

2.3.10

$$x = y = z = 0$$

$$x\left[1, 0, 0\right] = -y, z = 0$$

$$x\left[1, 0, 0\right], y = \left[0, 1, 0\right], z = \left[-1, -1, 0\right]$$

2.3.11

2.3.12

(i) 任意の線形独立なk個のベクトルは基底を構成する

定理2Lから、もし基底でない場合、さらにベクトルを加えて基底にできるが、次元がkなのでそれを超えてしまうので成立しない

よって、任意の線形独立なk個のベクトルは基底を構成する

(ii)Vを張る任意のk個のベクトルは規定を構成する

定理2Lから、もし基底でないならば、ベクトルを除いて基底にできるが、次元がkなのでそれより少ない集合では空間を張ることができない

よって、Vを張る任意のk個のベクトルは規定を構成する

2.3.13

2.3.14