

## 2.4 4つの基本部分空間

基底を具体的に求める

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

以下、

### 1 $A$ の行空間

$A = LU$  とすると ( $U$  は階段形行列)  $U$  の次元は階数  $r$ 、基底は  $r$  行の  $0$  でない行

$A$  の次元と基底は  $U$  と同じで、行空間も同じ

### 2 $A$ の零空間

$Ax = 0$  ならば  $Ux = 0$  なので、 $A$  の零空間と  $U$  の零空間は同じ

$$x = \begin{bmatrix} -3v - y \\ v \\ -\frac{1}{3}y \\ y \end{bmatrix}$$

$$v = 1, y = 0 \quad x_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = 0, y = 1 \quad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

上記の場合、基底は                      の時                      となり、                      の時                      の二つ

また、線形結合  $c_1x_1 + c_2x_2$  の  $c_1 = v, c_2 = y$  なので、一般解が結合となり、零空間を張る

零空間は  $A$  の核とよばれ、 $A$  の零空間の次元を  $A$  の退化次数と呼ぶ

つまり退化次数  $\nu(A) = n - r$

### 3 $A$ の列空間

$A$  の値域とも呼ばれる

考え方①

$A$  の列を行としてもつ新しい行列を考える。(つまり  $A^T$ )

この時、 $(A^T)_{ij} = A_{ji}$  となる (鏡像)  $\Rightarrow$  言い方を変えると  $A$  の行空間は  $A^T$  の列空間

```
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33
A = [a11,a12,a13;a21,a22,a23;a31,a32,a33]
```

A =

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^t = \text{transpose}(A)$$

$$A^t =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

だが、この考え方は新しい $A^T$ の階数という数が出てきてしまい、好ましくない。

考え方②

列空間の場合、 $A$ の列空間と $U$ の列空間は同じではない（消去によって行空間と零空間は変わらないが列空間は変わってしまう）

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

しかし、 $U$ のある列が $U$ の列空間の基底となっている場合、その列に対応する $A$ の列は $A$ の列空間の基底となる

列空間の次元は階数 $r$ に等しく、行空間の次元と等しい＝行空間と列空間とが同じ次元をもつ

$$U = \begin{bmatrix} d_1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & d_2 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} d_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} * \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} * \\ * \\ d_3 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

この時、列の独立性は、  
明される

が

でしか成り立たないことから証

#### 4 $A^T$ の零空間

$A^T y = 0$ のすべてのベクトル $y$ からなる部分空間

$A^T y = 0$ を転置すると $y^T A = [y_1 \ \dots \ y_m] A = [0 \ \dots \ 0]$ となりこの方程式を満たす行ベクトル $y^T$ は $A$ の左零化ベクトルという

上記の式より、 $A$ の行ベクトルは重み $y_1, \dots, y_m$ によって $0$ の行となる。

$$\begin{aligned}\text{階数} + \text{退化次数} &= \text{列空間の次元} + \text{零空間の次元} \\ &= \text{列の個数}\end{aligned}$$

補足) 退化次数 =  $n(\text{列数}) - r(\text{階数})$

これを  $A^T$  に当てはめると、 $A$  の行空間が  $A^T$  の列空間になるので、左零化ベクトル  $A^T$  の次元は  $m - r$  となる

基底は  $PA = LU$  もしくは  $L^{-1}PA = U$  から階数が  $r$  なので、 $U$  の最後から  $m - r$  行は  $\mathbf{0}$  となり、 $L^{-1}P$  の最後から  $m - r$  行が左零空間の  $1$  組の基底となる

## 線形代数の基本定理（その1）

1.  $A$  の行空間 :  $r$  次元
2.  $A$  の零空間 :  $n - r$  次元
3.  $A$  の列空間 :  $r$  次元
4.  $A$  の左零空間 :  $m - r$  次元

### 2.4.1

等しいのは次元のみ

### 2.4.2

```
clear
A = [0,1,4,0;0,2,8,0]
```

```
A =
     0     1     4     0
     0     2     8     0
```

```
E21 = eye(2);
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =
     1     0
    -2     1
```

```
U = E21 * A
```

```
U =
     0     1     4     0
     0     0     0     0
```

•

```
syms u v w y
U * [u;v;w;y]
[u;-4*w;w;y]
```

ans =

$$\begin{pmatrix} v + 4w \\ 0 \end{pmatrix}$$

ans =

$$\begin{pmatrix} u \\ -4w \\ w \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = u \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$r = 1, m = 2, n = 4$  なので

1. 1次元  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$
2.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. 次元
3. 1次元  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
4. 1次元  $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

### 2.4.3

```
clear
A = [1,2,0,1;0,1,1,0;1,2,0,1]
```

A =

```
1    2    0    1
0    1    1    0
1    2    0    1
```

•

```
E31 = eye(3);
E31(3,1) = -1
```

E31 =

```
1    0    0
0    1    0
-1   0    1
```

•

```
U = E31 * A
```

U =

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
syms u v w y
eqn = U * [u;v;w;y]
```

eqn =

$$\begin{pmatrix} u + 2v + y \\ v + w \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
solve(eqn(2)==0,v)
```

ans =  $-w$

```
solve(eqn(1),u)
```

ans =  $-2v - y$

$$x = \begin{bmatrix} 2w - y \\ -w \\ w \\ y \end{bmatrix} = w \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1. 2次元、 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.  $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
2次元、

3.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$   
2次元、

4.  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$   
1次元、

#### 2.4.4

```
clear
A = [0,1,0,0;0,0,1,0;0,0,0,1;0,0,0,0]
```

A =

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

```
A * [1;0;0;0]
transpose(A) * [0;0;0;1]
```

```
ans =
```

```
0
0
0
0
```

```
ans =
```

```
0
0
0
0
```

1.  $[0 \ d_1 \ d_2 \ d_3]$
2.  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$
3.  $[d_1 \ d_2 \ d_3 \ 0]$
4.  $[0 \ 0 \ 0 \ 1]$

### 2.4.5

$AB = 0$ ならば、 $B$ は $A$ のすべての列を $0$ にする

よって $B$ は $A$ の零空間に含まれる

### 2.4.6

### 2.4.7

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{c}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{bc}{a}$$

### 2.4.8

```
clear
A = [2,-2;4,-4;0,0]
```

```
A =
```

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = [1, 1, 2; 3, 3, 6]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$u = [1; 2; 0]$$

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v = [2, -2]$$

$$v = \begin{bmatrix} 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$w = [1; 3]$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$z = [1, 1, 2]$$

$$z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x = u * z$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A * B$$

$$\text{ans} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ABの積はuzの乗数倍である

```
y = dot(v,w)
```

```
y = -4
```

```
x * y
```

```
ans =
```

```
-4    -4    -8  
-8    -8   -16  
0      0      0
```

•

以上より、 $AB = uz * v \cdot w$ となる

## 2.4.9

```
clear  
A = [2,-2;4,-4;0,0]
```

```
A =
```

```
2    -2  
4    -4  
0      0
```

```
E21 = eye(3);  
E21(2,1) = -2
```

```
E21 =
```

```
1      0      0  
-2     1      0  
0      0      1
```

```
U = E21*A
```

```
U =
```

```
2    -2  
0      0  
0      0
```

•

行空間

基底(2,-2)の1次元

```
syms u v  
eqn = U * [u;v]
```

```
eqn =
```

$$\begin{pmatrix} 2u - 2v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$x = \begin{bmatrix} v \\ v \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

逆行列の存在

存在：列が $\mathbf{R}^m$ を張るとき ( $r = m$ ) かつ  $Ax = b$  はすべての  $b$  に対して少なくとも 1 つの解をもつ

この時、積が  $m$  次の単位行列  $AC = I_m$  となる  $n \times m$  の右逆行列  $C$  が存在する ( $m \leq n$  のみ可能)

一意性：列が線形独立 ( $r = n$ ) のときかつ  $Ax = b$  はすべての  $b$  に対して多くて 1 つの解をもつ

この時、積が  $n$  次の単位行列  $BA = I_n$  となる  $n \times m$  の左逆行列  $B$  が存在する ( $m \geq n$  のみ可能)

#### 2.4.10

$$y = e^x$$

1対1だが上への変換ではない

$$y = \sin x$$

上への変換であるが、1対1でない

#### 2.4.11

解が少なくとも一つ存在するのは、 $r = m$  の時

$A^T$  は  $n \times m$  の行列であり、rank は  $m$  なので、 $A^T$  は解の一意性が成立する

逆の場合

$A^T$  に解の一意性が成立している場合、 $A^T$  の rank は  $m$  となる

よって  $(A^T)^T = A$  より、 $A$  の rank も  $m$  となり、 $r = m$  なので解は少なくとも一つ存在する

#### 2.4.12

```
clear
A = [1,1,0]
```

```
A =
     1     1     0
•
```

```
syms u v w
eqn = A * [u;v;w] == 1
```

$$\text{eqn} = u + v = 1$$

```
solve(eqn,u)
```

$$\text{ans} = 1 - v$$

```
Ain_right = [1-v;v;w]
```

$$\text{Ain} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-v \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

左逆行列は  $r \neq n$  なので、存在しない