内積と転置

内積とSchwarzの不等式

内積とより直接に関係しているのは《角度の余弦》

P116の図3.2より

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|a\|}, \cos\alpha = \frac{a_1}{\|a\|}$$
$$\sin\beta = \frac{b_2}{\|b\|}, \cos\beta = \frac{b_1}{\|b\|}$$

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|a\|\|b\|}$$

ここで、$a_1b_1 + a_2b_2$はaとbの内積であり、関係性を示した。

$$\cos\theta = \frac{a^Tb}{\|a\|\|b\|}$$

この公式から、例えばbの長さを2倍にしても分子、分母ともに2倍となり$\cos\theta$は変わらない。

bの符号を変えると、$\cos\theta$の符号も反転し、角度を180°変えることになる。

ベクトルaによって張られる直線への点bからの射影pは

$$p = \frac{a^Tb}{a^Ta}a$$

となり、点bからの距離（の2乗）は

$$\left\|b - \frac{a^Tb}{a^Ta}a\right\|^2 = b^Tb - 2\frac{(a^Tb)^2}{a^Ta} + \left(\frac{a^Tb}{a^Ta}\right)^2 a^Ta = \frac{(b^Tb)(a^Ta) - (a^Tb)^2}{(a^Ta)}$$

となる。

Schwarzの不等式

$$|a^Tb| \leq \|a\| \cdot \|b\|$$

両辺の比が$\cos\theta$になっている。

等号が成立するのは、aがbのスカラー倍の時に限る。

行列の転置

$$\left(Ax\right)^T y = x^T A^T y = x^T\left(A^T y\right)$$

上式は、《Axとyの内積はxと$A^T y$の内積に等しい》ことを示している。

$$\left(AB\right)^T = B^T A^T$$

階数rの任意の$m \times n$行列Aについて、積$A^T A$は対象行列でその階数はrとなる

⇒《自分自身とその転置行列が等しい＝対象行列》より

$$\left(A^T A\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^T A$$

Aの列が線形独立ならば、$r = n$となり、$A^T A$は正方対称で、逆可能な行列となる

3.1.1

(a)

$$b = \left(\sqrt{x}, \sqrt{y}\right)$$
$$a = \left(\sqrt{y}, \sqrt{x}\right)$$

$$a^T b = 2\sqrt{\mathrm{xy}}$$
$$\|a\| = \sqrt{x + y}$$
$$\|b\| = \sqrt{x + y}$$
$$\|a\| \cdot \|b\| = x + y$$

$$\left|a^T b\right| = 2\sqrt{xy} \leq \|a\| \cdot \|b\| = x + y$$

(b)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y\|^2 = x^T x + 2x^T y + y^T y$$
$$\left(\|x\| + \|y\|\right)^2 = x^T x + 2\|x\|\|y\| + y^T y$$
$$x^T x + 2x^T y + y^T y \leq x^T x + 2\|x\|\|y\| + y^T y$$
$$x^T y \leq \|x\|\|y\|$$

3.1.2

(5)より

$$\|\mathrm{bp}\|^2 = \frac{(b^T b)(a^T a) - (a^T b)^2}{(a^T a)}$$

$$\|Op\|^2 = \left(\frac{a^T b}{a^T a}\right)^2 a^T a$$

$$\|\mathrm{bp}\|^2 + \|Op\|^2 = b^T b$$

3.1.3

```
clear
a = [1,1,1]
```

```
a = 
       1              1              1
```

```
b = [2,4,4]
```

```
b = 
       2              4              4
```

```
x = dot(a,b)/dot(a,a)
```

```
x = 
      10/3
```

$$p = \frac{10}{3}(1, 1, 1)$$

```
x2 = dot(b,a)/dot(b,b)
```

```
x2 = 
       5/18
```

$$p = \frac{5}{18}(2, 4, 4) = \frac{5}{9}(1, 2, 2)$$

3.1.4

これは、$\theta = 0, \cos\theta = 1$ の場合なので、

$$\frac{a^T b}{\|a\|\|b\|} = 1$$

$$a^T b = \|a\|\|b\|$$

また、原点を挟んでいる場合、$\theta = 180, \cos\theta = -1$ なので

$$\frac{a^T b}{\|a\|\|b\|} = -1$$

$$-a^T b = \|a\|\|b\|$$