部分空間の上への射影と最小2乗近似

最小2乗解

1つの未知数をもつ問題$ax = b$の最小2乗解は

$$\bar{x} = \frac{a^T b}{a^T a}$$

である。

幾何学的には、この解はaを通る直線上の、bに最も近い点、 $p = \bar{x}a$と同一

3.2.1

```
mean([150,153,150,151])
```

```
ans = 151
```

3.2.2

```
clear
a = [3,4]
```

```
a =
       3           4
```

```
b = [10,5]
```

```
b =
      10           5
```

```
dot(a,b)/dot(a,a)
```

```
ans =
       2
```

多変数の最小2乗問題

$$Ax = b$$

この時、誤差ベクトルEは

$$E = \|Ax - b\|$$

となり、これを最小とする最小2乗解は列空間内のbにもっとも近い点$p = A\bar{x}$の位置を求めることと同義

また、誤差ベクトルはその部分空間に直角でなければならない

まとめると

1. 対象となる部分空間は、Aの列空間である。
2. 誤差ベクトル$b - A\hat{x}$はその列空間に直交する。
3. つまり、$b - A\hat{x}$はA^Tの零空間に存在する⇒$A^T\left(b - A\hat{x}\right) = 0$

正規方程式

$$A^T A\hat{x} = A^T b$$

もし、Aの列が線形独立（可逆）ならば、

$$\hat{x} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

よって

$$p = A\hat{x} = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T b$$

3.2.3

```
clear
A = [1,0;0,1;1,1]
```

```
A =
        1               0
        0               1
        1               1
```

```
b = [1;1;0]
```

```
b =
        1
        1
        0
```

```
t1 = A'*A
```

```
t1 =
        2               1
        1               2
```

```
t2 = t1^-1 * A'
```

```
t2 =
        2/3            -1/3             1/3
       -1/3             2/3             1/3
```

```
t2 * b
```

```
ans =
        1/3
        1/3
```

```
A = [1;1;1]
```

```
A =
       1
       1
       1
```

```
b = [1;3;5]
```

```
b =
       1
       3
       5
```

```
t1 = A'*A
```

```
t1 =
       3
```

```
t2 = t1^-1 * A'
```

```
t2 =
       1/3            1/3            1/3
```

```
t2 * b
```

```
ans =
       3
```

3.2.4

```
clear
A = [1,0;0,1;1,1]
```

```
A =
       1              0
       0              1
       1              1
```

```
b = [1;3;4]
```

```
b =
       1
       3
       4
```

```
syms u v
x = [u;v]
```

x =

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

```
norm(A*x-b)^2
```

ans = $|u-1|^2 + |v-3|^2 + |u+v-4|^2$

$$\frac{\mathrm{dE}^2}{\mathrm{du}} = 4u - 10 + 2v = 0$$
$$\frac{\mathrm{dE}^2}{\mathrm{dv}} = 4v - 14 + 2u = 0$$
$$u = 1$$
$$v = 3$$

```
T = A'*A
```

```
T =
     2     1
     1     2
```

```
A'*b
```

```
ans =
     5
     7
```

-

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
p = A * [1;3]
```

```
p =
     1
     3
     4
```

$p = b$なので、pは列空間内に存在する

射影行列

$$P = A\left(A^T A\right)^{-1} A^T$$

基本性質

(1)べき等$P^2 = P$

(2)対称$P = P^T$

3.2.5

```
u1 = [1;1;0]
```

```
u1 =
       1
       1
       0
```

```
u2 = [1;0;1]
```

```
u2 =
       1
       0
       1
```

```
b = [0;2;1]
```

```
b =
       0
       2
       1
```

```
A = [u1,u2]
```

```
A =
       1              1
       1              0
       0              1
```

```
P = A*(A'*A)^-1*A'
```

```
P =
       2/3            1/3            1/3
       1/3            2/3           -1/3
       1/3           -1/3            2/3
```

```
p = P * b
```

```
p =
       1
       1
       0
```

```
pin = b - P * b
```

```
pin =
      -1
       1
```

```
         1
```

```
x = (A'*A)^-1*A'*b
```

```
x =

         1
         0
```

3.2.6

$$\left(I - P\right)^2 = I^2 - IP - PI + P^2 = I - 2P + P^2 = I - P$$

$$\left(I - P\right)^T = I^T - P^T = I - P$$

$$P^2 = \left(P_1 + P_2\right)^2 = P_1^2 + P_2^2 = P_1 + P_2$$

$$P^T = \left(P_1 + P_2\right)^T = P_1^T + P_2^T = P_1 + P_2$$

3.2.7

$$\begin{aligned} H^2 &= \left(I - 2P\right)^2 \\ &= I - 4P + 4P^2 \\ &= I \end{aligned}$$

3.2.8

$$P^2 = \left(uu^T\right)^2 = uu^Tuu^T = uu^T = P$$

$$P^T = \left(uu^T\right)^T = \left(u^T\right)^T u^T = uu^T$$

3.2.9

$$P\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix}$$

となる射影行列Pを探せばよいので

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\ &P^2 = P \\ &P^T = P \end{aligned}$$

データの最小2乗近似

例

$$t = 0, y = 0$$
$$t = 1, y = 1$$
$$t = 3, y = 2$$
$$t = 4, y = 5$$

が与えられた場合の優決定系$Ax = b$は

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$A^T A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix}$$
$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{D} \end{bmatrix} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 13 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{10} \\ \frac{11}{10} \end{bmatrix}$$

よってこのデータに対する最良の直線は

$$y = -\frac{2}{10} + \frac{11}{10} t$$

3.2.10

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$
$$\left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{m}$$
$$\frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \frac{y_1 + \cdots + y_m}{m}$$

3.2.11

```
A = [1,-1;1,0;1,1;1,2]
```

```
A =
```

```
     1              -1
     1               0
     1               1
     1               2
```

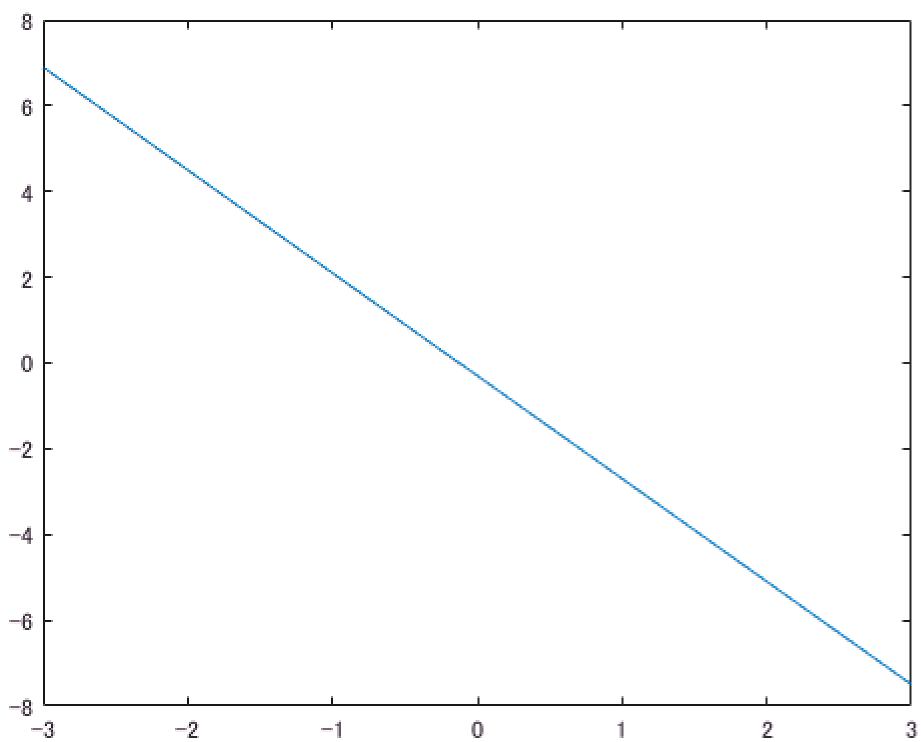
```
b = [2;0;-3;-5]
```

```
b =

     2
     0
    -3
    -5
```

```
x = (A'*A)^-1*A'*b
```

```
x =

    -3/10
   -12/5
```

```
t = -3:3;
y = x(1) + x(2) * t;
plot(t,y)
```



3.2.12

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}$$