内積と転置

内積とSchwarzの不等式

内積とより直接に関係しているのは《角度の余弦》

P116の図3.2より

$$\sin\alpha = \frac{a_2}{\|a\|}, \cos\alpha = \frac{a_1}{\|a\|}$$
$$\sin\beta = \frac{b_2}{\|b\|}, \cos\beta = \frac{b_1}{\|b\|}$$

$$\cos\theta = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\|a\|\|b\|}$$

ここで、$a_1b_1 + a_2b_2$はaとbの内積であり、関係性を示した。

$$\cos\theta = \frac{a^Tb}{\|a\|\|b\|}$$

この公式から、例えばbの長さを2倍にしても分子、分母ともに2倍となり$\cos\theta$は変わらない。

bの符号を変えると、$\cos\theta$の符号も反転し、角度を180°変えることになる。

ベクトルaによって張られる直線への点bからの射影pは

$$p = \frac{a^Tb}{a^Ta}a$$

となり、点bからの距離（の2乗）は

$$\left\|b - \frac{a^Tb}{a^Ta}a\right\|^2 = b^Tb - 2\frac{(a^Tb)^2}{a^Ta} + \left(\frac{a^Tb}{a^Ta}\right)^2 a^Ta = \frac{(b^Tb)(a^Ta) - (a^Tb)^2}{(a^Ta)}$$

となる。

Schwarzの不等式

$$|a^Tb| \le \|a\| \cdot \|b\|$$

両辺の比が$\cos\theta$になっている。

等号が成立するのは、aがbのスカラー倍の時に限る。

行列の転置

$$(Ax)^T y = x^T A^T y = x^T (A^T y)$$

上式は、《Axとyの内積はxと$A^T y$の内積に等しい》ことを示している。

$$(AB)^T = B^T A^T$$

階数rの任意の$m \times n$行列Aについて、積$A^T A$は対象行列でその階数はrとなる

⇒《自分自身とその転置行列が等しい＝対象行列》より

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$$

Aの列が線形独立ならば、$r = n$となり、$A^T A$は正方対称で、逆可能な行列となる

3.1.1

(a)

$$b = (\sqrt{x}, \sqrt{y})$$
$$a = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$$

$$a^T b = 2\sqrt{\mathrm{xy}}$$
$$\|a\| = \sqrt{x + y}$$
$$\|b\| = \sqrt{x + y}$$
$$\|a\| \cdot \|b\| = x + y$$

$$|a^T b| = 2\sqrt{xy} \leq \|a\| \cdot \|b\| = x + y$$

(b)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\|x + y\|^2 = x^T x + 2x^T y + y^T y$$
$$(\|x\| + \|y\|)^2 = x^T x + 2\|x\|\|y\| + y^T y$$
$$x^T x + 2x^T y + y^T y \leq x^T x + 2\|x\|\|y\| + y^T y$$
$$x^T y \leq \|x\|\|y\|$$

3.1.2

(5)より

$$
\|\mathrm{bp}\|^2 = \frac{\left(b^T b\right)\left(a^T a\right) - \left(a^T b\right)^2}{\left(a^T a\right)}
$$

$$
\|Op\|^2 = \left(\frac{a^T b}{a^T a}\right)^2 a^T a
$$

$$
\|\mathrm{bp}\|^2 + \|Op\|^2 = b^T b
$$

3.1.3

```
clear
a = [1,1,1]
```

```
a =
       1          1          1
```

```
b = [2,4,4]
```

```
b =
       2          4          4
```

```
x = dot(a,b)/dot(a,a)
```

```
x =
      10/3
```

$$
p = \frac{10}{3}\left(1,1,1\right)
$$

```
x2 = dot(b,a)/dot(b,b)
```

```
x2 =
       5/18
```

$$
p = \frac{5}{18}\left(2,4,4\right) = \frac{5}{9}\left(1,2,2\right)
$$

3.1.4

これは、$\theta = 0, \cos\theta = 1$ の場合なので、

$$
\frac{a^T b}{\|a\|\|b\|} = 1
$$

$$
a^T b = \|a\|\|b\|
$$

また、原点を挟んでいる場合、$\theta = 180, \cos\theta = -1$ なので

$$\frac{a^T b}{\|a\|\|b\|} = -1$$

$$-a^T b = \|a\|\|b\|$$

3.1.5

$$\cos\theta = \frac{1}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

となる角度

3.1.6

$|a_j|^2 + |b_j|^2$から$2|a_j||b_j|$を引くと

A $\left(|a_j| - |b_j|\right)^2$

となり、これは非負なので、不等式が成り立つ

3.1.7

Aが対称行列ならば

$$A = A^T$$

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$$

より

$$\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T = A\right)^{-1} = A^{-1}$$

よってA^{-1}も対称行列となる

3.1.8

```
A = [0,1;1,0]
```

```
A =
      0     1
      1     0
```

-

```
B = [1,0;0,0]
```

```
B =
      1     0
      0     0
```

-

```
A*B
```

```
ans =
     0     0
     1     0
```

-

```
B*A
```

```
ans =
     0     1
     0     0
```

-

```
(A*B)'
```

```
ans =
     0     1
     0     0
```

-

3.1.9

```
clear
%A = [2,3;4,5;6,7]
A = [2;1]
```

```
A =
     2
     1
```

-

```
A'*A
```

```
ans = 5
```

```
A*A'
```

```
ans =
     4     2
     2     1
```

-

3.1.10

```
clear
p1 = [0,0,0]
```

```
p1 =
```

```
       0              0              0
```

```
p2 = [0,1,1]
```

```
p2 =
       0              1              1
```

```
c = [1/2,1/2,1/2]
```

```
c =
       1/2            1/2            1/2
```

```
v = c - p1
```

```
v =
       1/2            1/2            1/2
```

```
w = c - p2
```

```
w =
       1/2           -1/2           -1/2
```

```
dot(v,w)
```

```
ans =
      -1/4
```

```
vl = sqrt(3)/2
```

```
vl =
    1170/1351
```

```
wl = sqrt(3)/2
```

```
wl =
    1170/1351
```

```
dot(v,w)/(vl * wl)
```

```
ans =
      -1/3
```