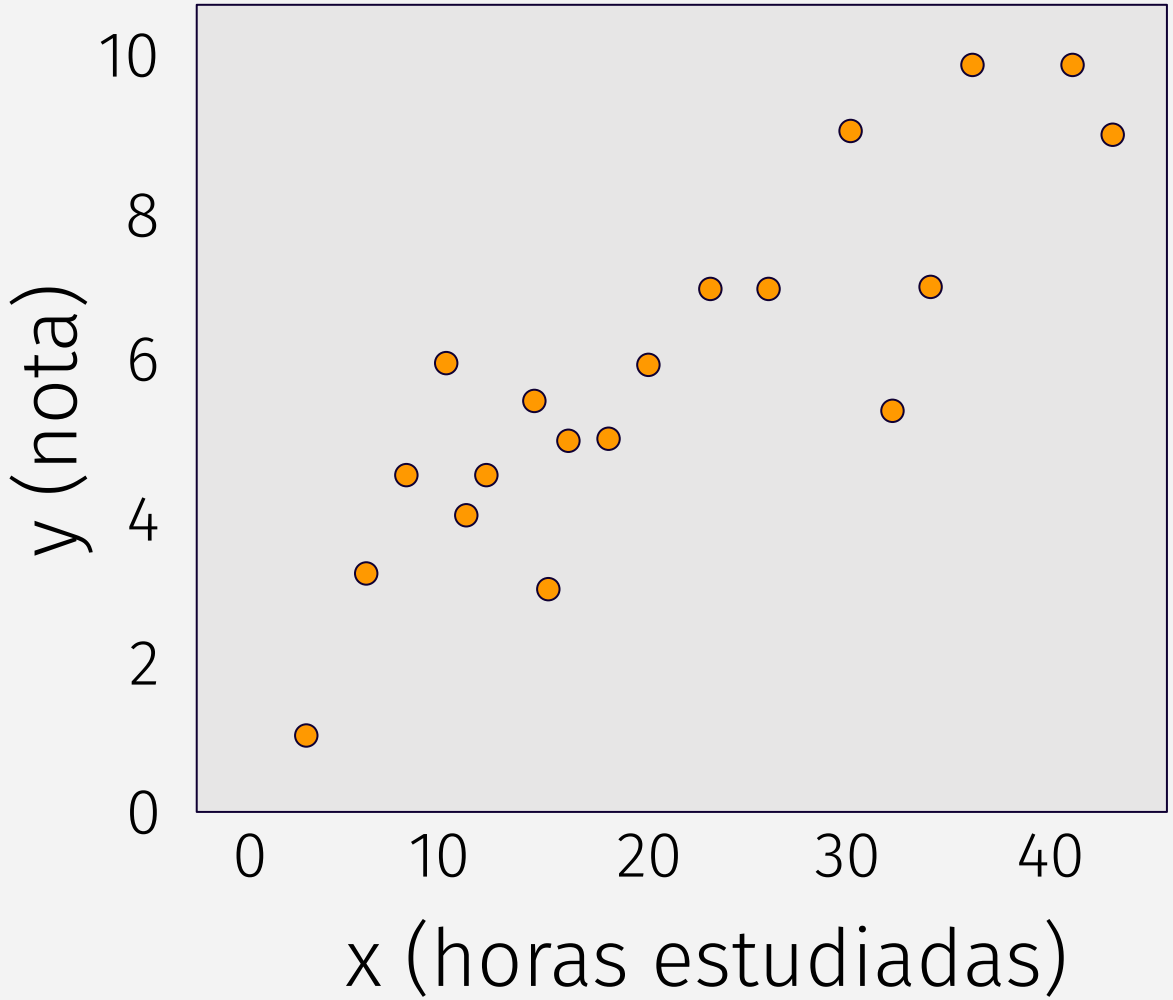
Regresión Lineal Introducción

Problema de Regresión

Ejemplos

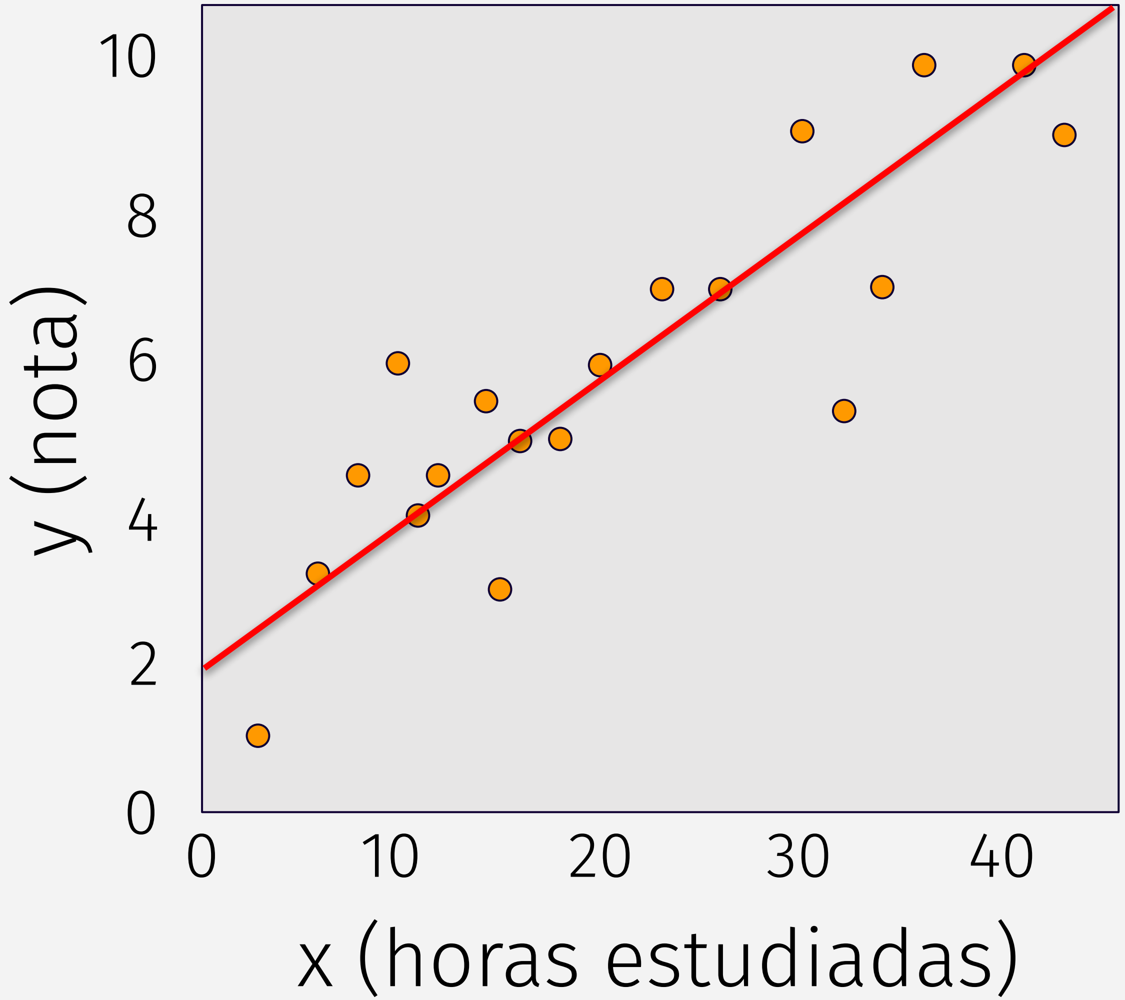
Horas	Nota
2	1
5	3.2
7	4.5
9	6
10	4
11	4.5
13.4	5.5
14	3
15	5

Visualización



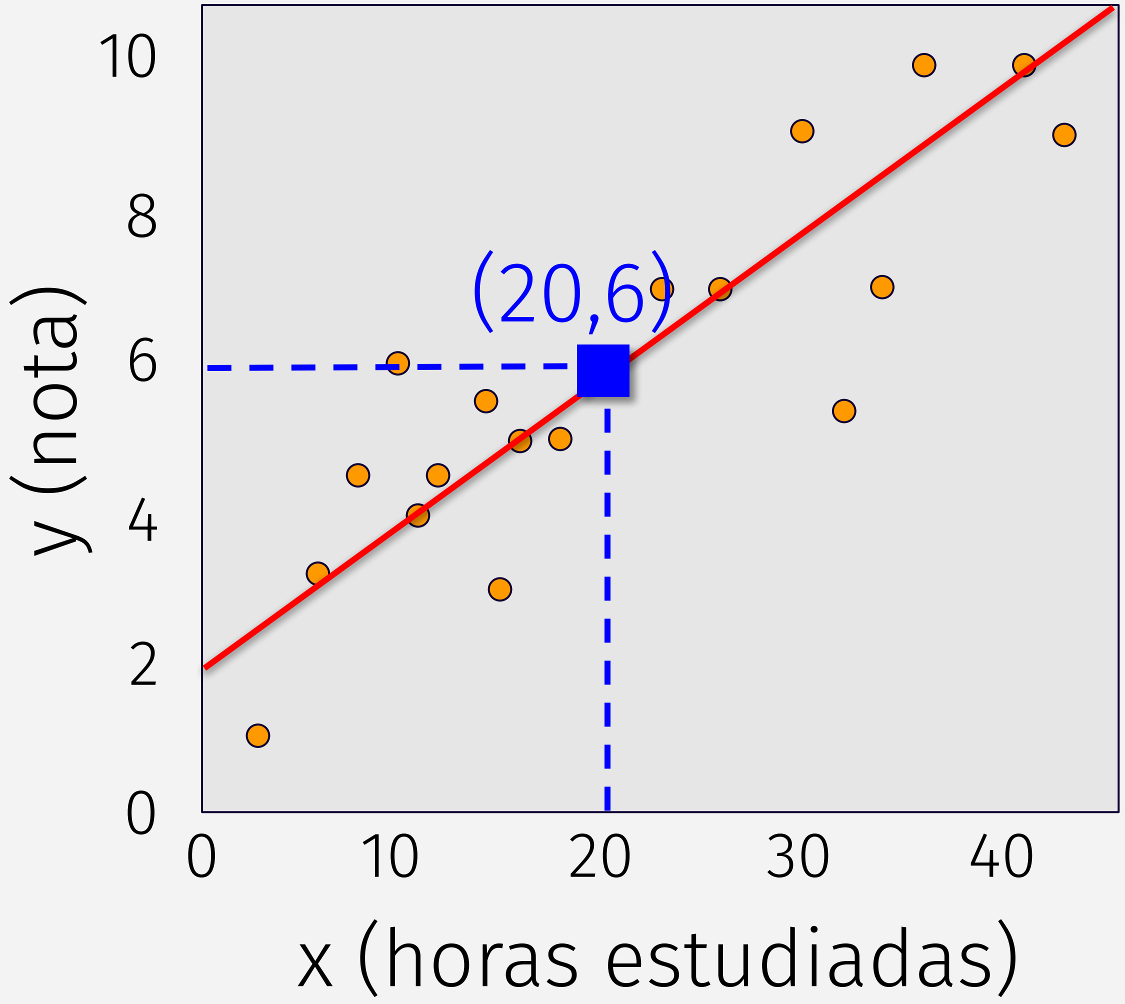
Si un nuevo alumno estudió x = 20*hs*, ¿cuál será su nota?

Modelo de Regresión Lineal (RL)



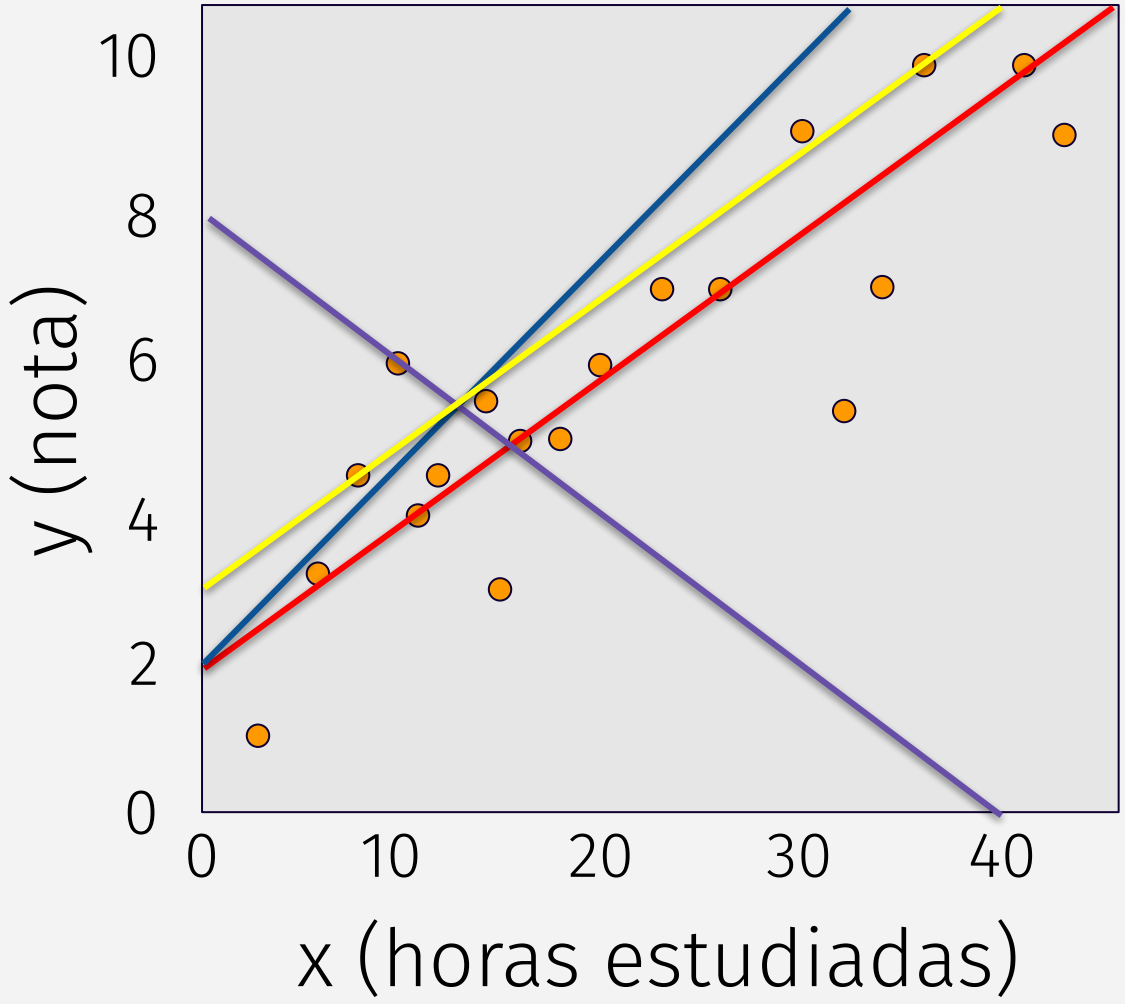
- Asunción
  - Relación x - y es lineal
  - Modelo más simple
- Modelo
  - $y = m \times x + b$
  - o
  - $f(x) = m \times x + b$

¿Cómo predecir con modelo de Regresión Lineal?



- Supongamos
  - **m** = 0.5
  - **b** = 2
    - f(x) **=** 0,2 × + 2
- ¿Qué nota **predice** el modelo si **x=20**?
  - f(20) **=** m × 20 + b
    = 0,2 × 20 + 2
    = 6
- Predice **y=nota=6**

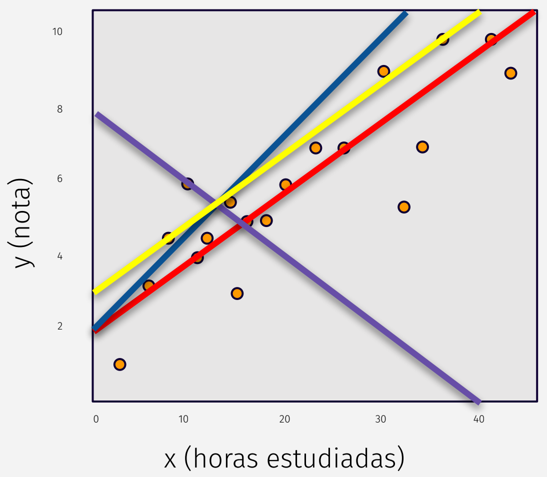
Valores de **m** y **b**



- Valores de **m** y **b** definen la recta
  - **m** = 0.20, **b** = 2
  - **m** = 0.20, **b** = 3
  - **m** = 0.26, **b** = 2
  - **m** = -0.20, **b** = 8
- **parámetros** del modelo
  - **m** indica la pendiente
  - **b** la ordenada a la origen

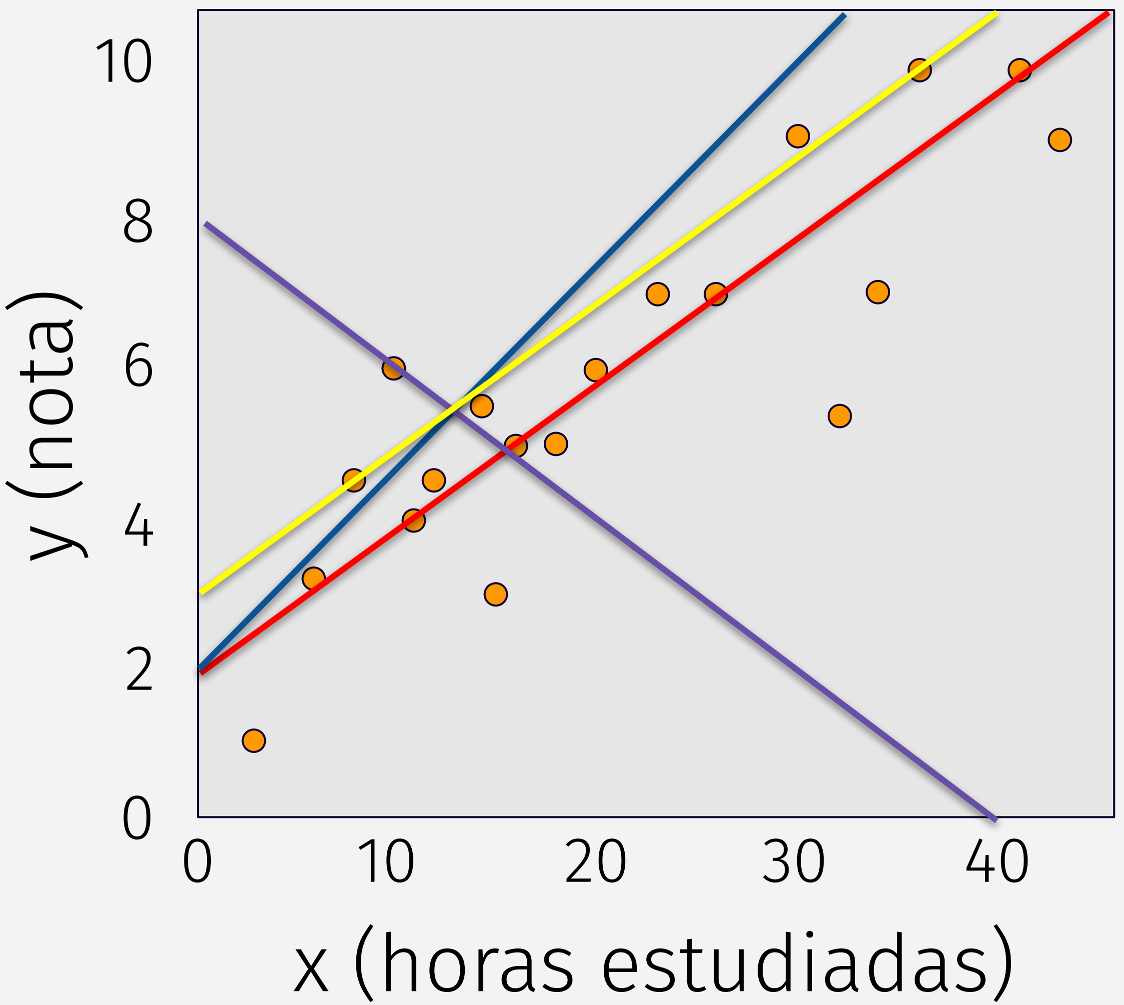
Valores de **m** y **b**

- Valores de **m** y **b** definen la recta
  - **m** = 0.20, **b** = 2
  - **m** = 0.20, **b** = 3
  - **m** = 0.26, **b** = 2
  - **m** = -0.20, **b** = 8



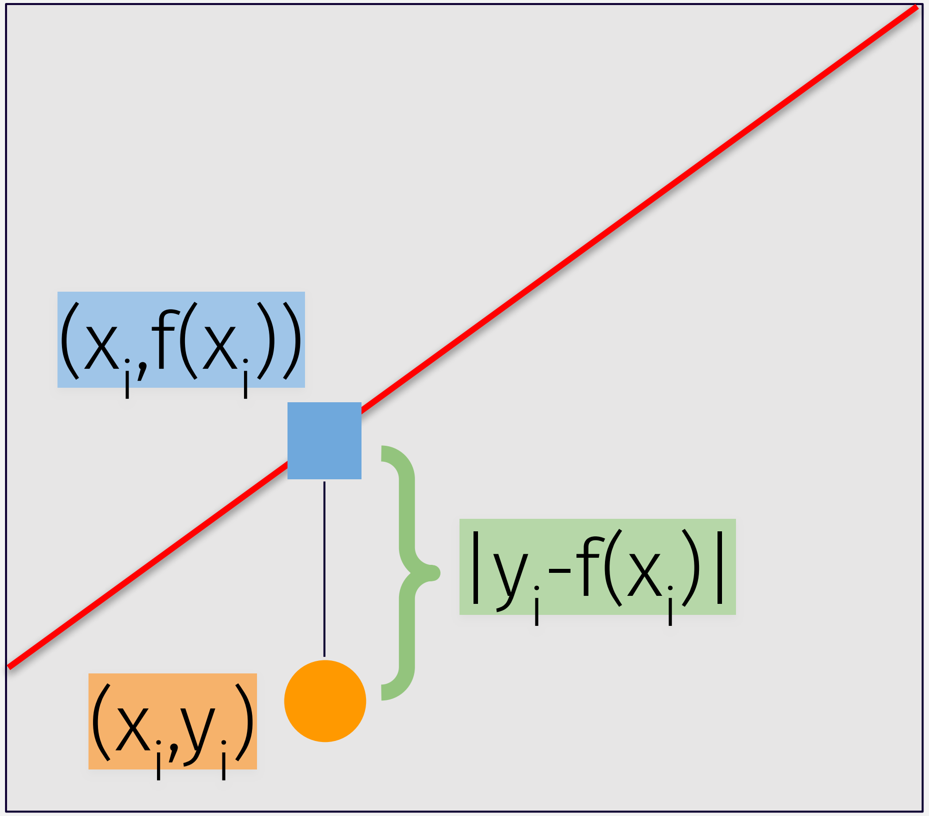
- Valores de **m** y **b** definen la recta
  - $f(x)=0.20 \times x + 2$
  - $f(x)=0.20 \times x + 3$
  - $f(x)=0.26 \times x + 2$
  - $f(x)=0.20 \times x + 8$
- Cada recta es un modelo **distinto**
- Misma familia de modelos
  - **Regresión Lineal**

Elección de **m** y **b**. Función de **error**



- Dado un conjunto de ejemplos
  - ¿Cómo elegir **m** y **b**?
  - Función de **puntaje** para cada **m** y **b**
    - Función de **error** **E(m,b)**
  - Ejemplo
    - **E(–) = 1.62**
    - **E(–) = 1.72**
    - **E(–) = 5.12**
    - **E(–) = 1.44**

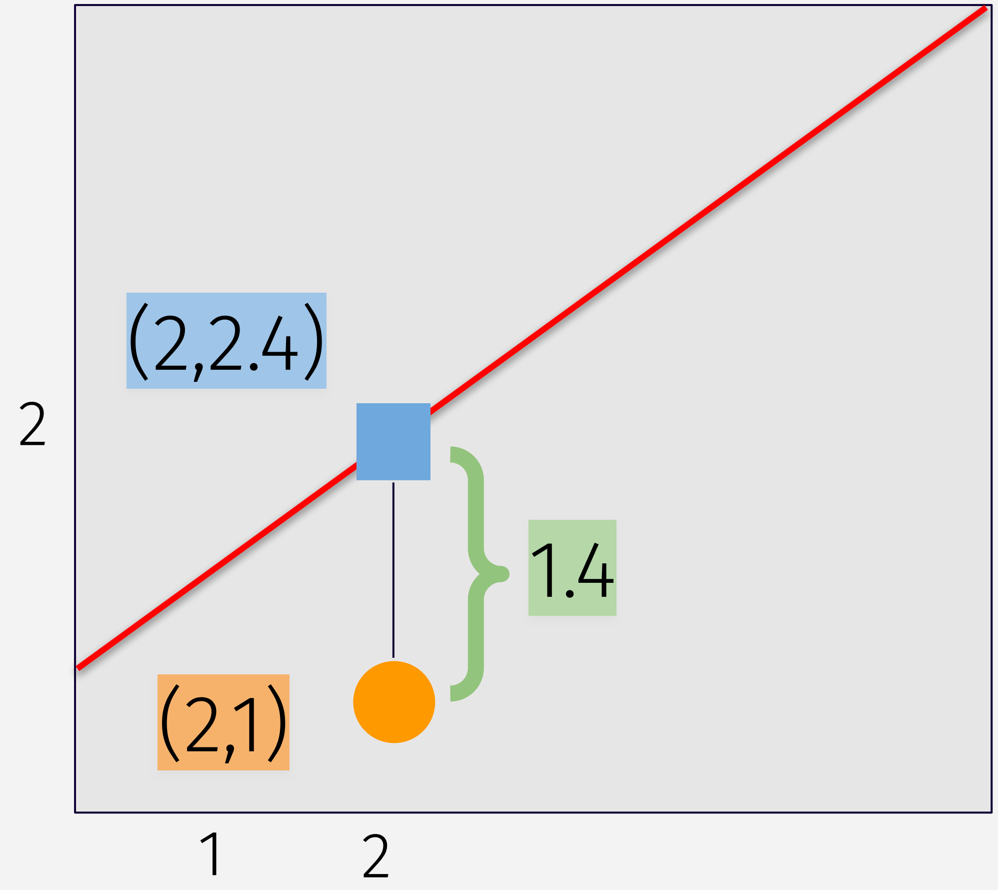
$E_i(m,b)$: Error cuadrático del modelo para el ejemplo i



- Primero, definimos el **error** para **un solo ejemplo**
- **$E_i(m,b)$**
  - Error del ejemplo **i** para **m** y **b**
  - Distancia cuadrática entre
    - **y_i**: valor esperado
    - **$f(x_i)$**: valor predicho
- **$E_i(m,b)$** $= (y_i-f(x_i))^2$

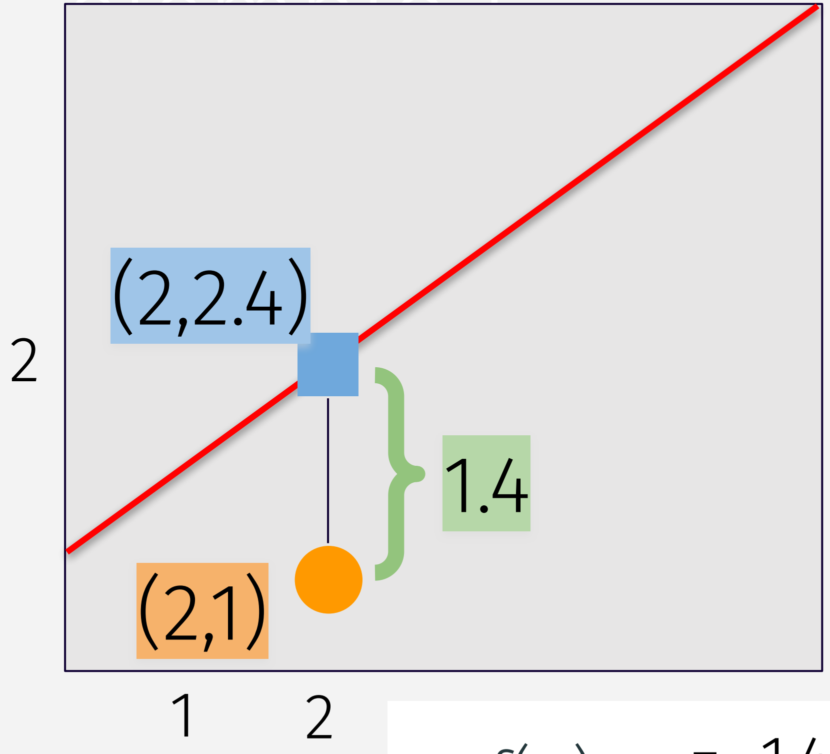
  $= (y_i- m\ x_i +b)^2$

E_i(m,b): Error cuadrático del modelo para el ejemplo i



- $\mathbf{E_i} = (y_i - f(x_i))^2$
- Ejemplo
  - Estudió 2 horas, nota 1
    - $x_i = 2$
    - $y_i = 1$
  - $f(x_i) = f(2) = 0.2 \times 2 + 2$
    $= 2.4$
  - $y_i - f(x_i) = 1 - 2.4 = -1.4$
  - $(y_i - f(x_i))^2 = (-1.4)$^2 $= 1.96$
  - $E_i = 1.96$

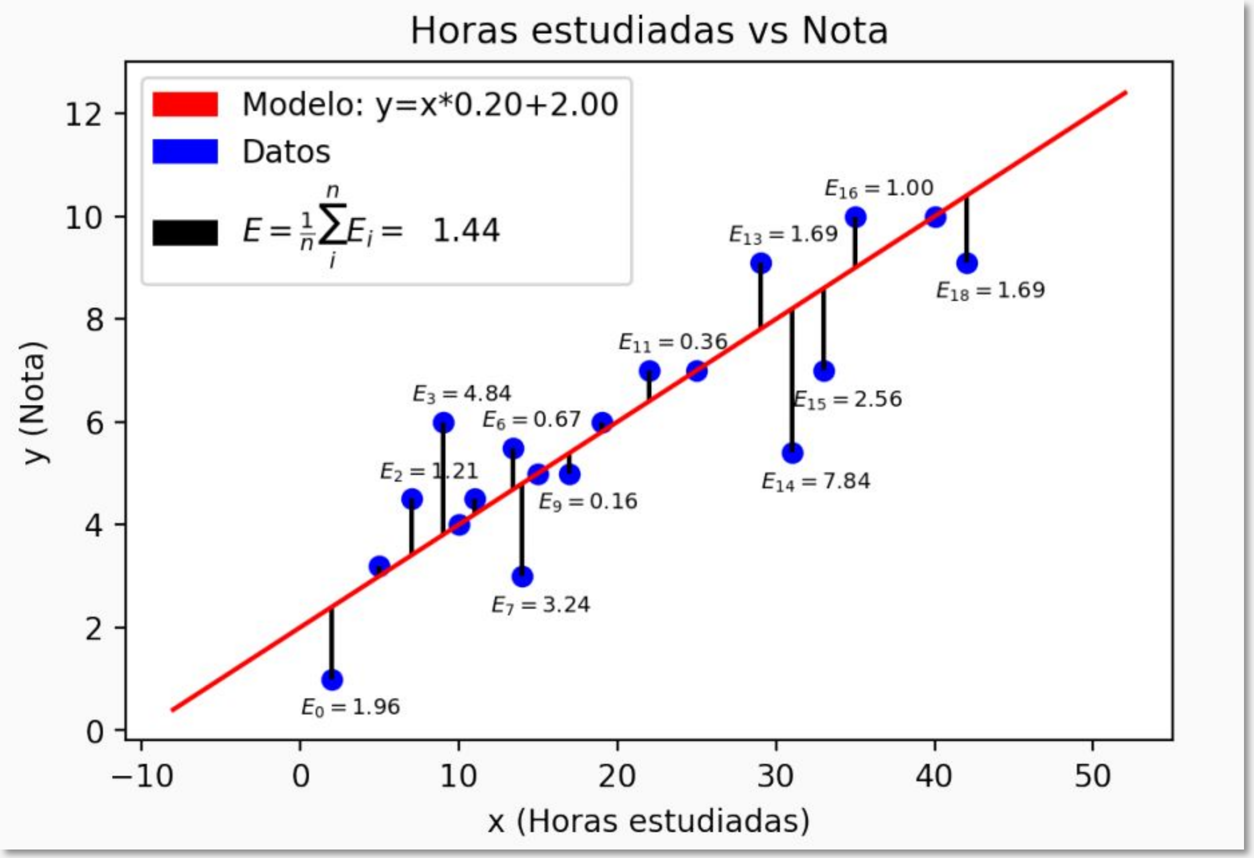
$E_i(m,b)$: Error cuadrático del modelo para el



$y_i-f(x_i)$	$= -1.4$
$\lvert y_i-f(x_i)\rvert$	$= 1.4$
$(y_i-f(x_i))^2$	$= 1.96$
$(y_i-f(x_i))^4$	$= 3.84$

- $\mathbf{E_i = (y_i-f(x_i))^2}$
  - ¿Por qué esta función de error?
- ¿Por qué no usar $\mathbf{y_i-f(x_i)}$?
  - Valores negativos
- ¿Por qué no usar $\mathbf{\lvert y_i-f(x_i)\rvert}$?
  - Valor absoluto
    - No es una función derivable
      - Difícil de optimizar
- ¿Qué efecto tiene el ^{2}?
  - Penaliza más errores grandes
  - $0.5^2=0.25$, $1^2=1$, $5^2=25$
- ¿Por qué no usar $\mathbf{(y_i-f(x_i))^4}$?
  - Posible, pero penalizaría demasiado

E(m,b): Error cuadrático medio de los ejemplos



- E(m,b): Error cuadrático medio
  - Función de error **natural** para RL
  - Promedio de los E_i
- $E(m,b) = (1/n) \sum_i^n E_i(m,b)$

Ejemplo de cálculo de **E** para **m=0.2** y **b=2**

$m = 0.2$

$b = 2$

estudio	nota
2	1
10	4
14	5
30	9
40	10

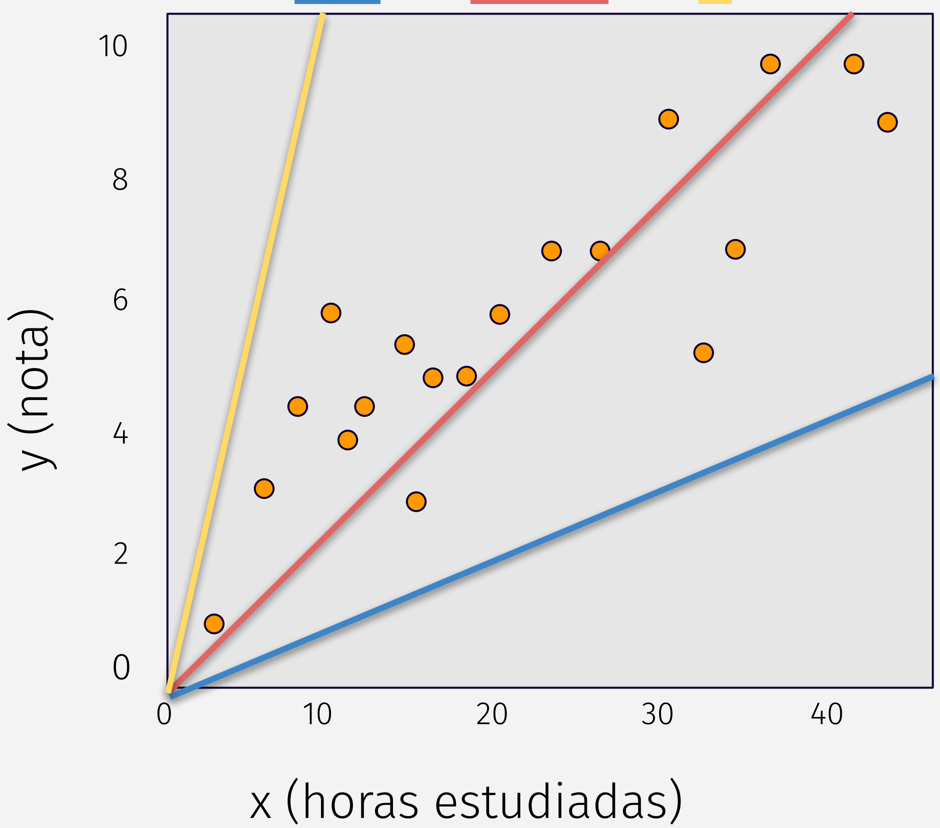
$f(x_i)$	$f(x_i)-y_i$	E_i
$0.2 * 2 + 2 = 2.4$	$2.4 - 1 = 1.4$	$(1.4)^2 = 1.96$
$0.2 * 10 + 2 = 4$	$4 - 4 = 0$	$(0)^2 = 0$
$0.2 * 14 + 2 = 4.8$	$4.8 - 5 = -0.2$	$(-0.2)^2 = 0.04$
$0.2 * 30 + 2 = 8$	$8 - 9 = -1$	$(-1)^2 = 1$
$0.2 * 40 + 2 = 10$	$10 - 10 = 0$	$(0)^2 = 0$

Error cuadrático medio

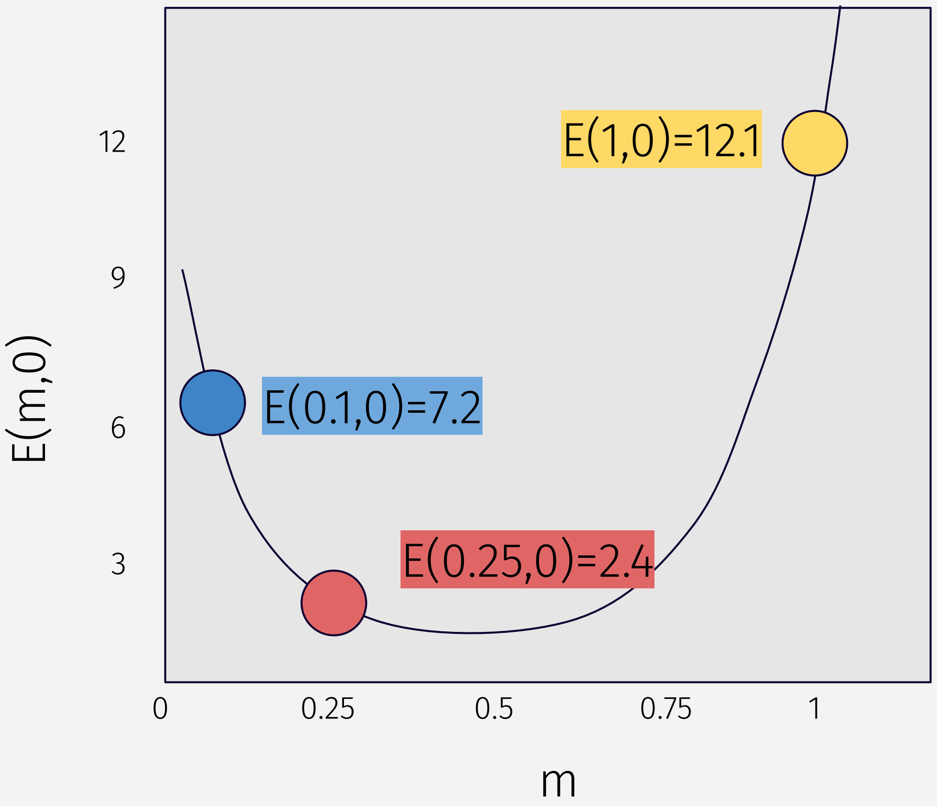
$$E = \frac{1}{n}\sum_i^n E_i = \frac{1.96+0+0.04+1+0}{5} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Comprendiendo **E(m,b)**

- Asumamos *b*=0
  - Queda 1 parámetro: m
  - Probamos con m=...
    - 0.1 o 0.25 o 1

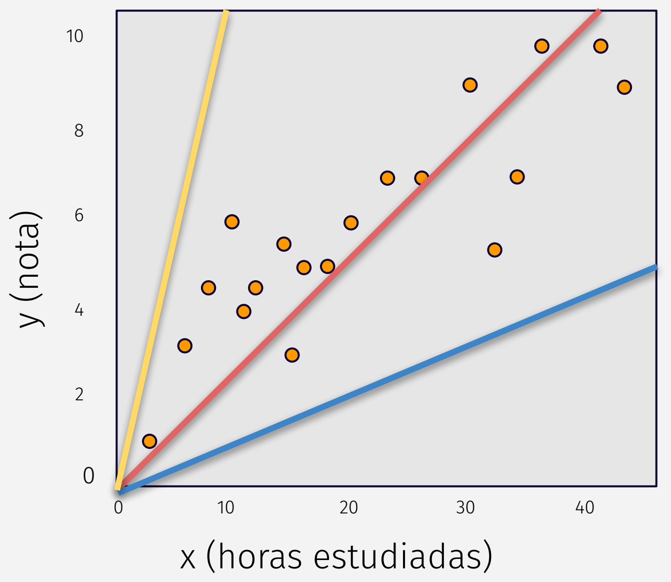


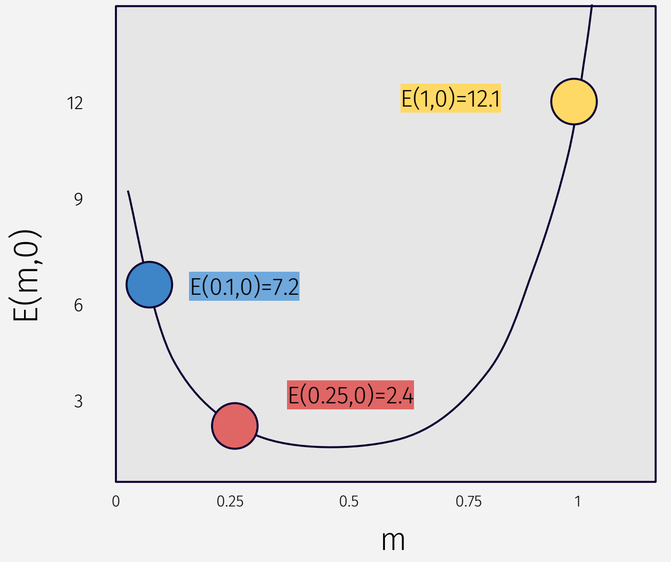
- Error E(m,b) = E(m,0)
  - 1D
  - Forma una parábola



Resumen

- Regresión Lineal
  - $f(x)=m\,x + b$
  - Modelo más simple
  - Asume relación lineal entre x e y
    - Aproximada
- Parámetros
  - **m** pendiente
  - **b** ordenada al origen
- Función de error **E**
  - Error cuadrático medio
  - Promedio de error de cada ejemplo $\mathbf{E_i}$
  - Permite elegir valores óptimos de **m** y **b**





Ejercicio: Archivo **Regresión Lineal - Modelo.ipynb**

- **Probar**
  - Modificar los parámetros **m** y **b**. Observar como cambia la recta y el error
  - Modificar el valor de la variable **new_x**, observar los valores de f(**new_x**) que predice el modelo (punto verde)
- **Interpretar**
  - ¿Qué me dice el modelo respecto a la nota que obtienen los alumnos que no estudiaron nada?
  - ¿Cuánto puedo esperar que aumente mi nota por cada hora de estudio?
  - ¿Cuando es más fácil la materia? (en relación a m)
  - ¿Cuando baja el error? ¿Puede ser 0?