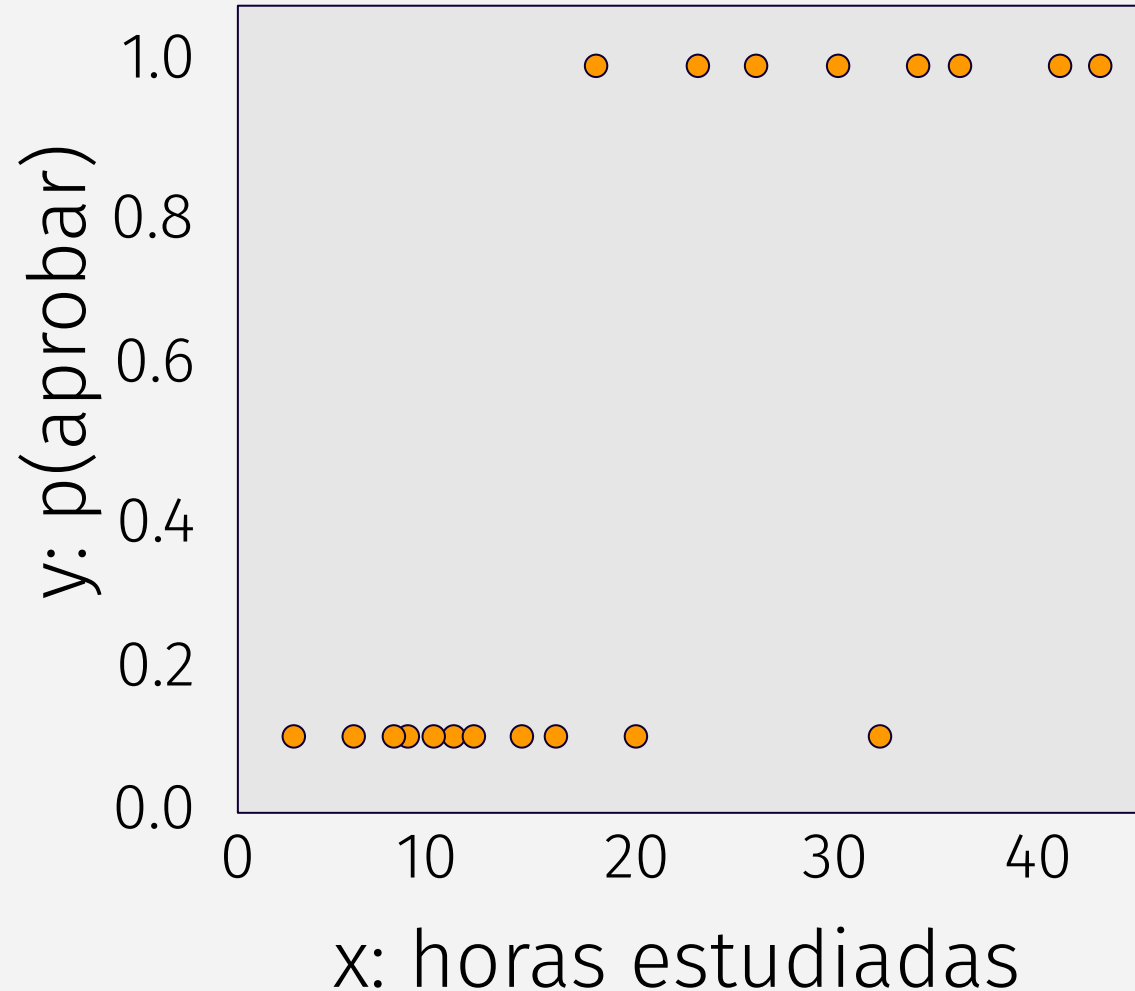


# Regresión Logística - Modelo

---

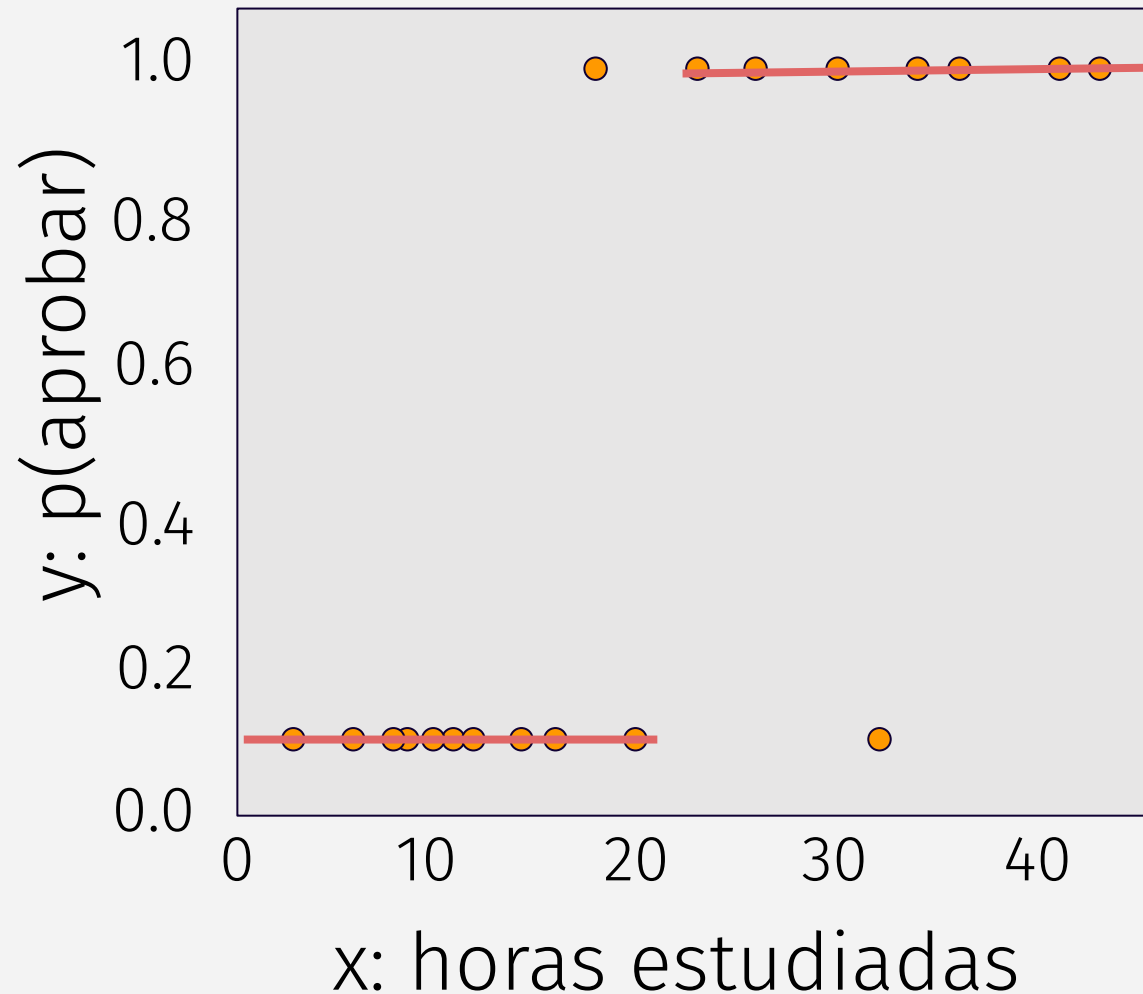
# Predicción de probabilidad de aprobar

- Entrada
  - Horas estudiadas
- Salida
  - Probabilidad de aprobar
- Entrenar
  - Datos de aprobado/desaprobado



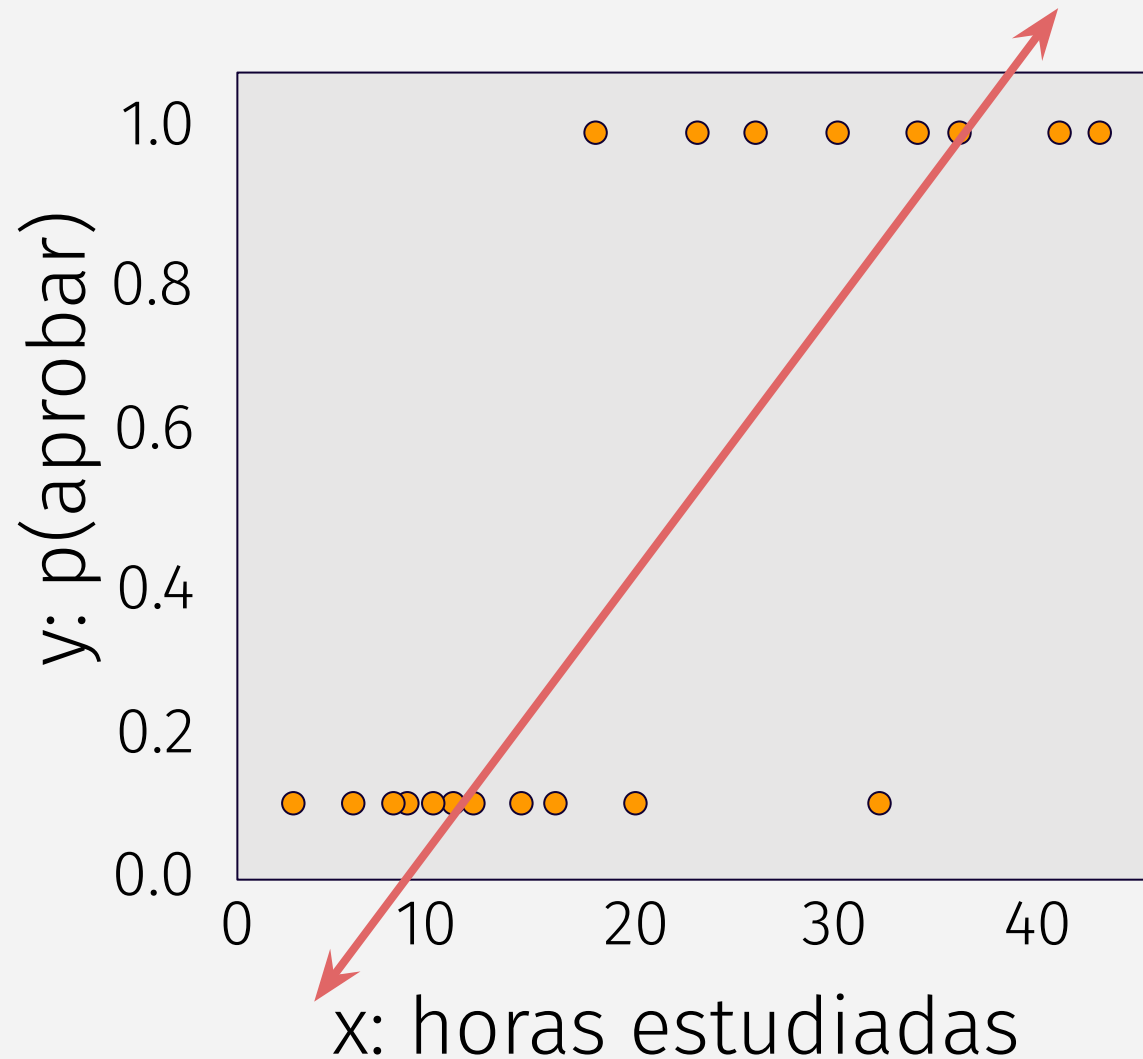
Horas	Aprobado
2	0
5	0
7	0
9	0
10	0
11	0
13.4	1
14	0
15	1

# Sin Regresión Logística: Modelo simple if/else



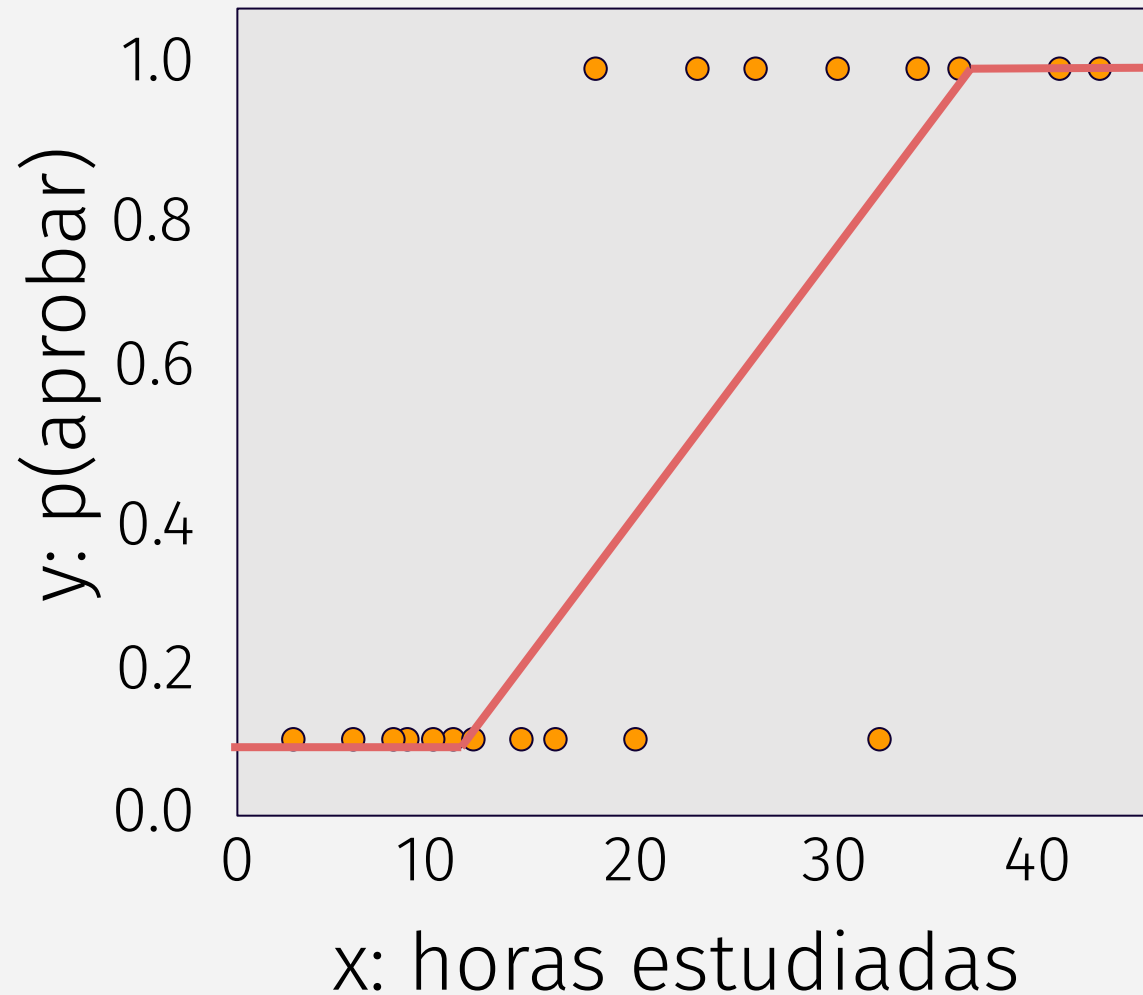
- Ejemplo
  - $f(x) = 0$  si  $x < 20$   
 $= 1$  si  $x \geq 20$
- En general
- $f(x) = 0$  si  $x < V$   
 $= 1$  si  $x \geq V$
- Problemas
  - Discontinuo en  $x=V$ 
    - No es derivable
  - Muy extremo
    - 0 o 1

# Sin Regresión Logística: Regresión Lineal $y=mx+b$



- Problemas
  - Valores mayores a 1
  - Valores menores a 0
- Solución
  - Convertir la salida de regresión lineal
  - Rango deseado
    - 0 a 1
  - Varias opciones

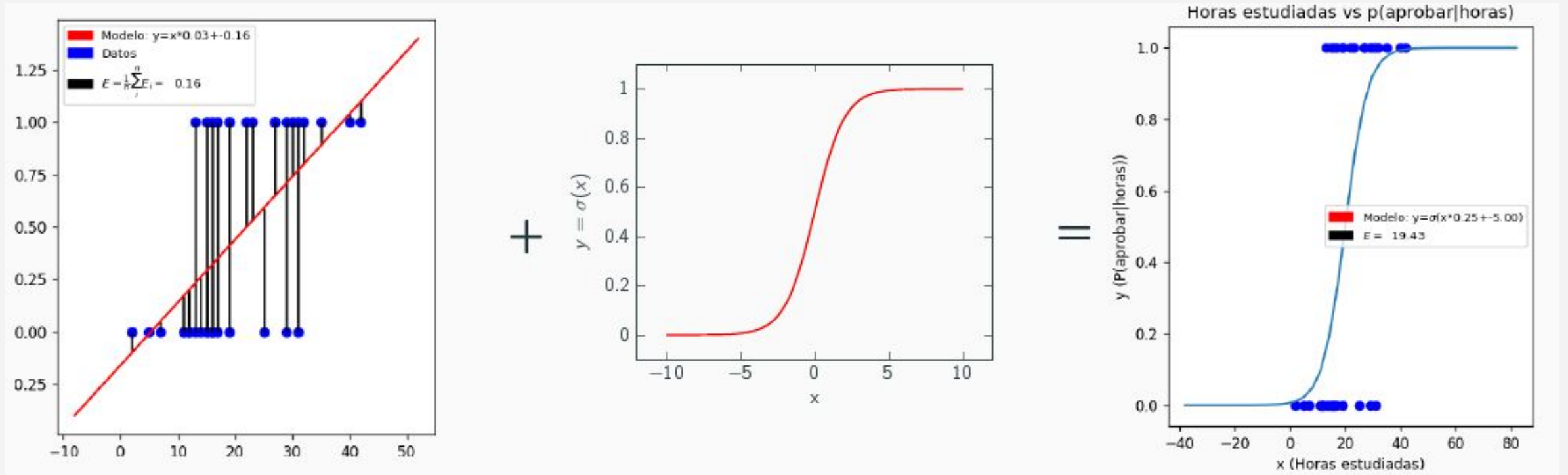
# Sin Regresión Logística: Regresión Lineal cortada



- $f(x) = 0$       **si**  $x \leq 10$   
     $= mx + b$     **si**  $10 < x < 35$   
     $= 1$         **si**  $x \geq 35$
- Soluciona el rango
- Problemas
  - No es derivable en  $x=10$  y  $x=35$
  - Difícil de optimizar

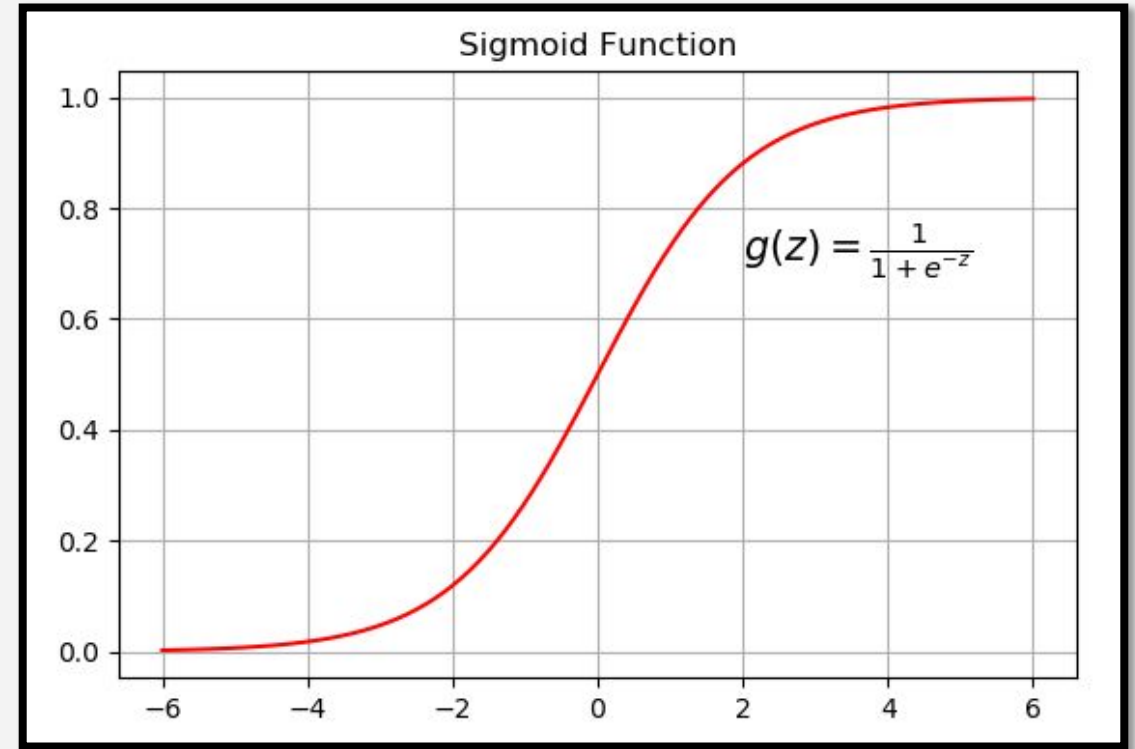
# Regresión Logística

Regresión Logística = Regresión Lineal + Función Logística



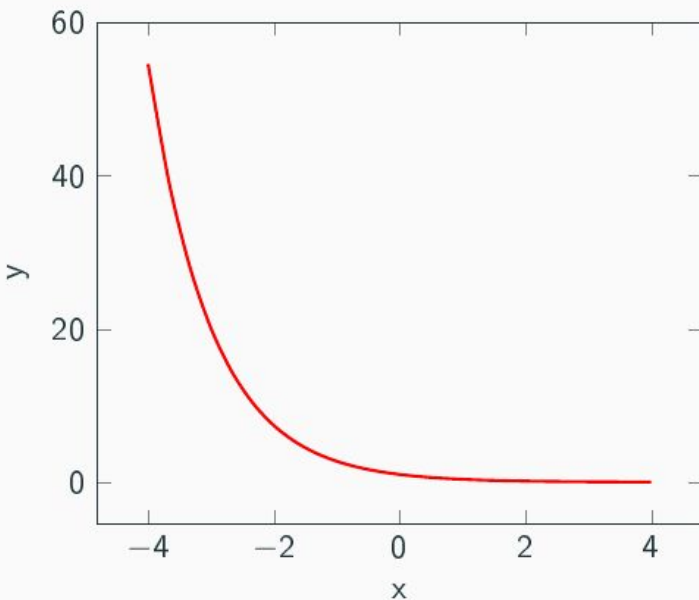
# Función Logística o Sigmoide $\sigma(x)$

- $\sigma(x) = 1 / (1 + e^{-x})$
- Dominio
  - $-\infty$  a  $+\infty$
- Imagen
  - 0 a 1
  - Asíntotas horizontales
- Derivada simple
  - $\delta\sigma(z)/\delta z = \sigma(z) * (1 - \sigma(z))$
- Aplicar a la salida de la Regresión Lineal

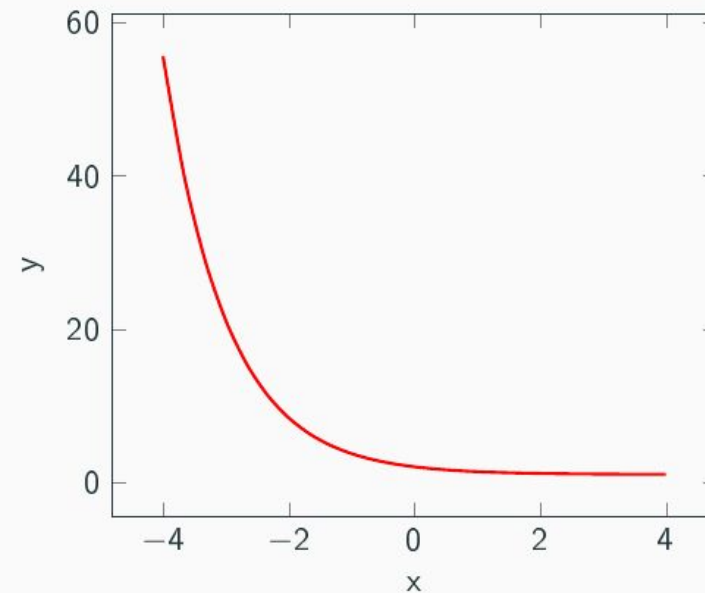


# Entendiendo la Función Logística o Sigmoides $\sigma(x)$

- $e^x$  transforma valores de  $(-\infty, +\infty)$  a valores  $(0, \infty)$ 
  - $-\infty$  se convierte en 0
  - $\infty$  queda igual
- $e^{-x}$  hace lo parecido, invirtiendo el signo:
  - $+\infty$  se convierte en 0
  - $-\infty$  se convierte en  $+\infty$



- $e^{-x}$  transforma valores de  $(-\infty, +\infty)$  a valores  $(0, \infty)$ 
  - $+\infty$  se convierte en 0
  - $-\infty$  se convierte en  $+\infty$
- $1 + e^{-x}$ 
  - $+\infty$  se convierte en 1
  - $-\infty$  se convierte en  $+\infty$





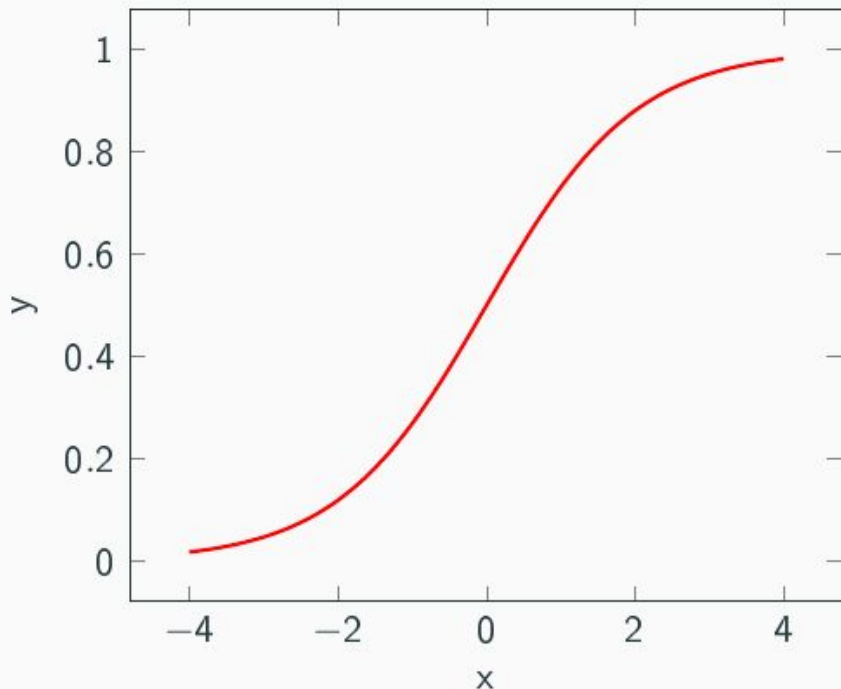
# Entendiendo la Función Logística o Sigmoides $\sigma(x)$

- $1 + e^{-x}$

- $+\infty$  se convierte en 1
- $-\infty$  se convierte en  $+\infty$

- $\frac{1}{1+e^{-x}}$

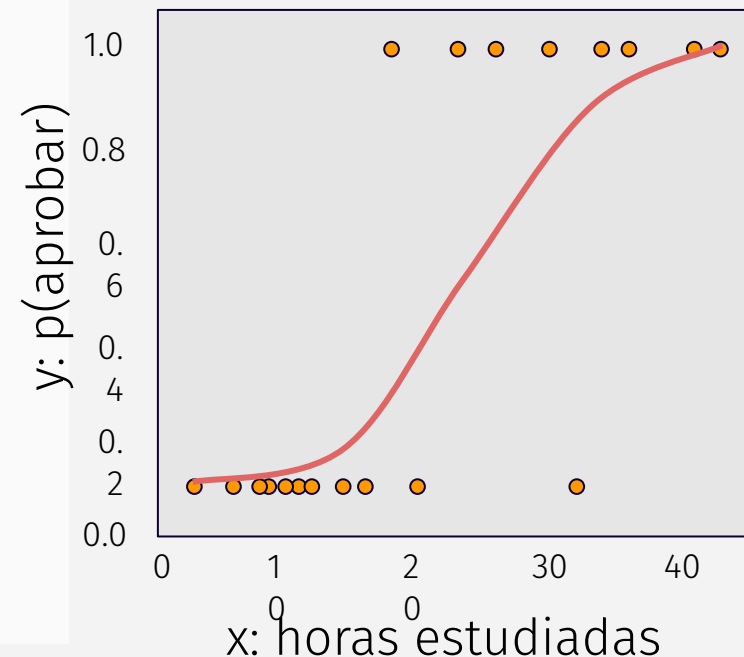
- $+\infty$  se convierte en 1
- $-\infty$  se convierte en 0



- $\sigma(x) = 1 / (1+e^{-x})$

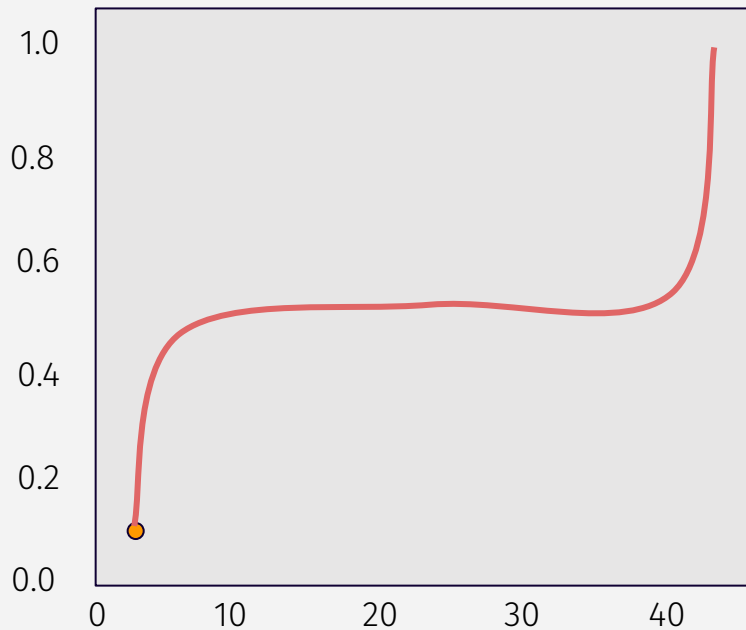
- $f(x) = \sigma(mx+b)$   
 $= 1 / (1+e^{-mx-b})$

- $f$  = regresión lineal  
compuesta con sigmoidea

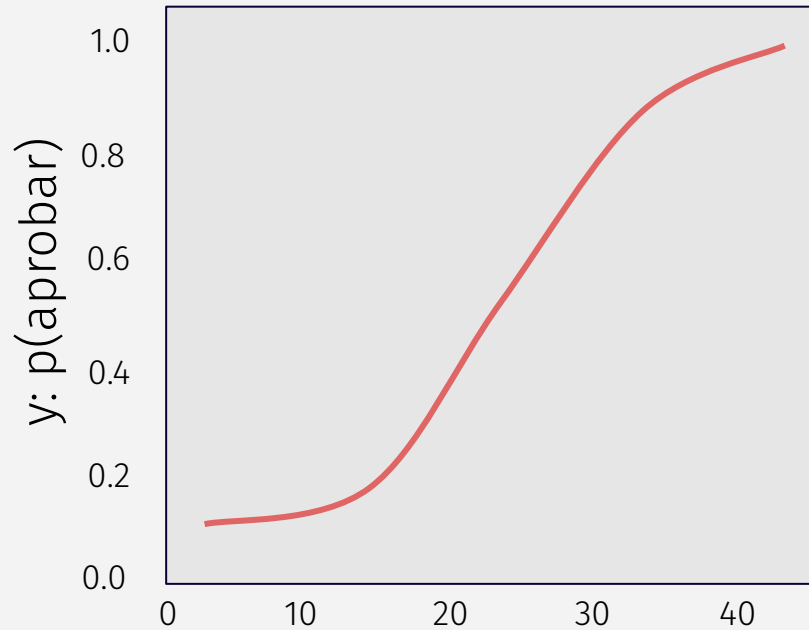


# $f(x) = 1 / (1 + e^{-(mx+b)})$ : Salida en base a m (b=-25)

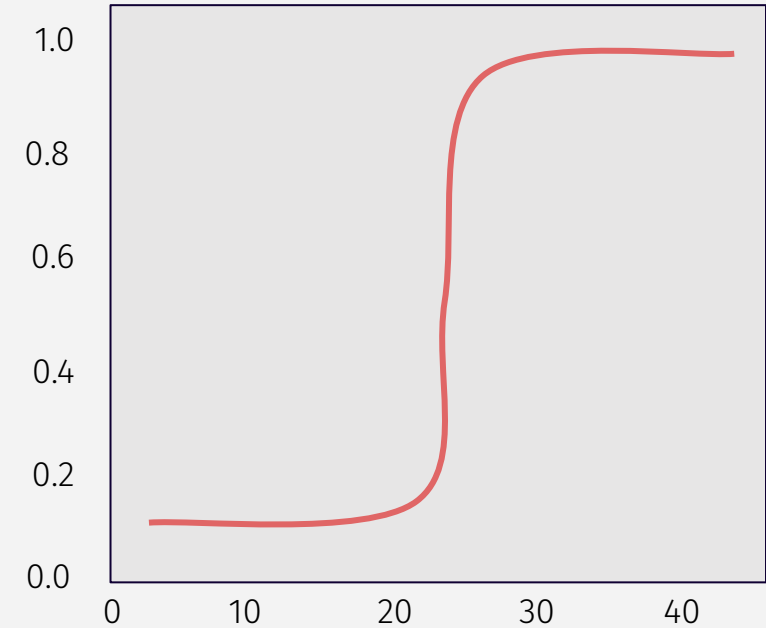
- m cambia la “pendiente” de la parte “lineal” de  $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$



- $m > 0$
- $m \sim 0$



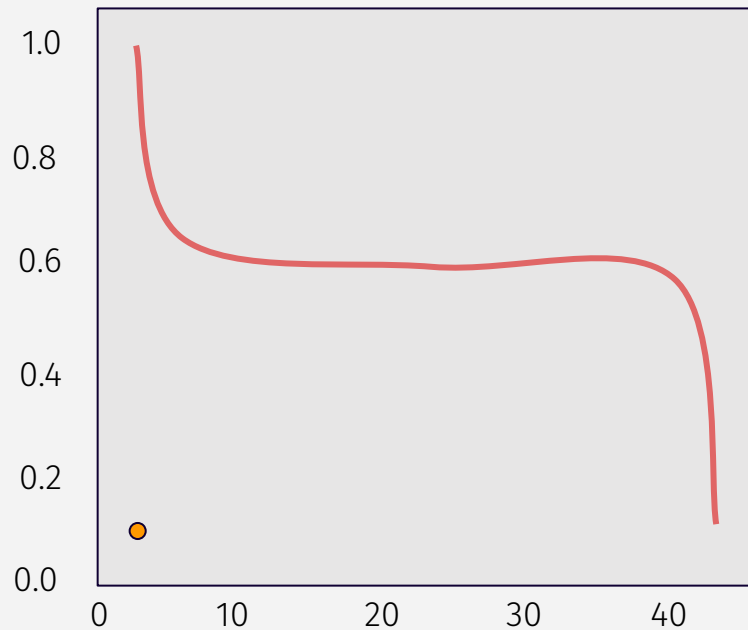
- $m = 1$



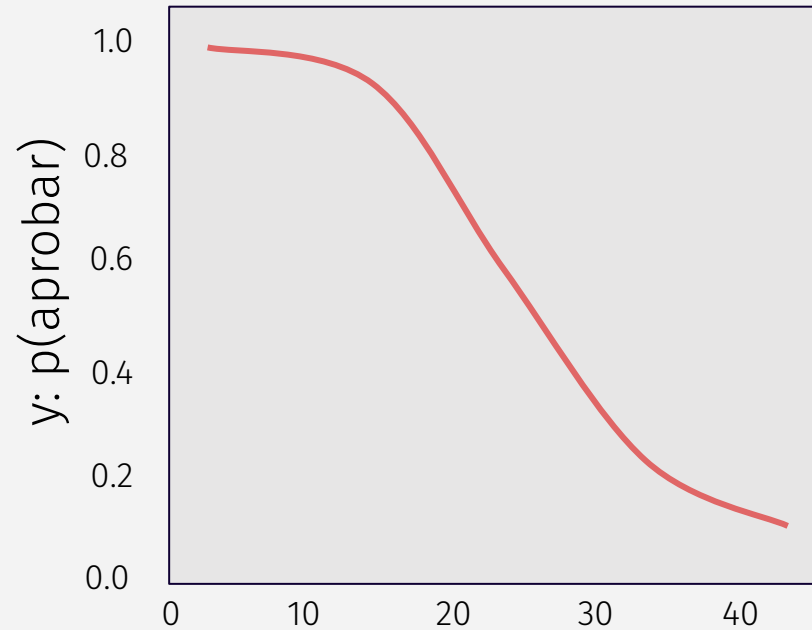
- $m \gg 1$

# $f(x) = 1 / (1 + e^{-(mx+b)})$ : Salida en base a m (b=-25)

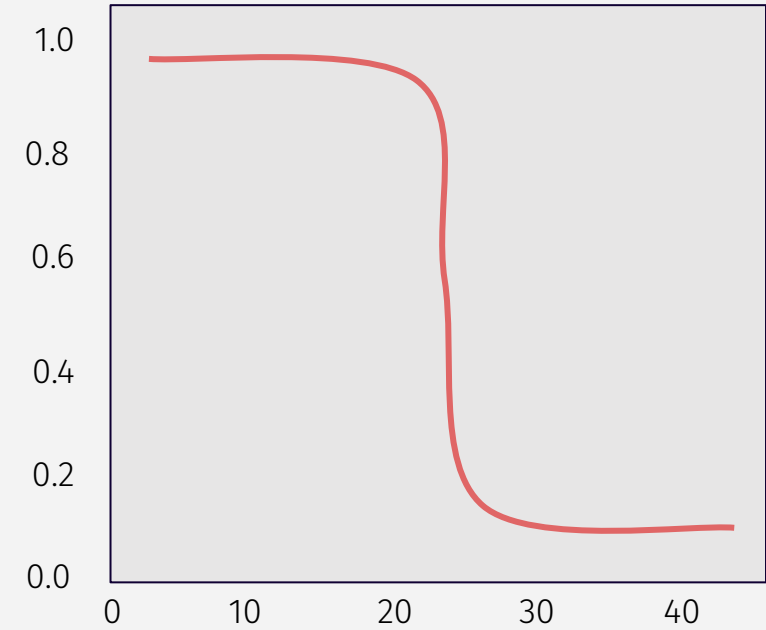
- m cambia la “pendiente” de la parte “lineal” de  $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$



- $m < 0$
- $m \sim 0$



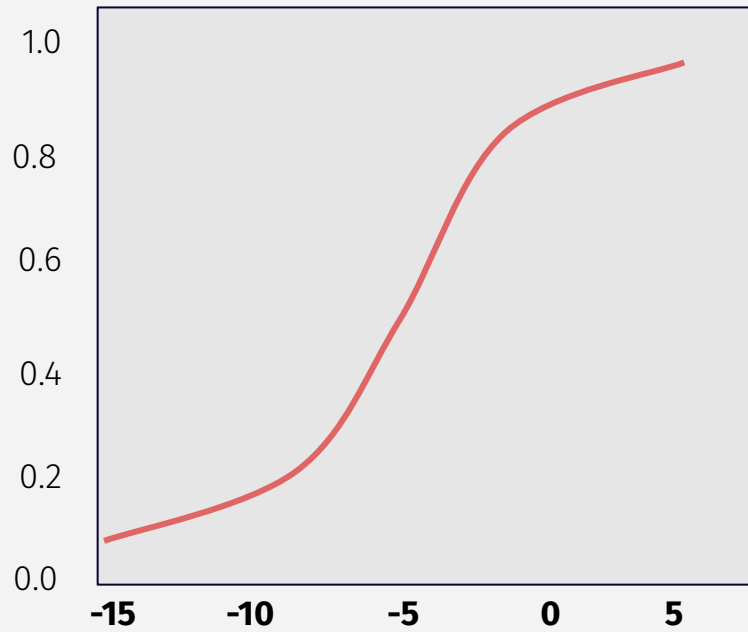
- $m = -11$



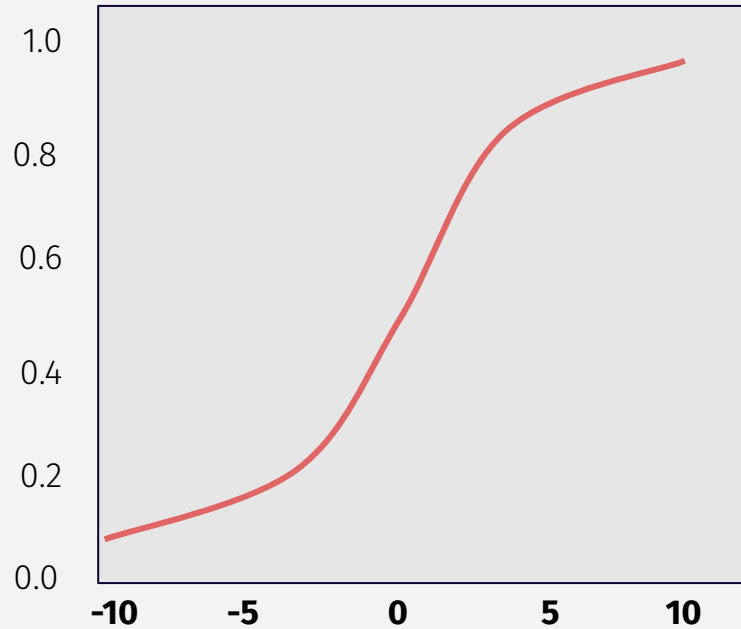
- $m \ll -1$

# $f(x) = 1 / (1 + e^{-(mx+b)})$ : Salida en base a b (m=0)

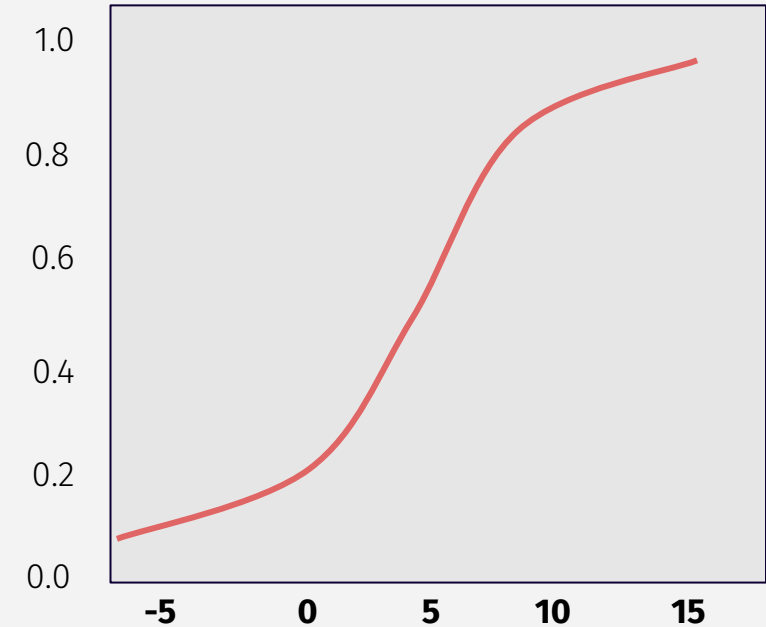
- Cambiar b mueve el gráfico en el eje x



- $b=5$

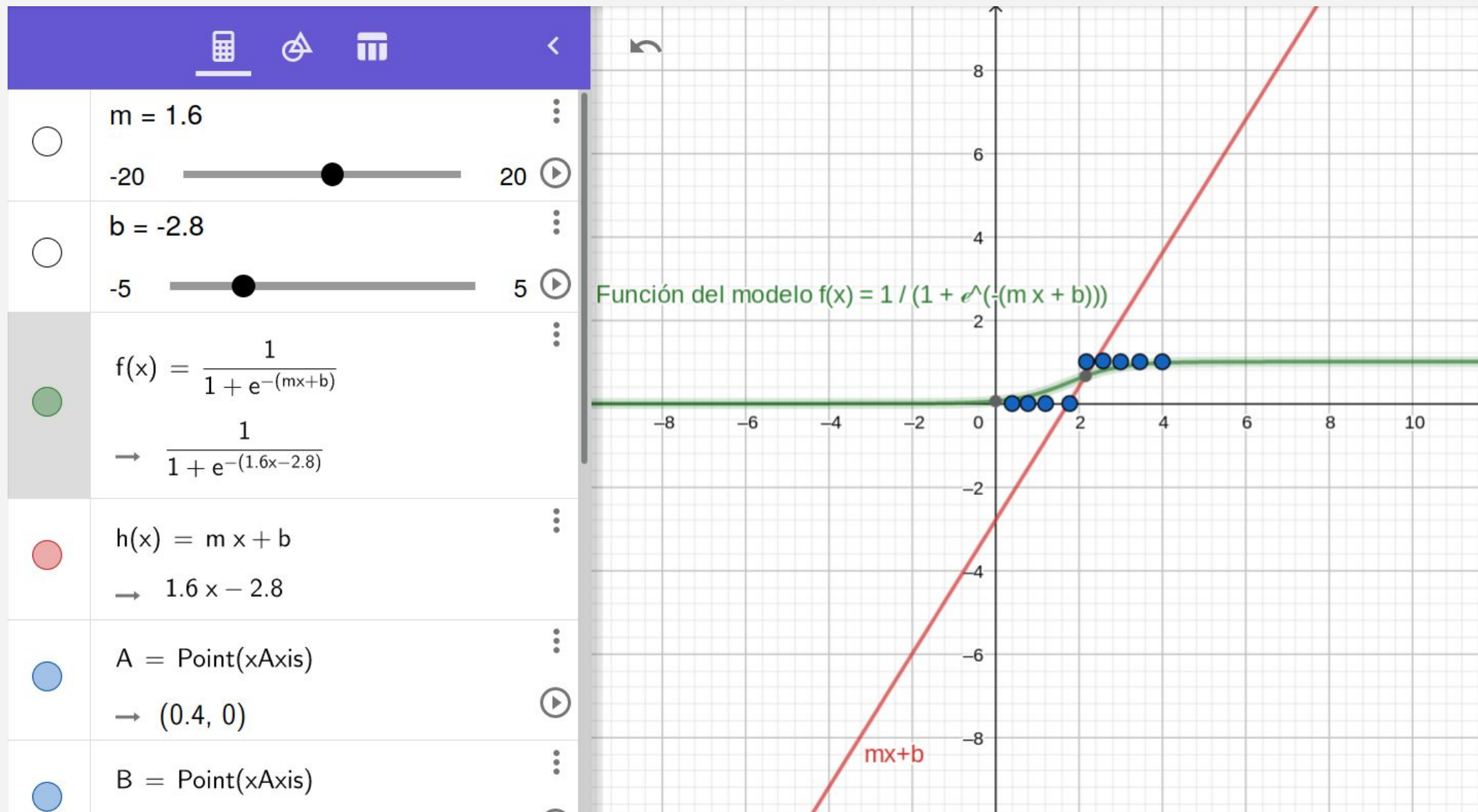


- $b=0$



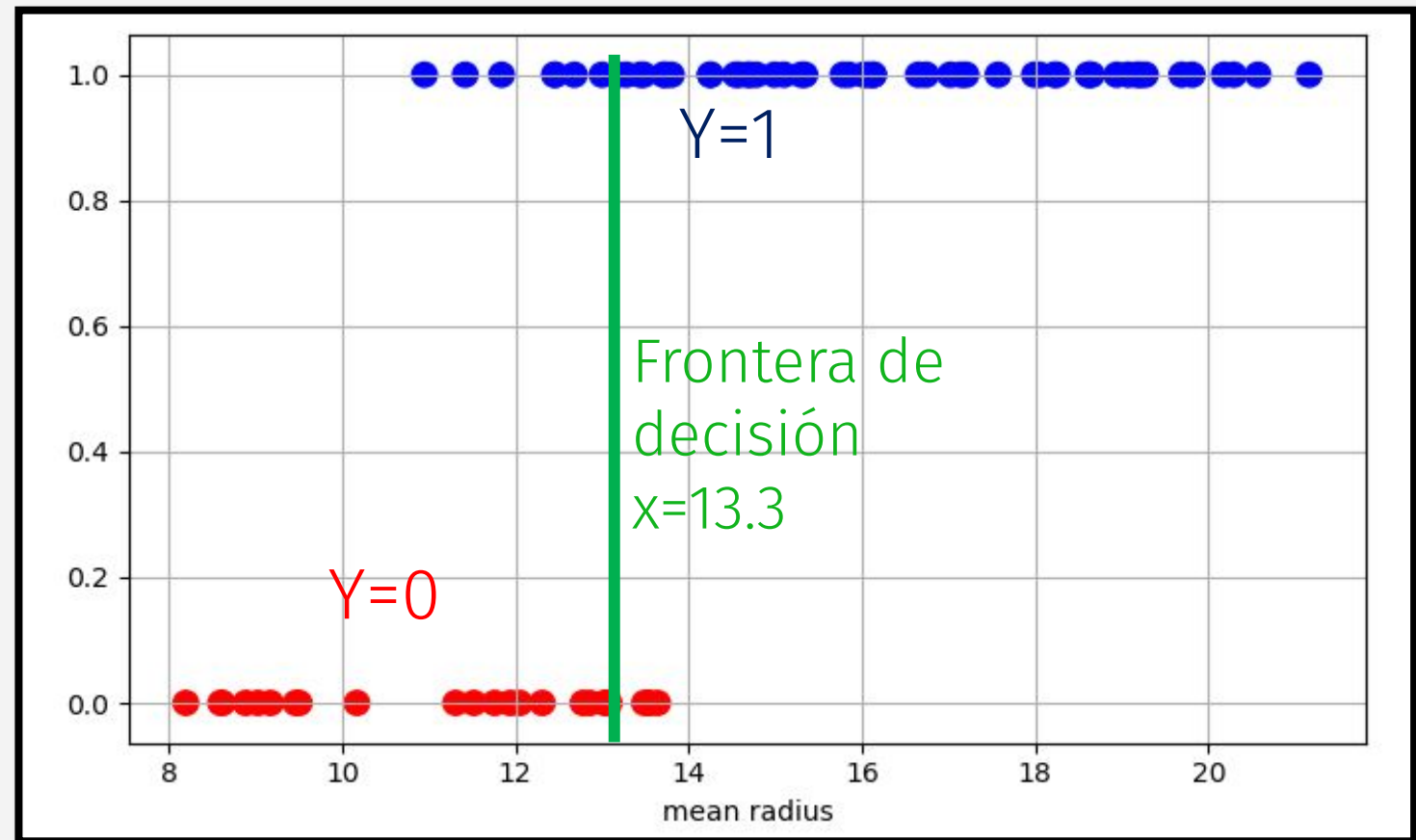
- $b=-5$

# Simulación interactiva



# Frontera de decisión 1D

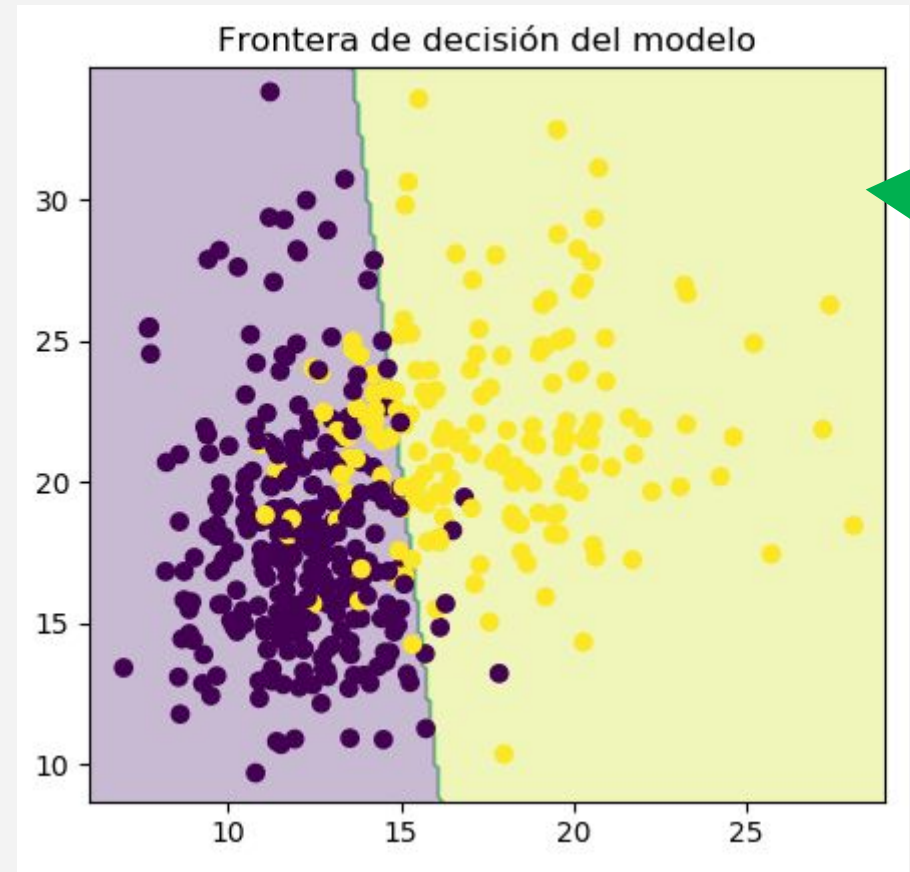
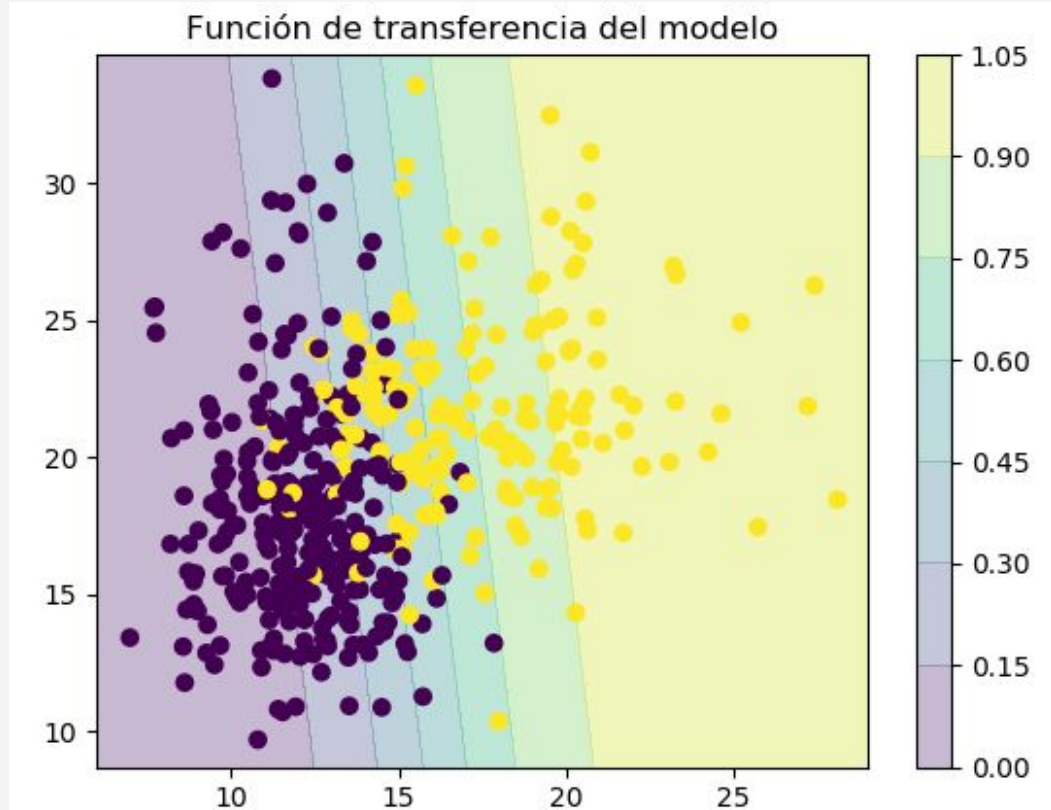
- Asumimos un umbral  $u=0.5$
- Si  $w=0.3$  y  $b=-4$
- Entonces
  - $y = 1$  si  $f(x) > 0.5$
- $f(x) > u$   
 $\sigma(mx+b) > 0.5$   
 $mx+b > 0$   
 $x > -b/m$  (si  $m > 0$ )
- $x > -(-4)/0.3$   
 $x > \mathbf{13.3}$



# Frontera de decisión 2D

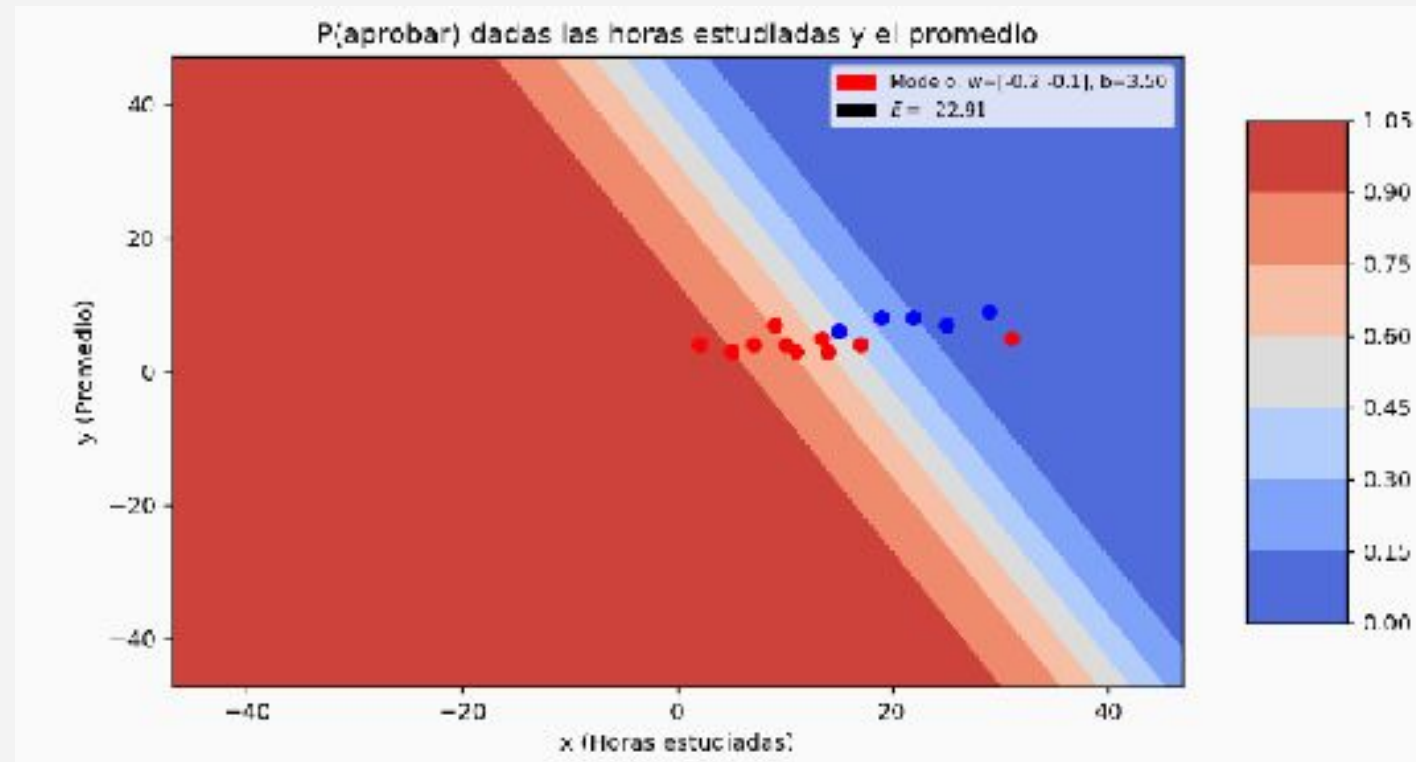
- $f(x_1, x_2) = \sigma(w_1 x_1 + w_2 x_2 + b)$
- Ejemplo con
  - $w = [0.47, 0.05]$
  - $b = -8$

$$y = 1 \text{ si } g(x) > 0,5 \rightarrow w_1 x_1 + w_2 x_2 + b > 0$$
$$0,47x_1 + 0,05x_2 - 8 > 0$$
$$0,47x_1 + 0,05x_2 > 8$$
$$x_2 = 160 - 9,4x_1$$



# Regresión Logística. Resumen.

- Modelo  $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sigma(x_1 w_1 + x_2 w_2 + \dots + x_m w_m + b)$ 
  - $\sigma(x) = 1/(1+e^{-x})$ 
    - Sigmoide o Logística
    - Convierte imagen a 0-1
  - $f(x) = \sigma(\text{RegresionLineal}(x))$
- Umbral
  - Convierte probabilidades a clases
  - Frontera de decisión
- $w$  y  $b$ 
  - Modifican la frontera





# Función Logística o Sigmoides

1. Abrir el archivo **Funcion Logistica.ipynb**
2. Probar con algunos valores distintos de **x** para ver como cambia a cada paso la transformación.
3. ¿Para qué valor  $\sigma(x) = 0.5$ ?
4. Dadas las asíntotas, sería teóricamente imposible que  $\sigma(x)$  de como resultado 1 o 0. No obstante, en una computadora ¿podés hacer que, de todos modos, de como resultado 0 o 1? ¿por qué?

# Modelo Regresión Logística

- Abrir el archivo **Separación por hiperplanos.ipynb**
  - ¿Qué valor tiene la salida de un lado y del otro del plano?
  - ¿Y el valor de  $xw + b$  ?
  - Probar variando los valores de  $W$  y  $b$ 
    - ¿Cómo varían las regiones?