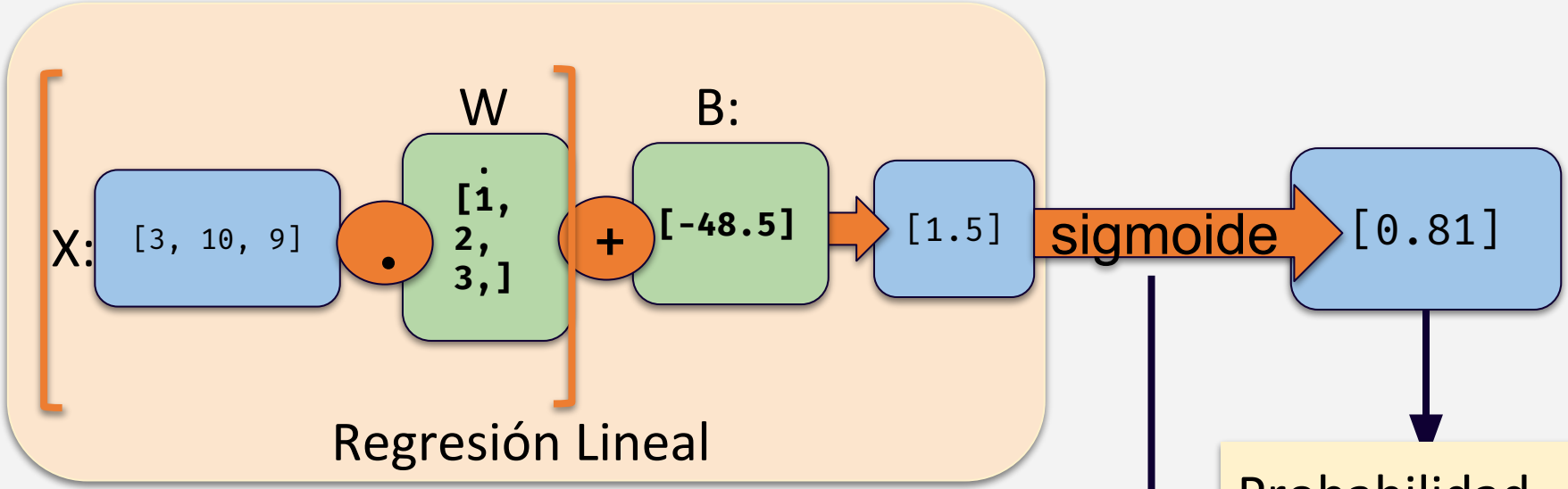
Regresión **Logísitca** con **Múltiples** Variables de Salida

Regresión Logística (dos clases)

Estudio	Edad	Promedio	Aprobó (y)
2	24	4	0
5	22	3	1
7	25	4	0
9	20	7	1
10	19	4	0
11	20	3	0
13,4	21	5	1
14	20	3	0



¿Si hay N clases?

s(x)=1/(1+exp(-x))

```
def sigmoide(x):
    d=1+np.exp(-x)
    return 1/d
```

Probabilidad de aprobar. Si >0.5, clasificar como “aprobado”

Regresión Logística Múltiple

Múltiples opciones
=> predicciones independientes

Variables (x)			Carrera (y)		
Estudio	Edad	Promedio	P1	P2	P3
2	24	4	0	1	1
5	22	3	1	1	1
7	25	4	0	1	0
9	20	7	1	0	1
10	19	4	0	1	0
11	20	3	1	1	1
13,4	21	5	1	0	1
14	20	3	0	1	0

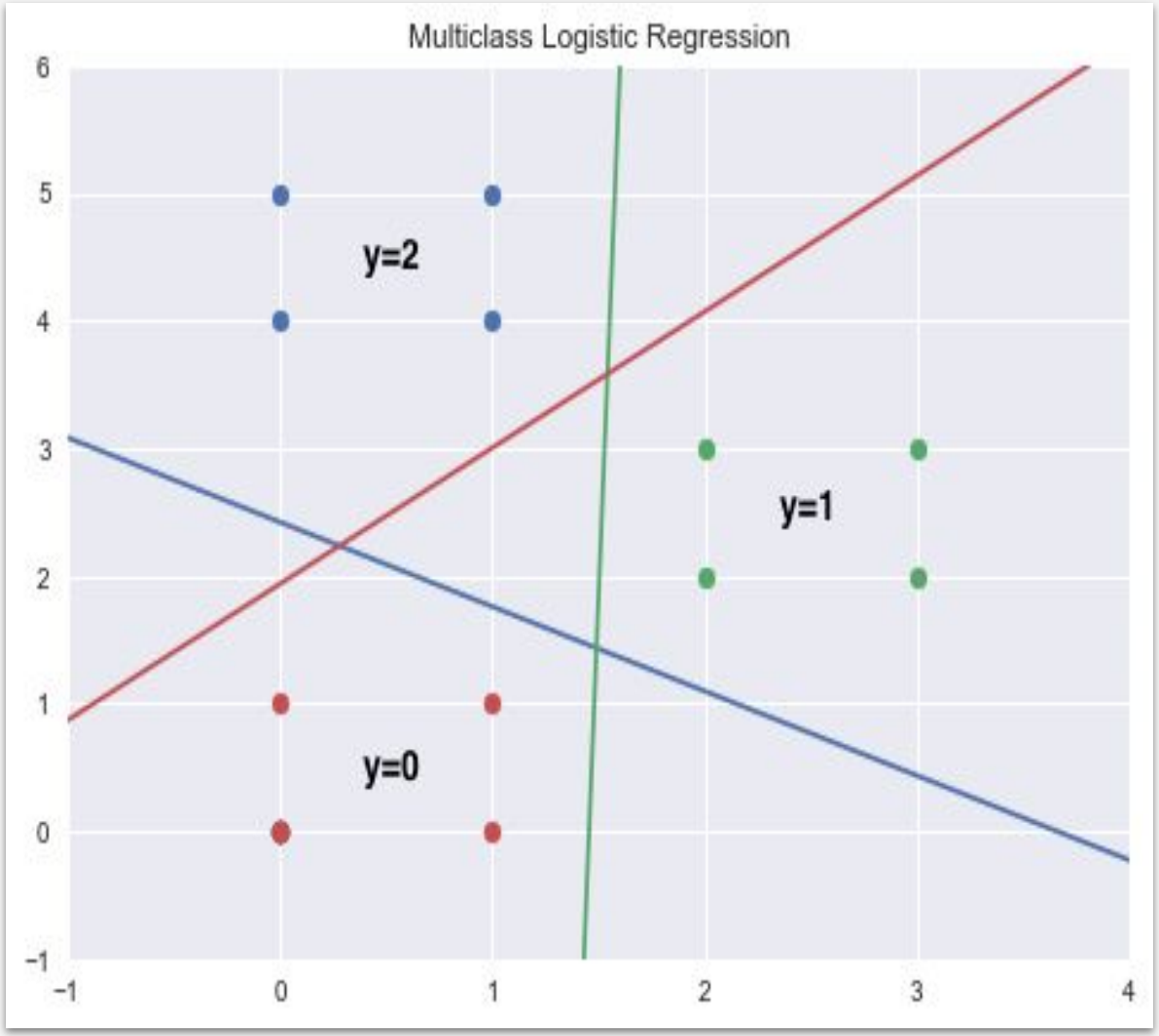
Clases mutuamente exclusivas
=> Problema de **clasificación**

Variables (x)			Carrera (y)		
Estudio	Edad	Promedio	LS	LI	IC
2	24	4	1	0	0
5	22	3	0	1	0
7	25	4	0	1	0
9	20	7	1	0	1
10	19	4	0	1	0
11	20	3	0	0	1
13,4	21	5	0	1	0
14	20	3	1	0	0

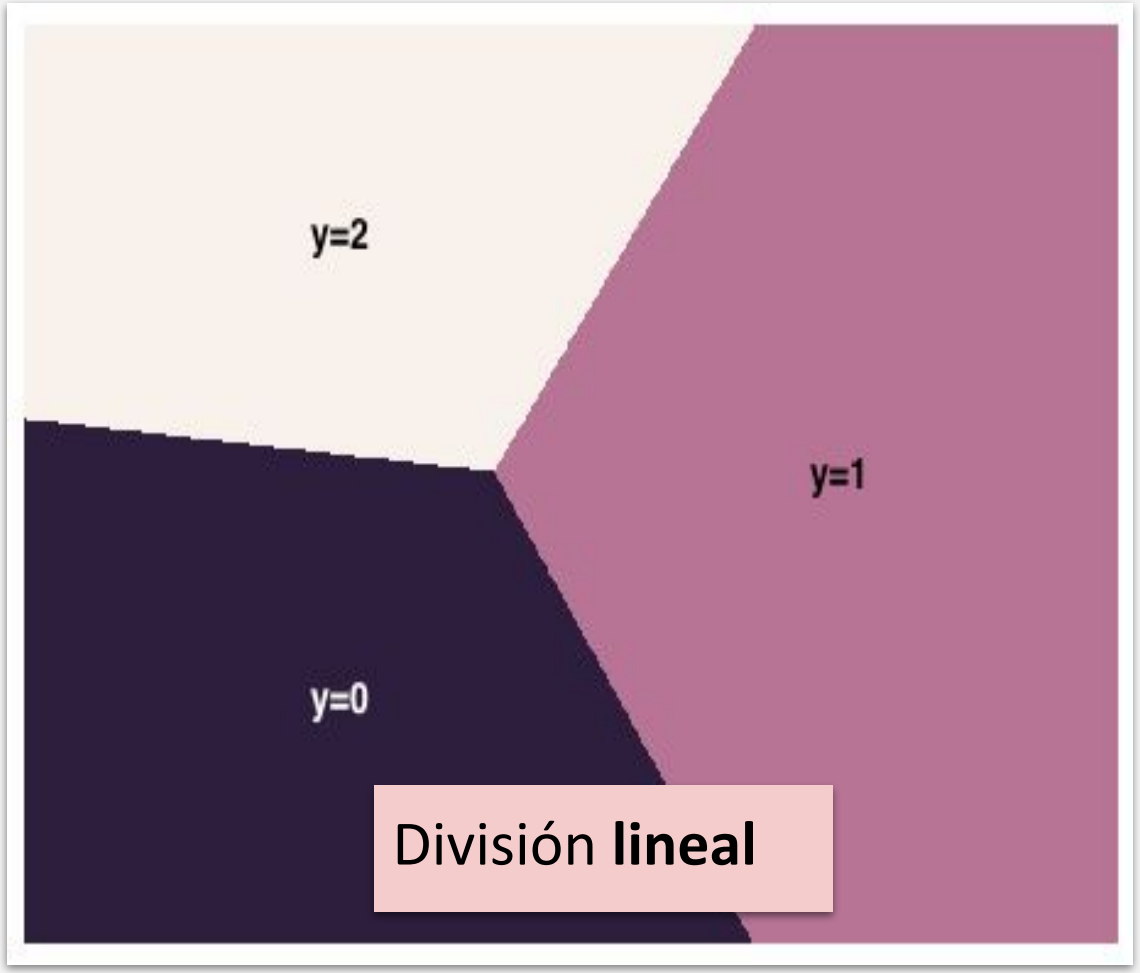
En esta materia:
problemas de clasificación

Regresión **Logística** Múltiple - **Intuición**

Un hiperplano por cada clase



Dividen el espacio en regiones por clase



https://machinelearningmedium.com/2017/09/06/multiclass-logistic-regression/

Regresión Logística Múltiple - Codificación

Codificación “One Hot”. Cada clase con su columna. Tamaño de y: N x C

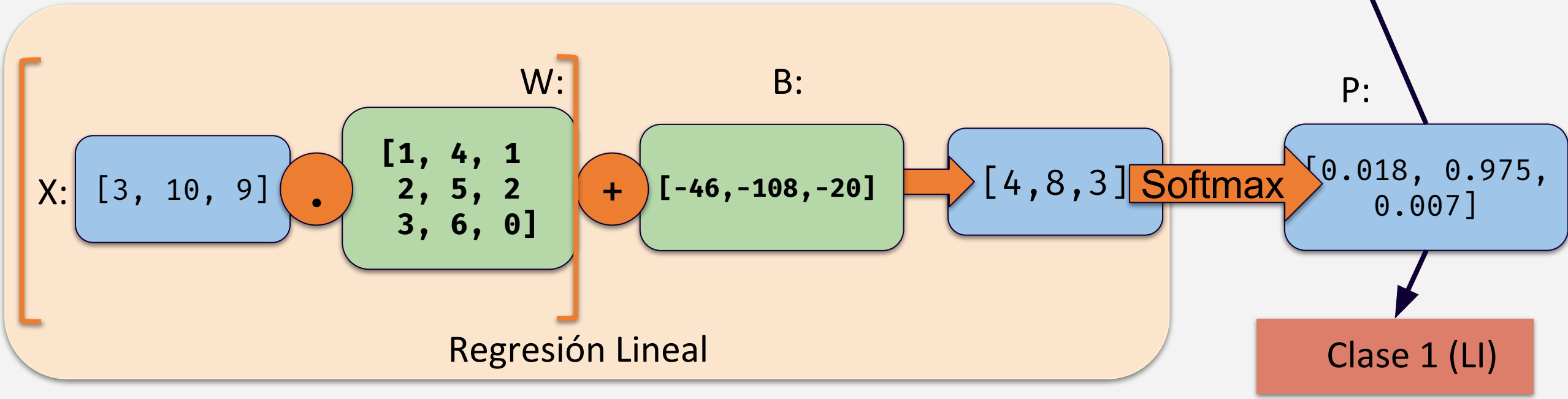
Variables (x)			Carrera (y)		
Estudio	**Edad**	**Promedio**	LS	LI	IC
2	24	4	1	0	0
5	22	3	0	1	0
7	25	4	0	1	0
9	20	7	0	0	1
10	19	4	1	0	0
11	20	3	0	0	1
13,4	21	5	0	1	0
14	20	3	1	0	0

Codificación con etiquetas. Cada clase con su ID. Tamaño de y: N x 1

Variables (x)			Carrera (y)
Estudio	**Edad**	**Promedio**	LS = 0, LI = 1, IC = 2
2	24	4	0
5	22	3	1
7	25	4	1
9	20	7	2
10	19	4	0
11	20	3	2
13,4	21	5	1
14	20	3	0

Softmax

- Similar a **Regresión Lineal** pero para predecir probabilidades
- Función **softmax** aplicada a la salida
  - Genera **distribución de probabilidad P(y)**
- **Clasificación de N clases**



Softmax

- Función **softmax**
  - Convierte salida de Regresión Lineal en distribución de probabilidades de c/ clase

¿Por qué e^x?

- Resultado > 0
- Exponencial, acentúa los valores altos
- Podría ser con otra base

Y:

`[4,8,3]`

Softmax

1) Cálculo del vector E

E= [**e^4**, e^8,**e^3**] = [**54.59**, 2980.95,**20.08**]

2) Cálculo del valor N

N = **e^4** + e^8 + **e^3** = **54.59** + 2980.95 + **20.08** = 3055.63

3) Cálculo del vector P de probabilidades

P= E / N = [**e^4/N**, e^8/N, **e^3/N**]

= [**54.59/3055.63**, 2980.95/3055.63, **20.08/3055.63**]

P:

`[0.018, 0.975, 0.007]`

Softmax

Y:

[4,8,3]

```
def softmax(Y):
    n=len(Y)
    E=np.zeros_like(Y)
    for i in range(n):
        E[i] = np.exp(Y[i])
    N=0
    for i in range(n):
        N=N+E[i]
    P=np.zeros_like(Y)
    for i in range(n):
        P[i]=E[i]/N
    return P
```

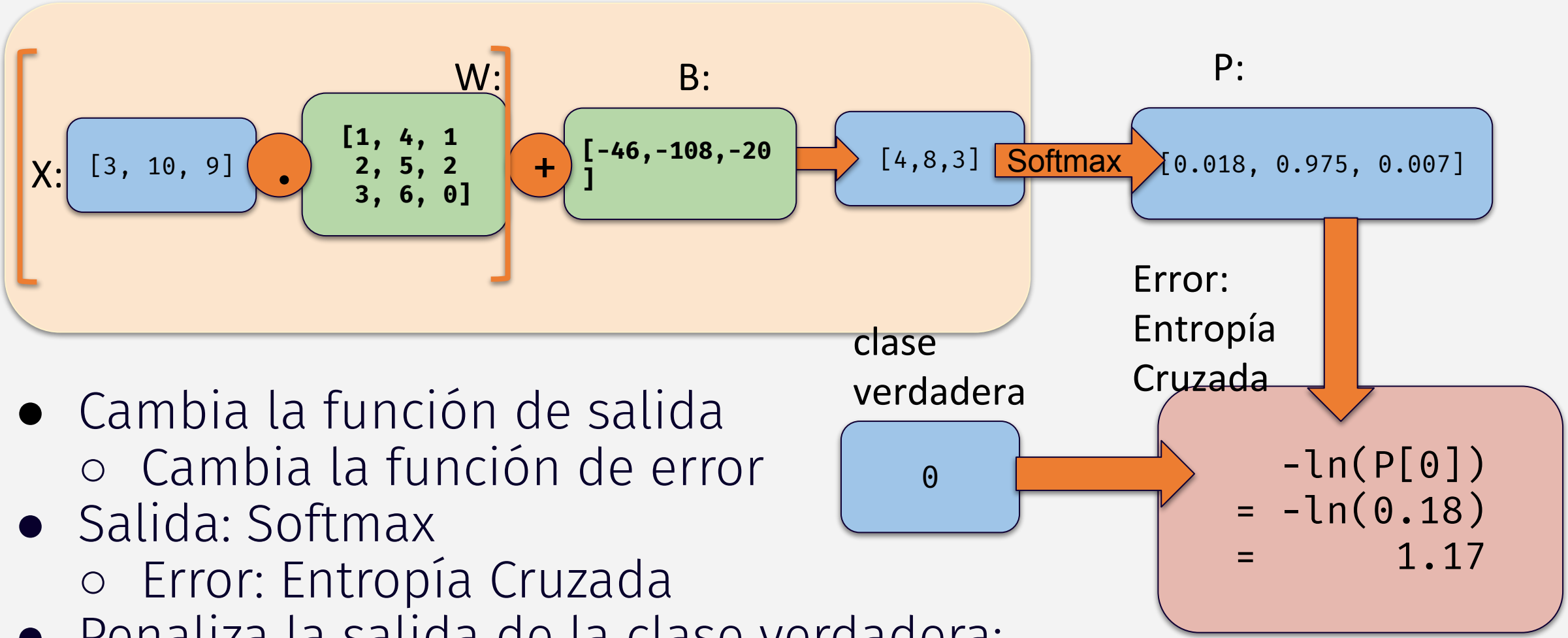
P:

[0.018, 0.975, 0.007]

Versión vectorial:

```
def softmax(Y):
    E=np.exp(Y)
    N=np.sum(E)
    return E/N
```

Función de error: Entropía Cruzada



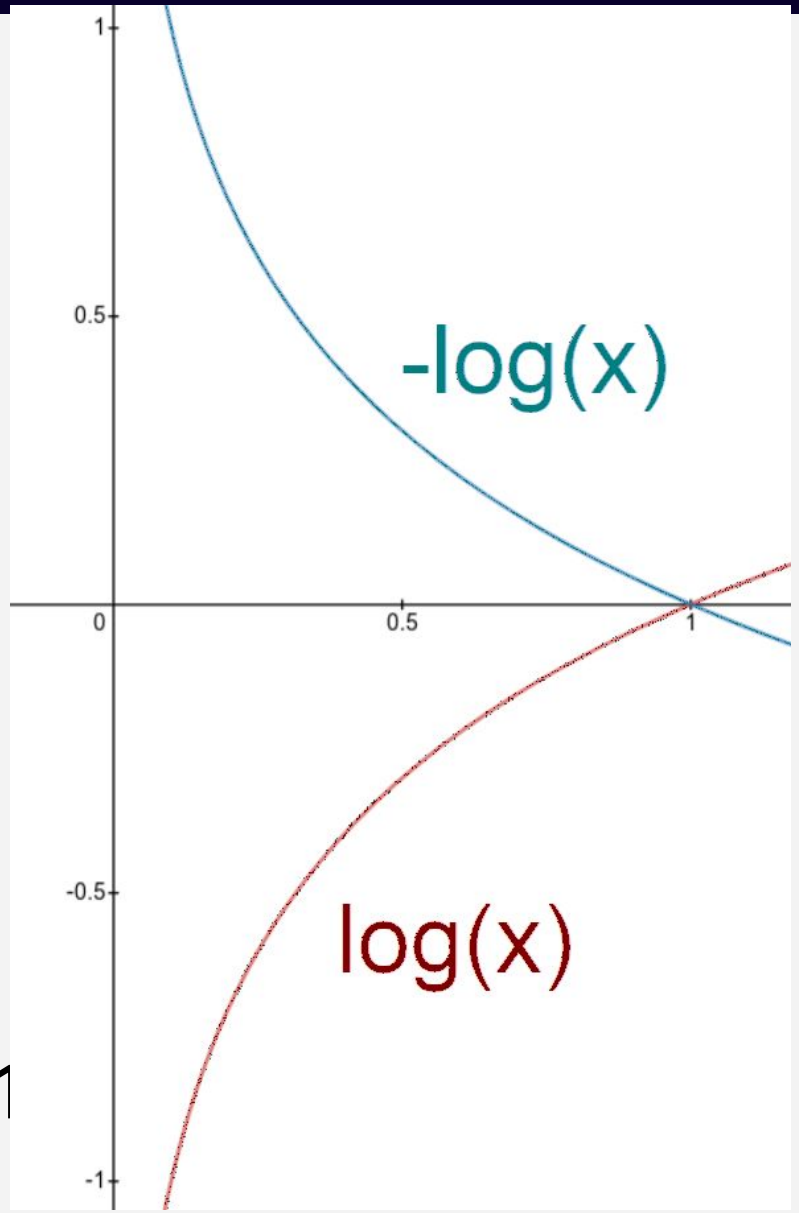
- Cambia la función de salida
  - Cambia la función de error
- Salida: Softmax
  - Error: Entropía Cruzada
- Penaliza la salida de la clase verdadera:
  - **-ln(P[clase_verdadera])**

Repaso Logaritmo

- Funciones **ln(x)** y **-ln(x)**
  - Cuando **0 <= x <= 1**
- Si **x** tiende a **1**
  - ln(x) tiende a 0
  - **-ln(x) tiende a 0**
- Si **x** tiende a **0**
  - ln(x) tiende a -infinito
  - **-ln(x) tiende a +infinito**

Entonces

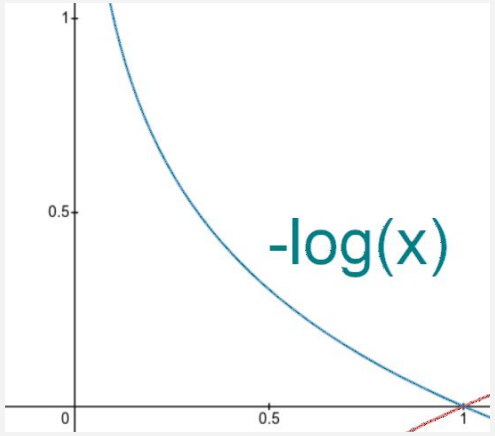
- -ln(**P[clase_verdadera]**)
  - Penaliza si **P[clase_verdadera] = 0**
  - NO penaliza **si P[clase_verdadera] = 1**



Función de error - Entropía Cruzada

Función de error = Entropía Cruzada = ln(P[clase_verdadera])

Variables			Carrera	xW+b			P(Carrera)			E	
Estudio	Edad	Promedio	LS = 0, LI = 1, IC = 2	LS	LI	IC	LS	LI	IC		
2	24	4	0	46	50	**50.2**	0.01	0.45	**0.55**	-log(0.01)	4.61
14	20	3	0	**69**	66	66.1	**0.91**	0.05	0.05	-log(0.91)	0.09



- -ln(P[clase_verdadera])
  - Penaliza mucho si P[clase_verdadera] ~= 0
  - Penaliza poco si P[clase_verdadera] ~= 1

Función de error - Entropía Cruzada

Función de error = Entropía Cruzada Promedio = E.mean()

Variables			Carrera	xW+b			P(Carrera)			E	
Estudio	Edad	Promedio	LS = 0, LI = 1, IC = 2	LS	LI	IC	LS	LI	IC		
2	24	4	0	46	50	**50.2**	0.01	0.45	**0.55**	-log(0.01)	4.61
5	22	3	1	49.5	51	**51.3**	0.09	0.39	**0.52**	-log(0.39)	0.94
7	25	4	1	60	61.5	**61.8**	0.09	0.39	**0.52**	-log(0.39)	1.20
9	20	7	2	60.5	**64**	62.9	0.02	**0.73**	0.24	-log(0.24)	1.43
10	19	4	0	**58.5**	**58.5**	58.2	**0.36**	**0.36**	0.27	-log(0.36)	1.35
11	20	3	2	**61.5**	60	60.1	**0.68**	0.15	0.17	-log(0.17)	0.39
13,4	21	5	1	**71**	70.3	69.9	**0.55**	0.27	0.18	-log(0.55)	1.31
14	20	3	0	**69**	66	66.1	**0.91**	0.05	0.05	-log(0.91)	0.09

Error Promedio = 1.41

Función de error - Entropía Cruzada

p [0.09,0.39,0.52]

y 1

```
def entropia_ejemplo(p,y):
    return -log(p[y])
```

e

-log(0.39)=0.94

Y	P		
LS = 0, LI = 1, IC = 2	LS	LI	IC
0	0.01	0.45	**0.55**
1	0.09	0.39	**0.52**
1	0.09	0.39	**0.52**
2	0.02	**0.73**	0.24
0	**0.36**	**0.36**	0.27
2	**0.68**	0.15	0.17
1	**0.55**	0.27	0.18
0	**0.91**	0.05	0.05

```
def entropia_promedio(P,Y):
    n=len(Y)
    es=np.zeros(n)
    for i in range(n):
        p=P[i,:]
        y=Y[i]
        es[i]=entropia_ejemplo(p,y)
    return es.mean()
```

Promedio = 1.41

Keras - Con Codificación por Etiquetas

```
x,y=cargar_dataset(one_hot=False)
nx,d_in  = x.shape # x tiene tamaño n x d_in
ny = y.shape # y tiene tamaño n x 1 (codificacion etiquetas)
classes=y.max()+1 # etiqueta de clase máxima+1
assert(nx=ny) # misma cantidad de ejemplos en ambos vectores
import keras
#Creamos el modelo
model=keras.Sequential()
#Capa lineal que convierte vector de d_in a d_out dims
model.add(keras.Dense(classes,input_shape=[d_in],
                      activation="softmax"))
model.compile(loss='sparse_categorical_crossentropy',# ent. cruz.
              optimizer='sgd') # descenso de gradiente
history = model.fit(x,y,epochs=100,batch_size=32)
y_predicted=model.predict(x)
```

Keras - Con Codificación One Hot

```
x,y=cargar_dataset(one_hot=True)
nx,d_in  = x.shape # x tiene tamaño n x d_in
ny,classes = y.shape # y tiene tamaño n x clases (one hot)
assert(nx=ny) # misma cantidad de ejemplos en ambos vectores

import keras
#Creamos el modelo
model=keras.Sequential()
#Capa lineal que convierte vector de d_in a d_out dims
model.add(keras.Dense(classes,input_shape=[d_in],
                      activation="softmax"))
model.compile(loss='categorical_crossentropy',# ent. cruz.
              optimizer='sgd') # descenso de gradiente
history = model.fit(x,y,epochs=100,batch_size=32)
y_predicted=model.predict(x)
```

Accuracy con varias clases

- Accuracy = % de ejemplos que clasificó correctamente

Carrera	P(Carrera)			Predicción	Acierto
LS = 0, LI = 1, IC = 2	LS	LI	IC		
0	0.01	0.45	0.55	2	0
1	0.09	0.39	0.52	2	0
1	0.09	0.39	0.52	2	0
2	0.02	0.73	0.24	1	0
0	0.36	0.36	0.27	0	1
2	0.68	0.15	0.17	0	0
1	0.55	0.27	0.18	0	0
0	0.91	0.05	0.05	0	1

- **Predicción**
  - P(Carrera).argmax()
  - El índice del mayor elemento
- **Acierto**
  - 1 si Carrera = Predicción
- **Accuracy**
  - Promedio de columna **Acierto**
- Ejemplo
  - N = 8
  - aciertos=2
  - Accuracy = aciertos/N = 2/8 = 0.25
  - Accuracy(%) = 25%

Resumen

- Permite realizar clasificación de **más de 2 clases**
- Función **softmax** se aplica luego de la regresión lineal
  - Genera una distribución de probabilidades
- **Entropía cruzada:** error adecuado para la **softmax**
- Sigue teniendo una solución única (optimización convexa)

Variables			Carrera
Estudio	Edad	Promedio	LS = 0, LI = 1, IC = 2
2	24	4	0
5	22	3	1
7	25	4	1
9	20	7	2
10	19	4	0
11	20	3	2
13,4	21	5	1
14	20	3	0