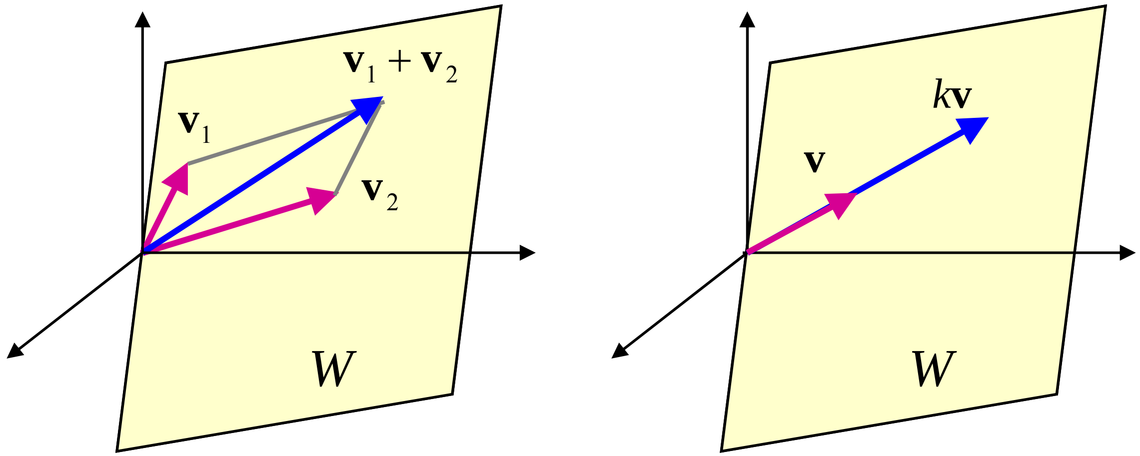
3.4 부분공간과 일차독립

Subspaces and Linear Independence



전북대학교 전자공학부 송상섭

부분 공간이란?

용어 : 닫혀 있다...

- 집합 W의 임의 벡터의 모든 스칼라곱이 W에 들어 있으면 W는 스칼라곱에 대해 닫혀 있다고 한다.

$$\mathbf{x} \in W \quad \Rightarrow \quad k\mathbf{x} \in W$$

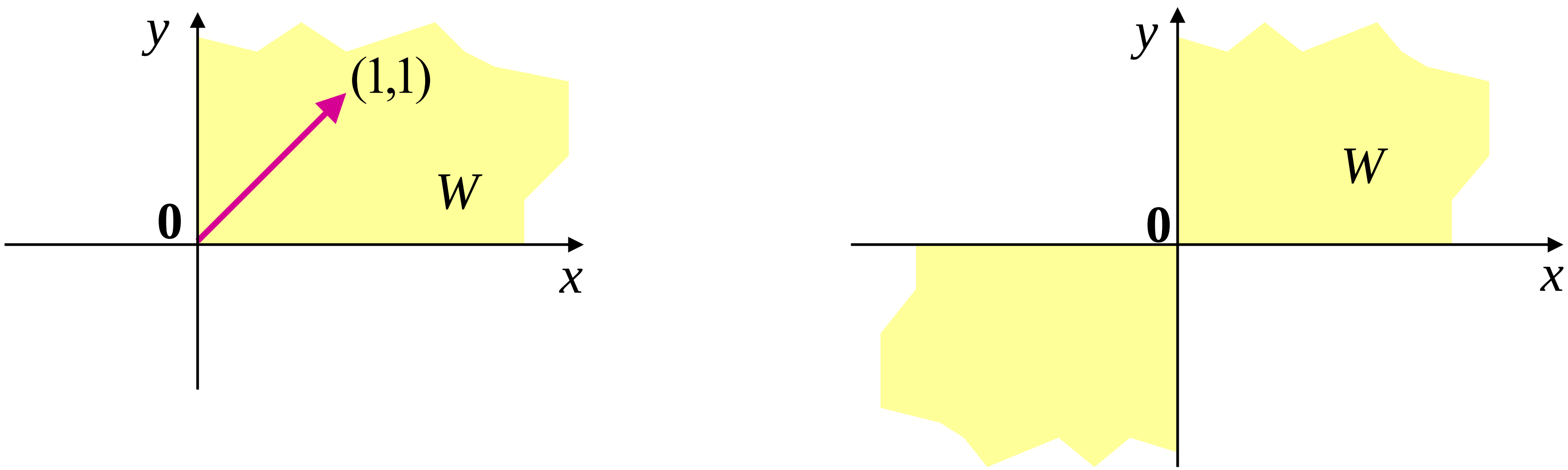
- 집합 W의 임의의 두 벡터의 합이 W에 들어 있으면 W는 덧셈에 대해 닫혀 있다고 한다.

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W \;\Rightarrow\; \mathbf{x} + \mathbf{y} \in W$$

정의 3.4.1 R^n의 부분 집합 $W(\neq \phi)$가 스칼라곱과 덧셈에 대하여 닫혀 있으면 이 집합은 R^n의 부분공간(subspace)이라 부른다.

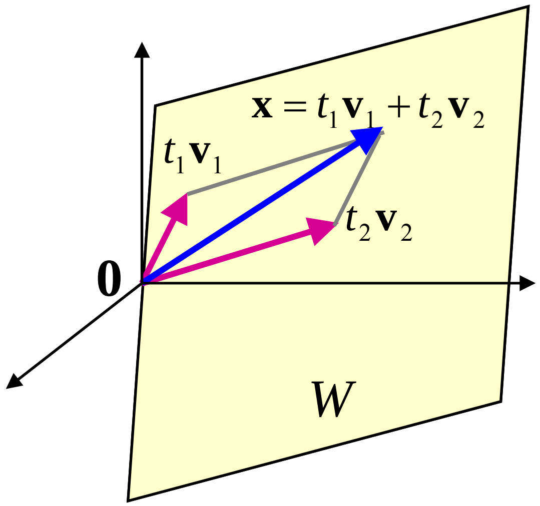
부분공간...

- 자명한 부분공간: $\{\mathbf{0}\}$, $\{R^n\}$
- 모든 부분공간은 벡터 **0**을 포함한다.
- 1 사분면은 부분공간? 1+3 사분면은 (연습문제 D5)?



- Try 연습문제 23번, 24번

원점을 지나는 평면...부분공간?



- W는 원점($\mathbf{0}$)을 지나고 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$에 나란한 평면...

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2$$

부분공간을 생성한다 ???

정리 3.4.2 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s$ 가 R^n의 벡터이면 모든 일차결합

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_s\mathbf{v}_s$$

들의 집합은 R^n의 부분공간이다.

- 이러한 부분공간을 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s$ 의 생성(span)이라 하고...

$$W = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s\}$$
$$W = \text{span}\{S\},\ S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s\}$$

- 이때 벡터 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s$ 는 W를 생성한다고 한다...

- $\text{span}\{\mathbf{0}\} =$
- $\text{span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\} =$

예제 4 ...

R^2의 모든 부분공간은 다음 세 범주로 나누어진다.

- 영부분공간, $\{\mathbf{0}\}$
- 원점을 지나는 직선, 또는
- R^2 전체이다.

R^3의 모든 부분공간은 다음 네 범주로 나누어진다.

- 영부분공간, $\{\mathbf{0}\}$
- 원점을 지나는 직선,
- 원점을 지나는 평면, 또는
- R^3 전체이다.

동차선형계의 해집합은 부분공간...

정리 3.4.3 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$이 n개의 미지수를 갖는 동차선형계이면 그 해집합은 R^n의 부분공간이다.

1. $\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 해이므로 해공간 W는 공집합이 아니다 ➔ $W \neq \phi$
2. 스칼라곱에 대해 닫혀 있나?
3. 덧셈에 대해 닫혀 있나?

- 이것을 선형계의 **해공간(solution space)**이라고 부른다.
- 해공간은 선형계의 일반해라 부르는 아래의 일차 결합 형태로 표시될 수 있다,

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 + \cdots + t_s\mathbf{v}_s$$

예제 5 동차계의 해공간...

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 해공간 $= \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$

$$\mathbf{v}_1 = (-3, \underline{1}, 0, \underline{0}, \underline{0}, 0),\ \mathbf{v}_2 = (-4, \underline{0}, -2, \underline{1}, \underline{0}, 0),\ \mathbf{v}_3 = (-2, \underline{0}, 0, \underline{0}, \underline{1}, 0)$$

$$\text{RREF}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Free variables

일차독립이란?

정의 **3.4.5** 방정식

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

을 만족시키는 유일한 스칼라들 $c_1, c_2, \cdots, c_s$가 $c_1 = c_2 = \cdots = c_s = 0$ 이면 집합 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s\}$는 **일차독립(linearly independent)**이라고 한다.

그렇지 않고, 이 방정식을 만족시키는 모두는 동시에 영이 아닌 스칼라들이 존재하면 집합 S는 **일차종속(linearly dependent)**이라 한다.

예제 **8** 한 개의 벡터는 영벡터이면 일차(   )이고, 영벡터가 아니면 일차(   )이다.

예제 **9** 영벡터를 포함하는 R^n의 벡터들의 집합은 일차(   )이다.

일차종속이라면...

정리 3.4.6

벡터들의 집합 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s\}$가 일차종속 ←→ S의 벡터 중 적어도 어느 하나는 다른 벡터들의 일차결합으로 표현할 수 있다.

증명(→) S가 일차종속이라 가정하자. 이는

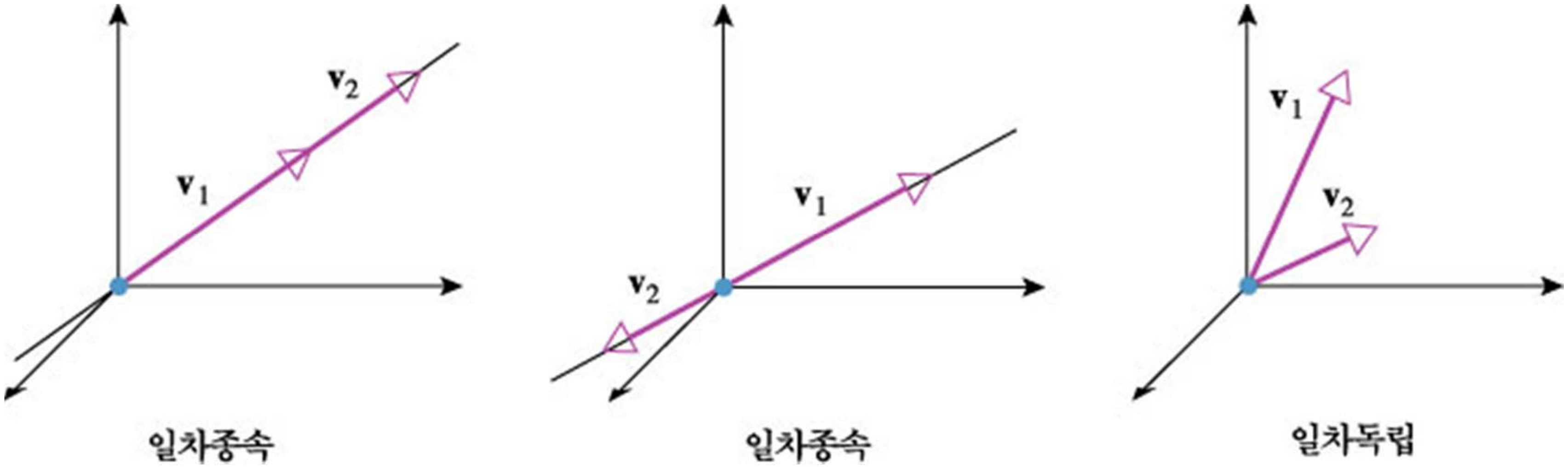
$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$$

가 되는 모두가 영이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \cdots, c_s$가 존재한다. 특히 $c_1 \neq 0$ 이라고 가정하자.

(←)

두 벡터의 일차독립이란?

예제 10

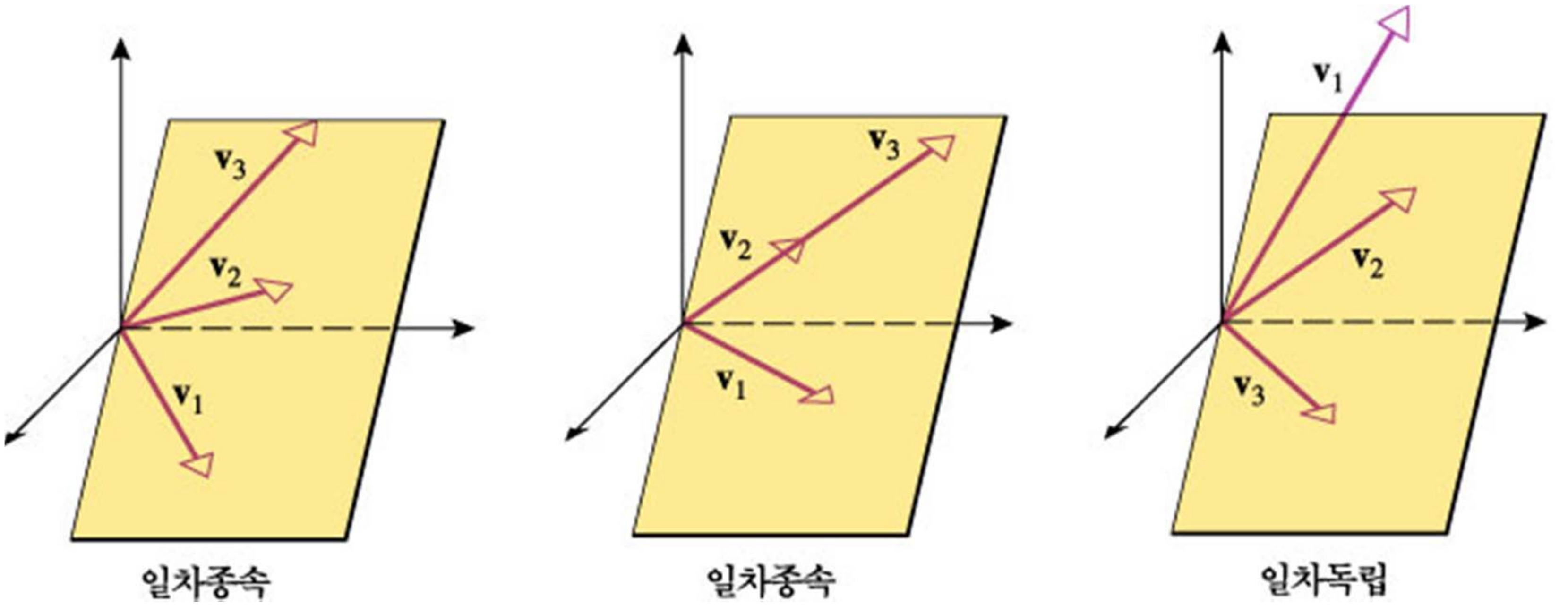


- 일차종속이면

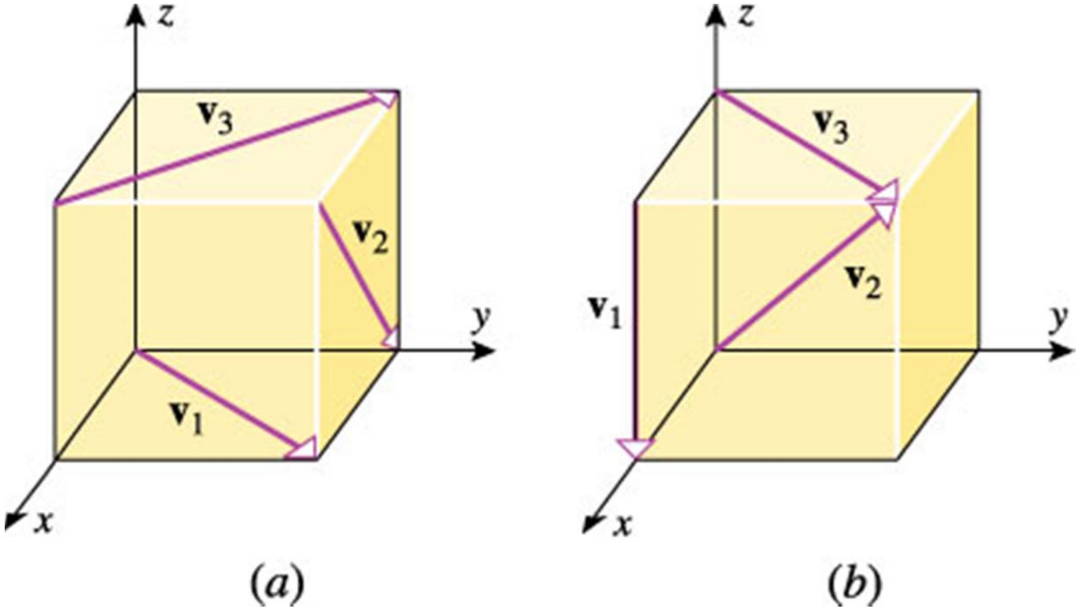
  $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ 가 되는 c_1, c_2가 모두 영은 아니므로...

세 벡터의 일차독립이란?

예제 **11**



연습문제 3.4의 D4...



일차독립인지를 판단하려면...

R^n의 벡터들의 집합 $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s\}$가 일차독립인지를 판정하기 위하여 동차선형계를 어떻게 이용하는지...

$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s]$로 놓으면

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_s\mathbf{v}_s = \mathbf{0} \iff [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

따라서 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_s$가 일차독립인지를 판정하는 문제는 <u>(11)이 자명하지 않은 해를 가졌는지</u>를 판정하는 문제로 바뀐다.

정리 **3.4.7** 동차선형계 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$가

- 자명한 해만을 가지면 ➔ A의 열벡터들은 일차 (   )이다.
- 자명하지 않은 해도 가지면 ➔ A의 열벡터들은 일차 (   )이고,

예제 12...

$$(a)\ \mathbf{v}_1 = (1,2,1),\quad \mathbf{v}_2 = (2,5,0),\quad \mathbf{v}_3 = (3,3,8)$$

$$(b)\ \mathbf{v}_1 = (1,2,-1),\ \mathbf{v}_2 = (6,4,2),\quad \mathbf{v}_3 = (4,-1,5)$$

$$(c)\ \mathbf{v}_1 = (2,-4,6), \mathbf{v}_2 = (0,7,-5),\ \mathbf{v}_3 = (6,9,8),\quad \mathbf{v}_4 = (5,0,1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A가 가역행렬(?) ➔ 자명한 해만을 갖는다
➔ 일차 (   )

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A가 비가역행렬(?) ➔ 자명하지 않은 해를 갖는다 ➔ 일차 (   )

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 & 5 \\ -4 & 7 & 9 & 0 \\ 6 & -5 & 8 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

방정식보다 미지수의 개수가 많으므로 ➔ 자명하지 않은 해를 갖는다 ➔ 일차 (   )

그리고...

정리 3.4.9 A가 $n \times n$ 행렬이면 다음 명제들은 동치이다.

(a) A의 RREF는 I_n이다.
(b) A는 기본행렬의 곱으로 쓸 수 있다.
(c) A는 가역행렬이다.
(d) $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$은 오직 자명한 해만을 갖는다.
(e) R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대해서 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 해를 갖는다.
(f) R^n의 모든 벡터 $\mathbf{b}$에 대해서 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$는 오직 한 개의 해만을 갖는다.
(g) A의 열벡터들은 일차독립이다.
(h) A의 행벡터들은 일차독립이다.