



PROFESOR: ALEJANDRO CATALDO – DANIEL ZÚÑIGA  
IMT2116 - TALLER DE MATEMÁTICAS APLICADAS (CAPSTONE)  
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

# Valoración de Opcionalidades de Pre pago sobre Créditos Hipotecarios

Vicente Alfaro, Cristian Chávez, Bruno Parra

7 de diciembre de 2025

# 1. Introducción

## 1.1. Contexto Organizacional

El presente trabajo se desarrolla en el contexto de la banca corporativa y de personas del Banco Itaú Chile, una de las principales instituciones financieras del país. El proyecto aborda una problemática relevante para la gestión del balance del banco: la valoración del riesgo de mercado implícito en la oferta de créditos a largo plazo con posibilidad de prepago.

## 1.2. Problema de Negocio

Una de las actividades del banco consiste en la intermediación financiera: capta recursos (pasivos) y los ofrece en forma de préstamos (activos). Para gestionar el riesgo asociado a la tasa de interés, la institución busca calzar la duración de sus activos y pasivos.

Sin embargo, esta estabilidad se ve amenazada por el riesgo de prepago. Cuando las tasas de interés de mercado disminuyen, los clientes tienen un incentivo racional para prepagar su deuda actual y refinanciarse a una tasa menor. Financieramente, esto equivale a que el deudor ejerza una opción de compra sobre el bono que constituye su deuda.

La ejecución de esta opción genera un perjuicio económico para el banco, conocido como riesgo de reinversión o descalce de balance:

1. El banco recibe el capital prepagado y deja de percibir los flujos futuros pactados a la tasa original.
2. El banco debe reinvertir el capital a una tasa de interés menor, reduciendo sus ingresos futuros.
3. A su vez, el banco debe seguir pagando sus pasivos a la tasa original pactada, generando un descalce entre los ingresos y egresos futuros.

## 1.3. Motivación y Estado Actual

Actualmente, para créditos mayores a 5.000 UF se pacta una cláusula de prepago entre las contrapartes. Para créditos menores, el banco asume el riesgo de prepago sin protección contractual, ya que este se rige por la ley 18.010 que establece un valor máximo para la penalización por prepago de un mes y medio de intereses calculado sobre el capital que se prepara [2].

Para mitigar este riesgo, el banco utiliza heurísticas conservadoras, se estima la vida media del crédito y se aplica un *spread* a la tasa de interés ofrecida al cliente para compensar la posible pérdida futura.

Esta metodología presenta dos desventajas como lo son la ineficiencia en la asignación de precios y la gestión de riesgo imprecisa. Respecto a la primera, se corre el riesgo de sobreestimar el riesgo de prepago y ofrecer tasas más altas, restando competitividad al banco. En cuanto a la segunda, este modelo no permite cuantificar cómo varía el riesgo de esta opciónalidad ante aumentos de la volatilidad en las tasas de mercado.

Es por ello que se busca implementar un modelo que permita valorar de forma más precisa el riesgo de prepago, optimizando la asignación de precios y mejorando la gestión del riesgo de mercado.

## 2. Objetivos del Proyecto

### 2.1. Objetivo General

El objetivo del proyecto es desarrollar e implementar un modelo de valoración de opcionaldades de prepago en créditos hipotecarios, utilizando modelos de tasas de interés ajustados al mercado chileno actual que permita cuantificar el costo de dicha opcionaldad para ser incorporado en la tasa de interés ofrecida al cliente.

### 2.2. Objetivos Específicos

1. Caracterizar la estructura temporal de tasas de interés en el mercado chileno mediante el análisis de datos históricos y actuales.
2. Implementar modelos de tasa corta, en particular el modelo de Ho–Lee, para generar árboles de tasas de interés consistentes con una curva inicial.
3. Valorar la opción de prepago, modelándola como una opción americana sobre el crédito, determinando el *spread* de opcionaldad necesario para compensar el riesgo asumido por el banco.

## 3. Procesamiento y Descripción de los Datos

Para obtener un valor ajustado de la opcionaldad de prepago, es fundamental conocer el costo de oportunidad que tiene el banco sobre la ejecución de esta acción. En esta sección se detallan las fuentes de información, metodología y procesamiento de los datos que justifica la elección de las variables de estado del modelo.

### 3.1. Origen y Descripción de los Datos

Para la calibración del modelo, se utilizan dos conjuntos de datos provenientes del mercado financiero chileno:

1. Curva Swap Cámara Promedio en CLP: Corresponde a un derivado financiero en el que se acuerda un intercambio de flujos a distintas tasas de interés. En este caso, se utilizan los contratos interbancarios en CLP, un banco entrega un flujo a una tasa fija mientras que la contraparte entrega uno a tasa flotante, el valor del contrato se considera la tasa fija.

Se extrajo el historial de tasas de cierre diario para los 17 tenores disponibles en el mercado interbancario que van desde 1 mes hasta 25 años. Estos datos fueron obtenidos de Bloomberg, abarcando el periodo desde enero de 2021 hasta septiembre de 2025, conformando una matriz de  $1256 \times 17$  de tipo *float*.

2. Tasa de Política Monetaria (TPM): Es la tasa de interés de referencia que el Banco Central determina para influir en el comportamiento de la economía, especialmente en el control de la inflación y la estabilidad de los precios. Esta tasa afecta directamente las tasas de interés que aplican los bancos comerciales y otras instituciones financieras en sus operaciones de crédito y ahorro.

Se obtuvo el historial de valores diarios de la TPM publicado por el Banco Central, cubriendo el mismo periodo que los contratos Swap, resultando en una matriz de  $1180 \times 1$  de tipo *float*.

Se seleccionó este periodo temporal debido a la introducción de los contratos de 1 y 2 meses en 2021, fundamentales en la construcción del modelo de Ho–Lee.

### 3.2. Procesamiento: Construcción de la Curva Cupón Cero

La idea central del procesamiento fue validar la hipótesis de poder modelar la tasa corta con un modelo de un factor, para lo cual fue necesario hacer que los datos de tasa para los 17 contratos disponibles sean comparables. Se partirá explicando este proceso para luego comparar los datos.

#### 3.2.1. Normalización

Existe un problema al querer analizar los datos de los valores observados de los distintos contratos, y es que no todos funcionan de la misma manera. Esto es una complicación ya que significa que los datos de la matriz no representan lo mismo con respecto al largo del intervalo de su contrato, haciendo que no sean comparables dado que; por ejemplo, en la realidad el contrato de 1 año no tiene un valor luego de 6 meses dado que todo el pago será realizado luego de un año, en contraste con un contrato de 2 años que debido su pago de intereses, si tendrá un valor asociado.

Las tasas de interés de los contratos de 1 a 18 meses se les dice tasa cero cupón. Esto se debe a que desde el inicio del contrato, solo se hace el intercambio de flujo al finalizar el periodo de tiempo, lo que es el pago del nominal más los intereses correspondientes.

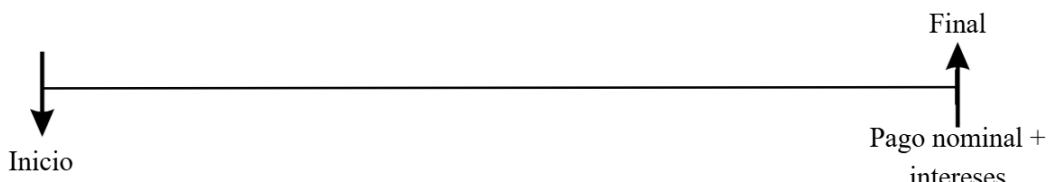


Figura 3.1: Diagrama contratos cero cupón

Por otro lado, los contratos de 2 a 25 años funcionan con cupones semestrales, es decir, cada seis meses desde el inicio del contrato se hace un depósito de intereses.

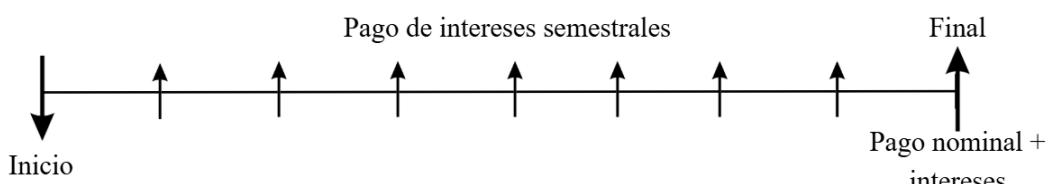


Figura 3.2: Diagrama contratos con cupones semestrales

La diferencia anterior dificulta la comparación de las tasas de todos los contratos en un mismo periodo de tiempo, lo cual será necesario para valorar la opcionalidad de prepago, es

por esto que se utilizará la técnica explicada a continuación llamada *Bootstrapping* financiero, que consiste en construir una curva de tasas cero cupón a partir de los precios de un conjunto de productos con cupones. En otras palabras, para cada contrato que funciona con cupones, queremos encontrar una tasa cero cupón equivalente.

Para esto utilizamos el factor de descuento, el cual se define de la siguiente manera

$$DF(0, T) := \text{El precio hoy de recibir una unidad de dinero en el tiempo } T.$$

Notar que este valor es universal y no depende de los contratos. Sin embargo, es posible saber su valor a través de las tasas de interés de los contratos swap. Para un contrato swap cero cupón a un plazo  $T$  y valor  $r_T$ , el factor de descuento se calcula de la siguiente manera

$$DF(0, T) = \frac{1}{1 + r_T \frac{\text{buss}(T)}{360}}, \quad (1)$$

donde  $\text{buss}(T)$  es la cantidad de días hábiles en el periodo  $T$ . Por otro lado, si es que el contrato funcionará con cupones semestrales, el factor de descuento se calcularía así

$$DF(0, T) = \frac{1 - \sum_{i=6M}^{T-6M} \frac{\text{buss}(\Delta T_i)}{360} DF(0, T_i)}{1 + r_T \frac{\text{buss}(\Delta T)}{360}}, \quad (2)$$

donde  $\text{buss}(\Delta T_i)$  corresponde a los días hábiles en tal periodo de 6 meses. Teniendo el factor de descuento, se puede utilizar la ecuación (1) para despejar la tasa cero cupón equivalente, obteniendo así

$$r_T^{0\text{cupón}} = \frac{360}{\text{buss}(T)} \left( \frac{1}{DF(0, T)} - 1 \right). \quad (3)$$

Sin embargo, existe un problema. Notar que en la ecuación (2) se es necesario el valor de  $DF(T_i)$  para cada semestre entre el inicio y el final del contrato. Conocer este valor de manera directa no es posible ya que hay  $T_i$ 's, por ejemplo 30 meses, en los que no existe contrato, por ende no existe una tasa con la cual calcular tal factor de descuento.

Existen varias formas de resolver este problema, para efectos de esta etapa exploratoria de los datos decidimos realizar una interpolación lineal para la tasa de cada  $T_i$  necesario. Por ejemplo, la tasa ficticia para un contrato de 30 meses, con cupones semestrales, se calcula como el promedio entre la tasa de los dos años y tres años, lo cual otorga una solución de implementación sencilla y de cálculo eficiente.

$$r_{30M} = \frac{r_{2Y} + r_{3Y}}{2}.$$

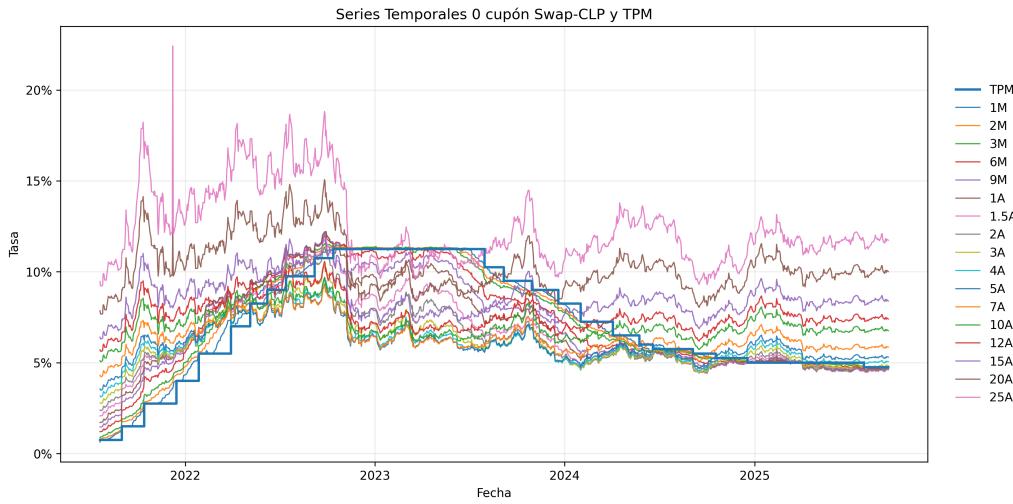


Figura 3.3: Curva de tasas cero cupón

Lo que permite tener valores de tasa “comparables”, que nos permiten realizar el siguiente paso de análisis de datos por descomposición en componentes principales. Los valores obtenidos de tasa cero cupón para los distintos contratos se puede visualizar en la Figura 3.3.

### 3.2.2. PCA

Para validar la hipótesis de que un modelo de un factor (Ho–Lee) es adecuado para modelar la curva de tasas de interés, se realizó un Análisis de Componentes Principales sobre las tasas swap cero cupón. Litterman y Scheinkman (1991) demostraron que las variaciones en la curva de rendimientos pueden ser explicadas principalmente por tres factores: nivel, pendiente y curvatura, donde el primero explicaría el 96 % de la variabilidad, por lo tanto, si el primer componente principal explica una proporción significativa de la varianza total, se puede justificar el uso de un modelo de un factor [1].

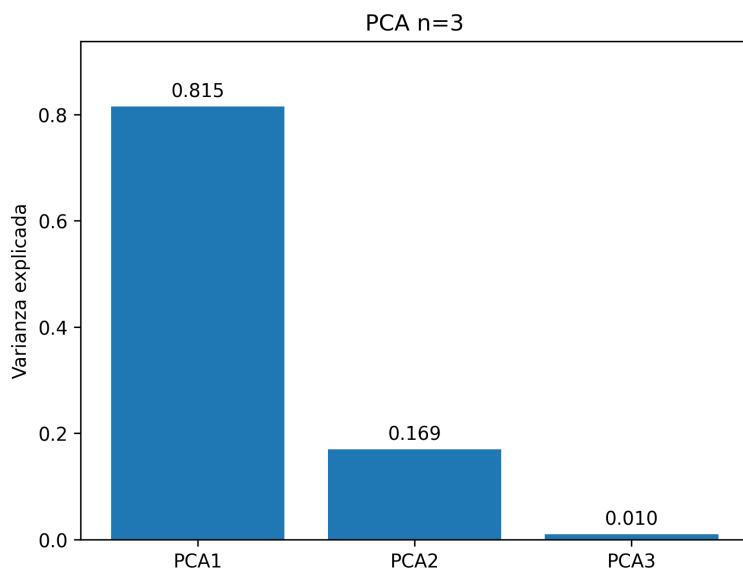


Figura 3.4: Varianza explicada por cada componente principal

Los resultados se muestran en la Figura 3.4 e indican que las dos primeras componentes explican el 98.4 % de la variabilidad total de las tasas Swap cero cupón, la primera componente explica el 81.5 % de la variabilidad y la segunda un 16.9 %, lo cual difiere a lo planteado por Litterman y Scheinkman (1991). Este resultado no invalida el modelo, sino que refleja el contexto económico particular del periodo 2021-2025, que incluye una pandemia mundial y una alza en la inflación. La agresividad del Banco Central con el aumento de la TPM en un corto plazo provocó un desacople entre las tasas cortas y las tasas largas, lo que se refleja en la mayor relevancia del factor pendiente en la explicación de la variabilidad.

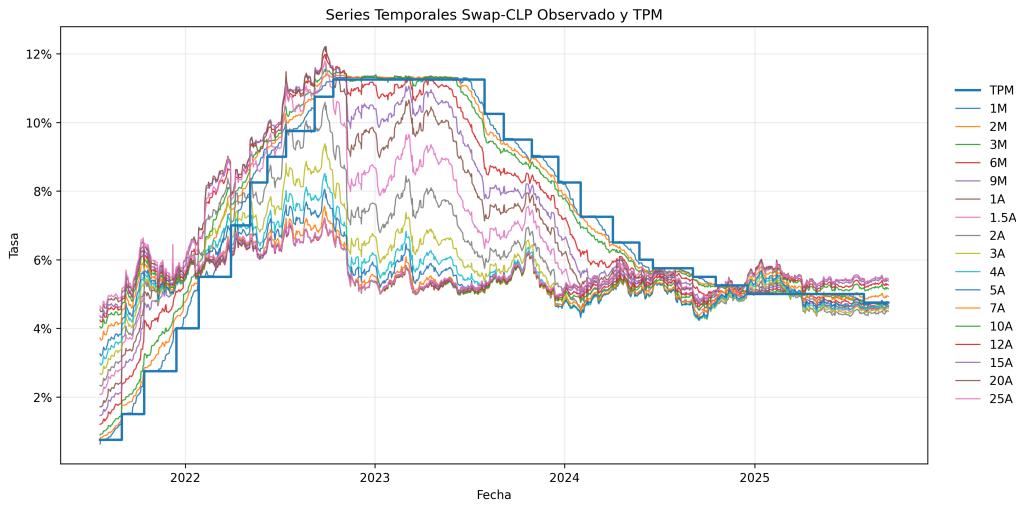


Figura 3.5: Valores históricos de los 17 contratos Swap en CLP

Podemos observar el fenómeno del desacople en la Figura 3.5, donde las tasas de corto plazo (1M, 2M, 3M) muestran un comportamiento diferente al de las tasas de largo plazo (10Y, 15Y, 20Y, 25Y), especialmente durante los periodos de ajuste de la TPM por parte del Banco Central.

### 3.3. La Tasa Corta

Para la calibración de un modelo de tasas, es necesario definir una variable que capture de manera adecuada el comportamiento de la curva de tasas de interés. Dado el análisis previo, se opta por utilizar la tasa corta (1M) como variable a modelar a través de un modelo de un factor, específicamente el modelo de Ho–Lee.

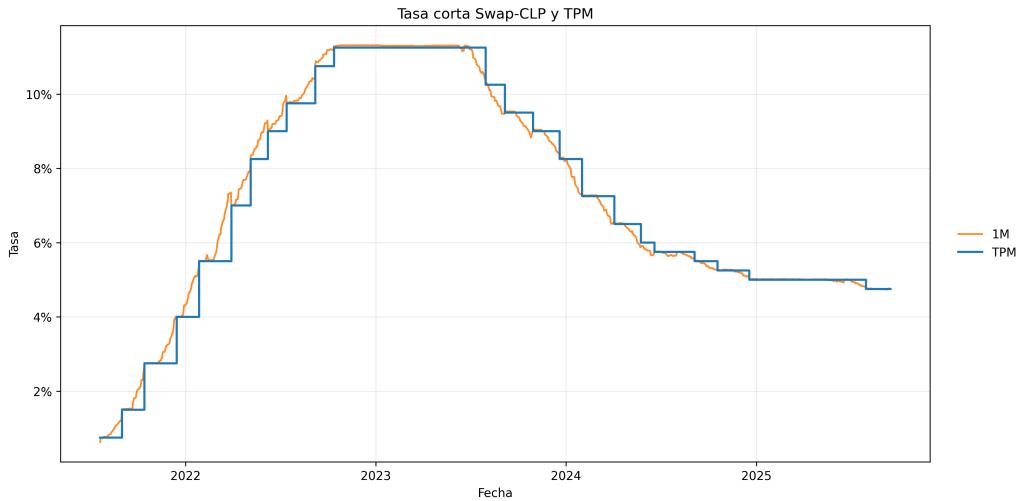


Figura 3.6: Tasa corta (1M) vs TPM

De la figura 3.6 se desprenden tres puntos importantes que aportan a la elección de la tasa corta como variable del modelo:

1. Naturaleza de mercado: La TPM es una tasa de política monetaria fijada por el Banco Central, mientras que la tasa Swap 1M incorpora diariamente las expectativas de movimientos futuros de la TPM y otros factores de mercado.
2. Anticipación a cambios: Se evidencia como la tasa corta tiende a anticipar los movimientos de la TPM, subiendo antes de que el Banco Central realice un ajuste y bajando después.
3. Correlación: Existe una alta correlación entre la tasa corta y la TPM, lo que valida su uso como tasa base para el modelo de tasas de interés.

## 4. Modelo Matemático

La estructura de la siguiente sección consiste en 2 partes principales: Primero se describe el modelo de tasas a utilizar, para lo cual se comenta parte de la teoría necesaria en 4.1 y su aplicación en la sección 4.2. Luego de esto se utilizará el árbol calibrado como un *input* para finalmente asignarle un valor a la opcionalidad de prepago en la sección 4.3.

### 4.1. Modelo Ho-Lee

Este modelo es un caso particular del marco Heath, Jarrow y Morton (HJM), en el que las tasas de interés a corto plazo se modelan como un proceso estocástico lineal:

$$dr(t) = \theta(t) dt + \sigma dW(t), \quad (4)$$

donde  $\mu$  es el *drift* (o tendencia central) del modelo,  $r(t)$  es la tasa instantánea en el tiempo  $t$ ,  $\theta(t)$  es un término determinista que asegura el ajuste a la curva de tasas inicial,  $\sigma$  es la volatilidad que para este modelo se asume constante y  $W(t)$  es un movimiento browniano estándar, que es una variable aleatoria que representa un movimiento casi seguramente no diferenciable; su distribución tiene media cero y varianza proporcional al intervalo de tiempo  $t$ . La adición de este componente de incertidumbre permite modelar de manera más realista el mercado financiero, donde el riesgo es una parte importante de la toma de decisiones.

#### 4.1.1. Versión discreta del modelo

En su versión discreta, el modelo se escribe como

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \theta_t \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t, \quad (5)$$

donde  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  es una variable aleatoria normal estándar (proviene de discretizar el movimiento browniano) y  $\Delta t$  es el tamaño del paso temporal. Esta formulación es especialmente útil para simulaciones numéricas y para la valoración de instrumentos financieros en árboles binomiales, como se hizo en este trabajo.

Con la modelación anterior para  $r_{t+\Delta t}$ , se generan distintas posibilidades para la tasa en cada paso de tiempo, dando origen a árboles como el de la Figura 4.1.

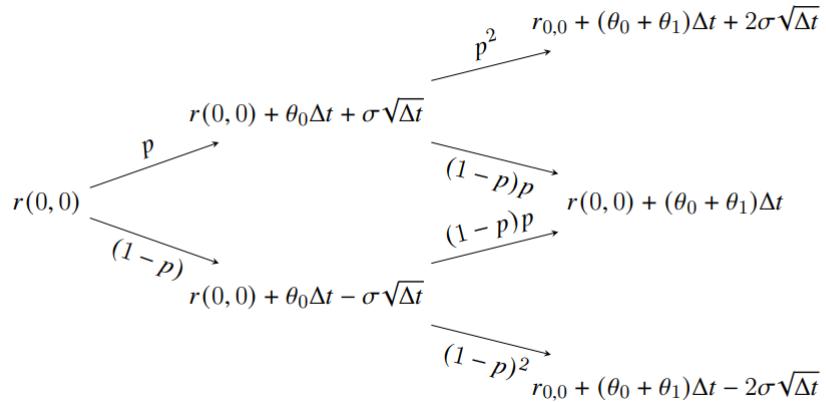


Figura 4.1: Ejemplo de árbol generado por el modelo de Ho–Lee.

La modelación escogida ofrece diversas ventajas relevantes para su implementación práctica. En primer lugar la versión discreta facilita la implementación computacional, especialmente para bonos y derivados, además de reducir los tiempos de cómputo. A su vez la elección de un modelo de tasas permite su calibración a los precios del mercado observados, en contraste con un modelo de equilibrio que no tiene esta propiedad.

Al construir un árbol binomial para este modelo, se trabaja bajo la medida libre de riesgo donde los activos crecen en promedio a la tasa libre de riesgo por lo que se valoran únicamente con su esperanza. Luego al discretizar el movimiento browniano queremos que siga teniendo media cero (para que la esperanza del término aleatorio sea cero), luego el valor de  $p$  mostrado en la Figura 4.1 necesariamente tiene que ser  $p = 1/2$ , lo que será utilizado más adelante.

## 4.2. Implementación Ho–Lee

### 4.2.1. Precios Arrow-Debreu

Un seguro Arrow-Debreu es un activo que tiene un flujo de \$1 si un particular estado de las tasas se cumple, o \$0 en otro caso. Denotamos como  $Q_{ij}$  el precio del seguro en tiempo 0 si es que en el periodo  $j$  se cumple el estado  $i$ , es decir,  $r_j = r_{ij}$ . Debido a que se puede considerar un bono cero cupón como un portafolio de seguros Arrow-Debreu, se cumple la siguiente propiedad

$$DF(0, \Delta t j) = \sum_{i=0}^j Q_{ij}. \quad (6)$$

Es posible construir estos precios de manera inductiva empezando por

$$Q_{00} = 1.$$

Por otro lado,  $Q_{11}$  y  $Q_{01}$  pueden ser calculados de la siguiente manera

$$Q_{01} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{01} \frac{\Delta t}{360}} \quad y \quad Q_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \frac{\Delta t}{360}} \quad (7)$$

Suponiendo que ya tenemos  $Q_{ik}$  para  $i = 0, \dots, k$  y  $k = 0, \dots, j - 1$ . Procedemos con los precios del siguiente nivel  $j$

$$\begin{aligned} Q_{0j} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{0j} \frac{\Delta t}{360}} \cdot Q_{0,j-1}, \\ Q_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{ij} \frac{\Delta t}{360}} \cdot (Q_{i-1,j-1} + Q_{i,j-1}), \quad i = 1, \dots, j, \\ Q_{jj} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{jj} \frac{\Delta t}{360}} \cdot Q_{j-1,j}. \end{aligned} \quad (8)$$

Así, generamos un árbol de precios Arrow-Debreu.

#### 4.2.2. Volatilidad

Este parámetro representa lo que es el riesgo en el mercado; es decir, que magnitud puede tener un cambio repentino dentro de la serie de tasas y, cómo se analizará en las conclusiones, tiene un alto impacto en los resultados generados. Dado que este parámetro define tan drásticamente el *output* del modelo, se experimentó con más de una forma para obtenerla. El primer método de cálculo se llama EWMA por sus siglas en inglés (*Exponentially Weighted Moving Average*) y realiza moviendo el horizonte temporal a lo largo de los datos que se poseen para calcular  $\sigma^2$ , dándole más importancia a las entradas más recientes. Entre cada par de puntos de la serie de datos  $r$  se puede calcular una volatilidad local como  $\sigma_{l,i}(r_{i+1} - r_i)^2$ , luego desde el inicio de los datos ( $i = 0$ ) se puede calcular la volatilidad móvil como

$$\sigma^2(i) = \beta \cdot \sigma^2(i-1) + (1 - \beta) \cdot (r_{i+1} - r_i)^2 \quad (9)$$

donde  $\beta$  es un factor de decaimiento que representa cuánto peso se le da a los eventos pasados versus al evento más nuevo.

Finalmente para obtener la volatilidad (o desviación estándar) se termina el cálculo  $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$  donde la raíz se calcula elemento a elemento.

El método descrito anteriormente permite obtener un array de volatilidades móviles para cada intervalo de tiempo. Luego de realizar este procedimiento se puede considerar la volatilidad spot, que es la última entrada de este array. El hecho de obtener una volatilidad  $\sigma(t)$  en vez de una constante  $\sigma$  permitirá en un futuro generalizar a un modelo de Ho-Lee extendido, que considera una volatilidad variable en el tiempo.

Otro método más común que también fue usado para calcular la volatilidad es considerar la desviación estándar de toda la muestra.

Cabe destacar que la volatilidad será considerada como un dato dado al calibrar el árbol de tasas.

### 4.2.3. Calibración del Árbol

El árbol de tasas Ho-Lee se va llenando de manera inductiva en conjunto con el árbol de precios Arrow-Debreu, el cual es de ayuda para calcular los *drifts* ( $\theta_j$ ) $_{0 \leq j \leq N-1}$ . El primer paso es calcular  $\theta_0$  usando el factor de descuento  $DF(0, \Delta t)$

$$DF(0, \Delta t) = Q_{0,1} + Q_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{01} \frac{\Delta t}{360}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \frac{\Delta t}{360}} \quad (10)$$

Recordando que

$$r_{01} = r_{00} + \theta_0 \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad r_{11} = r_{00} + \theta_0 \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (11)$$

Podemos obtener la siguiente expresión cerrada para  $\theta_0$

$$\theta_0 = \frac{1}{\Delta t} \left( \frac{-(2D(0, \Delta t) - 1) \pm \sqrt{1 + 4D(0, \Delta t)^2 \sigma^2 \Delta t^3}}{2D(0, \Delta t) \Delta t} - r_{00} \right) \quad (12)$$

Con la cual podemos calcular  $r_{01}$  y  $r_{11}$  utilizando (11) y consecuentemente  $Q_{01}$  y  $Q_{11}$  utilizando (7). Ahora, asumamos que ya conocemos  $\theta_k$  para  $k = 0, \dots, j-1$ ,  $r_{ik} y Q_{ik}$  para  $i = 0, \dots, k$  y  $k = 0, \dots, j$ . Es posible calcular  $\theta_j$ ,  $r_{i,j+1}$  y  $Q_{i,j+1}$  para  $i = 1, \dots, j+1$  de la siguiente manera: utilizamos la siguiente identidad para poder despejar  $\theta_j$

$$\begin{aligned} DF(0, (j+1)\Delta t) &= \frac{1}{2} Q_{0j} \frac{1}{1 + (r_{0j} + \theta_j \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}) \frac{\Delta t}{360}} \\ &+ \sum_{i=1}^j \frac{Q_{i-1,j} + Q_{ij}}{2} \frac{1}{1 + (r_{ij} + \theta_j \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}) \frac{\Delta t}{360}} \\ &+ \frac{1}{2} Q_{jj} \frac{1}{1 + (r_{jj} + \theta_j \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}) \frac{\Delta t}{360}}. \end{aligned} \quad (13)$$

En la práctica, para simplificar carga computacional, se ejecuta el método de Newton-Raphson para poder obtener el valor de  $\theta_j$ . Luego, podemos calcular las tasas del siguiente nivel

$$\begin{aligned} r_{i,j+1} &= r_{ij} + \theta_j \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t} \quad i = 0, \dots, j \\ r_{j+1,j+1} &= r_{jj} + \theta_j \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}. \end{aligned} \quad (14)$$

## 4.3. Valorización de la opción

Como ya se mencionó anteriormente, cada nodo del árbol Ho-Lee representa un estado posible del mercado. Suponiendo racionalidad del cliente, asumimos que en cada nodo tomaría la opción que más le conviene, ya sea seguir en el crédito un periodo más o prepagar lo que aún debe. Para calcular estos valores es clave poder traer a valor presente en cada nodo Ho-Lee. Esto lo hacemos gracias a las tasas calculadas en cada punto y tomando la esperanza de sus ramificaciones.

Sea  $A_{ij}$  el valor de la opción de prepago en el periodo  $j$  y estado  $i$ . Sea  $K_j$  el capital no amortizado en el periodo  $j$  y  $VPC_{ij}$  la suma de todas las cuotas que quedan por pagar en valor presente. Tenemos la siguiente relación iterativa

$$A_{ij} = \max\{VPC_{ij} - K_j, \mathbb{E}[DF(\Delta t j, \Delta t(j+1)) \cdot A_{\ell,j+1} | r_j = r_{ij}]\}. \quad (15)$$

Es decir, el valor de la opción de prepago en cierto nodo es el máximo entre, prepagar el crédito y el valor de la opción en el siguiente periodo dado el estado del mercado hoy, traído a valor presente, lo cual queda ponderando por  $DF(\Delta t j, \Delta t(j+1))$ . Finalmente, el valor de la opción al momento de ofrecer el crédito está dado por  $A_{00}$

#### 4.3.1. Implementación

El árbol de valores se irá llenando en reversa, tomando en consideración de que  $A_{iN} = 0$  para todo estado  $i$  ya que el crédito ya terminó y no hay nada que prepagar.

Para poder traer a valor presente las cuotas es necesario conocer  $\mathbb{E}[DF(\Delta t j, \Delta t k) | r_j = r_{ij}]$  para cada nodo Ho-Lee con  $k \geq j$ . El factor de descuento en esperanza se calcula a través de la tasa *spot* esperada a través de la siguiente relación

$$\mathbb{E}[DF(\Delta t j, \Delta t k) | r_j = r_{ij}] = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{ij}^k \frac{\Delta t}{360}}. \quad (16)$$

donde  $\tilde{r}_{ij}^k$  es la tasa *spot* en el periodo  $j$  esperada para hasta el periodo  $k$  dado el estado. Por notación, de ahora en adelante obviaremos la condicionalidad  $\{r_j = r_{ij}\}$ .

Las tasas *spot* se calculan de la siguiente manera, descomponiendo el factor de descuento y utilizando (16)

$$\tilde{r}_{ij}^k = \left( \frac{1}{DF(\Delta t j, \Delta t(k-1)) \cdot DF(\Delta t(k-1), \Delta t k)} - 1 \right) \frac{360}{\Delta t}. \quad (17)$$

Donde  $DF(\Delta t j, \Delta t(k-1))$  se puede obtener con la ecuación (16) a través de  $\tilde{r}_{ij}^{k-1}$ . Mientras que el segundo término se obtiene de la tasa forward esperada del periodo  $k-1$  al periodo  $k$ , la denotamos por  $r_{ij}^k = \mathbb{E}[r_k | r_j = r_{ij}]$ . Debido a que las probabilidades de subir y bajar en el árbol Ho-Lee son las mismas, obtenemos

$$r_{ij}^k = r_{ij} + \Delta t \sum_{\ell=j}^{k-1} \theta_\ell. \quad (18)$$

Luego, obtenemos que el valor presente del crédito está dado por

$$VPC_{ij} = \sum_{k=j+1}^N C_k DF(\Delta t j, \Delta t k). \quad (19)$$

Donde  $C_k$  es el valor de la  $k$ -ésima cuota del crédito.

## 5. Resultados

### 5.1. Calibración del Modelo de Tasas

Antes de valorar la opción, es fundamental validar que el modelo de tasas replica correctamente las condiciones del mercado.

### 5.1.1. Construcción del Árbol de Ho–Lee

Se implementó el árbol binomial de Ho–Lee calibrado a la curva Swap Cámara Promedio vigente al 15 de septiembre de 2025.

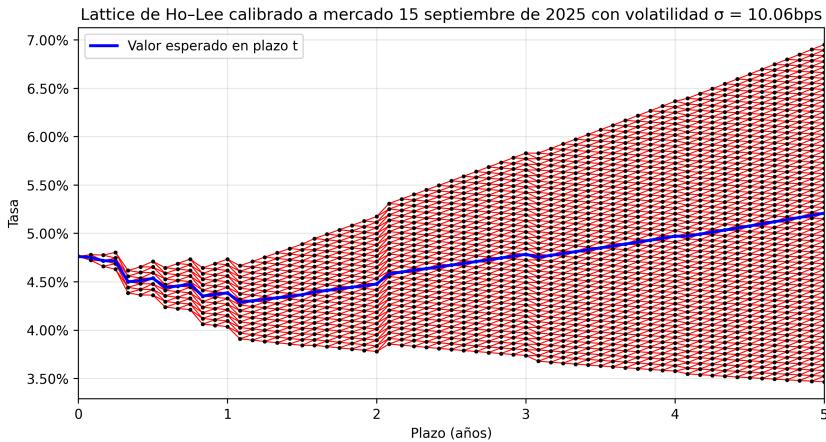


Figura 5.1: Árbol de tasas cortas generado por el modelo de Ho-Lee a 5 años plazo. La línea azul representa el valor esperado de la tasa en el plazo  $t$ .

A diferencia de modelos normales simples que pueden arrojar tasas negativas con alta probabilidad en plazos largos, la calibración realizada con la volatilidad actual ( $\sigma \approx 10.06$  bps, calculada vía desviación estándar de la muestra solo en 2025) muestra un comportamiento robusto. Como se observa en la Figura 5.1, la dispersión de tasas a 5 años se mantiene en rangos coherentes con la historia reciente (entre 3.5 % y 7.0 %).

### 5.1.2. Impacto de la Volatilidad en la Estructura del Árbol

Para evaluar la sensibilidad del modelo a la estimación de la volatilidad, se generó un escenario alternativo con una volatilidad histórica de mayor plazo ( $\sigma \approx 16.84$  bps, calculada vía EWMA desde 2021). Es posible observar como el árbol se “abre” significativamente más, capturando escenarios extremos para tasas más altas y bajas (ver Figura 5.2),

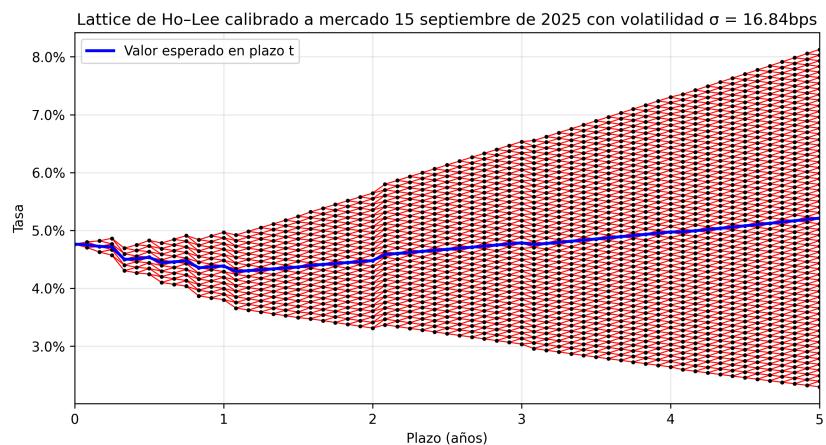


Figura 5.2: Árbol de tasas bajo un escenario de mayor volatilidad. Se aprecia una mayor dispersión de los nodos terminales.

## 5.2. Valoración de la Opción de Prepago

Utilizando el árbol de Ho-Lee calibrado, se procedió a valorar la opción de prepago, considerando las características específicas del bono en cuestión (cupón, vencimiento, frecuencia de pago, etc.). Para el estudio del prepago utilizamos un crédito con las siguientes características, pues es representativo de la cartera corporativa del banco:

- Capital: 100.000.000 CLP.
- Tipo de crédito: Francés (Cuotas iguales).
- Tasa contractual: 4.6 % anual.
- Plazo: 5 años.
- Volatilidad del árbol de Ho-Lee: 16.8 bps.

### 5.2.1. Dinámica del Valor de la Opción en el Tiempo

La Figura 5.3 muestra el lattice del valor de la opción de prepago (bps sobre el capital) en cada nodo del árbol de Ho-Lee, es decir, en cada posible escenario de la tasa corta.

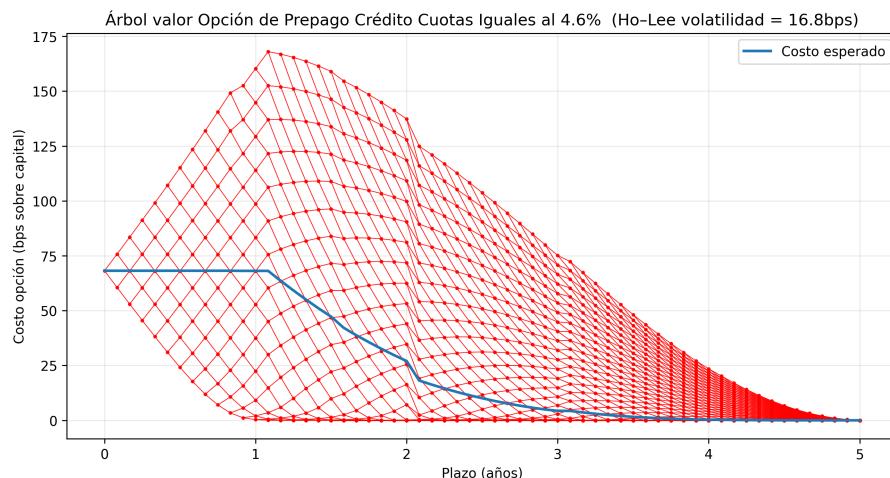


Figura 5.3: Lattice del valor de la opción de prepago para un crédito a 5 años. Cada nodo representa el valor de la opción en ese estado y tiempo específico.

Podemos observar tres fenómenos relevantes:

1. Convergencia a cero: Al final del crédito, el valor de la opción es cero, cumpliendo con la condición de frontera. Esto valida la exactitud del algoritmo implementado.
2. Valor máximo: El valor de la opción no es máximo al inicio, sino que alcanza su *peak* alrededor de la vida media del crédito. Esto se debe a que al inicio la probabilidad acumulada de que las tasas bajen significativamente es menor. A medida que avanza el tiempo y la volatilidad dispersa las tasas, la probabilidad de entrar a escenarios favorables para el prepago aumenta, elevando el valor de la opción antes de decaer por la amortización del capital.
3. Magnitud del costo: Para este escenario, el modelo estima un costo esperado de prepago en el día 0 de 68.17 bps sobre el monto del crédito. Este monto sería el que el banco debería considerar como ajuste en la tasa ofrecida para compensar el riesgo de prepago.

### 5.3. Análisis de Sensibilidad

Un hallazgo crítico de los resultados es la alta sensibilidad del valor de la opción ante la volatilidad del mercado.

Al aumentar la volatilidad del modelo a 100 bps, el valor de la opción de prepago casi se duplica, pasando de 68 bps a 120.99 bps (ver Figura 5.4), es decir, un aumento de un 1.20 % en la tasa ofrecida al cliente para compensar el riesgo de prepago.

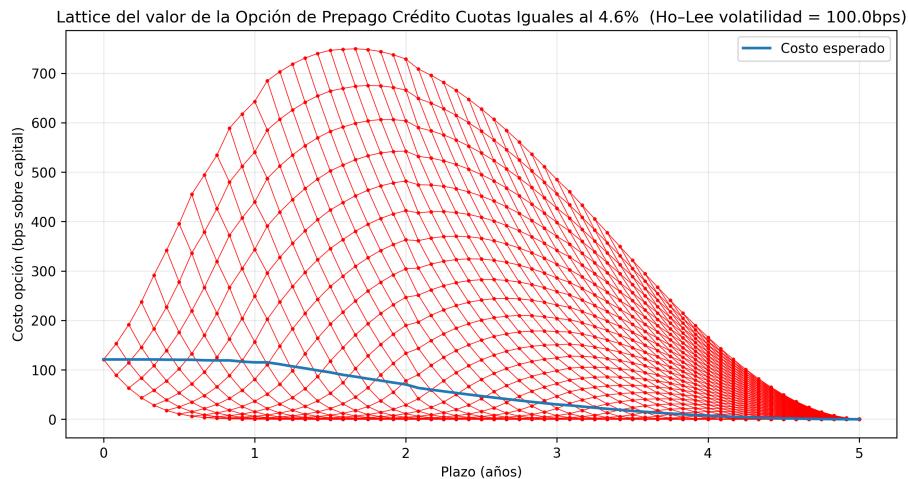


Figura 5.4: Valoración de la opción bajo un escenario de aumento de la volatilidad ( $\sigma = 100$  bps).

Este resultado demuestra que el método actual de cobrar un *spread* fijo o una comisión basada en meses de interés (1.5 meses) es ineficiente:

- En períodos de baja volatilidad, el banco podría estar cobrando de más, reduciendo su competitividad en el mercado.
- En períodos de alta volatilidad, el banco podría estar subvalorando el riesgo, asumiendo pérdidas potenciales significativas en caso de prepagos masivos.

### 5.4. Entregables

Como cierre del proceso de desarrollo y validación, se consolidan los siguientes entregables acordados con la contraparte del Banco Itaú, los cuales materializan la solución propuesta:

1. Paquete de datos para la calibración de los modelos: Conjunto de datos que contiene las curvas Swap Cámara Promedio procesadas y transformadas a curvas cupón cero.
2. Librería de modelos de tasa en Python: Implementación del modelo de Ho–Lee, estructurado de manera modular. El código permite la construcción del árbol binomial calibrado a una curva de mercado arbitraria y a una volatilidad definida por el usuario.
3. Motor de valoración de opciones en Python: Script que implementa el algoritmo de valoración de opciones de prepago utilizando el árbol de Ho–Lee. Incluye funciones para definir las características del crédito (francés, alemán y bullet) y calcular el valor de la opción en cada nodo del árbol, retornando el valor inicial de la opción en bps sobre el capital.

4. README detallado: Documento que explica el uso de las librerías desarrolladas. Incluye ejemplos de como cargar datos, calibrar el modelo y valorar opciones de prepago para distintos tipos de créditos. También, ejemplos para la generación de distintos gráficos de análisis.

Estos entregables pueden ser encontrados en el siguiente repositorio de GitHub: Valoración de Opcionalidades de Prepago en Créditos Hipotecarios.

## 6. Conclusiones y Trabajo Futuro

### 6.1. Conclusiones

A partir del desarrollo e implementación del modelo de valoración de opciones de prepago, se derivan las siguientes conclusiones principales:

1. Viabilidad técnica y práctica: Se validó la factibilidad de implementar un modelo de tasa corta basado en árboles binomiales (Ho–Lee) para el mercado chileno. El modelo fue calibrado exitosamente a la curva Swap Cámara Promedio, permitiendo valorar el prepago de manera consistente.
2. Subestimación del riesgo en la práctica actual: Los resultados cuantitativos revelan que la comisión actual subestima el valor real de la opción de prepago en los escenarios analizados. Esto sugiere que Itaú podría estar asumiendo un riesgo mayor al anticipado.
3. Alta sensibilidad a la volatilidad: Se demostró que el precio de la opción es altamente sensible al parámetro de volatilidad. Al estresar el modelo, el costo del prepago puede incrementarse significativamente, lo que confirma la necesidad de una gestión dinámica de este riesgo, pues cobrar un *spread* fijo es ineficiente tanto en períodos de baja como de alta volatilidad.

### 6.2. Limitaciones del Modelo Actual

A pesar de los resultados observados, el modelo presenta restricciones inherentes a su formulación. En primer lugar, se asume una volatilidad constante, lo cual no refleja la naturaleza dinámica del mercado. Además, el modelo de un solo factor limita la capacidad de capturar riesgos específicos del banco, como el costo de fondeo. Estas simplificaciones reducen la precisión del modelo y su aplicabilidad en escenarios más complejos.

### 6.3. Trabajo Futuro

Para superar las limitaciones identificadas y encaminar la solución hacia una herramienta más productiva, se proponen las siguientes líneas de trabajo futuro:

- Implementar el modelo Ho–Lee extendido para mejorar la representación de la estructura temporal de tasas, permitiendo modelar la volatilidad como una variable en el tiempo.
- Incorporar más tipos de créditos (alemán, bullet) para ampliar la cobertura del análisis y adaptarse a la diversidad de productos ofrecidos por el banco.

- Migrar a un modelo de dos factores para capturar tanto el riesgo de mercado como el riesgo Itaú, específicamente el costo de fondeo, enriqueciendo la evaluación del prepago.
- Analizar la estabilidad del precio de la opción utilizando volatilidad histórica, lo que permitirá evaluar la robustez del modelo ante escenarios reales y dinámicos del mercado.

## Referencias

- [1] Litterman, R., & Scheinkman, J. (1991). Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, 1(1), 54–61. Link.
- [2] Valdés, F. (15 de julio de 2004). *SBIF imparte instrucciones referidas al prepago de créditos. Se modifica el título I del Capítulo 7-1 de la Recopilación Actualizada de Normas*. Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (Chile). Link.