



PROFESOR: ALEJANDRO CATALDO – DANIEL ZÚÑIGA
IMT2116 - TALLER DE MATEMÁTICAS APLICADAS (CAPSTONE)
INSTITUTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA Y COMPUTACIONAL

Informe de Medio Semestre

Vicente Alfaro, Cristian Chávez, Bruno Parra

13 de octubre de 2025

1. Introducción

1.1. Contexto Organizacional

El presente trabajo se desarrolla en el contexto de la banca corporativa y de personas del Banco Itaú Chile, una de las principales instituciones financieras del país. El proyecto aborda una problemática relevante para la gestión del balance del banco: la valoración del riesgo de mercado implícito en la oferta de créditos a largo plazo con posibilidad de prepago.

1.2. Problema de Negocio

Una de las actividades del banco consiste en la intermediación financiera, capta recursos (pasivos) y los ofrece en forma de préstamos (activos). Para gestionar el riesgo asociado a la tasa de interés, la institución busca calzar la duración de sus activos y pasivos.

Sin embargo, esta estabilidad se ve amenazada por el riesgo de prepago. Cuando las tasas de interés de mercado disminuyen, los clientes tienen un incentivo racional para prepagar su deuda actual y refinanciarse a una tasa menor. Financieramente, esto equivale a que el deudor ejerza una opción de compra sobre el bono que constituye su deuda.

La ejecución de esta opción genera un perjuicio económico para el banco, conocido como riesgo de reinversión o descalce de balance:

1. El banco recibe el capital prepagado y deja de percibir los flujos futuros pactados a la tasa original.
2. El banco debe reinvertir el capital a una tasa de interés menor, reduciendo sus ingresos futuros.
3. A su vez, el banco debe seguir pagando sus pasivos a la tasa original pactada, generando un descalce entre los ingresos y egresos futuros.

1.3. Motivación y Estado Actual

Actualmente, para créditos mayores a 5.000 UF se pacta una cláusula de prepago entre las contrapartes. Para créditos menores, el banco asume el riesgo de prepago sin protección contractual, ya que este se rige por la ley 18.010 que establece un valor máximo para la penalización por prepago de un mes y medio de intereses calculado sobre el capital que se prepayga [?](CITARRR).

Para mitigar este riesgo, el banco utiliza heurísticas conservadoras, se estima la vida media del crédito y aplicar un *spread* a la tasa de interés ofrecida al cliente para compensar la posible pérdida futura.

Esta metodología presenta dos desventajas como lo son la ineficiencia en la asignación de precios y la gestión de riesgo imprecisa. Respecto a la primera, se corre el riesgo de sobreestimar el riesgo de prepago y ofrecer tasas más altas, restando competitividad al banco. En cuanto a la segunda, este modelo no permite cuantificar como varía el riesgo de esta opciónalidad ante aumentos de la volatilidad en las tasas de mercado.

Es por ello que se busca implementar un modelo que permita valorar de forma más precisa el riesgo de prepago, optimizando la asignación de precios y mejorando la gestión del riesgo de mercado.

2. Objetivos del Proyecto

2.1. Objetivo General

El objetivo del proyecto es desarrollar e implementar un modelo de valoración de opcionaldades de prepago en créditos hipotecarios, utilizando modelos de tasas de interés ajustados al mercado chileno actual que permita cuantificar el costo de dicha opcionaldad para ser incorporado en la tasa de interés ofrecida al cliente.

2.2. Objetivos Específicos

1. Caracterizar la estructura temporal de tasas de interés en el mercado chileno mediante el análisis de datos históricos y actuales.
2. Implementar modelos de tasa corta, en particular el modelo de Ho–Lee, para generar árboles de tasas de interés consistentes con una curva inicial.
3. Valorar la opción de prepago, modelándola como una opción americana sobre el crédito, determinando el *spread* de opcionaldad necesario para compensar el riesgo asumido por el banco.

3. Descripción y Procesamiento de los Datos

Para obtener un valor ajustado de la opcionaldad de prepago, es fundamental conocer el costo de oportunidad que tiene el banco sobre la ejecución de esta acción. En esta sección se detallan las fuentes de información, metodología y procesamiento de los datos que justifica la elección de las variables de estado del modelo.

3.1. Origen y Descripción de los Datos

Para la calibración del modelo, se utilizan dos conjuntos de datos provenientes del mercado financiero chileno:

1. Curva Swap Cámara Promedio en CLP: Corresponde a un derivado financiero en el que se acuerda un intercambio de flujos a distintas tasas de interés. En este caso, se utilizan los contratos interbancarios en CLP, un banco entrega un flujo a una tasa fija mientras que la contraparte entrega uno a tasa flotante, el valor del contrato se considera la tasa fija.

Se extrajo el historial de tasas de cierre diario para los 17 tenores disponibles en el mercado interbancario que van desde 1 mes hasta 25 años. Estos datos fueron obtenidos de Bloomberg, abarcando el periodo desde enero de 2021 hasta septiembre de 2025, conformando una matriz de 1256×17 de tipo *float*.

2. Tasa de política monetaria (TPM): Es la tasa de interés de referencia que el Banco Central determina para influir en el comportamiento de la economía, especialmente en el control de la inflación y la estabilidad de los precios. Esta tasa afecta directamente las tasas de interés que aplican los bancos comerciales y otras instituciones financieras en sus operaciones de crédito y ahorro.

Se obtuvo el historial de valores diarios de la TPM publicado por el Banco Central, cubriendo el mismo periodo que los contratos Swap, resultando en una matriz de 1180×1 de tipo *float*.

Se seleccionó este periodo temporal debido a la introducción de los contratos de 1 y 2 meses en 2021, fundamentales en la construcción del modelo de Ho–Lee.

3.2. Procesamiento: Construcción de la Curva Cupón Cero

3.3. PCA

Para validar la hipótesis de que un modelo de un factor (Ho–Lee) es adecuado para modelar la curva de tasas de interés, se realizó un Análisis de Componentes Principales sobre las tasas swap cero cupón. Litterman y Scheinkman (1991) demostraron que las variaciones en la curva de rendimientos pueden ser explicadas principalmente por tres factores: nivel, pendiente y curvatura, donde el primero explicaría el 96 % de la variabilidad, por lo tanto, si el primer componente principal explica una proporción significativa de la varianza total, se puede justificar el uso de un modelo de un factor [1].

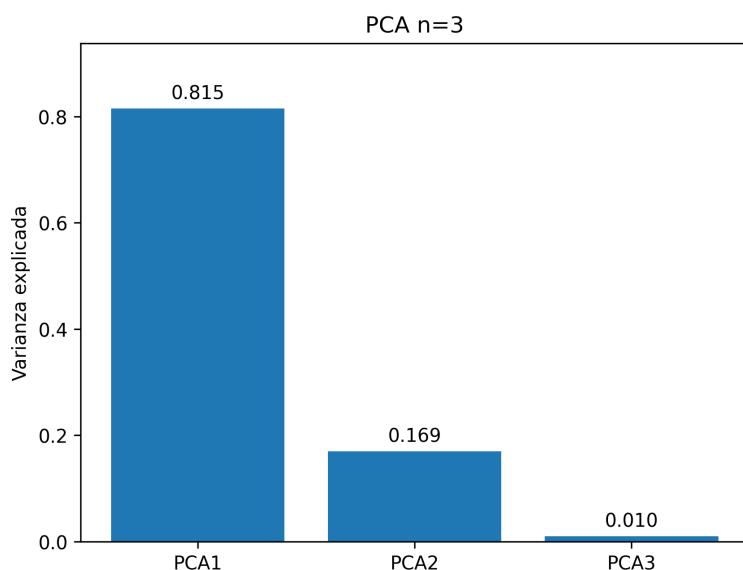


Figura 3.1: Varianza explicada por cada componente principal

Los resultados indican que las dos primeras componentes explican el 98.4 % de la variabilidad total de las tasas Swap cero cupón, la primera componente explica el 81.5 % de la variabilidad y la segunda un 16.9 %, lo cual difiere a lo planteado por Litterman y Scheinkman (1991). Este resultado no invalida el modelo, sino que refleja el contexto económico particular del periodo 2021-2025, que incluye una pandemia mundial y una alza en la inflación. La agresividad del Banco Central con el aumento de la TPM en un corto plazo provocó un desacople entre las tasas cortas y las tasas largas, lo que se refleja en la mayor relevancia del factor pendiente en la explicación de la variabilidad.

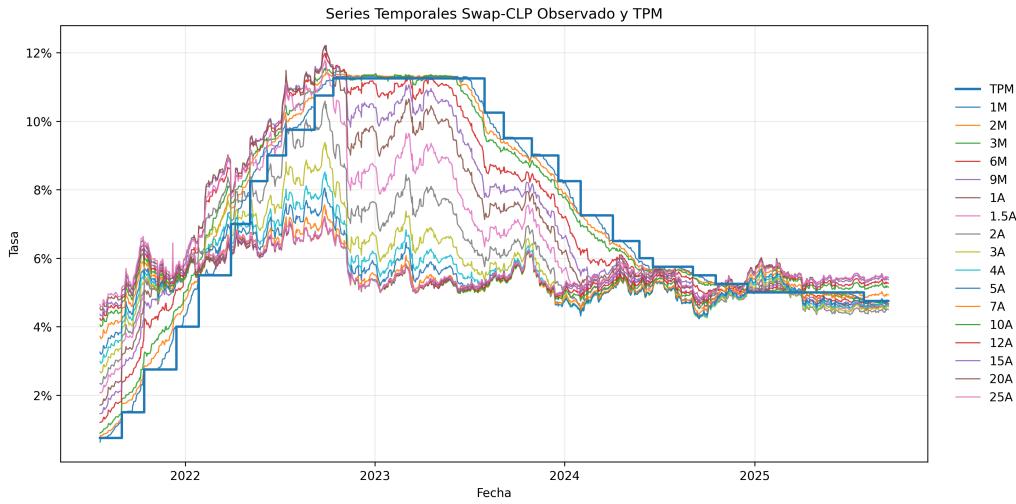


Figura 3.2: Valores históricos de los 17 contratos Swap en CLP

Podemos observar el fenómeno del desacople en la figura 3.2, donde las tasas de corto plazo (1M, 2M, 3M) muestran un comportamiento diferente al de las tasas de largo plazo (10Y, 15Y, 20Y, 25Y), especialmente durante los periodos de ajuste de la TPM por parte del Banco Central.

3.4. La Tasa Corta

Para la calibración de un modelo de tasas, es necesario definir una variable que capture de manera adecuada el comportamiento de la curva de tasas de interés. Dado el análisis previo, se opta por utilizar la tasa corta (1M) como variable a modelar a través de un modelo de un factor, específicamente el modelo de Ho–Lee.

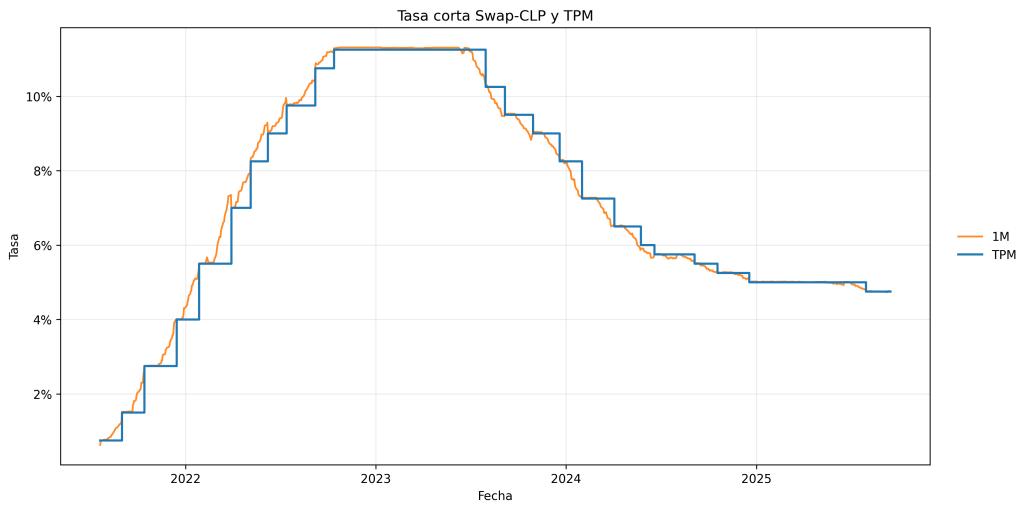


Figura 3.3: Tasa corta (1M) vs TPM

De la figura 3.3 se desprenden tres puntos importantes que aportan a la elección de la tasa corta como variable del modelo:

1. Naturaleza de mercado: La TPM es una tasa de política monetaria fija por el Banco Central, mientras que la tasa Swap 1M incorpora diariamente las expectativas de

movimientos futuros de la TPM y otros factores de mercado.

2. Anticipación a cambios: Se evidencia como la tasa corta tiende a anticipar los movimientos de la TPM, subiendo antes de que el Banco Central realice un ajuste y bajando después.
3. Correlación: Existe una alta correlación entre la tasa corta y la TPM, lo que valida su uso como tasa base para el modelo de tasas de interés.

4. Exploración y Procesamiento de los Datos

5. Modelo Propuesto

La teoría de Heath, Jarrow y Morton (HJM) provee un marco general para modelar las tasas de interés. En su enfoque, se describe la dinámica de la curva de tasas de interés de manera estocástica, considerando que las tasas futuras forman un proceso multivariado sujeto a incertidumbre. Esta teoría sirve como base conceptual para modelos de tasas de interés, incluido el modelo de Ho–Lee.

La idea central dentro de la teoría HJM es modelar la tasa libre de riesgo (o tasa cero cupón) como un proceso de Itô que satisface la ecuación

$$dr(t) = \mu(r, t) dt + \sigma(r, t) dW(t), \quad (1)$$

donde μ es el *drift* del modelo, σ es la volatilidad instantánea de la tasa r y W es un movimiento browniano estándar.

5.1. El modelo de Ho–Lee

El modelo de Ho–Lee es un caso particular del marco anterior, en el que las tasas de interés a corto plazo se modelan como un proceso estocástico lineal:

$$dr(t) = \theta(t) dt + \sigma dW(t), \quad (2)$$

donde $r(t)$ es la tasa instantánea en el tiempo t , $\theta(t)$ es un término determinista que asegura el ajuste a la curva de tasas inicial, σ es la volatilidad constante y $W(t)$ es un movimiento browniano estándar.

Decir que un mercado es libre de arbitraje significa que no existen oportunidades de obtener una ganancia con inversión neta nula. Bajo este concepto, el modelo de Ho–Lee es libre de arbitraje.

5.2. Versión discreta del modelo

En su versión discreta, el modelo se escribe como

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \theta_t \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \varepsilon_t, \quad (3)$$

donde $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ es una variable aleatoria normal estándar (proviene de discretizar el movimiento browniano) y Δt es el tamaño del paso temporal. Esta formulación es especialmente útil para simulaciones numéricas y para la valoración de instrumentos financieros en árboles binomiales, como se hizo en este trabajo.

Con la modelación anterior para $r_{t+\Delta t}$, se generan distintas posibilidades para la tasa en cada paso de tiempo, dando origen a árboles como el de la figura 5.1.

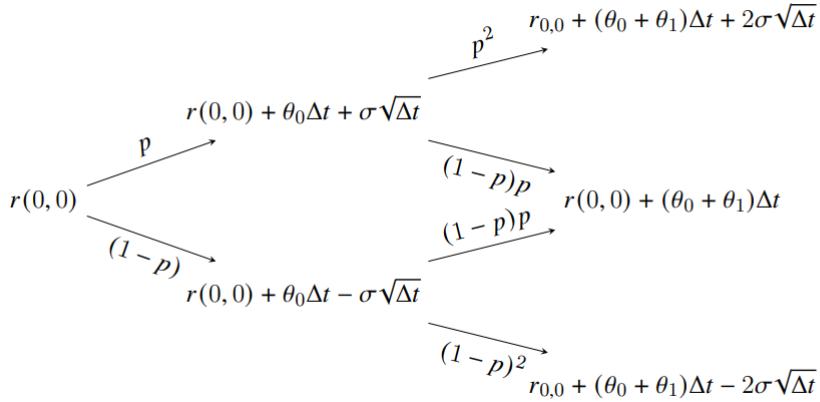


Figura 5.1: Ejemplo de árbol generado por el modelo de Ho–Lee.

Pros de la versión discreta:

- Facilita la implementación computacional, especialmente para bonos y derivados, además de reducir los tiempos de cómputo.
- Permite integrar datos de mercado de manera directa y generar árboles de tasas consistentes con la curva inicial.

El uso de este árbol para la valoración de créditos corporativos consiste en calcular el valor del crédito en cada nodo del árbol a partir de las trayectorias de la tasa de interés. El siguiente paso es traer estos valores a presente usando la tasa vigente hasta la fecha del nodo. Luego se estima la esperanza del valor del crédito como el promedio de los valores presentes del crédito en todos los nodos.

Con base en el procedimiento anterior, se puede ajustar la tasa de interés que se ofrece al cliente en el tiempo inicial para que el retorno promedio de la institución financiera sea el deseado. Esta herramienta permite considerar créditos a distintos plazos, cortando el árbol cuando $t + n\Delta t$ (con n el número de pasos temporales) alcanza el plazo de interés, y a partir de ello realizar los cálculos.

6. Modelo

6.1. Implementación Ho-Lee

6.1.1. Precios Arrow-Debreu

Un seguro Arrow-Debreu es un activo que tiene un flujo de \$1 si un particular estado de las tasas se cumple, o \$0 en otro caso. Denotamos como Q_{ij} el precio del seguro en tiempo 0 si es que en el periodo j se cumple el estado i , es decir, $r_j = r_{ij}$. Debido a que se puede considerar un bono cero cupón como un portafolio de seguros Arrow-Debreu, se cumple la siguiente propiedad

$$DF(0, \Delta t j) = \sum_{i=0}^j Q_{ij}. \quad (4)$$

Es posible construir estos precios de manera inductiva empezando por

$$Q_{00} = 1.$$

Por otro lado, Q_{11} y Q_{01} pueden ser calculados de la siguiente manera

$$Q_{01} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{01} \frac{\Delta t}{360}} \quad \text{y} \quad Q_{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \frac{\Delta t}{360}} \quad (5)$$

Suponiendo que ya tenemos Q_{ik} para $i = 0, \dots, k$ y $k = 0, \dots, j - 1$. Procedemos con los precios del siguiente nivel j

$$\begin{aligned} Q_{0j} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{0j} \frac{\Delta t}{360}} \cdot Q_{0,j-1}, \\ Q_{ij} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{ij} \frac{\Delta t}{360}} \cdot (Q_{i-1,j-1} + Q_{i,j-1}), \quad i = 1, \dots, j, \\ Q_{jj} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{jj} \frac{\Delta t}{360}} \cdot Q_{j-1,j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Así, generamos un árbol de precios Arrow-Debreu.

6.1.2. Calibrando el árbol

El árbol de tasas Ho-Lee se va llenando de manera inductiva en conjunto con el árbol de precios Arrow-Debreu, el cual es de ayuda para calcular los *drifts* $(\theta_j)_{0 \leq j \leq N-1}$. El primer paso es calcular θ_0 usando el factor de descuento $DF(0, \Delta t)$

$$DF(0, \Delta t) = Q_{0,1} + Q_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{01} \frac{\Delta t}{360}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \frac{\Delta t}{360}} \quad (7)$$

Recordando que

$$r_{01} = r_{00} + \theta_0 \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad r_{11} = r_{00} + \theta_0 \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \quad (8)$$

Podemos obtener la siguiente expresión cerrada para θ_0

$$\theta_0 = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{-(2D(0, \Delta t) - 1) \pm \sqrt{1 + 4D(0, \Delta t)^2 \sigma^2 \Delta t^3}}{2D(0, \Delta t) \Delta t} - r_{00} \right) \quad (9)$$

Con la cual podemos calcular r_{01} y r_{11} utilizando (5) y consecuentemente Q_{01} y Q_{11} utilizando (2). Ahora, asumamos que ya conocemos θ_k para $k = 0, \dots, j - 1$, $r_{ik} y Q_{ik}$ para $i = 0, \dots, k$ y $k = 0, \dots, j$. Es posible calcular θ_j , $r_{i,j+1}$ y $Q_{i,j+1}$ para $i = 1, \dots, j+1$ de la siguiente manera: utilizamos la siguiente identidad para poder despejar θ_j

$$\begin{aligned} DF(0, (j+1)\Delta t) &= \frac{1}{2} Q_{0j} \frac{1}{1 + (r_{0j} + \theta_j \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}) \frac{\Delta t}{360}} \\ &+ \sum_{i=1}^j \frac{Q_{i-1,j} + Q_{ij}}{2} \frac{1}{1 + (r_{ij} + \theta_j \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t}) \frac{\Delta t}{360}} \\ &+ \frac{1}{2} Q_{jj} \frac{1}{1 + (r_{jj} + \theta_j \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}) \frac{\Delta t}{360}}. \end{aligned} \quad (10)$$

En la práctica, para simplificar carga computacional, se ejecuta un método el método de Newton-Raphson para poder obtener el valor de θ_j . Luego, podemos calcular las tasas del siguiente nivel

$$\begin{aligned} r_{i,j+1} &= r_{ij} + \theta_j \Delta t - \sigma \sqrt{\Delta t} \quad i = 0, \dots, j \\ r_{j+1,j+1} &= r_{jj} + \theta_j \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t}. \end{aligned} \quad (11)$$

6.2. Valorización de la opción

Como ya se mencionó anteriormente, cada nodo del árbol Ho-Lee representa un estado del mercado posibles. Suponiendo racionalidad del cliente, asumimos que en cada nodo tomaría la opción que más le conviene, ya sea seguir en el crédito un periodo más o prepagar lo que aún debe. Para calcular estos valores es clave poder traer a valor presente en cada nodo Ho-Lee. Esto lo hacemos gracias a las tasas calculadas en cada punto y tomando la esperanza de sus ramificaciones.

Sea A_{ij} el valor de la opción de prepago en el periodo j y estado i . Sea K_j el capital no amortizado en el periodo j y VPC_{ij} la suma de todas las cuotas que quedan por pagar en valor presente. Tenemos la siguiente relación iterativa

$$A_{ij} = \max\{VPC_{ij} - K_j, \cdot \mathbb{E}[DF(\Delta t j, \Delta t(j+1)) \cdot A_{\ell, j+1} | r_j = r_{ij}]\}. \quad (12)$$

Es decir, el valor de la opción de prepago en cierto nodo es el máximo entre, prepagar el crédito y el valor de la opción en el siguiente periodo dado el estado del mercado hoy, traído a valor presente, lo cual queda ponderando por $DF(\Delta t j, \Delta t(j+1))$. Finalmente, el valor de la opción al momento de ofrecer el crédito está dado por A_{00}

6.2.1. Implementación

El árbol de valores se irá llenando en reversa, tomando en consideración de que $A_{iN} = 0$ para todo estado i ya que el crédito ya terminó y no hay nada que prepagar.

Para poder traer a valor presente las cutoas es necesario conocer $\mathbb{E}[DF(\Delta t j, \Delta t k) | r_j = r_{ij}]$ para cada nodo Ho-Lee con $k \geq j$. El factor de descuento en esperanza se calcula a través de la tasa *spot* esperada a través de la siguiente relación

$$\mathbb{E}[DF(\Delta t j, \Delta t k) | r_j = r_{ij}] = \frac{1}{1 + \tilde{r}_{ij}^k \frac{\Delta t}{360}}. \quad (13)$$

donde \tilde{r}_{ij}^k es la tasa *spot* en el periodo j esperada para hasta el periodo k dado el estado. Por notación, de ahora en adelante obviaremos la condicionalidad $\{r_j = r_{ij}\}$.

Las tasas *spot* se calculan de la siguiente manera, descomponiendo el factor de descuento y utilizando (2)

$$\tilde{r}_{ij}^k = \left(\frac{1}{DF(\Delta t j, \Delta t(k-1)) \cdot DF(\Delta t(k-1), \Delta t k)} - 1 \right) \frac{360}{\Delta t}. \quad (14)$$

Donde $DF(\Delta t j, \Delta t(k-1))$ se puede obtener con la ecuación (2) a través de \tilde{r}_{ij}^{k-1} . Mientras que el segundo término se obtiene de la tasa forward esperada del periodo $k-1$ al periodo k , la denotamos por $r_{ij}^k = \mathbb{E}[r_k | r_j = r_{ij}]$. Debido a que las probabilidades de subir y bajar en el árbol Ho-Lee son las mismas, obtenemos

$$r_{ij}^k = r_{ij} + \Delta t \sum_{\ell=j}^{k-1} \theta_\ell. \quad (15)$$

Luego, obtenemos que el valor presente del crédito está dado por

$$VPC_{ij} = \sum_{k=j+1}^N C_k DF(\Delta t j, \Delta t k). \quad (16)$$

Donde C_k es el valores de la k -ésima cuota del crédito.

7. Resultados

7.1. Calibración del Modelo de Tasas

Antes de valorar la opción, es fundamental validar que el modelo de tasas replica correctamente las condiciones del mercado.

7.1.1. Construcción del Árbol de Ho–Lee

Se implementó el árbol binomial de Ho–Lee calibrado a la curva Swap Cámara Promedio vigente al 15 de septiembre de 2025.

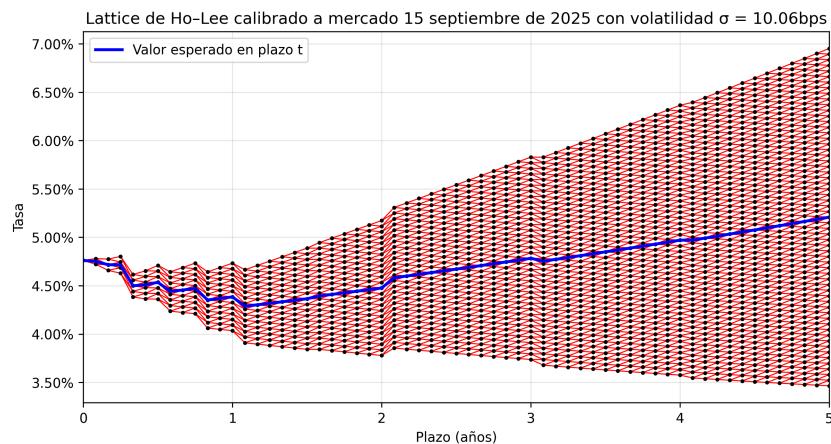


Figura 7.1: Árbol de tasas cortas generado por el modelo de Ho–Lee a 5 años plazo. La línea azul representa el valor esperado de la tasa en el plazo t .

A diferencia de modelos normales simples que pueden arrojar tasas negativas con alta probabilidad en plazos largos, la calibración realizada con la volatilidad actual ($\sigma \approx 10.06$ bps, calculada vía desviación estándar de la muestra solo en 2025) muestra un comportamiento robusto. Como se observa en la Figura 7.1, la dispersión de tasas a 5 años se mantiene en rangos coherentes con la historia reciente (entre 3.5 % y 7.0 %).

7.1.2. Impacto de la Volatilidad en la Estructura del Árbol

Para evaluar la sensibilidad del modelo a la estimación de la volatilidad, se generó un escenario alternativo con una volatilidad histórica de mayor plazo ($\sigma \approx 16.84$ bps, calculada vía EWMA desde 2021). Es posible observar como el árbol se "abre" significativamente más, capturando escenarios extremos para tasas más altas y bajas (ver Figura 7.2),

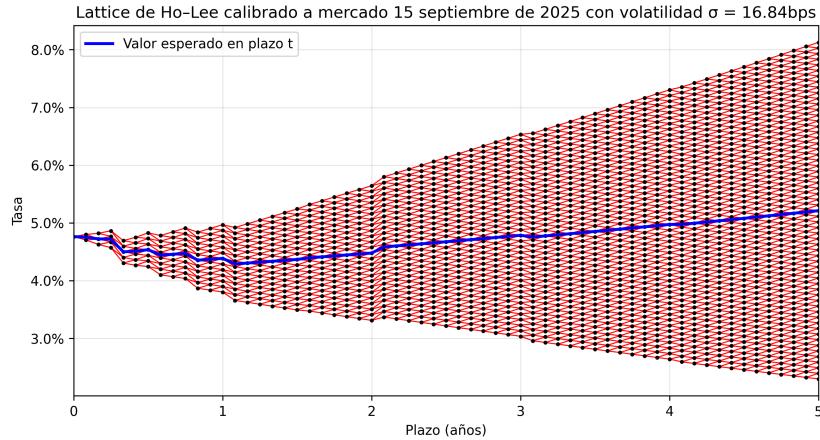


Figura 7.2: Árbol de tasas bajo un escenario de mayor volatilidad. Se aprecia una mayor dispersión de los nodos terminales.

7.2. Valoración de la Opción de Prepago

8. Conclusiones y Tareas Futuras

8.1. Entregables

Los entregables fueron acordados con la contraparte del banco considerando los objetivos del proyecto.

- Paquete de datos para la calibración del modelo, curvas 0 cupón de las curvas swap cámara peso.
- Notebook reproducible con el modelo de Ho-Lee extendido calibrado al set de datos anteriores.
- Informe técnico de cómo usar este modelo y límites de aplicación.

Referencias

- [1] Litterman, R., & Scheinkman, J. (1991). Common factors affecting bond returns. *The Journal of Fixed Income*, 1(1), 54–61. Link.
- [2] Valdés, F. (15 de julio de 2004). *SBIF imparte instrucciones referidas al prepago de créditos. Se modifica el título I del Capítulo 7-1 de la Recopilación Actualizada de Normas*. Superintendencia de Bancos e Instituciones Financieras (Chile). Link.