Trabalho Final

Aplicações do Método de Monte Carlo

Rafael Katopodis
Vinícius Garcia

Tópicos

1. **Apresentação do Problema**
   a. Método de Monte Carlo
   b. Método de Euler
   c. Método de Heun

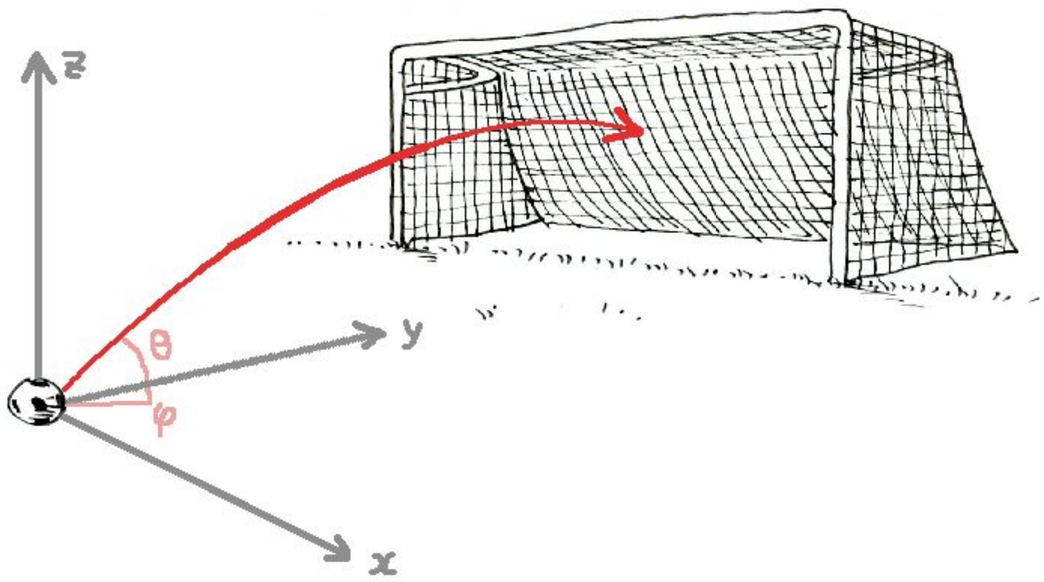
2. **Apresentação da Solução**
   a. Análise de paralelismo
   b. Explicação da implementação
   c. Otimizações realizadas
   d. Seleção de *timestep*

3. **Conclusões**
   a. Métricas de tempo
   b. Análise de Sensibilidade
   c. Considerações finais

Apresentação do Problema

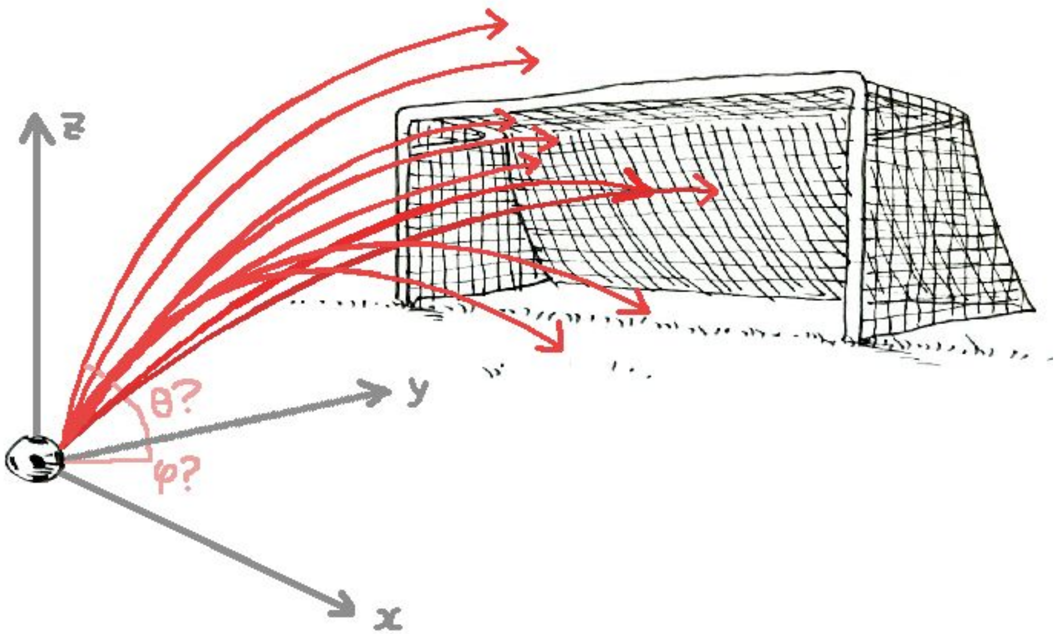
Apresentação do Problema

- Estimar o movimento de uma bola em um chute ao gol



Apresentação do Problema

- A direção do chute é uma variável aleatória, o que torna o movimento dela também uma variável aleatória.



Apresentação do Problema

- Determinar analiticamente a distribuição do movimento seria impraticável.

- Portanto, usamos o método de Monte Carlo para simular amostras da distribuição desconhecida e estimamos estatísticas da distribuição subjacente a partir desse conjunto de amostras.

Como gerar uma amostra?

- Como partimos de condições iniciais da bola e do chute e determinamos onde a bola está quando cruza a linha do gol?

- Podemos fazer essa conexão com a adição de um elemento: um modelo de dinâmica.

$$\frac{dx}{dt} = v_x$$

$$\frac{dy}{dt} = v_y$$

$$\frac{dz}{dt} = v_z$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{\rho_{ar}}{2m} A C_R(v) v v_x - \rho_{ar} A C_M \frac{r \omega v v_y}{2m\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}}$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{\rho_{ar}}{2m} A C_R(v) v v_y + \rho_{ar} A C_M \frac{r \omega v v_x}{2m\sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2}}$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -g - \frac{\rho_{ar}}{2m} A C_R(v) v v_z$$

Como gerar uma amostra?

- Temos condições iniciais e um sistema de equações diferenciais. Um problema com essas características é chamado de problema de valor inicial...

- ...portanto, para gerarmos uma amostra, temos de resolver um problema de valor inicial.

Método de Euler

- Queremos estimar uma função a partir de um problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \; a \leq t \leq b, \; y(a) = \alpha$$

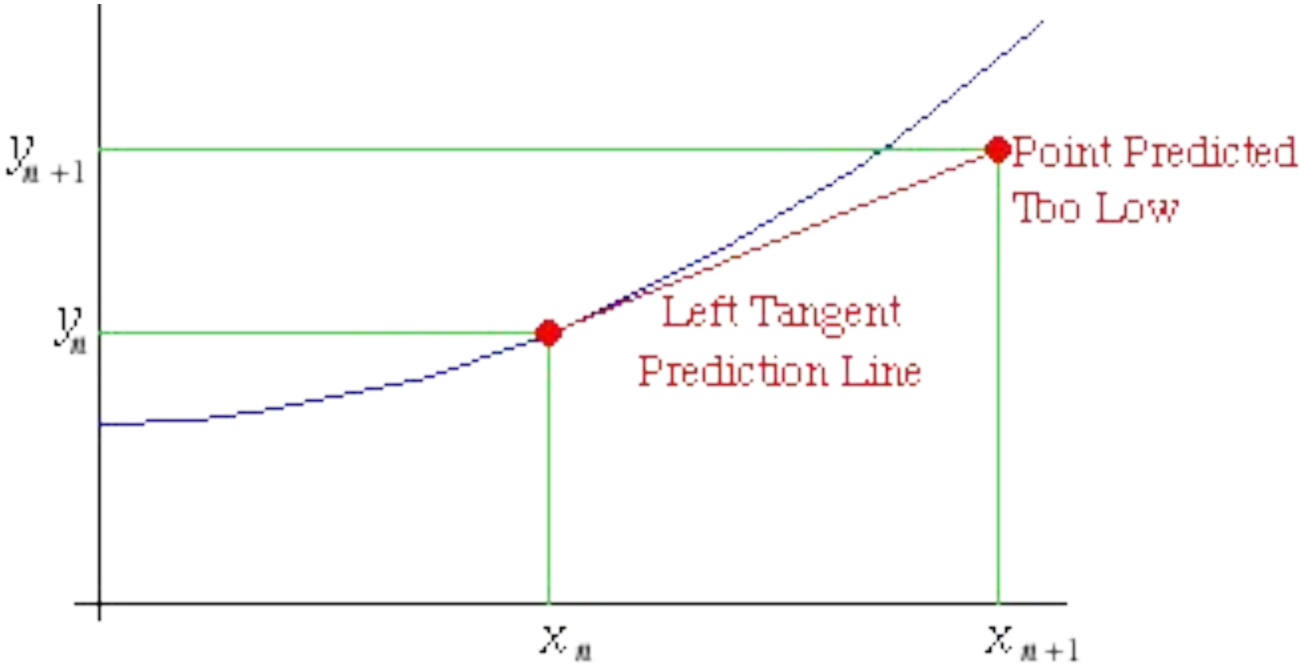
- O método é definido através da relação de recursão:

$$w_0 = \alpha$$

$$w_{i+1} = w_i + h \cdot f(t_i, w_i), \quad i = 0, 1, \ldots$$

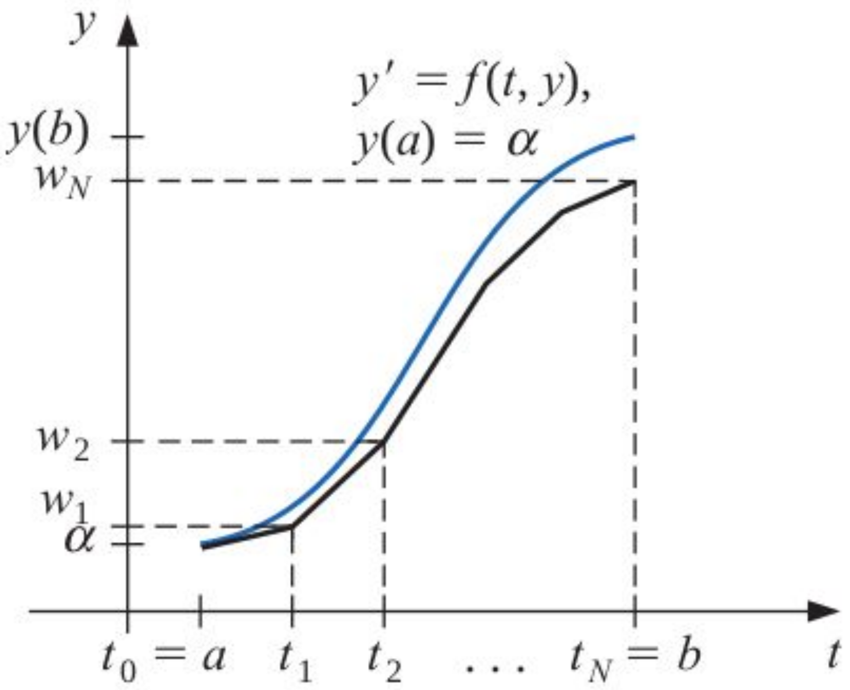
Método de Euler

- Próximo ponto é projetado a partir do anterior, na direção da linha tangente



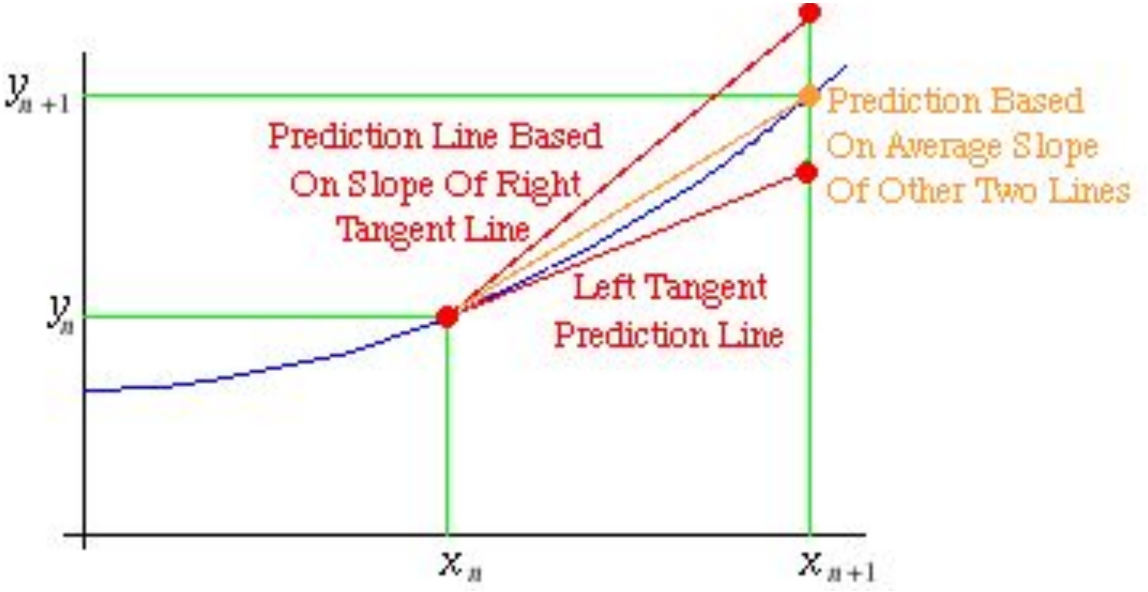
Método de Euler

- Pouco preciso:



Método de Heun

- Também conhecido como método de Euler modificado
  - Explora as subestimativas e superestimativas produzidas pelo método de Euler



Método de Heun

- Definido pela relação de recursão:

$$w_0 = \alpha$$

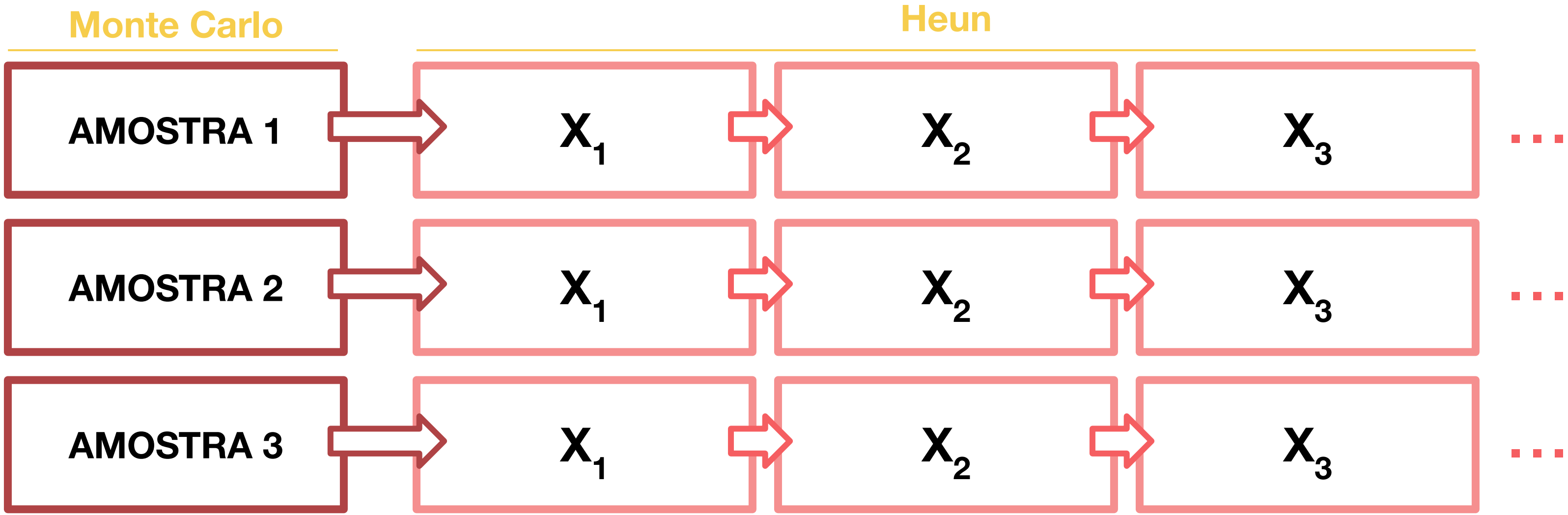
$$w_{i+1}^E = w_i + h \cdot f(t_i, w_i)$$

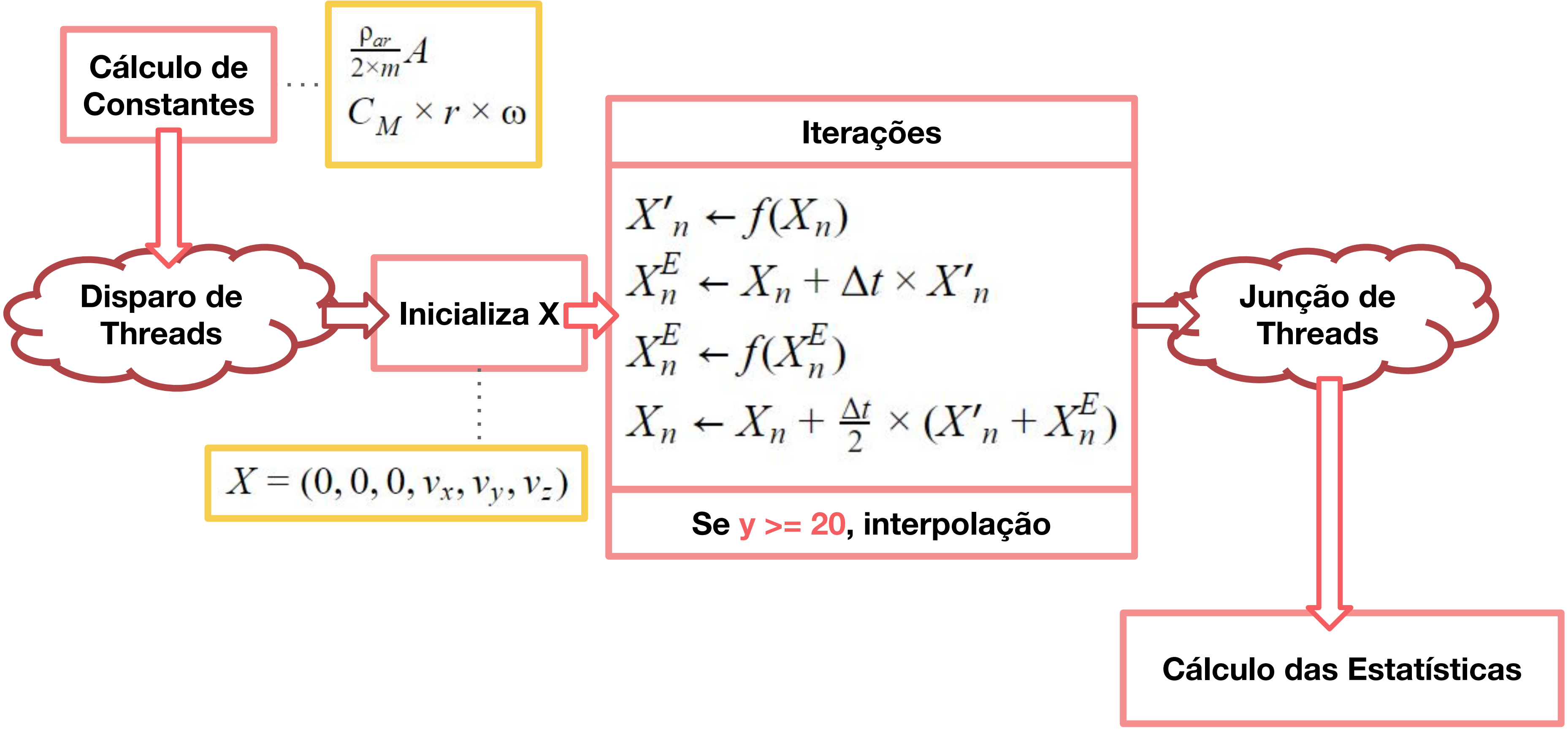
$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} \cdot \left[f(t_i, w_i) + f(w_{i+1}^E) \right]$$

Apresentação da Solução

Apresentação da Solução

- O que dá para paralelizar?



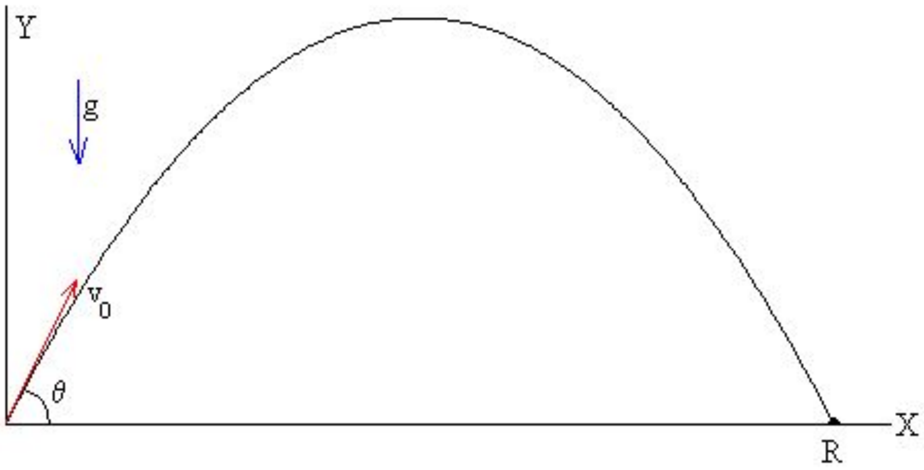


Cálculo de Constantes
$\frac{\rho_{ar}}{2\times m}A$
$C_M \times r \times \omega$
Disparo de Threads
Inicializa X
$X = (0, 0, 0, v_x, v_y, v_z)$
Iterações
$X'_n \leftarrow f(X_n)$
$X_n^E \leftarrow X_n + \Delta t \times X'_n$
$X_n^E \leftarrow f(X_n^E)$
$X_n \leftarrow X_n + \frac{\Delta t}{2} \times (X'_n + X_n^E)$
Se y >= 20, interpolação
Junção de Threads
Cálculo das Estatísticas

Seleção de Timestep

- Como selecionar os timesteps?

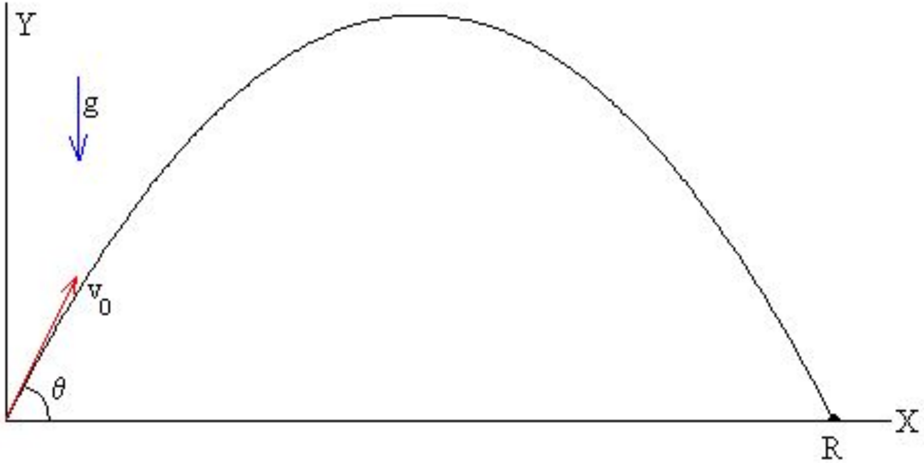
- **Opção:** descobrir timesteps válidos para uma situação trivial e compensar pela adição de complexidade
  - Lançamento balístico simples.



Seleção de Timestep

$$t = 2 \times \frac{v_y}{g}$$

$$\begin{aligned} d &= v_x \times t \\ &= v \times cos(\theta) \times 2 \times \frac{v \times sen(\theta)}{g} \\ &= \frac{2}{g} \times v^2 \times cos(\theta) \times sen(\theta) \end{aligned}$$



- Com θ = 10º e v = 25m/s, temos:

$$\begin{aligned} d &= \frac{2}{9.81} \times 25^2 \times cos(10º) \times sen(10º) \\ &= 21.790274167 \end{aligned}$$

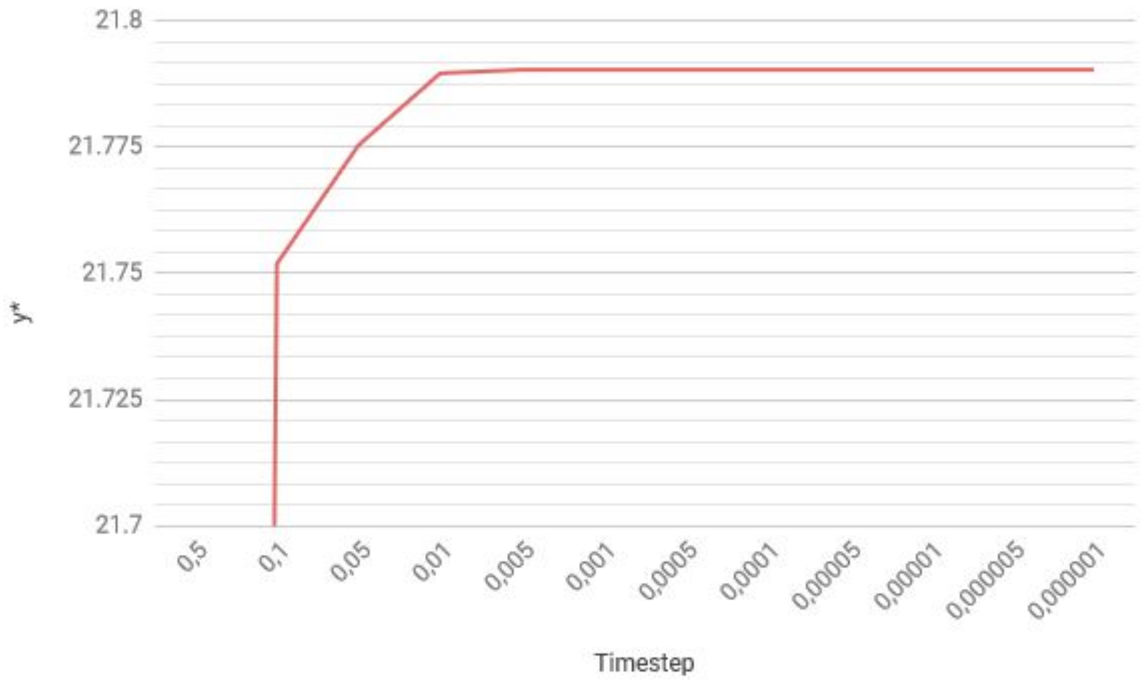
Seleção de Timestep

- Tornamos o programa flexível o suficiente para aceitar esta situação por parâmetros de entrada.

```
!./trabalho_final 32 1024 0.000001 0 1
```

```
!./trabalho_final 32 1024 0.000001 0 1 25.0 10 0 0 0 2 0 1 0
```

Seleção de Timestep



- Por volta de $\Delta t = 0{,}01$ nosso erro está na 6ª casa decimal;

- Compensando pela complexidade com duas ordens de magnitude, um resultado satisfatório utilizaria um $\Delta t = 0{,}0001$.

Conclusões

Métricas de Tempo

- Duas principais medições:

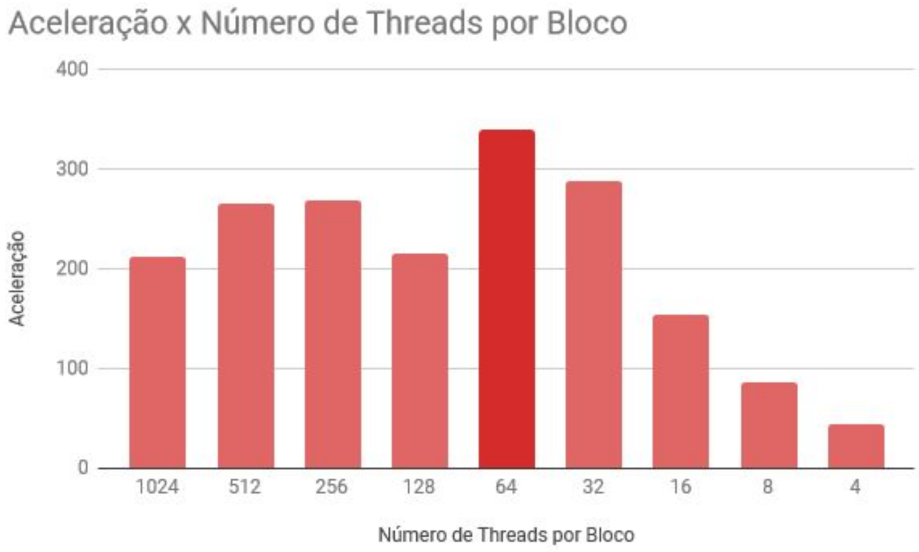
  1. Qual a quantidade mais adequada de threads por bloco?
  2. O quão melhor é a solução paralela para amostragens cada vez maiores?

Métricas de Tempo

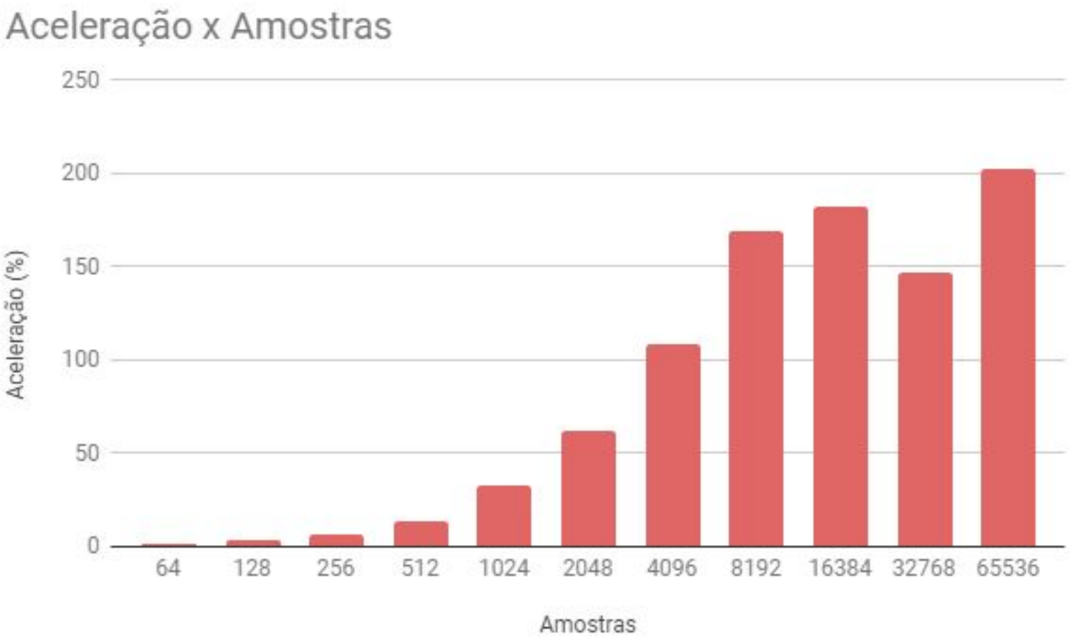
- Seguindo a linha dos exercícios de aula, observamos um impacto significativo da escolha do número de threads por bloco na velocidade do programa

- Abaixo de 32 estamos sub-utilizando o hardware.

- Com 64, a aceleração atinge seu máximo, possivelmente o movimento de ativação e desativação das threads flui melhor.



Métricas de Tempo



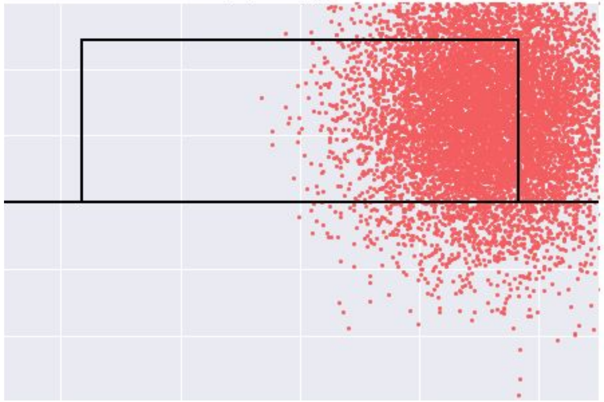
- Resultado esperado: quanto mais iterações, maior a aceleração.

- A partir de certo ponto, tanto a CPU quanto a GPU passam a ter dificuldades.

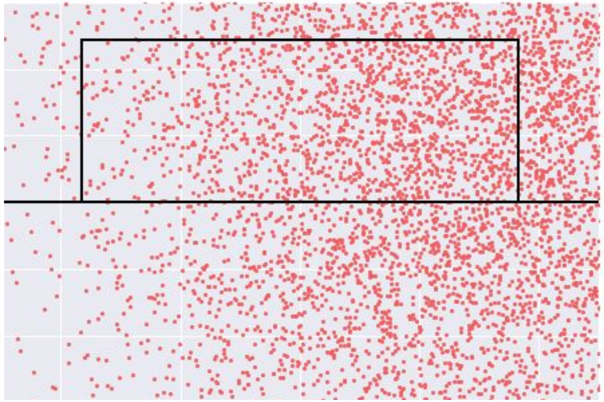
Análise de Sensibilidade

$\sigma(\theta) = \sigma(\varphi) = 1^\circ$

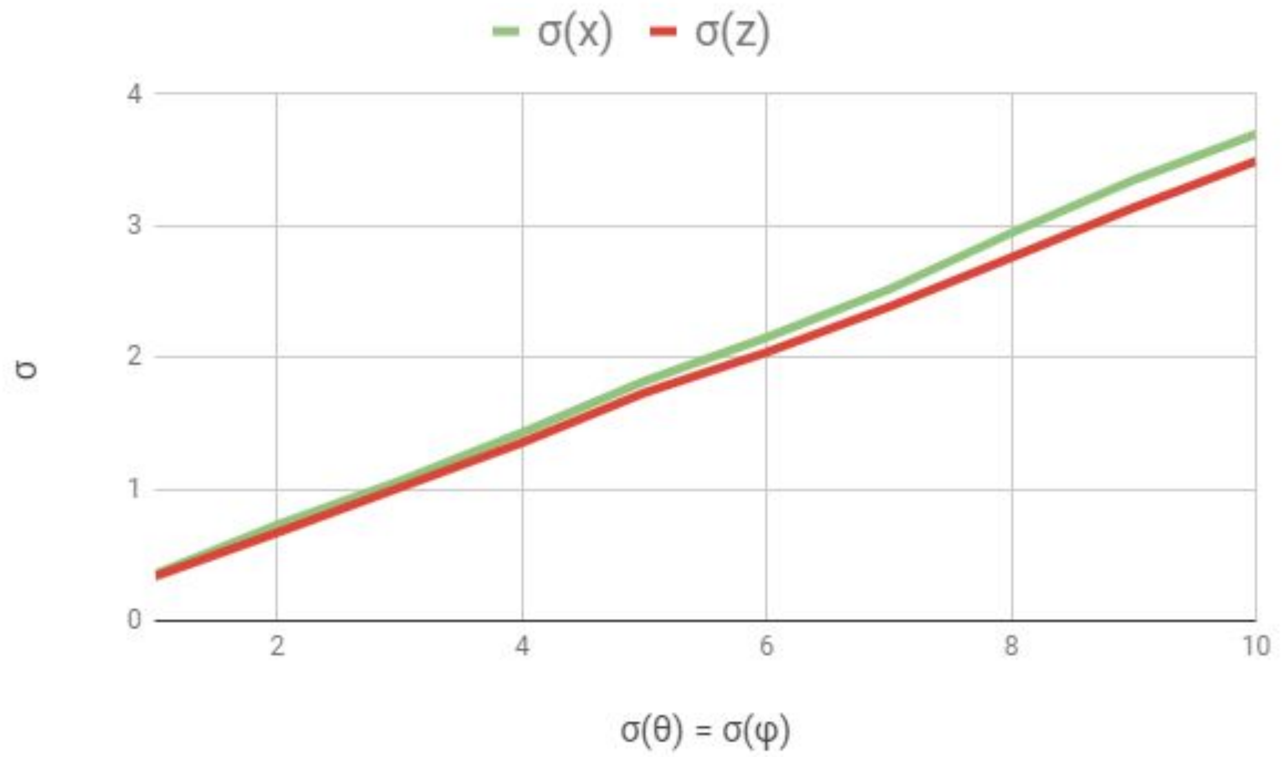
$\sigma(\theta) = \sigma(\varphi) = 3^\circ$



$\sigma(\theta) = \sigma(\varphi) = 10^\circ$



Análise de Sensibilidade



Considerações finais

- Apesar de ter pouco paralelismo dentro do método de Heun, o fato das amostras serem independentes já traz um ganho muito significativo.

- Não identificamos muitas outras oportunidades de otimização no algoritmo;

- Algumas outras questões poderiam ser levantadas:
    - Como as otimizações feitas impactam na performance?
    - Qual a relação entre o hardware específico da GPU e os valores ótimos encontrados?