CAPÍTULO 7

Rectas e hiperplanos. Conjuntos convexos.

Este capítulo consta de dos secciones. En la primera se darán las definiciones de recta, segmento de recta e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$. En la segunda se verán algunos resultados sobre conjuntos convexos. Quien desee estudiar un poco más sobre estos tópicos puede consultar el capítulo 6 de [**7**].

7.1. Rectas. Segmentos de recta. Hiperplanos

Los conceptos de recta, segmento de recta e hiperplanos en $\mathbb{R}^n$ son útiles en programación lineal (véase el capítulo 6 de [**12**]). Antes de proseguir con la discusión, se hará una pequeña aclaración sobre la notación y se hará una diferencia entre lo que es un punto P en el espacio $\mathbb{R}^n$ y el segmento de recta dirigido (vector coordenado o simplemente vector), que tiene como extremo inicial el origen de coordenadas O y como extremo final al punto P. Éste se denotarár por $\overrightarrow{OP}$ o simplemente p.

Al punto $P \in \mathbb{R}^n$ se le asignan las coordenadas $(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$ y se escribe $P(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$, mientras que al vector $\overrightarrow{OP}$ también se le asignan coordenadas $(x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n)$, pero escribiremos $\overrightarrow{OP} = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_3)$ o simplemente, $p = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_3)$ (ver figura 7.1 en el caso de $\mathbb{R}^3$).

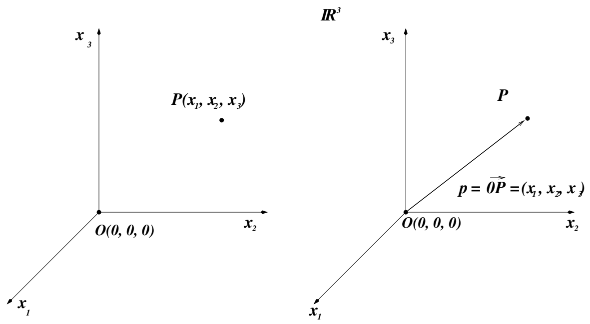

FIGURA 7.1. Puntos y vectores en $\mathbb{R}^3$.

Nota. Dados *dos puntos* $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *y* $Q(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ *en* $\mathbb{R}^n$, *el segmento de recta dirigido o vector, que tiene como punto inicial a* P *y como punto final* Q, *se denotará por* $\overrightarrow{PQ}$ *y se le asignan las coordenadas* $(x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots, x_n' - x_n)$. *En tal sentido, y dado que*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} &= (x_1', x_2', \ldots, x_n') - (x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &= (x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots, x_n' - x_n), \end{aligned}$$

se escribireá $\overrightarrow{PQ} = (x_1' - x_1, x_2' - x_2, \ldots, x_n' - x_n)$.

7.1. **Definición** (Rectas)**.** *En* $\mathbb{R}^n$, *la recta que pasa por el punto* P *en la dirección del vector* $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ *se define como el conjunto de puntos:*

$$\ell = \{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \mathbf{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{7.1}$$

Se dice además, que el vector $\mathbf{d}$ *es un vector director de la recta* ℓ.

Según la definición anterior, un punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ pertenece a la recta ℓ dada por (7.1) *sii* existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{OX_0} = \overrightarrow{OP} + \lambda_0 \mathbf{d}$.

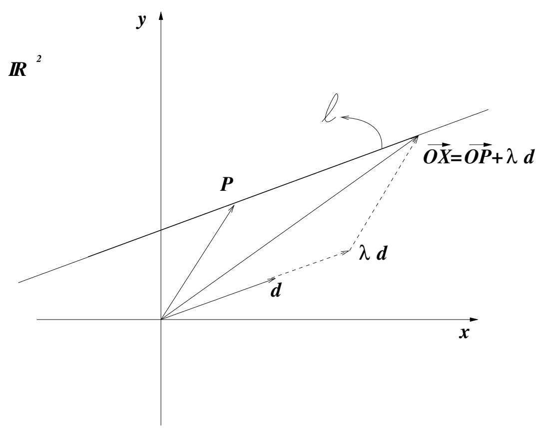

FIGURA 7.2. Una recta en $\mathbb{R}^2$.

7.2. **Ejemplo.** En $\mathbb{R}^3$, la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ en la dirección del vector $\mathbf{d} = (1, 0, 5)$, es el conjunto de puntos:

$$\ell = \left\{X(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + \lambda(1, 0, 5), \quad \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

El punto $X_0(-1, 2, -7)$ pertenece a dicha recta, pues:

$$\overrightarrow{OX_0} = (-1, 2, -7) = (1, 2, 3) + (-2)(1, 0, 5).$$

Sin embargo, el punto $X^*(2, 3, 2)$ no pertenece a la recta ℓ, pues no existe $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(2, 3, 2) = (1, 2, 3) + \lambda^*(1, 0, 5) = (1 + \lambda^*, 2, 3 + 5\lambda^*). \square$$

Ahora bien, si el punto Q de $\mathbb{R}^n$ está sobre la recta (7.1) y $Q \neq P$, entonces existe un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \lambda_0 \mathbf{d}$. De aquí que $\mathbf{d} = \dfrac{1}{\lambda_0}\,\overrightarrow{PQ}$, y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \ell &= \Big\{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \mathbf{d}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\Big\} \\ &= \Big\{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \frac{\lambda}{\lambda_0}\,\overrightarrow{PQ}, \quad \lambda \in \mathbb{R}\Big\}\,. \end{aligned}$$

En consecuencia, se puede decir que la recta que pasa por los puntos P y Q $(P \neq Q)$ de $\mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos:

$$\ell = \Big\{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}, \quad t \in \mathbb{R}\Big\}\,. \tag{7.2}$$

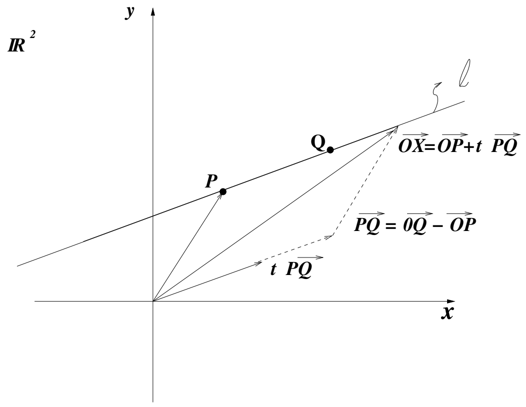

FIGURA 7.3. Gráfica de una recta que pasa por los puntos P y Q.

7.3. **Ejemplo.** La recta que pasa por los puntos $P = (1, 2, 3)$ y $Q = (4, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, es el conjunto de puntos:

$$\ell = \big\{X(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3) + t(3, -1, -2),\ t \in \mathbb{R}\big\}\,.$$

$\square$

7.4. **Definición.** *[Segmento de recta]*

El segmento de recta que une los puntos P y Q de $\mathbb{R}^n$, se denota por $\overline{PQ}$ y se define así:

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \Big\{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\,\overrightarrow{PQ}, \quad \textit{para} \quad 0 \le t \le 1\Big\}\,. \\ &= \Big\{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = t\overrightarrow{OP} + (1-t)\,\overrightarrow{OQ}, \quad \textit{para} \quad 0 \le t \le 1\Big\}\,. \end{aligned}$$

Según la definición anterior, un punto $X_0 \in \mathbb{R}^n$ pertenece a $\overline{PQ}$ *sii* existe $0 \le t_0 \le 1$ tal que $\overrightarrow{OX_0} = \overrightarrow{OP} + t_0\,\overrightarrow{PQ}$.

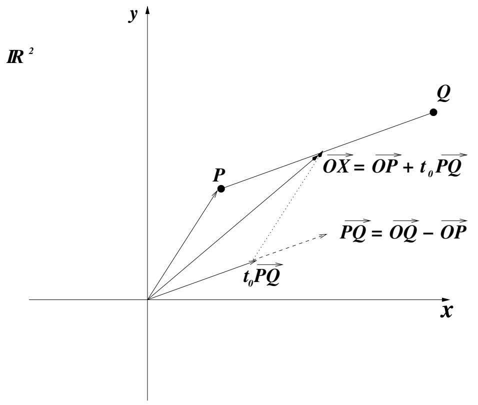

FIGURA 7.4. Segmento de recta que une los puntos P y Q

7.5. **Ejemplo.** El segmento de recta que une al punto $P(1,\,2,\,3,\,4)$ con el punto $Q(0,\,1,\,0,\,2)$, es el conjunto de puntos $X(x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4) \in \mathbb{R}^4$:

$$\overline{PQ} \;=\; \left\{X \in \mathbb{R}^4 : (x_1,\,x_2,\,x_3,\,x_4) = (1,\,2,\,3,\,4) + t(-1,-1,-3,-2)\,\right\},$$

El punto $X_0(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2},\,3)$ pertenece a $\overline{PQ}$, pues

$$(\frac{1}{2},\,\frac{3}{2},\,\frac{3}{2},\,3) = (1,\,2,\,3,\,4) + \frac{1}{2}(-1,-1,-3,-2).$$

Sin embargo, el punto $X^*(-1,\,0,-3,\,0)$ no pertenece a $\overline{PQ}$, pues no existe t^* con $0 \le t^* \le 1$ tal que

$$\begin{aligned}(-1,\,0,-3,\,0) &= (1,\,2,\,3,\,4) + t^*(-1,-1,-3,-2)\\ &= (1-t^*, 2-t^*, 3-3t^*, 4-2t^*)\,.\square\end{aligned}$$

7.6. **Definición.** *[Hiperplano]*

En $\mathbb{R}^n$, el hiperplano que pasa por el punto P y que es normal al vector $\mathbf{n} \neq 0$, se define como el conjunto de puntos:

$$\mathcal{H} = \left\{X \in \mathbb{R}^n : (\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}) \cdot \mathbf{n} = 0\right\},$$

o lo que es lo mismo,

$$\mathcal{H} = \left\{X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n} = cte.\right\},$$

donde "·" es el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$ (véase apartado 1.2.3).

7.7. **Observación.** En $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$ los hiperplanos tienen una estructura muy particular. En efecto,

1. En $\mathbb{R}^2$, un hiperplano es una recta. Así por ejemplo, el hiperplano (recta) que pasa por el punto $P(4,-3)$ y que es normal al vector $\mathbf{n} = (-5, 2)$, es el conjunto de puntos $X(x_1,\,x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación:

$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = -5x_1 + 2x_2 = -20 - 6 = -26 = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n},$$

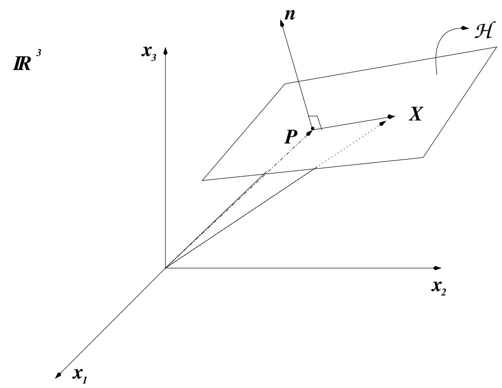

FIGURA 7.5. Gráfica de un plano en $\mathbb{R}^3$.

o sea,

$$-5x_1 + 2x_2 = -26.$$

2. En $\mathbb{R}^3$, un hiperplano es un plano. Así por ejemplo, el hiperplano (plano) que pasa por el punto $P(2, -1, 1)$ y que es normal al vector $\mathbf{n} = (-1, 1, 3)$, es el conjunto de puntos $X(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación:

$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = -x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 - 1 + 3 = 0 = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n},$$

o sea,

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\,.$$

7.8. **Ejemplo.** Dados los puntos $Q(1, 1, 1)$, $P(1, -1, 2)$ y el vector $\mathbf{n} = (1, 2, 3)$, encuentre el punto de intersección, si lo hay, de la recta que pasa por el punto P en la dirección del vector $\mathbf{n}$ y del hiperplano (plano) que pasa por Q y es normal al vector $\mathbf{n}$.

La recta que pasa por P en la dirección del vector $\mathbf{n}$, es el conjunto de puntos de $X(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ tales que:

$$(x_1, x_2, x_3) = \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\mathbf{n} = (1, -1, 2) + \lambda(1, 2, 3). \qquad \lambda \in \mathbb{R}\,.$$

El hiperplano (plano) que pasa por Q y que es normal al vector $\mathbf{n}$, es el conjunto de puntos de $X(x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$ para los cuales se satisfacen la ecuación:

$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 = \overrightarrow{OQ} \cdot \mathbf{n}\,.$$

Ahora bien, si denotamos por I al punto de intersección entre la recta y el plano, entonces:

$$\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP} + \lambda^*\mathbf{n}$$

para algún $\lambda^* \in \mathbb{R}$, y también

$$\overrightarrow{OI} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{OQ} \cdot \mathbf{n}.$$

De esto se sigue que:

$$\overrightarrow{OP} + \lambda^*\mathbf{n} = \overrightarrow{OQ}\,.$$

Utilizando las propiedades del producto interno encontramos que:

$$\lambda^* = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \mathbf{n}}{\|\,\mathbf{n}\|^2} = \frac{1}{14}\,.$$

En consecuencia, las coordenadas del punto buscado están dadas por:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OP} + \lambda^* \mathbf{n} = (1, -1, 2) + \frac{1}{14}(1, 2, 3) \\ &= (\frac{15}{14}, -\frac{12}{14}, \frac{31}{14}) \;. \square \end{aligned}$$

La figura 7.6 ilustra la situación de la intersección entre una recta y un plano.

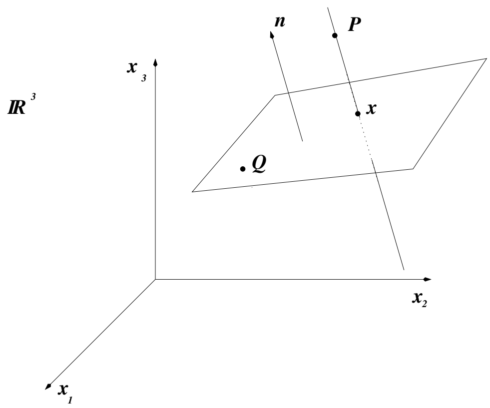

FIGURA 7.6. Gráficas de un plano y una recta en $\mathbb{R}^3$

7.9. **Definición.** *Sea H el hiperplano de $\mathbb{R}^n$ descrito por la ecuación*

$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n} = c$$

Los conjuntos

$$\begin{aligned} \overline{S_1} &= \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \ \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} \leq c \right\} \qquad y \\ \overline{S_2} &= \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \ \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} \geq c \right\} \qquad , \end{aligned}$$

se denominan los semiespacios cerrados con frontera H.

Los conjuntos

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \ \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} < c \right\} \qquad y \\ S_2 &= \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \ \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} > c \right\} \qquad , \end{aligned}$$

se denominan semiespacios abiertos con frontera H.

Nota. *Los semiespacios abiertos no incluyen la frontera H, mientras que los semiespacios cerrados si la incluyen.*

7.1 Ejercicios

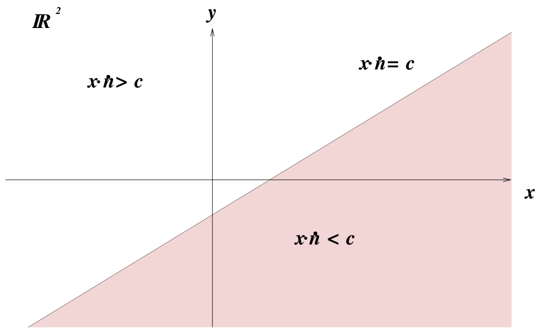

Figura 7.7. Ilustración de semiespacios abiertos

En los ejercicios 1 al 3 responda verdadero o falso, justificando su respuesta.

1. El punto $X\,(4,\,5,\,0)$ pertenece a la recta que pasa por el punto $P\,(1,\,2,\,-3)$ en la dirección del vector $\mathbf{d}=(1,\,1,\,1)$.
2. El punto $X\,(0,\,1,\,2)$ pertenece al segmento de recta que une a los puntos $P\,(1,\,2,\,-3)$ y $Q\,(4,\,5,\,6)$.
3. Sean $Q\,(1,\,2,\,3)\,,\,P\,(0,\,1,\,2)$ y $\mathbf{n}=(1,\,1,\,1)$. El punto de intersección de la recta que pasa por P en la dirección del vector $\mathbf{n}$ y de hiperplano que pasa por Q y que es normal al vector $\mathbf{n}$, es $M\,(2,\,0,\,1)$.

En los ejercicios 4 al 7 demuestre la afirmación correspondiente

4. Sea $\mathcal{H}=\left\{X\in\mathbb{R}^k:\,\overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{n}=c\right\}$ un hiperplano de $\mathbb{R}^k$.
   a) Muestre que si $X=0\notin\mathcal{H}$, entonces existe un vector $\mathbf{n}^*\neq\mathbf{0}$ tal que:
   $$\mathcal{H}=\left\{X\in\mathbb{R}^k:\;\overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{n}^*=1\right\}.$$
   b) Demuestre que si $X=0\notin\mathcal{H}$, entonces existen k puntos $b_1,\,b_2,\,\ldots,b_k$ de $\mathcal{H}$, que como vectores son linealmente independientes.
   c) Demuestre que si $X=0\notin\mathcal{H}$, entonces
   $$\mathcal{H}=\left\{X\in\mathbb{R}^k:\;X=\sum_{i=1}^k\lambda_ib_i,\qquad\sum_{i=1}^k\lambda_i=1\right\},.$$
   donde $b_1,\,b_2,\,\ldots,b_k$ son puntos de $\mathcal{H}$, que como vectores, son linealmente independientes.
5. Encuentre b_1, b_2 y b_3 tales que
   $$\begin{aligned}\mathcal{H}&=\left\{X\in\mathbb{R}^3:\,X\cdot(2,1,1)=1\right\}\\&=\left\{X\in\mathbb{R}^3:\,X=\sum_{i=1}^3\lambda_ib_i,\qquad\sum_{i=1}^3\lambda_i=1\right\}\end{aligned}$$
6. Sean $b_1=(1,0,0)$, $b_2=(1,1,0)$ y $b_3=(1,1,1)$.
   a) Demuestre que b_1, b_2 y b_3 son linealmente independientes.
   b) Encuentre un vector $\mathbf{n}^*\neq 0$ tal que:
   $$\begin{aligned}\mathcal{H}&=\left\{X\in\mathbb{R}^3:\,\overrightarrow{OX}=\sum_{i=1}^3\lambda_ib_i,\qquad\sum_{i=1}^3\lambda_i=1\right\}\\&=\left\{X\in\mathbb{R}^3:\,\overrightarrow{OX}\cdot\mathbf{n}^*=1\right\}.\end{aligned}$$

7. Sea $\mathcal{H} = \{X \in \mathbb{R}^k : X \cdot \mathbf{n} = c\}$ un hiperplano de $\mathbb{R}^n$.
   a) Muestre que $X = \mathbf{0} \in \mathcal{H}$ *sii* $c = 0$.
   b) Demuestre que si $X = \mathbf{0} \in \mathcal{H}$, entonces existen $k-1$ puntos $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ de $\mathcal{H}$, que como vectores son linealmente independientes.
   c) Demuestre que si $X = 0 \in \mathcal{H}$, entonces
   $$\mathcal{H} = \left\{X \in \mathbb{R}^k : \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i a_i \right\}.$$
   donde $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ son $k-1$ puntos de $\mathcal{H}$, que como vectores son linealmente independientes.
8. Encuentre a_1 y a_2 tales que
   $$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{X \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OX} \cdot (2,1,1) = 0\right\} \\ &= \left\{X \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OX} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\right\} \end{aligned}$$
9. Sean $a_1 = (1,1,1)$ y $a_2 = (1,0,1)$.
   a) Muestre que a_1 y a_2 son linealmente independientes.
   b) Encuentre un vector $\mathbf{n}^* \neq 0$ tal que:
   $$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{X \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{OX} = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2\right\} \\ &= \left\{X \in \mathbb{R}^3 : v \cdot N^* = 0\right\}. \end{aligned}$$
10. Demuestre que todo hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es una variedad lineal de dimensión $n-1$ (véase el apartado 1.2.1).

7.2. Conjuntos convexos

Los conjuntos convexos juegan un papel importante en la programación lineal. En particular se tiene que la llamada región factible de un problema de programación lineal es un conjunto convexo (vea el teorema 6.6(iii) de [**12**]).

7.10. **Definición.** *Sea $\mathcal{C}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\mathcal{C}$ es convexo, si para dos puntos cualesquiera P y Q de $\mathcal{C}$, el segmento de recta $\overline{PQ}$ está contenido en $\mathcal{C}$.*

En la figura 7.1 los conjuntos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son convexos, mientras que los conjuntos $\mathcal{C}_3$ y $\mathcal{C}_4$ no son convexos.

7.11. **Teorema.** *Todo hiperplano de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Sea $\mathcal{H}$ el hiperplano de $\mathbb{R}^n$ descrito por la ecuación
$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n} = c$$
y sean Q_1 y Q_2 puntos de $\mathcal{H}$. Ahora, si X^* es un punto de $\mathbb{R}^n$ cuyas coordenadas satisfacen:
$$\overrightarrow{OX}^* = \overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{Q_2Q_1}), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

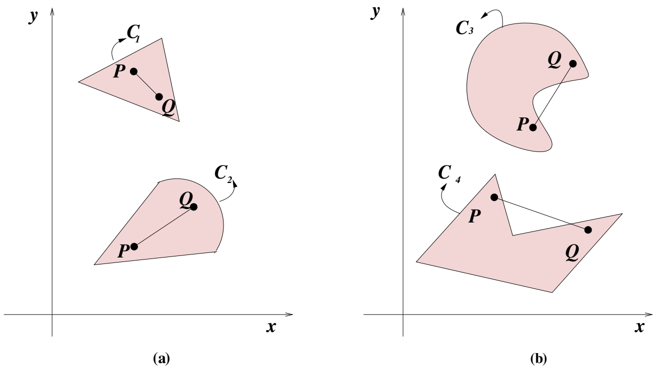

FIGURA 7.1. Conjuntos convexos y no convexos

entonces X^* es un punto del segmento de recta $\overline{Q_1Q_2}$ y se tiene que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX}^* \cdot \mathbf{n} &= \left[\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{Q_2Q_1})\right] \cdot \mathbf{n} \\
&= \left[\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1})\right] \cdot \mathbf{n} \\
&= \overrightarrow{OQ_1} + t\,\overrightarrow{OQ_2} \cdot \mathbf{n} - t\,\overrightarrow{OQ_1} \cdot \mathbf{n} \\
&= (1-t)\overrightarrow{OQ_1} \cdot \mathbf{n} + t\,\overrightarrow{OQ_2} \cdot \mathbf{n} \\
&= (1-t)c + t\,c \\
&= c\,,
\end{aligned}$$

es decir, $X^* \in \mathcal{H}$. Por lo tanto $\mathcal{H}$ es un conjunto convexo. □

7.12. **Teorema.** *Sea $\mathcal{H}$ el hiperplano de $\mathbb{R}^n$. Todo semiespacio cerrado o abierto con frontera $\mathcal{H}$ es un conjunto convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\mathcal{H}$ el hiperplano de $\mathbb{R}^n$ descrito por la ecuación

$$\overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{n} = c\,.$$

Se demuestrá únicamente que el semiespacio abierto con frontera $\mathcal{H}$

$$S = \left\{X \in \mathbb{R}^n : \ \overrightarrow{OX} \cdot \mathbf{n} < c\right\}$$

es un conjunto convexo. En el caso de semiespacio cerrados con frontera H se procede de manera análoga.

Sean pues Q_1 y Q_2 puntos del conjunto S y sea X^* un punto del segmento de recta $\overline{Q_1Q_2}$. Puesto que $Q_1 \in S$ y $Q_2 \in S$, entonces $\overrightarrow{OQ_1} \cdot \mathbf{n} < c$ y $\overrightarrow{OQ_2} \cdot \mathbf{n} < c$, de aquí que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX}^* \cdot \mathbf{n} &= \left[\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{Q_2Q_1})\right] \cdot \mathbf{n} \\
&= \left[\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{0Q_2} - \overrightarrow{OQ_1})\right] \cdot \mathbf{n} \\
&= \overrightarrow{OQ_1} + t\,\overrightarrow{0Q_2} \cdot \mathbf{n} - t\,\overrightarrow{OQ_1} \cdot \mathbf{n} \\
&= (1-t)\overrightarrow{OQ_1} \cdot \mathbf{n} + t\,\overrightarrow{OQ_2} \cdot \mathbf{n} \\
&< (1-t)c + t\,c = c\,,
\end{aligned}$$

esto es, $X^* \in S$. Por lo tanto S es un conjunto convexo. $\square$

7.13. **Teorema.** *La intersección de dos conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ dos conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ y sea $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$. Si $\mathcal{C}_3$ tiene solamente un punto, entonces $\mathcal{C}_3$ es automáticamente convexo. Sean Q_1 y Q_2 dos puntos distintos de S_3 , ya que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1}) \in \mathcal{C}_1 \qquad \text{Para todo } t \ \text{ tal que} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

y

$$\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1}) \in \mathcal{C}_2 \qquad \text{Para todo } t \ \text{ tal que} \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

En consecuencia. $\overrightarrow{OQ_1} + t(\overrightarrow{OQ_2} - \overrightarrow{OQ_1}) \in \mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ para todo t tal que $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto $\mathcal{C}_3$ es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. $\square$

La prueba del siguiente corolario se puede obtener aplicando el principio de inducción matemática y se propone como un ejercicio.

7.14. **Corolario.** *La intersección de un número finito de conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto conexo de $\mathbb{R}^n$.*

7.15. **Teorema.** *[Envolvente convexa]Sean $X_1, X_2, \ldots, X_m$ puntos de $\mathbb{R}^n$. El conjunto:*

$$C = \left\{ X \in \mathbb{R}^n : \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OX_i};\, \alpha_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, m,\, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1 \right\}$$

es un conjunto convexo y es llamado la Envolvente convexa de los puntos $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Demostración. Sean P y Q dos puntos de C; entonces existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ no negativos, tales que:

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OX_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$$

y

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \overrightarrow{OX_i}, \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1\,.$$

Sea ahora X^* un punto en el segmento de recta $\overline{PQ}$, esto es, un X^* para el cual se satisface

$$\overrightarrow{OX}^{\,*} = \overrightarrow{OP} + t(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}), 0 \leq t \leq 1.$$

Puesto que:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OX}^{\,*} &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OX_i} + t \left[\sum_{i=1}^{m} \beta_i \overrightarrow{OX_i} - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{OX_i} \right] \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left[(1-t)\alpha_i + t\beta_i \right] \overrightarrow{OX_i}\,,
\end{aligned}$$

donde $(1-t)\alpha_i + t\beta_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, m$, y

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \left[(1-t)\alpha_i + t\beta_i \right] &= (1-t)\sum_{i=1}^{m} \alpha_i + t\sum_{i=1}^{m} \beta_i \\
&= (1-t) + t = 1\,,
\end{aligned}$$

entonces $X^* \in \mathcal{C}$. En consecuencia, $\mathcal{C}$ es un conjunto convexo. $\square$

7.2 Ejercicios

En los ejercicios 1 al 2, responda verdadero o falso, justificando su respuesta.

1. La unión de dos conjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.
2. El conjunto de todas las soluciones $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$ de un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, tales que $x_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$ es un conjunto convexo.

En los ejercicios 3 al 4 demuestre la afirmación correspondiente

3. Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, entonces envía conjuntos convexos en conjuntos convexos.
4. Demuestre que si $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal biyectiva, entonces T envía triángulos en triángulos.

Índice alfabético

Base, 7
cambio de, 13
canónica de $\mathbb{R}^n$, 9
ortogonal, 10, 49
ortonormal, 10

c-inversa de una matriz, 112
Cholesky
descomposición, 146
Conjuntos
convexos, 164

Descomposición
LU, 131
Descomposición
de Cholesky, 146
en valores singulares, 151
QR, 138
Desigualdad de Schwarz, 10
Determinante, matriz, 3
Diagonal principal, matriz, 1
Diagonal, matriz, 2
Diagonalización
simétricas, 48
cuadrática, 75
ortogonal, 51
simultánea
cuadráticas, 77
de matrices, 63
Diagonalización de matrices, 39

Eigenvalores, eigenvectores; vea
valores (vectores) propios, 31
Espacio columna, matriz, 13
Espacio fila, matriz, 13
Espacio generado, 7
Espacio nulo, matriz, 14
Espacio vectorial, 5
base, 7
base ordenada, 8
de transformaciones lineales, 13
dimensión, 7
subespacio, 6
suma directa, 8
Espacios fundamentales, matriz, 13

Factorización de matrices; ver
descompisición de matrices, 131
cuadrática, 71
cambio de variables, 74
clasificación, 72
diagonalización de una, 75
indefinida, 72, 82
negaitivamente definida, 82
negativamente definida, 72
negativamente semidefinida, 82
negitivamente semidefinida, 72
no negaitiva, 72
no posiitiva, 72
positivamente definida, 72, 82
positivamente semidefinida, 72, 82
Forma escalonada reducida, 4

g-inversa de una matriz, 99, 103
método, 15
Gram-Schmidt, proceso, 140
Gram-Schmidt, proceso de, 10

Hermite
matriz superior, 115

Idéntica, matriz, 2
Identidad, matriz, 2
transformación lineal, 11
Inversa
condicional, 112
generalizada, 99, 103, 143
cálculo de, 107
propiedades, 105

LU
descomposición, 131

Matrices
Diagonalización de, 39
factorización, 131
no negativas, 89
semejantes
característicos de, 37
simétricas
diagonalización, 48
Matrices elementales, 4
Matriz
adjunta, 3
cambio de base, 13
cofactor ij, 3
de cofactores, 3
cuadrática, 72
transformación lineal, 12
determinante, 3
propiedades, 3
diagonal, 2
espacio columna de una, 13
espacio fila de una, 13

espacio nulo de una, 14
espacios fundamentales de una, 13
forma escalonada reducida, 4
hermite superior, 115
idempotente, 94
idéntica, 2
inversa, 2, 15
propiedades, 2
menor ij, 3
operaciones elmentales, 4
particionada, 17
determinante, 21, 23
inversas, 24
operaciones con, 18
caracterí stico de una, 34
rango de una, 13, 15
semejante, 13
submatriz, 17
transpuesta, 2
propiedades, 2
traza de una, 28
valor propio de una, 33
vector propio de una, 33
solución aproximada, 122
Mínimos cuadrados, 120

Operaciones elmentales en una matriz, 4

Producto interno, 9

QR
descomposición, 138

Rango de una matriz, 13
Rectas, planos e hiperplanos, 157

Sistemas de ecuaciones, 15
c-inversas,g-inversa, 119
Gauss-Jordan, 15
solución aproximada, 122
mínimos cuadrados, 119
Solución mí nima cuadrada, 122

Transformación lineal
álgebra de, 12
imagen, 11
inversa de una, 13
matriz de una, 12
transformación inyectica, 11
valores propios, 31
vectores propios, 31
Transformacion lineal
transformación sobreyectiva, 11
Transformación lineal
núcleo, 11
Transformaciones lineales, 11
Transpuesta, matriz, 2

Valor propio, 31
espacio asociado a un, 33
multiplicidad algebraica de un, 34
geométrica de un, 33
caracterí sticos; vea
valores (vectores) propios, 31
Valores singulares
descomposición, 151
Variedad lineal, 15
Vector propio, 31
Vectores, 5, 157
coordenadas resp. a una base, 8
linealmente dependientes, 7
linealmente independientes, 7, 15, 16, 41
ortogonales, 10
ortonormales, 10
proceso de Gram-Schmidt, 10
propios ortogonales, 49

Bibliografía

[1] ANTON, H. Introducción al álgebra lineal. Limusa, México, 1981,
[2] FLOREY, F.G. Fundamentos de álgebra lineal y aplicaciones. Prentice Hall Internacional, Colombia, 1980.
[3] GRAYBILL, F.A. Introduction to matrices with applications in statistic. Wadsworth Publishing Company. Inc. Belnont, California, 1969.
[4] GRAYBILL, F.A. Theory and applications of linear model. Duxbury Presss, Massachusetts, 1976.
[5] GROSSMAN S. I. Álgebra Lineal. Quinta edición. McGraw-Hill/Interamericana de Mexico, S. A. de C. V., 1996.
[6] ESPINOSA, M. A. y MARMOLEJO M. A. Operaciones elementales: Usos en el salón de calse. Matemáticas: Enseñanza Universitaria. Pág. 61-82, Vol. V, No.1, 1996
[7] HADLEY, G. A. Álgebra lineal, Fondo Educativo Interamericano S.A., U.S.A. 1969.
[8] LIPSCHUTZ, S. Álgebra lineal, McGraw Hill, México, 1979.
[9] MARMOLEJO, M.A. Inversa condicional e inversa generalizada de una matriz: esquema geométrico. Lecturas Matemáticas, Soc. Col. Matemat., Pág. 129-146, Vol. IX, 1988.
[10] NAKOS, G.y JOYNER, D., Álgebra lineal con aplicaciones, Thonsom, México, 1998.
[11] NERING, E.D. álgebra lineal y teoría de matrices. Limusa, México, 1977.
[12] NOBLE, B. Applied linear algebra. Prentice Hall, Inc. London, 1969.
[13] RORRES , C y ANTON, H, Aplicaciones del álgebra lineal. Limusa, México 1979.
[14] STRANG, G, Álgebra lineal y sus aplicaciones. Fondo educativo interamericano, 1982.