**PRACTICA CALIFICADA N 2**

Curso: Analisis Numerico II

Profesor(a): Irla Mantilla

Alumno: Moreno Vera, Felipe Adrian

Ciclo: 2015-II

PRACTICA CALIFICADA

problema 1

Considere la formula de cuadratura de Gauss-Legendre de n puntos. Cual es su grado de presicion ?

Demostrar su afirmacion.

Sol:

Se tiene los polinomios de legendre que interpolan a f(x),

El error de aproximacion en una cuadratura gaussiana veiene dado por:

entonces de la cuadratura gaussiana, integrando los factores se obtiene

entonces el error de Gauss-Legendre para n puntos es:

problema 2

Consideremos dos reglas del trapecio sobre el intervalo [x0, x3]: la primera T(f,3h) = (3h/2)(f0 + f3) con incremento 3h y la segunda T(f,h) = (h/2)(f0 + 2f1 + 2f2 + f3), probar que la combinacion lineal (9T(f,h) – T(f,3h))/8 coincide con la regla de Simpson.

Sol:

se tiene que:

9\*T(f,h) = (9h/2)(f0 + 2f1 + 2f2 + f3)

T(f,3h) = (3h/2)(f0 + f3)

entonces restamos:

9T(f,h) – T(f,3h) = 9h/2\*f0 + 9h/2\*2f1 + 9h/2\*2f2 + 9h/2\*f3 – 3h/2\*f0 – 3h/2\*f3.

9T(f,h) – T(f,3h) = 6h/2\*f0 + 9h\*f1 + 9h\*f2 + 6h/2\*f3.

9T(f,h) – T(f,3h) = 3h\*f0 + + 9h\*f1 + 9h\*f2 + 3h\*f3.

9T(f,h) – T(f,3h) = (3h)(f0 + 3h\*f1 + 3h\*f2 + f3).

Y finalmente dividiendolo entre 8:

(9T(f,h) – T(f,3h))/8 = (3h/8)(f0 + 3h\*f1 + 3h\*f2 + f3).

Y se ve que demostrando que la combinacion lineal (9T(f,h) – T(f,3h))/8 coincide con la regla simple de simpson 3/8.

problema 3

Los polinomios ortogonales de Hermite son definidos por:

Hn+1(x) = 2x\*Hn(x) – 2n\*Hn-1(x), n>=1, con H0(x) = 1 y H1(x) = 2x.

Definimos la formula de Cuadratura de Gauss-Hermite de n+1 puntos del modo siguiente:

= ∑wi.f(xi)

donde xi son las raices del polinomio de Hermite de grado n+1.

a) Calcule los pesos wi para la cuadratura de Gauss – Hermite de 2 puntos.

b) Con la formula obtenida en el inciso anterior, calcular la aproximacion de la siguiente integral:

I=, donde f(x) =

Sol:

a) Calcule los pesos de wi para Cuadratura de Gauss-Hermite de 2 puntos.

Entonces: el polinomio de Hermite tiene n+1 = 2, entonces es de grado n=1.

∑wi.f(xi) = w0.f(x0) + w1.f(x1),

entonces necesitamos los pesos w0 y w1, y tambien los puntos x0 y x1.

= ∑wi.f(xi), donde reemplazamos f(x) por los polinomios de Hermite.

Entonces tomamos el polinomio de hermite hasta grado 3.

H0(x) = 1, H1(x) = , H2(x) = , H3(x) =

Una manera practica para encontrar los puntos y los pesos es reemplazando f(x) por Hi(x) obteniendo un sistema de 4 ecuaciones, 4 incognitas.

Usando las herramientas de software tenemos q = quad(fun,-Inf,Inf);

donde q es la integral( matlab ) y fun = @(x) exp(-x^2)\*(8\*x^3-12\*x);

= ∑wi.Hi(xi), procedemos a reemplazar de i = 0, 1, 2, 3,

= +=+ = = 1.7725

= += += 0.0

= += += 7.4613e-15 = 0.0

= += += 0.0

generando un sistema de Ecuaciones lineales de 4 ecuaciones y 4 incognitas.

(a) + = ----------------| ===> +=

(b)+ = 0.0 --sumamos---| +=

(c)+ = -----------| ==> 0.0 + 0.0 = ...(1)

(d)+ = 0.0

de (1) --->= y en + = 0.0, deducimos:= =

de + = , deducimos que = = .

por lo tanto los pesos son: y los 2 puntos que toma:

= = = = .

b) Con la formula obtenida en el inciso anterior, calcular la aproximacion de la siguiente integral:

I=, donde f(x) =

Entonces:

I== ∑wi.f(xi) = += +

I== = 0.44311.

problema 4

Considere la integral de la función f(x) = , donde x es evaluado de 0 a 1.

a) Determine el valor aproximado considerando 4 subintervalos utilizando la regla trapezoidal compuesta y la regla de simpson compuesta.

b) Calcule una estimativa del numero mínimo de subintervalos que se deberian considerar si se pretendiese que la integral anterior con un error inferior a 0.001 utilizando la regla de Simpson.

Sol:

a) Usando el algoritmo de 1/3 simpson y trapezoidal compuesta se obtiene los siguientes resultados:

Simpson 1/3: ( use el programa Metodos\_Integrales.m )

el resultado es: 0.74685538

Trapezoidal: ( use el programa Problema\_4\_a\_T.m )

el resultado es: 0.74298410

Y haciendo el calculo manualmente:

---------------------------------------------------------------------

| x | 0.0 | 0.25 | 0.50 | 0.75 | 1.0 |

|--------------------------------------------------------------------|

| f(x) | 1.0 | 0.93941 | 0.77880 | 0.56978 | 0.36788 |

---------------------------------------------------------------------

Regla de simpson:

h = 1/4 = 0.25

I = (h/3)\*( f(x0) + 4\*f(x1) + 2\*f(x2) + 4\*f(x3) + f(x4))

I = (0.25/3)\*(1.0 + 4\*0.93941 + 2\* 0.77880 + 4\*0.56978 + 0.36788)

I = 0.74685

Regla del Trapecio:

h = 1/4 = 0.25

I = (h/2)\*(f(x0) + 2\*f(x1) + 2\*f(x2) + 2\*f(x3) + f(x4))

I = (0.25/2)\*(1.0 + 2\*0.93941 + 2\* 0.77880 + 2\*0.56978 + 0.36788)

I = 0.74298

b) Calculando el numero de intervalos para que el error sea de 10^-4 en la Regla de simpson.

Se sabe que el error en el método de la regla de Simpson 1/3 es:

Er = (b-a)/180 \*\* f''''(e), donde f''''(x) es la cuarta derivada de f(x).

f(x) =

f'(x) = -2x

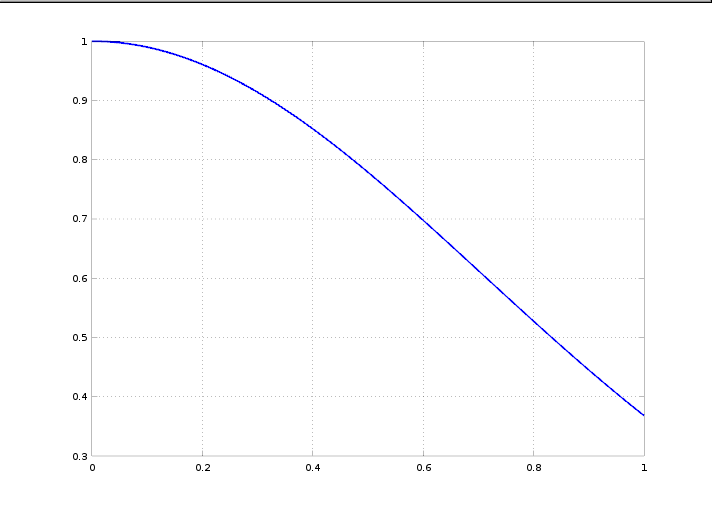
f''(x) = -2 + 4

f'''(x) = 12x- 8

f''''(x) = 16– 48 + 12

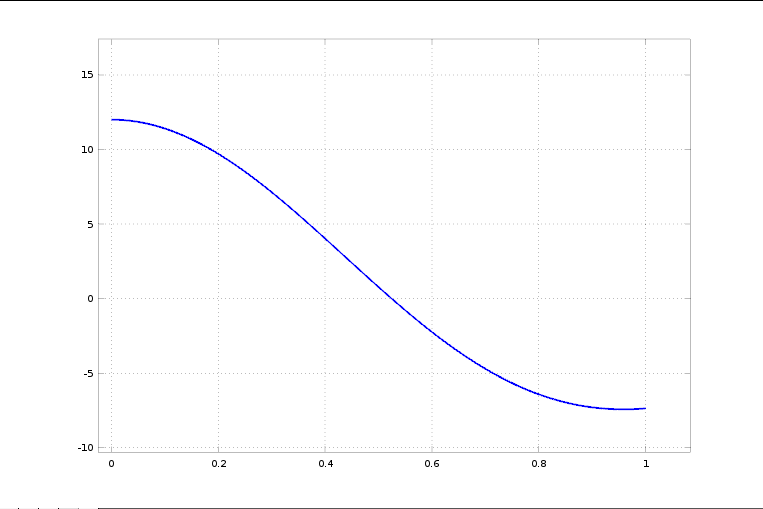
f'''''(x) = -32 + 160- 120x

Graficando la función en el intervalo de 0 a 1:



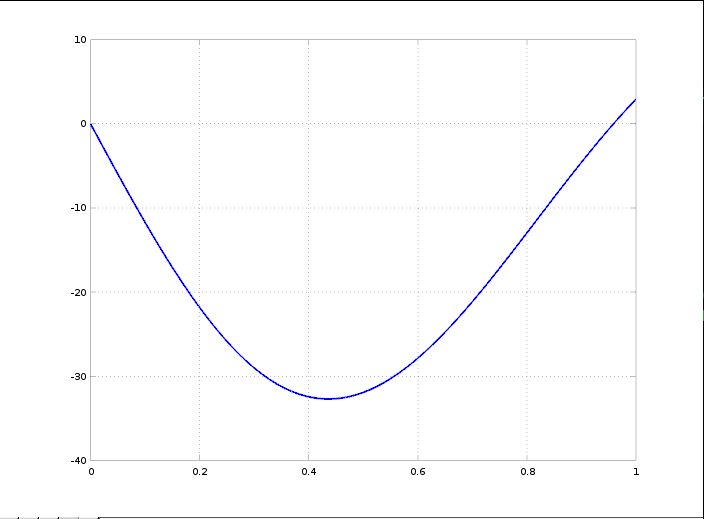
y graficando la 4ta derivada en el intervalo de 0 a 1

f''''(x) = 16 – 48 + 12e:



le sacamos la 5ta derivada y se obtiene:

f'''''(x) = -32 + 160- 120x

Vemos que la derivada tiene mayor valor en un numero cercano a 1 .... (\*)

Entonces para calcular el error se tomara alguna raíz del polinomio h(x) = f'''''(x)

= ( -32 + 160- 120x )= ( -32x^4 + 160x^2 – 120 ) x = 0

Cuyas raices son, x = 0, y las raices del polinomio 4 - 20 + 15 = 0 por el método de Muller numéricamente se obtienen las siguientes raíces:

x1 = (0.206299474016 + 1.374729637j) ----- Complejo, no va

x2 = (0.206299474016 – 1.374729637j) ------ Complejo, no va

x3 = (0.95857246461381851+0j) ------------- Resulta -7.4195

x4 = (-0.95857246461381851+0j) ------------- Resulta -7.4195

x5 = 0.0 -------------------------------------------- Resulta 12 ======== MAYOR VALOR

De estas 4 raices se ve que 2 son complejas, y una es negativa, entonces escogemos e = (0.95857246461381851+0j) ( Real ), que como predijimos en (\*), es cercano a 1.

Entonces Regresando al problema del error y hallando el numero de intervalos:

Er = (b-a)\*/180 \* f''''(e) < 10^-4, donde h = (b-a)/n

Er = (b-a)^5 / 180 / \* f''''(0.95857246461381851) < , donde a = 0 y b = 1 --> b-a = 1

Er = 1/180 \* f''''(0.95857246461381851)\* <

Er = 55.556\*f''''(0.95857246461381851) <

Er = 12\*55.556 <

de donde > 666.67 entonces, n>5.0813

entonces el numero minimo de intervalos que se necesitan para calcular la integral por medio de la regla general de simpson con un error inferior a es para intervalos n >=6.

PRACTICA DIRIGIDA

Ejercicio 1

a) Use las relgas de los Trapecios, Simpson(1/3) y Simpson(3/8) con 6 subintervalos para obtener valores aproximados de cada una de las siguientes integrales:

b) Para cada uno de los valores obtenidos en a) encuentre las cotas para el error en la aproximacion calculada y estime a partir de esas cotas, con cuantas cifras decimales exactas aproxima dicho valor al valor exacto. Desprecie los errores de redondeo.

Sol:

a)

i) = 0.170483424 ( Valor real )

h = (2-1)/6 = 0.16667

x 1.0000 1.1667 1.3333 1.5000 1.6667 1.8333 2.0000

f(x) 0.367879 0.266917 0.197698 0.148753 0.113325 0.087207 0.067668

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(1) + 4\*f(1.1667) + 2\*f(1.3333) + 4\*f(1.5) + 2\*f(1.6667) + 4\*f(1.8333) + f(2))

I = (1/18)\*(0.367879+4\* 0.266917+2\*.197698 +4\*.148753+2\*.113325+4\*.087207 + .067668)

I = 0.17051 ( Valor analítico )

I = 0.170506 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (1/18)\*(f(1) + 3\*f(1.1667) + 3\*f(1.3333) + 2\*f(1.5) + 3\*f(1.6667) + 3\*f(1.8333) + f(2))

I = (3/48)\*(0.367879+3\*0.266917+3\*0.197698 +2\*0.148753+3\*0.113325+3\*0.087207+0.067668)

I = 0.17053 ( Valor analítico )

I = 0.170531 ( Valor numérico )

ii) = 1.1184248 ( Valor real )

h=(3-2)/6 = 0.16667

x 2.0000 2.1667 2.3333 2.5000 2.6667 2.8333 3.0000

f(x) 1.44270 1.29334 1.18022 1.09136 1.01955 0.96020 0.91024

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(2) + 4\*f(2.1667) + 2\*f(2.3333) + 4\*f(2.5) + 2\*f(2.6667) + 4\*f(2.8333) + f(3))

I = (1/18)\*(1.44270+4\*1.29334+2\*1.18022+4\*1.09136+2\*1.01955+4\*.96020+0.91024)

I = 1.1184 ( Valor analítico )

I = 1.118447 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (1/18)\*(f(2) + 3\*f(2.1667) + 3\*f(2.3333) + 2\*f(2.5) + 3\*f(2.6667) + 3\*f(2.8333) + f(3))

I = (3/48)\*(1.44270+3\*1.29334+3\*1.18022+2\*1.09136+3\*1.01955+3\*.96020+0.91024)

I = 1.1185 ( Valor analítico )

I = 1.118473 ( Valor numérico )

iii) = 0.746824133 ( Valor real )

h = (1-0)/6 = 0.16667

x 0.00000 0.16667 0.33333 0.50000 0.66667 0.83333 1.00000

f(x) 1.00000 0.97260 0.89484 0.77880 0.64118 0.49935 0.36788

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(0) + 4\*f(0.1667) + 2\*f(0.3333) + 4\*f(0.5) + 2\*f(0.6667) + 4\*f(0.8333) + f(1))

I = (1/18)\*(1+4\*0.97260+2\*0.89484+4\*0.77880+2\*0.64118+4\*0.49935+0.36788)

I = 0.74683 ( Valor analítico )

I = 0.74683039 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (3/48)\*(f(0) + 3\*f(0.1667) + 3\*f(0.3333) + 2\*f(0.5) + 3\*f(0.6667) + 3\*f(0.8333) + f(1))

I = (3/48)\*(1+3\*0.97260+3\*0.89484+2\*0.77880+3\*0.64118+3\*0.49935+0.36788)

I = 0.74684 ( Valor analítico )

I = 0.746838 ( Valor numérico )

iv) = 1.4626517 ( Valor real )

h = (1-0)/6 = 0.16667

x 0.00000 0.16667 0.33333 0.50000 0.66667 0.83333 1.00000

f(x) 1.0000 1.0282 1.1175 1.2840 1.5596 2.0026 2.7183

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(0) + 4\*f(0.1667) + 2\*f(0.3333) + 4\*f(0.5) + 2\*f(0.6667) + 4\*f(0.8333) + f(1))

I = (1/18)\*(1+4\*1.0282+2\*1.1175+4\*1.2840+2\*1.5596+4\*2.0026+2.7183)

I = 1.4629 ( Valor analítico )

I = 1.462873 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (3/48)\*(f(0) + 3\*f(0.1667) + 3\*f(0.3333) + 2\*f(0.5) + 3\*f(0.6667) + 3\*f(0.8333) + f(1))

I = (3/48)\*(1 + 3\*1.0282 + 3\*1.1175 + 2\*1.2840 + 3\*1.5596 + 3\*2.0026 + 2.7183)

I = 1.4631 ( Valor analítico )

I = 1.463128 ( Valor numérico )

v) = 0.14722068 ( Valor real )

h = (2-1)/6 = 0.16667

x 1.0000 1.1667 1.3333 1.5000 1.6667 1.8333 2.0000

f(x) 0.00000 0.07115 0.12329 0.16219 0.19156 0.21393 0.23105

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(1) + 4\*f(1.1667) + 2\*f(1.3333) + 4\*f(1.5) + 2\*f(1.6667) + 4\*f(1.8333) + f(2))

I = (1/18)\*(0 + 4\*0.07115 + 2\*0.12329 + 4\*0.16219 + 2\*0.19156 + 4\*0.21393 + 0.23105)

I = 0.14721 (Valor analítico )

I = 0.1472113 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (3/48)\*(f(1) + 3\*f(1.1667) + 3\*f(1.3333) + 2\*f(1.5) + 3\*f(1.6667) + 3\*f(1.8333) + f(2))

I = (3/48)\*(0 + 3\*0.07115 + 3\*0.12329 + 2\*0.16219 + 3\*0.19156 + 3\*0.21393 + 0.23105)

I = 0.14720 (Valor analítico )

I = 0.1472004 ( Valor numérico )

vi)= 1.1981402 ( Valor real )

= 0.26180

x 0.00000 0.26180 0.52360 0.78540 1.04720 1.30900 1.57080

f(x) 0.00000 0.50874 0.70711 0.84090 0.93060 0.98282 1.00000

Simpson 1/3:

I = (pi/36)\*(f(0)+4\*f(0.26180)+2\*f(0.52360)+4\*f(0.78540)+2\*f(1.04720)+4\*f(1.309)+f(1.57080))

I = (pi/36)\*(0+4\*0.50874+2\*0.70711+4\*0.84090+2\*0.93060+4\*0.98282+1)

I = 1.1873 ( Valor analítico)

I = 1.18728 ( Valor numérico)

Simpson 3/8:

I=(3pi/96)\*(f(0)+3\*f(0.26180)+3\*f(0.52360)+2\*f(0.78540)+3\*f(1.04720)+3\*f(1.309)+f(1.57080))

I = (3\*pi/96)\*(0+3\*0.50874+3\*0.70711+2\*0.84090+3\*0.93060+3\*0.98282+1)

I = 1.1849 ( Valor analítico)

I = 1.18493 ( Valor numérico)

vii)= 0.310268 ( Valor real )

h = (1-0)/6 = 0.16667

x 0.00000 0.16667 0.33333 0.50000 0.66667 0.83333 1.00000

f(x) 0.00000 0.02777 0.11088 0.24740 0.42996 0.63996 0.84147

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(0) + 4\*f(0.1667) + 2\*f(0.3333) + 4\*f(0.5) + 2\*f(0.6667) + 4\*f(0.8333) + f(1))

I = (1/18)\*(0 + 4\*0.02777+2\*0.11088+4\*0.2474+2\*0.42996+4\*0.63996+0.84174)

I = 0.31022 ( Valor analítico )

I = 0.310205 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (3/48)\*(f(0) + 3\*f(0.1667) + 3\*f(0.3333) + 2\*f(0.5) + 3\*f(0.6667) + 3\*f(0.8333) + f(1))

I = (3/48)\*(0 + 3\*0.02777+3\*0.11088+2\*0.2474+3\*0.42996+3\*0.63996+0.84174)

I = 0.31014 ( Valor analítico )

I = 0.310124 ( Valor numérico )

viii) = 0.94608307 ( Valor real )

h = (1-0)/6 = 0.16667

Hacemos un artificio, como ,

entonces f(x) = 1, para x = 0 y f(x) = sen(x)/x, para 0<x<1

x 0.00000 0.16667 0.33333 0.50000 0.66667 0.83333 1.00000

f(x) 1.00000 0.99538 0.98158 0.95885 0.92755 0.88821 0.84147

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(0) + 4\*f(0.1667) + 2\*f(0.3333) + 4\*f(0.5) + 2\*f(0.6667) + 4\*f(0.8333) + f(1))

I = (1/18)\*(1 + 4\*0.99538+2\*0.98158+4\*0.95885+2\*0.92755+4\*0.88821+0.84147)

I = 0.94608 ( Valor analítico )

I = 0.946084 ( Valor numérico )

Simpson 3/8:

I = (3/48)\*(f(0) + 3\*f(0.1667) + 3\*f(0.3333) + 2\*f(0.5) + 3\*f(0.6667) + 3\*f(0.8333) + f(1))

I = (3/48)\*(1 + 3\*0.99538+3\*0.98158+2\*0.95885+3\*0.92755+3\*0.88821+0.84147)

I = 0.94608 ( Valor analítico )

I = 0.9460847 ( Valor numérico )

b) Sacando la 4ta derivada a las funciones ...

i)= 0.170483424 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 1.5, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*f''''(1.5)/1296 = 1.3296402157907628e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*f''''(1.5)/1296 = 2.991690485529216e-05<1x10^-4

ii)= 1.1184248 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 2.5, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*f''''(2.5)/1296 = 1.360452899615816e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*f''''(2.5)/1296 = 3.061019024135585e-05 <1x10^-4

iii)= 0.746824133 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 0.0, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*f''''(0.0)/1296 = 5.1440329218106995e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*f''''(0.0)/1296 = 1.1574074074074073e-04 <1x10^-3

iv) = 1.4626517 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 0.0, b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*f''''(0.0)/1296 = 5.1440329218106995e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*f''''(0.0)/1296 = 1.1574074074074073e-04 <1x10^-3

v) = 0.14722068 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*f''''(1)/1296 = 1.071673525377229e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*f''''(1.0)/1296 = 2.4112654320987653e-05<1x10^-4

vi)= 1.1981402 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*f''''(1)/1296 = 1.071673525377229e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*f''''(1.0)/1296 = 2.4112654320987653e-05<1x10^-4

vii)= 0.310268 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*|f''''(1)|/1296 = 9.674479913597016e-05<1x10^-4

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*|f''''(1.0)|/1296 = 2.1767579805593288e-04<1x10^-3

viii) = 0.94608307 ( Valor real )

entonces calculamos el error tomamos e = 1 b-a = 1.

Simpson 1/3:

Er=(b-a)^5/180\*f''''(e)/6^4 = 1/180\*|f''''(1)|/1296 = 1.4124847862074684e-04<1x10^-3

Simpson 3/8:

Er=6\*(b-a)^5/80\*f''''(e)/6^5 = 1/80\*|f''''(1.0)|/1296 = 3.178090768966804e-04<1x10^-3

Ejercicio 2

si y nos dan la siguiente tabla, por medio de la regla de simpson 1/3 calcule f(0.7):

|-----------------------------------------------------|

| x | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 |

|--------|---|-----|-----|------|-----|-----|-----|------|

| f(x) | 5 | 8 | 6 | 3 | 0 | -3 | -3 | 5 |

|-----------------------------------------------------|

Sol:

h=(0.8 - 0.0)/8 = 0.1

I = (h/3)\*(f(0) + 4\*f(0.1) + 2\*f(0.2) + 4\*f(0.3) + 2\*f(0.4) + 4\*f(0.5) + 2\*f(0.6) + 4\*f(0.7) + f(0.8))

I = 0.1/3\*(5 + 32 + 12 + 12 + 0 - 12 – 6 + 4\*f(0.7) + 5)

I = 1.6 + 0.4/3\*f(0.7) = 2

entonces: f(0.7) = 3.

Ejercicio 3

La siguiente tabla muestra valores aproximados de una funcion f y los correspondientes errores de redondeo.

x | 1.8 | 2.0 | 2.2 | 2.4 | 2.6 |

-----------------------------------------------------------------------------

f'(x) | 3.12014 | 4.42569 | 6.04241 | 8.03014 | 10.46675 |

-----------------------------------------------------------------------------

error f(x) | 2x10^-6 | -2x10^-6 | -9x10^-7 | -9x10^-7 | 2x10^-6 |

Use TODOS los datos de la tabla anterior y la regla de Simpson 1/3 par aproximar el valor de y calcule el error de redondeo total al aplicar dicha regla.

Sol:

se ve que son puntos distanciados en 0.2 de 2 a dos.

h = 0.2 = (2.6 – 1.8 )/n, donde n es el numero de intervalos n = 4

I = (h/3)\*(f(1.8) + 4\*f(2.0) + 2\*f(2.2) + 4\*f(2.4) + f(2.6))

I = (0.2/3)\*((3.12014+2\*10^-6) + 4\*(4.42569+-2\*10^-6) + 2\*(6.04241+-9\*10^-7)

+ 4\*(8.03014+-9\*10^-7)+(10.46675+2\*10^-6))

I = (0.2/3)\*((3120140\*10^-6+2\*10^-6) + 4\*(4425690\*10^-6+-2\*10^-6)

+ 2\*(60424100\*10^-7+-9\*10^-7) + 4\*(80301400\*10^-7+-9\*10^-7)

+ (10466750\*10^-6+2\*10^-6))

I = (0.2/3)\*((3120142)+4\*(4425688)+2\*(6042409.1) +4\*(8030139.1)+10466752)\*10^-6

I = 0.2/3\*75495020.6\*10^-6

I = 50330013.73333333 \* 10^-7

I = 5.03300 ( Valor analítico con redondeo ) ----\ error por redondeo es:

I = 5.033001373333333 ( valor numérico ) -----/ 2.728656780554134e-05 %

Ejercicio 4

a) Determine el numero de subintervalos N necesarios para obtener una aproximación de con una precisión de por lo menos 5 cifras decimales exactas usando la regla de los trapecios y la regla de simpson 1/3. Calcular la aproximación en cada paso. Desprecie los errores de redondeo.

b) Responda la pregunta planteada en a) para cada una de las integrales del problema 1.a)

Sol:

a)

error con simpson es : Er = (b-a)/180 \*\* f''''(e), donde f''''(x) es la cuarta derivada de f(x).

error con trapecio es: Er = (b-a)/12\*\* f''(e), donde f''(x) es la segunda derivada de f(x).

f(x) = ln(x)

f'(x) =

f''(x) =

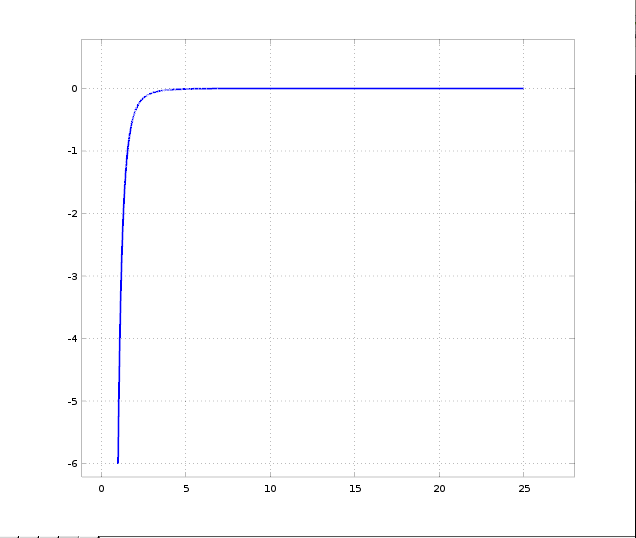
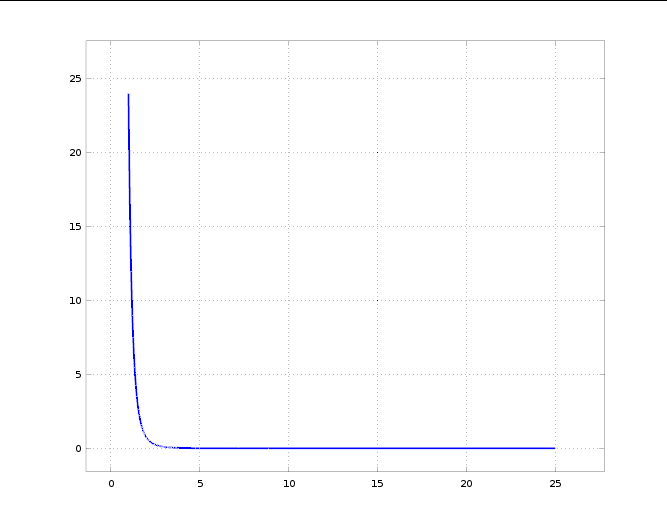
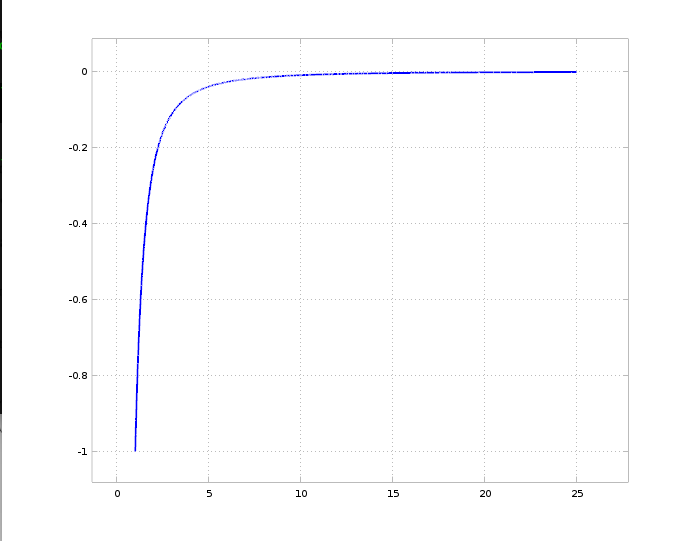
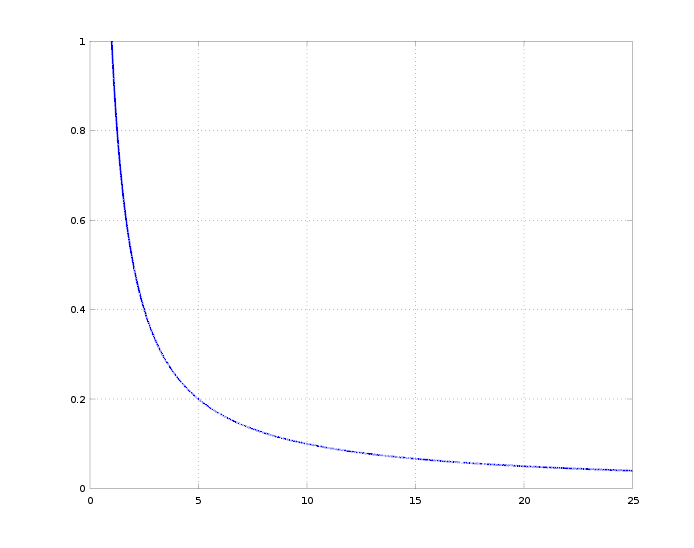
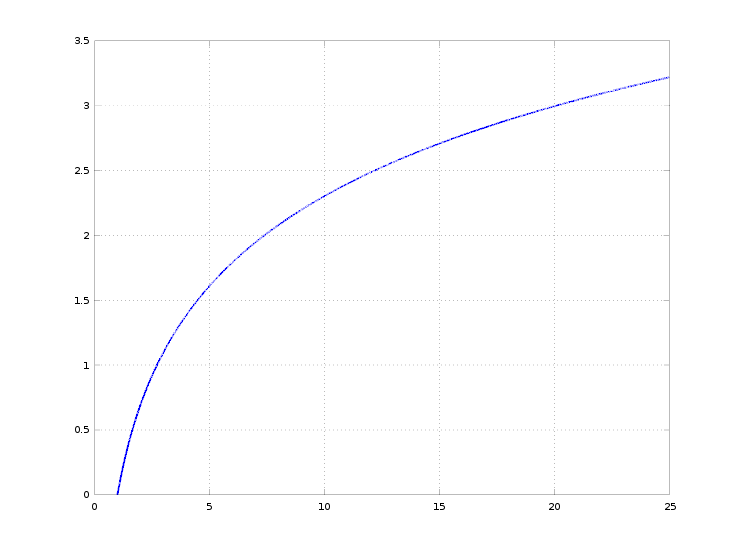
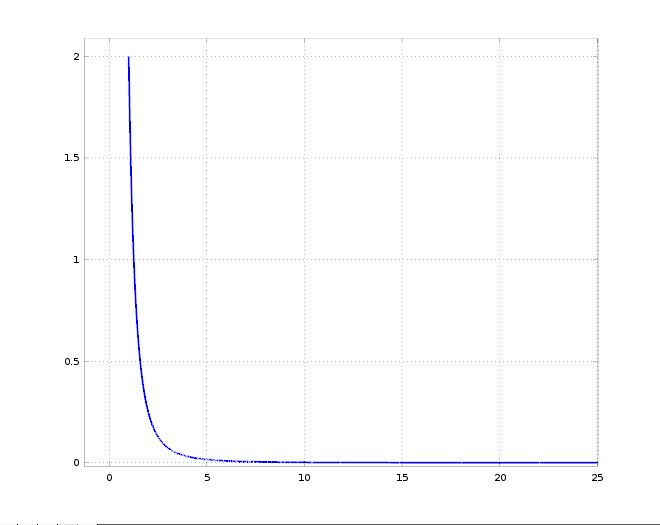
f'''(x) =

f''''(x) =

f'''''(x) =

graficas:

ln(x), ,,,,



Como se puede apreciar en x=25, la segunda derivada es máxima (próxima a cero)

y en la 4ta derivada en x=25 la cuarta derivada es máxima.

Entonces analizando los errores:

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=25 y a = 1

Er = 24/12\*\*|f''(25)| <

Er = 2\*576\* |-1/625 |\*<

Er = 429.32505167995964 < n

por lo tanto para n>429.32 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=430).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=25 y a = 1

Er = 24/180\*\*|f''''(25)| <

Er = 24/180\*331776\* |-6/390625| \*<

Er = 31.773608828609983< n

por lo tanto para n>31.77 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 32).

Numéricamente

Evaluando en 430 subintervalos:

La integral por simpson 1/3 es: 56.471895514359850665

La integral por Trapecio es: 56.471646432843812136

La integral Real es: 56.471895621704987889

\*\* se ve que trapecio tiene un error de 10^-5 y simpson 1/3 un error de 10^-8

Evaluando en 36>=32 subintervalos:

La integral por simpson 1/3 es: 56.470400070578250507

La integral por Trapecio es: 56.436834320709088786

La integral Real es: 56.471895621704987889

\*\* se ve que simpson presenta un error de 10^-5 y trapecio un error de 10^-4

b) del inciso 1.a) se tiene las derivadas 2da y 4ta de cada integral:

i)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=2 y a = 1, e=1.5

Er = 1/12\*\*|f''(1)| <

Er = 1/12\* 1.8393972\*<

Er = 429.32505167995964 < n

por lo tanto para n>123.8075 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=124).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=2 y a = 1

Er = 1/180\*\*|f''''(1)| <

Er = 1/180\* 23.912163676143752 \*<

Er = 10.735853< n

por lo tanto para n>10.7358 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 11).

ii)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=3 y a = 2, e=2

Er = 1/12\*\*|f''(2)| <

Er = 1/12\* 2.02173259\*<

Er = 129.79896 < n

por lo tanto para n>129.79896 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=130).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=3 y a = 2

Er = 1/180\*\*|f''''(1)| <

Er = 1/180\* 24.03139665\*<

Er = 10.74921195< n

por lo tanto para n>10.749 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 11).

iii)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12\*\*|f''(0)| <

Er = 1/12\* 2\*<

Er = 129.09944 < n

por lo tanto para n>129.09944 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=130).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180\*\*|f''''(0)| <

Er = 1/180\* 12\*<

Er = 9.036020< n

por lo tanto para n>9.036020 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 10).

iv)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12\*\*|f''(0)| <

Er = 1/12\* 2\*<

Er = 129.09944 < n

por lo tanto para n>129.09944 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=130).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180\*\*|f''''(0)| <

Er = 1/180\* 12\*<

Er = 9.036020< n

por lo tanto para n>9.036020 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 10).

v)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=2 y a = 1, e=0

Er = 1/12\*\*|f''(1)| <

Er = 1/12\* 1\*<

Er = 288.675134 < n

por lo tanto para n>288.675 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=289).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=2 y a = 1

Er = 1/180\*\*|f''''(1)| <

Er = 1/180\* 2.5\*<

Er = 6.104735835807844< n

por lo tanto para n>6.10473 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 7).

vi)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=pi/2 y a = 0, e=0

Er = pi/24\*\*|f''(1)| <

Er = pi\*pi\*pi/3456\* 0.5074665226465045\*<

Er = 21.3374069781212 < n

por lo tanto para n>21.337 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=22).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=pi/2 y a = 0

Er = pi/1080\*\*|f''''(1)| <

Er = (pi\*\*5)/155520\* 2.9563427\*<

Er = 4.911107866824295< n

por lo tanto para n>4.9111 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 5).

vii)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12\*\*|f''(1)| <

Er = 1/12\* 22.56862\*<

Er = 433.672495< n

por lo tanto para n>433.67 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=434).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180\*\*|f''''(1)| <

Er = 1/180\* 2.9563427\*<

Er = 4.911107866824295< n

por lo tanto para n>4.9111 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 5).

viii)

Trapecio:

Er = (b-a)/12\*\* |f''(e)| < , donde b=1 y a = 0, e=0

Er = 1/12\*\*|f''(1)| <

Er = 1/12\* 0.2391336\*<

Er = 44.64056< n

por lo tanto para n>44.645 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales (n>=45).

Simpson 1/3

Er = (b-a)/180\*\* |f''''(e)| < , donde b=1 y a = 0

Er = 1/180\*\*|f''''(1)| <

Er = 1/180\* 0.13307\*<

Er = 2.93225< n

por lo tanto para n>2.93225 subintervalos se tendrá precisión de 5 cifras decimales. (n >= 3).

Ejercicio 5

Use la regla de Simpson 1/3 con N=6 y un cambio de variable para estimar

Sol:

Haciendo cambio de variable , entonces cuando x=1, t = 1 y t = 0

yentonces

h = (1-0)/6 = 0.16667

x 0.00000 0.16667 0.33333 0.50000 0.66667 0.83333 1.00000

f(x) 0.00000 0.16665 0.33197 0.48485 0.58909 0.59444 0.50000

Simpson 1/3:

I = (1/18)\*(f(0) + 4\*f(0.1667) + 2\*f(0.3333) + 4\*f(0.5) + 2\*f(0.6667) + 4\*f(0.8333) + f(1))

I = (1/18)\*(0 + 4\*0.16665+2\*0.33197+4\*0.48485+2\*0.58909+4\*0.59444+0.5)

I = 0.40699 ( Valor analítico )

I = 0.406991924 ( Valor numérico )

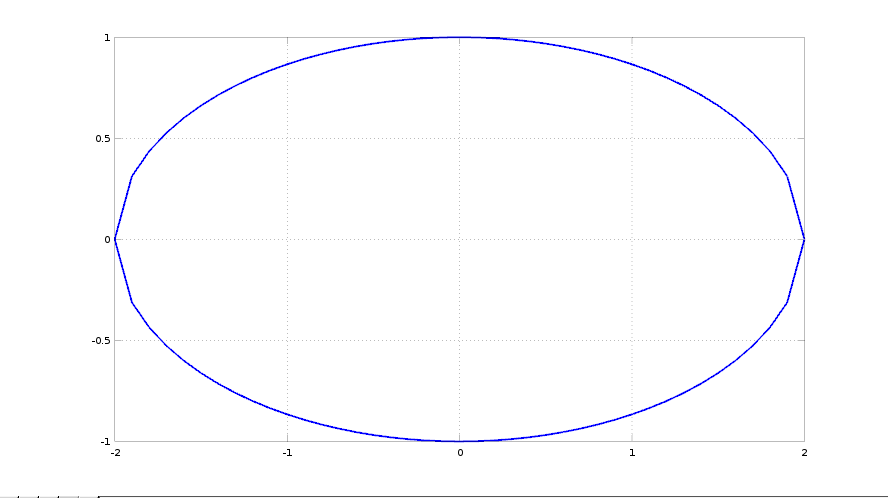
y el valor real es 0.406901634, entonces el error por simpson 1/3 es 9.0290e-05 en 6 subintervalos de 0 a 1.

Ejercicio 6

Use las reglas de los Trapecios y Simpson (1/3) con N=10 para aproximar la cuarta de la longuitud de la elipse , concluya a partir de las cotas teóricas para el error total cual es la calidad de la aproximación obtenida en cada caso.

Sol:

Graficando la elipse con 2 es el radio en el eje X, 1 es el radio en el eje Y



se tiene la elipse con centro en (0,0), entonces la cuarta parte de la elipse se define por la ecuacion:

evaluado de 0 a 2 en X.

Entonces se tiene la integral:

N=10, entonces h = (2-0)/10 = 0.2

La integral Real es: 1.570796326794896114

x 0.0 0.200 0.400 0.60 0.80 1.00 1.20 1.40 1.60 1.80 2.00

f(x) 1.0 0.99499 0.97980 0.95394 0.91652 0.86603 0.80 0.71414 0.60 0.43589 0.00

Simpson 1/3:

I = (h/3)\*(f(0)+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+f(2))

I = (0.2/3)\*(1+4\*0.99499+2\*0.9798+4\*0.95394+2\*0.91652+4\*0.86603+2\*0.8

+4\*0.71414+2\*0.6+4\*0.43589+0)

I = 1.5635 ( Valor analítico )

I = 1.563504079 ( Valor numérico )

Trapecio:

I = (h/2)\*(f(0)+f(0.2)+f(0.4)+f(0.6)+f(0.8)+f(1)+f(1.2)+f(1.4)+f(1.6)+f(1.8)+f(2))

I = (0.2/2)\*(1+2\*0.99499+2\*0.9798+2\*0.95394+2\*0.91652+2\*0.86603+2\*0.8

+2\*0.71414+2\*0.6+2\*0.43589+0)

I = 1.5523 ( Valor analítico )

I = 1.552259 ( Valor numérico )

Analizando los errores de las cotas teórica:

b=2, a = 0

Error en trapecio:

Escogemos e=0

Er == 0.25\*2/12\*=0.0016666666666666666

Error en Simpson 1/3:

Escogemos e=0

Er = = 3/16/180\*32/10000 = 3.3333333333333333e-06

Ejercicio 7

Use el método de Romberg con N=2 para las integrales de 1.a)

Sol:

se tiene que:

entonces resolviendo:

i) = 0.170483424 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

0.21777 0.00000 0.00000

0.18326 0.17176 0.00000

0.17376 0.17059 0.17051

ii)= 1.1184248 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

1.17647 0.00000 0.00000

1.13391 1.11973 0.00000

1.12238 1.11853 1.11845

iii)= 0.746824133 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

0.68394 0.00000 0.00000

0.73137 0.74718 0.00000

0.74298 0.74686 0.74683

iv)= 1.4626517 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

1.85914 0.00000 0.00000

1.57158 1.47573 0.00000

1.49068 1.46371 1.46291

v)= 0.14722068 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

0.11552 0.00000 0.00000

0.13886 0.14663 0.00000

0.14510 0.14718 0.14721

vi)= 1.1981402 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

0.78540 0.00000 0.00000

1.05314 1.14238 0.00000

1.14696 1.17823 1.18062

vii)= 0.310268 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

0.42074 0.00000 0.00000

0.33407 0.30518 0.00000

0.31598 0.30994 0.31026

viii)= 0.94608307 ( Valor real )

La matriz de romberg es:

0.92074 0.00000 0.00000

0.93979 0.94615 0.00000

0.94451 0.94609 0.94608