Exercice 1 : Problèmes de décision et problèmes d'optimisation

Transformer les problèmes d'optimisation suivant en problèmes de décision :

Clique Max
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Quelle est la taille maximale d'une clique de G ?

Flot Complet Min
Instance: Un graphe orienté $D = (V, A)$ muni d'une source s, d'un puit t et d'une fonction de capacité sur les arcs c
Question: Quelle est la plus petite valeur que peut avoir un flot complet (c'est-à-dire que tous les chemins de s à t sont saturés) ?

Packing Max
Instance: Un ensemble d'éléments E, un ensemble S de sous-ensembles de E
Question: Quelle est la taille maximale d'un sous-ensemble S' de S tels que chaque ensemble de S' est disjoint ?

Exercice 2 : NP-complétude de 3-Couv Clique

Le problème 3-Couv Clique est le suivant :

3-Couv Clique
Instance: Un graphe $G = (V, E)$
Question: Existe-t-il trois ensembles de sommets V_1, V_2 et V_3 avec $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ et tels que chacun de ces ensemble induise une clique sur G ?

Montrer que ce problème est NP-complet. Vous pourrez utiliser une réduction depuis 3-COL.

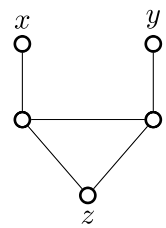
Exercice 3 : NP-complétude de PLNE

1. Donner le problème de décision associé à la résolution d'un programme linéaire en nombres entier.
2. Montrer que ce problème est NP-complet.

Exercice 4 : NP-complétude de 3-COL

1. Prouver que 3-COL est dans NP.

Pour prouver que 3-COL est NP-complet nous effectuons une réduction depuis 3-SAT mais avant de faire la réduction observons une propriété sur le graphe suivant appelé le *taureau* :



2. En supposant que ce graphe soit coloré proprement avec les couleurs $\{1, 2, 3\}$, quel couleur peut avoir le sommet z

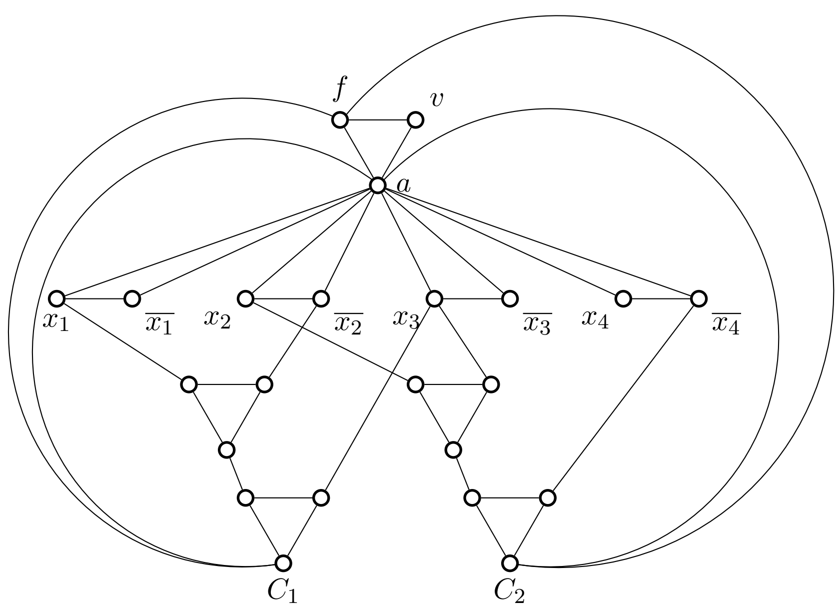
i) si les sommets x et y sont de la même couleur ?
ii) si les sommets x et y sont de couleurs différentes ?

En utilisant le taureau, nous effectuons la réduction suivante :

Soit $x_1, ..., x_n$, $C_1, ..., C_m$ une instance de 3-SAT. Nous allons construire un graphe qui admet une trois coloration si et seulement si cette instance de 3-SAT est satisfiable.

— On crée trois sommets v, f et a, ainsi que les arêtes vf, va et fa.
— Pour chaque variable x_i on crée deux sommets x_i et $\overline{x_i}$ et l'arête $x_i\overline{x_i}$.
— Pour chaque clause C_j constituée des littéraux $l_{j,1}, l_{j,2}, l_{j,2}$ on crée un taureau dont les sommets x et y sont les sommets correspondants aux littéraux $l_{j,1}$ et $l_{j,2}$ puis un autre taureau dont les sommets x et y sont constitués du sommet z du taureau précédent et du sommet $l_{j,3}$. On appelle C_j le sommet z de ce deuxième taureau.
— Pour chaque sommet x_i et $\overline{x_i}$ on crée une arêtes reliant ces sommets au sommet a
— Pour chaque sommet C_j on crée une arête reliant ce sommet au sommet a et une arête reliant le reliant au sommet f.

Voici un exemple de la réduction pour l'instance de 3-SAT $(x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee \overline{x_4})$:



3. Prouver que cette réduction est correcte, c'est à dire qu'une instance de 3-SAT est satifiable si et seulement si l'instance de 3-COL associée admet une 3-coloration.