Ondas viajeras en ecuaciones de onda inhomogéneas

Víctor González García

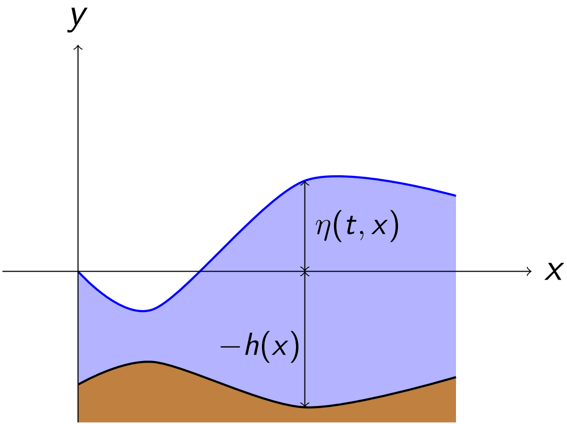
Universidad de Granada

15 de diciembre de 2025

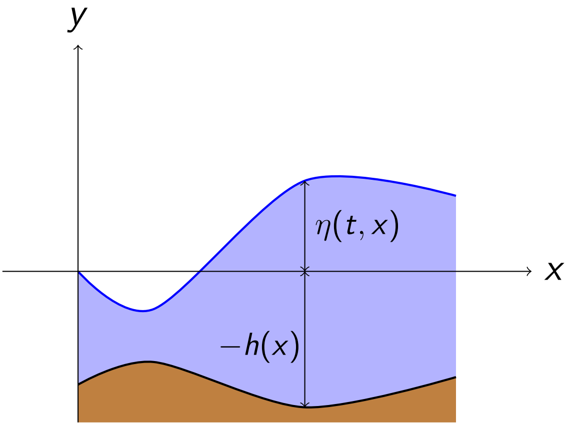
Tutor: Pedro Torres Villarroya

Departamento de matemática aplicada

El modelo



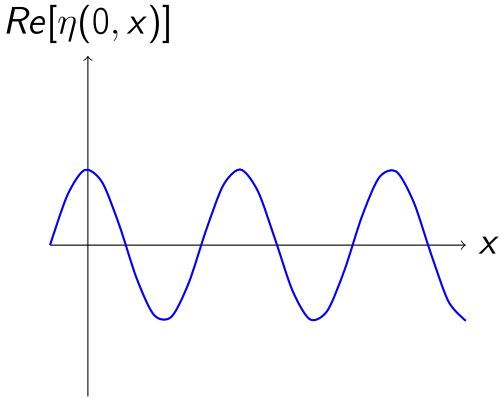
El modelo



$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)u] = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0$$

En adelante $g = 1$.

¿Por qué ondas viajeras?



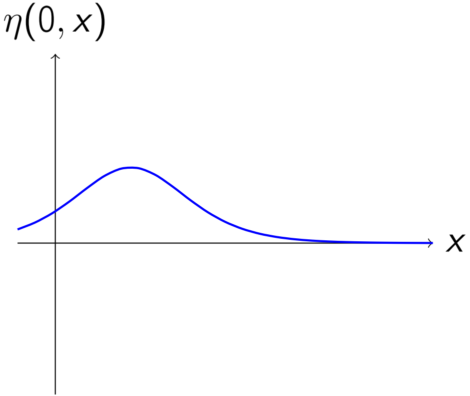
Senoidal

$$\eta(t,x) = q(x)\exp[i(wt+\psi(x))]$$

- $q(x)$: Amplitud
- $\psi(x)$: Fase

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Otro tipo de ondas viajeras



Solitón

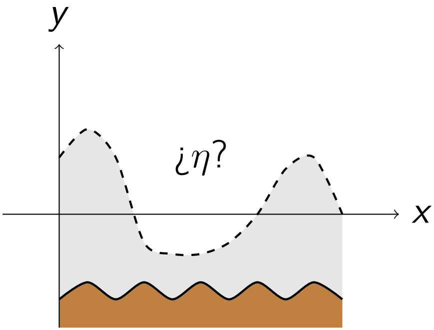
$$\eta(t, x) = \frac{q(x)}{\cosh^2[wt + \psi(x)]}$$

- $q(x)$: Amplitud
- $\psi(x)$: Fase

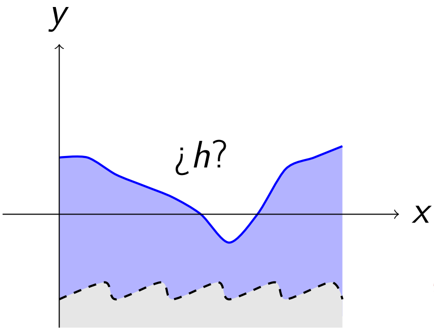
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Planteamiento

Directo:

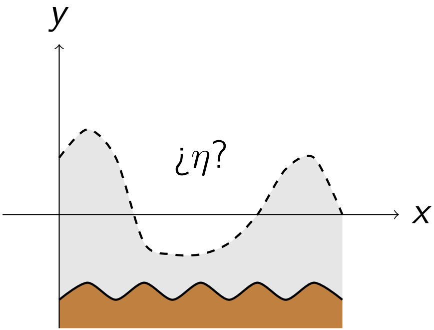


Inverso:



Objetivo

Directo:

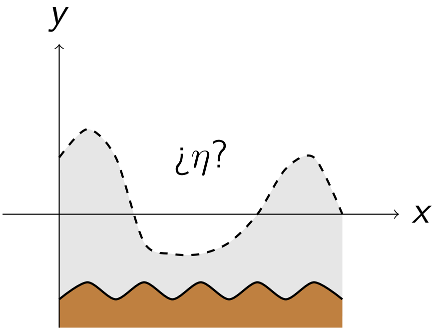


¿Qué propiedades *hereda* la onda viajera del fondo? (y bajo qué condiciones)

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Objetivo

Directo:



¿Qué propiedades *hereda* la onda viajera del fondo? (y bajo qué condiciones) **La periodicidad**

$$\eta(t,x) = q(x)\exp[i(wt + \psi(x))]$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Desacoplamiento de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}[h(x)u] & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & = 0 \end{cases}$$

Desacoplamiento de las ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}[h(x)u] & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(h(x)\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) & = 0 \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x)u) & = 0 \end{cases}$$

Separación amplitud-fase

$$\eta(t,x) = q(x)\exp[i(wt+\psi(x))]$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Separación amplitud-fase

$$\eta(t,x) = q(x)\exp[i(wt+\psi(x))]$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}) = 0$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Separación amplitud-fase

$$\eta(t,x) = q(x)\exp[i(wt+\psi(x))]$$

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}(h(x)\frac{\partial\eta}{\partial x}) = 0 \qquad \Rightarrow \begin{cases} (hq')' + w^2 q = \alpha^2/(hq^3) \\ \psi(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{h(z)q(z)^2}dz \end{cases}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ecuación de Pinney

$$y'' + p(x)y = \frac{c}{y^3}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ecuación de Pinney

$$y'' + p(x)y = \frac{c}{y^3}$$

Tiene como única solución para la condición (y_0, y_0')

$$y(x) = \sqrt{u(x)^2 - \frac{c}{W^2}v(x)^2}$$

donde u y v un sistema fundamental para la ecuación homogénea con condiciones iniciales adecuadas y W es el Wronskiano.

La ecuación para la amplitud $(hq')' + w^2 q = \alpha^2/(hq^3)$ se puede ver como una ecuación de Pinney a través de este cambio de variable:

$$t(x) = \int_0^x \frac{ds}{h(s)}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

La ecuación para la amplitud $(hq')' + w^2 q = \alpha^2/(hq^3)$ se puede ver como una ecuación de Pinney a través de este cambio de variable:

$$t(x) = \int_0^x \frac{ds}{h(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2q}{dt^2} + h(x(t))w^2 q = \frac{\alpha^2}{q^3}}$$

$$y'' + p(x)y = 0 \quad y'' + p(x)y = c^2/y^3$$

Relación entre la ecuación de Hill y Pinney

1. Si ϕ_1, ϕ_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hill entonces $R(x) = \sqrt{\phi_1(x)^2 + \phi_2(x)^2}$ es solución de la ecuación de Pinney.
2. Si R es solución de la ecuación de Pinney, entonces $\exists \phi$ una función que depende únicamente de R de forma que cualquier solución de la ecuación de Hill se puede escribir como $y(x) = A\sin(\phi(x) + B)$ donde $A, B \in \mathbb{R}$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Teorema de Zhang

Sea p una función real y T-periódica. Equivalen:

1. $y'' + p(x)y = \frac{\alpha^2}{y^3}$ tiene una solución positiva y T-periódica.
2. $y'' + p(x)y = 0$ es estable.

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Teorema de Zhang

Sea p una función real y T-periódica. Equivalen:

1. $y'' + p(x)y = \frac{\alpha^2}{y^3}$ tiene una solución positiva y T-periódica.
2. $y'' + p(x)y = 0$ es estable.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + h(x(t))w^2q = \frac{\alpha^2}{q^3}$$

UNIVERSIDAD DE GRANADA

La aplicación de Poincaré

$$\mathbb{P} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\mathbb{P}(y_0, y_0') = X(T; y_0, y_0')$$

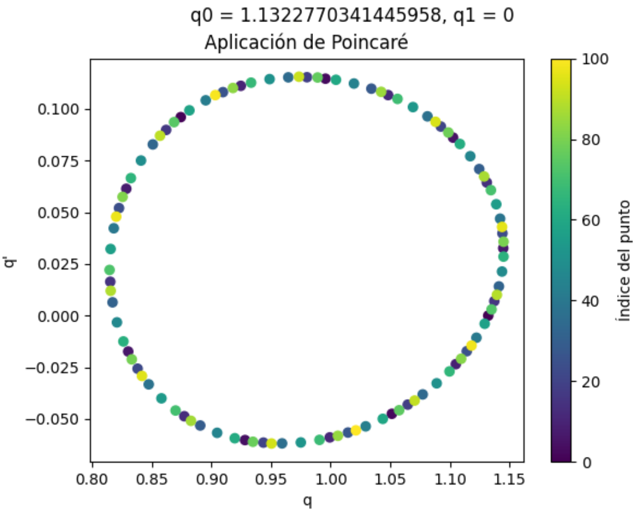
UNIVERSIDAD DE GRANADA

La aplicación de Poincaré

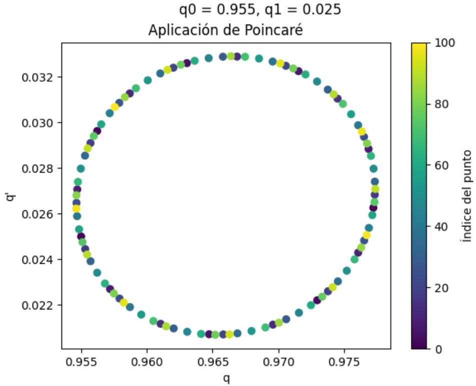
$$\mathbb{P} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\mathbb{P}(y_0, y_0') = X(T; y_0, y_0')$$

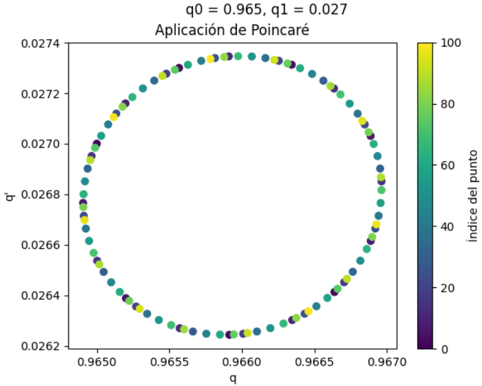
Encontrar un punto fijo de la aplicación de Poincaré, bajo ciertas condiciones implica encontrar una solución periódica, como en nuestro caso:

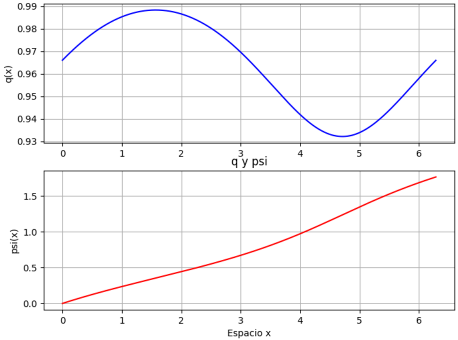
$$\frac{d^2q}{dt^2} + h(x(t))w^2q = \frac{\alpha^2}{q^3}$$



UNIVERSIDAD DE GRANADA


q0 = 0.955, q1 = 0.025
Aplicación de Poincaré
q
q'
índice del punto
0.955
0.960
0.965
0.970
0.975
0.022
0.024
0.026
0.028
0.030
0.032
0
20
40
60
80
100


q0 = 0.965, q1 = 0.027
Aplicación de Poincaré
q
q'
índice del punto
0.9650
0.9655
0.9660
0.9665
0.9670
0.0262
0.0264
0.0266
0.0268
0.0270
0.0272
0.0274
0
20
40
60
80
100



$$\begin{cases} h(x) = 2 + \frac{\sin(x)}{2} \\ \alpha = 1/2 \\ w = 0{,}39 \end{cases}$$

$$\eta(t,x) = q(x)\cos(tw + \psi(x))$$

Efim Pelinovsky y Oleg Kaptsov. Traveling waves in shallow seas of variable depths. Symmetry, 14(7):1448, 2022

Meirong Zhang. Periodic solutions of equations of Emarkov-Pinney type. Advanced Nonlinear Studies, 6:57–67, 2006.

UNIVERSIDAD DE GRANADA