



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

GRADO EN MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# Ondas viajeras en ecuaciones de ondas inhomogéneas

Presentado por:  
Víctor González García

Curso académico 2024-2025





# Ondas viajeras en ecuaciones de ondas inhomogéneas

Víctor González García

Víctor González García *Ondas viajeras en ecuaciones de ondas inhomogéneas.*  
Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2024-2025.

**Responsable de  
tutorización**

Pedro José Torres Villarroya  
*Departamento de matemática aplicada*

Grado en Matemáticas  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Granada

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Víctor González García

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2024-2025, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 15 de junio de 2025

Fdo: Víctor González García



*A Tomás y Azucena.*





## Agradecimientos

Este trabajo no podría haberse realizado sin el apoyo en primer lugar de mi tutor, Pedro Torres, a quién le agradezco su paciencia y confianza hacia mí. Muchas gracias de verdad.

Muchas gracias de corazón a todos mis familiares y amigos por aguantarme con estas tonterías, espero que estén tan orgullosos de mí como lo estoy yo de ellos. En especial quería agradecer a mis padres, Víctor y Alicia, por apoyarme tanto, por dar segundas oportunidades y creer en mí. Sé que ha sido un gran esfuerzo y no sabéis cómo de orgulloso y agradecido estoy con vosotros. Sin ellos no sería nada. A mi hermano por convivir estos años conmigo y soportar mis manías y despreocupaciones de manera estoica, muchas gracias por estos años maravillosos a tu lado. A mi grupo de amigos, que han sido mi segunda familia aquí en Granada, y de los que me llevo las incansables tardes de estudio dentro y fuera de la facultad y los grandes momentos juntos. Sin su apoyo diario esto no habría sido tan llevadero. Son especiales para mí Pedro y Alba y los guardo en mi corazón para siempre.

Para todos vosotros que os véis reflejados en estas palabras y que habéis formado parte de mí gracias, este trabajo es tan mío como vuestro.



## Summary

This project studies a class of solutions to the Shallow Water equations, a system that models the behavior of a thin layer of water. These equations are particularly effective far from the shore, where the water depth is not close to zero. Near the shoreline, where  $h \rightarrow 0$  nonlinear effects dominate, singularities appear and the standard model becomes invalid, as noted in [PK22].

A central focus of the work is the analysis of traveling wave solutions, which are used to describe the propagation of large waves such as tsunamis or to study resonance phenomena in water channels. Mathematically, such solutions are of the form:

$$\eta(t, x) = q(x) \exp[i(\omega t + \psi(x))]$$

where  $q$  is the amplitude,  $\omega$  the propagation speed, and  $\psi$  the phase.

The existence of such waves depends heavily on the selection of these parameters. By substituting this ansatz into the Shallow Water equations, we derive necessary conditions they must satisfy. This leads to a reformulation of the model from partial differential equations to ordinary differential equations. The main goal of the project is to analyze how the shape and periodicity of the bottom profile, modelled by the function  $h(x)$ , affects the existence and form of traveling waves. This constitutes what is known as the direct problem.

Although we do not tackle it in this work, a more complex and intriguing challenge is the inverse problem: given certain surface waves, can we determine the underlying bottom profile? This question, though beyond the scope of this project, represents a promising direction for future research.

One of the key results explored is Zhang's theorem, introduced in [Zha06], which provides a necessary and sufficient condition for the existence of periodic traveling wave solutions. This result is connected to a remarkable relationship between Hill's equation and the Pinney equation, the latter being of the form  $y''(x) + p(x)y' + c/y^3 = 0$ . We also present and prove the Pinney theorem, which gives the general solution to this nonlinear differential equation.

A fundamental part of the project is the Floquet theory, which describes the behavior of solutions to linear periodic differential equations. Although no longer included in the standard undergraduate mathematics curriculum, this theory is essential to our analysis. We present the main results following the classical works [Eas73] and [MW79], focusing in particular on Hill's equation:

$$[P(x)y']' + Q(x)y = 0$$

which plays a central role, as the periodicity of traveling wave solutions depends on the stability of this equation.

Finally, in the last section, we solve the direct problem for a flat bottom profile and provide an algorithm to numerically compute periodic traveling waves. The periodicity of the full wave  $\eta$  depends on the periodicity of the wave amplitude  $q$ . Zhang's theorem tells us when such periodic solutions can exist, but not how to find them. We therefore propose a numerical method based on the Poincaré map, iterating it to identify fixed points corresponding to periodic solutions. Once the amplitude  $q$  and the phase  $\psi$  are computed, a provided code

## *Summary*

produces an animation illustrating the propagation of the wave.

Throughout the development of this work, another idea came to mind: how do step-wise bottom profiles influence the regularity of waves? This question was motivated by submarine features such as cliffs and escarpments, which have been involved in underwater accidents. As it turns out, the problem is complex, and a rigorous solution naturally leads to the theory of Carathéodory solutions of ordinary differential equations (ODEs).

This project is not only interesting in its own right, but also serves as a natural intermediate step toward understanding this theory, providing a solid foundation for more advanced research topics.

The code provided might also be used for this purpose, although there is no guarantee that a solution exists—at least not within the framework developed in this text.

# Índice general

Agradecimientos	v
Summary	vii
Introducción	xi
<b>I. Teoría de Floquet</b>	<b>1</b>
<b>1. Teoría de Floquet</b>	<b>3</b>
1.1. Teorema de Floquet y primeros resultados . . . . .	3
1.2. Ecuación de Hill . . . . .	7
1.3. Intervalos de estabilidad . . . . .	12
1.4. Otros criterios de estabilidad . . . . .	15
<b>II. El problema directo en el modelo Shallow-waters</b>	<b>21</b>
<b>2. El problema directo</b>	<b>23</b>
2.1. Las ecuaciones del modelo . . . . .	23
2.2. Desacoplamiento de las ecuaciones . . . . .	24
2.3. Formulación del problema directo . . . . .	24
2.4. El problema directo para la velocidad onda . . . . .	25
2.5. El problema directo para el desplazamiento de agua . . . . .	33
<b>III. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica</b>	<b>37</b>
<b>3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica</b>	<b>39</b>
3.1. Introducción . . . . .	39
3.2. Fondo plano . . . . .	40
3.3. Perfil sinusoidal . . . . .	41
<b>Bibliografía</b>	<b>53</b>



## Introducción

El modelo de Shallow Waters es un conjunto de ecuaciones que describen el comportamiento de una capa de agua de poca profundidad (*shallow* en inglés). Estas son:

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[h(x)u] &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} &= 0 \end{cases}$$

En el trabajo nos será especialmente interesante  $\eta$ , que es la altura del agua en el punto  $x$  e instante  $t$  respecto de la posición de equilibrio.

Este modelo, como mencionan los autores en [PK22], es solo válido lejos de la orilla. Cerca de la orilla, o matemáticamente donde  $h \rightarrow 0$ , la ecuación entra en un régimen no lineal que no puede modelarse con Shallow Waters. Para nosotros será una hipótesis más.

En el trabajo se estudia un tipo de soluciones que se conocen como ondas viajeras, las cuales sirven para modelar la propagación de grandes olas durante un tsunami o para estudiar fenómenos de resonancia en canales de agua. Matemáticamente una onda viajera es una solución del tipo:

$$\eta(t, x) = q(x) \exp[i(\omega t + \psi(x))]$$

donde  $q$  es la amplitud,  $\omega$  es la parte temporal de la fase y  $\psi$  es la parte espacial de la fase. Esta forma funcional es de tipo senoidal, pero bien podríamos plantearnos la existencia de otro tipo de ondas viajeras como solitones. En este trabajo no se va a profundizar en otros tipos de ondas viajeras, queda como una ampliación interesante del mismo.

Que existan ondas de este tipo depende en buena medida de escoger de forma adecuada los parámetros antes mencionados. Se impone que  $\eta$  sea solución de las ecuaciones del modelo, tras lo cual se obtiene qué relaciones o condiciones deben cumplir. Nosotros procederemos a desacoplar las ecuaciones de forma que se pasemos de trabajar con ecuaciones en derivadas parciales a ecuaciones diferenciales ordinarias. En concreto, el objetivo del trabajo es estudiar de qué manera el perfil (y su periodicidad) del fondo del recipiente que contiene la masa de agua, que en el modelo viene representado por la función  $h(x)$ , influye en la forma y propagación de las ondas viajeras. Esto se conoce como *el problema directo*. El modelo se introduce en la sección 2 junto con los resultados más importantes. Incluso más interesante si cabe, y sin duda más complejo, es *el problema inverso*. En él nos preguntamos lo siguiente: observadas cierto tipo de ondas en la superficie, ¿qué forma debe tener el fondo? ¿Qué podemos saber de él? Por su complejidad no lo trataremos en el trabajo pero sería una buena ampliación.

Uno de los resultados principales del trabajo es el teorema de Zhang. Este es sacado de un artículo científico que le debemos a Zhang [Zha06] y que se encuentra con su demostración original en este texto. El teorema de Zhang impone una condición necesaria y suficiente para que existan ondas viajeras como solución del modelo. El germen del teorema lo encontramos en la bella relación que existe entre la ecuación de Hill y la ecuación de Pinney. La ecuación de Pinney es otro de los pilares claves:  $y'' + p(x)y = c/y^3$  y nos referimos por Teorema de Pinney al resultado que la resuelve. En él se especifica la forma que deben tener las soluciones del PVI asociado y su demostración se encuentra también en el texto.

Para poder entender el modelo es imprescindible el desarrollo de una teoría completa que caracterice el comportamiento de las soluciones de un tipo de ecuaciones periódicas lineales. Esta importante teoría se conoce como Teoría de Floquet y era un tema antes abordado en la antigua licenciatura de Matemáticas y que ahora se encuentra fuera del programa. Nosotros en el trabajo hemos incluido una primera sección en la que se desarrollan los principales conceptos y resultados, siguiendo los clásicos textos [Eas73] y [MW79]. Esta primera sección funciona como andamiaje teórico del trabajo sin el cual este trabajo resultaría imposible por lo fundamental de sus conclusiones. En esta tratamos el Teorema de Floquet, un resultado sobre estabilidad de las soluciones de la ecuación  $a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0$  donde los coeficientes  $a_r$  son periódicos. Más en profundidad se estudia la ecuación de Hill,  $[P(x)y']' + Q(x)y(x) = 0$ , que se puede ver como un caso particular de la primera y por lo tanto podemos aplicarle toda la teoría que veamos en esta sección. Esta ecuación es también muy importante pues la existencia de una onda viajera periódica (que es lo que buscamos) depende de la estabilidad de una ecuación de Hill. Un también muy buen desarrollo de la teoría que concierne a esta se puede seguir en el trabajo de fin de grado de Ángel Guerrero [GM17].

Por último, en la última sección, resolvemos el problema directo para un fondo plano y proporcionamos un código para encontrar estas ondas periódicas que buscamos. La periodicidad de la onda  $\eta$  depende en última instancia de que la amplitud,  $q$ , sea en sí misma periódica. El teorema de Zhang nos dice cuando existe una solución  $q$  periódica, y por tanto cuando existe una onda periódica, pero no dice cómo encontrarla. Se propone por tanto un procedimiento estándar para encontrar qué condiciones iniciales producen soluciones periódicas. Este procedimiento se basa en iterar la aplicación de Poincaré sucesivamente hasta que la trayectoria encierre una región en cuyo interior encontramos un punto fijo de dicho operador. La aplicación de Poincaré toma una condición inicial y devuelve la evaluación a tiempo  $t$  de la única solución que pasa por dicha condición inicial. Encontrar un punto fijo equivale por tanto a encontrar una solución  $t$  periódica, que es justo lo que queríamos. Una vez calculada  $q$  y  $\psi$ , el código proporcionado realizará una animación mostrando como se propaga dicha onda.



**Parte I.**

**Teoría de Floquet**



# 1. Teoría de Floquet

La teoría de Floquet centra su foco de estudio en ecuaciones diferenciales lineales periódicas. No debe sorprender que una tal teoría tenga importancia vital en Física, por ejemplo, donde un potencial periódico determina una ley de movimiento modelada por una ecuación periódica. En cuántica, el teorema de Bloch es una aplicación del teorema de Floquet. El resultado parte de la hipótesis de que microscópicamente un sólido posee estructura periódica y establece qué forma debería tener la función de onda de un electrón circulando en ese sólido. Se incita al lector a que si no conoce el ejemplo se sorprenda viendo como los autoestados que predice el teorema se asemejan a formas funcionales que veremos y desarrollaremos a lo largo de este capítulo.

También encontramos que en el marco de trabajo que estableceremos uno puede estudiar muy cómodamente la ecuación de Hill, una importante ecuación en Física propuesta por George William Hill, astrónomo y matemático estadounidense durante el estudio de la órbita lunar, [Hil78].

Para nosotros esta teoría servirá como cimiento para el estudio de las ecuaciones de Shallow Waters. Estas son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que modelan el comportamiento de un líquido bajo el supuesto de que la escala horizontal del contenedor que lo alberga es mucho mayor que la escala vertical. Entraremos en mayor profundidad en la parte dos. Sin más dilación empezaremos la presentación de todo el contexto necesario para entender el Teorema de Floquet.

## 1.1. Teorema de Floquet y primeros resultados

La teoría de Floquet aborda el estudio de la EDO

$$a_0(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = 0 \quad (1.1)$$

donde los coeficientes  $a_r(x) \in \mathbb{C}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , son funciones continuas a trozos y periódicas de periodo  $a$ . También se supone que los límites por la izquierda y por la derecha de  $a_0$  en cualquier punto  $x$  no son cero, para evitar singularidades.

Pese a que la ecuación es periódica sus soluciones no tienen porqué serlo. De hecho no solo no tienen por qué ser periódicas sino que hay ejemplos en los que ninguna solución no trivial es periódica. Hablamos por ejemplo de la ecuación  $y'' - y = 0$ , que es trivialmente una ecuación del tipo (1.1) cuyas soluciones son combinaciones lineales de  $\exp(x)$  y  $\exp(-x)$  o bien  $y' - y = 0$  cuyas soluciones son múltiplo de  $\exp(x)$  y que por tanto ninguna solución (no trivial) es periódica.

Aún así esta EDO es invariante por traslaciones esto es:

**Lema 1.1.** Sea  $\psi(x)$  una solución de (1.1), entonces  $\psi(x + a)$  es también solución.

La demostración de este hecho es muy sencilla

## 1. Teoría de Floquet

*Demostración.*  $\psi$  cumple la ecuación  $\forall x \in \mathbb{R}$ , en particular se cumple que

$$a_0(x+a)\psi''(x+a) + a_1(x+a)\psi'(x+a) + a_0(x+a)\psi(x+a) = 0.$$

El resultado se desprende ahora de la periodicidad de los coeficientes.  $\square$

Antes remarcábamos que no tienen porqué existir soluciones periódicas en general. Sin embargo este primer resultado, que denotaremos como proposición por su importancia en la demostración del Teorema de Floquet, demuestra la existencia de un tipo de soluciones que llamaremos *casi-periódicas*. Si bien este nombre no es oficial, ilustra perfectamente a lo que nos referimos.

**Proposición 1.2.** *Existen una constante  $\rho \in \mathbb{C}^*$  y una solución no trivial de (1.1)  $\psi$  que es casi-periódica, esto es:*

$$\psi(x+a) = \rho\psi(x) \quad (1.2)$$

*Demostración.* La idea de la demostración del lema se basa en pasar de una igualdad funcional (1.2) a una entre vectores y usar álgebra lineal para demostrar la existencia. Al fin y al cabo veremos que  $\psi$  y  $\rho$  son un vector propio y un valor propio, respectivamente de una matriz transpuesta que llamaremos *matriz de monodromía*.

Así pues, buscamos expresar  $\psi$  en función de una base para aplicar los resultados fundamentales que conocemos de espacios vectoriales. No podemos olvidar la teoría de existencia y unicidad de EDO lineales. Sabemos que existen  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  soluciones linealmente independientes de la ecuación cuya matriz fundamental es principal en 0, es decir que cumplen

$$\begin{cases} \phi_1(0) = 1 & \phi_2(0) = 0 \\ \phi_1'(0) = 0 & \phi_2'(0) = 1 \end{cases}$$

Como acabamos de ver tenemos entonces que  $\phi_1(x+a)$  y  $\phi_2(x+a)$  son soluciones linealmente independientes de la misma ecuación. La independencia puede argumentarse con el Wronskiano: como  $\phi_1(x)$  y  $\phi_2(x)$  son linealmente independientes y solución de (1.1)  $W[\phi_1, \phi_2](x) \neq 0$  para cualquier punto de  $\mathbb{R}$ , en particular para  $x+a$ , sea quien sea  $x$ .

En ese caso podemos escribir cada una de estas en función de la base que teníamos al principio como sigue:

$$\begin{cases} \phi_1(x+a) = M_{11}\phi_1(x) + M_{12}\phi_2(x) \\ \phi_2(x+a) = M_{21}\phi_1(x) + M_{22}\phi_2(x) \end{cases} \quad (1.3)$$

Recaltar que como  $\phi_1(x+a)$  y  $\phi_2(x+a)$  son linealmente independientes el determinante de  $M = (M_{ij})_{i,j}$  es distinto de cero (no es singular). Ahora podemos estudiar la condición de *casi-periodicidad* de la que versa el lema. Consideremos entonces  $\psi$  una solución arbitraria de (1.1) y veamos que es necesario para que se cumpla (1.2). Escribimos  $\psi$  en función de la base que tenemos:

$$\psi(x) = \alpha\phi_1(x) + \beta\phi_2(x)$$

Evaluando en  $x+a$  y sustituyendo de acuerdo (1.3) llegamos a que es necesario que  $\alpha$  y  $\beta$  cumplan

$$\begin{pmatrix} M_{11} - \rho & M_{21} \\ M_{12} & M_{22} - \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como  $\alpha = \beta = 0$  proporciona la solución trivial debemos imponer que el determinante de la

matriz anterior sea 0. Por lo que  $\rho$  debe cumplir la ecuación característica asociada a  $M$ ,

$$\rho^2 - \text{tr}(M)\rho + \det(M) = 0$$

Esta es una ecuación de segundo grado que tiene como soluciones dos valores  $\rho_1, \rho_2$  en  $\mathbb{C}$ . De hecho ninguno de los valores es 0, pues  $0 \neq \det(M) = \rho_1\rho_2$ . Una vez determinados ambos valores podemos recuperar  $\alpha$  y  $\beta$  y obtener  $\psi$ . Esto demuestra el lema.  $\square$

De la ecuación (1.3) se sigue que necesariamente

$$M = \begin{pmatrix} \phi_1(a) & \phi_2(a) \\ \phi_1'(a) & \phi_2'(a) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se conoce como matriz de monodromía. Es obviamente única por la unicidad de solución de la ecuación (1.1). Es una pieza fundamental en la teoría de Floquet.

**Definición 1.3.** Sea  $M$  la matriz de monodromía asociada a la matriz. Se llaman multiplicadores característicos a los valores propios de la matriz de monodromía<sup>1</sup>, es decir las soluciones de la ecuación  $\rho^2 - \text{tr}(M)\rho + \det(M) = 0$

Entendemos que el logro principal de la teoría de Floquet no es dar solución a la ecuación, de eso ya se encarga el teorema de existencia y unicidad de EDO lineales que mencionábamos antes. Lo verdaderamente importante es que proporciona herramientas y caracteriza cómo son las soluciones de la ecuación (1.1). Esto es lo que nos revela el siguiente teorema, presentado por Gaston Floquet en [Flo83].

**Teorema 1.4** (Teorema de Floquet). *Existen dos soluciones linealmente independientes  $\psi_1, \psi_2$  de la ecuación (1.1) tales que se cumple una de las siguientes condiciones:*

1.

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \exp(m_1x)p_1(x) \\ \psi_2(x) = \exp(m_2x)p_2(x) \end{cases}$$

donde  $m_1, m_2$  son constantes no necesariamente distintas y  $p_1$  y  $p_2$  son funciones  $a$ -periódicas.

2.

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \exp(mx)p_1(x) \\ \psi_2(x) = \exp(mx)[xp_1(x) + p_2(x)] \end{cases}$$

donde  $m$  es constante y  $p_1$  y  $p_2$  son funciones  $a$ -periódicas.

*Demostración.* Probamos el primer caso. Como los multiplicadores característicos son distintos existen<sup>2</sup> dos soluciones no triviales  $\psi_k$  distintas tales que:

$$\psi_k(x+a) = \rho_k\psi_k(x) \quad k = 1, 2.$$

Las funciones anteriores son linealmente independientes, veamos por qué. Calculemos el

<sup>1</sup>Es importante recalcar que los multiplicadores característicos son los valores propios de la matriz  $M^\top$ , pero como tanto la traza y el determinante de una matriz y su traspuesta, los valores propios son los mismos, pero no así sus vectores propios.

<sup>2</sup>Estamos claramente usando la proposición anterior (1.2)

## 1. Teoría de Floquet

Wronskiano y veamos si es distinto de 0:

$$\begin{aligned} W[\psi_1, \psi_2] &= \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \psi'_1 & \psi'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 & \beta_1\phi_1 + \beta_2\phi_2 \\ \alpha_1\phi'_1 + \alpha_2\phi'_2 & \beta_1\phi'_1 + \beta_2\phi'_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 W[\phi_1, \phi_2] - \\ &\quad - \alpha_2\beta_1 W[\phi_1, \phi_2] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} W[\phi_1, \phi_2] \neq 0 \end{aligned}$$

El Wronskiano de  $\phi_1$  y  $\phi_2$  es distinto de 0 en cualquier punto y el determinante que aparece también es distinto de 0. Si recordamos  $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$  y  $\underline{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$  son vectores propios de la matriz de monodromía asociados a  $\rho_1$  y  $\rho_2$  que en este caso son distintos. Por lo tanto  $\underline{\alpha}$  y  $\underline{\beta}$  son linealmente independientes y el determinante, consecuentemente, distinto de 0.

Definamos ahora las funciones periódicas. Como los multiplicadores característicos son distintos de 0  $\exists m_1, m_2$  tales que:

$$\exp(am_k) = \rho_k, \quad k = 1, 2$$

Ahora si definimos:  $\rho_k(x) = \exp(-m_k x)\psi_k(x)$  no es difícil comprobar que  $p_k$  es  $a$ -periódica, por completitud:

$$p_k(x+a) = \exp(-m_k(x+a))\psi_k(x+a) = \exp(-m_k x) \exp(-m_k a) \psi_k(x) = p_k(x)$$

Por lo que

$$\psi_k(x) = \exp(m_k x) p_k(x)$$

Para el segundo caso suponemos que  $\rho = \rho_1 = \rho_2$  y definimos análogamente  $m$  para que verifique  $\exp(am) = \rho$ . De nuevo por el lema (1.2) existe una solución no trivial  $\Psi_1(x+a) = \rho\Psi_1(x)$ . Sea  $\Psi_2$  una solución de la ecuación linealmente independiente con  $\Psi_1$ , que existe porque el espacio de soluciones es de dimensión 2.  $\Psi_2(x+a)$  es también solución de (1.1) así que como en el lema anterior la escribimos respecto de las dos soluciones linealmente independientes que tenemos:

$$\Psi_2(x+a) = \alpha\Psi_1(x) + \beta\Psi_2(x)$$

Calculamos  $\beta$ :

$$\begin{aligned} W[\Psi_1, \Psi_2](x+a) &= \begin{vmatrix} \Psi_1(x+a) & \Psi_2(x+a) \\ \Psi'_1(x+a) & \Psi'_2(x+a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \rho\Psi_1(x) & \alpha\Psi_1(x) + \beta\Psi_2(x) \\ \rho\Psi'_1(x) & \alpha\Psi'_1(x) + \beta\Psi'_2(x) \end{vmatrix} = \\ &= \rho\alpha \begin{vmatrix} \Psi_1(x) & \Psi_1(x) \\ \Psi'_1(x) & \Psi'_1(x) \end{vmatrix} + \rho\beta W[\Psi_1, \Psi_2](x) = \rho\beta W[\Psi_1, \Psi_2](x) \end{aligned}$$

Aplicando la fórmula de Liouville para el Wronskiano obtenemos que

$$\rho\beta = \exp\left(-\int_x^{x+a} \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right) = \exp\left(-\int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right) = \rho^2$$

Esta última desigualdad se debe a que la última integral es  $W[\phi_1, \phi_2](a)$  que justamente es el determinante de la matriz de monodromía que en este caso es  $\rho^2$ . Esto quiere decir que

$$\Psi_2(x+a) = \alpha\Psi_1(x) + \rho\Psi_2(x)$$

Distinguimos dos casos:

1.  $\alpha = 0$ . Tenemos entonces que  $\Psi_2(x+a) = \rho\Psi_2(x)$ . Como se verifica la misma propiedad para  $\Psi_1$  podemos repetir la misma estrategia que antes pero esta vez obtenemos que  $m_1 = m_2 = m$
2.  $\alpha \neq 0$ . Definimos  $P_1(x) = \exp(-mx)\Psi_1(x)$  y  $P_2(x) = \exp(-mx)\Psi_2(x) - \frac{\alpha}{a\rho}xP_1(x)$ . Muy fácilmente comprobamos que tanto  $P_1$  y  $P_2$  son periódicas también como en el caso anterior y que por tanto

$$\begin{cases} \Psi_1(x) = \exp(mx)P_1(x) \\ \Psi_2(x) = \exp(mx)\left[\frac{\alpha}{a\rho}xP_1(x) + P_2(x)\right] \end{cases}$$

Esto completa la prueba.  $\square$

Hemos visto en el lema anterior, fundamental para la demostración, como reformular el problema en términos de álgebra lineal lo ha simplificado enormemente. Merece la pena antes de continuar con el desarrollo reescribir el Teorema de Floquet para que se adapte a esta filosofía.

**Teorema 1.5** (Teorema de Floquet, versión álgebra lineal).

En las hipótesis del teorema anterior:

- El caso 1 ocurre cuando la matriz  $M^T$  tiene dos vectores propios linealmente independientes, (equivalentemente si  $M$  los tiene)
- El caso 2 ocurre cuando la matriz  $M^T$  tiene un único vector propio linealmente independiente, (equivalentemente si  $M$  los tiene)

En particular, si la ecuación característica tiene una solución doble, el caso 1 ocurre cuando  $\text{rg}(A - \rho I) = 0$  y el caso 2 ocurre si  $\text{rg}(A - \rho I) = 1$ .

## 1.2. Ecuación de Hill

Dentro de esta amplia gama de ecuaciones de tipo *Floquet* (1.1), encontramos una familia especialmente relevantes en Física y Matemáticas que se conocen conjuntamente como *ecuación de Hill*:

$$[p(x)y'(x)]' + q(x)y(x) = 0, \quad (1.4)$$

donde  $p$  y  $q$  son funciones reales de mismo periodo  $a$ . Además para poder aplicarle la teoría de Floquet a (1.4) debemos suponer que  $p$  es continua y no vale 0 en ningún punto y que  $p'(x)$  y  $q$  son continuas a trozos. Estas imposiciones se hacen evidentes cuando desarrollamos la ecuación (1.4) (derivando) y la comparamos con (1.1). Las soluciones son ahora reales necesariamente porque los coeficientes son reales en esta ecuación. La ecuación característica general que veíamos en el lema 1.2 toma una forma particular por la fórmula de Liouville para el Wronskiano. Si recordamos la fórmula de Liouville:

$$\det(M) = W[\phi_1, \phi_2](a) = \exp\left(-\int_0^a \frac{a_1(t)}{a_0(t)} dt\right) = \exp\left(-\int_0^a \frac{P'(t)}{P(t)} dt\right) = 1$$

## 1. Teoría de Floquet

Por lo que la ecuación característica toma la forma

$$\rho^2 - [\phi_1(a) + \phi_2'(a)]\rho + 1 = 0 \quad (1.5)$$

En particular, sabemos que para la ecuación de Hill los multiplicadores característicos cumplen  $\rho_1 \rho_2 = 1$ . Esto último implica que ambos valores propios se encuentran sobre la siguiente figura (en el plano complejo):

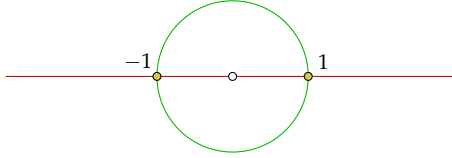


Figura 1.1.: Cuando ambos multiplicadores están sobre la línea verde, la ecuación se dice elíptica; sobre la roja, hiperbólica y cuando están sobre los puntos amarillos, se dice parabólica

Cuando ambos valores propios se encuentran sobre la circunferencia unidad, pero no son ni el 1 ni el -1 se dice que la ecuación de Hill es **elíptica**. Matemáticamente esto es  $|\rho_1| = |\rho_2| = 1$ , con  $\rho_1, \rho_2 \neq \pm 1$ . Notar que entonces ninguno de los valores propios pueden ser reales. Cuando ambos valores propios son 1 ó -1 entonces se dice **parabólica** y en el otro caso, **hiperbólico**. En este último como el producto de ambos multiplicadores es 1, ambos multiplicadores deben tener además el mismo signo.

A poco que se piense, conocer uno de los multiplicadores obliga a que el otro sea del mismo "tipo", por ejemplo es imposible tener un multiplicador en la zona de hiperbolicidad y otro en la zona elíptica o parabólica. Es decir, no hay más casos que esos tres mencionados antes y las definiciones anteriores tienen sentido. De hecho, las definiciones podrían ser más acotadas pues como hemos mencionado antes para la hipérbolica, sabiendo uno de los signos el otro debe ser igual. Podríamos tener un "subdefinición" y decir que una ecuación es *hiperbólica positiva o negativa*. Algo parecido ocurre con el caso parabólico. Sin embargo, esto no es de ningún interés, pues en el caso hiperbólico el comportamiento de las soluciones sería el mismo en ambos casos luego distinguirlos no añade nada. No pasa lo mismo con el caso parabólico, pero eso lo veremos más adelante.

Para la ecuación de Hill, los multiplicadores característicos dependen únicamente del valor de  $D = \phi_1(a) + \phi_2'(a)$ . A este valor se le conoce como el *discriminante de la ecuación* que también se puede entender como la traza de la matriz de monodromía. Resolviendo la ecuación (1.5) llegamos a que

$$\rho = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4}}{2}$$

Ahora entendemos más claramente de qué forma influye el discriminante en la cantidad de valores propios:

- Si  $|D| \neq 2$  tenemos dos valores propios distintos.
- Si  $|D| = 2$  tenemos que los valores propios son iguales.

El discriminante es importante porque permite caracterizar cuando la ecuación de Hill es **estable**.



**Definición 1.6.** Decimos que una ecuación de Hill como (1.4) es estable si y sólo si para cualquier solución  $y$  tanto ella como su derivada  $y'$  es acotada.

Existe una relación entre la estabilidad recién introducida y la estabilidad de Lyapunov que se estudia en el grado. Recordamos la estabilidad de Lyapunov:

**Definición 1.7.** Un punto de equilibrio  $p$  de una ecuación autónoma,  $x' = f(x)$  se dice estable si para cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un entorno de  $p$  y  $t_0 > 0$  tal que toda solución  $x$  con condición inicial en dicho entorno verifica que  $\|x(t) - p\| < \varepsilon$ , para todo  $t > t_0$ .

Para el caso de la ecuación de Hill son equivalentes en el siguiente sentido:

**Proposición 1.8.** La ecuación de Hill (1.4) es estable si y sólo si  $y \equiv 0$  es estable en el sentido de Lyapunov

El siguiente teorema caracteriza la estabilidad de la ecuación y permite relacionarla con el discriminante. La estabilidad en este sentido se refiere a la acotación de soluciones. Veámoslo en detalle.

**Teorema 1.9** (Acotación en la ecuación de Hill). Sea una ecuación de Hill como (1.4) y sean  $\phi_1$  y  $\phi_2$  una solución fundamental del PVI que tiene como ecuación (1.4) y como matriz fundamental la identidad es decir, que cumplen:

$$\begin{aligned}\phi_1(x_0) &= 1 & \phi_2(x_0) &= 0 \\ \phi_1'(x_0) &= 0 & \phi_2'(x_0) &= 1\end{aligned}$$

Entonces:

- Si  $|D| < 2$  todas las soluciones de (1.4) están acotadas, en la jerga esto se conoce como que la ecuación es **estable** (i.e. todas las soluciones son acotadas).
- Si  $|D| > 2$  todas las soluciones (no triviales) de (1.4) están no acotadas. Se dice en este caso que la ecuación es **inestable** o **resonante** (i.e. todas las soluciones no triviales son no acotadas).

Los casos límite son un poco más complicados pero puede probarse que:

- Si  $|D| = 2$  y  $\phi_2(a) = \phi_1'(a) = 0$  (matriz de monodromía diagonal) la ecuación (1.4) es **estable**.
- Si  $|D| = 2$  y  $\phi_2(a) = \phi_1'(a)$  no son simultáneamente 0 (matriz de monodromía no diagonal), la ecuación (1.4) es **condicionalmente estable** esto es, tiene alguna solución no trivial acotada, pero no es **estable**.

**Demostración.** Es una demostración un poco laboriosa por casos:

- i.  $D > 2$ . En este caso como acabamos de ver los multiplicadores característicos  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son reales y distintos. Un estudio básico de las funciones

$$\begin{cases} \rho_1(D) = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4}}{2} \\ \rho_2(D) = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4}}{2} \end{cases}$$

indican que en este caso los multiplicadores característicos son positivos pero no pueden ser ninguno iguales a 1. Tenemos que distinguir en que caso estamos de los dos

## 1. Teoría de Floquet

que establece el Teorema de Floquet. En esta situación podemos ver que podemos seguir la primera parte de la demostración, pues existe  $m \neq 0$  tal que  $\exp(am) = \rho_1$  y  $\exp(-am) = \rho_2$  y entonces:

$$(??) \begin{cases} \psi_1(x) = \exp(mx)p_1(x) \\ \psi_2(x) = \exp(-mx)p_2(x) \end{cases}$$

- II.  $D < -2$ . Análogamente al caso anterior pero ahora  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son negativos y de nuevo no iguales a 1. En este caso  $m$  debe reemplazarse por  $m + i\frac{\pi}{a}$  donde ahora  $m$  verifica  $\exp(am) = -\rho_1$  y  $\exp(-am) = -\rho_2$ . Lo comprobamos por completitud, lo único sería comprobar que  $p_k$  es periódica:

$$p_k(x+a) = e^{-(m_k+i\pi/a)(x+a)}\psi_k(x+a) = e^{-(m_k+i\pi/a)x}e^{-am_k-i\pi}\rho_k\psi_k(x) = p_k(x)e^{-am_k}\overbrace{(-\rho_k)}^1$$

- III.  $-2 < D < 2$ . En este caso los multiplicadores característicos son no reales y distintos, de hecho conjugados. Esto implica que el módulo de cada uno es 1. Esto es muy sencillo de ver: escribamos  $\rho_1 = \rho \in \mathbb{C}$  y  $\rho_2 = \bar{\rho}$ , entonces como  $\rho\bar{\rho} = 1$  tomando módulos obtenemos que  $|\rho|^2 = 1$  y los módulos son ambos 1. Por lo tanto, ambos multiplicadores están en la circunferencia unidad y entonces pueden escribirse como  $\rho_1 = \exp(ia\alpha)$ ,  $\rho_2 = \exp(-ia\alpha)$ , con  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{a}[$ . Estamos de nuevo en el primer caso del teorema de Floquet con

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \exp(iax)p_1(x) \\ \psi_2(x) = \exp(-iax)p_2(x) \end{cases}$$

- IV.  $D = 2$ . En este caso los multiplicadores característicos son ambos 1. Para decidir si estamos en el primer caso o en el segundo tenemos que examinar la multiplicidad geométrica del valor propio  $\rho = 1$ , o lo que es lo mismo estudiamos el  $\text{rg}(M - I)$ , donde  $M$  denota a la matriz de monodromía de la ecuación. Consideramos dos subcasos:

- a. Si  $M$  es diagonal, su determinante es el producto de la diagonal  $\det(M) = \phi_1(a)\phi_2'(a)$ . Por otro lado el determinante de  $M$  es el producto de sus valores propios y sabemos que ambos son 1, por lo que:

$$\phi_1(a)\phi_2'(a) = 1$$

También tenemos:

$$D = \phi_1(a) + \phi_2'(a) = 2$$

Por lo que tenemos que  $\phi_1(a) = \phi_2'(a) = 1$ . Entonces  $M = I \Rightarrow \text{rg}(M - I) = 0$  y se aplica el primer caso del lema (1.2) y entonces

$$\psi_1(x) = p_1(x), \quad \psi_2(x) = p_2(x)$$

pues los exponentes característicos son ambos 0. Se sigue que entonces en este caso todas las soluciones son periódicas.

- b.  $M$  no es diagonal. En este caso  $\text{rg}(M - I) \neq 0$  y se aplica la segunda parte del

lema, de nuevo con  $m = 0$ , por lo que:

$$\psi_1(x) = p_1(x), \quad \psi_2(x) = xp_1(x) + p_2(x)$$

v.  $D = -2$ . Este caso es análogo al anterior. Ahora  $\rho_1 = \rho_2 = -1$ . Consideramos los mismos subcasos que antes:

a.  $M$  diagonal. Repetimos el razonamiento y llegamos a que se verifica el punto 1 del lema con  $m = i\pi/a$ :

$$\psi_1(x) = \exp(i\pi/ax)p_1(x), \quad \psi_2(x) = \exp(i\pi/ax)p_2(x)$$

Ahora se verifica que todas las soluciones son semi-periódicas pues  $\psi_1, \psi_2$  son semi-periódicas.

b.  $M$  no diagonal. Tenemos:

$$\psi_1(x) = P_1(x), \quad \psi_2(x) = xP_1(x) + P_2(x)$$

donde  $P_k(x) = \exp(i\pi/ax)p_k(x)$  por lo que  $P_k$  es también semi-periódica.

□

**Corolario 1.10** (Periodicidad en la ecuación de Hill). *En las condiciones del teorema anterior tenemos que*

- Existen soluciones con periodo  $a \Leftrightarrow D = 2$ . Todas son periódicas si además  $\phi_2(a) = \phi_1'(a) = 0$
- Existen soluciones con semiperiodo  $a \Leftrightarrow D = -2$ . Todas son semi-periódicas<sup>3</sup> si además  $\phi_2(a) = \phi_1'(a) = 0$

*Demostración.* Se deduce de la demostración del teorema anterior, concretamente los casos IV) y V). □

**Corolario 1.11.** *La ecuación de Hill es estable si y sólo si se cumplen alguno de los dos requisitos siguientes*

- La ecuación es elíptica.
- La ecuación es parabólica pero además se verifica que todas las soluciones son periódicas en el caso de que  $\rho_1 = \rho_2 = 1$  o semi-periódicas si  $\rho_1 = \rho_2 = -1$

*Demostración.* Supongamos que la ecuación es estable eso es, por definición, que todas las soluciones de la ecuación de Hill son acotadas. Vamos a razonar por contradicción: si la ecuación fuese hiperbólica entonces los multiplicadores característicos son ambos reales, del mismo signo y ninguno de ellos puede ser  $\pm 1$  ni 0. Como sabemos entonces  $\rho_2 = 1/\rho_1$ . El determinante se calcula como:

$$D = \rho_1 + \rho_2 = \rho_1 + \frac{1}{\rho_1}$$

Podemos por tanto considerar la función  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(\rho_1) = \rho_1 + 1/\rho_1$ . Se puede comprobar que esta expresión tiene únicamente dos puntos críticos: un mínimo local

---

<sup>3</sup>Una función  $f(x)$  se dice semi-periódica con semiperiodo  $a$  si  $f(x+a) = -f(x)$

## 1. Teoría de Floquet

en  $\rho_1 = 1$  donde la función vale 2; y un máximo local en  $\rho_1 = -1$  donde vale -2. Por lo tanto como  $\rho_1 \neq \pm 1$  (si no sería parabólica) deducimos que  $|D| > 2$  lo cual contradice el teorema de acotación antes demostrado. Entonces la ecuación debe ser elíptica o parabólica. Además en el caso de que la ecuación sea parabólica, para cumplir con que la ecuación es estable y como  $|D| = 2$ , la matriz de monodromía es diagonal y todas las soluciones son periódicas o semi-periódicas.

Recíprocamente, supongamos que la ecuación es elíptica, pues la segunda condición enunciada en el teorema implica que todas las soluciones sean ya acotadas por ser periódicas o semi-periódicas. Calculemos el discriminante de nuevo:

$$|D| = |\rho_1 + \rho_2| \leq |\rho_1| + |\rho_2| = 2$$

Como bien sabemos la igualdad en la desigualdad triangular se da si ambos números son linealmente dependientes y apuntan en la misma dirección. Como hemos dicho que la ecuación es elíptica ambos valores propios están en la circunferencia y no son  $\pm 1$ . Luego la igualdad se da únicamente si  $\rho_1 = \rho_2$ , pero ese caso es imposible pues su producto también tiene que ser 1, con lo que sería o bien 1 o bien -1, lo cual es una contradicción. Eso quiere decir que la igualdad no se da nunca y entonces  $|D| < 2$ . Por el teorema anterior la ecuación es estable.  $\square$

### 1.3. Intervalos de estabilidad

Los intervalos de estabilidad son un concepto que surge cuando imponemos que la función  $Q$  en la ecuación de Hill dependa de un parámetro  $\lambda$ . La teoría que aplicamos nosotros exige que  $Q$  sea de la forma:

$$Q(x) = \lambda s(x) - q(x)$$

con  $s$  y  $q$  continuas a trozos de periodo  $a$  y con  $s(x) \geq s > 0$  para cierta constante  $s$ . Entonces si escribimos  $P$  también en minúscula, por consistencia de la notación, la ecuación de Hill se reescribe:

$$[p(x)y'(x)]' + [\lambda s(x) - q(x)]y(x) = 0 \quad (1.6)$$

Desde luego, bajo este supuesto tanto las soluciones como el discriminante dependen ahora del valor del parámetro  $\lambda$ :  $\phi(t, \lambda)$ ,  $D(\lambda)$ , respectivamente. Podemos decir más,  $D : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua pues  $D(\lambda) = \phi_1(a, \lambda) + \phi_2'(a, \lambda)$ . El teorema de continuidad respecto de parámetros nos dice que tanto  $\phi_1(a, \lambda)$  y  $\phi_2(a, \lambda)$  son continuas.

Si ahora consideramos los siguientes conjuntos tenemos:

- $\{\lambda \in \mathbb{R} : |D(\lambda)| < 2\}$  es un conjunto abierto.
- $\{\lambda \in \mathbb{R} : |D(\lambda)| > 2\}$  es un conjunto abierto.

Estos conjuntos abiertos se pueden descomponer en unión de intervalos abiertos cada uno de los cuales se llaman intervalos de estabilidad o inestabilidad, respectivamente.

También el cierre de los intervalos de estabilidad se conoce como intervalos de estabilidad condicionada y en ellos se cumple que  $|D(\lambda)| \leq 2$

Para una descripción precisa de estos intervalos se deben presentar antes un par de definiciones.

**Definición 1.12** (Problema de valores periódico). Consiste en encontrar  $y, \lambda$  que solucionen el PVI siguiente:

$$\begin{aligned} [p(x)y'(x)]' + [\lambda s(x) - q(x)]y(x) &= 0 \\ \begin{cases} y(0) = y(a) \\ y'(0) = y'(a) \end{cases} \end{aligned}$$

La existencia de una sucesión de valores propios  $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$  y funciones propias  $y_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  que resuelven el problema se escapa del objetivo del trabajo, pero puede probarse construyendo una función de Green y definiendo un operador lineal, compacto y simétrico en el espacio  $C(0, a)$  con el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f(x) \overline{g(x)} s(x) dx$$

**Definición 1.13** (Problema de valores propios semi-periódico). Consiste en encontrar  $y, \mu$  que solucionen el PVI siguiente:

$$\begin{aligned} [p(x)y'(x)]' + [\lambda s(x) - q(x)]y(x) &= 0 \\ \begin{cases} y(0) = -y(a) \\ y'(0) = -y'(a) \end{cases} \end{aligned}$$

De nuevo existe una sucesión  $\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$  y una de funciones propias. En los dos casos un valor propio es doble si y sólo si

$$\phi_2(a, \lambda_n) = \phi_1'(a, \lambda_n) = 0 \quad \text{ó} \quad \phi_2(a, \mu_n) = \phi_1'(a, \mu_n) = 0$$

o equivalentemente si la matriz de monodromía para ese valor propio sea diagonal. Vamos a calcular los valores propios para un problema sencillo.

**Ejemplo 1.14** (Cálculo de valores propios para problemas periódicos y semi-periódicos). Si  $p = s = 1$  y  $q = 0$  la ecuación se reescribe como

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

Claramente  $\lambda_0 = 0$  e  $y_0(x) = 0$  son el primer valor propio y la primera función propia, respectivamente. Como el resto de  $\lambda_n$  están por encima de  $\lambda_0$  podemos resolver el problema para  $\lambda > 0$ . En ese caso la solución general es bien conocida:

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Ahora imponemos las condiciones periódicas para obtener los coeficientes:

$$\begin{cases} y(0) = y(a) \Leftrightarrow A = A \cos(a\sqrt{\lambda}) + B \sin(a\sqrt{\lambda}) \\ y'(0) = y'(a) \Leftrightarrow B\sqrt{\lambda} = B\sqrt{\lambda} \cos(a\sqrt{\lambda}) - A\sqrt{\lambda} \sin(a\sqrt{\lambda}) \end{cases}$$

Llamando a  $\alpha := \cos(a\sqrt{\lambda})$  y  $\beta := \sin(a\sqrt{\lambda})$  y agrupando obtenemos un sistema lineal en  $A$  y  $B$ :

## 1. Teoría de Floquet

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & -\beta \\ \beta & 1-\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para poder encontrar coeficientes  $A$  y  $B$  que nos proporcionen una solución no trivial debemos imponer que el determinante de la matriz sea 0:

$$(1-\alpha)^2 + \beta^2 = 0 \stackrel{\alpha^2 + \beta^2 = 1}{\Leftrightarrow} \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos(a\sqrt{\lambda}) = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2}$$

Para cada uno de esos valores podemos obtener  $A$  y  $B$  para obtener las funciones propias. Procedemos primero a calcular la multiplicidad de los valores propios. En este caso sencillo conocemos la matriz de monodromía:

$$\Phi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & \sin \sqrt{\lambda} x \\ -\sin \sqrt{\lambda} x & \cos \sqrt{\lambda} x \end{pmatrix}$$

La matriz de monodromía para el valor propio  $\lambda$  es la matriz fundamental evaluada en  $a$  y  $\lambda$ :

$$\Phi(a, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos a\sqrt{\lambda} & \sin a\sqrt{\lambda} \\ -\sin a\sqrt{\lambda} & \cos a\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \stackrel{a\sqrt{\lambda} = 2\pi n}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para todos los valores propios la matriz de monodromía es diagonal, luego todos son dobles y la sucesión de valores propios es:

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0 \\ \lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2} = \frac{4\pi^2 n^2}{a^2} \end{cases}$$

A través de un análisis análogo obtenemos la sucesión de valores propios para el problema semi-periódico:

$$\begin{cases} \mu_{2n} = \mu_{2n+1} = \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{a^2} \end{cases}$$

**Teorema 1.15** (Intervalos de estabilidad-inestabilidad). *Para los valores propios de cualquier problema periódico y semi-periódico se tiene:*

- Los valores propios se suceden en este orden

$$\lambda_0 < \mu_0 \leq \mu_1 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \mu_2 \leq \mu_3 < \lambda_3 \leq \dots$$

- Los intervalos  $]\lambda_{2n}, \mu_{2n}[$  y  $]\mu_{2n+1}, \lambda_{2n+1}[$  son de estabilidad.
- Los intervalos  $]-\infty, \lambda_0[$ ,  $]\lambda_{2n+1}, \lambda_{2n+2}[$  y  $]\mu_{2n}, \mu_{2n+1}[$  son de inestabilidad.

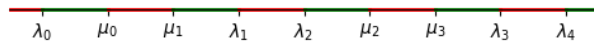


Figura 1.2.: Primeros intervalos de estabilidad e inestabilidad.

*Demostración.* El teorema consta de varias etapas. Vamos primero a enunciarlas para tener una vista general de la demostración y luego las detallamos:

1. Existe un número  $\Lambda$  tal que  $D(\lambda) > 2, \quad \forall \lambda \leq \Lambda$
2.  $D'(\lambda)$  no se anula en valores de  $\lambda$  para los que se cumple  $|D(\lambda)| < 2$
3. En cualquier cero  $\lambda_n$  de la función  $D(\lambda) - 2, D'(\lambda_n) = 0$  si y sólo si la matriz de monodromía evaluada en  $\lambda_n$  es diagonal. Además si  $D'(\lambda_n) = 0$  entonces  $D''(\lambda_n) < 0$

Si suponemos que estos tres puntos se cumplen la demostración se razona estudiando el comportamiento de  $D(\lambda)$ . Por el primer punto,  $D(\lambda) > 2$  para números muy negativos. Esto continúa así hasta que nos encontramos con el primer cero de  $D(\lambda) - 2$ , a menos (mínimo?)

1. Como  $s(x) > s > 0$  y  $q$  es periódica, luego acotada, podemos elegir un número  $\Lambda$ , negativo -si fuera necesario- tal que

$$q(x) - \Lambda s(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

Consideremos ahora  $y$ , cualquier solución no trivial de la ecuación (1.6) que verifique  $y(0) \geq 0, y'(0) \geq 0$ . Entonces tenemos que  $y$  es positiva en un intervalo  $]0, \Delta[$ . Es fácil convencerse de que esto debe ser así. Distingamos dos casos:  $y(0) > 0$  ó  $y(0) = 0$ . En el primero es evidente la propiedad que se enuncia porque  $y$  es continua. En el segundo notamos que  $y'(0)$  no puede ser 0, pues en ese caso  $y \equiv 0$  y el resultado se está enunciando para soluciones no triviales. Entonces  $y'(0) > 0$  y es evidente que  $y$  es positiva en algún intervalo cercano a 0. En cualquier intervalo del tipo  $]0, \delta[$  donde  $y$  sea positiva se verifica:

$$[p(x)y'(x)]' = [q(x) - \lambda s(x)]y(x) > 0, \quad \forall \lambda \leq \Lambda$$

Donde estamos usando (1.7), pues  $[q(x) - \lambda s(x)]y(x) > [q(x) - \Lambda s(x)]y(x) > 0$ . Entonces el miembro izquierdo de la igualdad  $p(x)y'(x)$  es estrictamente creciente en  $]0, \delta[$ . Esto obliga a que  $y'(x) > 0, \forall x \in ]0, \delta[$ , pues  $p$  tiene signo por no anularse  $\square$

## 1.4. Otros criterios de estabilidad

La imposibilidad en muchos casos de calcular exactamente los valores propios motiva la búsqueda de ciertos criterios que eviten el cálculo explícito de estos intervalos. Imaginemos que queremos estudiar la estabilidad de la ecuación:

$$y'' + Q(x)y = 0$$

Se puede entender que esta ecuación es un caso particular de otra ecuación paramétrica como por ejemplo:

$$y'' + [\lambda + Q(x)]y = 0 \quad \text{ó} \quad y'' + \lambda Q(x)y = 0$$

Para  $\lambda = 0$  ó  $\lambda = 1$  respectivamente. Si somos capaces de determinar que en alguno de los casos o bien 0 ó 1 están contenidos en algún intervalo de estabilidad sabremos que la ecuación es estable o bien inestable en caso contrario. Con este fin se han encontrado cotas para los valores propios  $\lambda_0$  y  $\mu_0$  (que son los extremos del primer intervalo de estabilidad). Por ejemplo para el primer caso, es decir si consideramos que la ecuación es un caso particular de la ecuación  $y'' + [\lambda + Q(x)]y = 0$ , si encontramos que  $\lambda_0 < 0$  y que  $\mu_0 > 0$ , entonces el

## 1. Teoría de Floquet

0 está en el primer intervalo de estabilidad y por tanto nuestra ecuación es estable. Antes de seguir las cotas vamos a enunciar y demostrar algunos lemas que servirán a la hora de probar ciertos resultados sobre el primer intervalo de estabilidad.

**Lema 1.16.** *La función propia  $y_0$  para el problema periódico no se anula en  $[0, a]$ .*

**Lema 1.17.** *La función propia  $y_0$  para el problema semi-periódico se anula una única vez en el intervalo  $[0, a]$*

Las demostraciones anteriores requieren un resultado que se conoce como Teorema de comparación de Sturm. La decisión de no enunciar ni demostrar dicho teorema hace imposible la demostración de ambos lemas.

**Lema 1.18.** *El funcional*

$$\mathcal{F}[f] = \frac{J(f, f)}{\int_0^a f(x)^2 dx}$$

<sup>4</sup> *definido en  $\Pi$  el espacio de todas las funciones que resuelven el problema de valores propios periódico tiene mínimo, es  $\lambda_0$  y se alcanza sobre su función propia asociada. Es decir,*

$$\min_{f \in \Pi} \mathcal{F}[f] = \lambda_0 \quad , \text{ con } \mathcal{F}[y_0] = \lambda_0$$

**Lema 1.19.** *Supongamos que  $f$ , definida en  $I = [c, d]$  es una función derivable a trozos (por tanto con derivada continua a trozos) que se anula en los extremos. Entonces*

$$\int_c^d |f'(x)|^2 dx \geq \left( \frac{\pi}{d-c} \right)^2 \int_c^d |f(x)|^2 dx$$

*Además la igualdad se alcanza si y sólo si  $f$  es un múltiplo de  $\sin \left( \frac{\pi(x-c)}{d-c} \right)$*

*Demostración.* Consideramos el problema de valores propio periódico siguiente:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda y(x) = 0 \\ y(c) = y(d) = 0 \end{cases}$$

Este problema se resuelve sin ninguna complicación como hicimos en el ejemplo (1.14) y obtenemos que los valores propios y sus correspondientes funciones propias son

$$\left( \frac{(n+1)\pi}{d-c} \right)^2, \quad \sin \left( \frac{(n+1)\pi(x-c)}{d-c} \right)$$

Aplicando el lema (1.18) tenemos como resultado que el primer valor propio  $\lambda_0$  es el mínimo de  $\mathcal{F}$ , que en este caso es  $\int_c^d |f'(x)|^2 dx / \int_c^d |f(x)|^2 dx$ , por lo que  $\forall f \in \mathcal{F}$ , es decir para

<sup>4</sup> $J(f, f)$  hace referencia a la integral de Dirichlet de  $f$  consigo misma. La integral de Dirichlet se define sobre el conjunto de todas las funciones de variable compleja continuas sobre  $[0, a]$  con derivada continua a trozos. En general tiene la expresión:

$$J(f, g) = \int_0^a p(x) f'(x) \overline{g'(x)} + q(x) f(x) \overline{g(x)} dx$$



cualquier función  $f$  que verifique el problema periódico antes planteado, se tiene que

$$\frac{\int_c^d |f'(x)|^2 dx}{\int_c^d |f(x)|^2 dx} \geq \left( \frac{\pi}{d-c} \right)^2$$

como se quería. Además sabemos por el mismo lema que la igualdad se da si y sólo si  $f$  es la función propia asociada a  $\lambda_0$ . Como en nuestro caso los extremos están fijos cualquier múltiplo de  $\sin\left(\frac{\pi(x-c)}{d-c}\right)$  es una función propia asociada a  $\lambda_0$   $\square$

**Lema 1.20.** Si en el problema semi-periódico  $p$  y  $q$  satisfacen

$$\int_0^a [p(x)]^{-1} dx \int_0^a q_-(x) dx \geq -4$$

Entonces

$$\mu_0 \geq S^{-1} \left( \frac{\pi}{\int_0^a [p(x)]^{-1} dx} \right)^2 \left( 1 + \frac{1}{4} \int_0^a [p(x)]^{-1} dx \int_0^a q_-(x) dx \right)$$

donde  $S = \sup(p(x)s(x))$  y la igualdad se da cuando  $q \equiv 0$  y  $p(x)s(x) = S$  c.p.d.

*Demostración.* Llamamos  $y_0$  a la función propia asociada a  $\mu_0$  (es semi-periódica) que sabemos por un lema anterior que tiene exactamente 1 cero en  $[0, a[$  y llamémosle  $a_0$  a dicho cero. Como  $(y_0, \mu_0)$  es solución del problema semi-periódico se cumple la ecuación diferencial:

$$[p(x)y_0'(x)]' + [\mu_0 s(x) + q(x)]y_0(x) = 0$$

Ahora multiplicamos por  $y_0$ :

$$py_0''y_0 + p'y_0'y_0 + \mu_0 sy_0^2 - qy_0^2 = 0$$

Integramos sobre  $[0, a_0]$ :

$$\int_0^{a_0} py_0''y_0 dx + \int_0^{a_0} p'y_0'y_0 dx + \mu_0 \int_0^{a_0} sy_0^2 dx - \int_0^{a_0} qy_0^2 dx = 0 \quad (1.8)$$

Integramos por partes la primera integral:

$$\begin{aligned} \int_0^{a_0} py_0''y_0 dx &= [py_0'y_0]_0^{a_0} - \int_0^{a_0} p'y_0'y_0 dx - \int_0^{a_0} py_0'^2 dx \stackrel{y_0(a_0)=0}{=} \\ &= -p(0)y_0(0)y_0'(0) - \int_0^{a_0} p'y_0'y_0 dx - \int_0^{a_0} py_0'^2 dx \end{aligned}$$

Notar que la segunda integral de la integración por partes se cancela con la segunda integral de (1.8), sustituyendo queda:

$$-p(0)y_0(0)y_0'(0) - \int_0^{a_0} py_0'^2 dx + \mu_0 \int_0^{a_0} sy_0^2 dx - \int_0^{a_0} qy_0^2 dx = 0$$

## 1. Teoría de Floquet

$$\Rightarrow \mu_0 \int_0^{a_0} s y_0^2 dx = p(0) y_0(0) y_0'(0) + \int_0^{a_0} p y_0'^2 + q y_0^2 dx$$

Análogamente integrando en  $[a_0, a]$  obtenemos que:

$$\Rightarrow \mu_0 \int_{a_0}^a s y_0^2 dx = -p(a) y_0(a) y_0'(a) + \int_{a_0}^a p y_0'^2 + q y_0^2 dx$$

Sumando ambas expresiones,

$$\mu_0 \int_0^a s y_0^2 dx = \int_0^a p y_0'^2 + q y_0^2 dx \quad (1.9)$$

La siguiente igualdad es fácil de comprobar recordando el teorema fundamental del cálculo y que  $y_0$  es  $a$ -semi-periódica:

$$2y_0(x) = \int_0^x y_0'(t) dt - \int_x^a y_0'(t) dt$$

Y por tanto

$$2|y_0(x)| \leq \int_0^a |y_0'(t)| dt$$

Recordamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales,

$$\left( \int_0^a f g dx \right)^2 \leq \int_0^a f^2 dx \int_0^a g^2 dx$$

Tomando como  $f(x) = |y_0'(t)|$  y como  $g \equiv 1$  se da:

$$\left( \int_0^a |y_0'(t)| dt \right)^2 \leq a \int_0^a y_0'^2 dx$$

$$\Rightarrow y_0^2(x) \leq \frac{a}{4} \int_0^a y_0'^2(t) dt, \quad \forall x \in [0, a] \quad (1.10)$$

Notemos que  $q_-(x) \leq 0$  y que  $q_-(x) \leq q(x)$ , por lo que multiplicando la ecuación (1.10) por  $q_-$  obtenemos la siguiente cadena de desigualdades,

$$q(x) y_0(x)^2 \geq q_-(x) y_0(x)^2 \geq \frac{a}{4} q_-(x) \int_0^a y_0'^2(t) dt$$

Ahora si consideramos la ecuación (1.9) con  $p \equiv 1$

$$\mu_0 \int_0^a s y_0^2 dx = \int_0^a y_0'^2 + q y_0^2 dx$$

Y acotando el segundo sumando de la integral se obtiene:

$$\mu_0 \int_0^a s y_0^2 dx \geq \int_0^a y_0'^2(x) dx + \frac{a}{4} \int_0^a q_-(x) dx \int_0^a y_0'^2(x) dx = \left( 1 + \frac{a}{4} \int_0^a q_-(x) dx \right) \int_0^a y_0'^2(x) dx$$

Multiplicamos por  $\rho = a \int_0^a y_0'^2(x) dx / \int_0^a s(x) y_0^2(x) dx$ ,

$$\frac{\mu_0}{\rho} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{4} \int_0^a q_-(x) dx.$$

Aplicamos el lema (1.19) a la función  $y_0$  y tenemos la cota

$$\frac{\int_0^a |y_0'(x)|^2 dx}{\int_0^a |y_0(x)|^2 dx} \geq \frac{\pi^2}{a^2}$$

Por lo que también podemos acotar  $\rho$ :

$$\rho = a \frac{\int_0^a y_0'^2(x) dx}{\int_0^a s(x) y_0^2(x) dx} \geq \frac{a}{S} \frac{\int_0^a y_0'^2(x) dx}{\int_0^a y_0^2(x) dx} \geq \frac{\pi^2}{aS}$$

Con esto llegamos a que  $\frac{1}{\rho} \leq \frac{aS}{\pi^2}$  y tenemos la cota que presagiaba el enunciado en el caso de que  $p \equiv 1$

$$\mu_0 \geq \frac{\pi^2}{Sa^2} \left( 1 + \frac{a}{4} \int_0^a q_-(x) dx \right)$$

Para el caso general en que  $p$  no es 1, efectuamos un cambio de variable  $u = \int_0^x p(t)^{-1} dt$  de forma que la ecuación  $[p(x)y'(x)]' + [\lambda s(x) - q(x)]y(x) = 0$  se transforma en  $\frac{d^2}{du^2} Y(u) + [\lambda S(u) - Q(u)]Y(u) = 0$  donde  $Y(u) = y(x(u))$ ,  $S(u) = s(x)p(x)$  y  $Q(u) = q(x)p(x)$ . Ahora aplicamos el caso primero y obtenemos la desigualdad propuesta en el enunciado.  $\square$

**Teorema 1.21** (Cotas para el primer intervalo de estabilidad). Sean  $\lambda_0$  y  $\mu_0$  los primeros valores propios para los problemas periódicos y semi-periódicos asociados a la ecuación (1.6) (los problemas definidos en la sección anterior), respectivamente. Entonces

1.  $\lambda_0 \leq \frac{\int_0^a q(x) dx}{\int_0^a s(x) dx}$  y la igualdad se da sólo cuando  $\frac{q}{s}$  es constante c.p.d<sup>5</sup>
2.  $\mu_0 \geq \frac{\pi^2}{a^2} \left( 1 + \frac{a}{4} \int_0^a q_-(x) dx \right)$  donde  $q_-(x) := \min(0, q(x))$  es la parte negativa de la función  $q$ . La igualdad se da si y sólo si  $q \equiv 0$  c.p.d

*Demostración.* La cota relativa a  $\mu_0$  es un caso particular de la vista en el lema 1.20 tomando  $p \equiv s \equiv 1$ , luego está ya demostrada.

Para la cota de  $\lambda_0$  usamos el lema 1.16,  $y_0$  no se anula por lo que podemos suponer que  $y_0 > 0$ . Entonces la función  $g(x) = \log y_0(x)$  está bien definida, es continua y de periodo  $a$ . Esta función recién definida cumple (excepto en los puntos de discontinuidad de los coeficientes) la ecuación diferencial siguiente:

$$[p(x)g'(x)]' + p(x)g''(x) + \lambda_0 s(x) - q(x) = 0$$

<sup>5</sup>c.p.d significa *casi por doquier*, en el sentido de Lebesgue significa que la propiedad anterior que se antepone a esta expresión se cumple salvo en un conjunto de medida nula.

## 1. Teoría de Floquet

Integramos en esta ecuación sobre  $[0, a]$  y se obtiene esta otra ( $p(x)g'(x)$  es  $a$ -periódica):

$$\int_0^a [p(x)g'(x)]' dx + \int_0^a p(x)g'^2(x) dx + \lambda_0 \int_0^a s(x) dx - \int_0^a q(x) dx = 0$$

El término  $\int_0^a p(x)g'^2(x) dx \geq 0$ , pues  $p$  es continua y en ningún punto se anula, luego

$$\lambda_0 \int_0^a s(x) dx - \int_0^a q(x) dx = - \int_0^a p(x)g'^2(x) dx \leq 0 \Rightarrow \lambda_0 \leq \frac{\int_0^a q(x) dx}{\int_0^a s(x) dx}$$

Esto prueba ambos resultados.  $\square$

Vamos a enunciar y demostrar un criterio de estabilidad muy importante entonces, pero como dijimos surge como corolario de este teorema anterior acotando adecuadamente para que  $\lambda = 0 \in [\lambda_0, \mu_0]$

**Corolario 1.22.** Supongamos que  $Q$  no se anula casi en ningún punto ( $Q(x) \neq 0$  c.p.d) y que

$$\int_0^a Q(x) dx \geq 0$$

Entonces la ecuación  $y'' + Q(x)y = 0$  es estable si

$$\int_0^a Q_+(x) dx \leq \frac{4}{a}$$

donde  $Q_+(x) = \max(Q(x), 0)$

*Demostración.* Consideramos la ecuación  $y''(x) + [\lambda + q(x)]y(x) = 0$ . Vamos a usar las cota del teorema 1.21 particularizadas para esta ecuación es decir,  $p \equiv 1$ ,  $s \equiv 1$  y  $q \equiv -Q$ : La cota para  $\lambda_0$  es

$$- \int_0^a Q(x) dx < 0 \Rightarrow \lambda_0 < 0$$

pues la igualdad se da si y sólo si  $Q$  es constante. Para el otro extremo usando la otra condición que nos dan:

$$\mu_0 > \frac{\pi^2}{a^2} \left( 1 - \frac{a}{4} \int_0^a Q_+(x) dx \right) > 0$$

Pues la igualdad se da si  $Q \equiv 0$ . Esto prueba que  $0 \in [\lambda_0, \mu_0]$  y que por tanto la ecuación es estable.  $\square$

Existe un resultado que proporciona criterios de estabilidad para el resto de intervalos pero su uso es marginal y preferimos quedarnos con el primer intervalo pues es el más accesible.

## **Parte II.**

### **El problema directo en el modelo Shallow-waters**



## 2. El problema directo

### 2.1. Las ecuaciones del modelo

Las ecuaciones de *Shallow waters* en una dimensión son, en su formulación, el más simple de los modelos que describe el movimiento horizontal de una capa de fluido. Este se caracteriza porque su validez depende de que la escala horizontal sea mucho mayor que la escala vertical, de ahí su nombre *poco profundas*. Las ecuaciones en cuestión son:

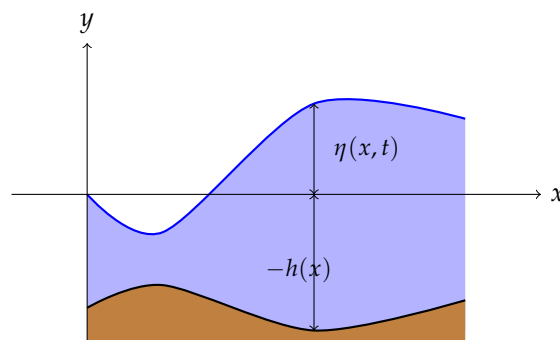
$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h(x)u] = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

donde

- $\eta(t, x)$  es la elevación vertical de la superficie del agua respecto a su elevación en reposo en el punto  $x \in \mathbb{R}$  y el instante  $t$ .
- $u(t, x)$  es la velocidad del agua.
- $h(x)$  es la profundidad del fondo en el punto  $x$ , medida desde la elevación de la masa de agua en reposo. El fondo siendo estático no depende del instante en el que nos encontremos, de ahí que sólo depende del punto en el que hagamos la medición.
- $g$  es la aceleración de la gravedad. A partir de ahora  $g$  la tomaremos constante  $g = 1$

Estas ecuaciones fueron derivadas por *Saint-Venant*, quién las dedujo de las ecuaciones de Euler para un fluido incompresible. Su simpleza no debe engañarnos pues esta aproximación es usada tanto para ayudar a la construcción de canales, análisis de rotura de presas y demás aplicaciones hidrológicas, porque son más sencillas de tratar que las completas (2D); como para entender la formación de tsunamis y olas en tormentas.



## 2. El problema directo

En principio, el modelo no exige que el fondo sea periódico. Nosotros en cambio estudiaremos como esta periodicidad que vamos a imponer en el fondo influye en la forma de las ondas viajeras. En lo sucesivo  $h$  se considerará  $T$ -periódica. Todas las ecuaciones por lo tanto las consideraremos para  $t > 0$  y  $x \in [0, L[$ .

### 2.2. Desacoplamiento de las ecuaciones

Para estudiarlas vamos a desacoplar el sistema:

En la ecuación (2.1) derivamos respecto de  $x$ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h(x)u] \right) = 0$$

Intercambiando derivadas parciales en el primer término y sustituyendo de acuerdo a (2.2) con  $g = 1$  obtenemos la primera ecuación desacoplada en la velocidad de onda,

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h(x)u) = 0}$$

Si ahora derivamos de nuevo la ecuación (2.1) pero esta vez respecto a  $t$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [h(x)u] \right) = 0$$

Como  $h$  no depende de  $t$  obtenemos, sustituyendo de nuevo de acuerdo a (2.2), la segunda ecuación desacoplada en el desplazamiento vertical:

$$\boxed{\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} (h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x}) = 0}$$

Notar que si en esta última ecuación  $h(x) = c$  recuperamos la clásica ecuación de onda:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

cuya solución general es conocida,  $\eta(t, x) = F(x - ct) + G(x + ct)$  con  $F$  y  $G$  funciones arbitrarias.

### 2.3. Formulación del problema directo

Como ya dijimos este modelo es útil en ingeniería por sus aplicaciones prácticas, pero también se usa para estudiar propagaciones de ondas a gran escala. Para que sea representativo, debemos considerar situaciones en las que la escala vertical de profundidad de las aguas sea comparativamente menor que la escala horizontal. Este es el caso de grandes masas de agua como océanos y lagos. Es por eso que la existencia de ondas viajeras como soluciones del modelo suponen un paso importante para dar una explicación sobre la propagación de ondas de larga distancia como los tsunamis y las olas tempestuosas que se forman durante una tormenta en el mar.



Cuando hablamos de problema directo nos referimos a la siguiente cuestión:  
¿De qué forma puede el perfil del fondo marino influir en la formación y propagación de ondas viajeras en la superficie?

Matemáticamente, este problema se modela fijando una función  $h$ , que hará las veces de fondo, e imponiendo que las soluciones tengan la forma de una onda viajera. Esto proporciona unas condiciones en forma de EDO que deben cumplir la amplitud y la fase espacial de la onda para poder ser solución del modelo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (h(x)u) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.4)$$

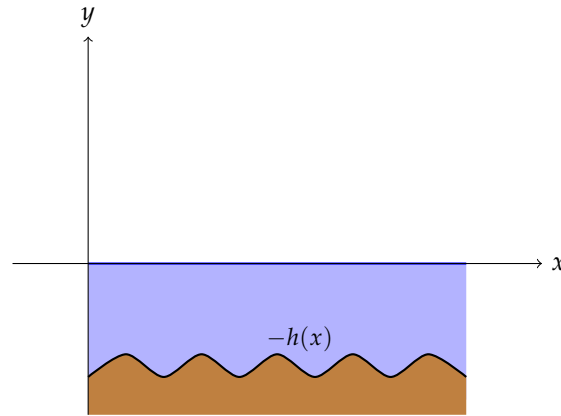
Recordamos que la ecuación (2.3) hace referencia únicamente a la velocidad de propagación y la ecuación (2.4) al desplazamiento vertical de la capa de agua que sufre respecto de su posición de equilibrio. Esto es están desacopladas.

## 2.4. El problema directo para la velocidad onda

Consideramos únicamente la ecuación (2.3) e imponemos que tenga la forma de una onda viajera.

$$u(t, x) = q(x) \exp[i(\omega t - \psi(x))]$$

Aunque aún no se ha hecho explícita la influencia del fondo en la solución, recordamos con un dibujo que nuestro objetivo es ver como el fondo (y su periodicidad) influyen en la onda.



Como queremos sustituir este candidato  $u$  en (2.3) debemos calcular los términos que aparecen:

- $u_{tt} = -\omega^2 q \exp(\dots)$
- $u_x = q' \exp(\dots) - iq\psi' \exp(\dots)$
- $u_{xx} = q'' \exp(\dots) - 2iq'\psi' \exp(\dots) - q\psi'^2 \exp(\dots) - iq\psi'' \exp(\dots)$
- $\frac{\partial^2 [h(x)u]}{\partial x^2} = h''u + 2h'u' + hu'' = [(hq)'' - 2i\psi'(hq)' - (\psi'^2 + i\psi'')(hq)] \exp(\dots)$

## 2. El problema directo

Por lo que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 [h(x)u]}{\partial x^2} \Leftrightarrow -w^2 q \exp(\dots) = [(hq)'' - 2i\psi'(hq)' - (\psi'^2 + i\psi'')(hq)] \exp(\dots)$$

Separando en parte real y parte imaginaria:

$$\begin{cases} (hq)'' + w^2 q - \psi'^2(hq) = 0 & \text{(Ecuación real)} \\ 2(hq)'\psi' + \psi''(hq) = 0 & \text{(Ecuación imaginaria)} \end{cases}$$

Entonces para que exista una onda viajera, los parámetros  $q$  y  $\psi$  deben cumplir el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, pues en el problema directo  $h$  es un dato. Vamos a simplificarlo un poco más. Notamos que la ecuación correspondiente a la parte imaginaria puede reescribirse de esta forma:

$$2(hq)'\psi' + \psi''(hq) = 0 \Leftrightarrow ((hq)^2\psi')' = 0$$

Esto indica que la cantidad

$$(hq)^2\psi' = \alpha \quad \text{para cierto } \alpha \in \mathbb{R} \text{ y para todo } x \in \mathbb{R} \quad (2.5)$$

Lo que es una cantidad conservada del sistema.

En la ecuación real aparece  $\psi'^2(hq)$ . Según (2.5) se puede reescribir como  $\psi'^2(hq) = \frac{\alpha^2}{(hq)^3}$ , simplemente elevando al cuadrado la igualdad (2.5) y despejando adecuadamente.

En consiguiente y sustituyendo en la ecuación real se deduce una ecuación no lineal de segundo orden para  $q$ :

$$(hq)'' + w^2 q = \frac{\alpha^2}{(hq)^3} \quad (2.6)$$

Que a través del cambio  $y = hq$  transforma la ecuación (2.6) en

$$y'' + \frac{w^2}{h} y = \frac{\alpha^2}{y^3} \quad (2.7)$$

Pues  $q = \frac{y}{h}$ . Esta ecuación (2.7) se llama *ecuación de Pinney*. Se puede resolver y este desarrollo se lo debemos a Pinney. Veámoslo:

**Teorema 2.1** (de Pinney). *Sea la ecuación diferencial no lineal*

$$y''(x) + p(x)y(x) + \frac{c}{y(x)^3} = 0$$

donde  $p$  es una función dada y  $c$  es constante. Entonces

$$y(x) = \sqrt{u(x)^2 - \frac{c}{W^2} v(x)^2}$$

es la única solución con condición inicial  $y(x_0) = y_0 \neq 0$ ,  $y'(x_0) = y'_0$  donde

- $u$  y  $v$  forman un sistema fundamental de la ecuación (de Hill)

$$y'' + py = 0$$

con

$$\begin{aligned} u(x_0) &= y_0 & v(x_0) &= 0 \\ u'(x_0) &= y'_0 & v'(x_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

- $W$  es el Wronskiano de  $u, v$ , esto es  $W = uv' - u'v = \text{cte} \neq 0$

Pueden surgir algunas dudas razonables cuando se ve el teorema por primera vez: ¿cuál es la condición inicial para  $v'$  que debemos imponer para obtener el resultado? Y si para cada condición  $v'_0 \neq 0$  tenemos una solución distinta  $v$  ¿cómo puede ser que tengamos unicidad? La respuesta a la primera pregunta es que no importa y ambas preguntas se puede responder con el siguiente razonamiento. Si bien es cierto que hay infinitas  $v$  que resuelven la ecuación de Hill con esas condiciones iniciales, todas cumplen que son múltiplos unas de la otra. Supongamos que  $v_1$  es solución de  $y'' + py = 0$  y que verifica  $v(x_0) = 0$  y  $v'(x_0) = 1$ , por ejemplo. Entonces si  $\tilde{v}$  cumple  $\tilde{v}(x_0) = 0$  y  $\tilde{v}'(x_0) = \lambda$  para algún  $\lambda \neq 0$  tenemos que  $\lambda v_1$  es también solución de la ecuación, por linealidad y que cumple las mismas condiciones iniciales que  $\tilde{v}$ . Por unicidad entonces  $\tilde{v} = \lambda v_1$ . Entonces el Wronskiano de  $u$  y  $\tilde{v}$  se escribe como  $W[u, \tilde{v}] = u\lambda v'_1 - u'\lambda v_1 = \lambda W[u, v_1]$  y podemos cancelar  $\lambda^2$  con el que aparece en  $\tilde{v}(x)^2$  y observamos que entonces  $y(x)$  se puede poner siempre en función de  $v_1$ .

Una vez visto esto podemos, ajustando este teorema a la ecuación (2.7) ( $p(x) = \frac{w^2}{h(x)}$ ,  $c = \alpha^2$ ), obtener que la solución es:

$$y(x) = \sqrt{u(x)^2 - \frac{\alpha^2}{W^2}v(x)^2} \quad (2.8)$$

donde  $u$  y  $v$  forman un sistema fundamental de la ecuación (de Hill)

$$y'' + \frac{w^2}{h(x)}y = 0 \quad (2.9)$$

cumpliendo las condiciones iniciales que correspondan.

*Demostración.* Cuando pasamos a sistema la ecuación el campo que obtenemos es:

$$F(t, x, y) = (y, -p(t)x - \frac{c}{x^3})$$

Suponiendo la suficiente regularidad para  $p$  obtenemos que  $F$  cumple las hipótesis del Teorema de Picard-Lindölof y por lo tanto la unicidad del PVI propuesto es inmediata. Si ahora demostramos que la candidata proporcionada es de hecho solución habremos demostrado lo que queríamos.

Lo primero y más sencillo es demostrar que la candidata cumple las condiciones iniciales:

- La condición  $y(x_0) = y_0$  es inmediata pues  $v(x_0) = 0$
- $y'(x_0) = y'_0$ . Derivamos y:

$$y'(x) = \frac{2uu' - 2\frac{c}{W^2}vv'}{2y} = \frac{uu' - \frac{c}{W^2}vv'}{y}$$

## 2. El problema directo

Ahora evaluamos en  $x_0$ :

$$y'(x_0) = \frac{u(x_0)u'(x_0) - \frac{c}{W^2}v(x_0)v'(x_0)}{y(x_0)} = \frac{y_0 y'_0}{y_0} = y'_0$$

Sólo queda demostrar que en efecto cumple la EDO, así que calculamos  $y''$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{[u'^2 + uu'' - \frac{c}{W^2}(v'^2 + vv'')]y - (uu' - \frac{c}{W^2}vv')y'}{y^2} = \\ &= \frac{(u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y - (pu^2 + p\frac{c}{W^2}v^2)y - yy'^2}{y^2} = \\ &= \frac{(u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y - py^3 - yy'^2}{y^2} \end{aligned}$$

Y ahora sustituimos:

$$\begin{aligned} y'' + py + \frac{c}{y^3} &= \frac{(u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y - py^3 - yy'^2}{y^2} + py + \frac{c}{y^3} = \\ &= \frac{(u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y^2 - py^4 - y^2y'^2}{y^3} + \frac{py^4}{y^3} + \frac{c}{y^3} = \\ &= \frac{(u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y^2 - y^2y'^2 + c}{y^3} = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vamos a calcular  $(u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y^2 - y^2y'^2$  por separado para entender mejor este último paso

$$\begin{aligned} (u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)y^2 - y^2y'^2 &= (u'^2 - \frac{c}{W^2}v'^2)(u^2 - \frac{c}{W^2}v^2) - \frac{(uu' - \frac{c}{W^2}vv')^2}{y^2} = \\ &= \cancel{u^2u'^2} - \frac{c}{W^2}(u^2v'^2 + u'^2v^2) + \frac{c^2}{W^4}\cancel{v^2v'^2} - (\cancel{u^2u'^2} + \frac{c^2}{W^4}\cancel{v^2v'^2} - 2\frac{c}{W^2}uu'vv') = \\ &= -\frac{c}{W^2}(u^2v'^2 + u'^2v^2 - 2uu'vv') = \\ &= -c \end{aligned}$$

Volviendo a introducir esta nueva información en lo anterior obtenemos lo que queríamos y por tanto se demuestra el teorema. □

El estudio del comportamiento de esta solución se puede abordar mediante los resultados de estabilidad de la teoría de Floquet que veíamos en la primera sección. Para recalcar el procedimiento que habría que seguir, primero resolvemos la ecuación (2.9) con las condiciones

$$\begin{cases} u(x_0) = y_0, & v(x_0) = 0, \\ u'(x_0) = y'_0, & v'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Esto último ( $v'(x_0) = 1$ ) en virtud de la discusión anterior. Se calcula el sistema fundamental

$u$  y  $v$ , las cuales sustituimos en (2.8) y obtenemos  $y$ . Ahora desharamos el cambio  $y = hq$  para obtener  $q$ . Por último calculamos  $\psi$  despejando e integrando en (2.5),  $\psi(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{h(s)^2 q(s)^2} ds$ . De esa forma encontramos  $u$ , la onda viajera para la velocidad. Este mismo procedimiento lo haremos en la sección tercera para ciertos fondos periódicos.

En este momento aún no podemos sacar ninguna conclusión. Por ahora sólo sabemos cómo calcular  $u$ . En el siguiente capítulo se hará un desarrollo análogo para  $\eta$ , el desplazamiento del agua. Suponiendo que el desarrollo nos lleve hasta una ecuación parecida – que sucederá– hasta este momento lo único que sabemos es que estas ondas viajeras existen, y se ha dado una forma, más o menos explícita de calcular estas soluciones (para el desplazamiento  $\eta$  el procedimiento es similar). Sin embargo, podemos decir más. El siguiente resultado es otra pieza clave del trabajo: el Teorema de Zhang. Presentado en el artículo [Zhao6], este teorema permite responder a la pregunta con la que comenzábamos esta exposición: ¿de qué forma influye el fondo y su periodicidad en la formación de ondas viajeras? El teorema responde: Hay una condición necesaria y suficiente para que existan ondas viajeras **periódicas**, y esta condición depende de la estabilidad de una ecuación de Hill. Más concretamente, el teorema reza así:

**Teorema 2.2** (Zhang). *Los siguientes enunciados son equivalentes*

1. La ecuación  $y'' + \frac{w^2}{h}y = \frac{a^2}{y^3}$  tiene una solución positiva y de periodo  $T$ .
2. La ecuación de Hill  $y'' + \frac{w^2}{h}y = 0$  es estable.

Vamos a suponer que la condición 2. se cumple<sup>1</sup>. En ese caso tenemos garantizada la existencia de una solución periódica de la ecuación de Pinney (2.7). Esto es importante ya que aunque el teorema nos dice cómo resolverla, muchas veces será imposible de encontrarla analíticamente. La existencia de una solución periódica  $y$  nos lleva a que  $q = y/h$  es también periódica, y esto irremediamente a que  $u(t, x) = q(x) \exp[i(\omega t + \psi(x))]$  lo es, que es lo que se quería: una onda viajera periódica. Efectivamente, este teorema por tanto responde de forma satisfactoria a nuestra pregunta.

Nótese también que hablamos de *ecuación de Hill*, y *estabilidad*. Este teorema no se sostiene (y no tiene sentido) si no existe periodicidad en la ecuación por lo que que el fondo  $h$  sea periódico es vital. Esta es la primera vez en la que usamos esta condición.

Para demostrarlo vamos a seguir el desarrollo que se presenta en [Zhao6]. Primeramente, veamos que relación guardan la ecuación de Hill y la de Pinney –ó Emarkov-Pinney–.

**Lema 2.3** (Relación entre la ecuación de Hill y Emarkov-Pinney). *Sean  $a$  una función continua y  $c \neq 0$  una constante no nula. En el enunciado llamaremos “la ecuación de Hill” a  $x'' + a(t)x = 0$  y “la ecuación de Pinney” a  $y'' + a(t)y = c^2/y^3$ .*

1. Si  $\phi_1, \phi_2$  son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hill entonces  $R(t) = \sqrt{\phi_1(t)^2 + \phi_2(t)^2}$  es solución de la ecuación de Pinney.
2. Si  $R$  es solución de la ecuación de Pinney entonces  $\exists \phi$  una función que depende únicamente de  $R$  de forma que cualquier solución de la ecuación de Hill se puede escribir como  $x(t) = A \sin(\phi(t) + B)$  donde  $A, B \in \mathbb{R}$ .

<sup>1</sup>Para comprobar esta condición nos remitimos a alguna de las herramientas que se proporcionaban en la primera sección sobre intervalos de estabilidad. Se verá con más claridad cómo hacerlo en la tercera parte, donde veremos ejemplos.

## 2. El problema directo

*Demostración.* Probamos primeramente 1). Escribimos en polares

$$\phi_1(t) + i\phi_2(t) = R(t) \exp(i\phi(t)) \quad (2.10)$$

donde  $R(t) > 0$  para cualquier  $t$  donde estén definidas las soluciones. Notar que  $R(t) = |R(t)| = |\phi_1(t) + i\phi_2(t)|$ . Derivando dos veces en la expresión (2.10) se obtiene:

$$\phi_1'' + i\phi_2'' = [R'' - R\phi'^2 + i2R'\phi' + iR\phi''] \exp(i\phi)$$

Como  $\phi_1, \phi_2$  son soluciones de la ecuación de Hill se tiene que

$$-a[\phi_1 + i\phi_2] = [R'' - R\phi'^2 + i2R'\phi' + iR\phi''] \exp(i\phi) \Leftrightarrow -aR \exp(i\phi) = [R'' - R\phi'^2 + i2R'\phi' + iR\phi''] \exp(i\phi)$$

Separando en parte real e imaginaria como ya hicimos tenemos dos ecuaciones:

$$\begin{cases} R'' + a(t)R - R\phi'^2 = 0 & \text{(Ecuación real)} \\ R\phi'' + 2R'\phi' = 0 & \text{(Ecuación imaginaria)} \end{cases}$$

De la ecuación imaginaria podemos, mediante separación de variables, encontrar que  $\phi' = c/R^2$  donde  $c$  es una constante distinta de 0. Esto se debe a que  $c = \phi'(0)R^2(0)$  es el valor del Wronskiano escrito en polares, escribiendo  $\phi_1(t) = R(t) \cos(\phi(t))$ ,  $\phi_2(t) = R(t) \sin(\phi(t))$ , usando la ecuación (2.10).

$$W[\phi_1, \phi_2](t) = R^2(t)\phi'(t)$$

Por lo que  $c = \phi'(0)R^2(0) = W[\phi_1, \phi_2](0) \neq 0$  Sustituyendo  $\phi'$  en la ecuación real obtenemos

$$R'' + a(t)R = c^2/R^3$$

Luego es solución de una ecuación de Pinney.

Probamos ahora 2). Suponemos ahora que  $R(t)$  es solución de la ecuación de Pinney  $y'' + a(t)y = c^2/y^3$ . Definimos

$$\phi(t) = \int_0^t \frac{c^2 ds}{r^2(s)}$$

Entonces cualquier solución de la ecuación de Hill viene dada por la expresión

$$x(t) = AR(t) \sin(\phi(t) + B), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Derivando dos veces

$$x'' = AR'' \sin(\phi + B) + 2AR'\phi' \cos(\phi + B) - AR\phi'^2 \sin(\phi + B) + AR\phi'' \cos(\phi + B)$$

Usando que  $\phi' = c^2/r^2$  y que  $\phi'' = -2c^2r'/r^3$  se comprueba que

$$x''(t) = -Aa(t)R(t) \sin(\phi(t) + B) \Leftrightarrow x'' + a(t)x = 0$$

□

Esta conexión se probará fundamental para probar el teorema.

*Demostración del teorema de Zhang.* Vamos a seguir la demostración que proporciona Zhang en su *paper*. Vamos a suponer que la ecuación de Hill es estable y probar que entonces la ecuación de Pinney tiene una solución positiva y de periodo  $T$ . Como ya bien hemos visto, que la ecuación sea estable implica que la ecuación es elíptica o bien es parabólica con todas sus soluciones periódicas o semi-periódicas. Ver (1.11).

Supongamos que es elíptica y sea  $\rho$  cualquiera de los dos multiplicadores característicos de la ecuación. Sea  $v = (v_1, v_2)^T \in \mathbb{C}^2$  el vector propio asociado a  $\rho$ .

Consideremos  $z(t) = \phi_1(t) + i\phi_2(t)$  una solución de la ecuación de Hill con condición inicial  $z(0) = v_1, z'(0) = v_2$ . Entonces

- $z(t) \neq 0$  para todo  $t$ . Como  $(z_1, z_2)$  es un vector propio no puede ser idénticamente nulo y la solución es no trivial. Por unicidad no puede anularse en ningún momento porque sino sería trivial.

■

$$z(t+T) = \rho z(t) \quad \forall t. \quad (2.11)$$

Llamemos  $Z(t) := (z(t), z'(t))^T$  y consideremos  $\Phi(t)$  la matriz fundamental principal en 0. Entonces  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tales que

$$Z(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \forall t$$

En particular para  $t = 0$  obtenemos que  $(\alpha, \beta)^T = v$ , luego en  $t = T$  obtenemos:

$$Z(T) = \Phi(T)v = \rho v = \rho Z(0)$$

Como la ecuación de Hill es autónoma,  $Z(t+T) = \rho Z(t)$  para todo  $t$  en particular se tiene lo que se quería.

De las partes real y la imaginaria de  $z$  podemos decir que son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hill. Que son soluciones es inmediato, para ver que ambas soluciones son linealmente independientes razonamos por contradicción. Si fueran linealmente dependientes debería existir  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tal que  $\phi_2 = \alpha\phi_1$ . Entonces  $z(t) = (1 + i\alpha)\phi_1(t)$  y por la propiedad tipo Floquet que probábamos en el último punto tenemos que

$$(1 + i\alpha)\phi_1(t+T) = \rho(1 + i\alpha)\phi_1(t) \Rightarrow \phi_1(t+T) = \rho\phi_1(t)$$

Como  $\phi_1$  es una función real y  $\rho$  tiene parte imaginaria no 0 (elíptico) la única posibilidad que tenemos es que  $\phi_1 = 0$  para todo  $t$ . Repitiendo el mismo argumento para  $\phi_2$  llegamos a que entonces  $z = 0$ , lo cual es una contradicción con el hecho de que la condición inicial sea un vector propio.

Una vez argumentado esto es sencillo comprobar que  $R(t) = |z(t)| > 0$  es periódica, i.e.  $R(t+T) = R(t)$  para todo  $t$ . Esto es fácil de probar usando la fórmula (2.11),

$$R(t+T) = |z(t+T)| = \overset{1}{|\rho|} |z(t)| = R(t)$$

Se sigue del primer punto del lema (2.3) que entonces  $R$  es una solución  $T$ -periódica y posi-

## 2. El problema directo

tiva de la ecuación de Pinney.

Ahora en el otro caso suponemos que es parabólico con todas su soluciones periódicas o semi-periódicas. Entonces cualesquiera dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hill,  $\phi_1, \phi_2$  producen una solución de la ecuación de Pinney,  $R(t) = \sqrt{\phi_1(t)^2 + \phi_2(t)^2}$  de nuevo por el lema, que es claramente periódica.

Recíprocamente, si la ecuación de Pinney tiene una solución  $T$ -periódica,  $R(t)$ , sabemos de nuevo por el lema que entonces todas las soluciones de la ecuación de Hill se escriben como

$$x(t) = AR(t) \sin(\phi(t) + B), \quad \text{para ciertos } A, B \in \mathbb{R}$$

por lo tanto podemos concluir que todas las soluciones son acotadas y la ecuación es estable.

Además la solución  $T$ -periódica es única cuando la ecuación es elíptica: supóngase que hubieran dos soluciones de período  $T$  de la ecuación de Pinney  $R_1(t)$  y  $R_2(t)$ . Definimos como en el lema las funciones

$$\phi_k(t) := \int_0^t \frac{c^2 ds}{R_k^2(s)}, \quad k = 1, 2$$

Claramente ambas cumplen que

$$\phi_k(t+T) = \int_0^{t+T} \frac{c^2 ds}{R_k^2(s)} = \phi_k(t) + \int_t^{t+T} \frac{c^2 ds}{R_k^2(s)} = \phi_k(t) + \theta_k \quad \forall t, \quad \theta_k > 0, \quad k = 1, 2$$

Por el punto 2 del lema (2.3), para  $A = 1$  y  $B = 1$

$$x_k(t) = R_k(t) \exp(i\phi_k(t))$$

son soluciones complejas de la ecuación de Hill. Ambas son soluciones tipo Floquet pues cumplen:

$$x_k(t+T) = R_k(t+T) \exp(i\phi_k(t+T)) = R_k(t) \exp(i\theta_k) \exp(i\phi_k(t)) = \exp(i\theta_k) x_k(t), \quad \forall t$$

para los multiplicadores característicos  $\exp(i\theta_k)$ , respectivamente. El producto de ambos debe ser 1, luego tenemos que  $\theta_1 = -\theta_2$  y entonces  $\exp(i\theta_1) = \exp(-i\theta_2)$ . Por otro lado  $x_1$  y  $\bar{x}_1$  son ambas soluciones complejas linealmente independientes, por lo que  $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$  tales que

$$x_2(t) = \alpha x_1(t) + \beta \bar{x}_1(t) \tag{2.12}$$

Entonces usando que  $x_2$  es de tipo Floquet.

$$\begin{cases} x_2(t+T) = \alpha x_1(t+T) + \beta \bar{x}_1(t+T) = \alpha \exp(-i\theta_2) x_1(t) + \beta \exp(i\theta_2) \bar{x}_1(t) \\ x_2(t+T) = \exp(i\theta_2) x_2(t) \end{cases}$$

Hemos usado que  $\theta_1 = -\theta_2$ . Igualamos ambas expresiones

$$\exp(i\theta_2) x_2(t) = \alpha \exp(-i\theta_2) x_1(t) + \beta \exp(i\theta_2) \bar{x}_1(t)$$



Multiplicando por  $\exp(-i\theta_2)$  tenemos:

$$x_2(t) = \alpha \exp(-2i\theta_2)x_1(t) + \beta \bar{x}_1(t)$$

Llegamos a otra expresión de  $x_2$  respecto de la base  $\{x_1, \bar{x}_1\}$ , por lo que comparando con (2.12), necesariamente se da uno de los siguientes:

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \exp(-2i\theta_2) = 1 \end{cases}$$

Notar que el segundo caso no puede darse porque entonces los multiplicadores característicos serían iguales a 1 ó  $-1$ , y estábamos suponiendo que estamos en el caso elíptico. Por lo tanto  $\alpha = 0$  y entonces  $\exists b \in \mathbb{C}^*$  tal que  $x_2(t) = b\bar{x}_1(t)$ . Evaluando en  $t = 0$  comprobamos que  $r_2(0) = br_1(0) \Rightarrow b \in \mathbb{R}^+$ . En ese caso como  $r_2(t) = br_1(t)$  y tanto  $r_1$  como  $r_2$  son soluciones de las ecuaciones de Pinney

$$\begin{cases} r_1'' + a(t)r_1 = 1/r_1^3 \\ br_1'' + ba(t)r_1 = 1/(b^3r_1^3) \end{cases}$$

respectivamente. De esto deducimos que  $b = 1$ , por lo que ambas soluciones son la misma por unicidad del PVI.  $\square$

## 2.5. El problema directo para el desplazamiento de agua

De nuevo el mismo problema, encontrar soluciones en forma de ondas viajeras esta vez para la ecuación (2.4):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0$$

Introducimos la onda

$$\eta(t, x) = q(x) \exp[i(\omega t - \psi(x))]$$

Repetimos la estrategia anterior,

- $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -\omega^2 q \exp(\dots)$
- $\frac{\partial \eta}{\partial x} = q' \exp(\dots) - i\psi' q \exp(\dots) = (q' - i\psi' q) \exp(\dots)$
- $\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = [q'' - \psi'^2 + i(-\psi'' q - 2\psi' q')] \exp(\dots)$
- $\frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = h' \eta' + h \eta'' = (h' q' - i\psi' h' q') \exp(\dots) + [h q'' - \psi'^2 h q - i(2\psi' h q' + \psi'' h q)] \exp(\dots) = [(h q')' - \psi'^2 h q - i((\psi' h q)' + \psi' h q')] \exp(\dots)$

Entonces sumando los términos correspondientes y separando por parte real e imaginaria:

$$\begin{cases} (h q')' + \omega^2 q - \psi'^2 (h q) = 0 & \text{(Ecuación real)} \\ (\psi' h q)' + \psi' h q = 0 & \text{(Ecuación imaginaria)} \end{cases}$$

## 2. El problema directo

Esta vez la cantidad conservada proveniente de la ecuación imaginaria es:

$$hq^2\psi' = \alpha, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Llegando análogamente a la ecuación, como se prometía en el capítulo anterior.

$$(hq')' + w^2q = \frac{\alpha^2}{hq^3} \quad (2.14)$$

De nuevo el procedimiento sería primero resolver la ecuación (2.14) para  $q$  y sustituir en (2.13) para encontrar  $\psi$ , simplemente integrando:  $\psi(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{h(s)q(s)^2} ds$ . De ese modo encontramos la expresión completa de la onda viajera  $\eta$ .

Como para la velocidad de desplazamiento veíamos una caracterización de existencia de soluciones periódicas para  $y$ , el teorema de Zhang (2.2), para el desplazamiento de agua tenemos un teorema análogo para  $q$ :

**Teorema 2.4.** *Son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

1. La ecuación  $(hq')' + w^2q = \frac{\alpha^2}{hq^3}$  tiene una solución positiva  $q$  de periodo  $T$ .
2. La ecuación de Hill  $(hq')' + w^2q = 0$  es estable.

*Demostración.* Consideramos el cambio en la variable independiente,

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{ds}{h(s)}$$

y definimos  $t = \phi(x)$ . Como  $h$  es mayor que una constante positiva tenemos que la función  $\phi$  así definida es estrictamente monótona, luego es biyectiva y existe  $\phi^{-1}$ , por lo que  $x = \phi^{-1}(t)$ . Además  $\phi$  es derivable con  $\phi'(x) = 1/h(x)$ . Como  $\phi'(x) \neq 0$  tenemos por el teorema de la función inversa que la inversa es derivable con  $\phi^{-1}(t) = 1/h(\phi^{-1}(t))$ . Por lo tanto  $\phi$  es un difeomorfismo y es un cambio de variable bien definido. En notación de Leibniz tenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{h(x)} \quad \frac{d}{dx} = \frac{1}{h(x)} \frac{d}{dt}$$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{dq}{dx} = \frac{dq}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dq}{dt} \frac{1}{h(x)}$$

Por lo tanto el término

$$(h(x)(q(x))')' = \frac{d}{dx} \left( h(x) \frac{dq}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( h(x) \frac{dq}{dt} \frac{1}{h(x)} \right) = \frac{d}{h(x)dt} \left( \frac{dq}{dt} \right) = \frac{1}{h(x)} \frac{d^2q}{dt^2}$$

Y la ecuaciones en (1) y (2) se reescriben como

$$\begin{cases} \frac{1}{h} \frac{d^2q}{dt^2} + w^2q = \frac{\alpha^2}{hq^3} \Leftrightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + w^2hq = \frac{\alpha^2}{q^3} \\ \frac{d^2q}{dt^2} + w^2hq = 0 \end{cases}$$

### 2.5. El problema directo para el desplazamiento de agua

Ahora llamando  $a(t) = w^2 h(\phi^{-1}(t))$  podemos aplicarle el Teorema de Zhang (2.2) a las dos ecuaciones anteriores para obtener el resultado.  $\square$

En la siguiente sección veremos como encontrar soluciones en forma de ondas viajeras para ciertos fondos y proporcionaremos un código en Python que la aproxime.



## **Parte III.**

### **Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica**



### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

#### 3.1. Introducción

Queremos encontrar una onda viajera periódica para la ecuación de desplazamiento (2.4):

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( h(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad t > 0, \quad x \in [0, T[$$

Recapitulando lo que sabemos hasta ahora, si imponemos que

$$\eta(t, x) = q(x) \exp[i(\omega t + \psi(x))]$$

sea solución de la ecuación de desplazamiento (2.4) llegamos a que  $q$  y  $\psi$  deben cumplir lo siguiente:

$$\begin{cases} (hq')' + \omega^2 q = \frac{\alpha^2}{hq^3} \\ \psi(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{hq^2} ds \end{cases} \quad (3.1)$$

De la primera ecuación obtendremos la amplitud  $q(x)$  y sustituyendo en la segunda calculamos la fase espacial  $\psi(x)$ . Para que exista una onda viajera periódica es necesario que exista una solución  $q$  periódica y positiva. Esto viene garantizado por el teorema (2.4), si y sólo si la ecuación

$$(hq')' + \omega^2 q = 0 \quad (3.2)$$

es estable.

Como ya adelantábamos cuando veíamos el teorema (2.2) la clave está en conocer si la ecuación de Hill correspondiente es estable o no. Para ello tenemos dos vías:

1. Vía numérica: Calcular el discriminante de forma aproximada. Se considera el sistema de primer orden asociado a la ecuación (3.2) y se resuelve con condiciones iniciales que proporcionen una matriz fundamental principal en  $t = 0$ . Si evaluamos la matriz solución en  $t = T$  obtenemos la matriz de monodromía. Basta calcular la traza de la misma para obtener el discriminante de la ecuación,  $D$ . Una vez calculado, en virtud del teorema (1.9), la ecuación será estable si  $|D| < 2$ . Esta vía se puede seguir siempre pero no nos da más información que esa, si la ecuación es estable para ese  $\omega$  concreto.
2. Vía analítica: Si consideramos que en la ecuación  $\omega$  es un parámetro más podemos estudiar para qué  $\omega$  la ecuación es estable. En la primera sección del trabajo introducimos el concepto de intervalos de estabilidad y dimos criterios que garantizan esta estabilidad.

Si bien la vía numérica es válida siempre; es aproximada y para casos concretos, como vamos a hacer en unos instantes, es mejor utilizar el criterio de estabilidad visto en la primera sección, corolario (1.22), pues nos permite estar seguros *analíticamente* de la estabilidad y nos proporcionan más información. Este será el método que aplicaremos.

### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

Con esto en mente notamos que es necesario reescribir la ecuación (3.2) para que no aparezca el término de primer orden cuando desarrollamos la derivada del producto, pues el resultado (1.22) lo requiere. Consideramos el cambio de variable  $y = hq'$ . La ecuación de Hill  $(hq')' + w^2q = 0$  se reescribe

$$y' + w^2q = 0$$

Ahora derivamos y sustituimos  $q'$ :

$$y'' + w^2q' = 0 \Rightarrow y'' + \frac{w^2}{h}y = 0$$

Para realizar dicho cambio de variable se está suponiendo que  $\inf(h(x)) > 0$ . Esta suposición es lógica y no supone ninguna complicación adicional. De hecho es deseable.

A esta ecuación ya se le podría aplicar el resultado de estabilidad. Notar que este cambio de variable preserva la estabilidad de la ecuación.

**Lema 3.1.** *Si la ecuación  $y'' + (w^2/h)y = 0$  es estable entonces  $(hq')' + w^2q = 0$  también.*

*Demostración.* Tomemos cualquier solución de  $(hq')' + w^2q = 0$ ,  $q$ . Consideremos  $y = hq'$ . Por el desarrollo anterior sabemos que  $y'' + (w^2/h)y = 0$ , y por hipótesis esta ecuación es estable, en particular  $y'$  está acotada y por tanto  $q' = y/h$  está acotada. Si miramos de nuevo el desarrollo antes mencionado teníamos que  $y' + w^2q = 0$ , por lo que  $q = y'/w^2$  y  $q$  está acotada. De la arbitrariedad de  $q$  se deduce la estabilidad de la ecuación  $(hq')' + w^2q = 0$ .  $\square$

En adelante impondremos estabilidad en la ecuación  $y'' + (w^2/h)y = 0$ , pues acabamos de ver que la estabilidad de esta implica estabilidad en la ecuación (3.2).

Este desarrollo es común a todos los ejemplos que vamos a plantearnos por eso lo hacemos en la introducción. Veamos ahora cómo encontrar ondas viajeras para el caso de un fondo sencillo.

## 3.2. Fondo plano

El perfil que vamos a considerar en este ejemplo es  $h(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ . Como decíamos cuando introducimos las ecuaciones desacopladas si  $h$  es constante recuperamos la ecuación de onda clásica. Aún vamos a seguir los pasos descritos anteriormente para ver qué resultado se alcanza. De esta forma, estudiaremos la ecuación de onda de una perspectiva distinta. Siguiendo el desarrollo anterior llegamos al sistema (3.1), en este caso:

$$\begin{cases} q'' + w^2q = \frac{\alpha^2}{q^3} \\ \psi(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{q^2} ds \end{cases}$$

Pues  $h \equiv 1$ . Lo primero es estudiar para que  $w$  la ecuación de Hill es estable, de esa forma sabemos que la ecuación completa  $q'' + w^2q = \frac{\alpha^2}{q^3}$  tiene una solución positiva y  $T$ -periódica,  $q$ . Estudiar la estabilidad es muy sencillo en este caso. De hecho no necesitamos ningún cambio de variable ni ningún desarrollo adicional, pues la ecuación homogénea  $q'' + w^2q = 0$  tiene soluciones conocidas  $q(x) = A \cos(wx) + B \sin(wx)$ . Todas las soluciones son acotadas y por tanto la ecuación es estable para todo  $w$ .



El teorema de Zhang asegura la existencia de soluciones periódicas positivas,  $q$ , en la ecuación de  $q$  del sistema (3.2). Esto podía saberse sin hacer el uso del teorema, pues en este caso la ecuación puede resolverse explícitamente usando el teorema de Pinney:

**Corolario 3.2** (del teorema de Pinney). *La única solución de la ecuación  $q'' + w^2 q = \frac{\alpha^2}{q^3}$  con condiciones iniciales  $q(0) = q_0 > 0$ ,  $q'(0) = q'_0$  es*

$$q(x) = \sqrt{u^2(x) + \frac{\alpha^2}{q_0^2 w^2} \sin^2(wx)}$$

donde  $u(x) = q_0 \cos(wx) + (q'_0/w) \sin(wx)$

*Demostración.* La demostración es aplicar el teorema de Pinney (2.1).  $u$  y  $v$  deben formar una base del espacio de soluciones de la homogénea que sabemos que tiene como soluciones  $q(x) = A \cos(wx) + B \sin(wx)$ . Imponiendo las condiciones que nos exige el teorema:

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = q_0 \Rightarrow A = q_0 \\ u'(0) = q'_0 \Rightarrow B = q'_0/w \end{array} \right\} \Rightarrow u(x) = q_0 \cos(wx) + (q'_0/w) \sin(wx)$$

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = 0 \Rightarrow A = 0 \\ v'(0) = w \Rightarrow B = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow v(x) = \sin(wx)$$

Calculamos el Wronskiano,  $W[u, v] = q_0 w \neq 0$ , luego son linealmente independientes. Entonces sustituyendo de acuerdo al teorema de Pinney.

$$q(x) = \sqrt{u^2(x) + \frac{\alpha^2}{q_0^2 w^2} \sin^2(wx)}$$

□

**Corolario 3.3** (caso particular del teorema de Zhang). *Las soluciones de la ecuación  $q'' + w^2 q = \frac{\alpha^2}{q^3}$  son positivas de período  $2\pi/w$ , para cualquier condición inicial  $q_0 > 0$ ,  $q'_0$ .*

Es decir, no importa la condición inicial que se escoja, todas las ondas viajeras posibles son periódicas.

### 3.3. Perfil sinusoidal

El perfil que vamos a considerar para este ejemplo es

$$h(x) = 1 + c \sin(x)$$

Que sería de la forma Esta función es  $2\pi$ -periódica y aunque está bien definida queremos que no se anule, pues hemos usado que  $h$  no se anula para adaptar la ecuación de Hill. Para ello decidimos que  $|c| < 1$ . Ahora comprobamos la hipótesis del criterio de estabilidad:

$$\int_0^{2\pi} Q(x) dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} \frac{w^2}{1 + c \sin(x)} dx > 0$$

### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

Es suficiente observar que  $Q(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Esto porque tanto si  $c \geq 0$ , como si  $c < 0$  se verifica que  $c \sin(x) > -c > -1$  y por tanto  $1 + c \sin(x) > 0$ .

De la condición  $\int_0^{2\pi} Q_+(x) dx \leq 4/(2\pi)$  obtenemos una condición sobre  $w$ , para los cuales la ecuación es estable. Como  $Q$  es positiva su parte positiva es ella misma. Usando esta acotación, por casos si se quiere,

$$1 + c \sin(x) \geq \begin{cases} 1 - c, & \text{si } c \geq 0 \\ 1 + c, & \text{si } c < 0 \end{cases} = 1 - |c|$$

se obtiene que

$$\int_0^{2\pi} \frac{w^2}{1 + c \sin(x)} dx \leq \int_0^{2\pi} \frac{w^2}{1 - |c|} dx = \frac{2\pi w^2}{1 - |c|}$$

Esto último debe ser menor que  $2/\pi$ , luego

$$|w| \leq \frac{\sqrt{1 - |c|}}{\pi}$$

En adelante consideraremos que  $w$  verifica la anterior. Por lo tanto la ecuación (3.1),  $y'' + \frac{w^2}{h} y = 0$  es estable y por (2.4) sabemos que la ecuación

$$(hq')' + w^2 q = \frac{\alpha^2}{hq^3}$$

tiene una solución positiva  $T$ -periódica,  $q$ . Para encontrarla vamos a hacer uso de la aplicación de Poincaré. En general, dada  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$  y  $X_0 \in \mathbb{R}^N$ , tenemos el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Si el anterior sistema tiene unicidad de soluciones para cada condición inicial  $(t_0, X_0)$  podemos denotar  $X(t_0, X_0; t)$  a la única solución que verifica  $X(t_0) = X_0$ . Fijado el tiempo  $t_0$ , la aplicación de Poincaré a tiempo  $T$  es:

$$\begin{aligned} \mathbb{P} : \mathbb{R}^N &\longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \mathbb{P}(X_0) &= X(t_0 + T, X_0; t_0) \end{aligned}$$

Si  $F$  es autónoma, por unicidad del PVI, una solución  $X(t_0, X_0; t)$  es periódica si y sólo si  $\mathbb{P}(X_0) = X_0$ . Es decir, la periodicidad equivale a encontrar un punto fijo de la aplicación de Poincaré. En teoría esto es complicado así que nosotros vamos a escribir un algoritmo que calcule qué condiciones iniciales nos proporcionan una solución periódica. La idea es muy sencilla: Comenzamos con una condición inicial  $q_0, q'_0$  arbitraria y resolvemos el problema de valores iniciales en  $[a, b]$ . Ahora resolvemos el PVI para la condición inicial en  $[b, b + b - a = 2b - a]$  y continuamos repitiendo este proceso. Esto es aplicar la aplicación de Poincaré una y otra vez. Si existe un punto fijo esta sucesión de puntos se cierra y en el interior de la región que define se encuentra el punto fijo. Luego consideramos un punto del interior de esta región y repetimos, obteniendo otra región cerrada, etc. Esto lo repetimos hasta tener la precisión deseada. Este código siguiente, escrito en Python calcula y muestra la

región de la que hablábamos hace un momento. El lector interesado puede ejecutar el código una y otra vez siguiendo el algoritmo (cambiando las condiciones iniciales entre ejecuciones) para obtener de forma manual el punto fijo.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from math import sqrt
#from matplotlib.animation import FuncAnimation

# Definir el perfil h(x)
def h(x):
    return 1 + 0.5 * np.sin(x)
def dh(x):
    return 0.5 * np.cos(x)

# Parámetros
alpha = 0.25
w = 0.21 # <sqrt>((1-|c|)/pi)=0.39...

# Definir la ecuación diferencial
def f(x, y):
    q = y[0] # q(x)
    dq = y[1] # q'(x)

    return_1 = dq
    return_2 = alpha**2 / (h(x)**2 * q**3) - w**2 / h(x) * q - (dh(x) / h(x)) * dq

    return [return_1, return_2]

# Condiciones iniciales
ci1 = q0 = sqrt(alpha/w)
ci2 = dq0 = 0
y0 = [q0, dq0]

poincare = [y0]

for k in range(100):
    x_span = [2*k* np.pi, 2 * (k+1) * np.pi]
    x_eval = np.linspace(x_span[0], x_span[1], 500)

    sol = solve_ivp(f, x_span, y0, t_eval=x_eval, method='Radau')

    if sol.success:
        x = sol.t
        q_x = sol.y[0] # q(x)

        # Tomamos como condición inicial el último punto para la siguiente iteración
```

### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

```
q0 = q_x[-1]
dq0 = sol.y[1][-1]
y0 = [q0, dq0]

poincare.append(y0)

# Evitar divisiones por 0
q_x[q_x < 1e-6] = 1e-6
else:
    print("Error: La integración falló.")

# Separar los valores en listas de x e y
x_values, y_values = zip(*poincare)

# Crear scatter plot con colores basados en el índice
indices = np.arange(len(poincare)) # Índices para los colores
plt.scatter(x_values, y_values, c=indices, cmap='viridis', marker='o')

plt.colorbar(label="Índice del punto")

plt.xlabel("q")
plt.ylabel("q'")
plt.suptitle(f"q0 = {ci1}, q1 = {ci2}")
plt.title("Región obtenida")

# Mostrar la gráfica
plt.show()
```

Nosotros obtuvimos las siguientes regiones y decidimos quedarnos con la tercera iteración pues la escala ya era satisfactoriamente pequeña:

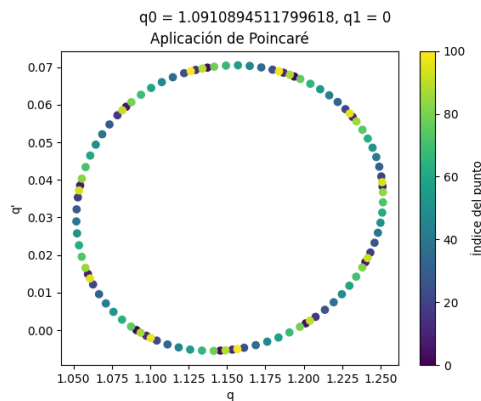


Figura 3.1.: Resultado de la ejecución del código anterior

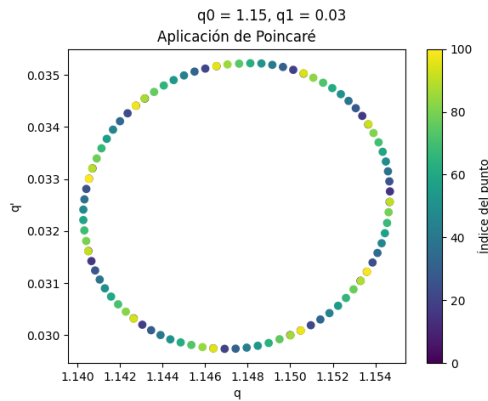


Figura 3.2.: Segunda iteración. Las condiciones iniciales se muestran en la parte superior

Como comentábamos, aunque las imágenes son muy parecidas en la escala de la misma se aprecia una reducción que corresponde con que cada vez tenemos más acotado el punto fijo buscado.

El siguiente código calcula  $q$  y  $\psi$ . Notar que  $q$  debe ser periódica pues las condiciones iniciales se han buscado para que esto ocurra.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp, cumulative_trapezoid

# Definir el perfil h(x)
# Fondo seno
```

### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

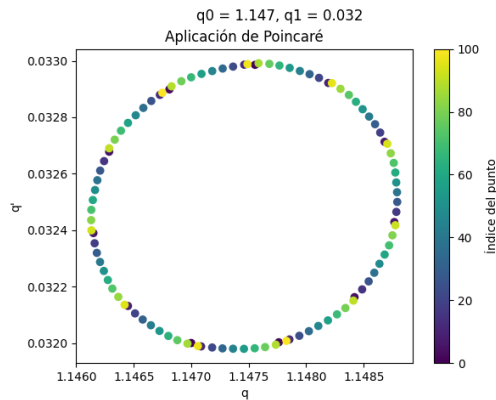


Figura 3.3.: Tercera iteración. La escala en ambos ejes es pequeña.

```
def h(x):
    return 1 + 0.5 * np.sin(x)
def dh(x):
    return 0.5 * np.cos(x)

# Parámetro alpha
alpha = 0.25
w = 0.21 # <sqrt((1-|c|)/pi)=0.39...

# Definir la ecuación diferencial
def f(x, y):
    q = y[0] # q(x)
    dq = y[1] # q'(x)

    return_1 = dq
    return_2 = alpha**2 / (h(x)**2 * q**3) - w**2 / h(x) * q - (dh(x) / h(x)) * dq

    return [return_1, return_2]

# condiciones iniciales
ci1 = q0 = 1.147
ci2 = dq0 = 0.032
y0 = [q0, dq0]

x_span = [0 * np.pi, 2 * np.pi]
x_eval = np.linspace(x_span[0], x_span[1], 500)

sol = solve_ivp(f, x_span, y0, t_eval=x_eval, method='Radau')

if sol.success:
    x = sol.t
    q_x = sol.y[0] # q(x)
```

```

# Evitar divisiones por 0
q_x[q_x < 1e-6] = 1e-6

# Calcular la integral para obtener psi(x)
integrand = alpha / (h(x) * q_x**2)
psi_x = np.insert(cumulative_trapezoid(integrand, x), 0, 0) # Integral acumulativa
# La instrucción insert añade un 0 al principio del array.
# La función cumulative trapezoid integra entre cada dos nodos lo cual da un array
# de tamaño 1 menos de lo que debería ser

# Graficar los resultados
fig, ax = plt.subplots(2, 1, figsize=(8, 6))

ax[0].plot(x, q_x, label="q(x)", color="b")
ax[0].set_ylabel("q(x)")
ax[0].grid()

ax[1].plot(x, psi_x, label="psi(x) = ( / (h q²)) dx", color="r")
ax[1].set_xlabel("Espacio x")
ax[1].set_ylabel("psi(x)")
ax[1].grid()

plt.title("q y psi")
plt.show()

```

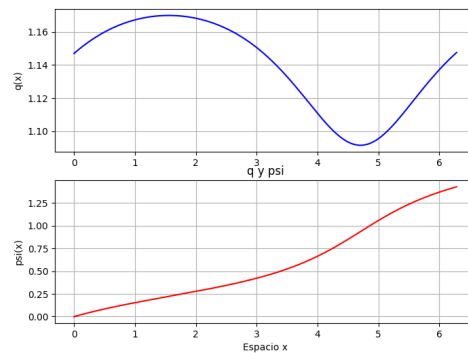


Figura 3.4.: Notar como  $q$  es periódica.

### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

Este siguiente código muestra una animación de la onda viajera junto con su fondo:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp, cumulative_trapezoid
from matplotlib.animation import FuncAnimation
from math import sqrt

# Definir el perfil h(x)
# Fondo seno
def h(x):
    return 1 + 0.5 * np.sin(x)
def dh(x):
    return 0.5 * np.cos(x)

# Condiciones iniciales
ci1 = q0 = 1.147
ci2 = dq0 = 0.032
y0 = [q0, dq0]

# Parámetros
alpha = 0.25
w = 0.21 # <sqrt>((1-|c|)/pi)=0.39...

# Definir la ecuación diferencial
def f(x, y):
    q = y[0] # q(x)
    dq = y[1] # q'(x)

    return_1 = dq
    return_2 = alpha**2 / (h(x)**2 * q**3) - w**2 / h(x) * q - (dh(x) / h(x)) * dq

    return [return_1, return_2]

x_span = [0* np.pi, 2 * np.pi]
x_eval = np.linspace(x_span[0], x_span[1], 500)
# Resolver la EDO
sol = solve_ivp(f, x_span, y0, t_eval=x_eval, method='Radau')

if sol.success:
    x = sol.t
    q_x = sol.y[0] # q(x)

    # Calcular la integral para obtener psi(x)
    integrand = alpha / (h(x) * q_x**2)
    psi_x = np.insert(cumulative_trapezoid(integrand, x), 0, 0) # Integral acumulativa
    # La instrucción insert añade un 0 al principio del array.
    # La función cumulative trapezoid integra entre cada dos nodos lo cual da un array
```



```

# de tamaño 1 menos de lo que debería ser

# Parámetros de la animación
T = 10 # Duración total en segundos
FPS = 30 # Cuadros por segundo
num_frames = int(FPS * T) # Total de cuadros
interval = 1000 / FPS # Intervalo en milisegundos (33.33 ms)

fig, ax = plt.subplots()
line_q, = ax.plot([], [], 'b-', label='q(x)')
line_h, = ax.plot([], [], 'r-', label='h(x)')
ax.set_xlim(np.min(x), np.max(x))
ax.set_ylim(-5,5)

def init():
    line_q.set_data([], [])
    line_h.set_data([], [])
    return line_q, line_h

def update(frame):
    t = frame / FPS

    # Actualizar las lineas
    y_vals = q_x * np.cos(w * t - psi_x)
    y_vals_h = -h(x)
    line_q.set_data(x, y_vals)
    line_h.set_data(x, y_vals_h)

    return line_q, line_h

# Crear la animación
ani = FuncAnimation(fig, update, frames=num_frames, init_func=init,
                    blit=True, interval=interval)
# ani.save("name.gif", writer="pillow", fps=30)
# ^ Quitar la almohadilla inicial para guardar la animación.
plt.show()

```

Este último es una automatización del procedimiento para encontrar las condiciones iniciales:

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp
from math import sqrt
#from matplotlib.animation import FuncAnimation

```

```

def lerp(A, B, t):
    return A+(B-A)*t

```

### 3. Aplicación a un perfil concreto y simulación numérica

```
# Definir el perfil h(x)
""" def h(x):
    return 5 + 0.5 * np.sin(x)
def dh(x):
    return 0.5 * np.cos(x) """

# Parámetro alpha
alpha = 0.25
w = 0.21

# Definir la ecuación diferencial
def f(x, y):
    q = y[0] # q(x)
    dq = y[1] # q'(x)

    return_1 = dq
    return_2 = alpha**2 / (h(x)**2 * q**3) - w**2 / h(x) * q - (dh(x) / h(x)) * dq

    return [return_1, return_2]

# Condiciones iniciales
ci1 = q0 = sqrt(alpha/w)
ci2 = dq0 = 0
y0 = [q0, dq0]

poincare = [y0]

run = True
tol = 0.01
n = 1

print(f"Iteración {n} ({y0[0]}, {y0[1]}).")

while run and n <= 50:
    for k in range(100):
        # Intervalo de integración
        x_span = [2*k* np.pi, 2 * (k+1) * np.pi]
        x_eval = np.linspace(x_span[0], x_span[1], 500)

        # Resolver la EDO
        sol = solve_ivp(f, x_span, y0, t_eval=x_eval, method='Radau')

        if sol.success:
            x = sol.t
            q_x = sol.y[0] # q(x)

            # Condiciones iniciales
            q0 = q_x[-1]
```

```

    dq0 = sol.y[1][-1]
    y0 = [q0, dq0]

    poincare.append(y0)

else:
    print("Error: La integración falló.")

# Comprobamos la condición
x_values, y_values = zip(*poincare)
minx = min(x_values)
maxx = max(x_values)
miny = min(y_values)
maxy = max(y_values)
lados = [maxx-minx, maxy-miny]
threshold = max(lados)

if threshold < tol:
    run = False
else:
    print(f"Iteración {n} ({y0[0]} {y0[1]}), condición: {threshold}")
    y0 = [lerp(minx, maxx, 0.5), lerp(miny, maxy, 0.5)]
    poincare = [y0]

n+=1

print(f"El método ha terminado con: {n} iteraciones\n El resultado ha sido ({y0[0]}, {y0[1]}).")

```



## Bibliografía

- [Eas73] M. S. P. Eastham. *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*. Scottish Academic Press Ltd, Edinburgh, UK, 1973.
- [Flo83] Gaston Floquet. Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 12:47–88, 1883.
- [GM17] Angel Guerrero Martínez. La ecuación de hill, July 2017.
- [Hil78] George William Hill. Researches in the lunar theory. *American Journal of Mathematics*, 1(1):5–26, 1878.
- [MW79] Wilhelm Magnus y Stanley Winkler. *The Hill's Equation*. Dover Publications Inc., New York, US, 1979.
- [PK22] Efim Pelinovsky y Oleg Kaptsov. Traveling waves in shallow seas of variable depths. *Symmetry*, 14(7):1448, 2022.
- [Zhao06] Meirong Zhang. Periodic solutions of equations of emarkov-pinney type. *Advanced Nonlinear Studies*, 6:57–67, 2006.