Les tests d’hypothèses

Vincent Guillemot
Amaury Vaysse

Rappels

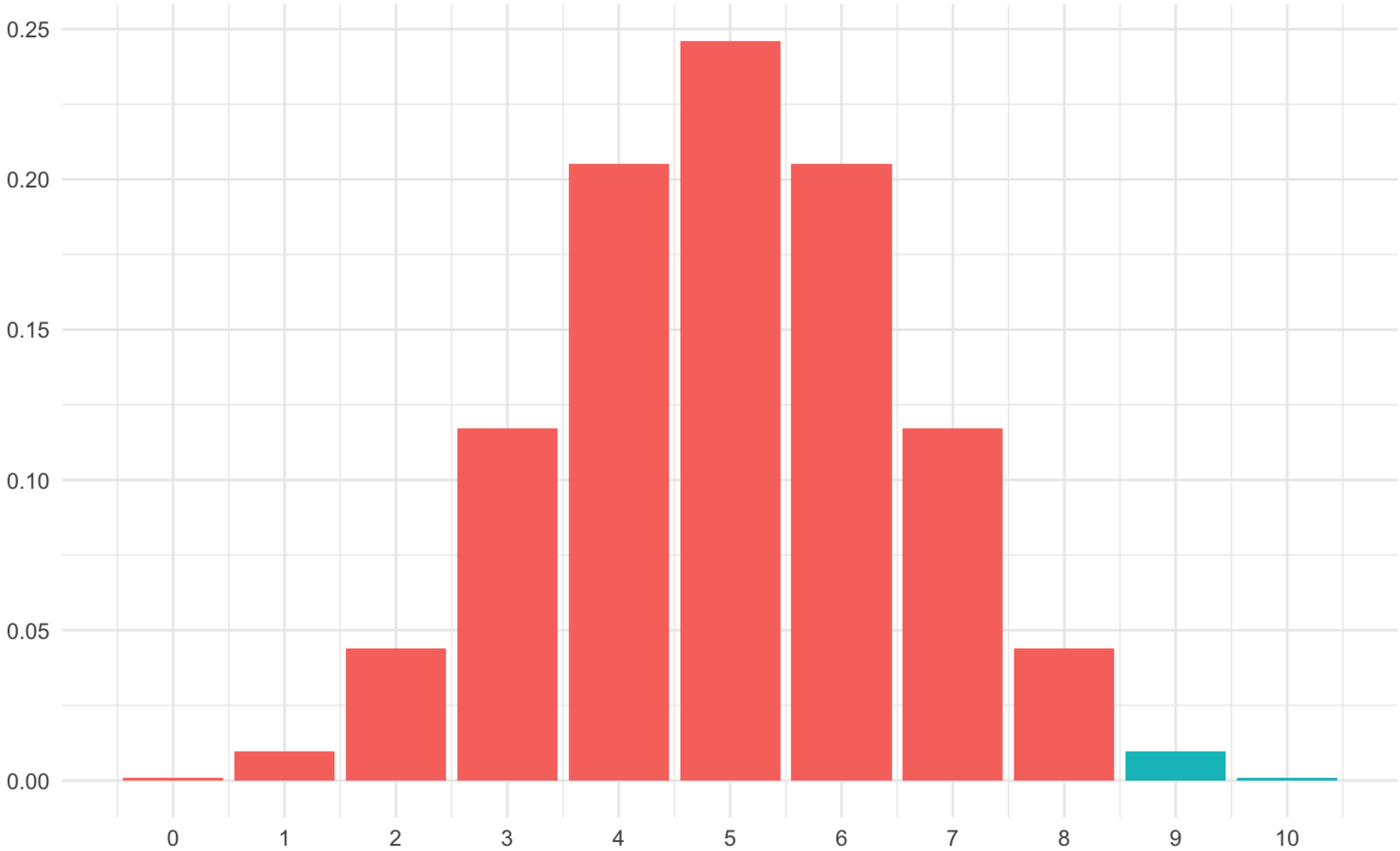
- Hypothèse nulle $\mathcal{H}_0$, c'est l'hypothèse du *statu quo*
- Hypothèse alternative $\mathcal{H}_1$, c'est la situation intéressante ! (signal)
- α : risque de première espèce, rejeter $\mathcal{H}_0$ lorsqu'elle est vraie ("erreur de détection")
- β : risque de deuxième espèce, ne pas rejeter $\mathcal{H}_0$ alors que $\mathcal{H}_1$ est vraie ("rater un signal")
- Puissance : $1 - \beta$

Décision / Verité	Non rejet de $\mathcal{H}_0$	Rejet $\mathcal{H}_0$
$\mathcal{H}_0$	Confiance	Erreur de 1ère esp.
$\mathcal{H}_1$	Erreur de 2ème esp.	Puissance

Expérience de Chastaing (1958)

Keewee ou Koowoo ?

Les résultats



Rappel 1 : variable aléatoire du χ^2

Une variable suivant une loi du khi-deux à k degrés de liberté ($\chi^2(k)$) est la somme des carrés de k variable normales indépendantes :

$$\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi^2(k)$$

Remarques :

- parfois on note une telle variable X^2
- en pratique, ces “carrés” sont souvent des “variances”

Rappel 2 : variable aléatoire de Student

Une variable obtenue en divisant un variable normale par la racine carrée d'une variable du khi-deux (indépendante de la première) elle-même normalisée par son dégré de liberté d suit une loi de Student à d degrés de liberté :

$$\frac{Z}{\sqrt{\frac{1}{d}X}} \sim T(d)$$

En pratique :

$$\frac{\text{moyenne}}{\frac{1}{\sqrt{\text{taille}}}\ \text{écart-type}} \sim T(\text{taille}-1)$$

Rappel 3 : variable aléatoire de Fisher

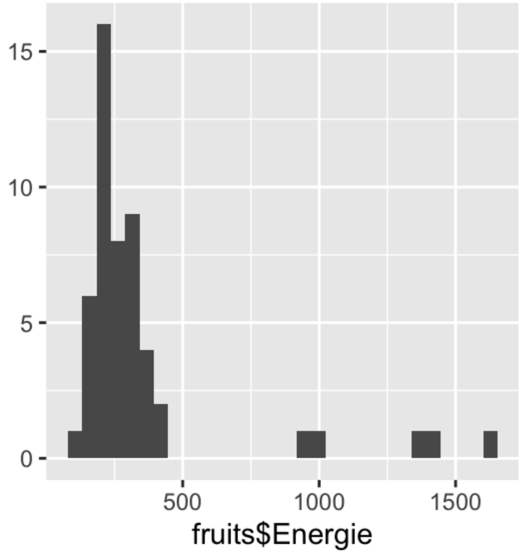
Le ratio de deux variables indépendantes du khi-deux à d_1 et d_2 degrés de liberté est une variable aléatoire de Fisher à d_1 et d_2 degrés de liberté :

$$\frac{X_1^2}{X_2^2} \sim \mathcal{F}(d_1, d_2)$$

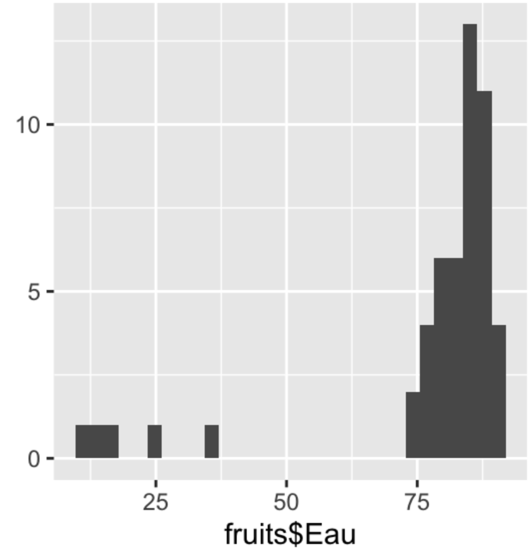
En pratique : des ratios de variance !

Intermède : Création d'un exemple

```
qplot(fruits$Energie)
```




```
qplot(fruits$Eau)
```




```
energiequal <- cut(fruits$Energie,
                   c(0, 250, 2000))
```

```
eauqual <- cut(fruits$Eau,
               c(0, 85, 100))
```

Table de contingence

Une table de contingence, ou table de comptage, est un tableau croisé (de comptage) entre deux variables qualitatives ou plus.

```
(tab <- table(energiequal, eauqual))
#>                eauqual
#> energiequal    (0,85] (85,100]
#>   (0,250]           3       23
#>   (250,2e+03]      25        0
```

On peut aussi calculer les proportions

```
prop.table(tab)
#>                eauqual
#> energiequal         (0,85]   (85,100]
#>   (0,250]       0.05882353 0.45098039
#>   (250,2e+03]  0.49019608 0.00000000
```

Profils lignes et profils colonnes

Proportions conditionnellement aux lignes :

```
prop.table(tab, margin = 1)
#>                eauqual
#> energiequal      (0,85]   (85,100]
#>    (0,250]      0.1153846 0.8846154
#>    (250,2e+03] 1.0000000 0.0000000
```

Proportions conditionnellement aux colonnes :

```
prop.table(tab, margin = 2)
#>                eauqual
#> energiequal      (0,85]   (85,100]
#>    (0,250]      0.1071429 1.0000000
#>    (250,2e+03] 0.8928571 0.0000000
```

Comparer des proportions

Avec la fonction `prop.test` :

```
prop.test(table(energiequal, eauqual))
#>
#>  2-sample test for equality of proportions with continuity
#>  correction
#>
#> data:  table(energiequal, eauqual)
#> X-squared = 36.788, df = 1, p-value = 1.317e-09
#> alternative hypothesis: two.sided
#> 95 percent confidence interval:
#>  -1.0000000 -0.7225806
#> sample estimates:
#>    prop 1    prop 2
#> 0.1153846 1.0000000
```

Attention, le test des proportions a besoin de données de comptage, pour lui :

$$\frac{2}{4} \neq \frac{50}{100}$$

La fonction `prop.test`

- Accepte des tables de contingences,
- Ou bien deux vecteurs : `x` pour les “succès”, `n` pour le nombre total,
- Eventuellement un vecteur de proportions de référence `p`

Un des exemples de la fonction (cf. `?prop.test`) :

```
smokers  <- c( 83, 90, 129, 70 )
patients <- c( 86, 93, 136, 82 )
prop.test(smokers, patients)
#>
#>  4-sample test for equality of proportions without continuity
#>  correction
#>
#> data:  smokers out of patients
#> X-squared = 12.6, df = 3, p-value = 0.005585
#> alternative hypothesis: two.sided
#> sample estimates:
#>    prop 1    prop 2    prop 3    prop 4
#> 0.9651163 0.9677419 0.9485294 0.8536585
```

Test du “khi-deux”

Avec la fonction `chisq.test` :

```
chisq.test(energiequal, eauqual)
#> 
#>  Pearson's Chi-squared test with Yates' continuity correction
#> 
#> data:  energiequal and eauqual
#> X-squared = 36.788, df = 1, p-value = 1.317e-09
```

La fonction `chisq.test`

- Accepte deux variables qualitatives,
- Ou une table de contingence

Un des exemples de la fonction (cf. `?chisq.test`) :

```
M <- as.table(rbind(c(762, 327, 468), c(484, 239, 477)))
dimnames(M) <- list(gender = c("F", "M"),
                    party = c("Democrat","Independent", "Republican"))
(Xsq <- chisq.test(M))  # Prints test summary
#>
#>  Pearson's Chi-squared test
#>
#> data:  M
#> X-squared = 30.07, df = 2, p-value = 2.954e-07
Xsq$expected   # expected counts under the null
#>       party
#> gender Democrat Independent Republican
#>      F 703.6714    319.6453   533.6834
#>      M 542.3286    246.3547   411.3166
```

La statistique du test du χ^2

Elle compare les fréquences observées aux fréquences attendues. Les fréquences attendues sont calculées à partir des fréquences marginales sous hypothèse d'indépendance.

$$X^2 = \sum \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.}n_{.j}}{n}},$$

avec n_{ij} l'effectif observé, $n_{i.}$ l'effectif marginal ligne, $n_{.j}$ l'effectif marginal colonne et n l'effectif total.

Rappel : quand A et B son indépendants, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Test exact de Fisher

Avec la fonction `fisher.test` :

```
fisher.test(energiequal, eauqual)
#> 
#>  Fisher's Exact Test for Count Data
#> 
#> data:  energiequal and eauqual
#> p-value = 1.474e-11
#> alternative hypothesis: true odds ratio is not equal to 1
#> 95 percent confidence interval:
#>  0.00000000 0.03850145
#> sample estimates:
#> odds ratio 
#>          0
```

La fonction `fisher.test`

- Accepte deux variables qualitatives,
- Ou une table de contingence

Un des exemples de la fonction (cf. `?fisher.test`) :

```
Convictions <- matrix(
  c(2, 10, 15, 3),
  nrow = 2,
  dimnames = list(
    c("Dizygotic", "Monozygotic"),
    c("Convicted", "Not convicted")))
fisher.test(Convictions, alternative = "less")
#>
#>  Fisher's Exact Test for Count Data
#>
#> data:  Convictions
#> p-value = 0.0004652
#> alternative hypothesis: true odds ratio is less than 1
#> 95 percent confidence interval:
#>  0.0000000 0.2849601
#> sample estimates:
#> odds ratio
#> 0.04693661
```

Comparer des moyennes

Avec la fonction `t.test` :

```
t.test(fruits$VitamineC ~ eauqual)
#> 
#>  Welch Two Sample t-test
#> 
#> data:  fruits$VitamineC by eauqual
#> t = -1.6272, df = 37.768, p-value = 0.112
#> alternative hypothesis: true difference in means between group (0,85] and group (85,100
#> 95 percent confidence interval:
#>  -21.202176   2.308077
#> sample estimates:
#>   mean in group (0,85] mean in group (85,100]
#>               10.82643               20.27348
```

Les formules

Les formules permettent à l'utilisateur de décrire un modèle :

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_2 * X_3 + X_3 * X_4$$

deviendra

```
y ~ x1 + x2 * x3 + x3:x4
```

Repérez le tilde sur votre clavier, il est très important en R !

Exemple :

```
y ~ x + age + sex + SCL:disease
```

La fonction `t.test`

- Accepte une formule,
- Ou bien deux vecteurs contenant respectivement les deux groupes de valeurs à comparer,
- L'argument `paired = TRUE` pour des données appariées,
- Ou bien un seul vecteur (pour un test sur une moyenne),

Un des exemples de la fonction (cf. `?t.test`) :

```
t.test(extra ~ group, data = sleep)
#> 
#>  Welch Two Sample t-test
#> 
#> data:  extra by group
#> t = -1.8608, df = 17.776, p-value = 0.07939
#> alternative hypothesis: true difference in means between group 1 and group 2 is not equal to 0
#> 95 percent confidence interval:
#>  -3.3654832  0.2054832
#> sample estimates:
#> mean in group 1 mean in group 2 
#>            0.75            2.33
```

Equivalent non-paramétrique

L'équivalent non-paramétrique du test de Student est le test de Wilcoxon-Mann-Whitney :

```
wilcox.test(fruits$VitamineC ~ eauqual)
#> Warning in wilcox.test.default(x = DATA[[1L]], y = DATA[[2L]], ...):
#> impossible de calculer la p-value exacte avec des ex-aequos
#>
#>  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
#>
#> data:  fruits$VitamineC by eauqual
#> W = 262.5, p-value = 0.2637
#> alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Remarque sur ces fonctions

L'objet retourné est une liste qui contient (en général) les deux éléments les plus intéressants : `statistic` et `p.value`.

Exemple de récupération de la P-value :

```
res.ttest <- t.test(fruits$VitamineC ~ eauqual)
pval <- res.ttest$p.value
```

ANOVA

Faire une ANOVA en R n'est pas une mince affaire !

```
summary(aov(VitamineC ~ groupe, data = fruits))
#>             Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
#> groupe       3   4254  1417.9   4.092 0.0116 *
#> Residuals   47  16285   346.5
#> ---
#> Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Et récupérer la P-value est ridiculement difficile :

```
res <- summary(aov(VitamineC ~ groupe, data = fruits))
res[[1]]$`Pr(>F)`[1]
#> [1] 0.01161733
```

ANOVA non paramétrique

Et la syntaxe est différente pour l'équivalent non-paramétrique : le test de Kruskal-Wallis :

```
kruskal.test(fruits$VitamineC, fruits$groupe)
#>
#>  Kruskal-Wallis rank sum test
#>
#> data:  fruits$VitamineC and fruits$groupe
#> Kruskal-Wallis chi-squared = 17.902, df = 3, p-value = 0.0004609
```

Récupérer la p-valeur s'effectue de la même façon que pour un test de Student.

Corrélation

Avec la fonction `cor.test`. Exemple :

```
cor.test(fruits$Eau, fruits$Energie)
#> 
#>  Pearson's product-moment correlation
#> 
#> data:  fruits$Eau and fruits$Energie
#> t = -49.719, df = 49, p-value < 2.2e-16
#> alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
#> 95 percent confidence interval:
#>  -0.9944420 -0.9828672
#> sample estimates:
#>        cor 
#> -0.9902339
```

La fonction `cor.test`

- Accepte deux vecteurs `x` et `y` de même longueur,
- Permet de tester les trois types de corrélation (Pearson, Sparman et Kendall)

Un des exemples de la fonction (cf. `?cor.test`) :

```
x <- c(44.4, 45.9, 41.9, 53.3, 44.7, 44.1, 50.7, 45.2, 60.1)
y <- c( 2.6,  3.1,  2.5,  5.0,  3.6,  4.0,  5.2,  2.8,  3.8)

cor.test(x, y, method = "kendall", alternative = "greater")
#>
#>  Kendall's rank correlation tau
#>
#> data:  x and y
#> T = 26, p-value = 0.05972
#> alternative hypothesis: true tau is greater than 0
#> sample estimates:
#>       tau
#> 0.4444444
```

Modèles linéaires

Avec la fonction `lm`. Exemple :

```
res.lm <- lm(Energie ~Proteines + Sucres + Fibres + Eau,
             data = fruits)
summary(res.lm)
#> 
#> Call:
#> lm(formula = Energie ~ Proteines + Sucres + Fibres + Eau, data = fruits)
#> 
#> Residuals:
#>      Min       1Q   Median       3Q      Max 
#> -112.599   -8.071   -2.870    2.291  192.788 
#> 
#> Coefficients:
#>             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
#> (Intercept) 1377.713    142.894   9.642 1.28e-12 ***
#> Proteines     12.312     13.544   0.909   0.3680    
#> Sucres         4.041      1.583   2.553   0.0141 *  
#> Fibres       -10.895      4.874  -2.235   0.0303 *  
#> Eau          -13.715      1.391  -9.857 6.42e-13 ***
#> ---
#> Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
#> 
#> Residual standard error: 38.78 on 46 degrees of freedom
#> Multiple R-squared:  0.9869, Adjusted R-squared:  0.9858 
#> F-statistic: 868.8 on 4 and 46 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Pour aller plus loin

Analyse en composantes principales

Les packages

- `FactomineR`
- `factoextra`

Les références :

- le site de François Husson https://husson.github.io/,
- la page sur l'ACP https://husson.github.io/MOOC_AnaDo/ACP.html
- Une référence en anglais par Hervé Abdi

Les modèles linéaires à effets mixte

Les packages

- `lme4`
- `lmerTest`
- `multcomp`

Une référence (parmi d'autres) : [Mixed Models with R]