1 Expérience aléatoire, univers, probabilité d'une issue

Une expérience aléatoire est une expérience qui a plusieurs résultats possibles, appelés les issues. On ne peut pas savoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.

L'univers d'une expérience aléatoire, souvent noté Ω, est l'ensemble des issues.

Exemple 1. On jette un dé à 6 faces numérotées. Il y a 6 résultats différents possibles qu'on peut noter 1, 2, 3, 4, 5, et 6. Autrement dit :

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Exemple 2. On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Il y a 32 résultats différents possibles qu'on peut noter $7\spadesuit$, $8\spadesuit$, ..., $A\clubsuit$. Autrement dit :

$$\begin{aligned}\Omega =\{&7\spadesuit; 8\spadesuit; 9\spadesuit; 10\spadesuit; V\spadesuit; D\spadesuit; R\spadesuit; A\spadesuit\\ &7\heartsuit; 8\heartsuit; 9\heartsuit; 10\heartsuit; V\heartsuit; D\heartsuit; R\heartsuit; A\heartsuit\\ &7\diamondsuit; 8\diamondsuit; 9\diamondsuit; 10\diamondsuit; V\diamondsuit; D\diamondsuit; R\diamondsuit; A\diamondsuit\\ &7\clubsuit; 8\clubsuit; 9\clubsuit; 10\clubsuit; V\clubsuit; D\clubsuit; R\clubsuit; A\clubsuit\}\end{aligned}$$

Exemple 3. Dans une urne, il y a 6 boule blanches et 4 boules noires. On en tire une au hasard. Il y a 10 résultats différents possibles que l'on peut noter b_1, b_2, b_3, ..., b_6, n_1, n_2, n_3, n_4. Autrement dit :

$$\Omega = \{b_1; b_2; b_3; b_4; b_5; b_6; b_7; n_1; n_2; n_3\}.$$

On peut aussi considérer qu'il y a seulement deux résultats différents possibles que l'on peut noter b et n. Autrement dit :

$$\Omega' = \{b; n\}.$$

Définition 1

Soit $\Omega = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire. On dit que les nombres p_1, p_2, ..., p_n sont les probabilités des issues x_1, x_2, ..., x_n lorsqu'ils correspondent aux fréquences d'apparitions de ces issues lorsque l'expérience aléatoire est répétée un grand nombre de fois. Ce sont des nombres compris entre 0 et 1 et qui vérifient :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Définir un loi de probabilité sur Ω consiste à donner des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ convenables.

Exemple 4. Pour l'exemple du dé, on a la loi de probabilité :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Lorsque que comme dans cet exemple, les probabilités sont toutes égales à un même nombre, on dit que la loi de probabilité est équirépartie. Dans ce cas, comme la somme des probabilités fait 1 on aura toujours :

$$p_i = p = \frac{1}{n}.$$

Exemple 5. Pour le tirage dans l'urne, on a la loi de probabilité :

x_i	b	n
p_i	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$

La loi de probabilité n'est pas équirépartie, mais on a toujours la somme des probabilités qui fait 1.

2 Événements, probabilité d'un événement

Définition 2

Soit $\Omega = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire, un événement est une partie de Ω (c'est à dire un sous ensemble de Ω). Il peut être décrit par une phrase (en compréhension) ou par l'ensemble de des issues qui le constituent (en extension).

Ainsi :
- dans l'exemple du dé, on peut considérer l'événement M : « obtenir un multiple de 3 ». On a : $M = \{3; 6\}$.
- dans l'exemple avec les cartes, on peut considérer l'événement N : « tirer une carte noire », l'événement V : « Tirer un valet » ;

Définition 3

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des issues qui le constituent. On la note $P(A)$, c'est un nombre compris entre 0 et 1 et qui correspond à la fréquence d'apparition de l'événement A.

Ainsi :
- dans l'exemple du dé, on a :

$$P(M) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

De manière générale, quand la loi est équirépartie, on a toujours :

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}};$$

- dans l'exemple avec les cartes, on a :

$$P(N) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$
$$P(V) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

3 Opérations sur les événements

Définition 4

L'événement $A \cup B$ (lire A union B) est constitué des issues appartenant à l'événement A ou à l'événement B (ou aux deux à la fois).

Par exemple l'événement $N \cup V$: « Obtenir une carte noire ou obtenir un valet » est constitué de 18 issues.

Définition 5

L'événement $A \cap B$ (lire A inter B) est constitué des issues appartenant à l'événement A et à l'événement B.

Par exemple l'événement $N \cap V$: « Obtenir une carte noire et obtenir un valet » est constitué de 2 issues.

Définition 6 (*Événement contraire*)

L'événement $\overline{A}$ (lire A barre) est constitué des issues qui n'appartiennent pas à l'événement A.

Par exemple l'événement $\overline{M}$: « Ne pas obtenir un multiple de 3 » est constitué de 4 issues.