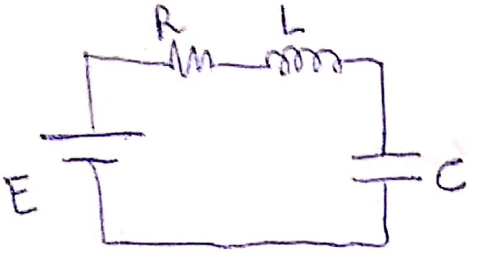
Aula 8

Exemplo 7: Um circuito RLC série é submetido ao chaveamento de um sinal de entrada contínuo V. Considerando as condições iniciais nulas, determinar a equação da corrente.

$$\begin{cases} R = 10\,\Omega \\ E = 120\,V \\ L = 20\,mH \\ C = 10\,mF \end{cases}$$



$$v_R + v_L + v_C = E$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt = E$$

$$R\frac{di}{dt} + L\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) = E$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = \frac{dE}{dt}\cdot\frac{1}{L}$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC}i(t) = 0$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 500\frac{di(t)}{dt} + 5000\,i(t) = 0 \Rightarrow D^2 + 500D + 5000 = 0$$

$$r_1 = -10{,}21$$

$$r_2 = -489{,}79$$

Solução homogênea: $i(t) = K_1 e^{-10{,}21t} + K_2 e^{-489{,}79t}$

para $t=0$, $i=0 \Rightarrow i(0) = K_1 + K_2 = 0 \Rightarrow K_1 = -K_2$

$$\frac{di(t)}{dt} = -10{,}21 K_1 e^{-10{,}21t} - 489{,}79 K_2 e^{-489{,}79t}$$

$v_R + v_L + v_C = E$

$L\frac{di}{dt} = E - v_R - v_C \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{E - v_R - v_C}{L}$

$\frac{di}{dt}(0) = \frac{(120 - 0 - 0)}{20 \cdot 10^{-3}}$ $\qquad v_R(0) = 0$

$\qquad v_C(0) = 0$

$\frac{di}{dt}(0) = 6000$

$\hookrightarrow \; 6000 = -10{,}21\,K_1 - 489{,}79\,K_2$

$K_1 = -K_2 \Rightarrow \boxed{K_1 = 12{,}51} \Rightarrow \boxed{K_2 = -12{,}51}$

$$\boxed{i(t) = 12{,}51\,e^{-10{,}21t} - 12{,}51\,e^{-489{,}79t}, \quad p/\ t \geq 0}$$

$\hookrightarrow$ Sobreamortecido.

\# Para $\Delta = 0$, $v(t) = 200V$, $R = 4\Omega$, $L = 20mH$ e $C = 5mF$ $\rightarrow$ Sistema criticamente amortecido.

$v_R + v_L + v_C = 200 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt} + \frac{4}{20 \cdot 10^{-3}}\frac{di}{dt} + \frac{1}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 0$

$\frac{d^2i}{dt^2} + 200\frac{di}{dt} + 10000i = 0 \Rightarrow D^2 + 200D + 10000 = 0$

$\Delta = 200^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10000 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = -100$

Scanned with CamScanner

$$i(t) = k_1 e^{-100t} + k_2 t e^{-100t}$$

$$i(t) = (k_1 + t k_2) e^{-100t}$$

para $i(0) = 0 \Rightarrow 0 = k_1 + 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$$i(t) = k_2 t e^{-100t}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -100 k_2 t e^{-100t} + k_2 e^{-100t}$$

$$v_R + v_L + v_C = E \Rightarrow L\frac{di}{dt} = E - v_R - v_C \Rightarrow \frac{di(t)}{dt} = \frac{E - v_R - v_C}{L}$$

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{200 - v_R(0) - v_C(0)}{L} = 10000$$

$$10000 = -100 \cdot k_2 \cdot 0 e^{-100 \cdot 0} + k_2 \cdot e^{-100 \cdot 0}$$

$$k_2 = 10000 \Rightarrow \boxed{i(t) = 10000 t e^{-100t}}$$

p/ $t > 0$

Sistema criticamente amortecido

* Considerando agora $V = 120\,V$, $R = 2\,\Omega$,

$L = 20\,mH$, $C = 5\,mF$ ⇒ Sistema oscilatório

($\Delta < 0$)

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{2}{20mH}\frac{di}{dt} + \frac{1}{20mH \cdot 5mF} = 0$$

$$\frac{d^2 i}{dt} + 100\frac{di}{dt} + 10000\, i = 0$$

$$D^2 + 100D + 10000 = 0 \Rightarrow \Delta = -30000$$

$$\Delta < 0$$

$r_1 = -50 + j86{,}6$

$r_2 = -50 - j86{,}6$

Solução homogênea:

$$i_h(t) = e^{-50t} \cdot \cos 86{,}6t \cdot C_1 + e^{-50t} \cdot \text{sen}\, 86{,}6t \cdot C_2$$

$$i_h(t) = e^{-50t} \cdot \left(C_1 \cos 86{,}6t + C_2 \cdot \text{sen}\, 86{,}6t\right)$$

para $t = 0 \Rightarrow i(0) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 + 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\cancelto{0}{v_R(0)} + v_L(0) + \cancelto{0}{v_C(0)} = 120\,V$$

$$\frac{L\,di(0)}{dt} = 120 \Rightarrow \frac{di(0)}{dt} = 6000$$

$$\frac{d\, i_h(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{-50t} \cdot C_2 \cdot \text{sen}\, 86{,}6t\right)$$

$$\frac{d\, i_h(t)}{dt} = -50\, e^{-50t} \cdot C_2 \cdot \text{sen}\, 86{,}6t + C_2\, e^{-50t} \cdot \cos 86{,}6t \cdot 86{,}6$$

$$\frac{d\, i_h(0)}{dt} = 86{,}6 \cdot C_2 = 6000 \Rightarrow C_2 = 69{,}28$$

Temos então:

$$\boxed{i(t) = 69{,}28 \cdot e^{-50t} \cdot \text{sen}\, 86{,}6t \quad p/\ t \geq 0}$$

↳ Sistema oscilatório