

# *Ant System (ou ACO)* *Aplicado ao Problema de* *Cobertura de Conjunto*

Prof. Ademir A. Constantino  
Departamento de Informática  
Universidade Estadual de Maringá  
[www.din.uem.br/~ademir](http://www.din.uem.br/~ademir)

# Modelo Set Covering

O problema de cobertura de conjunto (*Set Covering*) é um problema de programação linear inteira.

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Define-se ainda:

Matriz  $m \times n$   $A = [a_{ij}]$ ;

$M = \{1, 2, \dots, m\}$  o conjunto das linhas;

$N = \{1, 2, \dots, n\}$  o conjunto das colunas

$$\text{Sujeito a } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1 \quad \text{para } i=1, 2, \dots, m,$$

onde

$c_j$  =custo da coluna  $j$ ;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se linha } i \text{ é coberta pela coluna } j; \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se a coluna } j \text{ está na solução;} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad .$$

# Problema de Cobertura de Conjunto

Exemplo de *Set Covering* na forma matricial :

Minimizar (  $c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7$  )

Sujeito à

1	0	0	1	1	1	1	$x_1$	$\geq$	1
0	1	0	0	1	0	1	$x_2$		1
1	0	1	0	0	1	0	$x_3$		1
0	0	1	1	0	0	1	$x_4$		1
1	0	0	1	1	0	0	$x_5$		1
0	1	0	0	0	1	0	$x_6$		1
0	0	1	1	1	0	1	$x_7$		1

Uma solução viável

# Esquema Geral do Algoritmo

```
Procedure Ant_System_SCP;  
Begin  
  While >Critério de Parada não satisfeito > begin  
    For  $\varphi:=1$  to nForm do begin  
       $S_{\varphi}:=$  GerarSolução;  
      EliminarRedundância( $S_{\varphi}$ );  
      If  $Z(S_{\varphi}) < Z(\text{Best\_Solution})$  then  
        Best_Solution:=  $S_{\varphi}$ ;  
      <Atualizar Feromônio>;  
    end;  
  End;
```

# Probabilidade de Transição

$$p_j^\varphi(t) = \begin{cases} \frac{[\tau_j(t)]^\alpha \cdot [\eta_j^\varphi]^\beta}{\sum_{k \in J^*} [\tau_k(t)]^\alpha \cdot [\eta_k^\varphi]^\beta} & \text{se } j \in J^* \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Onde:

- ◆  $J^*$  é o conjunto de colunas que ainda não fazem parte da solução da forma
- ◆  $J^*$  define a taxa de feromônio na coluna  $j$  na iteração  $t$ ;
- ◆  $\tau_j(t)$  define o valor de visibilidade (custo) da coluna para a formiga  $\varphi$ ;
- ◆  $\alpha$  é um parâmetro que define a importância do termo  $\tau_j(t)$ ;
- ◆  $\beta$  é um parâmetro que define a importância do termo  $\eta_j^\varphi(t)$

# Visibilidade/proximidade

(10)

Onde:

- ♦ é o número de linhas que a coluna  $j$  cobre das linhas ainda não cobertas pela formiga  $\varphi$  na iteração  $t$ ;
- ♦ é o custo da coluna  $j$ ;

# Construção da Solução

Seja:

- ◆  $I \leftarrow$  o conjunto de linhas;
- ◆  $J \leftarrow$  o conjunto de colunas;
- ◆  $C_i \leftarrow$  o conjunto de colunas que cobrem a linha  $i$ , ;
- ◆  $L_j \leftarrow$  o conjunto de linhas cobertas pelo coluna  $j$ , ;

Construir solução

```
Inicialize S ; // S é o conjunto de colunas na solução
Inicialize U ; // U é o conjunto de linhas não cobertas
Inicialize n_i ; // n_i é o número de colunas em S que cobrem a linha i,

While ( U não é vazio ) do
    Selecione aleatoriamente uma linha i ∈ U ;
    Selecione uma coluna j ∈ C_i que maximize c_j ;
    Faça S = S ∪ {j} ;
    Faça U = U - L_j ;
    Faça n_i = n_i + 1 ;
Retorne S.
```

# Construção da Solução

Após a construção de um solução as colunas redundantes devem ser eliminadas.

EliminarRedundancia(S)

```
T ← S;  
While (      ) do  
    Selecione aleatoriamente uma coluna  $j$ ,      ;  
    Faça      ;  
    if (      ) then  
        Faça      ;  
        Faça      ;  
Retorne S.
```



# Atualização do Feromônio

(11)

Onde:

- ◆  $\tau_j(t)$  é a intensidade de feromônio no elemento  $j$  na iteração  $t$  (anterior);
- ◆  $\rho$  determina quanto do feromônio deve evaporar;
- ◆  $\Delta\tau_j(t)$  é a quantidade de feromônio que deve ser depositado no nó  $j$ .

A taxa de feromônio que deve ser depositada no nó  $j$  foi definida como:

(12)

Onde:

- ◆  $\phi_j$  é a formiga que cobre a coluna  $j$  com o melhor custo. Isto significa que a coluna  $j$  terá o seu feromônio atualizado somente por uma única formiga, aquela que obteve a melhor solução contendo a coluna  $j$ .
- ◆  $\phi_j(t)$  é a quantidade de substância colocada na coluna  $j$  pela  $\phi$ -ésima formiga na iteração  $t$ .

# Atualização do Feromônio

A quantidade de substância depositada na coluna  $j$  pela formiga  $\varphi$  é:

(13)

Onde:

- ◆  $Q$  é o custo da melhor solução alcançada até o momento;
- ◆  $C_{\varphi}$  é o custo da solução encontrada pela formiga  $\varphi$ ;
- ◆  $y$  é uma constante utilizada para aumentar a importância de  $C_{\varphi}$  na quantidade de feromônio a ser depositada nas colunas da solução.

Obs: Na primeira iteração  $Q$  recebe o custo da melhor solução, a partir daí,  $Q$  é atualizado sempre que uma solução melhor é gerada. Na iteração  $t$  o parâmetro  $Q$  assume o valor da melhor solução entre todas as geradas nas  $t-1$  iterações anteriores.

# Parâmetros

Parâmetros do sistema:

- ♦ define a importância do feromônio;
- ♦ define a importância da visibilidade;
- ♦ Taxa de evaporação;
- ♦ Número máximo de iterações do sistema sem que haja melhoras nas soluções;
- ♦ Número de formigas no sistema.

Os valores para os parâmetros que mais contribuíram para a geração de boas soluções foram:

- ♦ 0.2;
- ♦ 0.8;
- ♦ 0.7;
- ♦ 15;
- ♦ Número de colunas do problema.

# Resultados

Dados Obtidos da OR-Library

Arquivos de Dados	Número de Colunas	Número de Linhas	Melhor Solução conhecida	Ant System		Algoritmo Genético	
				Solução Alcançada	Tempo de processamento	Solução Alcançada	Tempo de processamento
Scp41	1.000	200	429 *	429	01:15	432	00:40
Scp410	1.000	200	514 *	514	01:53	517	01:05
Scp52	2.000	200	302 *	302	08:10	313	00:40
Scp53	2.000	200	226 *	226	07:32	226	00:45
Scp54	2.000	200	242 *	242	05:46	242	00:50
Scp55	2.000	200	211 *	211	04:22	211	01:50
Scp58	2.000	200	288 *	288	02:36	289	02:10
Scpd1	4.000	400	60	60	25:53	60	05:00
Scpnrh5	10.000	1.000	55	55	01:30:00	55	08:00

\* solução ótima

# Comparação do ACO aplicado ao SCP e TSP

## TSP

A ordem em que os itens (vértices) aparecem na solução **é importante**.

O próximo item a ser selecionado depende basicamente do **último item** adicionado à solução.

## SCP

A ordem que os itens aparecem na solução **não é importante**.

O próximo item a ser selecionado depende basicamente de **todos os itens** presentes na solução.