

2.5.1

$$L_y = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -8 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 28 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_1 - R_3 \\ = nR_3}]{\substack{R_1 + R_2 \\ = nR_2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & 1 & -24 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_3}]{3R_2 - R_3}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{green box around } \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}} \vec{y}$$

$$* Ux = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{-R_3}]{-R_2} \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_2}]{R_2 - R_3}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_1}]{R_1 + 7R_2}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 & 30 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_1}]{R_1 + 3R_3} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_1}]{R_1/4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

The reduced row echelon form of $[A \ b]$

$$\begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 4 & 2 & 1 & -8 \\ 8 & -5 & -4 & 1 & 28 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_1 + R_3 \\ = nR_3}]{\substack{R_1 + R_2 \\ = nR_2}} \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -6 \\ 0 & 9 & 2 & 1 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_3}]{3R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{= nR_2}]{R_2 - R_3} \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_1}]{R_1 + 7R_2 + 3R_3}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 12 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & -6 \end{bmatrix}$$

$$2 + 2 \cdot 8 - 18 = 12$$

2.5.3

$$Ly = b \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 16 \\ -2 & 1 & 0 & | & -17 \\ 2 & -1 & 1 & | & 17 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} = nR_3 \\ -R_2 \end{smallmatrix}]{R_2 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 16 \\ 2 & -1 & 0 & | & 17 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} = nR_2 \\ -R_2 \end{smallmatrix}]{2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 16 \\ 0 & 1 & 0 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{y} = \begin{bmatrix} 16 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix}$$

\vec{y}

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -6 & 2 & | & 16 \\ 0 & -3 & 5 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} = nR_2 \\ R_2 - 5R_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} R_1 - 2R_2 \\ = nR_1 \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & | & -14 \\ 0 & -3 & 0 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 / -3}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & | & -14 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} = nR_1 \end{smallmatrix}]{R_1 + 8R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -7 \\ 0 & 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

\vec{x}

2.5.7

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_2 \\ \frac{2}{5}R_1 + R_2}]{\substack{= nR_2 \\ \frac{2}{5}R_1 + R_2}} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \rightarrow U = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -\frac{9}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{9}{5} \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Check: } LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -\frac{9}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = A \quad \checkmark$$

2.5.8

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_2 \\ -2R_1 + R_2}]{\substack{= nR_2 \\ -2R_1 + R_2}} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Verify: } LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 13 \end{bmatrix} = A$$

2.5.10

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 3 & -8 \\ 6 & 12 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_2 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + 3R_1 \\ = nR_3}]{\substack{= nR_2 \\ R_2 + 3R_1 \\ R_3 + 3R_1 \\ = nR_3}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 12 & 24 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{= nR_3 \\ R_3 - 4R_2}]{\substack{= nR_3 \\ R_3 - 4R_2}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (U)$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2.5.6

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & -24 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ -4 & 4 & -1 & 1 & 0 & -21 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2 + 2R_1 = nR_2 \\ 2R_1 - R_3 = nR_3 \\ 4R_1 + R_4 = nR_4 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 4 & -1 & 1 & 0 & 47 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} 2R_2 - R_3 = nR_3 \\ 4R_2 - R_4 = nR_4 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_3 - R_4 = nR_4 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

∴ y

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 2 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2/2 \\ R_3/-2 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 5R_4 = nR_2 \\ R_1 - 2R_2 = nR_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} -2R_3 = nR_1 \end{array}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

∴ x

2.5.17

$$L^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{4R_1 + R_2 = nR_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 = nR_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -4 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xleftarrow{L^{-1}}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{U^{-1}} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 + 2R_3 \\ = nR_2}]{\substack{R_1 - 3R_2 \\ = nR_1}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -15 & | & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{R_1 - 5R_3 \\ = nR_1}]{=} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 1 & -3 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & | & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{3} & -1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \xleftarrow{U^{-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boxed{A^{-1}} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ -12 & 33 & -6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{4R_1 + R_2 \\ = nR_2}]{=} \begin{bmatrix} 3 & -9 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow[\substack{R_1 - 3R_2 \\ = nR_1}]{\substack{R_2 - R_3 \\ = nR_3}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -15 & | & -11 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & | & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 + 5R_3 \\ = nR_1}]{\substack{R_2 - 2R_3 \\ = nR_2}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & | & 9 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 0 & | & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & | & 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ & \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 3 & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \xleftarrow{A^{-1}} \end{aligned}$$