

4.2.1

$$Aw = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 3 & -1 & 13 \\ -7 & 5 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 - 8 - 7 = 0 \\ 15 - 2 - 13 = 0 \\ -35 + 10 + 25 = 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Yes,  $w$  in  $\text{Nul } A$

4.2.4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A : \vec{0}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1 + 2R_2 = nR_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Spanning set: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

4.2.5

$$[A | \vec{0}] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 0 \\ x_3 = -4x_4 \\ x_1 = 2x_2 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_2 + 3x_4 \\ x_2 \\ -4x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Spanning set: } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.9

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} : \begin{cases} -2p + 3q = -4s \\ 2p = -s + 3r \end{cases} \right\}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2.21

$$\left[ A : \vec{0} \right] = \begin{bmatrix} -4 & -16 \\ 1 & 4 \\ 3 & 12 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + 4R_2 = nR_2 \\ 3R_2 - R_3 = nR_3 \\ 2R_2 - R_4 = nR_4}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -4x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{Nul}(A); \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \in \text{Col}(A)$$