國立政治大學金融學系

選擇權評價與應用課堂報告

臺灣指數選擇權市場笑狀波幅現象實證

Volatility smile: Evidence from the Taiwan Options Market

指導教授：陳威光 博士

研究生：黃柏翔 撰

中華民國一一〇年十月

目錄

第一章　研究動機與目的

在衍生性商品相關的理論中，最知名的模型莫過於 Black Scholes 定價公式，此模型不僅在 1997 年獲得諾貝爾經濟學獎肯定，更為後續財務金融研究帶來深遠的影響，然而此模型需要許多假設，後續實證分析研究發現隱含波動度實際上並不是如模型中假設為常數，而是會隨著履約價格和到期時間不同而有所不同，隨著選擇權履約價格愈高，隱含波動度愈高的現象被稱為「笑狀波幅(volatility smile)」，本文希望可以於臺灣指數選擇權市場進行實證分析，驗證笑狀波幅現象，第二章將介紹適合用於定價臺灣指數選擇權的方法，以及估計隱含波動度的方法；第三章將進行實證分析；第四章將歸納本次研究的結論並提出後續可以探討的方向。

第二章　研究方法

第一節　　臺灣指數選擇權定價方法

在臺灣指數選擇權市場中，Black Scholes 定價公式中的標現貨的應該使用臺灣指數期貨較為合理，主要的原因是臺灣指數現貨並沒有辦法交易，期貨商無法使用臺灣指數期貨來避險，而是會利用臺灣指數期貨來避險，這使得臺灣指數選擇權的價格會與臺灣指數期貨連動更大，因此在臺灣指數選擇權的定價公式中，需使用期貨選擇權的定價公式，歐式買權理論價格定價公式如下:

$$C = Fe^{-r\mathrm{T}} \cdot N(d_1) - Ke^{-rT} \cdot N(d_2)$$

其中，

C :買權目前理論價格

F :臺灣指數期貨價格

r :無風險利率（以年為單位）

K :履約價格

T :到期日的長短（以年為單位）

σ :期貨價格報酬波動度

$$\mathrm{d_1} = \frac{\ln\frac{\mathrm{Fe^{-rT}}}{\mathrm{K}} + \left(\mathrm{r} + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$$

$$\mathrm{d_2} = \mathrm{d_1} - \sigma\sqrt{\mathrm{T}}$$

N(·) :標準常態分配的累積機率密度函數

透過買權賣權平價理論，我們可以藉由歐式買權的理論價格推得歐式賣權的理論價格，公式如下:

$$P = C + K \cdot e^{-rT} - F \cdot e^{-rT}$$

第二節　隱含波動度估計方法

為了驗證在臺灣指數選擇權是否出現笑狀波幅現象，我們將選擇權的市場價格代入 Black Scholes 定價公式中，可以反求出隱含波動度，此處我使用的估計方法是二分法，方法為設定波動度上下界並算出帶入這兩個波動度的選擇權理論價格，起初先猜測一個波動度數值，若市價界於起始猜測波動度算出的理論價格和波動度下界算出的理論價格之間，下一個波動度採用波動度下界和起始猜測波動度的平均；若市價界於起始猜測波動度算出的理論價格和波動度上界算出的理論價格之間，下一個波動度採用波動度上界和起始猜測波動度的平均，重複上述步驟，直到理論價格與實際價格的誤差在允許範圍之中，便可以得到隱含波動度的估計值。

第三章　實證結果

第一節　　資料介紹

本研究使用的資料為取自台灣期貨交易所之 2021 年 10 月 20 日到期週別 202110W4 的臺灣指數選擇權一般交易時段行情，以當日臺灣加權指數收盤價(16887)為基準選取上下各四檔不同履約價的商品作為本次研究的樣本資料:

履約價	最後最佳買價	最後最佳賣價	買權均價
16700	275	338	306.5
16750	242	251	246.5
16800	210	215	212.5
16850	179	185	182
16900	149	151	150
16950	124	126	125
17000	100	102	101
17050	79	80	79.5

表 1 ： 買權價格

履約價	最後最佳買價	最後最佳賣價	賣權均價
16700	66	68	67
16750	80	82	81
16800	95	96	95.5
16850	112	115	113.5
16900	131	133	132
16950	155	158	156.5
17000	181	186	183.5
17050	203	214	208.5

表 2 ： 賣權價格

由於需要使用 Black Scholes 定價公式求出隱含波動度，其餘變數選擇依序為: F = 16882，為 2021 年 10 月 20 日臺灣指數期貨一般交易時段收盤價；r = 0.23%，為中央銀行公布之 9 月份 30 天期商業本票成交全月平均值，此處假設為無風險利率； $T = \frac{7}{365}$ ，為年化的到期日。

第二節　隱含波動度計算與笑狀波幅現象探討

利用 Python 程式，將買權與賣權的平均價格依序代入計算隱含波動度的函數，參數設定為波動度初始猜測值 25%；波動度上界 50%；波動度下界 0%；最大疊代次數為 100 次；估計誤差為 0.1%；我們可以透過二分法估計出不同履約價格商品的隱含波動度，並透過表格與圖表檢驗是否有笑狀波幅現象產生。

履約價	16700	16750	16800	16850	16900	16950	17000	17050
買權隱含波動度	21.84%	18.57%	18.09%	17.76%	17.02%	16.76%	16.32%	15.86%
賣權隱含波動度	15.04%	14.74%	14.24%	13.83%	13.16%	12.78%	12.29%	11.05%

表 3 ： 各商品之隱含波動度

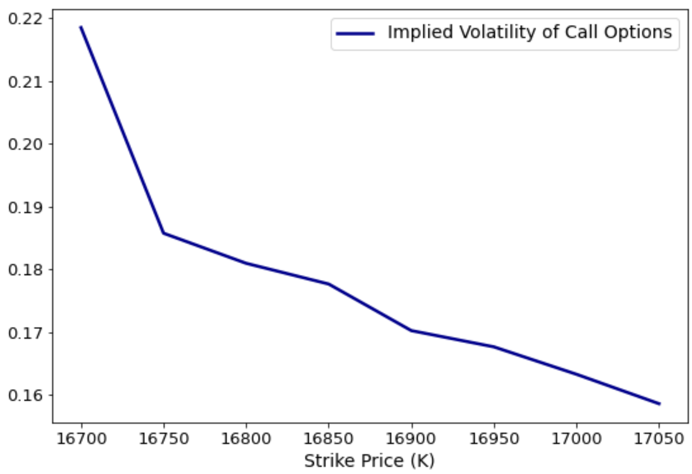

圖 1: 買權隱含波動度

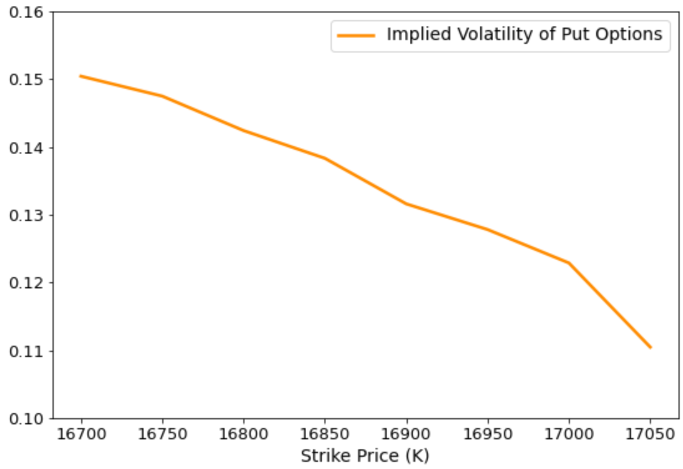

圖 2: 賣權隱含波動度

從圖表得知無論是買權還是賣權，均可以發現履約價格愈高隱含波動度愈低之現象，藉由臺灣指數選擇權市場的實證研究，我們可以發現笑狀波幅現象確實存在，下一章節將會提出可能的原因以及後續可以研究的方向。

第四章　結論

本文使用臺灣指數選擇權市場作為研究對象，實證結果發現隨著履約價格愈高，隱含波動度愈低的笑狀波幅現象確實存在，意即 Black Scholes 模型中對波動度為常數的假設與現實不符，一般認為的原因是由於股價報酬存在左方肥尾的現象，也就是說股價大跌的機率相較常態分配高，投資人會願意花更高的價格購買價外賣權，等待股價大跌時獲利，因此價外賣權的隱含波動度會比價內賣權高，而價內買權的隱含波動度也會較價外買權高。

本文僅針對臺灣指數選擇權市場是否發生笑狀波幅現象進行探討，選擇權的波動度隱含了對於未來現貨走勢預測的相關資訊，若能更準確的預測隱含波動度，對於預測未來價格走勢將會是一大利器，學術界近年提出了許多模型試圖更精準地對隱含波動度進行預測，例如納入到期時間、價內外程度等變數，因此未來可以往這方面繼續深入研究。

附錄：Python 程式碼

套件讀取

```
import numpy as np
import pandas as pd
import math
from scipy.stats import norm
import matplotlib.pyplot as plt
```

Black Scholes 公式

```
def BlackScholesModel(option_type, F, K, sigma, T, r):
    d1 = (np.log(F *  np.exp(-r*T) / K) + (r + 0.5 * sigma**2)*T) / (sigma *
np.sqrt(T))
    d2 = d1 - (sigma * np.sqrt(T))
    C = F * np.exp(-r*T) * norm.cdf(d1) - K * np.exp(-r*T)*norm.cdf(d2)
    # using put-call parity to derive put option price
    P = K * np.exp(-r * T) - F * np.exp(-r*T) + C
    if option_type == "C":
        return max(C, 0)
    elif option_type =="P":
        return max(P, 0)
    else:
        return "Error"
```

二分法隱含波動度估計

```
def Implied_Volatility(option_type, real_price, F, K, T, r):
    # use bisection method to estimate implied volatility
    epsilon = 0.0001 # minimum estimation error
    volatility = 0.25 # initial guess of implied volatility
    upper_range = 0.5
    lower_range = 0
    max_iters = 200
    iters = 0
    while iters < max_iters:
        bs_price = BlackScholesModel(option_type=option_type, F=F, K=K,
sigma=volatility, T=T, r=r)
```

```
        if abs(bs_price - real_price) < epsilon:
            return volatility
        if bs_price > real_price:
            tmp = volatility
            volatility = (volatility + lower_range)/2
            upper_range = tmp
        elif bs_price < real_price:
            tmp = volatility
            volatility = (volatility + upper_range)/2
            lower_range = tmp
        iters += 1
    return volatility
```

資料建構

```
F = [16882]*8
K = [k for k in range(16700, 17051, 50)]
r = [0.0023]*8
T = [7/365]*8
c_bid = np.array([275, 242, 210, 179, 149, 124, 100, 79])
c_ask = np.array([338, 251, 215, 185, 151, 126, 102, 80])
c_price = (c_bid + c_ask) / 2
p_bid = np.array([66, 80, 95, 112, 131, 155, 181, 203])
p_ask = np.array([68, 82, 96, 115, 133, 158, 186, 214])
p_price = (p_bid + p_ask) / 2
data = pd.DataFrame({
    "台指期收盤價":F,
    "履約價":K,
    "無風險利率":r,
    "到期天數":T,
    "買權價格":c_price,
    "賣權價格":p_price
})
```

隱含波動度計算

```
data["買權隱含波動度"] = data.apply(lambda row: Implied_Volatility(option_type="C",
real_price=row["買權價格"], F=row["台指期收盤價"], K=row["履約價"], T=row["到期天數"],
r=row["無風險利率"]), axis = 1)
data["賣權隱含波動度"] = data.apply(lambda row: Implied_Volatility(option_type="P",
```

```
real_price=row["賣權價格"], F=row["台指期收盤價"], K=row["履約價"], T=row["到期天數"],
r=row["無風險利率"]), axis = 1)
```

圖形繪製

```
plt.figure(figsize=(9, 6))
plt.plot(data["履約價"], data["買權隱含波動度"], c="darkblue", linewidth=2.5)
plt.tick_params(axis='both', labelsize=13)
plt.xlabel("Strike Price (K)", fontsize=14)
plt.legend(["Implied Volatility of Call Options"], fontsize=14)
plt.savefig('Implied Volatility of Call Options.png', dpi=72)

plt.figure(figsize=(9, 6))
plt.plot(data["履約價"], data["賣權隱含波動度"], c="darkorange", linewidth=2.5)
plt.tick_params(axis='both', labelsize=13)
plt.xlabel("Strike Price (K)", fontsize=14)
plt.ylim(0.1, 0.16)
plt.legend(["Implied Volatility of Put Options"], fontsize=14)
plt.savefig('Implied Volatility of Put Options.png', dpi=72)
```