

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

Отчёт
по курсовому проекту
по дисциплине
«Методы оптимизации»

Выполнил студент:
Петрунин Григорий Дмитриевич
группа: 3630102/70201

Проверил(а):
к.ф.-м.н.
Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2020 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Предварительный анализ	2
2.1	Конфигурация плота	2
2.2	Схематический рисунок задачи	2
2.3	Вспомогательные утверждения	3
3	Формализация задачи	3
3.1	Ограничения	4
3.2	Анализ модели	4
3.3	Построение модели	4
4	Алгоритм и реализация решения	6
5	Результаты	7
6	Ссылки	9

Список иллюстраций

1	Схема плота	2
2	Схема задачи	2
3	Пример приближенного решения	3
4	Препятствия-ограничения	4
5	Математическая модель задачи	5
6	Моделирование передвижения плота для $a = 0.333w$ и $a = 0.400$	7
7	Моделирование передвижения плота для $a = 0.437w$ и $a = 0.438$	8
8	Моделирование передвижения плота для $a = 0.460w$ и $a = 0.499$	8

1 Постановка задачи

Задача ставится в терминах двумерной идеальной модели следующим образом: Имеется канал заданной ширины с прямоугольным поворотом. Имеется твердое тело - плот, конфигурация которого представляет следующую фигуру: *квадрат, одна из сторон которого является диаметром полукруга*. Необходимо вычислить параметры плота, отвечающие максимальной его площади, с которой он сможет пройти этот поворот.

2 Предварительный анализ

Для начала приведем необходимые графические представления исходных данных задачи.

2.1 Конфигурация плота

Исходное описание позволяет нам построить следующую модель:

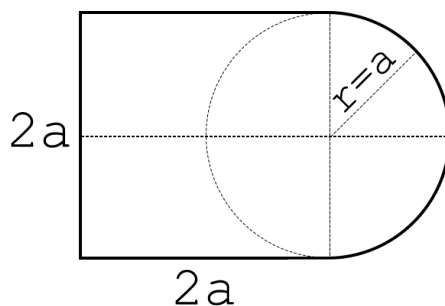


Рис. 1: Схема плота

Ясно, что единственным параметром плота, который мы будем искать в этой задаче, будет радиус полукруга a , он же половина линейного размера квадрата. В таком случае искомым значением площади будет

$$S = 4a^2 + \frac{\pi a^2}{2} \quad (1)$$

2.2 Схематический рисунок задачи

Приведем иллюстрацию поставленной задачи для наглядности:

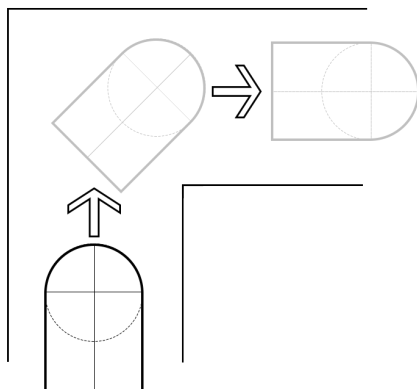


Рис. 2: Схема задачи

2.3 Вспомогательные утверждения

Перед тем, как браться за формализацию задачи, установим пару простых идей, которые нам помогут:

- Очевидно, что при попытке продвижения плота через поворот его начальное положение следует выбирать так, чтобы его ось симметрии была параллельна стенкам канала (как на *Рис.2*). Движение плота на прямых участках в положении поперек заблаговременно позволит нам найти лишь приближенное решение $a = \frac{w}{3}$, как продемонстрировано на следующей схеме:

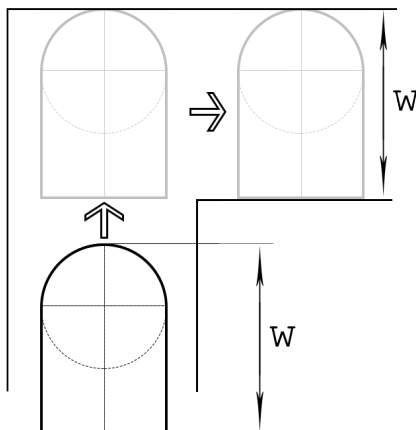


Рис. 3: Пример приближенного решения

- Из предыдущего пункта следует, что у нас остается 2 варианта, как задавать начальное положение плота: полукругом вперед, как на *Рис.2*, либо полукругом назад. Очевидно, что оба варианта эквивалентны в силу симметрии, поэтому для нашей задачи будем рассматривать движение полукругом вперед.
- *Замечание:* опять же в силу симметрии очевидно, что решение данной задачи позволит нам продвигать плот найденной конфигурации в каналах с поворотами в другую сторону в отличие от, например, фигуры найденной Джоном Хаммерсли в 1968г. для т.н. *Задачи о диване* [1].

3 Формализация задачи

Теперь когда мы определились, каким именно образом мы будем продвигать плот через поворот в канале, можно попытаться формализовать нашу задачу.

Во-первых, очевидно, что задача относится к оптимизационным и имеет функцию цели

$$a \longrightarrow \max \quad (2)$$

Однако, данная работа носит скорее исследовательский характер, поэтому приближенное решение мы будем находить экспериментально. Тем не менее, алгоритмами оптимизации мы все же воспользуемся.

3.1 Ограничения

Единственной искомой переменной задачи является параметр ее размера a , на который необходимо наложить разумные ограничения, в пределах которых мы будем искать нужное значение. За такие ограничения можно взять, например, промежуток $(\frac{w}{3}, \frac{w}{2})$, где w -ширина канала. Левая его граница, как мы уже выяснили, соответствует начальному приближению, см. *Рис.3*. Правая граница соответствует максимально возможному начальному положению плота на прямом участке канала.

3.2 Анализ модели

В этой работе мы будем максимально упрощать математическую модель перемещения двумерного тела. Для этого нам необходимо понять, какие именно ограничения встречает плот при попытке войти в поворот.

При достаточных размерах плота экспериментальным путем (на самом деле благодаря наглядности задачи этот факт можно установить воспользовавшись лишь пространственным воображением) устанавливается, что для преодоления поворота плот встречает 3 препятствия. Приведем схему:

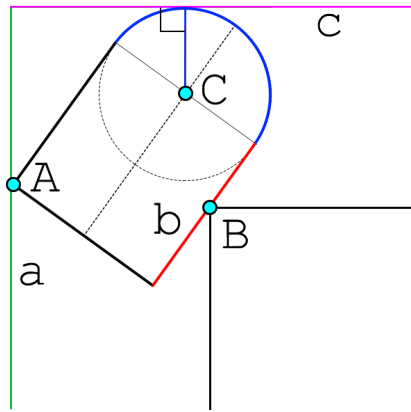


Рис. 4: Препятствия-ограничения

1. Первой парой объектов, составляющих ограничение, являются точка-угол плота A и прямая-стенка канала a (выделена зеленым цветом).
2. Следующая пара - точка-угол поворота B и прямая-грань плота b (выделена красным цветом).
3. Последнее ограничение строится из соприкосновения носовой круглой части плота (выделена синим цветом) с центром в точке C и прямой-стенки канала c (выделена пурпурным цветом).

3.3 Построение модели

Проведя анализ в предыдущем пункте, можно свести модель перемещения двумерного плота в повороте к 3-ем тривиальным ограничениям расстояний между точками и прямыми:

$$\begin{cases} \rho(A, a) \geq 0, \\ \rho(B, b) \geq 0, \\ \rho(C, c) \geq a \end{cases} \quad (3)$$

Объединяя все предыдущие рассуждения, начнем построение математической модели с установки системы координат. Для этого повернем нашу схему на 90 градусов против часовой стрелки и установим внешний угол канала в начало прямоугольной системы координат-точку $O(0, 0)$.

Также введем третью координату-угол φ , который отсчитывается, как это приведено на схеме ниже. Получаем тем самым левостороннюю СК:

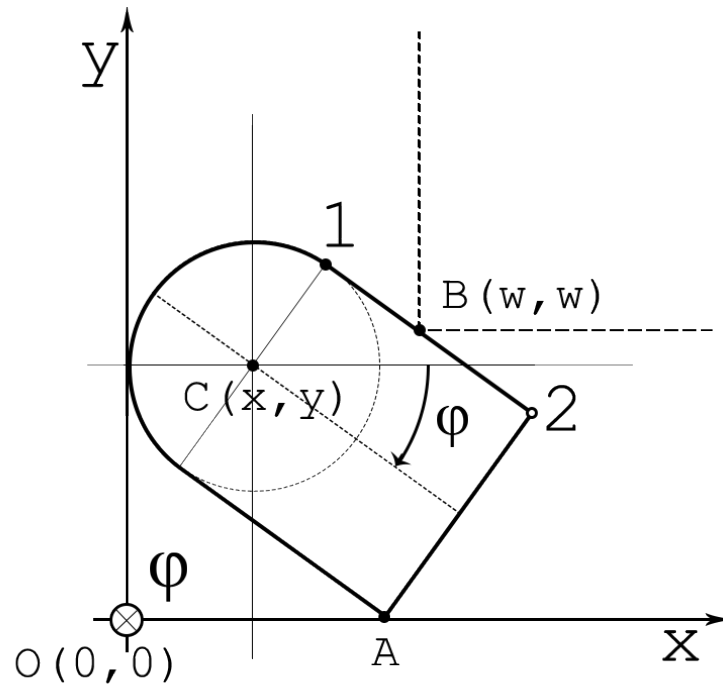


Рис. 5: Математическая модель задачи

Приведем пояснения к построенной схеме:

- Сузим рассмотрение плоского твердого тела до размеров материальной точки C , являющейся центром полукруга плота. Можно считать, что данная точка имеет 3 координаты в нашей СК: $C(x, y, \varphi)$. Ясно, что такая точка с 3 заданными координатами взаимно однозначно соответствует положению плота в двумерном пространстве.

- Построенная СК позволяет свести систему (3) к более простому виду:

$$\begin{cases} A_y \geq 0, \\ \rho(B, b) \geq 0, \text{ где } b - \text{отрезок прямой с концами в точках 1 и 2} \\ C_x \geq a \end{cases} \quad (4)$$

- Из аналитической геометрии нам известно, что расстояние между точкой и прямой на плоскости вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Mx_0 + Ny_0 + K|}{\sqrt{M^2 + N^2}}, \quad (5)$$

где

M, N, K - коэффициенты уравнения прямой в общем виде $Mx + Ny + K = 0$,
 (x_0, y_0) - координаты точки.

Мы также знаем, что величина $Mx_0 + Ny_0 + K$ принимает значения определенного знака в зависимости от взаимного расположения прямой и точки относительно начала координат. В нашем случае точка всегда находится за прямой относительно начала координат, поэтому это значение всегда должно быть ≥ 0 .

- Имея текущие значения x, y, φ , все необходимые в задаче координаты мы можем вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} A_x &= x + a\sqrt{5} \cos(\varphi + \arctan \frac{1}{2}) \\ A_y &= y - a\sqrt{5} \sin(\varphi + \arctan \frac{1}{2}) \\ 1_x &= x + a \sin \varphi \\ 1_y &= y + a \cos \varphi \\ 2_x &= x + a\sqrt{5} \cos(\varphi - \arctan \frac{1}{2}) \\ 2_y &= y - a\sqrt{5} \sin(\varphi - \arctan \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (6)$$

А также можем вычислить необходимые параметры прямой $[1, 2]$, если представить ее уравнение в общем виде $Mx + Ny + K = 0$:

$$\begin{aligned} M &= 1_y - 2_y \\ N &= 2_x - 1_x \\ K &= 1_x 2_y - 2_x 1_y \end{aligned} \quad (7)$$

4 Алгоритм и реализация решения

Предлагается решение данной задачи с помощью экспериментальных манипуляций построенной математической модели. Точнее - мы будем задавать начальное положение плота (зададим точку $C(x, y, \varphi)$) и с помощью решения вспомогательной задачи оптимизации попытаемся "прогнать" его через поворот в канале.

В качестве постановки вспомогательной задачи можно указать следующие данные:

$$\begin{aligned} &\text{Максимизировать функцию цели} \\ &-x + y + \varphi \longrightarrow \max \\ &\text{при следующих условиях:} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} &y - a\sqrt{5} \sin(\varphi + \arctan \frac{1}{2}) \geq \delta \\ &\frac{Mw + Nw + K}{\sqrt{M^2 + N^2}} \geq \delta \\ &x \geq a \\ &x \in (a, w - a) \\ &y \in (a, Y) \\ &\varphi \in (0, \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

где

первые 3 уравнения полностью соответствуют системе (4) за исключением того, что во втором уравнении мы более не рассматриваем модуль расстояния,

a -заданный параметр размеров плота,

w -заданная ширина канала,

δ -некоторая малая величина,

Y -некоторое наперед заданное значение координаты y , достижение которого точкой C мы условно примем за успешное преодоление поворота.

Замечание: от третьего условия данной задачи можно избавиться, т.к. оно регулируется множеством допустимых значений координаты x .

Понятно, что перед нами нелинейная задача условной оптимизации.

Для ее решения был задействован алгоритм квадратичного программирования SLSQP из пакета `scipy.optimize` [2], поставляемого для языка Python. Данный алгоритм как раз представляет из себя итерационный метод решения нелинейных задач условной оптимизации.

Для данной работы, как уже было сказано выше, применялся экспериментальный подход, а именно задавалась некоторая последовательность значений параметра размеров плота a в пределах $(\frac{w}{3}, \frac{w}{2})$ (см. *Ограничения*) и устанавливалось приближенное граничное значение, при котором плот еще мог преодолеть поворот.

Данный алгоритм поддерживает задание необходимой точности вычислений, а потому, вообще говоря, ничего не мешает реализовать алгоритм поиска приближенного решения относительно параметра $a \in (\frac{w}{3}, \frac{w}{2})$ с произвольной точностью.

5 Результаты

В качестве экспериментальной последовательности значений параметра размеров плота a были выбраны следующие значения $\{0.333w, 0.400w, 0.437w, 0.438w, 0.460w, 0.499w\}$.

Благодаря возможности вызова callback функции из метода SLSQP нам удастся восстановить последовательность значений точки (x, y, φ) , построенной алгоритмом, и по данной последовательности восстановить графические интерпретации изменений математической модели. Приведем их для всей последовательности значений параметра:

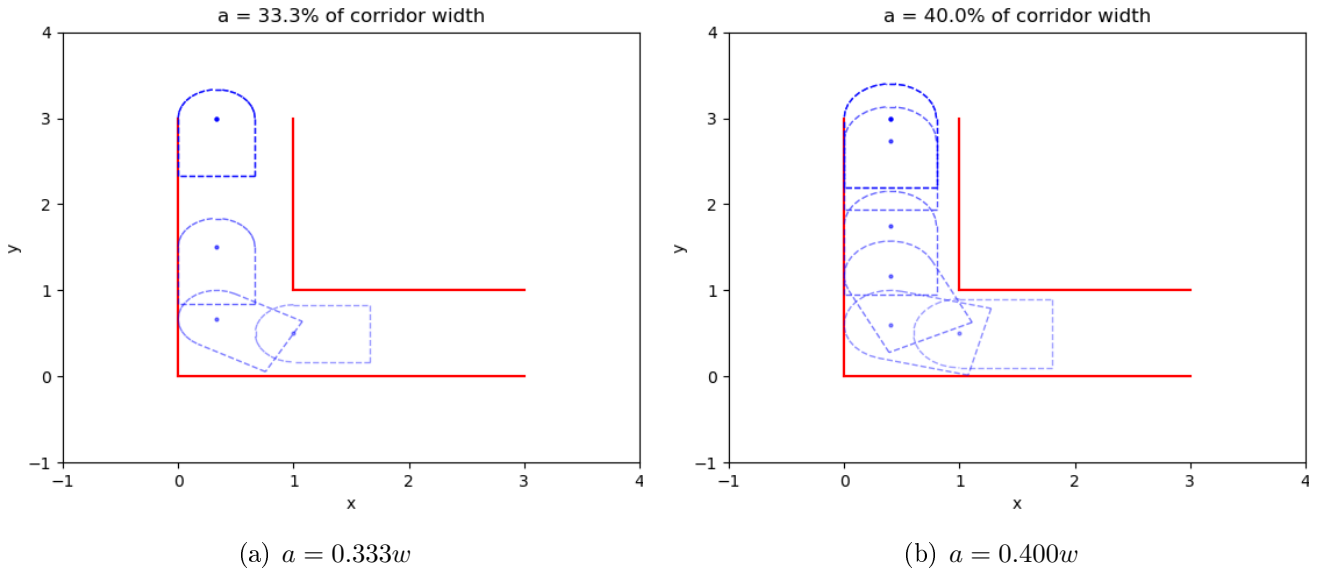


Рис. 6: Моделирование передвижения плота для $a = 0.333w$ и $a = 0.400w$

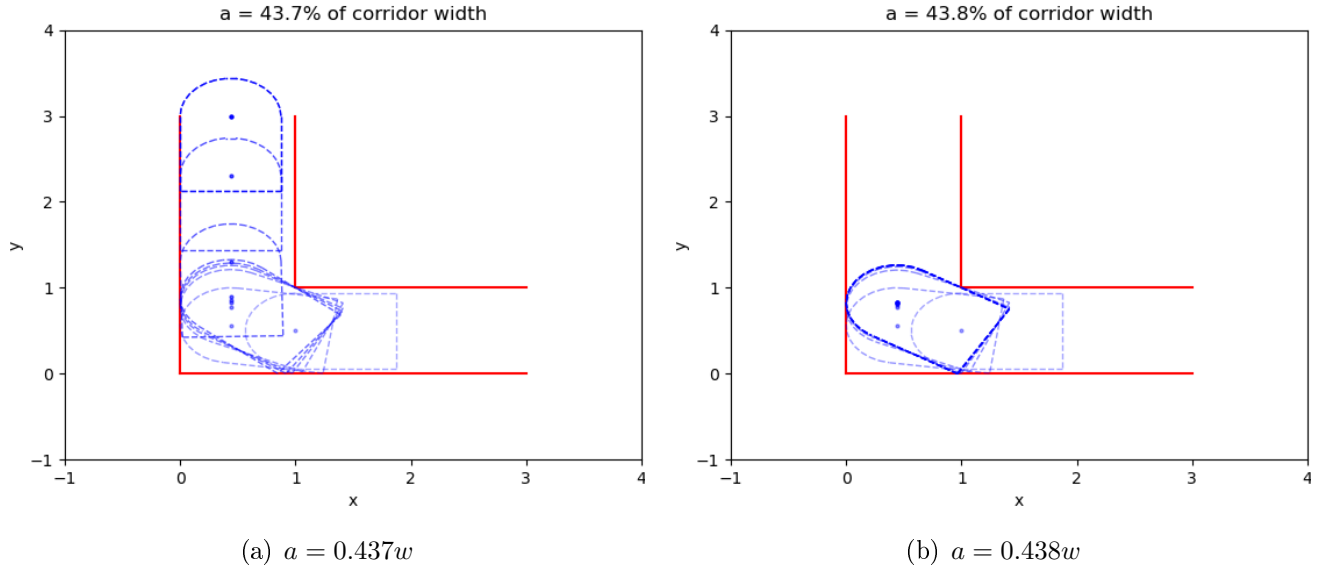


Рис. 7: Моделирование передвижения плота для $a = 0.437w$ и $a = 0.438$

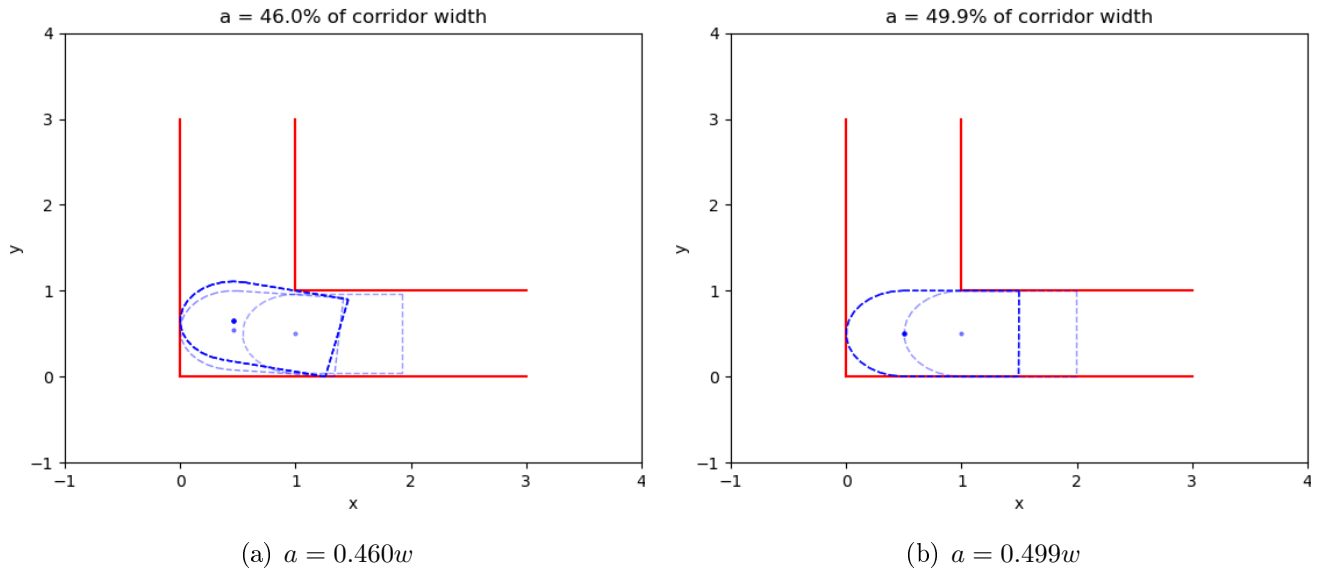


Рис. 8: Моделирование передвижения плота для $a = 0.460w$ и $a = 0.499$

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что с точностью $\sim 1e - 3$ значение параметра $a = 0.437w$ является приближенным решением задачи.

Таким образом максимальное значение площади фигуры данной конфигурации по формуле (1) составляет:

$$S = w^2 0.437^2 \left(4 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 1.064w^2 \quad (9)$$

где w -заданная ширина канала

Исходный код эксперимента приведен в *ссылках*.

6 Ссылки

[1] Differential equations and exact solutions in the moving sofa problem, Dan Romik, 2016
<https://www.math.ucdavis.edu/~romik/data/uploads/papers/sofa.pdf>

[2] Документация `scipy.optimize` для алгоритма SLSQP
<https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-slsqp.html>

[3] Репозиторий с исходным кодом эксперимента
<https://github.com/via8/MethOpt/tree/master/Course>