

---

Haute Ecole d'Ingénierie et de Gestion du Canton de Vaud

---

---

# **Techniques de mesure et analyse de données**

---

Département TIN - Technologies Industrielles

Profs. Cédric Bornand, Michel Demierre, Laurent Jolissaint

1er août 2019



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Techniques de mesure, métrologie, analyse des données . . . . .	11
1.2	Utilité de la métrologie . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Le système international d'unité (SI)</b>	<b>15</b>
2.1	Les sept unités de base SI . . . . .	15
2.1.1	Origine . . . . .	15
2.1.2	Définitions . . . . .	16
2.2	Unités dérivées . . . . .	20
2.3	Préfixes du système SI . . . . .	22
2.4	Unités angulaires . . . . .	23
2.5	Règles d'écriture des unités et symboles SI . . . . .	23
<b>3</b>	<b>La chaîne de mesure</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Transducteurs : capteurs et actionneurs . . . . .	27
3.3	Résolution du problème de mesure . . . . .	29
3.4	Modèle mathématique . . . . .	31
3.5	Forme linéaire, ou linéarisation du modèle de la chaîne de mesure . . . . .	31
3.6	Forme polynomiale du modèle de la chaîne de mesure . . . . .	32
3.7	Loi physique du capteur . . . . .	33
3.8	Erreurs de non conformité ou de non-linéarité . . . . .	33
3.9	Bruit interne . . . . .	33
3.10	Grandeur d'influence . . . . .	34
3.11	Effet de charge . . . . .	34
3.12	Perturbations . . . . .	36
3.13	Systèmes d'acquisition de données . . . . .	36
3.14	Architectures . . . . .	37
3.15	Modes du multiplexeur . . . . .	39
3.16	Sources flottantes et courants de polarisation . . . . .	41
3.17	Conditionnement des signaux . . . . .	41

3.18	Les différents types de signaux . . . . .	41
3.19	Exercices . . . . .	43
3.19.1	Exercice : Résistances de polarisation . . . . .	43
3.19.2	Exercice : Fréquence de scrutation . . . . .	43
3.19.3	Exercice : Multiplexage et déphasage . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Modélisation de la chaîne</b>	<b>45</b>
4.1	Approximations mathématiques . . . . .	46
4.2	Incertitudes . . . . .	46
4.3	Calibrage et étalonnage . . . . .	49
4.3.1	Calibrage . . . . .	50
4.3.2	Etalonnage . . . . .	53
4.3.3	Auto-calibrage . . . . .	55
4.4	Compensation des erreurs systématiques . . . . .	55
4.4.1	Compensation linéaire . . . . .	55
4.4.2	Moteur de correction mathématiques . . . . .	58
4.5	Mesures répétées . . . . .	59
4.6	Exercices . . . . .	62
4.6.1	Exercice : Incertitudes des appareils . . . . .	62
4.6.2	Exercice : Calibrage d'une chaîne . . . . .	64
4.6.3	Exercice : Linéarité . . . . .	65
4.6.4	Exercice : Auto-Calibrage d'une chaîne . . . . .	65
4.6.5	Exercice : Coefficients d'influence . . . . .	67
4.6.6	Exercice : Mesures répétées . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Capteurs</b>	<b>69</b>
5.1	Classification des capteurs . . . . .	69
5.1.1	Introduction . . . . .	69
5.2	Choix d'un capteur . . . . .	69
5.2.1	Principaux termes utilisés pour spécifier les capteurs . . . . .	71
5.3	Matériaux utilisés dans la réalisation de capteurs . . . . .	72
5.4	Principes de conversion . . . . .	73
5.5	Le mesurande . . . . .	74
5.6	Capteur réel . . . . .	76
5.7	Exemples de capteurs . . . . .	76
5.7.1	Grandeurs électriques . . . . .	76
5.7.2	Température (TMP75 de Texas Instruments) . . . . .	78
5.7.3	Humidité (SHT3x-ARP de Sensirion) . . . . .	80
5.7.4	Pression (Keller series 26 W) . . . . .	80
5.7.5	Jauge de déformation . . . . .	80
5.7.6	Force (HBM RSCC) . . . . .	83

5.7.7	Couple (Omega TQ513) . . . . .	85
5.7.8	Position linéaire (LT1300) . . . . .	86
5.7.9	Position angulaire (Baumer GM400) . . . . .	86
5.7.10	Vitesse (Philips KMI15/1) . . . . .	87
5.7.11	Capteur de vibration (Colibrys VS1000) . . . . .	88
5.7.12	Capteur de proximité (Baumer CFDK 30N3600) . . . . .	88
5.7.13	Capteur chimique (Membrapor CO/C-200) . . . . .	89
5.7.14	Capteur optique (Hamamatsu S-4251) . . . . .	90
5.7.15	Lectures conseillées . . . . .	91
<b>6</b>	<b>La mesure et sa représentation</b>	<b>93</b>
6.1	Définitions . . . . .	93
6.1.1	L'échantillon . . . . .	93
6.1.2	La population . . . . .	94
6.1.3	L'analyse statistique . . . . .	94
6.2	Moyenne, écart quadratique moyen, écart-type . . . . .	95
6.2.1	La moyenne de l'échantillon . . . . .	95
6.2.2	L'écart quadratique moyen de l'échantillon . . . . .	95
6.2.3	L'écart-type de l'échantillon . . . . .	96
6.3	La représentation d'un échantillon de mesures à l'aide d'un histogramme . . . . .	96
6.3.1	Comment interpréter un histogramme ? . . . . .	98
6.3.2	La distribution gaussienne . . . . .	98
6.4	Histogramme cumulé . . . . .	100
6.5	Médiane et mode . . . . .	101
6.5.1	Médiane . . . . .	101
6.5.2	Mode . . . . .	102
6.6	Exercices du chapitre 6 . . . . .	102
<b>7</b>	<b>La mesure vue comme une variable aléatoire. Distributions usuelles des variables aléatoires.</b>	<b>105</b>
7.1	La mesure est une variable aléatoire . . . . .	105
7.2	Définitions . . . . .	106
7.2.1	Variable aléatoire . . . . .	106
7.2.2	Variable aléatoire stationnaire . . . . .	106
7.2.3	Variable aléatoire discrète . . . . .	106
7.2.4	Variable aléatoire continue . . . . .	106
7.3	Universalité des lois de probabilité . . . . .	107
7.4	Les distributions de probabilité des variables aléatoires discrètes . . . . .	107
7.4.1	La probabilité discrète . . . . .	108
7.4.2	Propriétés de la probabilité discrète . . . . .	109
7.4.3	Différence entre fréquence et probabilité . . . . .	110

7.4.4	Moments d'une variable aléatoire discrète . . . . .	110
7.4.5	Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète . . . . .	112
7.4.6	Mode et médiane d'une variable aléatoire discrète . . . . .	112
7.5	Les distributions de probabilité des variables aléatoires continues . . . . .	112
7.5.1	La densité de probabilité . . . . .	112
7.5.2	Propriétés de la probabilité continue . . . . .	113
7.5.3	Moments d'une variable aléatoire continue . . . . .	114
7.5.4	Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue . . . . .	114
7.5.5	Mode et médiane d'une variable aléatoire continue . . . . .	115
7.6	Distributions de probabilité continues usuelles . . . . .	115
7.6.1	La distribution uniforme . . . . .	115
7.6.2	La distribution de Gauss ou « loi normale » . . . . .	116
7.6.3	Convergence vers la distribution de Gauss : le théorème central-limite	118
7.7	Incertitude de la moyenne empirique, intervalle et niveau de confiance . . .	118
7.8	Exercices du chapitre 7 . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Mesures multidimensionnelles, corrélations, budget d'erreur</b>	<b>125</b>
8.1	La covariance et la corrélation . . . . .	125
8.1.1	Corrélation linéaire . . . . .	126
8.1.2	Corrélation non linéaire . . . . .	127
8.2	Incertitude globale sur $G(x_1, x_2, \dots)$ et corrélation des variables internes .	127
8.2.1	Variables internes indépendantes . . . . .	129
8.2.2	En pratique . . . . .	129
8.2.3	Variables internes totalement dépendantes . . . . .	130
8.3	Cas particuliers fréquents : addition et produit de variables aléatoires totalement indépendantes . . . . .	130
8.4	Budget d'erreur pour le dimensionnement de systèmes - un aspect central du travail de l'ingénieur . . . . .	131
8.5	Exercices du chapitre 8 . . . . .	133
<b>9</b>	<b>Ajustement d'un modèle <math>y = f(\vec{x}, \vec{a})</math> sur une série de mesures</b>	<b>135</b>
9.1	Introduction . . . . .	135
9.2	Théorie . . . . .	137
9.2.1	La méthode de la minimisation de l'écart quadratique entre modèle et mesures . . . . .	138
9.2.2	Soyons plus malins, et utilisons la dérivée ! . . . . .	140
9.3	Application : ajustement d'une droite $y = ax + b$ et lien avec la corrélation linéaire . . . . .	142
9.4	Un exemple complet en deux dimensions . . . . .	142
9.5	Exercices du chapitre 9 . . . . .	147

<b>A métrologie et société, un peu d'histoire</b>	<b>151</b>
A.1 Naissance de la métrologie . . . . .	151
A.2 La référence commune : l'étaillon . . . . .	152
A.3 Diversité des mesures . . . . .	153
A.4 Une culture métrologique commune . . . . .	154
A.5 La mesure d'une grandeur physique . . . . .	155
A.6 Nomenclature propre à la mesure . . . . .	156
A.6.1 Le mesurage . . . . .	156
A.6.2 Le mesurande . . . . .	156
A.6.3 La mesure . . . . .	157
A.6.4 L'incertitude sur la mesure . . . . .	157
A.6.5 Traabilité des mesurages . . . . .	157
A.7 Nomenclature propre aux instrument de mesure . . . . .	157
A.7.1 Etalonnage ou calibration . . . . .	158
A.7.2 L'étendue de mesure . . . . .	160
A.7.3 La résolution . . . . .	160
A.7.4 La sensibilité . . . . .	161
A.7.5 La justesse . . . . .	161
A.7.6 La fidélité, ou précision . . . . .	161
A.7.7 L'exactitude = justesse + précision . . . . .	162
A.7.8 La répétabilité . . . . .	163
A.7.9 La reproductibilité . . . . .	163
A.8 Introduction . . . . .	164
A.9 Les différents types de signaux . . . . .	164
A.10 méthodes générales de mesure . . . . .	167
A.10.1 Mesure par déviation . . . . .	167
A.10.2 Mesure par comparaison . . . . .	170
A.10.3 Avantages et inconvénients des mesures par déviation et par comparaison . . . . .	173
A.10.4 Comptages . . . . .	174
A.11 Causes probables des erreurs de mesure . . . . .	177
A.11.1 Erreurs d'étalonnage ou de calibration . . . . .	177
A.11.2 Hystérésis . . . . .	177
A.11.3 Erreur de linéarité . . . . .	178
A.11.4 Erreur de sensibilité . . . . .	178
A.11.5 Erreur due à la résolution de l'instrument . . . . .	178
A.11.6 Grandeurs d'influence externes . . . . .	178
A.12 définitions de l'erreur et de l'incertitude . . . . .	179
A.13 Comment annoncer un résultat : les chiffres significatifs . . . . .	180
A.14 Erreurs systématiques et erreurs aléatoires . . . . .	180

A.14.1 généralités . . . . .	180
A.14.2 Traitement des erreurs systématiques . . . . .	181
A.14.3 Traitement des erreurs aléatoires . . . . .	182
A.14.4 Traitement des erreurs grossières . . . . .	184

# Note

Le matériel présenté dans ce document consiste en une reprise, avec beaucoup d'apports personnels et de modifications, des cours présentés par les Profs. Lorenzo Zago et Jacques Unger de la HEIG-VD. Nous tenons à les remercier de nous avoir transmis l'intégralité de leurs documents de cours et laboratoire.

Ces documents ont été eux-mêmes basés sur une compilation de plusieurs sources - polycopiés pré-existants à la HEIG-VD, [Wikipédia](#), et contributions d'auteurs librement disponibles sur internet.



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Techniques de mesure, métrologie, analyse des données

En ingénierie, et dans toutes les branches scientifiques, les informations sur les systèmes physiques, construits par l'humain, ou naturels, sont obtenues par des **mesures**. deux questions essentielles se posent alors à l'expérimentateur :

1. comment mesurer de la manière la plus juste possible,
2. et comment déduire, des mesures brutes, l'information recherchée ?

La première partie est du domaine de ce que nous pouvons nommer les **techniques de mesures**, accompagnée des règles de la **métrologie**. La seconde partie constitue le vaste domaine de **l'analyse des données**. Dans ce cours, nous traiterons tout d'abord des techniques des mesures, logiquement suivies de la présentation des techniques d'analyse de données.

### 1.2 Utilité de la métrologie

Les techniques de mesure ont recours à la métrologie, terme qui se traduit, au sens étymologique, par « science de la mesure ». Avant d'entrer dans le vif du sujet, à savoir les techniques de mesure, il est donc nécessaire de bien comprendre quels sont les défis résolus par la métrologie.

La métrologie s'intéresse traditionnellement à la détermination de caractéristiques (appelées grandeurs) qui peuvent être fondamentales comme par exemple une longueur, une masse, un temps, ou dérivées de grandeurs fondamentales comme par exemple une surface, une vitesse (notons que dans beaucoup de domaines, comme celui des essais des matériaux, la médecine ... il existe des unités spécialisées qui n'ont pas de lien forcément

direct avec les unités fondamentales ci-dessus, mais qui sont néanmoins parfaitement définies).

Quoiqu'il en soit, mesurer une grandeur physique consiste à lui attribuer une valeur quantitative en prenant pour référence une grandeur de même nature appelée unité. Dans le langage courant des métrologues, on entend souvent dire « mesurer c'est comparer ».

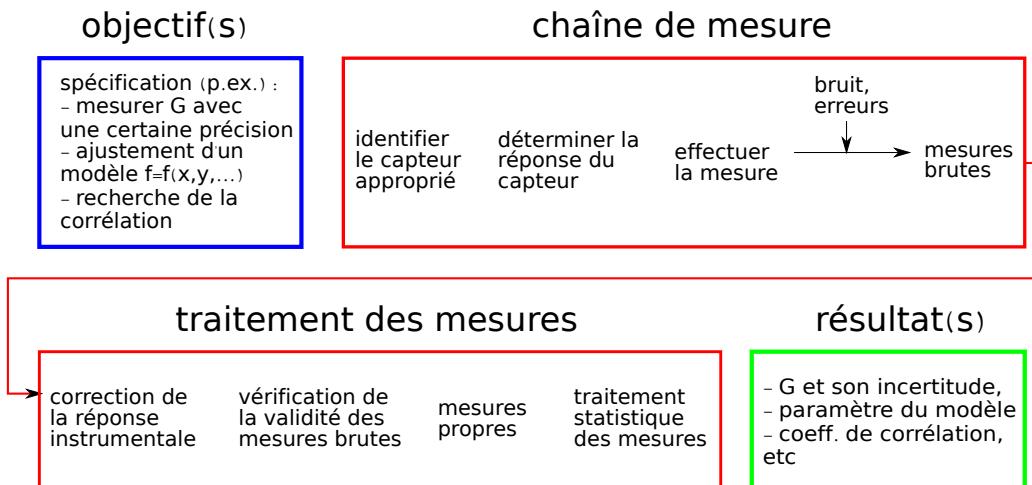


FIGURE 1.1 – Techniques de mesure et traitement des données : les étapes clés.

Les résultats des mesures servent à prendre des décisions dans de nombreux domaines, tels que :

- validation d'une hypothèse scientifique,
- acceptation d'un produit (conformité à une exigence),
- réglage d'un paramètre dans le cadre du contrôle d'un procédé de fabrication,
- protection de l'environnement,
- définition des conditions de sécurité d'un produit ou d'un système.

L'ensemble de ces décisions concourt à la qualité des produits ou des services : on peut quantifier (ou caractériser) la qualité d'un résultat de mesure grâce à son incertitude. En effet sans incertitude les résultats de mesure ne peuvent plus être comparés :

- soit entre eux (essais croisés),
- soit par rapport à des valeurs de référence spécifiées dans une norme ou une spécification (conformité d'un produit).

Le diagramme de la figure 1.1 représente les différentes étapes nécessaires à la réalisation d'un système de mesure, depuis l'acquisition au traitement des mesures. C'est sur cette base que les chapitres ont été définis :

**Chapitre 1** Introduction

**Chapitre 2** Le système international d'unités

**Chapitre 3** La chaîne de mesure

**Chapitre 4** Modélisation de la chaîne de mesure

**Chapitre 5** Capteurs

La 2e partie traitera de l'analyse des données :

**Chapitre 6** La mesure et sa représentation

**Chapitre 7** La mesure vue comme une variable aléatoire. Distributions usuelles des variables aléatoires.

**Chapitre 8** Mesures multidimensionnelles, corrélations, budget d'erreur

**Chapitre 9** Ajustement d'un modèle sur une série de mesures

**A la fin de ce cours, vous devriez être capable de concevoir un système de mesure d'une grandeur physique donnée, et de traiter les données enregistrées pour en tirer les informations désirées.**



# Chapitre 2

## Le système international d'unité (SI)

Le **Système International d'unités** (abrégé **SI**), basé sur le **système métrique**, est le système d'unités le plus largement employé du monde. Il s'agit d'un système d'unités décimal (on passe d'une unité à ses multiples ou sous-multiples à l'aide de puissances de 10). C'est la Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM), rassemblant des délégués des états membres de la Convention du Mètre, qui décide de son évolution, tous les quatre ans, à Paris.

L'abréviation de « Système International » est **SI**, quelle que soit la langue utilisée<sup>1</sup>. La norme internationale ISO 1000 (ICS 01 060) décrit les unités SI et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités.

### 2.1 Les sept unités de base SI

#### 2.1.1 Origine

Le nombre minimal d'unités possibles est basé sur le nombre minimal de grandeurs indépendantes et fondamentales permettant de décrire les lois de l'Univers. On comprendra aisément que l'**espace**, le **temps** et la **masse** sont des grandeurs ne pouvant pas s'exprimer les unes en fonction des autres, et que ces trois grandeurs définissent forcément **les trois premières unités fondamentales** de tout système métrologique, qui sont respectivement, en unités SI, le mètre, la seconde, le kilogramme.

Il existe une quatrième grandeur fondamentale, la **charge électrique**, irréductible aux précédentes : on ne peut pas traduire la charge de l'électron ou du proton en une combinaison de masse, distance, et/ou temps ! A noter que c'est l'unité du courant électrique, soit la quantité de charge électrique qui passe dans un conducteur par unité de temps, qui constitue la quatrième unité fondamentale - l'**ampère** (A) - et non l'unité de la charge, le **coulomb** (C).

---

1. oui, *même* en anglais

Pour continuer, il existe encore d'autres grandeurs fondamentales dont on ne parle presque jamais en dehors du monde de la physique subatomique : les charges liées aux interactions entre les particules fondamentales constitutives des protons et neutrons (les quarks), ainsi qu'entre les électrons et leur différentes versions (positron, muon etc.) Ces deux interactions se nomment l'interaction forte (pour les quarks) et faible (pour les électrons), mais ont une portée se limitant essentiellement aux dimensions du noyau de l'atome, et leurs effets ne se font ressentir que lors des expériences de physique des particules.

De la même manière que la charge électrique est le véhicule de la force électromagnétique, il existe des charges véhiculant les interactions forte et faible (nous ne les décrirons pas ici). Or, ces charges ne sont pas exprimables en terme des 4 unités fondamentales précédentes, elles constituent par conséquent de nouvelles grandeurs indépendantes, pour lesquelles des unités sont définies. Ceci dit, étant donné que ces charges n'ont d'importance que dans le domaine spécialisé de la physique des particules, et qu'elles sont loin d'avoir des applications courantes dans le monde actuel (hormis dans le domaine de l'imagerie médicale nucléaire), ces unités ne sont pas (encore) incluses comme unités fondamentales SI.

Aux quatre unités fondamentales ci-dessus, le système SI ajoute trois autres unités, le **kelvin** pour la température, la **candela** pour les mesures photométriques (quantité de lumière) et la **mole**, pour la quantité de matière.

Formellement, le kelvin et la candela ne sont pas des unités fondamentales : la température est en fait une mesure de l'énergie d'agitation thermique (oscillation, vitesse) des particules constituantes d'un corps à une température donnée; un flux de lumière n'est rien d'autre qu'un flux de photons véhiculant une certaine énergie. Or, l'énergie est exprimable en terme de distance, de masse et de temps.

La mole est en revanche une unité assez particulière, puisqu'elle ne correspond à aucune grandeur fondamentale des lois de la physique, au contraire des unités ci-dessus. Elle trouve son origine en chimie, où l'on a trouvé bien plus pratique, pour désigner un nombre d'atomes ou de molécules au sein d'une solution, de les regrouper par rapport à un nombre de base, très grand, le nombre d'Avogadro, égal à  $6.022141293 \times 10^{23}$ , typique du nombre d'atomes/molécules que l'on trouve dans les préparations de chimie<sup>2</sup>. Il est en effet par exemple plus simple d'indiquer qu'il y a 3.5 moles d'une certaine molécule dans une solution donnée que de dire qu'il y en a  $21.08 \times 10^{23}$ .

## 2.1.2 Définitions

Considérons l'unité de distance fondamentale, le mètre. Afin que cette référence soit disponible partout dans le monde, nous pourrions par exemple reproduire le mètre étalon conservé au **Bureau International des Poids et Mesures (BIPM)** à Sèvres, France.

---

2. on consultera avec intérêt la page Wikipédia dédiée à ce sujet

Cette procédure présente cependant deux inconvénients majeurs : (1) tout procédé de reproduction ne saurait être exempt d'erreurs, (2) il faut avoir accès au mètre-étalon.

Pour pallier à ces inconvénients, il a été décidé de définir le mètre non plus par rapport à un étalon physique, un objet bien réel, mais d'utiliser une propriété fondamentale de la matière, indépendante du temps et de l'espace, c'est-à-dire disponible partout et tout le temps, et parfaitement invariable, ou constante. On a donc choisi de définir le mètre comme la distance parcourue par la lumière, dans le vide, durant  $1/299'792'458$  secondes exactement. Tout laboratoire bien équipé pourra reproduire cette expérience, et donc définir avec toute la précision requise une distance, entre deux plans de référence bien accessibles, égale au mètre ou à un de ses multiples ou sous-multiples.

L'exemple du mètre décrit le principe que l'on applique aujourd'hui à la définition des unités fondamentales SI. Seul le kilogramme est encore défini par rapport à un objet matériel concret – une masse composée d'un alliage de platine et d'iridium conservé au BIPM - susceptible de s'altérer. Des recherches ont d'ailleurs actuellement lieu pour remplacer cette définition par une autre, utilisant cette fois un phénomène physique, inaltérable par nature.

<b>Grandeur</b>	<b>Nom</b>	<b>Symbolé SI</b>	<b>Définition, remarques</b>
longueur	mètre	m	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant $1/299'792'458$ seconde. Historiquement, la première définition officielle du mètre (1791) était basée sur la circonférence de la terre, et valait $1/40'000'000$ du périmètre de notre planète.
masse	kilogramme	kg	Le kilogramme est la masse d'un cylindre composé d'un alliage de platine (90 %) et d'iridium (10%), conservé au Bureau International des Poids et Mesures. Historiquement, la définition du kilogramme était la masse d'un décimètre cube d'eau.
temps	seconde	s	La seconde est la durée de temps associée à $9'192'631'770$ oscillations de l'onde électro-magnétique (photons) émise lors de la transition des électrons entre les deux sous-niveaux fondamentaux de l'atome de césium $^{133}$ ( $^{133}\text{Cs}$ ) à la température de 0 kelvin. La seconde était à l'origine basée sur la durée (instable) du jour terrestre, d'une durée de $86'400$ secondes.

courant électrique	ampère	A	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de un mètre l'un de l'autre dans le vide produirait entre ces conducteurs une force égale à $2 \times 10^{-7}$ newton par mètre de longueur.
température	kelvin	K	Le kelvin, unité de température thermodynamique, est la fraction $1/273.16$ de la température thermodynamique du point triple de l'eau. Le point triple de l'eau est, dans le diagramme pression-température, un point où l'eau peut exister dans les trois états, soit solide, liquide et gazeux. La température associée à cet état est de 273.16 K. A noter que l'on écrit K et non °K.
quantité de matière	mole	mol	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans 0.012 kg de carbone 12 ( $^{12}\text{C}$ ). Ce nombre d'entités élémentaires est appelé nombre d'Avogadro, et vaut $\mathcal{N}_A = 6.02214129(27) \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . Lorsque l'on emploie la mole, les entités élémentaires doivent être spécifiées et peuvent être des atomes, des molécules, des ions, des électrons, d'autres particules ou des groupements spécifiés de telles particules.

intensité lumineuse	candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence $540 \times 10^{12}$ hertz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est de 1/683 watt par stéradian.
---------------------	---------	----	---

## 2.2 Unités dérivées

Les unités dérivées font partie du système SI et sont déduites des sept unités de base.

Grandeur	Nom	Sym. SI	lien avec autres unités	lien avec unités de base	Relation physique
Fréquence	hertz	Hz	—	1/s	Fréquence = 1/période
Force	newton	N	—	kg m/s <sup>2</sup>	Force = masse × accélération
Contrainte, pression	pascal	Pa	N/m <sup>2</sup>	kg/m/s <sup>2</sup>	Pression = force / surface
Energie, travail, quantité de chaleur	joule	J	N m	kg m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup>	Travail = force×distance ; énergie cinétique = masse×vitesse <sup>2</sup> /2
Puissance, flux énergétique et flux thermique	watt	W	J/s	kg m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Puissance = travail / temps
Charge électrique, quantité d'électricité	coulomb	C	—	A s	Charge = courant×temps

Force électromotrice, différence de potentiel (tension)	volt	V	J/C	$\text{kg m}^2/\text{s}^3/\text{A}$	Tension = travail / charge
Résistance électrique	ohm	$\Omega$	V/A	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2/\text{s}^3/\text{A}^2}$	Résistance = tension / courant
Conductance électrique	siemens	S	A/V	$\text{s}^3\text{A}^2/\text{kg/m}^2$	Conductance = courant / tension
Capacité électrique	farad	F	C/V	$\text{s}^4\text{A}^2/\text{kg/m}^2$	Capacité = charge / tension
Induction magnétique	tesla	T	$\text{V s/m}^2$	$\text{kg/s}^2/\text{A}$	Induction = tension $\times$ temps / surface
Flux d'induction magnétique	weber	Wb	V s	$\text{kg m}^2/\text{s}^2/\text{A}$	Flux d'induction = tension $\times$ temps
Inductance électrique	henry	H	V s/A	$\frac{\text{kg}}{\text{m}^2/\text{s}^2/\text{A}^2}$	Inductance = tension $\times$ temps / courant
Température	degré Celsius	$^{\circ}\text{C}$	—	K	$T [{}^{\circ}\text{C}] = T [\text{K}] - 273.15$
Flux lumineux	lumen	lm	—	cd sr	—
ECLAIREMENT LUMINEUX	lux	lx	—	cd sr/ $\text{m}^2$	—
Nombre de désintégrations par seconde (radioactivité)	becquerel	Bq	—	1/s	—
Dose de radioactivité absorbée	gray	Gy	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$	—
Equivalent de dose radioactivité absorbée	sievert	Sv	J/kg	$\text{m}^2/\text{s}^2$	—
Activité catalytique	katal	kat	—	mol/s	—

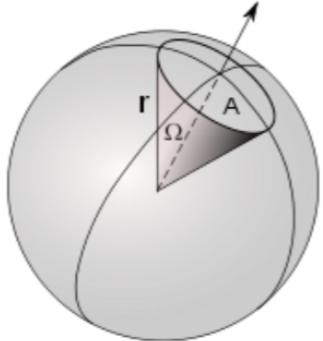
## 2.3 Préfixes du système SI

Les préfixes du système international d'unités simplifient la manipulation des mesures qui ont des rapports élevés d'unité (par exemple de 0.1 cm à 1'000 m). Ces préfixes renvoient à des multiples et des fractions de 10 ou de 1000. Les préfixes et noms correspondants sont donnés dans le tableau ci-après. On notera que les préfixes s'écrivent avec une lettre minuscule à partir et en-dessous de l'échelle des milliers. **Il est fondamental d'observer très exactement ces conventions internationales.**

$10^n$	Préfixe	Sym. SI	Nombre décimal	Echelle
$10^{24}$	yotta	Y	1'000'000'000'000'000'000'000	Quadrillion
$10^{21}$	zetta	Z	1'000'000'000'000'000'000'000	Trilliard
$10^{18}$	exa	E	1'000'000'000'000'000'000	Trillion
$10^{15}$	péta	P	1'000'000'000'000'000	Billiard
$10^{12}$	téra	T	1'000'000'000'000	Billion
$10^9$	giga	G	1'000'000'000	Milliard
$10^6$	méga	M	1'000'000	Million
$10^3$	kilo	k	1'000	Millier
$10^2$	hecto	h	100	Cent
$10^1$	déca	da	10	Dix
$10^0$	–	–	1	Unité
$10^{-1}$	déci	d	0.1	Dixième
$10^{-2}$	centi	c	0.01	Centième
$10^{-3}$	milli	m	0.001	Millième
$10^{-6}$	micro	$\mu$	0.000'001	Millionième
$10^{-9}$	nano	n	0.000'000'001	Milliardième
$10^{-12}$	pico	p	0.000'000'000'001	Billionième
$10^{-15}$	femto	f	0.000'000'000'000'001	Billiardième
$10^{-18}$	atto	a	0.000'000'000'000'000'001	Trillionième
$10^{-21}$	zepto	z	0.000'000'000'000'000'000'001	Trilliardième
$10^{-24}$	yocto	y	0.000'000'000'000'000'000'000'001	Quadrillionième

## 2.4 Unités angulaires

A côté des unités de base et des unités dérivées, il existe deux unités angulaires :



**L'unité d'angle plan : le radian (symbole : rad)** Soit un secteur de cercle de rayon  $r$  et de longueur d'arc  $l$ . L'angle  $\theta$  associé au secteur, en radian, est défini par le rapport

$$\theta = \frac{l}{r} \text{ [rad]}$$

$180^\circ$  correspondant à  $\pi$  rad, on a que  $1 \text{ rad} \approx 57.3^\circ$ .

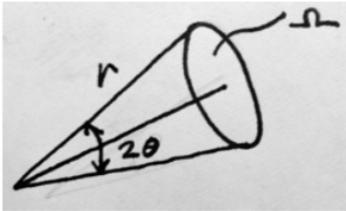


FIGURE 2.1 – Définition de l'angle solide.

**L'unité d'angle solide : le stéradian (symbole : sr)** Soit un cône dont l'angle au sommet est de  $2\theta$  [rad], et soit  $A$  l'aire de la calotte sphérique formée par l'intersection du cône avec la surface de la sphère de rayon  $r$  (figure 2.1). L'angle solide  $\Omega$  associé au cône est défini par le rapport

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \text{ [sr]}$$

L'aire d'une sphère de rayon  $r$  étant donnée par  $4\pi r^2$ , on trouve que l'angle solide de la sphère est égal à  $4\pi$  sr, et de la demi-sphère,  $2\pi$ . On peut aussi montrer que

$$\Omega = 2\pi(1 - \cos \theta)$$

Les grandeurs « angle plan » et « angle solide » sont des unités sans dimension - puisqu'il s'agit de rapport de longueurs et de surface - qui peuvent être indiquées ou non dans les expressions des unités dérivées.

## 2.5 Règles d'écriture des unités et symboles SI

- le nom de l'unité est un nom commun même pour les unités provenant de noms propres : volt, ampère, kelvin, tesla etc ;
- les symboles SI des unités sont écrits en police droite, et en minuscules, **sauf** si le nom de l'unité est dérivée d'un nom propre : dans ce cas la première lettre du symbole est en majuscule, par exemple N (Newton), J (Joule), V (Volta), Bq (Bequerel) ;
- les symboles SI sont invariables au pluriel ;

- les symboles SI sont écrits sans point final ;
- les symboles SI doivent être placés après les valeurs numériques, en laissant un espace entre valeur et symbole, donc 30 m est juste, 30m ne l'est pas ;
- le produit de 2 unités est indiqué par un point, qui peut être omis si aucune confusion n'est possible, par exemple 1 mN est un millinewton et non un mètre-newton (c-à-d un joule), sinon nous aurions écrit m·N !
- le quotient est indiqué par une barre oblique, ou alors on peut utiliser les puissances négatives, comme avec  $m/s^2$  ou  $m\cdot s^{-2}$ , mais pas  $ms^{-2}$  car alors ms peut être interprété comme indiquant des millisecondes ;
- lorsque l'unité suit une valeur numérique, on ne met **jamais** de crochets autour de l'unité ; on ne place l'unité entre crochets que dans les formules, par exemple la fameuse formule d'Einstein s'écrira

$$E = mc^2 \text{ [J]} \quad \text{mais par contre} \quad E = 10^6 \text{ J}$$

Quelques exemples d'écriture fausses et justes :

faux	juste	interprétation
$99Kg$	99 kg	99 kilogramme
$25[ms]$	25 ms	25 milliseconde
$12\mu v$	$12 \mu V$	12 microvolt
$100 \text{ K}^*\text{m}$	$100 \text{ K}\cdot\text{m}$	100 kelvin·mètre

# Chapitre 3

## La chaîne de mesure

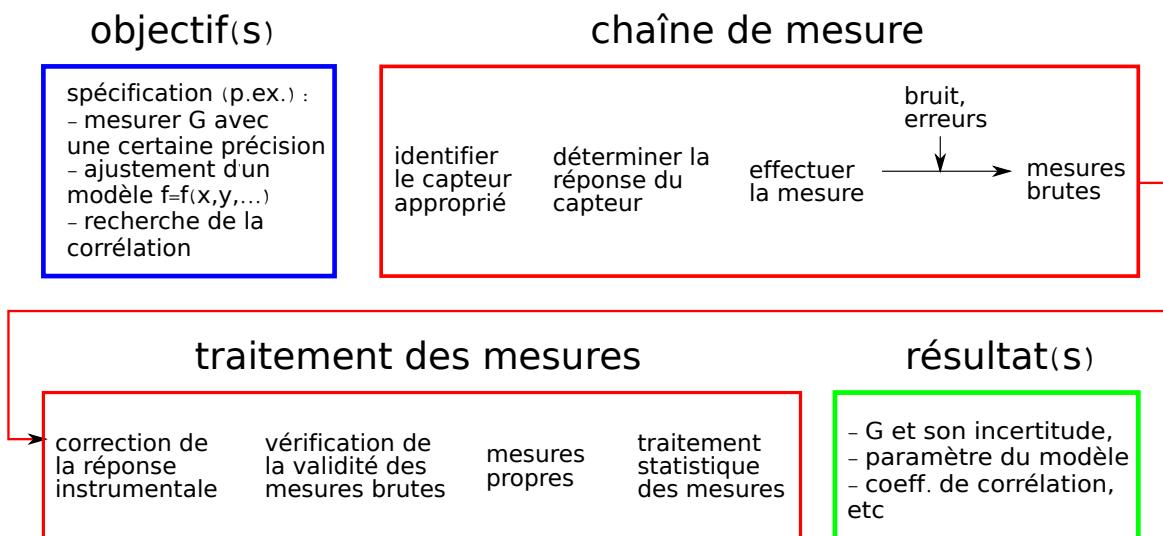


FIGURE 3.1 – Techniques de mesure : les étapes clés.

### 3.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent les différents moyens et définitions nécessaires pour que tous les acteurs des techniques de mesure puissent oeuvrer en se comprenant les uns les autres. Reprenant le schéma bloc de la figure 3.1 qui présente les différentes étapes des opérations de mesure, nous nous proposons maintenant d'étudier la chaîne de mesure.

Dans l'instrumentation moderne, on constate pratiquement que chaque équipement ou appareil de mesure comprend un ou plusieurs microprocesseurs. Il convient donc, à

l'intérieur du système de mesure de convertir le signal analogique représentant la grandeur que l'on veut mesurer, en une valeur numérique que l'on pourra traiter dans le processeur. Les signaux de sortie d'un capteur sont généralement petits, il est donc nécessaire de les amplifier. D'autre part le capteur doit être placé à un endroit bien précis du processus, à une distance appréciable de l'équipement de mesure (de l'ordre du mètre - p.e. oscilloscope, à plusieurs centaines de mètres - pour de grands systèmes).

Il faut donc transmettre l'information entre le capteur et le système de mesure proprement dit. L'information concernant la grandeur à mesurer va ainsi traverser une série d'éléments et d'appareils avant d'apparaître comme résultat de mesure. Cette succession d'appareils ou éléments est appelée une **chaîne de mesure**.

**Déf. Chaîne de mesure :** succession d'appareils et d'éléments assurant la transmission et la transformation de l'information entre le capteur et le résultat de mesure.

**Déf. Mesurande X (measurand) :** grandeur d'entrée que l'on désire mesurer

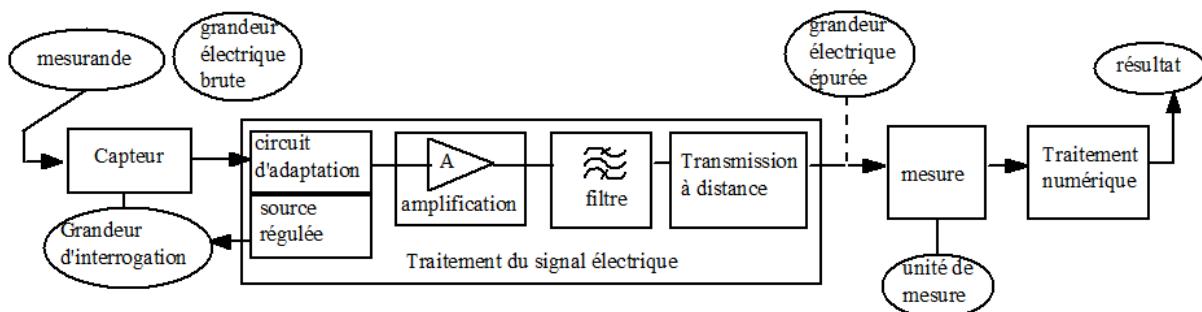


FIGURE 3.2 – Eléments d'une chaîne de mesure. De gauche à droite : le **capteur**, puis le bloc du **traitement de signal** (électrique en général), suivi du **circuit de mesure**.

Comme on peut le voir sur la figure 3.2, une chaîne de mesure comprend toujours au moins trois éléments : le capteur, un circuit de traitement du signal électrique et un élément de mesure.

- Le capteur convertit le mesurande en une grandeur électrique brute (caractéristique non linéaire, bruit et perturbations ajoutés à l'information)
- Le traitement du signal électrique, constitué d'un ou plusieurs éléments, utilise l'information contenue dans la grandeur électrique brute pour obtenir une grandeur électrique épurée, dotée d'un meilleur rapport signal/bruit et d'une exploitabilité facilitée. Ensuite on pourra la manipuler facilement, l'amplifier, la transmettre sur une distance suffisante. Par exemple si la grandeur électrique brute est une résistance, un circuit devra injecter un courant dans la résistance pour obtenir une tension proportionnelle, c'est le conditionneur ; après il faudra probablement soustraire de sa sortie la valeur équivalente au zéro du mesurande. Dans la plupart des cas le conditionneur et l'amplificateur de transmission sont incorporés dans le

même boîtier, désigné comme transmetteur. Ce dernier peut même être monté à l'intérieur de la structure du capteur proprement dit, l'utilisateur ne pouvant alors choisir qu'une ou deux options de grandeur électrique de transmission. A l'autre extrémité du canal de transmission on trouve un récepteur capable de décoder le signal transmis avant de l'appliquer au circuit de mesure.

- La mesure proprement dite consiste à comparer le signal épuré avec l'équivalent de l'unité de mesure, pour obtenir une valeur numérique de représentation du mesurande (un convertisseur A/D comprend toujours une tension de référence interne représentant l'unité de mesure ; dans un appareil analogique l'unité de mesure est matérialisée : ce sont les marques sur l'écran d'affichage de l'appareil)
- Un traitement numérique de la mesure peut encore être ajouté à la chaîne pour améliorer l'élimination du bruit, linéariser le résultat ou combiner les valeurs de plusieurs mesurandes en un résultat de mesure indirecte (par exemple déduire une énergie de la mesure d'un débit et d'une différence de température). Une transmission à distance peut également intervenir à ce niveau, vers un régulateur, un ordinateur central ou une salle de commande.

Certains éléments de la chaîne de mesure peuvent être partagés entre plusieurs mesurandes (économie de place, coût de l'installation) mais la conception et l'analyse du système de mesure peut toujours mener à une décomposition en chaînes de mesure affectées momentanément à chaque mesurande.

## 3.2 Transducteurs : capteurs et actionneurs

**Déf. Transducteur (transducer) :** Tout élément assurant la liaison entre le monde physique (processus à contrôler, expérience, appareil à vérifier) et l'instrumentation proprement dite. Il convertit la grandeur physique en une grandeur mesurable, ou à l'inverse, il convertit une grandeur générée par le système de mesure en une grandeur physique permettant d'agir sur le processus.

**Déf. Capteur (sensor) :** Élément transducteur destiné à la mesure proprement dite : Conversion d'une grandeur physique du processus en une grandeur (généralement électrique) d'entrée du système de mesure. Par exemple un thermocouple est un capteur de température, dont la sortie est une tension électrique dépendant de la température.

**Déf. Actionneur (actuator) :** Élément transducteur destiné à l'action sur le processus : Conversion d'une grandeur de sortie du système de mesure en une grandeur physique agissant sur le processus. Par exemple une pompe est un actionneur.

Le capteur est construit pour exploiter une propriété de la matière, décrite par une **loi physique**, permettant de connaître la correspondance entre la grandeur électrique

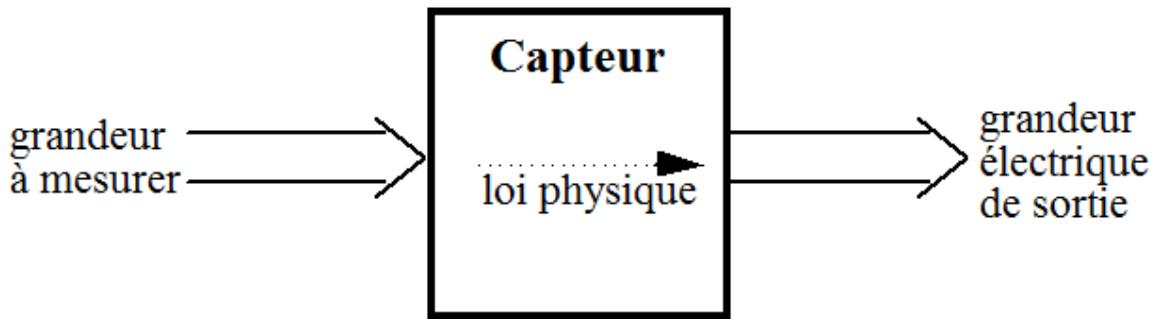


FIGURE 3.3 – Capteur idéal

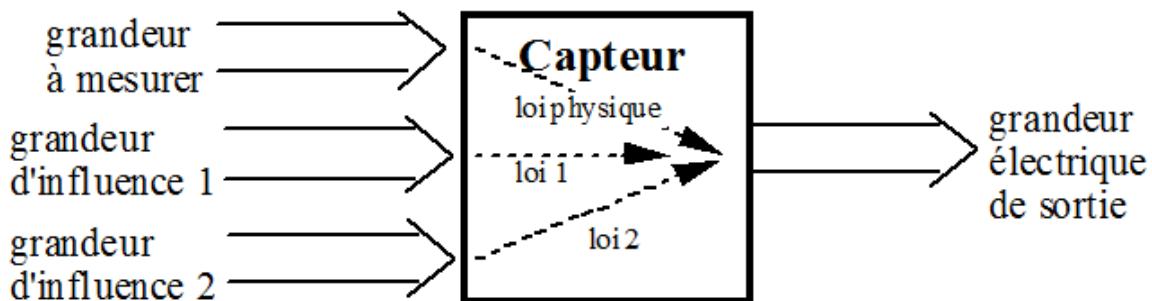


FIGURE 3.4 – Capteur réel

à la sortie du capteur et la grandeur physique à mesurer. Par exemple, pour mesurer une pression, on peut utiliser la résistance d'un fil et exploiter la loi de la piézorésistivité exprimant la variation de la résistance en fonction de la déformation du fil imposée par la pression. Ainsi à chaque valeur de la résistance correspond une valeur particulière de la pression et la loi physique nous permet de calculer la pression à partir de la mesure de la résistance du capteur. Attention de ne pas confondre avec la piézoélectricité, qui consiste en une génération ou absorption de charges électriques en fonction de la déformation du matériau.

Malheureusement le capteur étant un élément réel, le comportement de la grandeur de sortie ne peut être décrit par une seule et unique loi physique : Tout irait bien si, dans notre exemple, la déformation du fil n'était due qu'à la pression ; en fait des vibrations, ou une modification de la température peuvent également provoquer une légère déformation du fil, donc une variation non désirée de la résistance ; plus grave encore, la température provoque directement une variation de la résistance, indépendante de la déformation et décrite par une autre loi physique.

Il faut donc bien admettre qu'un capteur n'est jamais idéal, et qu'il doit être représenté par une combinaison de lois physiques, reliant la grandeur de sortie à différentes grandeurs d'entrées. L'une d'entre elles est la grandeur que l'on désire mesurer, appelée le

**mesurande**, les autres sont des **grandeurs d'influence** car elles modifient la sortie et nous font croire à une variation de la grandeur désirée : le résultat de mesure est influencé par ces grandeurs.

**Déf. Grandeurs d'influence Zi** : toutes les grandeurs d'entrée non désirées du système, dont l'effet sera de modifier la grandeur de sortie.

- Les grandeurs d'influence les plus courantes sont :
- La température - elle modifie les valeurs des composants électriques (dimensions, résistivité, tension de seuil dans les composants à semi-conducteur ....)
- les tensions d'alimentation - elles modifient la polarisation des éléments, donc leur caractéristique, et indirectement leur température
- Le temps - Les éléments vieillissent et se modifient avec le temps, d'où une dérive lente des caractéristiques
- L'humidité relative - modifie la constante diélectrique des isolants, provoque des courants de fuite

### 3.3 Résolution du problème de mesure

Dans le processeur du système ou de l'appareil de mesure, on ne dispose que de la sortie numérique  $Y$  de la chaîne de mesure. Le problème est donc d'estimer la valeur du mesurande, à partir de la sortie  $Y$ , et de la connaissance de la caractéristique de la chaîne. Sachant que  $Y$  dépend non seulement de  $X$ , mais aussi des tolérances de fabrication, des grandeurs d'influences, du bruit interne dans les éléments de la chaîne, des perturbations ajoutées par l'environnement, ainsi que de l'effet produit par la présence du capteur sur l'objet mesuré, une solution exacte est impossible.

Il convient donc d'établir un modèle mathématique de la chaîne de mesure, valable dans un certain domaine des conditions d'utilisation, et représentant une approximation de la réponse réelle,

$$Y = \mathcal{F}(X) \quad (3.1)$$

L'opération mathématique inverse ne nous donnera qu'une estimation de la valeur du mesurande,

$$X_m = \mathcal{F}^{-1}(Y) \quad (3.2)$$

**Déf. Vraie valeur  $X$**  : Valeur du mesurande, qu'on ne connaîtra jamais exactement.

**Déf. Valeur mesurée  $X_m$**  : Valeur indiquée par l'appareil de mesure, estimation de  $X$ .

Le fabricant d'un instrument de mesure ne peut spécifier l'incertitude de son appareil que pour un domaine bien défini des grandeurs d'influence, et en l'absence de perturbations externes.

Une fois qu'on a obtenu une estimation  $X_m$  du mesurande, il reste à déterminer quelle confiance on peut accorder à ce résultat. C'est là tout le problème de l'analyse des mesures.

**Déf. Validité des mesures :** Degré de confiance que l'on peut accorder au résultat chiffré de la mesure.

En d'autres termes il s'agit de déterminer si l'on mesure vraiment ce que l'on désire, et d'analyser les causes d'erreurs qui peuvent influencer le résultat. Quelque soit l'équipement utilisé, la méthode d'analyse permettant de répondre à ces questions restera la même, alors que le choix proprement dit de la méthode et des appareils exige une connaissance plus détaillée des principes de mesure de la grandeur concernée.

A titre d'exemple, prenons un capteur de température dans une buse d'injection de PVC (fabrication de pièces injectées), réalisé au moyen d'un thermocouple. Si le montage est parfait, la température indiquée est celle du thermocouple, reste à savoir s'il s'agit bien de la température que l'on désire mesurer : pour éviter l'usure, il faut monter le capteur dans la paroi de la buse d'injection. Quelle est l'influence des échanges thermiques entre la masse à injecter, les parois de la buse et le thermocouple ? De plus le signal électrique fourni par le capteur est de l'ordre de quelques millivolts, et dépend de la température ambiante. L'appareillage tient-il correctement compte de la température ambiante ? Les moteurs utilisés dans l'équipement d'injection ne rayonnent-ils pas suffisamment de champ électrique et magnétique pour induire une tension parasite s'ajoutant au signal du thermocouple ? La validité des mesures dépendra des réponses à toutes ces questions.

L'exemple ci-dessus nous montre qu'en plus de l'incertitude de l'instrumentation l'analyse de la validité des mesures doit tenir compte des interactions du système de mesure avec l'objet que l'on veut mesurer ainsi qu'avec tout son environnement.

L'analyse de la validité des mesures consiste à vérifier l'ordre de grandeur des différentes causes d'erreur :

- modèle mathématique (non-conformité, ou non-linéarité)
- effet des grandeurs d'influence (modification du comportement de la chaîne)
- bruit interne (limite de détection)
- perturbations provoquées par l'environnement externe (compatibilité électromagnétique)
- effet de charge (échange d'énergie entre l'objet mesuré et la chaîne de mesure)

## 3.4 Modèle mathématique

Du fait des fluctuations possibles de la fonction  $\mathcal{F}(X)$ , les fabricants se contentent de spécifier une approximation mathématique aussi simple que possible à résoudre. Cette approximation ne sera bien sûr pas valable quelle que soit la valeur du mesurande, mais elle se limite à un intervalle bien précis, appelé **étendue de mesure**.

**Déf. Etendue de mesure :** Domaine des valeurs du mesurande dans lequel le modèle mathématique est valable. En d'autres termes c'est le domaine du mesurande pour lequel le fabricant peut garantir l'incertitude de mesure.

Bien entendu, l'étendue de mesure sera toujours limitée. Au-delà, soit la sortie diverge, soit elle sature. Par exemple sur un simple amplificateur, lorsque la sortie s'approche de la tension d'alimentation, une saturation intervient.

## 3.5 Forme linéaire, ou linéarisation du modèle de la chaîne de mesure

C'est la forme mathématique que l'on retrouve dans la grande majorité des cas. En effet, quelque soit la forme de  $\mathcal{F}(X)$ , pour une étendue de mesure suffisamment faible il est toujours possible de remplacer la courbe  $\mathcal{F}(X)$  par un segment de droite. Nous l'écrirons

$$Y = G \cdot X + O \quad (3.3)$$

où le facteur de multiplication  $G$  est le **gain** linéaire de la chaîne de mesure, et  $O$  est l'offset, extrapolation de  $Y$  en  $X = 0$ .

### 3.6 Forme polynomiale du modèle de la chaîne de mesure

Lorsque l'étendue de mesure désirée ne permet plus une approximation linéaire, on utilise souvent un polynôme de degré  $n$  :

$$Y = a_0 + a_1 \cdot X + a_2 \cdot X^2 + \dots + a_n \cdot X^n \quad (3.4)$$

La forme générale de la réponse est donnée par les  $n + 1$  coefficients  $a_0$  à  $a_n$ . Ceux-ci sont en général imposés par le type de capteur plutôt que par la chaîne de mesure, mais en général, dans la chaîne, au moins un amplificateur permet d'ajuster tant le décalage  $a_0$ , qu'un gain global, facteur de multiplication des coefficients  $a_1$  à  $a_n$ .

La résolution du problème de mesure implique l'inversion de la fonction, ce qui revient à utiliser un autre polynôme de degré  $n$  exprimant  $X$  en fonction de  $Y$ ; c'est souvent ce polynôme qui est recherché par régression mathématique :

$$X_m = c_0 + c_1 \cdot Y + c_2 \cdot Y^2 + \dots + c_n \cdot Y^n \quad (3.5)$$

**Exemple de modèle quadratique : capteur de débit à déprimogène** En plaçant un obstacle dans un fluide dont on désire mesurer le débit (constitué d'un diaphragme, d'un tube Venturi, Pitot ou autre), on provoque localement une différence de pression proportionnelle au carré de la vitesse du fluide à mesurer (loi de Bernoulli,  $\Delta p = a_2 v^2$ ). En mesurant la perte de pression, on peut donc mesurer la vitesse du fluide, et partant, son débit, si le fluide est par exemple confiné dans un tube. En pratique, cependant,  $a_2$  ne peut être considéré comme constant que pour une étendue de mesure assez limitée : débits variant dans un rapport 1 à 3 seulement, car d'autres lois interviennent (détente adiabatique, frottements, turbulence etc.).

**Exemple de modèle polynomial à degré élevé : mesure de température par thermocouple** Un thermocouple (TC) est la combinaison de 2 conducteurs de matériau différents A et B. La jonction chaude (ou soudure chaude, dont on veut mesurer la température) est le point de contact entre A et B. Les jonctions froides (ou soudures froides) sont les liaisons de A et B avec le circuit de mesure (fils de cuivre). Elles sont en principe à la température ambiante.

La tension que le TC produit est uniquement fonction des températures des jonctions chaude et froides, et est de l'ordre de 5 à 50  $\mu\text{V}/^\circ\text{C}$  selon les types de matériaux. Les fabricants fournissent des tables indiquant degré par degré la tension produite lorsque les jonctions froides sont à  $0^\circ\text{C}$ . Puisque ces dernières sont, en pratique, à la température ambiante, il est indispensable de prévoir une correction. Pour de grands domaines de températures, cette opération exige d'utiliser, pour le modèle, un polynôme du 9ème degré.

## 3.7 Loi physique du capteur

Enfin, plus rarement, le modèle découle directement de la loi physique exploitée dans le capteur, si besoin corrigée et complétée par des termes de type expérimental.

**Exemple : Mesure de température par thermistance** Une thermistance est une résistance en mode semi-conducteur, dont la valeur varie avec la température, selon

$$R(T) = R_{25} \exp \left[ b \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{298} \right) \right] \quad (3.6)$$

où  $T$  est en kelvin,  $R_{25}$  est la résistance à 25°C, c-à-d 298°K, et  $b$  un coefficient (en kelvin) caractéristique du semi-conducteur. En inversant la fonction on trouve :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{b} \ln \left( \frac{R}{R_{25}} \right) + \frac{1}{298} = A + B \ln R \quad (3.7)$$

L'expérience montre cependant que le coefficient  $b$  ne peut être considéré comme constant que dans un faible domaine de température (15 à 25°C), par conséquent l'équation ci-dessus a été complétée (à la manière polynomiale) suivant

$$\frac{1}{T} = A + B \ln R + C \ln^3 R \quad (3.8)$$

Cette expression est alors valable dans un domaine de 100 à 150°C avec une incertitude de l'ordre de 0.01° C.

## 3.8 Erreurs de non conformité ou de non-linéarité

A l'intérieur du domaine de mesure, le modèle mathématique ne fait que s'approcher et lisser la réponse réelle. Ceci conduit à des erreurs que l'on appelle de manière générale erreurs de non-conformité, ou de non-linéarité dans le cas d'un modèle linéaire. Ces notions seront traités dans le chapitre 4.

## 3.9 Bruit interne

La conduction électrique se faisant par déplacement de charges électriques élémentaires, le signal de sortie ne peut être rigoureusement constant même si les conditions d'utilisation ne changent pas. On constate l'addition d'un petit signal aléatoire à l'information souhaitée : c'est le bruit interne d'agitation thermique dans les résistances, ou le bruit de grenaille typique dans les jonctions de semi-conducteur. Si ces bruits sont généralement négligeables, ils représentent cependant la limite absolue de détection du circuit : en effet, pour pouvoir distinguer une variation du signal, il faut que celle-ci soit significativement plus grande que la fluctuation aléatoire du bruit interne du système.

## 3.10 Grandeurs d'influence

Comme déjà indiqué, la grandeur de sortie d'un capteur dépend non seulement du mesurande, mais également d'autres grandeurs physiques, comme la température par exemple. Ces autres grandeurs physiques sont appelées grandeurs d'influence.

La spécification d'incertitude, donnée par le fabricant, tient compte du bruit interne ainsi que des grandeurs d'influences, dans un domaine particulier, qu'il se doit d'indiquer dans les spécifications, par exemple  $23 \pm 5^\circ\text{C}$ , alimentation  $220 \text{ V} \pm 10\%$ .

Le rôle de l'opérateur est donc d'abord de vérifier que les grandeurs d'influence sont bien à l'intérieur du domaine prévu par le constructeur, au moment où l'on effectue les mesures. Ensuite seulement, il pourra utiliser l'incertitude comme critère de validité. Lorsque les grandeurs d'influence sortent des domaines d'utilisation prévus, il convient de tenir compte des coefficients d'influence, ou de calibrer l'instrumentation.

## 3.11 Effet de charge

L'interaction entre l'objet à mesurer et le système de mesure exige un transfert d'énergie, si petit soit-il. La présence du capteur, et du système de mesure va donc un tant soit peu modifier l'état du processus que l'on cherche à observer. Il devient donc impossible de connaître l'état qu'aurait le processus en l'absence du système de mesure, mais en choisissant correctement le capteur et le système, on peut minimiser ces effets, et s'approcher de la « vraie » valeur qu'aurait le processus « à vide ».

Le transfert d'énergie, n'est pas la seule cause d'effet de charge : pour pouvoir insérer le capteur à l'endroit de la mesure, il faut généralement modifier la structure de l'objet, donc en modifier le comportement. La difficulté est alors de choisir un capteur et un lieu de mesure permettant d'éviter trop de modifications du comportement du processus, tout en maintenant la possibilité d'obtenir des mesures significatives.

**Déf. Effet de charge (loading effect) :** Modification de l'état du processus et du système de mesure dû aux sorties non désirées du transducteur (échange d'énergie) ou au changement de structure du processus imposé par la présence du transducteur.

### Exemples

1. Un voltmètre a toujours une résistance interne  $R_v$ . La mesure de la tension de charge  $U_b$  d'une batterie de résistance interne  $R_i$  s'accompagne du passage d'un courant  $i = U_b/(R_i + R_v)$ . La puissance transférée au voltmètre est donc  $P = U_v \cdot i$ . L'effet de charge se traduit donc par le fait que le voltmètre ne mesure pas exactement  $U_b$ , mais

$$U_v = U_b \cdot \frac{R_v}{R_v + R_i} \tag{3.9}$$

2. Pour mesurer la résistance d'une jauge de contrainte, il faut faire passer un courant dans le fil. Ce courant provoque un échauffement du capteur, qui se transmet au support et conduit à une modification de la grandeur d'influence (la température), donc de la grandeur de sortie. Il y a effet de charge par échange d'énergie. De plus, le fait de coller la jauge sur son support modifie la constante d'élasticité locale. Pour une même contrainte, la déformation sera légèrement différente : c'est un 2e effet de charge dû à une modification de structure du processus.
3. Pour mesurer la vitesse des gaz à la sortie d'une tuyère, il faut placer une sonde, dans le flux de gaz. Aussi petite que soit la sonde, elle va modifier les lignes de flux. Il y a effet de charge par modification structurelle.

L'effet de charge se traduit par une erreur systématique (= elle se produit toujours dans le même sens : addition d'une petite constante ou multiplication de la valeur mesurée par un facteur proche de l'unité). C'est donc lors de la conception du système de mesure que l'opérateur doit analyser cet effet, et sélectionner une instrumentation adaptée à l'objet mesuré. A noter que puisque l'erreur due à l'effet de charge est systématique, il est possible de la corriger, ce qui est un avantage par rapport aux erreurs de type aléatoires, imprédictibles par nature.

## 3.12 Perturbations

Le fait que les équipements de mesure et de contrôle sont placés dans un environnement naturel les soumet à des perturbations : rayonnements cosmiques, éclairs dans un orage, bruit intrinsèque dans la matière même des éléments. De plus l'activité humaine est également source de perturbations : émission radio et TV, communications haute fréquence, champs électromagnétiques des lignes de distribution d'énergie, des moteurs et générateurs, étincelles d'allumage des moteurs à combustion etc. Dans un appareillage électrique, ces perturbations sont couplées par les champs électromagnétiques dans les circuits, ce qui se traduit par une tension ou un courant perturbateur s'ajoutant au signal sur la grandeur de sortie.

L'appareillage doit répondre à des normes de compatibilité électrique, assurant qu'il n'est pas perturbé par des champs externes, et qu'il n'émet pas trop de perturbations. Par ailleurs le câblage entre appareils peut fort bien fonctionner comme antenne, et introduire des perturbations dans le système de mesure.

Il existe des méthodes pour se protéger contre de telles perturbations, essentiellement par le choix du câblage, du type d'amplificateur, et des méthodes de transmission du signal. Lors de l'analyse de validité, il convient de détecter la présence et l'ordre de grandeur des perturbations. Ceci implique une analyse du signal de sortie, soit sous la forme temporelle mais le plus souvent dans le domaine fréquentiel (déttection d'une composante alternative non liée au mesurande).

## 3.13 Systèmes d'acquisition de données

**Déf. Système d'acquisition de données :** tout ensemble d'appareils interconnectés de manière à permettre l'obtention automatique d'une série de mesure sur un objet. Ce dernier peut aller d'un simple circuit intégré à une chaîne de fabrication complète.

L'analyse et le choix des caractéristiques du système de mesure étant fortement liés à l'application, il est clair qu'il n'est pas possible d'énoncer des règles universelles. L'objectif de ce paragraphe est cependant de donner une vision générale de ces systèmes et de leurs composants. Le choix d'une réalisation doit être le résultat d'un travail de synthèse entre les connaissances des moyens de mesure, des structures possibles et des éléments disponibles.

Tout système d'acquisition comprend au moins une chaîne de mesure. Dès que l'on est en présence de plusieurs chaînes, se pose la question d'une économie de matériel en exploitant un multiplexage, soit sous forme analogique (sortie des conditionneurs ou transmetteurs connectées successivement à un seul convertisseur A/D), soit sous forme numérique (les convertisseurs sont reliés à l'ordinateur au travers d'un bus numérique).

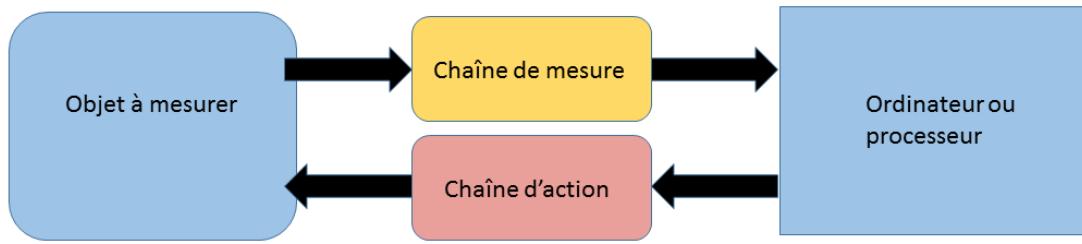


FIGURE 3.5 – Système typique d’acquisition de données

Dans la majorité des cas, il faut pouvoir agir sur l’objet mesuré au moyen de chaînes d’action. L’action recherchée peut être de type tout ou rien (arrêt d’urgence, enclenchement - déclenchement d’une pompe ou d’un chauffage...) ou de type analogique (envoi d’un stimulus, commande d’une vanne proportionnelle, de la vitesse d’un moteur ...). Dans le premier cas un signal logique de sortie de l’ordinateur commande un relais permettant d’appliquer ou non une puissance fixe sur l’actionneur. Dans le second cas la chaîne d’action comprend un convertisseur digital - analogique (D/A) qui commande l’actionneur au travers d’amplificateurs de puissance.

Le coeur du système est son ordinateur ou processeur, chargé de commander la séquence de travail, d’effectuer les calculs nécessaires au traitement numérique, d’assurer le sauvegarde et la transmission des données ainsi que de la communication avec l’opérateur du système. Selon le type d’application on peut se contenter d’un simple microcontrôleur, exploiter un processeur de calcul numérique (DSP) ou devoir exploiter un ordinateur haut de gamme.

### 3.14 Architectures

Les cartes universelles d’acquisition permettent de réaliser à bon marché des applications d’acquisition et de contrôle de processus. Il ne faut pas oublier cependant que leur résolution et leur précision sont limitées, qu’elles sont sujettes à passablement de bruit (terre de l’ordinateur largement perturbée par les transitoires de la logique rapide) et que les fréquences d’échantillonnage sont limitées tant par le nombre de canaux à mesurer que par la nécessité de les commander directement par le processeur.

Les figures 3.6 et 3.7 présentent une architecture de carte d’acquisition universelle. On constate que l’entrée analogique est formée de 2 multiplexeurs et non d’un seul. Cela permet d’effectuer des mesures différentielles, dans le but d’éliminer les perturbations communes aux deux fils de connexion, à savoir le signal et sa référence si la liaison est asymétrique, ou le signal positif et le signal négatif si la transmission est différentielle. On notera que sur chacun des cas d’entrée ou de sortie, une référence de tension est présente. Sa précision et sa stabilité sont essentielles pour garantir la qualité des mesures.

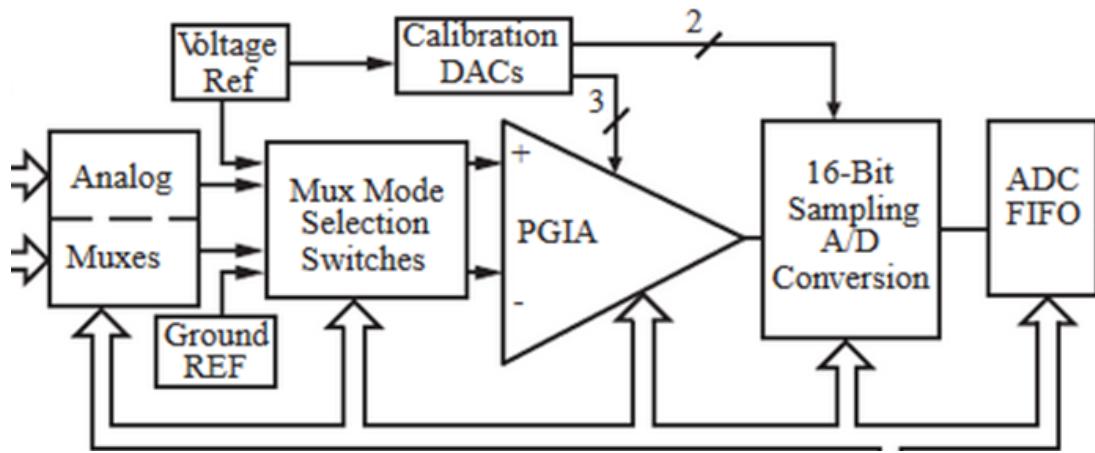


FIGURE 3.6 – Carte universelle d’acquisition : entrées analogiques.

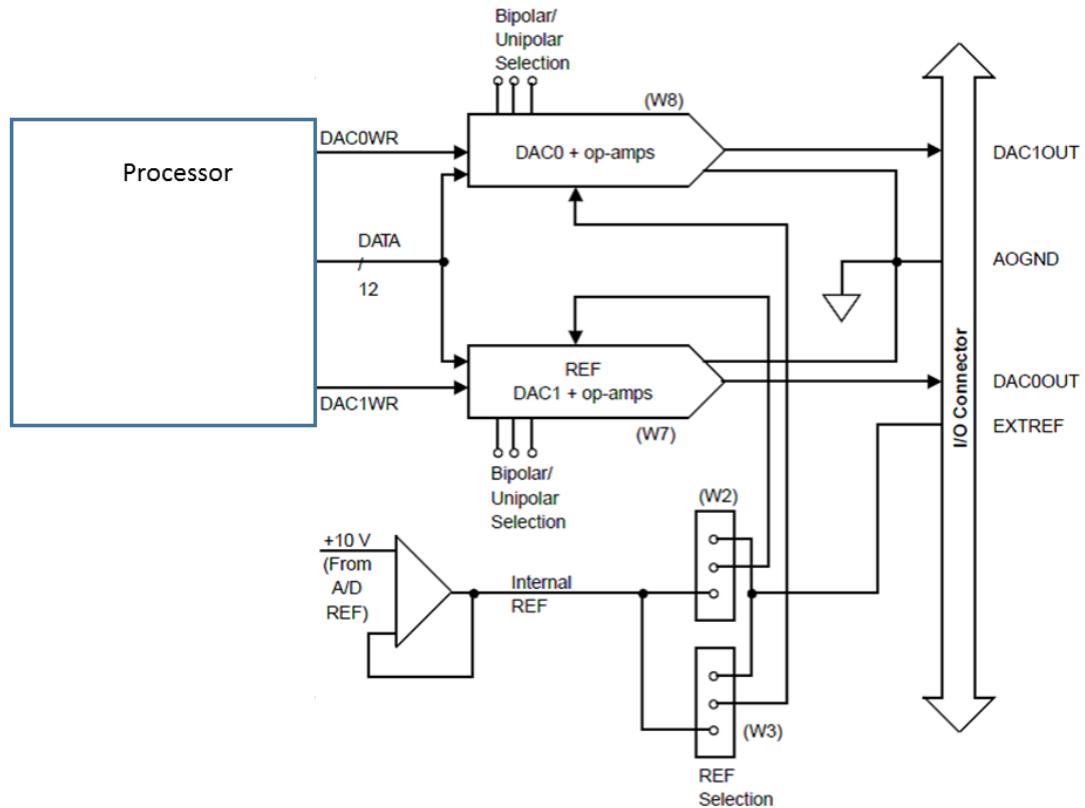


FIGURE 3.7 – Carte universelle d’acquisition : sorties analogiques.

### 3.15 Modes du multiplexeur

Trois modes de fonctionnement du multiplexeur analogique sont à disposition :

- SE - Asymétrique : Fig. 3.8. Le multiplexeur relie l'une des 16 bornes d'entrée (Ain0 à Ain15) à l'entrée « hi »du PGA, alors que l'entrée « lo »est mise à la masse (gnd) de la carte. On mesure ainsi le potentiel de la borne correspondante par rapport à la carte. Cette méthode est donc dangereuse, si les sources de signal sont référencées à la masse locale : le bruit au niveau de la masse du pc s'ajoute aux signaux mesurés. A n'utiliser que pour des sources de signal flottantes dont on pourra connecter la borne de référence à la masse de la carte!!
- RSE - pseudo-différentiel ou asymétrique à référence externe : Fig. 3.9. le multiplexeur fonctionne de la même manière, mais la borne « lo »du PGA est reliée à la borne « Aisense »du connecteur externe. Il faut alors relier cette borne à la référence zéro (généralement la masse) de l'objet à mesurer. On élimine ainsi les problèmes de bruit au niveau de la masse du PC. Cependant toutes les sources de signal doivent être reliées à ce même point commun « Aisense ».
- Diff - Vrai différentiel : Fig. 3.10. le multiplexeur est séparé en deux parties travaillant simultanément : la partie A relie le canal i (Ain0 à Ain7) à la borne « hi », pendant que la partie B relie la borne correspondante i+8 (Ain8 à Ain15) à la borne « lo ». On mesure alors vraiment la différence de potentiel entre un couple de bornes (Ain0 et Ain8, Ain1 et Ain9 ...), mais on ne dispose plus que de 8 canaux. La seule exigence à respecter est que le mode commun reste dans le domaine supporté par le PGA, soit que chacune des bornes reste dans le domaine de  $\pm 11V$  par rapport à A-gnd (masse de la carte).

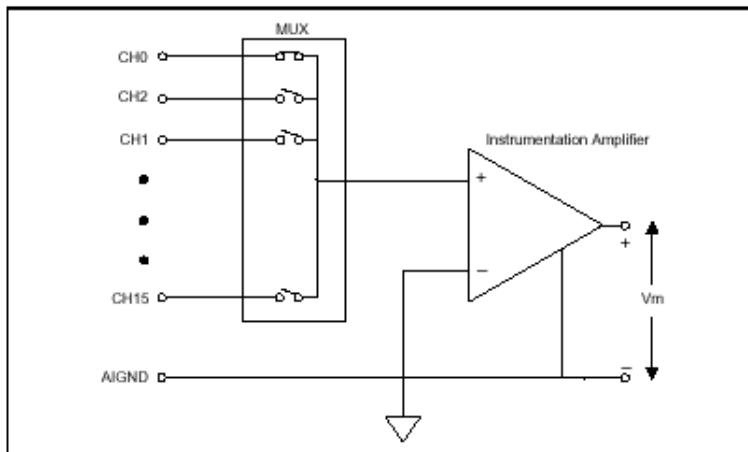


FIGURE 3.8 – Mesure asymétrique (SE = Single Ended).

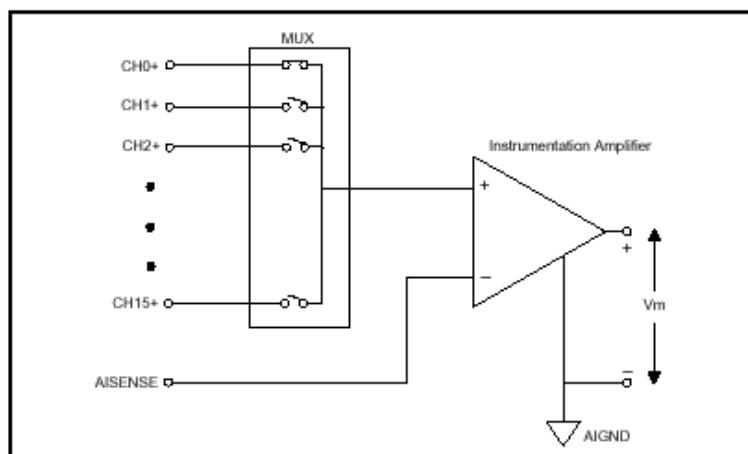


FIGURE 3.9 – Mesure Pseudo-différentielle ou Asymétrique référencée (RSE = Referenced Single Ended).

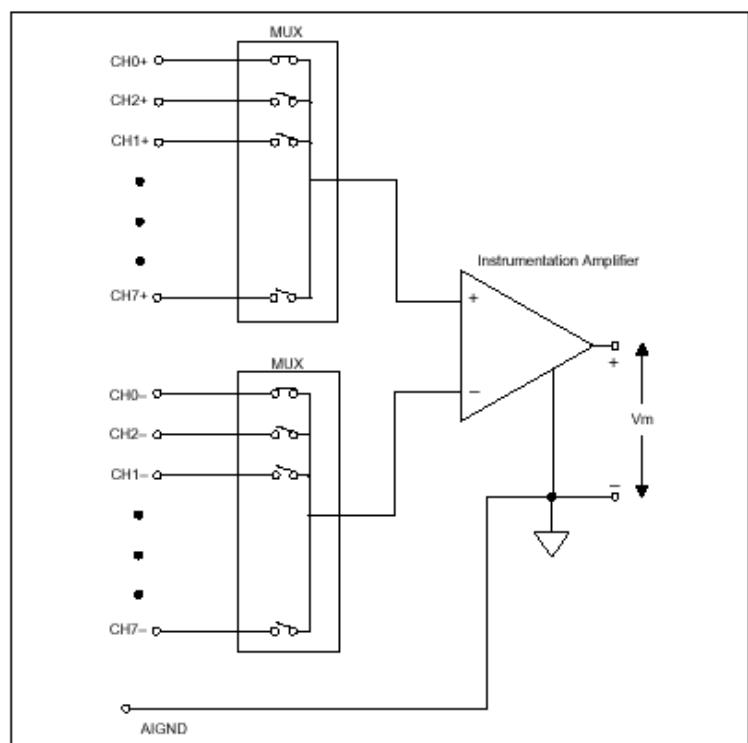


FIGURE 3.10 – Mesure différentielle.

## 3.16 Sources flottantes et courants de polarisation

Lorsqu'on mesure une source flottante, il faut prévoir un chemin de retour vers A-gnd pour les courants de polarisation du PGA (mode RSE et Diff). L'absence d'un tel chemin galvanique provoquerait la saturation du PGA. Ces courants sont inférieurs à 200 pA. Une résistance de l'ordre de 100 kOhms contre A-gnd, suffit, mais afin de ne pas dégrader le taux de réjection du mode commun, il est préférable de connecter une résistance sur chacune des deux entrées (hi et lo). Le dimensionnement de ces résistances se fait en fonction du mode commun : ce montage ajoute un mode commun de  $(200 \text{ pA} * 100\text{kOhms}) = 20 \text{ uV}$  généralement négligeable. On voit qu'on pourrait sans autre fortement augmenter la valeur des résistances.

## 3.17 Conditionnement des signaux

Bien que le fait de disposer d'un PGA permette un grand choix des gammes de mesures (100mV à 10V en unipolaire et +/-50mV à +/-10V en bipolaire), la plupart des applications exigent d'utiliser des circuits de conditionnement (capteur, atténuateur, amplificateur, shunt ...) avant de relier les signaux à la carte. Le pilote de la carte est généralement capable de tenir compte automatiquement du gain du PGA. Il peut ainsi fournir les résultats des conversions selon deux options :

- en V au niveau du connecteur d'entrée (nombre réel).
- ou directement le code de conversion sous forme d'un nombre entier (+/-2048).

C'est à l'utilisateur de tenir compte des caractéristiques de conditionnement pour calculer l'équivalent de la grandeur mesurée en unités physique (degrés Celsius, Bar, Kg ...)

## 3.18 Les différents types de signaux

Un système de mesure transforme une **entrée**, en règle générale une grandeur physique, en un signal de **sortie**. Différents types de signaux sont transmis entre les capteurs, les conditionneurs et la sortie du système.

On peut classifier les signaux en trois catégories selon leur représentation temporelle et les valeurs prises par la quantité mesurée (fig. 3.11) :

**Un signal continu** est défini pour toutes les valeurs du temps et peut prendre n'importe quelle valeur en amplitude,

**Un signal discret** est en général un signal continu qui est mesuré à certains instants seulement, mais il peut aussi s'agir d'un signal naturellement discontinu, tel que le nombre de photons reçus par un détecteur pendant une certaine durée de temps, un nombre de véhicules par tranche d'heure sur une route, etc.

**Un signal numérique** est un signal discret quantifié sur un certain nombre de niveaux (généralement des puissances de 2) et qui ne peut prendre qu'un ensemble discret de valeurs, par exemple la numérisation d'un signal électrique de -10 à +10 V sur 8 bits non signés, de 0 à 255.

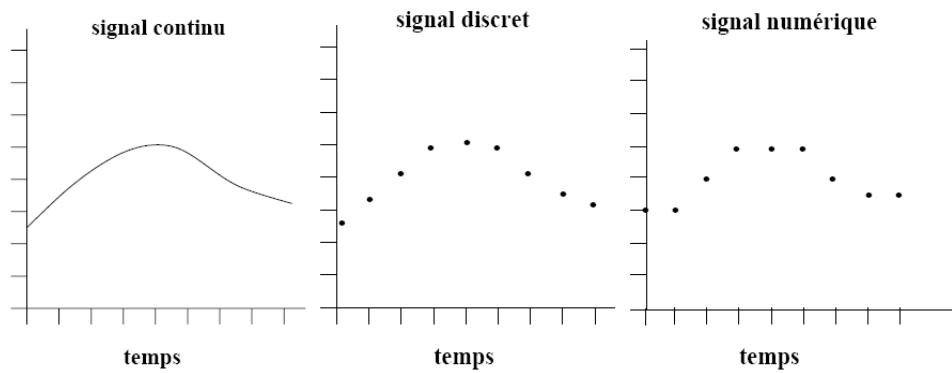


FIGURE 3.11 – Les trois types de signaux les plus fréquents.

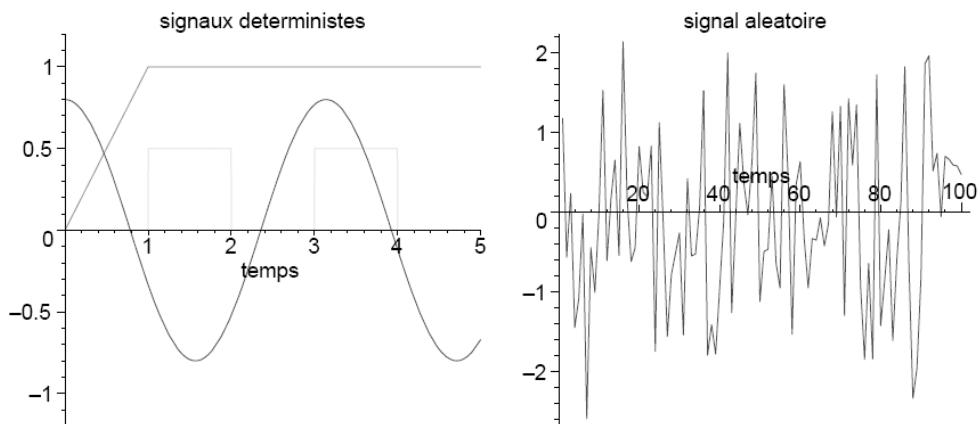


FIGURE 3.12 – Signaux déterministes et aléatoires.

En fonction du phénomène physique qu'ils représentent, il faut aussi distinguer les signaux **déterministes**, c'est-à-dire les signaux pour lesquels les valeurs futures peuvent être prédites, et les signaux **aléatoires** qui ne sont pas prédictibles et qui nécessitent un traitement spécifique (fig. 3.12).

## 3.19 Exercices

### 3.19.1 Exercice : Résistances de polarisation

La carte d'acquisition MIO16 du labo est spécifiée avec une impédance d'entrée de  $100G\Omega$  en parallèle avec  $50\text{ pF}$ . Le courant de polarisation d'entrée est de  $\pm 200\text{ pA}$ , et le domaine des tensions d'entrée (signal + mode commun) est de  $\pm 11V$ .

Dimensionner les résistances de polarisation à brancher entre les entrées et la terre A-Gnd de la carte, pour des sources flottantes, dans le cas d'une gamme de mesure de  $\pm 50mV$ , et dans le cas d'une gamme de mesure de  $\pm 5V$ , en mode différentiel.

### 3.19.2 Exercice : Fréquence de scrutation

La carte d'acquisition MIO16 du labo est spécifiée avec une impédance d'entrée de  $100G\Omega$  en parallèle avec  $50\text{ pF}$ . Le convertisseur est un 12 bits - 100 kéch/s. On l'utilise pour mesurer 4 canaux dont les impédances de sortie sont de  $5k\Omega$ . Déterminer s'il faut changer la fréquence de scrutation (critère : établissement à 1 LSB), et quelle est la fréquence maximum d'échantillonnage que l'on pourra obtenir.

### 3.19.3 Exercice : Multiplexage et déphasage

A l'aide d'une carte 250 kéch/s, on mesure 5 canaux. Calculer quel est le déphasage maximum entre les canaux introduit artificiellement par le multiplexage, en fonction de la fréquence des signaux, ainsi qu'à 1kHz et à 10 kHz.



# Chapitre 4

## Modélisation de la chaîne

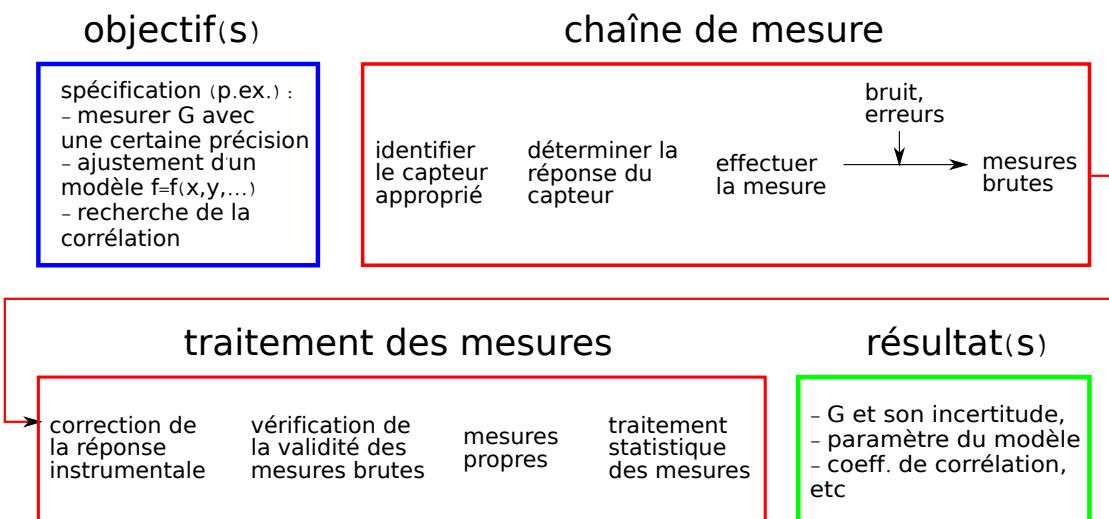


FIGURE 4.1 – Techniques de mesure : étapes clés

Retenant le schéma bloc des étapes clé des techniques de mesure, nous souhaiterions aborder le traitement des mesures. Toutefois nos connaissances de la chaîne de mesure sont encore insuffisantes : nous devons maintenant comprendre comment modéliser la chaîne de mesure afin d'avoir les outils et informations nécessaires aux traitements mathématiques qui vont suivre.

Pour résoudre le problème de la mesure, à savoir retrouver la valeur du mesurande à partir de la sortie du capteur, il faut inverser la fonction mathématique  $F(X)$  liant le mesurande à la sortie. La difficulté vient du fait que  $F(X)$  est mal définie : du bruit s'ajoute au signal de sortie, les grandeurs d'influence modifient la fonction, les tolérances de fabrication conduisent à une fonction réelle légèrement différente de la fonction nominale.

De plus les lois physiques qui régissent le capteur et la chaîne de mesure peuvent conduire à une expression mathématique complexe de la fonction.

## 4.1 Approximations mathématiques

Nous avons vu au chapitre 1 que les approximations mathématiques pouvaient être faites au travers de modèles de formes mathématiques diverses : linéaire, polynomiale ou découlant directement de la loi physique exploitée dans le capteur. Pour la suite de l'analyse, **nous ne considérerons ici que le cas linéaire.**

## 4.2 Incertitudes

Le modèle linéaire est une droite, ne passant pas nécessairement par l'origine, approchant au mieux la caractéristique de la chaîne de mesure :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{G} \mathbf{X} + \mathbf{Of}$$

Cette équation fait intervenir les deux paramètres G et Of, caractéristiques de la chaîne.

**Déf. Gain (G) :** Pente de la caractéristique entrée-sortie

**Déf. Décalage (Of) :** Ordonnée à l'origine du modèle linéaire (de l'anglais "offset")

Il est fondamental de ne jamais oublier qu'il ne s'agit là que d'une approximation de la courbe de réponse (forme de la réponse pas tout à fait droite, tolérances de fabrication), et de plus que cette approximation est variable dans le temps, en raison des grandeurs d'influence (vieillissement, température, ...) ou des conditions d'utilisation (effet de charge, perturbations,...). Le fabricant nous indique les valeurs nominales du gain et du décalage  $G_{nom}$  et  $Of_{nom}$ . On résout le problème de mesure sur la base de ces valeurs nominales, et l'on obtient alors une estimation  $X_m$  de la grandeur d'entrée X :

**Déf. Erreur absolue (e) :** Ecart entre la valeur mesurée et la vraie valeur  $e = X_m - X$

**Déf. Erreur relative ( $\epsilon$ ) :** Quotient entre erreur absolue et vraie valeur  

$$\epsilon = \frac{e}{X} \cong \frac{e}{X_m}$$

Pour analyser l'erreur, il faut tenir compte des écarts entre la courbe réelle et son approximation linéaire dans les conditions de mesure, ainsi que du fait que cette approximation diffère légèrement de la droite nominale. Nous écrivons donc une nouvelle

expression de la sortie Y

$$Y = G_{reel}X + Of_{reel} + L(X, t) \quad (4.1)$$

où  $G_{reel}$  et  $Of_{reel}$  représentent le modèle linéaire actuel, tenant compte des grandeurs d'influence et effets de charge.  $L(X, t)$  représente l'écart entre la courbe et la droite du modèle actuel, ainsi que le bruit ajouté à la sortie. On ne connaît jamais ces trois termes, mais un étalonnage dans des conditions données des grandeurs d'influence permet au fabricant de spécifier les écarts maximum. Exprimons l'erreur :

$$e = X_m - X = Y - \frac{Of_{nom}}{G_{nom}} - X = \frac{G_{reel}X + Of_{reel} + L - Of_{nom}}{G_{nom}} - X \quad (4.2)$$

$$e = X \cdot \left( \frac{G_{reel}}{G_{nom}} - 1 \right) + \frac{Of_{reel} - Of_{nom}}{G_{nom}} + \frac{L}{G_{nom}} \quad (4.3)$$

c-à-d

$$e = X \cdot \alpha + D + NL \quad (4.4)$$

On constate alors que l'erreur est la somme de trois termes. Les deux premiers expriment des erreurs systématiques fonctions des grandeurs d'influence (dérive du modèle linéaire par rapport aux valeurs nominales), le troisième peut être assimilé à une erreur aléatoire.

**Déf. Erreur de gain ( $\alpha$ ) :**

Erreur relative du gain de la chaîne : Gréel - GnomGnom . Correspond à une rotation de la courbe autour de l'origine. Provoque une erreur systématique proportionnelle au mesurande (calculable seulement si l'on connaît toutes les grandeurs d'influence)

**Déf. Erreur de décalage (D) :**

Erreur absolue à l'origine : Ofréel - OfnomGnom . Correspond à une translation verticale de la courbe de réponse. Provoque une erreur systématique constante, indépendante de X (calculable seulement si l'on connaît toutes les grandeurs d'influence)

**Déf. Erreur de non-linéarité (NL)**

Ecart entre la droite du modèle actuel et la courbe réelle de réponse. Fonction du mesurande, si bien qu'on la considère comme une grandeur aléatoire.

Le fabricant indique l'incertitude de la chaîne ou d'un appareil en combinant ces trois erreurs et le bruit interne.

**Déf. Incertitude de mesure :** Valeur limite que peut prendre l'erreur (en valeur absolue), avec un certain degré de confiance, en général 99 %. En d'autres termes, si l'on a spécifié une incertitude I, la valeur absolue de l'erreur e sera dans 99 % des cas inférieure à I :  $|e| < I$  (99 fois sur 100)

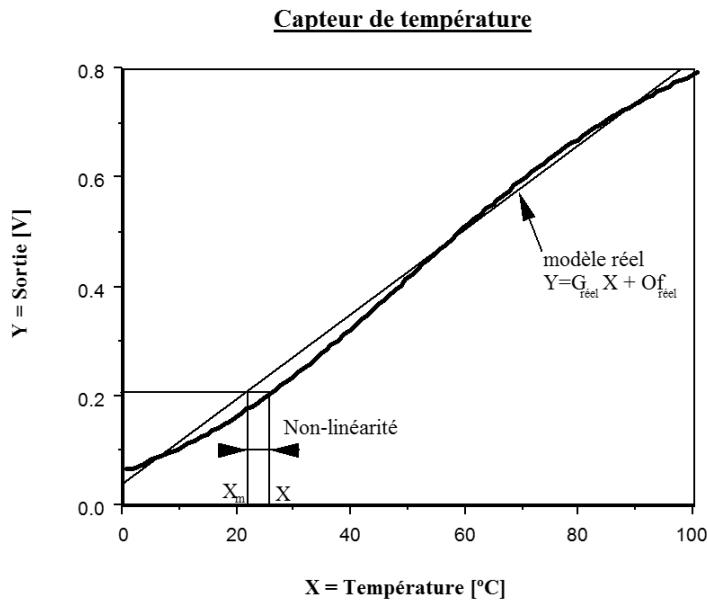


FIGURE 4.2 – Non-linéarité.

La spécification de l'incertitude comprend deux termes, pour tenir compte du fait que l'une des composantes est proportionnelle à  $X$ . L'erreur de gain est toujours spécifiée sous forme d'une valeur relative  $\alpha$  (en %, ‰ ou ppm, soit des facteurs de  $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ , ou  $10^{-6}$ ), alors que l'effet global du décalage, des non-linéarités et du bruit interne est spécifié comme un terme indépendant de  $X$ , soit sous forme absolue  $B$  (unités de  $X$ , ou unités d'affichage : divisions sur un écran analogique, digit sur un affichage numérique), soit sous forme relative  $\beta$  par rapport à une grandeur caractéristique de la chaîne : gamme de mesure, étendue de mesure, ou pleine échelle.

$$I = \alpha \cdot \text{lect} + B \cdot \text{digit} = \alpha \cdot \text{lect} + \beta \cdot \text{gamme} \quad (4.5)$$

La figure 4.3 nous montre que l'incertitude absolue est maximum en haut de gamme, alors que l'incertitude relative tend vers l'infini lorsque  $X$  tend vers zéro. Lorsqu'on doit évaluer l'imprécision d'un système de mesure, on le fera soit en estimant l'incertitude absolue en haut de gamme, soit l'incertitude relative en bas de gamme (recherche du pire des cas).

Lorsqu'on fait l'évaluation d'un mesurande qui évolue dans une plage de variation donnée, on cherchera avantageusement à relativiser l'incertitude par rapport à la pleine échelle (PE, en anglais FS pour "Full Scale") de cette variation, et de l'exprimer alors en %(PE) ou %(FS). Par exemple, l'information fournie par un capteur de pression qui évolue entre 950 et 1100 mbar permet bien de savoir à quel endroit se trouve la pression le long des 150mbar d'évolution possible. Dans ce cas c'est donc bien la pleine échelle qui nous intéressera comme référence.

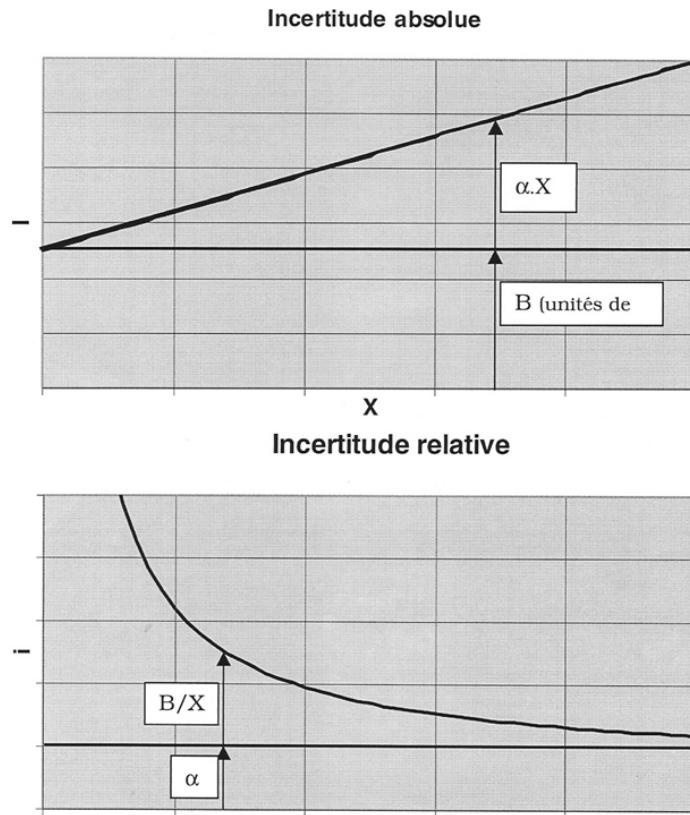


FIGURE 4.3 – Evolution des incertitudes absolues et relatives en fonction du mesurande.

Par ailleurs, lorsqu'on cherche à faire une mesure d'une grandeur avec un appareil donné, on remarquera souvent que la valeur  $B$  augmente quasi-proportionnellement avec la gamme alors que  $\alpha$  reste assez stable quelle que soit la gamme. Ainsi, pour de bonnes mesures il est indispensable de choisir la plus petite gamme de mesure possible. On aura ainsi un  $B$  minimal.

### 4.3 Calibrage et étalonnage

Sur de nombreuses chaînes de mesure on dispose d'un amplificateur avec lequel on peut ajuster le gain et le décalage. On est alors amené, au moment de la mise en service de la chaîne, à ajuster cet amplificateur, de manière à obtenir la réponse la plus proche que possible de l'idéal (modèle nominal). C'est ce qu'on appelle le calibrage (en anglais : gauging ou calibration), opération qui vise à annuler les erreurs de gain et de décalage. Une autre opération consiste, sans modifier la chaîne, à déterminer son modèle réel, et l'écart entre le modèle réel et le modèle nominal. C'est l'opération d'étalonnage(en anglais : calibration). Cette opération peut être faite dans un but de correction ou de vérification.

Dans ce dernier cas, la chaîne est acceptée si elle se trouve dans les tolérances, ou rejetée sinon. Dans le cas de la correction, alors un moteur de correction sera mis en oeuvre par l'utilisateur de la chaîne de mesure pour exploiter non pas le modèle nominal mais le modèle réel mesuré. On notera que la terminologie française est cette fois plus précise que la terminologie anglaise où la distinction entre calibrage et étalonnage ne se fait pas. Ce flou se retrouve en français lorsqu'on utilise l'anglicisme "calibration", alors que ce terme s'applique normalement à des méthodes de datation en dendrochronologie.

**Déf. Étalonnage :** Ensemble des opérations permettant de déterminer le modèle réel de la chaîne de mesure, et donc de déterminer les erreurs de mesure par rapport au modèle nominal.

**Déf. Calibrage :** Ensemble des opérations d'ajustage des différents réglages de la chaîne, pour l'amener à un fonctionnement aussi juste que possible, c'est-à-dire aussi proche que possible du modèle nominal.

Dans ces opérations, il faut imposer à l'entrée de la chaîne une valeur connue du mesurande, et observer la sortie de la chaîne. Quatre situations peuvent se présenter :

- Dans de très rares cas, on dispose d'un moyen d'imposer une valeur exacte (par exemple une tension nulle au moyen d'un court-circuit).
- Parfois on dispose d'un étalon (par exemple 0 °C au moyen d'un mélange d'eau et de glace fondante), et la valeur imposée n'est connue qu'avec une certaine incertitude.
- Dans la majorité des cas, il faut mesurer la grandeur d'entrée avec des instruments de précision, et régler la valeur désirée, ce qui conduit également à une incertitude sur cette valeur.
- Enfin il peut être impossible d'imposer une grandeur d'entrée connue et stable (par exemple 1200 °C), on procède alors par simulation du capteur en générant la grandeur électrique qu'il est censé produire (résistance, charge électrique, tension, etc.) sous l'effet de la grandeur physique désirée ; l'incertitude provient alors d'une part de la qualité des générateurs, d'autre part de celle du capteur (on simule un capteur parfait, alors que le capteur réel ne l'est pas).

L'idéal recherché généralement est de connaître le mesurande avec une incertitude inférieure à 1/10 de l'incertitude de la chaîne à étalonner ou à calibrer.

### 4.3.1 Calibrage

Pour ajuster le gain et le décalage, il suffit de faire passer la réponse par deux points connus. Si ces 2 points sont choisis arbitrairement, il est évident que les deux réglages seront dépendants l'un de l'autre, et qu'il faudra procéder par approximations successives : imposer  $X_0$ , ajuster le décalage de la chaîne pour  $Y_0 = G_{nom} \cdot X_0 + O_{f_{nom}}$  ; puis imposer

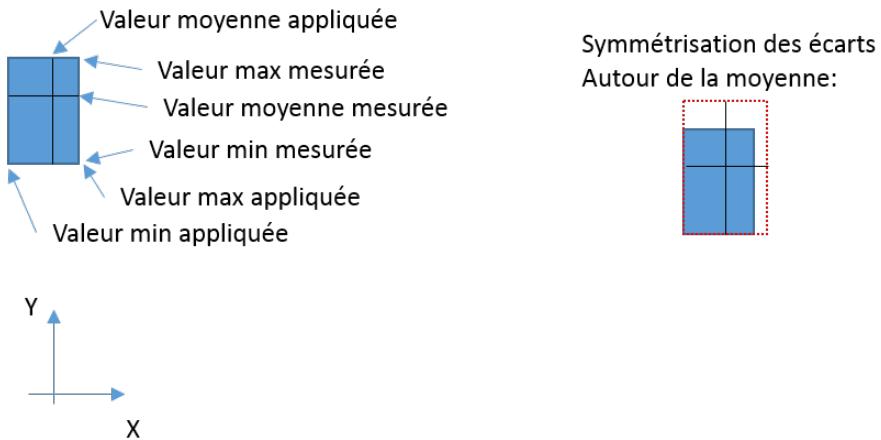


FIGURE 4.4 – Un point de mesure, avec les incertitudes sur la valeur appliquée X et sur la valeur mesurée Y.

$X_{max}$  et ajuster le gain pour  $Y_{max} = G_{nom} \cdot X_{max} + Of_{nom}$ ; revenir à  $X_0$  et corriger le décalage ...etc.

Si l'on connaît la construction et les signaux à l'intérieur de la chaîne, alors on peut choisir  $X_0$  de telle manière que le signal interne soit nul. Dans ce cas le gain n'influence pas l'ajustage du décalage, et l'opération peut se faire en deux étapes seulement.

L'ajustage des potentiomètres ne sera jamais exact : les bruits internes dans la chaîne et la résolution du potentiomètre conduisent à une erreur d'affichage résiduelle.

Ainsi on applique généralement le mesurande X et on effectue plusieurs mesures Y qui permettent de déterminer une moyenne de la valeur appliquée et une moyenne de la valeur mesurée, ainsi que les minima et maxima. On détermine ainsi un rectangle d'incertitude. On établit ensuite un rectangle d'incertitude centré sur la valeur moyenne en maximisant les écarts autour de la valeur moyenne. Les valeurs moyennes permettront de déterminer le modèle réel.

En résumé, le calibrage consiste à :

- Imposer un mesurande  $X_0$  nul correspondant au zéro de mesure, et ajuster le décalage de la chaîne pour obtenir l'offset du modèle nominal ; le zéro est le point sur lequel le gain n'a pas d'effet.
- Imposer la valeur maximum  $X_{max}$  de mesure et ajuster le gain (span) de la chaîne pour obtenir la valeur correspondante selon le modèle nominal.
- Déterminer les incertitudes sur les valeurs ajustées et en déduire les incertitudes de calibrage :  $D_c = \Delta X_o + \frac{\Delta Y_o}{G}$  et  $\alpha_c = \frac{D_c + \Delta X_{max} + \frac{\Delta Y_{max}}{G}}{X_{max} - X_o}$

Après une opération de calibrage, on peut généralement considérer que les erreurs de gain et de décalage ont été annulées. Par conséquent, pour les mêmes valeurs des grandeurs

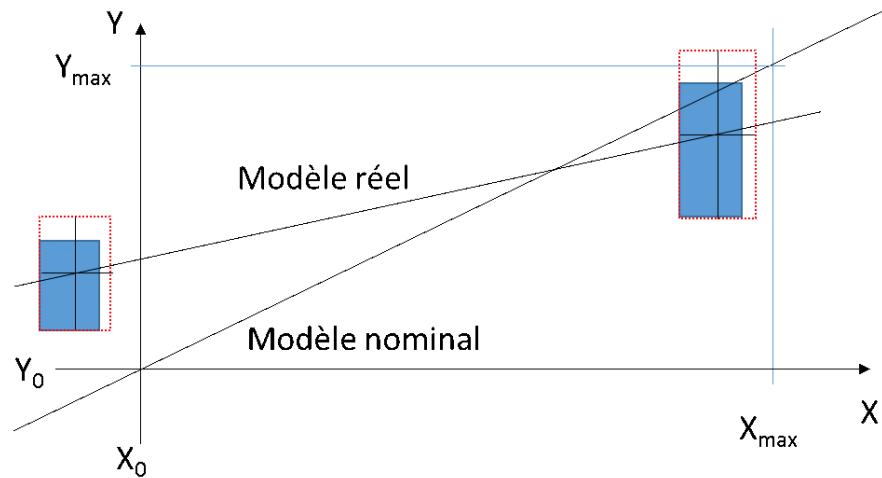


FIGURE 4.5 – Mesure après calibrage : modèles nominal et réel.

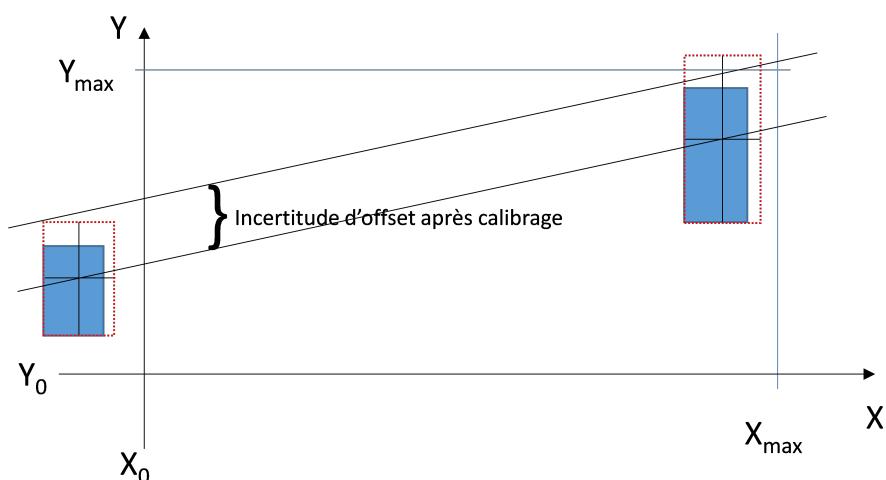


FIGURE 4.6 – Mesure après calibrage : incertitude sur l'offset.

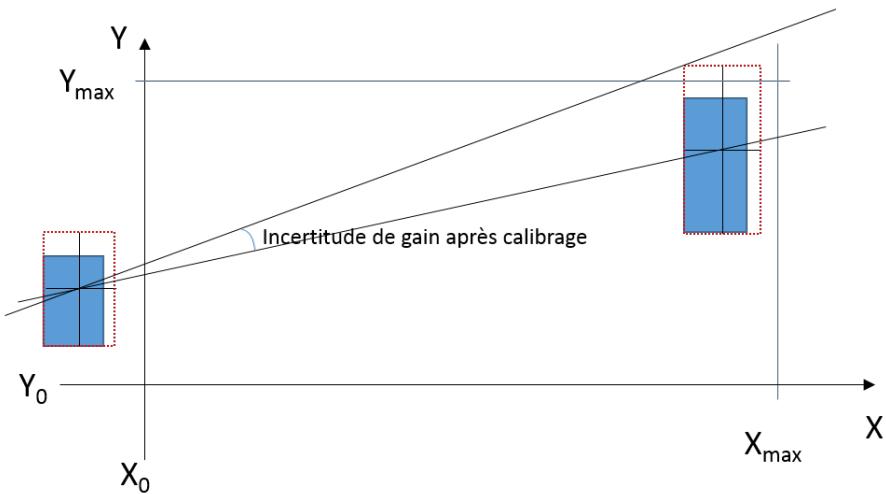


FIGURE 4.7 – Mesure après calibrage : incertitude sur le gain.

d'influence (raisonnablement quelques minutes à quelques heures après le calibrage) seules interviennent les erreurs de non-linéarité et le bruit interne. C'est pourquoi, un calibrage préalable est très souvent utilisé dans les procédures de mesure. Dans ce cas on utilisera comme référence le modèle nominal.

Dans certains cas, lorsque les moyens de réglage ne nous permettent pas de nous rapprocher suffisamment du modèle nominal ou lorsqu'on cherche à améliorer la précision, alors on choisira comme référence le modèle réel obtenu par étalonnage, mesuré après calibrage. Dans ce dernier cas, alors les valeurs  $\Delta X_o$  et  $\Delta Y_o$  ainsi que  $\Delta X_{max}$  et  $\Delta Y_{max}$  seront généralement établies autour des valeurs moyennes de  $\Delta X$  et  $\Delta Y$ .

Lorsqu'il n'est pas possible ou pas souhaitable d'appliquer un mesurande nul, l'évaluation des incertitudes suivra le même principe que ci-dessus, mais il faudra tenir compte du fait que chacun des points  $X_{min}$  et  $X_{max}$  influencent la réponse à  $X_0$ , et donc la valeur du décalage. Les relations pour  $D_c$  et  $\alpha_c$  ne sont alors pas valables.

### 4.3.2 Etalonnage

Ici, il faut établir un tableau de mesure, couvrant toute l'étendue de mesure. Manuellement on se contente d'une dizaine de mesures réparties entre le minimum et le maximum. Lorsqu'on utilise un système d'acquisition, on recherche un beaucoup plus grand nombre de mesures, couvrant plusieurs cycles sur l'étendue de mesure, de manière à permettre la mise en évidence de phénomènes éventuels tels que l'hystérèse, la répétabilité ou le bruit de mesure.

Pour chaque couple mesuré  $(X(i), Y(i))$ , on peut déterminer l'erreur

$$e(i) = X_m(i) - X(i) = \frac{Y(i) - Of_{nom}}{G_{nom}} - X(i)$$

mais ceci ne nous permet pas de bien séparer les composantes de l'erreur.

Il convient donc de déterminer le modèle actuel de la chaîne, c'est-à-dire  $G_{rel}$  et  $Of_{rel}$ , après quoi on pourra séparer les composantes d'erreur (gain, décalage, non-linéarité et bruit). La manière de définir la droite de réponse influence quelque peu les résultats, si bien qu'il est indispensable d'utiliser une définition commune, si l'on veut comparer les résultats (par exemple avec les spécifications individuelles des composants de la chaîne). On utilise généralement deux méthodes de choix de cette droite :

**Droite par les extrêmes (End points linearity)** : la droite passe par deux points de la courbe de réponse réelle (en général le zéro et la pleine échelle, ou encore les deux extrémités du domaine de mesure).

**Meilleure droite (Best fit linearity)** : C'est la droite de régression linéaire, elle minimise la somme des carrés des écarts entre la courbe de réponse réelle et la droite ainsi définie.

Le gain réel  $G_{reel}$  est la pente de la droite ainsi choisie. Le décalage réel  $D_{reel}$  est l'ordonnée à l'origine de la droite. Pour chaque couple mesuré  $(X(i), Y(i))$  on détermine l'écart entre la valeur mesurée et la droite  $\Delta = Y(i) - [G_{reel} \cdot X(i) + Of_{reel}]$ . Cet écart est une combinaison de l'erreur de non-linéarité et du bruit. Pour une utilisation immédiate après le calibrage, cet écart représente l'erreur résiduelle du montage, et on en spécifie la limite maximum en valeur absolue, dans l'unité du mesurande, ce qui revient à diviser  $\max|\Delta|$  par le gain de la chaîne :

$$NL + Bruit = \frac{\max|\Delta|}{G_{reel}}$$

Une séparation du bruit et de la non-linéarité n'est généralement pas nécessaire. Les erreurs de gain et de décalage du modèle réel par rapport au modèle nominal se calculent en comparant  $G_{reel}$  et  $Of_{reel}$  avec  $G_{nom}$  et  $Of_{nom}$  :

$$\alpha = \frac{G_{reel} - G_{nom}}{G_{nom}}$$

$$D = \frac{Of_{reel} - Of_{nom}}{G_{nom}}$$

Dans certains cas on sera amené à établir les incertitudes de gain et de décalage du modèle réel par rapport à lui-même, dues à des instabilités constatées sur l'affichage et à des difficultés d'appliquer un mesurande parfaitement stable. Dans ce cas on procédera comme au point précédent pour l'établissement des incertitudes de calibrage.

### 4.3.3 Auto-calibrage

Les avantages apportés par un calibrage juste avant une série de mesures sont tels qu'il devient indispensable de le réaliser pour compenser les effets des grandeurs d'influence si l'on veut atteindre une haute précision. C'est pourquoi de nombreux équipements de précision incorporent une séquence automatique de calibrage (ou au moins d'ajustage du zéro = auto-zéro) à intervalles réguliers ou même avant chaque mesure. Ce calibrage peut se faire de manière analogique ou entièrement numérique. Pour permettre un auto-calibrage, il suffit d'insérer un commutateur permettant de déconnecter l'entrée normale de mesure pour la remplacer par les étalons correspondant à  $X_0$  et à  $X_{max}$ . La séquence de travail lors du calibrage est semblable à la séquence manuelle, si ce n'est qu'il faut mémoriser les valeurs de correction. Ensuite, il faut soit agir sur les réglages matériels, soit utiliser un moteur de correction, qui n'est en fait rien d'autre qu'un calculateur. Si ce calculateur se trouve dans la chaîne de mesure et que celle-ci fournit une sortie numérique ainsi calibrée, alors on a bien un auto-calibrage. Toutefois dans certains cas la chaîne de mesure fournit d'une part le signal sans correction, d'autre part les paramètres de correction. Dans ce dernier cas, on parlera alors d'auto-étalonnage.

## 4.4 Compensation des erreurs systématiques

Au lieu d'un auto-calibrage, il est parfois plus efficace de faire une compensation directe d'une erreur systématique, s'il est possible d'identifier son influence. Un cas typique se présente dans les capteurs de pression intégrés où la température est l'influence prépondérante ; souvent c'est également l'influence de la tension d'alimentation qu'il faut pouvoir compenser.

### 4.4.1 Compensation linéaire

L'identification consiste à déterminer les coefficients d'influence agissant sur le gain et le décalage de la chaîne. Généralement on se contente de déterminer  $G_r$  et  $Of_r$  aux deux valeurs extrêmes d'utilisation. En faisant l'hypothèse que l'évolution du gain et celle du décalage sont linéairement dépendantes de la grandeur d'influence, on définit les coefficients d'influence :

**Déf. Coefficient d'influence sur le gain :** variation relative du gain par unité de la grandeur d'influence. Représente l'erreur de gain additionnelle due à la grandeur d'influence  $Z_i$  :  $d\alpha/dZ_i = (dG_r/G_r)/dZ_i$  (proportionnelle à X : exprimée en %/unit de  $Z_i$ )

**Déf. Coefficient d'influence sur le décalage :** variation d'offset par unité de la grandeur d'influence. Représente l'erreur de décalage additionnelle due à la grandeur d'influence  $Z_i$  :

$$dDdZ_i = \frac{(dOf_r/G_r)}{dZ_i} \left[ \frac{\text{unites de } X}{\text{unites de } Z_i} \right] \quad (4.6)$$

Pour effectuer la correction, il suffit alors de mesurer  $Z_i$  (chaîne auxiliaire), d'en déduire la variation par rapport à la valeur de  $Z_i$  au moment du calibrage, et de multiplier les coefficients d'influence par cet écart pour connaître la variation de gain ou de décalage par rapport au calibrage.

A titre d'exemple prenons un capteur de pression intégré. La grandeur d'influence est la température T. On commence par étalonner le capteur aux deux températures extrêmes d'utilisation, ici environ 25 et 60 °C. Une telle mesure est présentée sur le graphique ci-dessous.

On en déduit les coefficients d'influence, en prenant les valeurs exactes mesurées à une température de calibrage, ici 25.8 °C : Gain :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dT} &= \frac{dGr/Gr}{dT} = \frac{(96.324 - 103.968)/103.968}{(61.1 - 25.8)} = \\ &= \frac{-0.0735}{35.3} = -0.002083 = -0.21\%/\text{°C} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Décalage :

$$\frac{dD}{dT} = \frac{(dOf_r/Gr)}{dT} = \frac{(2.724 - 3.979)/103.968}{(61.1 - 25.8)} = \frac{-0.012\text{bar}}{35.3\text{°C}} = -0.34\text{mbar}/\text{°C} \quad (4.8)$$

Par conséquent, si l'on mesure alors que la température est de 38.0 °C, nous avons un écart de température de  $(38.0 - 25.8) = 12.2$  °C et les erreurs additionnelles de gain et de décalage par rapport aux valeurs de calibrage (gain 103.968 mV/bar et offset 3.979 mV) seront de :

$$d\alpha = -0.002083 \cdot 12.2 = -0.0254 = -2.54\% \text{ lect}$$

$$dD = -0.34\text{mbar} \cdot 12.2 = -4.148\text{mbar}$$

Pour corriger les indications il est généralement plus simple de calculer le gain et l'offset actuels avant de traduire la sortie (mV) en valeurs de pression :

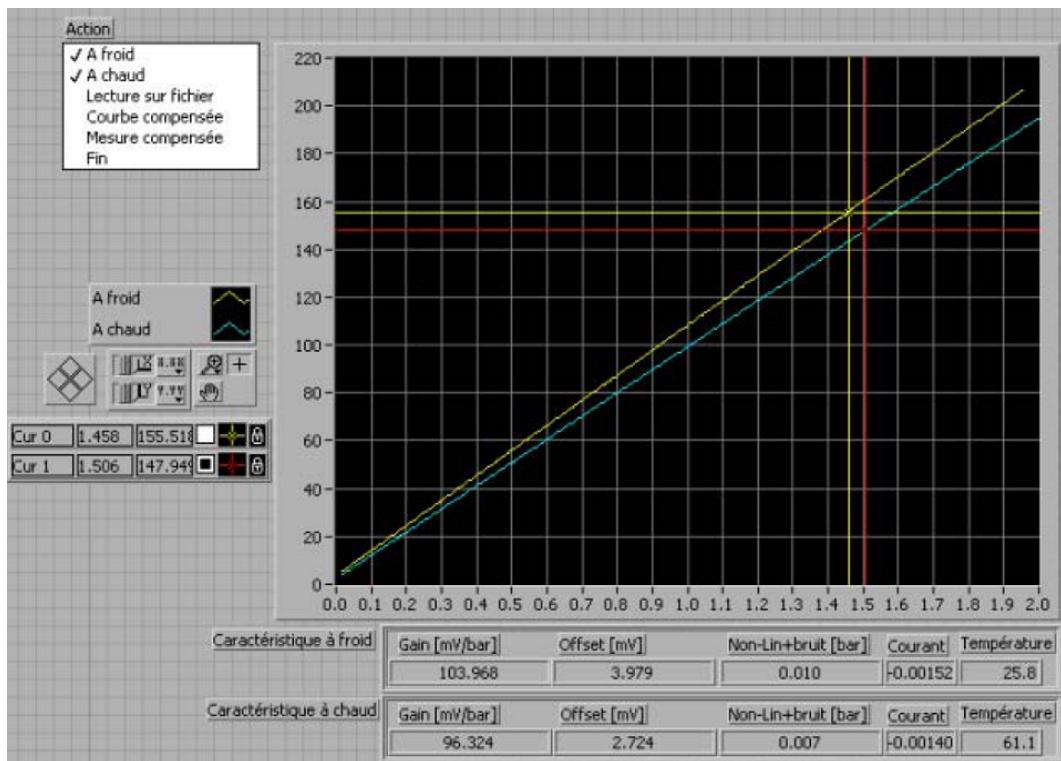


FIGURE 4.8 – Identification de la réponse du capteur aux températures extrêmes.

$$G(38^\circ\text{C}) = G(25.8^\circ\text{C})(1 + d\alpha) = 103.968(1 - 0.0254) = 101.327 \text{ mV/bar}$$

$$Of(38^\circ\text{C}) = Of(25.8^\circ\text{C}) + G(25.8^\circ\text{C}) \cdot dD = 3.979 - 4.148 \cdot 10 - 3 \cdot 103.968 = 3.548 \text{ mV}$$

Ainsi une sortie de 89 mV correspond à une pression de  $(89 - 3.548) / 101.327 = 0.843$  bar.

Sans correction, avec les valeurs de calibrage on obtient 0.731 bar : on sous-évalue la pression car la température introduit un décalage négatif de -4.2 mbar ainsi qu'une erreur de gain négative de -2.54% de 731 mbar soit -15.6 mbar, et donc un total de -19.8 mbar.

#### 4.4.2 Moteur de correction mathématiques

La puissance de calcul des microprocesseurs incorporés aux capteurs dits « intelligents » permet d'envisager des corrections bien plus efficaces, qui sont maintenant incorporées dans les profils d'utilisation de ces capteurs (réseau de terrain). A titre d'exemple, la norme IEEE-1451 / Smart Transducers, définit une fonction multi - variables, de type polynomial, et décomposable par segments :

$$\sum_{i=0}^{D(1)} \sum_{j=0}^{D(2)} \dots \sum_{p=0}^{D(n)} C_{i,j,\dots,p} [X_1 - H_1]^i [X_2 - H_2]^j \dots [X_n - H_n]^p \quad (4.9)$$

Le calcul de correction ci-dessus représente une somme polynomiale de n variables, dont on peut choisir indépendamment les degrés de chaque variable. Dans le cas de la compensation linéaire de température, nous aurions  $X_1 =$  sortie en mV du capteur de pression,  $X_2 =$  sortie du capteur de température, les degrés D(1) et D(2) seraient tous deux égaux à 1 (linéaire), et la formule permet de calculer la valeur de pression. Par conséquent la formule de calcul devient :

$$P_m = C_{00} + C_{10} \cdot (X_1 - H_1) + C_{01} \cdot (X_2 - H_2) + C_{11} \cdot (X_1 - H_1) \cdot (X_2 - H_2) \quad (4.10)$$

$$= C_{00} + C_{01} \cdot X_2 + X_1 \cdot (C_{10} + C_{11} \cdot X_2) \text{ si les termes } H_1 \text{ et } H_2 \text{ sont nuls}$$

On voit bien qu'ainsi on a bien un décalage ( $C_{00} + C_{01} \cdot X_2$ ) dépendant de  $X_2 = T$  et un gain ( $C_{10} + C_{11} \cdot X_2$ ) également dépendant de T. Par contre cette méthode permet des corrections bien plus évoluées (polynômes et compensation de plusieurs grandeurs d'influence).

Pour de grands domaines ou pour de fortes non-linéarités, afin d'éviter des polynômes de degré trop élevé, la norme prévoit de segmenter la réponse selon les valeurs des différentes variables, et d'exploiter un ensemble de paramètres de faible degré dans chaque segment, comme illustré dans la figure ci-dessous.

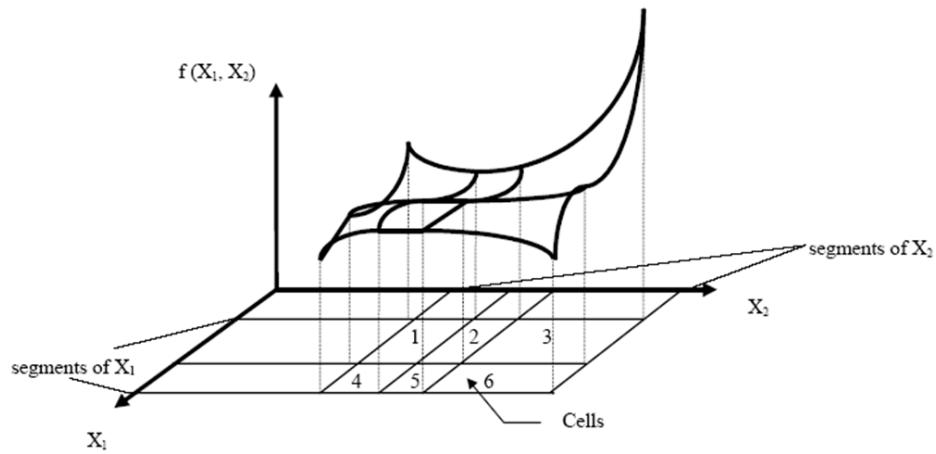
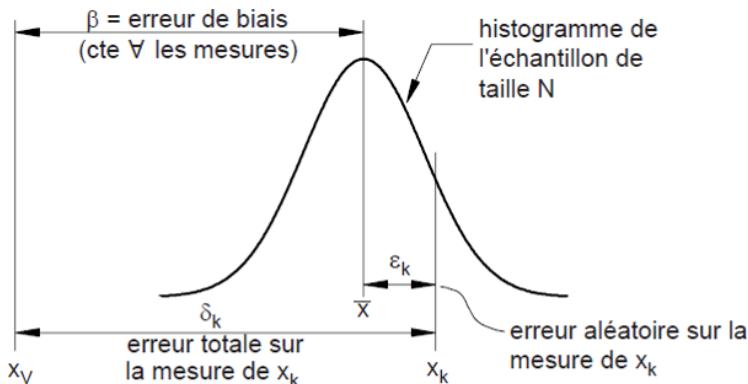


FIGURE 4.9 – Correction à deux variables segmentées.

A chaque élément de surface (désigné par "Cell") correspond un ensemble de paramètre  $C_{ij}$  et  $H_x$  permettant d'approcher la surface réelle en minimisant le nombre total de paramètres à mémoriser.

## 4.5 Mesures répétées

Lors de mesures répétées de la même valeur du mesurande  $X$ , on constate que les résultats ne sont pas toujours parfaitement ceux qu'on attend, et ne sont pas identiques. Une analyse statistique des résultats de mesure permettra d'établir une valeur moyenne  $\mu$  de tous les résultats ainsi qu'un écart-type  $\sigma$ . Les mesures sont en général réparties autour de la moyenne selon une distribution gaussienne caractérisée par cet écart-type. Ainsi la moyenne constitue la partie systématique de l'erreur appelée aussi le biais, alors que l'écart-type représente sa composante aléatoire.



avec:  $x_V$  = valeur vraie  
 $\bar{x}$  = moyenne de l'échantillon  
 $x_k$  =  $k^{ième}$  mesure de la quantité  $x$  ( $1 \leq k \leq N$ )

FIGURE 4.10 – Exemple de mesures répétées  $N$  fois, où  $N > 100$  pour être significatif.

On a donc :

- $X$ , le mesurande
- La moyenne des mesures  $\mu$
- L'erreur de biais  $\beta$  :  $\beta = \mu - X$  [unité de  $X$ ], erreur systématique
- L'exactitude ou la justesse, termes utilisés pour caractériser l'erreur systématique
- L'écart-type  $\sigma$  sert à quantifier l'erreur aléatoire
- La répétabilité ou la fidélité, termes utilisés pour caractériser l'erreur aléatoire

$$\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.11)$$

$$\sigma = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2} \quad (4.12)$$

L'écart-type sert à mesurer la dispersion d'un ensemble de données. Plus il est faible, plus les valeurs sont regroupées autour de la moyenne. Par exemple pour la répartition des notes d'une classe, plus l'écart type est faible, plus la classe est homogène. À l'inverse, s'il est plus important, les notes sont moins resserrées. Dans le cas d'une notation de 0 à 20, l'écart-type minimal est 0 (notes toutes identiques), et peut valoir jusqu'à 10 si la moitié de la classe a 0/20 et l'autre moitié 20/20.

En sciences, il est fréquent de considérer que les valeurs se répartissent selon une courbe de Gauss. Dans le cas des sciences sociales, par exemple, la moyenne  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$  permettent de déterminer un intervalle dans lequel on trouve une majorité de

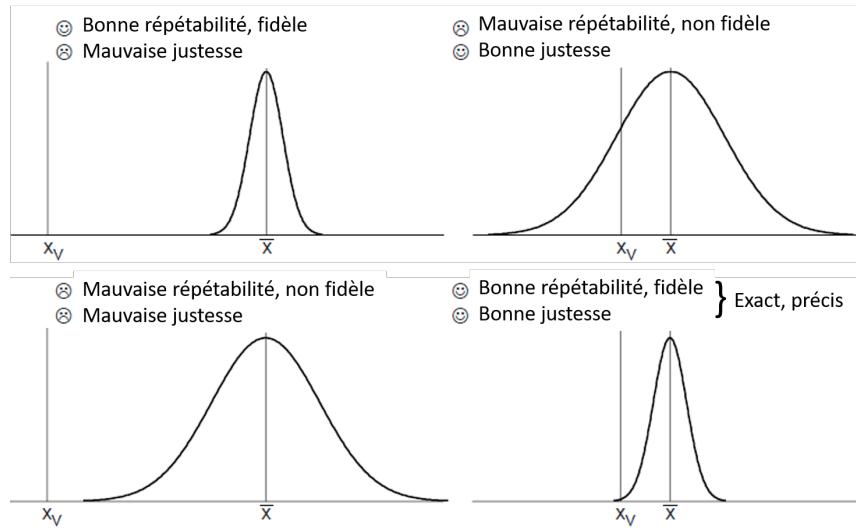


FIGURE 4.11 – distinction entre répétabilité et justesse.



FIGURE 4.12 – Autre représentation des notions de justesse et fidélité.

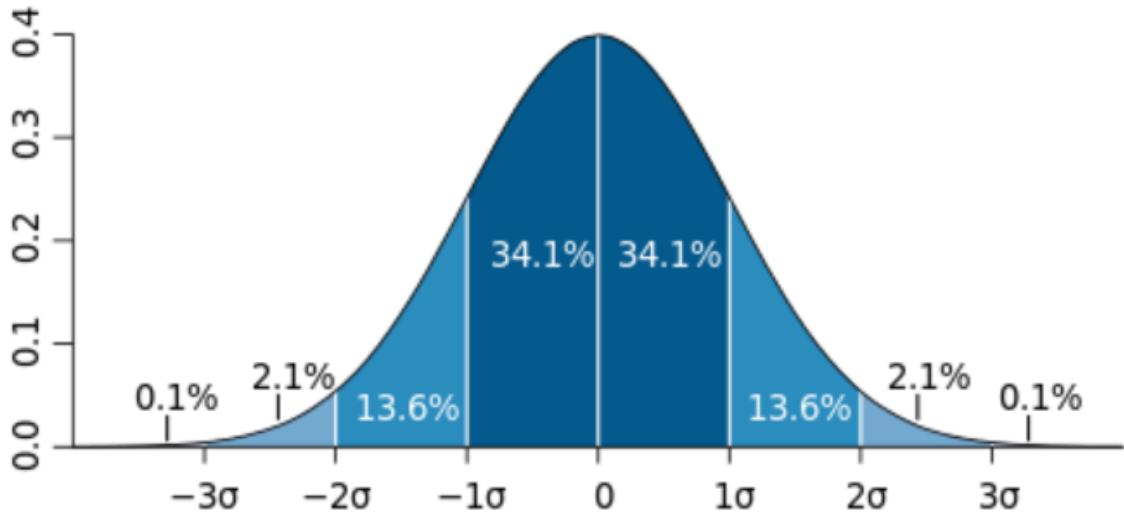


FIGURE 4.13 – Loi normale et intervalle de confiance.

la population. En effet, si la moyenne est  $\mu$  et l'écart type est  $\sigma$ , on trouve 95 % de la population dans l'intervalle  $[\mu - 1.96\sigma; \mu + 1.96\sigma]$  et on trouve 68.2 % de la population dans l'intervalle  $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ .

L'écart-type est aussi utilisé pour construire un intervalle de confiance attribuable à un échantillon. Si l'on se réfère à la figure ci-contre, on voit qu'un  $\sigma$  d'écart de part et d'autre de la valeur moyenne recouvre 68,2% de la distribution, deux  $\sigma$  d'écart ( $13.6 + 34.1 + 34.1 = 95.4\%$ ), 3  $\sigma$  d'écart ( $2.1 + 13.6 + 34.1 + 34.1 + 13.6 + 2.1 = 99.6\%$ ) et ainsi de suite... C'est l'usage notamment en physique des particules, où la détection d'événements est quantifiée en nombre de sigmas, et où un résultat notamment est considéré comme significatif par l'obtention de 5  $\sigma$ , représentant une probabilité d'erreur inférieure à 0,00003% (niveau de confiance de plus de 99.99997%).

En pratique, on considère que :

- $1 * \sigma \rightarrow 68\%$
- $2 * \sigma \rightarrow 95\%$
- $3 * \sigma \rightarrow 99.7\%$

## 4.6 Exercices

### 4.6.1 Exercice : Incertitudes des appareils

Spécifications :

**HP34401A** : spécifs pour 1 an,  $23 \pm 5^\circ C$ , en (%lect+ %gamme) et jusqu'à 20% de

dépassement de gamme

gamme :	100.0000 mV	0.0050 + 0.0035
	1.000000 V	0.0040 + 0.0007
	10.00000 V	0.0035 + 0.0005
	100.0000 V	0.0045 + 0.0006
	1000.000 V	0.0045 + 0.0010

**Prema 6000** : spécifs pour 1 an,  $23 \pm 5^\circ C$ , en (% of reading + % of full scale) Full scale : 1'999'999 (sauf gamme 1000 V : 1'000'000)

range	$\pm 0.2$ V	0.006 + 0.0007
	$\pm 2$ V	0.005 + 0.0005
	$\pm 20$ V	0.005 + 0.0006
	$\pm 200$ V	0.005 + 0.0006
	$\pm 1000$ V	0.006 + 0.0005

**APPA-98** : spécifs pour 2 ans,  $23 \pm 5^\circ C$  et moins de 75% humidité relative, en (% reading + number of digits)

Range	Resolution	Accuracy
200 mV	100 $\mu$ V	
2 V	1 mV	
20 V	10 mV	$\pm (0.5 \% \text{rdg} + 1 \text{ dgt})$
200 V	100 mV	
1000 V	1 V	

- Quelles sont les incertitudes absolues et relatives si on mesure 2.2 V avec HP34401A ?
- Quelles sont les incertitudes absolues et relatives si on mesure 2.2 V avec APPA-98 ?
- Quelle est l'incertitude relative maximum si on mesure entre 10 et 250 mV avec HP34401A ?
- Quelle est l'incertitude relative maximum si on mesure entre 10 et 250 mV avec Prema6000 ?
- Quelle est l'incertitude absolue maximum si l'on mesure entre 30 et 500 V avec APPA-98 ?
- Représenter les incertitudes relatives du HP34401A et du Prema6000 pour un domaine de 10mV à 1000V (utilisez une échelle Log pour l'axe X des tensions).

NB : la pleine échelle définie pour le PREMA n'est pas la définition habituelle qui dit que la pleine échelle est la différence entre les valeurs min et max. On aurait alors attendu pour le PREMA une pleine échelle égale au double de la gamme.

### 4.6.2 Exercice : Calibrage d'une chaîne

- a) Une chaîne de mesure de température doit être utilisée pour la régulation de température d'une enceinte, autour de  $60^\circ\text{C}$ . On désire qu'elle nous indique l'erreur (température actuelle moins consigne de  $60^\circ\text{C}$ ). Le calibrage est réalisé ainsi :
- i) on place le capteur dans un bain à  $60 \pm 0.35^\circ\text{C}$ , et on ajuste le décalage pour un affichage nominal de 0.00. On constate que les indications oscillent entre -0.03 et + 0.08.
  - ii) on place le capteur dans un bain à  $70 \pm 0.5^\circ\text{C}$ , et on ajuste le gain pour un affichage nominal de 10.00. On constate que les indications oscillent entre 9.88 et 10.09.

Quelles sont les incertitudes de gain et de décalage dues à ce calibrage ?

- b) Une chaîne de mesure doit indiquer l'épaisseur d'une feuille plastic (capteur capacatif sans contact, basé sur la variation de la constante diélectrique). Le calibrage s'effectue comme suit :
- i) Pas de feuille dans le capteur, on ajuste le décalage et on obtient un affichage stable de 000.
  - ii) On place une feuille étalon d'épaisseur  $0.500 \pm 0.005\text{ mm}$  dans le capteur, et on ajuste le gain pour un affichage nominal de 500. Malheureusement le potentiomètre ne permet pas l'ajustage exact et on doit se contenter d'un affichage oscillant entre 497 et 499.

Quelles sont les incertitudes de calibrage de cette chaîne ?

- c) Une chaîne de mesure de la hauteur du liquide contenu dans un réservoir utilise la pression relative à la base de ce réservoir ( $P = \rho gh$  où  $h$  est la hauteur du liquide dans le réservoir). Pour le calibrage on procède comme suit :
- i) Réservoir vide, on ajuste le décalage pour un affichage de  $0000 \pm 0001$
  - ii) On remplit le réservoir, on mesure une hauteur  $h = 10.00 \pm 0.02\text{ m}$ , ainsi que la densité du liquide  $\rho = 0.800 \pm 0.006\text{ kg/dm}^3$ , et on ajuste l'affichage à  $1000 \pm 0003$

Quelles sont les incertitudes de calibrage (indication : n'oubliez pas que la chaîne est sensible à la pression et non directement à la hauteur du liquide) ?

- d) On a calibré un capteur de pression relative (=différence de pression par rapport à l'atmosphère) de la manière suivante : pression appliquée par une pompe dans la tuyauterie du capteur avec une vanne de détente, mesure de la pression appliquée par la différence de hauteur de mercure dans un tube en U, ouvert sur l'atmosphère, lecture de la sortie dans un PC. La réponse nominale est 0 à +2 bar, 0 à +20'000digit (1 bar = 100kPa).
- i) Vanne ouverte (= pression atmosphérique), ajustage de l'offset pour une valeur nominale de 0, on obtient un affichage stable de 00'000digit.
  - ii) Vanne fermée, on agit sur la pompe jusqu'à une hauteur de mercure de  $148.5 \pm 0.2\text{cm}$

dans le tube en U. On calcule alors la pression appliquée  $P = \rho gh = 13.6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 * 9.81 \text{ m/s}^2 * 1.485 \text{ m} = 198.12276 \text{ kPa} = 1.98123 \text{ bar}$ . On ajuste donc le gain pour obtenir un affichage nominal de 19'812.3 digit, et obtient un affichage oscillant entre 19'810 et 19'814.

Quelles sont les incertitudes de calibrage ?

#### 4.6.3 Exercice : Linéarité

a) On a mesuré la réponse d'un capteur de force à  $23^\circ C$  (réponse idéale :  $0 - 100N \Leftrightarrow 0 - 20mV$ ) :

F [N]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
U [mV]	0.50	2.49	4.46	6.41	8.34	10.25	12.14	14.01	15.86	17.69	19.5

Déterminez l'offset réel en [mV], le gain réel en [mV/N], les erreurs de décalage [N], de gain [%lect] et l'incertitude de non-linéarité en [N] et en [%(PE)] de ce montage par les deux méthodes :

1. Choix de la droite de référence par les extrémités de la courbe de réponse
2. Choix de la "meilleure droite" ...

b) L'étalonnage d'une chaîne de mesure de couple, gamme 0 à 100 mNm, sortie 4 à 20 mA, a donné :

C [mNm]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
I [mA]	3.960	5.564	7.192	8.800	10.443	12.063	13.677	15.315	16.926	18.550	20.160

L'équation nominale de cette chaîne vaut donc  $I = 4[mA] + 0.16[\frac{mA}{mNm}] \cdot C[mNm]$ .

Quelles sont les erreurs de gain et de décalage ainsi que l'incertitude de non-linéarité + bruit dans les 2 cas suivants :

1. Choix de la droite de référence par les extrémités de la courbe de réponse
2. Choix de la "meilleure droite" ...

#### 4.6.4 Exercice : Auto-Calibrage d'une chaîne

a) Pour réaliser l'auto-calibrage d'un canal de mesure de courant (nominal 0-20 mA, code numériques 0-2000 digits), on procède comme suit :

- ouverture du circuit de mesure par un interrupteur (donc courant nul), mémorisation du code obtenu :  $N_0 = 2$  (stable)

- Fermeture d'un interrupteur reliant une source de tension de référence ( $U_g = 10.000V \pm 0.005V$ ) au circuit de mesure à travers une résistance de  $R_g = 500\Omega \pm 0.1\%$  (la borne de mesure étant supposée travailler à potentiel nul, le courant nominal ainsi imposé est de 20mA). On mémorise alors le code moyen obtenu sur 10 mesures :  $N_1 = 2018.3$ , alors que les codes max et min sont 2021 et 2015.
- Les mesures seront ensuite corrigées à l'aide de  $N_0$  et  $N_1$  pour obtenir :
  - i) une valeur numérique corrigée ;
  - ii) une valeur dans l'unité du mesurande ;

NB : si ces corrections sont faites à l'extérieur de la chaîne de mesure, alors on parlera d'auto-étalonnage. Quelles sont les fonctions mathématiques de correction et quelles sont les incertitudes de calibrage ?

b) Pour programmer l'auto-calibrage d'une chaîne de mesure de température dont le capteur (PT100 :  $R(T) = 100\Omega(1 + 0.00385T)$ ) a une interchangeable de  $0.2^\circ C \pm 0.1\%$  lecture, on a inséré des interrupteurs programmables permettant de déconnecter le capteur et de le remplacer soit par une résistance de  $100\Omega \pm 0.1\Omega$ , soit par une résistance de  $138.5\Omega \pm 0.14\Omega$ . La séquence d'auto-calibrage est la suivante :

- Capteur remplacé par la résistance de  $100\Omega$ , on mémorise la moyenne de 100 conversions : on trouve  $M_0 = 1985.65$ , toutes les conversions sont soit 1985, soit 1986.
- Capteur remplacé par la résistance de  $138.5\Omega$ . On mémorise la moyenne de 100 conversions :  $M_1 = 2825.45$ , conversion maximum 2827, minimum 2824.
- Pour les mesures on ne fait qu'une seule conversion  $N_x$ , et l'on calcule

$$T = (N_x - M_0) \frac{100}{M_1 - M_0}$$

Quelles sont les incertitudes de calibrage ?

c) Une chaîne de mesure de pression est constituée d'un capteur-transmetteur avec les spécifications suivantes : gamme -1 à +3 bar, sortie 4 à 20mA, précision 0.5%lect + 35 mbar ; le courant de sortie est mesuré par une résistance shunt de  $10\Omega \pm 0.012\Omega$ , et un convertisseur gamme  $\pm 0.25V$ . Pour programmer l'autocalibrage de cette chaîne, on a inséré des interrupteurs programmables permettant de déconnecter le capteur et de le remplacer soit en laissant le circuit ouvert, soit en reliant une résistance de  $490\Omega \pm 0.2\Omega$  entre la borne positive du shunt et une source de tension de  $+10V \pm 15mV$  (courant nominal de 20 mA). La séquence d'auto-calibrage est la suivante :

- Capteur déconnecté, circuit ouvert on mémorise la moyenne de 100 conversions : on trouve  $M_0 = -0.73$  digit, toutes les conversions sont soit -1, soit 0 digit.
- Capteur déconnecté, résistance  $490\Omega$  enclenchée. On mémorise la moyenne de 100 conversions :  $M_1 = 1647.32$ , conversion maximum 1646, minimum 1649 digit.
- Les valeurs de  $M_0$  et  $M_1$  nous permettent de calculer le gain et l'offset total actuel de la chaîne.

Quelles sont les incertitudes de calibrage ?

#### 4.6.5 Exercice : Coefficients d'influence

a) On a étalonné une chaîne de mesure de position à deux températures :

$$\begin{aligned} T_1 &= 25^\circ C & G_1 &= 100.3 \text{ digit/mm} & Of_1 &= 3.4 \text{ digit} \\ T_2 &= 75^\circ C & G_2 &= 103.5 \text{ digit/mm} & Of_2 &= -5.8 \text{ digit} \end{aligned}$$

- Déterminer les coefficients d'influence de la température
- A une température de  $40^\circ C$ , l'indication obtenue est de 1380 digit. Calculer la position correspondante

b) Une chaîne de mesure du contenu d'un réservoir utilise un capteur de force à jauge de contraintes (pont de Wheatstone à 4 jauge)

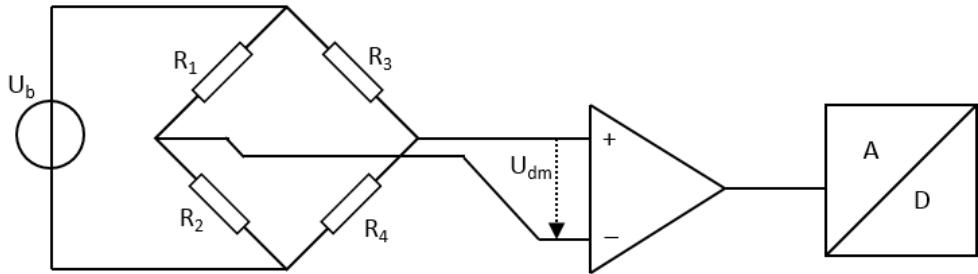


FIGURE 4.14 – Chaîne de mesure du contenu d'un réservoir.

$$\begin{aligned} R_1 &= R_4 = R_0(1 + F \cdot K) \\ R_2 &= R_3 = R_0(1 - F \cdot K) \end{aligned}$$

Avec  $K$  = facteur de jauge et  $F$  = force appliquée.

$$\text{On en déduit : } U_{dm} = U_b \left( \frac{R_4}{R_3+R_4} - \frac{R_2}{R_1+R_2} \right) = U_b \frac{R_0(1+KF)-R_0(1-KF)}{2R_0} = U_b \cdot K \cdot F$$

La sortie est donc théoriquement proportionnelle à la force, mais aussi à la tension d'alimentation  $U_b$ , on parle alors de capteur ratio-métrique : la sortie est une fraction (ratio) de l'alimentation.

On a étalonné la chaîne dans les 3 conditions suivantes :

$$\begin{aligned} U_b &= 5V & T &= 25^\circ C & G_1 &= 1015 \text{ digit/tonne} & Of_1 &= -55 \text{ digit} \\ U_b &= 3V & T &= 25^\circ C & G_2 &= 609 \text{ digit/tonne} & Of_2 &= -33 \text{ digit} \\ U_b &= 5V & T &= 50^\circ C & G_3 &= 1095 \text{ digit/tonne} & Of_3 &= +12 \text{ digit} \end{aligned}$$

On suppose les influences indépendantes et linéaires

- Calculer les coefficients d'influence de la température  $T$  et de l'alimentation  $U_b$ .
- Calculez le gain et l'offset pour une température  $T = 30^\circ C$  et une alimentation  $U_b = 5.5V$
- Enumérez les coefficients du moteur de correction IEEE1451

#### 4.6.6 Exercice : Mesures répétées

Un expérimentateur utilise un capteur de pression différentielle dont on lui a dit que la plage de précision était de  $\pm 2\%$ , pour une différence de pression de 20 Pa, pour un intervalle de confiance de 95%. Afin de vérifier cette affirmation, il étalonne le capteur en effectuant 100 mesures de la tension  $U$  donnée par le capteur lorsque la pression différentielle est  $p = 20$  Pa (il contrôle cette pression de façon très précise). A partir de son échantillon de 100 mesures, il calcule  $\mu = 5V$  et  $\sigma = 0.2V$ . Il prétend que le capteur n'est pas aussi précis qu'on le lui avait certifié. Pourquoi ?

# **Chapitre 5**

## **Capteurs**

### **5.1 Classification des capteurs**

#### **5.1.1 Introduction**

Les capteurs peuvent être classés selon différents critères, à savoir :

- Principe de fonctionnement passif ou actif
- Type de mesure absolue ou relative
- Les types de matériaux utilisés
- Les principes de mesures
- Les stimuli utilisés
- Les champs d'application

Dans ce chapitre nous listerons les critères de classement et nous présenterons quelques exemples de capteurs au travers de leur fiche de spécification. Et n'oubliez pas le système mksA (mètre, kilogramme, seconde, Ampère, ...) ou système international d'unités de mesure vu précédemment. Le tableau 5.1 donne un bref rappel des 7 unités physiques de base indépendantes.

### **5.2 Choix d'un capteur**

Le choix du capteur approprié dépend du cahier des charges. Les conditions imposées sur la valeur à mesurer, imposent des caractéristiques métrologiques sur le capteur.

Grandeur	Symbol de la grandeur	Symbol de la dimension	Unité SI	Symbol associé à l'unité
Masse	$m$	M	kilogramme	kg
Temps	$t$	T	seconde	s
Longueur	$l, x, r\dots$	L	mètre	m
Température	$T$	$\Theta$	kelvin	K
Intensité électrique	$I, i$	I	ampère	A
Quantité de matière	$n$	N	mole	mol
Intensité lumineuse	$I_v$	J	candela	cd

FIGURE 5.1 – Système international d'unités SI : les 7 unités physiques de base.

MESURANDE Conditions imposées	CAPTEUR Caractéristiques métrologiques
Plage de variation	Etendue de mesure
Variation minimale à mesurer	Résolution
Spectre de fréquence ou vitesse de rotation	Bande passante
Précision de mesure	Erreur de linéarité, Erreur d'hystéresis
Plage de température de fonctionnement	Dérive thermique du zéro, Tenue en température
Localisation	Encombrement
Composition de l'atmosphère	Inertie chimique, Protection
Parasites	Blindage, Isolement ou non par rapport à la masse

Source : [www.geea.org](http://www.geea.org)

Ces conditions concernent autant le paramètre à mesurer (par exemple la pression) que l'environnement de mesure. Elles doivent être traduites en caractéristiques métrologiques du capteur. Ces caractéristiques sont à comparer à celles se trouvant dans les fiches techniques du capteur.

Le choix du bon capteur consiste à trouver des caractéristiques qui englobent les conditions imposées sur la mesurande.

### 5.2.1 Principaux termes utilisés pour spécifier les capteurs

Un grand nombre de paramètres spécifient un capteur. Ces paramètres sont identifiés par les termes du tableau ci-dessous.

Français	Anglais	Définition	exemple
Sensibilité	Sensitivity	output variation / input variation	mV/g, mA/oC
Stabilité	Stability	Coefficient de variation selon une grandeur d'influence	stabilité en température
Précision	Accuracy	Somme de toutes les perturbations qui influencent la sortie du capteur	
Etendue de mesure	Span, range	Valeur max mesurable - valeur min mesurable	
Résolution	Resolution	Plus petite variation du mesurande mesurable par le capteur	
Sélectivité	Selectivity	S'applique à des capteurs biochimiques, sensibles à une molécule plus particulièrement par rapport à une autre molécule	
Temps de réponse	Response time	Temps de propagation entre l'entrée et la sortie du capteur	
Conditions environnementales	Environmental conditions	Décrit les plages de variation admissible pour les paramètres extérieurs	humidité, température, pression
Facteur de surcharge	Overload characteristics	Capacité à supporter un dépassement de la plage de mesure du mesurande	
Linearité	Linearity		
Hystérèse	Hysteresis		
Zone morte	Dead band	Plage de valeur du mesurande pour laquelle la sensibilité du capteur est nulle ou mauvaise	
Durée de vie	Operating life	Durée pendant laquelle les caractéristiques du capteur sont observées	mtbf = mean time before failure
Taille	Size		
Poids	Weight		
Prix	Price		

Il existe des capteurs actifs et passifs :

**Déf.** **Capteur actif** : n'a pas besoin d'énergie additionnelle : génère un signal électrique en réponse à un stimulus externe. Exemples : thermocouples, capteur pyroélectrique, capteur piézoélectrique.

**Déf.** **Capteur passif** : il s'agit généralement d'impédances. Les capteurs passifs nécessitent une énergie externe pour fonctionner, appelé signal d'excitation. Ce signal est modulé par le capteur pour produire le signal de sortie. Ces capteurs sont parfois appelés paramétriques, car leur signal de sortie change en fonction de ce signal d'excitation.

Les capteurs peuvent aussi être absous ou relatifs, avec comme définitions :

**Déf.** **Capteur absolu** : détecte un mesurande et produit une sortie en relation directe avec une échelle physique absolue indépendante des conditions de mesure. Exemple : résistance à coefficient de température positif, sa résistance dépend de la température absolue.

**Déf.** **Capteur relatif** : la sortie d'un capteur relatif dépend du contexte, d'une autre grandeur. Par exemple le signal de sortie d'un thermocouple ne peut être associé à une température absolue sans référencer l'une de ses extrémités à une température connue. Autre exemple, un capteur de pression peut être absolu lorsque son signal de sortie dépend de la différence entre la pression d'entrée et une pression de référence interne, ou relatif lorsqu'il est nécessaire d'appliquer une pression de référence de manière externe.

### 5.3 Matériaux utilisés dans la réalisation de capteurs

Différents matériaux sont utilisés pour la réalisation de capteurs.

Organique	Matière fabriquée par les êtres vivants
Inorganique	Matière qui ne possède pas les caractéristiques nécessaires à la vie
Conducteur	Corps capable de transmettre de l'électricité
Isolant	Matériau qui isole de l'électricité
Semi-conducteur	matériau qui a les caractéristiques électriques d'un isolant, mais pour lequel la probabilité qu'un électron puisse contribuer à un courant électrique, quoique faible, est suffisamment importante. En d'autres termes, la conductivité électrique d'un semi-conducteur est intermédiaire entre celle des métaux et celle des isolants
Liquide, gaz ou plasma	Etats de la matière
Substance biologique	Matériau extrait du monde vivant

## 5.4 Principes de conversion

Le mesurande doit être converti dans une grandeur exploitable. Cela nécessite un principe physique reliant cette grandeur au mesurande. Voici une liste non-exhaustive de principes physiques se retrouvant dans les capteurs :

Physiques	Piézoélectricité
	Thermoélectrique
	Photoélectrique
	Photomagnétique
	Magnétoélectrique
	Electromagnétique
	Thermoélastique
	Electroélastique
	Thermomagnétique
	Thermo-optique
	Photoélastique
	...
Chimiques	Transformation chimique
	Transformation physique
	Processus électrochimique
	Spectroscopie
	...
Biologiques	Transformation biochimique
	Transformation physique
	Effet sur un organisme de test
	Spectroscopie
	...

## 5.5 Le mesurande

Le mesurande est un terme défini comme étant la grandeur que l'on veut mesurer. La définition du mesurande est un préalable essentiel dans tout processus de mesure. Une liste non exhaustive de mesurandes :

Onde	acoustique amplitude
	phase
	polarisation
	spectre
	vélocité
Biologique	type de biomasse
	concentration
	états
Chimique	type de composants
	concentration
	états

Electrique	charge, courant
	potentiel, tension
	champ électrique
	conductivité
	permittivité
Magnétique	amplitude
	phase
	polarisation
	spectre
	flux
	perméabilité
Onde optique	amplitude
	phase
	polarisation
	spectre
	vélocité
	indice de réfraction
	émissivité
	réflectivité
	absorbtion
Mécanique	position linéaire
	position angulaire
	force
	tension, pression
	contrainte
	masse, densité
	moment, couple
	vitesse
	forme, état de surface
	orientation
	cristalinité, structure
Radiation	type
	énergie
	intensité
Thermique	température
	flux thermique
	chaleur spécifique
	conductivité thermique

Le **mesurage**, c'est l'ensemble des opérations pour déterminer la valeur du mesurande, dont le résultat est la **mesure**.

Parfois, la valeur que l'on peut mesurer n'est pas la valeur que l'on veut mesurer. La grandeur mesurée n'est alors pas équivalente au mesurande. Par exemple, si les conditions de mesure ne sont pas adéquates, il est alors nécessaire d'effectuer une correction de la valeur mesurée. Exemple : en voulant mesurer la longueur d'une pièce mécanique à  $20^{\circ}C$ , alors que sa température réelle est de  $80^{\circ}C$ , il est nécessaire d'effectuer une correction due à la dilatation (entre  $20^{\circ}C$  et  $80^{\circ}C$ ).

## 5.6 Capteur réel

L'écart entre la valeur vraie et la valeur mesurée s'appelle l'erreur de mesure. Un capteur réel souffre de plusieurs erreurs caractéristiques (source : [www.geea.org](http://www.geea.org)) :

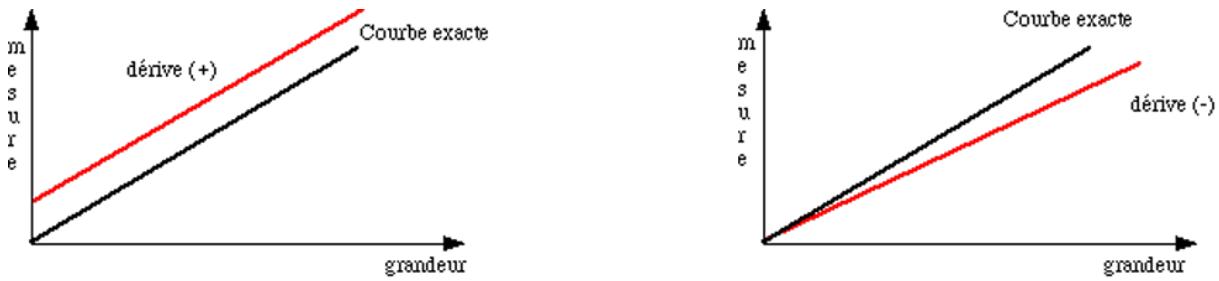


FIGURE 5.2 – Erreurs de décalage et de gain

Il faut en particulier différencier les erreurs systématiques et les erreurs aléatoires. L'erreur systématique est un décalage entre la valeur vraie et la valeur mesurée. L'erreur aléatoire peut se situer de part et d'autre de la valeur vraie. Les notions de justesse et de fidélité (ou répétabilité) sont associées à ces erreurs systématiques et aléatoires.

## 5.7 Exemples de capteurs

### 5.7.1 Grandeurs électriques

#### Capteur de courant inductif

Different principaux permettent la mesure du courant électrique. Le transformateur de courant est une technique inductive basé sur un transformateur ayant au primaire une ou plusieurs spires avec le fil où la mesure de courant est effectuée. Au secondaire se trouve un ampèremètre. Le ratio entre le courant du secondaire et du primaire est proportionnel au rapport du nombre de spires entre le primaire et le secondaire.



FIGURE 5.3 – Erreurs de linéarité et d'hystérèse

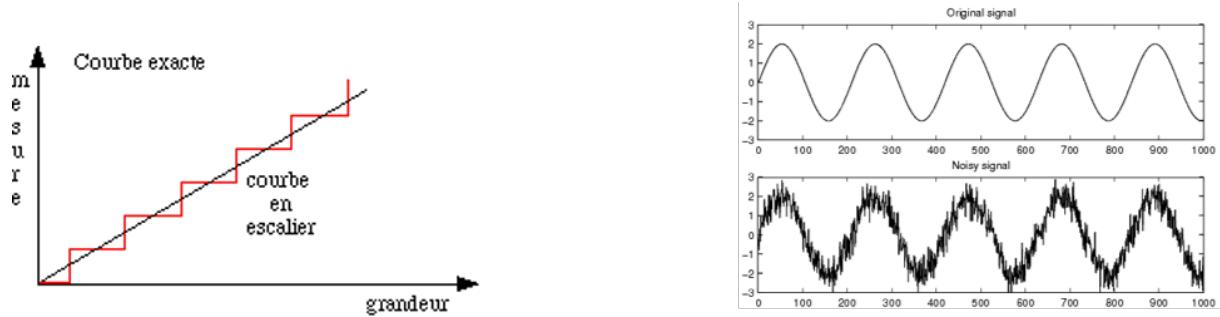


FIGURE 5.4 – Erreurs de mobilité et bruit

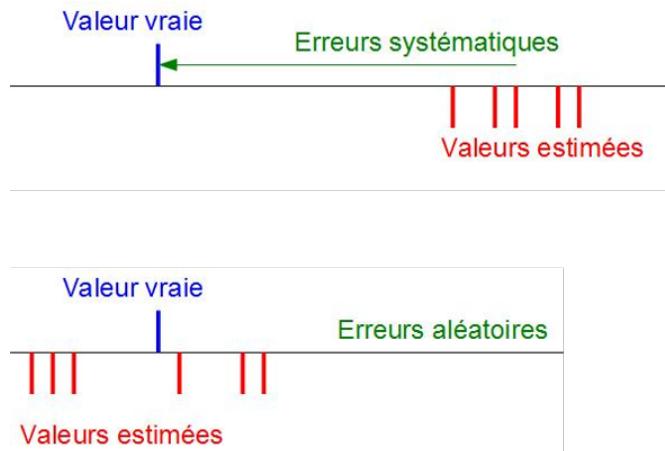


FIGURE 5.5 – Erreurs systématiques et aléatoires

### Bobine de Rogowski

La bobine de Rogowski est un cas particulier de mesure inductive sans entrefer. Il s'agit d'un solénoïde particulier placé autour du conducteur. La tension induite est peu/pas dépendante de la position du conducteur dans la boucle.

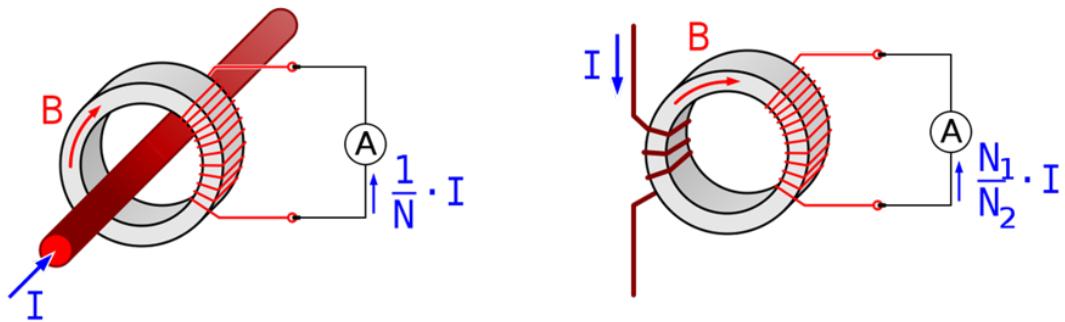


FIGURE 5.6 – Capteur de courant inductif (Source : Wikipedia).

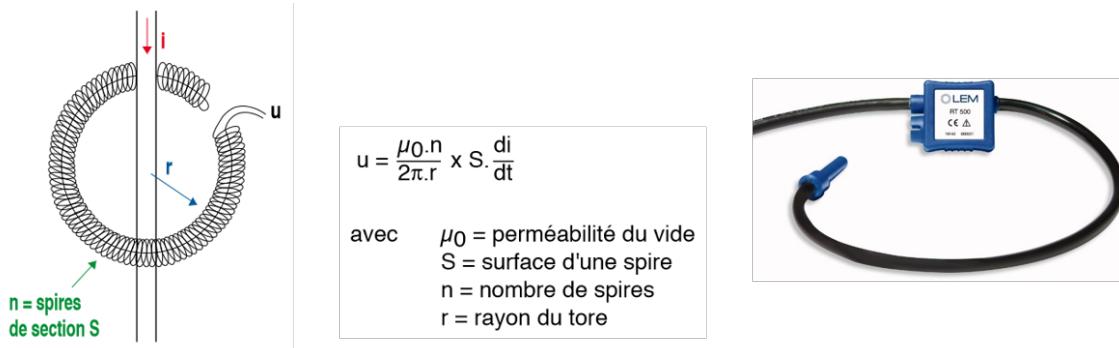


FIGURE 5.7 – Bobine de Rogowski (Sources : Chauvin-Arnoux et LEM).

### Capteur de courant par effet Hall

D'autres principes permettent de mesurer le courant, comme par exemple un capteur à effet Hall mesurant le champ magnétique autour du conducteur. Cette solution a comme gros avantage, par rapport aux techniques inductives, de permettre la mesure des courants continus.

Ci-joint se trouve le schéma d'un capteur intelligent permettant la mesure en boucle fermée. Une contre-réaction permet de générer un champ magnétique s'opposant au champ magnétique lui-même généré par le courant à mesurer. Une structure à contre-réaction offre le grand avantage d'être sensible aux caractéristiques de la bobine plutôt qu'à la sensibilité du capteur à effet Hall.

### 5.7.2 Température (TMP75 de Texas Instruments)

Le TMP75 de Texas Instrument est un capteur intelligent disposant d'une interface I2C.

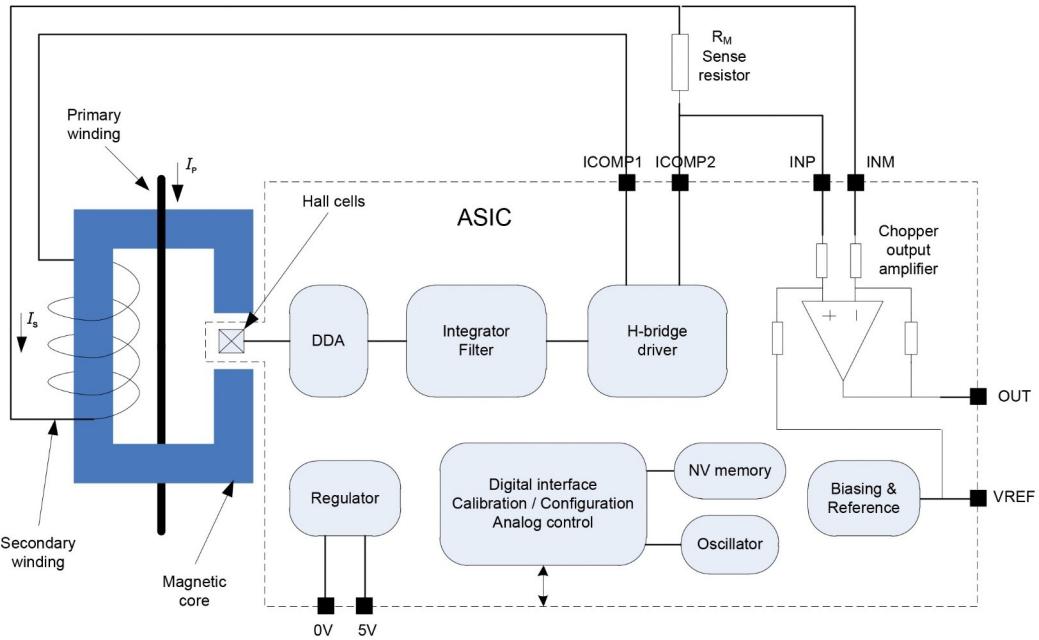


FIGURE 5.8 – Capteur de courant par effet Hall (Source : LEM).

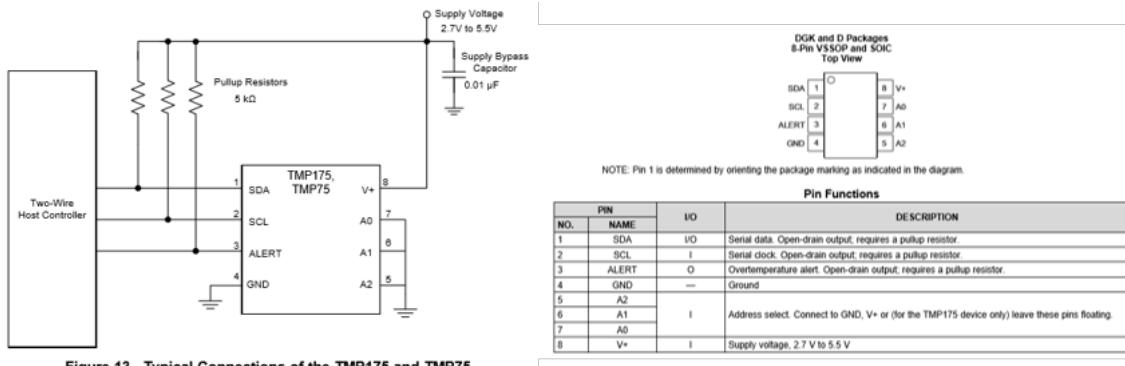


Figure 13. Typical Connections of the TMP175 and TMP75

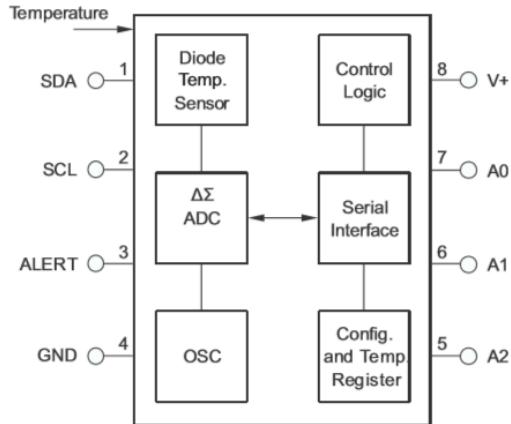


FIGURE 5.10 – Schéma bloc circuit TMP75

mètres, comme en particulier les caractéristiques électriques ci-dessous. Chaque caractéristique peut avoir une grande importance pour une application.

### 5.7.3 Humidité (SHT3x-ARP de Sensirion)

La mesure de l'humidité avec ce capteur (Sensirion SHT3x-ARP) est une tension analogique ratiométrique 10% to 90%. Cela veut dire que la mesure est proportionnelle à la tension d'alimentation. A noter un deuxième signal de température.

L'incertitude de mesure se retrouve dans la fiche technique, avec une erreur typique et une erreur maximale.

### 5.7.4 Pression (Keller series 26 W)

Le principe de fonctionnement de ce capteur de pression est une membrane se déformant sous l'effet de la différence de pression appliquée sur ces deux faces. Des piézorésistances (changement de résistance électrique d'un matériau dû à une contrainte mécanique) mesurent les contraintes mécaniques dans la membrane.

Ce capteur est utilisé pour mesurer des niveaux d'eau, indirectement en mesurant la pression due à la profondeur d'immersion. C'est la différence de pression avec la pression hors de l'eau qui est mesurée. Pour amener la pression atmosphérique au niveau de la membrane, un tuyau remonte en surface en passant dans le câble (tube de ventilation).

### 5.7.5 Jauge de déformation

Dans une jauge, une déformation provoque une variation de la résistance. Cette variation de résistance répond à l'équation :

## 6.5 Electrical Characteristics

at  $T_A = -40^\circ\text{C}$  to  $+125^\circ\text{C}$  and  $V+ = 2.7 \text{ V}$  to  $5.5 \text{ V}$  (unless otherwise noted)

PARAMETER	TEST CONDITIONS	TMP175			TMP75			UNIT
		MIN	TYP	MAX	MIN	TYP	MAX	
<b>TEMPERATURE INPUT</b>								
Range		-40	125	-40	125	-40	125	°C
Accuracy (temperature error)	-25°C to +85°C	±0.5	±1.5	±0.5	±2	±0.5	±2	°C
	-40°C to +125°C	±1	±2	±1	±3	±1	±3	
Accuracy (temperature error) vs supply		0.2	±0.5	0.2	±0.5	0.2	±0.5	°C/V
Resolution <sup>(1)</sup>	Selectable	0.0625		0.0625		0.0625		°C
<b>DIGITAL INPUT/OUTPUT</b>								
Input capacitance		3	3	3	3	3	3	pF
$V_{IH}$ High-level input logic		0.7(V+)	6	0.7(V+)	6	0.7(V+)	6	V
$V_{IL}$ Low-level input logic		-0.5	0.3(V+)	-0.5	0.3(V+)	-0.5	0.3(V+)	V
$I_{IN}$ Leakage input current	0 V ≤ $V_{IN}$ ≤ 6 V		1		1		1	µA
Input voltage hysteresis	SCL and SDA pins	500		500		500		mV
$V_{OL}$ Low-level output logic SDA	$I_{OL} = 3 \text{ mA}$	0	0.15	0.4	0	0.15	0.4	V
$V_{OL}$ Low-level output logic ALERT	$I_{OL} = 4 \text{ mA}$	0	0.15	0.4	0	0.15	0.4	V
Resolution	Selectable	9 to 12		9 to 12		9 to 12		Bits
Conversion time	9 bits	27.5	37.5	27.5	37.5	27.5	37.5	ms
	10 bits	55	75	55	75	55	75	
	11 bits	110	150	110	150	110	150	
	12 bits	220	300	220	300	220	300	
Timeout time		25	54	74	25	54	74	
<b>POWER SUPPLY</b>								
Operating range		2.7	5.5	2.7	5.5	2.7	5.5	V
$I_Q$ Quiescent current	Serial bus inactive	50	85	50	85	50	85	µA
	Serial bus active, SCL frequency = 400 kHz	100		100		100		
$I_{SD}$ Shutdown current	Serial bus active, SCL frequency = 3.4 MHz	410		410		410		µA
	Serial bus inactive	0.1	3	0.1	3	0.1	3	
	Serial bus active, SCL frequency = 400 kHz	60		60		60		
	Serial bus active, SCL frequency = 3.4 MHz	380		380		380		
<b>TEMPERATURE RANGE</b>								
Specified range		-40	125	-40	125	-40	125	°C
Operating range		-55	127	-55	127	-55	127	°C

(1) Specified for 12-bit resolution.

FIGURE 5.11 – Caractéristiques du circuit TMP75

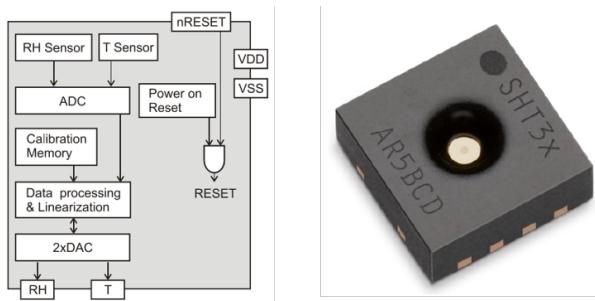


FIGURE 5.12 – Capteur d’humidité de Sensirion, SHT3x-ARP

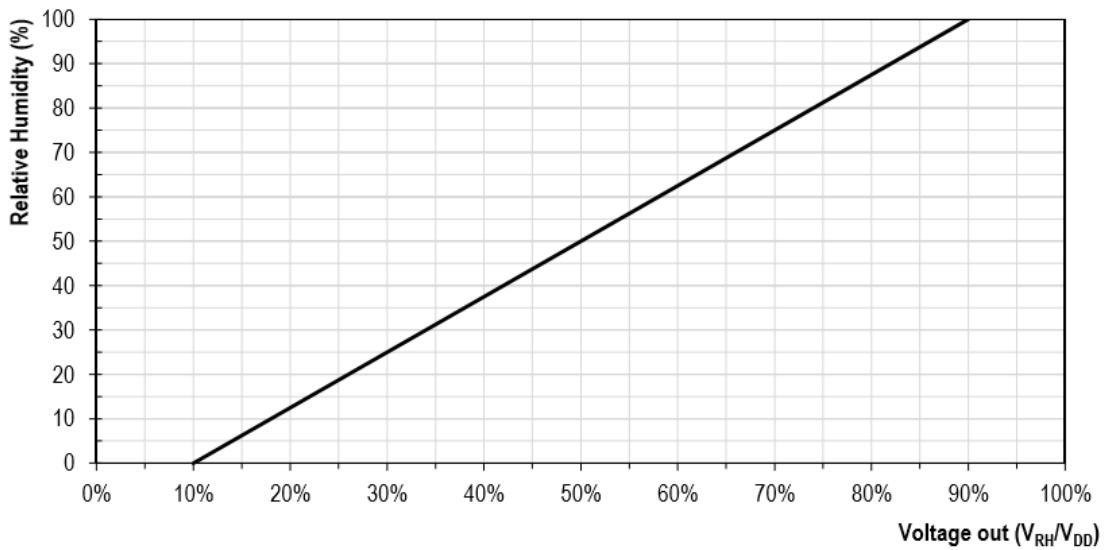


FIGURE 5.13 – Réponse du capteur d’humidité de Sensirion, SHT3x-ARP

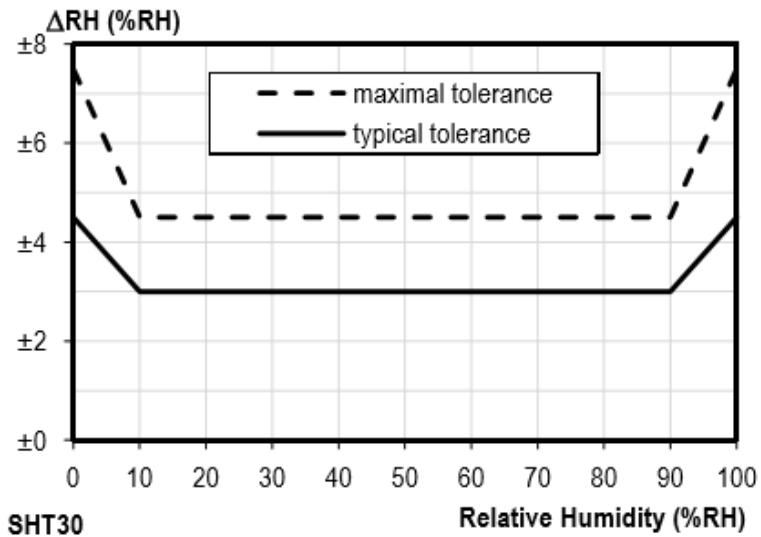


FIGURE 5.14 – Incertitude de mesure du capteur d’humidité de Sensirion, SHT3x-ARP

$\Delta R = k \Delta L$  Avec :  $\Delta R$  : variation de résistance [ $\Omega$ ]  $\Delta L$  : déformation [m]  $k$  : coefficient ou facteur de jauge [ $\Omega/m$ ]

Les jauge sont montées sur un corps d'épreuve. Les contraintes mécaniques entraînent une déformation. C'est cette déformation qui est mesurée par la jauge. Elle permet de retrouver la contrainte connaissant la rigidité du corps d'épreuve.

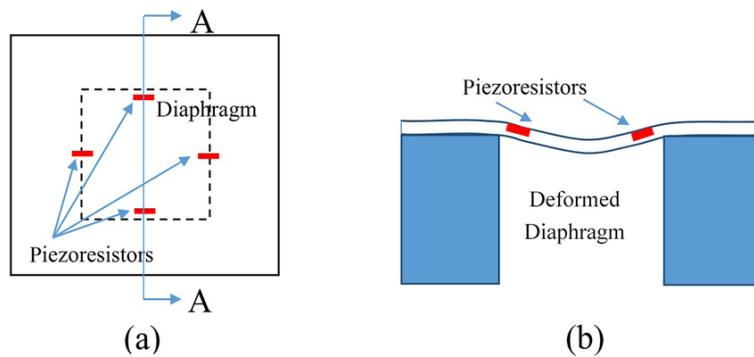


FIGURE 5.15 – Capteur de pression de Keller, series 26 W (Source : Kubba 2016)

<b>Specifications</b>							
Pressure Ranges (FS)	0,2	0,5	1	2	5	10	20 bar
Linearity	0,2 %FS typ. 0,5 %FS max.						
Compensated Temp. Range		0...50 °C (on demand -10...80 °C)					
Storage-/Operating Temperature		-45...100 °C					
Temperature Coefficients...		...of Zero, in %FS/°C			...of Sensitivity, in %/°C		
• Range > 1 bar	0,005	.	0,01 max.	0,02 max.			
• Range 1 bar	0,010 typ.		0,02 max.	0,02 max.			
• Range 0,5 bar	0,015 typ.		0,03 max.	0,02 max.			
• Range 0,2 bar	0,025 typ.		0,05 max.	0,02 max.			
Stability							
• Range > 2 bar	0,1 %FS typ.		0,2 %FS max.				
• Range ≤ 2 bar	2 mbar typ.		4 mbar max.				
Type	2-Wire		3-Wire				
Excitation (U)	10...32 VDC		13...32 VDC				
Signal Output	4...20 mA		0...10 V				
Load (Ω)	< (U-8 V)/0,02 A		> 5 k				



FIGURE 5.16 – Caractéristiques du capteur de pression de Keller, series 26 W

### 5.7.6 Force (HBM RS CC)

Les forces sont mesurées par la déformation d'un corps d'épreuve. Pour ce capteur de force, des jauge de contraintes sont montées selon un pont de Wheastone sur les zones avec des contraintes mécaniques importantes et avec des paires où les contraintes mécaniques sont opposées (jauge 1-4 et 2-3).

Le pont de Wheastone est composé de 4 résistances. Ces résistances sont remplacées par des jauge, avec une, deux ou quatre jauge, respectivement pour un quart de pont, demi-pont ou pont complet.

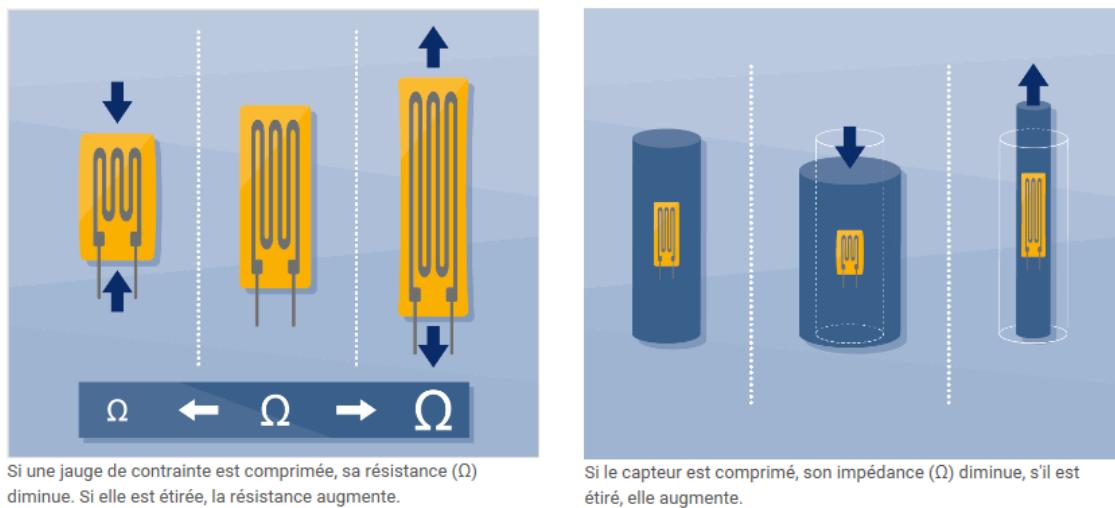


FIGURE 5.17 – Jauges de déformation (source HBM)

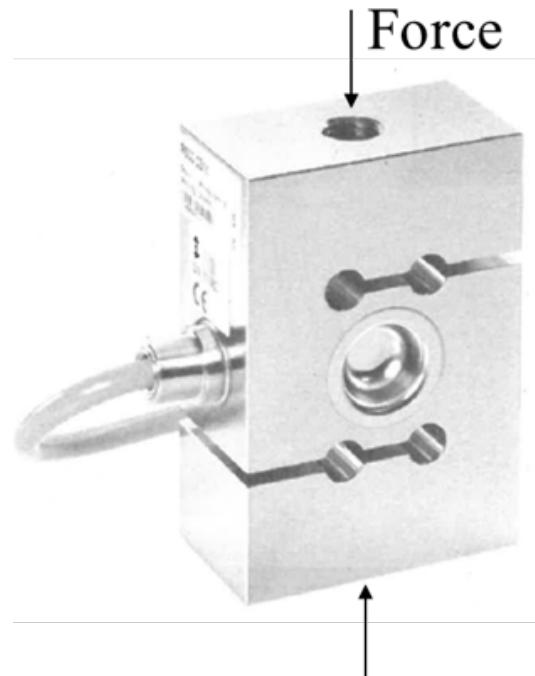


FIGURE 5.18 – Capteur de Force HBM RSCC (source HBM)

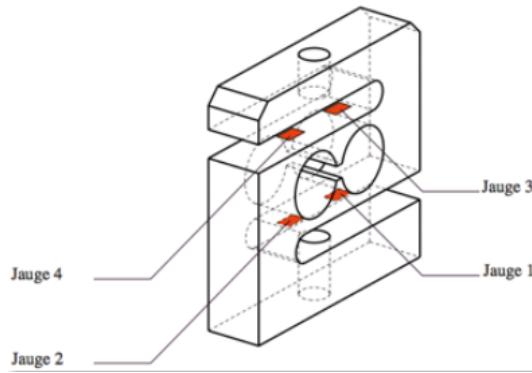


FIGURE 5.19 – Capteur de Force HBM RSCC : détails

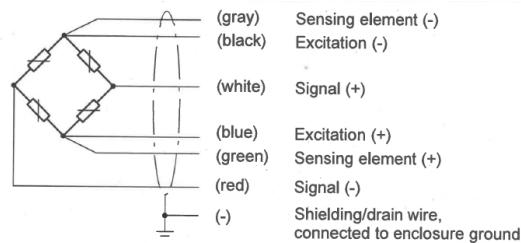


FIGURE 5.20 – Capteur de Force HBM RSCC : connexions

### 5.7.7 Couple (Omega TQ513)

L'Omega TQ513 est un capteur de couple, basé sur des jauge de contraintes, placées sur une zone déformable (corps d'épreuve). Les jauge étant sur la partie tournée, un dispositif permet d'assurer le contact électrique glissant (slip rings).

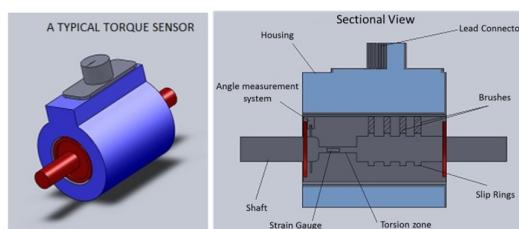


FIGURE 5.21 – Capteur de couple : Omega TQ513

La déformation est liée aux propriétés mécaniques de la zone de torsion. Les jauge sont placées dans les axes de déformation maximale. Pour un pont complet, il y a une paire de jauge en compression et une paire en extension.

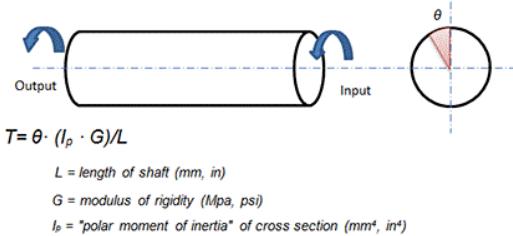


FIGURE 5.22 – Principe du capteur de couple (Source : <https://cecas.clemson.edu>)

### 5.7.8 Position linéaire (LT1300)

Les capteurs LT1300 est un capteur de position linéaire, avec une gamme de 25 à 200mm.

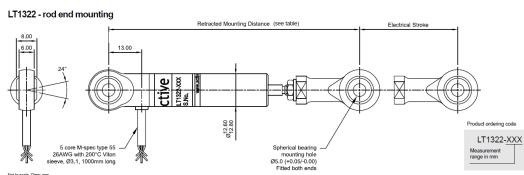


FIGURE 5.23 – Capteur de position linéaire LT1300

Il fonctionne sur le principe du LVDT. C'est un principe inductif, utilisant un noyau ferromagnétique se déplaçant dans un transformateur pour modifier les couplages. Il utilise deux secondaires afin d'obtenir une réponse symétrique.

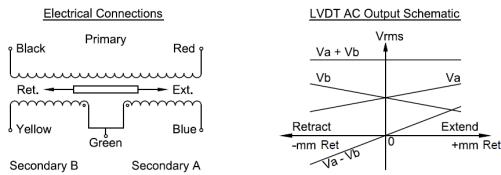


FIGURE 5.24 – Capteur de position linéaire LT1300 : principe

Un conditionneur de signal est nécessaire pour l'excitation du LVDT et pour effectuer la mesure. A noter que la réponse des LVDT n'est pas très linéaire, ce qui nécessite souvent une linéarisation.

### 5.7.9 Position angulaire (Baumer GM400)

Le Baumer GM400 est un codeur absolu. Il utilise un principe optique. Un disque codé avec des trous, tournant avec l'axe, permet de mesurer la position angulaire grâce à une

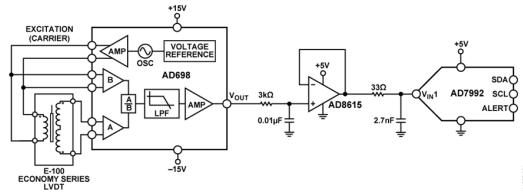


FIGURE 5.25 – Capteur de position linéaire LT1300 : conditionneur

source lumineuse est des photodétecteurs.

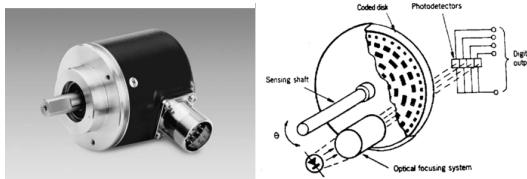


FIGURE 5.26 – Position angulaire Baumer GM400 (Sources : Baumer et Guy Gauthier)

Pour certains codeurs optiques, le code binaire Gray est utilisé. Ce code offre l'avantage de ne modifier qu'un seul bit à la fois quand un nombre est augmenté d'une unité, contrairement au codage binaire naturel. Cela permet d'éviter des états transitoires lors des transitions.

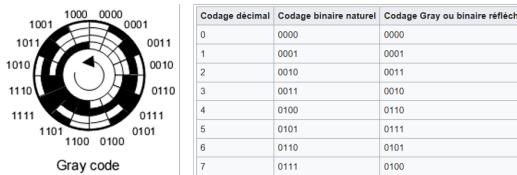


FIGURE 5.27 – Position angulaire Baumer GM400 : codage

Le transcodage binaire Gray/naturel est évidemment possible avec des algorithmes simples.

A noter que pour un capteur incrémental, deux signaux sont nécessaire pour connaître le sens de rotation. L'idée est d'utiliser deux signaux carrés déphasés de 90°.

### 5.7.10 Vitesse (Philips KMI15/1)

Le capteur de vitesse Philips KMI15/1 utilise un principe magnétique, avec une roue dentée ferromagnétique déformant le champ magnétique d'un aimant permanent.

Le capteur KMI15/1 comprend l'aimant permanent et un capteur magnétorésistif (dont la résistance varie avec la magnétisation). La sortie du capteur est numérique de type tout ou rien (TOR).

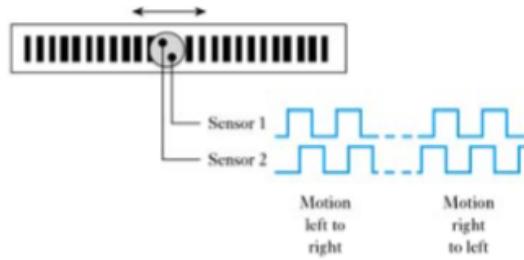


FIGURE 5.28 – Position angulaire Baumer GM400 : fonctionnement

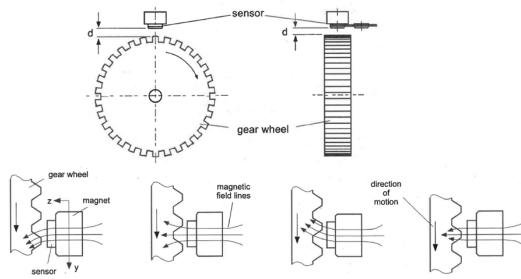


FIGURE 5.29 – Capteur de vitesse : Philips KMI15/1

A noter encore que la mesure de vitesse avec une roue dentée est aussi possible en utilisant des capteurs de technologie inductive ou optique.

### 5.7.11 Capteur de vibration (Colibrys VS1000)

Le capteur de vibration Colibrys VS1000 est basé sur une masse suspendue. Un principe capacitif permet de mesurer la position de la masse ou de créer des forces (pour le self-test). Ce capteur dispose d'une sortie analogique ratiométrique différentielle. Il dispose aussi d'une entrée pour lancer le self-test et d'un signal d'erreur en sortie. A noter encore la présence d'une mesure de température, souvent présente dans les capteurs intelligents.

### 5.7.12 Capteur de proximité (Baumer CFDK 30N3600)

Le capteur Baumer CFDK 30N3600 est un capteur de proximité capacitif. Il permet de détecter sans contact des objets métalliques et non-métalliques à faible distance. Il permet aussi de détecter des niveaux de liquide à travers un réservoir. Un potentiomètre permet de régler la sensibilité du détecteur.

Ces capteurs de proximité disposent d'une sortie tout ou rien (TOR).

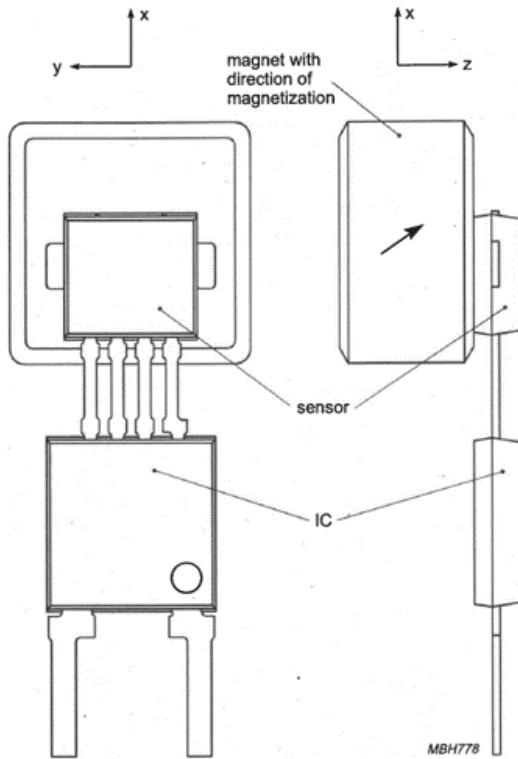


FIGURE 5.30 – Détail du capteur de vitesse Philips KMI15/1

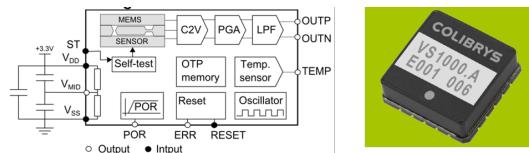


FIGURE 5.31 – Capteur de vibration : Colibrys VS1000

### 5.7.13 Capteur chimique (Membrapor CO/C-200)

Les capteurs Membrapor CO/C-200 sont des capteurs électrochimiques permettant la mesure de la concentration de monoxyde de carbone (CO). Pour ce type de capteurs, les dérives sont importantes, en particulier la dérive thermique, comme le montrent les graphiques ci-dessous.

A noter encore des grandeurs d'influence (cross-sensitivity) provenant d'autres gaz.

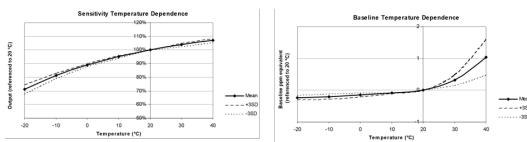


FIGURE 5.32 – Capteur chimique : Membrapor CO/C-200

**PERFORMANCE CHARACTERISTICS**

Nominal Range	0 – 200 ppm
Maximum Overload	400 ppm
Expected Operation Life	3 years in air
Output Signal	900 ± 150 nA/ppm
Resolution	0,1 ppm
Temperature Range	- 20 °C to 50 °C
Pressure Range	Atmospheric ± 10%
Pressure Coefficient	No data
T <sub>90</sub> Response Time	< 45 sec
Relative Humidity Range	15 % to 90 % R.H. non-condensing
Typical Baseline Range (pure air, 20°C)	-1 to +1 ppm
Maximum Zero Shift (+20°C to +40°C)	2 ppm
Expected Long Term Output Drift	< 2 % signal loss/month
Recommended Load Resistor	10 Ohm
Bias Voltage	Not recommended
Repeatability	< 2 % of signal
Output Linearity	Linear

**CROSS-SENSITIVITY DATA**

Interfering Gas (°)	Concentration	Reading
H <sub>2</sub> S	15 ppm	45 ppm
SO <sub>2</sub>	15 ppm	9 ppm
NO	40 ppm	< 20 ppm
NO <sub>2</sub>	13 ppm	-8 ppm
H <sub>2</sub>	80 ppm	< 30 ppm

FIGURE 5.33 – Capteur chimique Membrapor CO/C-200 : performances

**5.7.14 Capteur optique (Hamamatsu S-4251)**

Le capteur optique Hamamatsu S-4251 est constitué d'un driver pour une led externe, une photodiode (c'est la raison du boîtier transparent) et une électronique de mesure utilisant le principe de la détection synchrone.

Il y a souvent dans les capteurs des composantes de bruit à basses fréquences (bruit 1/f ou de la dérive). Il y a aussi souvent la présence de perturbations à basse fréquence. Par exemple des variations lentes de la lumière ambiante ou un scintillement à 50Hz. Le principe de la détection synchrone consiste à moduler le signal à mesurer pour se retrouver

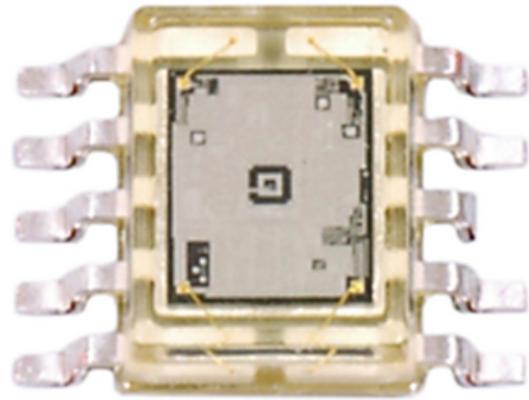


FIGURE 5.34 – Capteur optique :Hamamatsu S-4251

avec une fréquence plus élevées que ces bruits à basse fréquence.

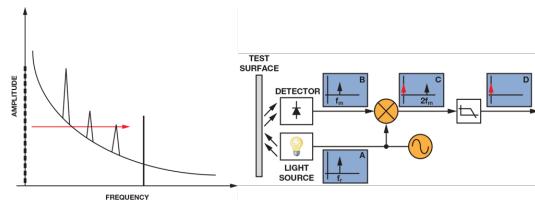


FIGURE 5.35 – Capteur optique Hamamatsu S-4251 : exemple de conditionneur (source : Analog Devices)

Dans ce capteur, le principe consiste à moduler la lumière vers 10kHz. Le signal reçu est alors démodulé en phase. Cela permet de s'affranchir de toutes les composantes de bruit à plus basse fréquence.

### 5.7.15 Lectures conseillées

- " Les capteurs en instrumentation industrielle ", Georges Asch et Bernard Poussery, Dunod, 2017.
- " Acquisition de données, du capteur à l'ordinateur ", Gorge Asch, Dunod, 2011.



# Chapitre 6

## La mesure et sa représentation

Lors de tout procédé expérimental, on effectue des mesures. Une mesure brute, seule, ne veux presque rien dire (éventuellement on obtient l'ordre de grandeur). Il faut lui adjoindre une estimation d'incertitude. La plupart du temps, lorsque l'on a besoin d'une connaissance précise des caractéristiques d'un système quelconque, on va réaliser un grand nombre de mesures individuelles de ces propriétés, et c'est l'analyse statistique des mesures qui va nous permettre d'estimer les propriétés du système, avec marge d'incertitude. Cette démarche en deux temps, (1) acquisition d'un nombre significatif de données (2) traitement statistique de ces données, constitue le cœur de la démarche expérimentale. Elle seule permet d'obtenir des résultats valides.

Avant d'appliquer les outils de l'analyse statistique à un échantillon de mesures, il est cependant indispensable d'examiner **la qualité de l'échantillon** : existe-t'il des valeurs aberrantes qu'il faudrait rejeter ? Y-a-t'il assez de mesures ? etc. On utilise pour cela des outils de représentation simples : moyenne, écart-type, et surtout, l'histogramme. Ce chapitre est donc dédié à la définition de ce que c'est qu'une mesure, et des outils permettant de la valider, et de la caractériser.

### 6.1 Définitions

#### 6.1.1 L'échantillon

Soit une grandeur physique  $\mathcal{G}$  (par exemple une tension électrique) et un ensemble de  $N_m$  mesures de  $\mathcal{G}$ . Cet ensemble est appelé un **échantillon**  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{G}$ . Quelques exemples :

**mesures de la tension aux bornes d'une résistance**  $\mathcal{E} = [3.5, 3.4, 3.1, 3.7]$  mV,

**cinq jets d'un dé à 6 faces**  $\mathcal{E} = [5, 4, 1, 2, 2]$ ,

**une séquence du génome humain**  $\mathcal{E} = [A, G, G, T, A, G, G, T, C, C, A]$ ,

**mesure d'un diamètre d'axe**  $\mathcal{E} = [19.998, 20.004, 20.003, 19.997, 20.013]$  mm.

On voit que les éléments d'un échantillon peuvent être de tout type, entier ou réel, et même non numérique. Ce qui caractérise un échantillon, c'est la **nature** et le **nombre** de ses éléments (quoi, et combien).

### 6.1.2 La population

La population  $\mathcal{P}$  d'une grandeur  $\mathcal{G}$  est définie par **l'ensemble de toutes les valeurs possibles que peut prendre cette grandeur**. C'est à partir de la population que l'on forme des échantillons. Quelques exemples :

**dé à 6 faces**  $\mathcal{P} = [1, 2, 3, 4, 5, 6]$ ,

**les lettres du génome humain**  $\mathcal{P} = [A, C, G, T]$

**mesure d'un diamètre de 20 mm**  $\mathcal{P} = \infty !$

Quelques remarques s'imposent :

- la longueur d'un échantillon peut être inférieure, égale ou supérieure à la dimension de la population : il s'agit simplement du nombre de mesures effectuées ;
- la dimension d'une population peut être infinie ! par exemple, dans le cas de la mesure du diamètre d'un axe, les fluctuations de la mesure dues à la précision toujours limitée de l'instrument de mesure, ou aux variations de la pièce elle-même (dilatation/contraction thermique), vont induire une mesure dont la différence avec la valeur réelle sera aléatoire.

Il n'est pas toujours évident de déterminer la population d'une mesure. Seule une inspection détaillée du processus de mesure nous permettra de déterminer au cas par cas la population complète de  $\mathcal{G}$ .

A quoi sert-il de déterminer la population ? tout simplement à connaître à l'avance les résultats possibles des mesures, et éliminer par avance les mesures impossibles. Un exemple : admettons qu'un ingénieur ait mis au point un appareil automatique de mesure de diamètre, et que l'on soumette à cet appareil un axe cylindrique de 20 mm de diamètre. Quatre mesures sont effectuées, et l'échantillon est le suivant  $\mathcal{E} = [19.9, 20.1, 1.7, 19.8]$  mm. Immédiatement, on voit que la valeur de la 3<sup>ème</sup> mesure n'a aucun sens, elle ne peut vraiment pas faire partie de la population. L'ingénieur en conclut qu'il y a un problème avec le procédé de mesure.

### 6.1.3 L'analyse statistique

L'analyse statistique *est un ensemble de méthodes de traitement numérique d'un échantillon permettant d'estimer les propriétés de la population dont il est issu.*

Pour donner un exemple, imaginons que nous disposions d'un échantillon de mesure d'une tension électrique. Les outils de l'analyse statistique nous permettront de calculer l'incertitude sur la moyenne de l'échantillon, ce qui est une information aussi importante que la moyenne elle-même.

On peut aussi dire : *l'analyse statistique permet de réduire un ensemble de données brutes en un petit nombre de valeurs caractéristiques de la population associée.* C'est assez identique à la première définition. On parle aussi de **réduction** des données.

## 6.2 Moyenne, écart quadratique moyen, écart-type

Soit un échantillon de  $N_m$  mesures de la grandeur  $\mathcal{G}$ . Désignons par  $x_i$  la valeur de la mesure individuelle numéro  $i$ , avec  $i = 1 \dots N_m$ .

### 6.2.1 La moyenne de l'échantillon

Elle est définie par

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} x_i \quad (6.1)$$

Notation : les parenthèses angulaires  $\langle \cdot \rangle$  désignent l'opération de moyenne. On rencontre aussi dans la littérature le symbole  $\bar{x}$ , mais la première notation est plus fréquente.

### 6.2.2 L'écart quadratique moyen de l'échantillon

C'est la moyenne de l'écart quadratique (c-à-d au carré) entre les éléments de l'échantillon et sa valeur moyenne  $\langle x \rangle$ ,

$$\text{EQM}(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle \quad (6.2)$$

Si nous développons, il vient

$$\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle \langle x \rangle + \langle \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - 2\langle x \rangle^2 + \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

d'où, en appliquant la définition de la moyenne,

$$\text{EQM}(x) = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} x_i^2 - \left( \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} x_i \right)^2 \quad (6.3)$$

A noter que l'on désigne aussi l'écart quadratique moyen par la **variance** de l'échantillon, mais comme ce dernier terme possède une définition très spécifique en relation avec les distributions de probabilité, il vaut mieux ne pas l'utiliser dans le contexte d'un échantillon de taille finie.

### 6.2.3 L'écart-type de l'échantillon

Il est simplement défini par la racine carrée de l'écart quadratique moyen, et on le note avec le symbole  $\sigma$

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{EQM}(x)} \quad (6.4)$$

Il représente la **dispersion typique des mesures** autour de la moyenne.

**L'écart-type et la moyenne constituent les deux outils centraux de l'analyse statistique d'un échantillon.**

## 6.3 La représentation d'un échantillon de mesures à l'aide d'un histogramme

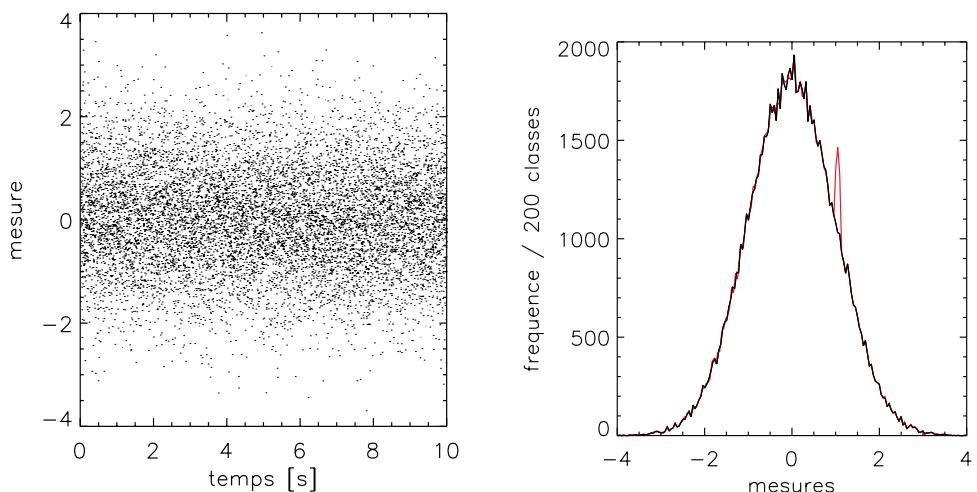


FIGURE 6.1 – *A gauche : les 1000 premières mesures d'une série de 100'000 mesures, pour lesquelles on sait qu'il existe une mesure parasite autour de la valeur 1. Elle est invisible dans ce graphique. A droite : histogramme des 100'000 mesures. En noir, histogramme sans le signal parasite. En rouge, histogramme avec le signal parasite.*

En général, les échantillons de mesure sont constitués d'un grand nombre d'éléments - quelques dizaines lorsque l'acquisition se fait à la main, à plusieurs milliers ou plus lorsque l'acquisition se fait de manière automatique (ce qui est préférable).

Or, avant d'exploiter les données, il faut les examiner, afin de détecter un problème éventuel - ce qui arrive toujours lors de la phase de mise au point d'un instrument ou d'une machine. Il est donc crucial de **visualiser** les échantillons. Si la dimension de l'échantillon est grand, il peut être pratiquement impossible (ou peu pratique) d'examiner chaque mesure individuelle (figure 6.1). Dans ce cas, on utilisera avec avantage une représentation graphique, **l'histogramme**.

L'idée de l'histogramme consiste à segmenter l'intervalle entre la valeur minimale et la valeur maximale de l'échantillon en  $N_c$  sous-intervalles - ou classes - de même largeur, puis à compter le nombre de fois que les mesures tombent dans chacune des classes. On établit alors un graphique montrant le nombre de mesures dans chaque classe, qui nous donne une vue d'ensemble immédiate, permettant de détecter la présence éventuelle de mesures problématiques, pour autant que nous ayons une idée préalable des valeurs que peuvent prendre les mesures (la population).

Considérons l'exemple de la figure 6.1. Il s'agit d'un échantillon de 100'000 mesures d'une grandeur physique (quelconque, dont on ne précise pas l'unité) de moyenne nulle, et d'écart-type  $\sigma = 1$ . On montre la série des 1'000 premiers points de mesure. On a ajouté, à cette série de mesures, un **signal parasite** de moyenne égale à 1 et d'écart-type 0.1. Ce signal parasite n'est pas du tout visible parmi la série des 1'000 points de mesure. En revanche, l'histogramme montre très bien, centré sur 1, un excès du nombre de mesures (ou fréquence) par rapport à la fréquence des valeurs voisines.

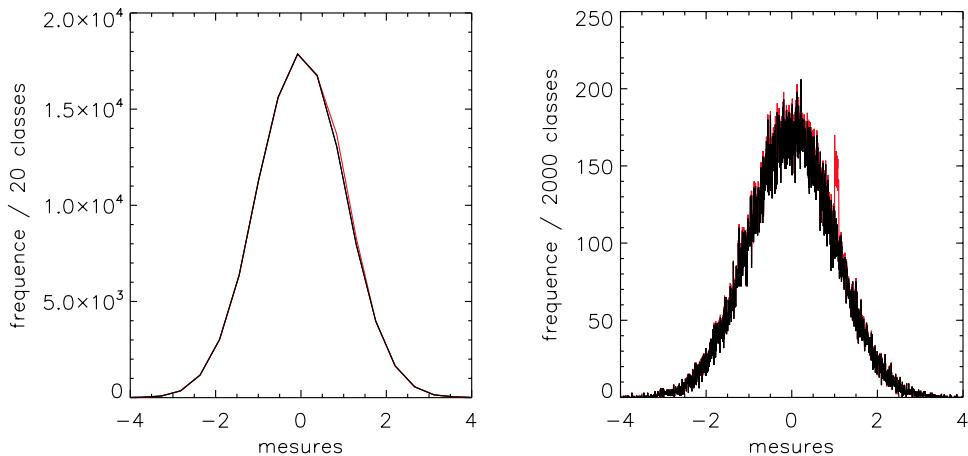


FIGURE 6.2 – Histogramme des 100'000 mesures, avec 20 classes, à gauche, et 2000 classes, à droite. En noir, histogramme du signal sans signal parasite. En rouge, histogramme du signal avec le signal parasite.

Toute la difficulté consiste à choisir le nombre de classes. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons considéré 200 classes. Si nous avions pris moins de classes, par exemple 20, alors l'histogramme serait plus lisse (figure 6.2), mais la résolution trop grossière, et nous n'aurions pas détecté les mesures parasites. En revanche, avec beaucoup de classes (2000), la résolution est grande, mais l'histogramme devient plus chaotique, et il se pourrait que le signal parasite soit noyé dans les fluctuations statistiques (ce qui n'est en fait pas encore le cas ici).

Une bonne méthode empirique pour choisir le nombre de classes est de prendre la racine carrée du nombre de mesures. Pour 100'000, nous devrions prendre 316 classes.

Quoi qu'il en soit, le nombre optimal de classes sera celui qui nous permettra de visualiser au mieux les propriétés de notre échantillon de mesures. On a vu que pour notre exemple, avec 200 classes on obtient en pratique une très bonne représentation.

### 6.3.1 Comment interpréter un histogramme ?

- si l'histogramme est symétrique, alors la valeur sur laquelle il est centré est une indication de la valeur moyenne de l'échantillon ; s'il n'est pas symétrique, on ne peut rien dire sur la valeur moyenne, et il faut faire un calcul ;
- la valeur de la mesure correspondant au maximum de l'histogramme défini le **mode** de l'échantillon. C'est la valeur **la plus fréquente**. Qui se confond avec la valeur moyenne seulement si l'histogramme est symétrique ;
- la largeur à mi-hauteur de l'histogramme est une indication de la dispersion des mesures, et est directement reliée à l'écart-type  $\sigma(x)$ .
- la forme de l'histogramme est une indication du type de processus statistique à l'œuvre lors de l'acquisition de l'échantillon (on aura des processus de type gaussien, poissonien, binomial, uniforme etc - que l'on introduira plus loin). Or, il est possible de prévoir, pour un processus de mesure donné, le type de distribution attendu. La comparaison de la forme de l'histogramme des mesures avec la distribution prévue nous permettra de confirmer que le système se comporte de la manière attendue. Par exemple, le pic dans l'histogramme de l'exemple précédent dévoile l'existence du signal parasite, car en général, toutes les mesures de grandeurs physiques suivent des distributions régulières (ici une distribution dite gaussienne).

### 6.3.2 La distribution gaussienne

On discutera, dans le chapitre dédié aux distributions, de la répartition dite gaussienne d'une mesure aléatoire. Mais comme il s'agit d'une distribution très fréquemment utilisée en pratique, et que nous utilisons souvent comme référence, il est utile de l'introduire rapidement ici.

Dans la grande majorité des cas, lorsque l'on mesure la valeur d'une grandeur physique de type **réel**<sup>1</sup> soumise à des fluctuations aléatoires, comme la tension électrique, la température etc., on trouve que les mesures se répartissent symétriquement autour d'une moyenne, selon une courbe dite *en cloche*. L'équation de cette répartition est la suivante

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (6.5)$$

---

1. c-à-d ne prenant pas des valeurs discrètes, mais pouvant avoir toute valeur dans l'intervalle des nombres réels

ou  $\mu$  représente la moyenne des mesures et  $\sigma$  l'écart-type de la grandeur physique  $x$ . Les 100'000 points dont on a représenté l'histogramme à 20 classes en figure 6.2 suit une distribution gaussienne de moyenne  $\mu = 0$  et d'écart-type  $\sigma = 1$ .

## Histogramme, ou distribution de probabilité ? et combien de mesures faut-il acquérir ?

Il y a une grande différence conceptuelle entre un histogramme et une distribution de probabilité. Un histogramme n'est qu'une représentation graphique des fréquences associées à **un seul échantillon** de mesures. En principe, si on enregistre  $N$  échantillons de mesures de la même grandeur physique, on va tomber sur  $N$  histogrammes légèrement différents les uns des autres car il n'y a aucune raison de mesurer à chaque fois la même série de valeurs !

En revanche, si on effectue une infinité de mesures ( $N_m \rightarrow \infty$ ), alors la fréquence relative  $p_k = f_k/N_m$  va tendre vers une valeur stable, constante, qui pourra s'interpréter comme la probabilité que la mesure tombe dans la classe  $k$ . On verra alors plus loin que dans ce cas, il peut y avoir égalité exacte entre les moyennes et EQM calculés à partir de l'échantillon ou à partir de la distribution des probabilités.

Il ressort de tout cela que si on désire avoir une bonne estimation de la structure de la distribution des valeurs, il faut considérer des échantillons de mesure assez grands. Typiquement, une centaine de mesures permet déjà de se faire une idée de la répartition sous-jacente. Mais ce n'est qu'avec 1000 points que l'on arrive vraiment à identifier le type de distribution. La figure 6.3 montre l'évolution de l'histogramme associé à une distribution gaussienne, lorsque l'on considère 10, 100 et 1000 points de mesure.

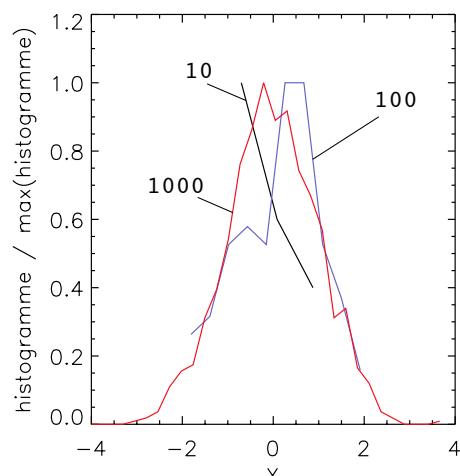


FIGURE 6.3 – Histogramme d'une mesure gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type 1, pour des échantillons de 10, 100 et 1000 mesures.

On voit qu'avec 10 points (et donc 3 classes), il est impossible de dire quoi que ce soit. Avec 100 points (courbe bleue, 10 classes) on commence à voir que la distribution est centrée, compacte, avec un maximum autour de 0. Avec 1000 points (30 classes), la distribution gaussienne devient évidente.

On peut montrer, en théorie statistique, que si on dispose de  $N_m$  mesures d'une grandeur physique quelconque  $G$ , alors l'erreur commise sur la détermination de la vraie moyenne est égale à l'écart-type de l'échantillon divisé par la racine carrée de  $N_m$ ,

$$\text{err}(\langle G \rangle) = \frac{\sigma_G}{\sqrt{N_m}} \quad (6.6)$$

par conséquent, l'erreur relative due au nombre fini de mesures va comme  $1/\sqrt{N_m}$ . Par conséquent, si on veut une précision de 1% sur la moyenne, il faudra acquérir

au moins 10'000 mesures. Cette règle fonctionne très bien, pour tout type de mesure.

## 6.4 Histogramme cumulé

Un autre outil de représentation pratique de l'échantillon est constitué par le cumul des fréquences, c-à-d la détermination du nombre de fois  $F_k$  que la mesure  $x$  est comprise dans une classe donnée ou dans les classes précédentes,

$$F_k = \text{nombre de fois que } x \in \text{classes } 1, 2, \dots, k$$

c-à-d

$$F_k = \sum_{i=1}^k f_i \quad (6.7)$$

Considérons par exemple un échantillon de 36 éléments (ci-contre), tiré d'une distribution uniforme. La moyenne de l'échantillon est 4.72 et l'écart-type 3.00. Considérons 5 classes, et calculons les fréquences de chaque classe. La largeur des classes sera donnée par  $\Delta x = (\max(x) - \min(x))/N_c = 10/5 = 2$ . On trouve

8	1	2	1	2	7
5	10	1	9	4	6
10	9	5	4	2	3
5	2	0	1	5	4
4	6	6	7	4	5
6	4	10	3	0	4

classe $k$	intervalle	val. centrale $x_k$	fréquence $f_k$
1	[0,2[	1	6
2	[2,4[	3	6
3	[4,6[	5	11
4	[6,8[	7	6
5	[8,10]	9	7

L'histogramme correspondant est montré en Fig. 6.4, gauche. Les fréquences cumulées sont données ci-dessous, et l'histogramme cumulé correspondant en Fig. 6.4, droite.

classe $k$	intervalle	val. centrale $x_k$	fréquence $f_k$	fréq. cum. $F_k$
1	[0,2[	1	6	6
2	[2,4[	3	6	12
3	[4,6[	5	11	23
4	[6,8[	7	6	29
5	[8,10]	9	7	36

où on voit naturellement que  $F_{N_c} = N_m$ , c-à-d que la fréquence cumulée de la dernière classe est égale aux nombre de mesures. **L'histogramme cumulé** est simplement la représentation graphique de la fréquence cumulée. L'intérêt principal de l'histogramme

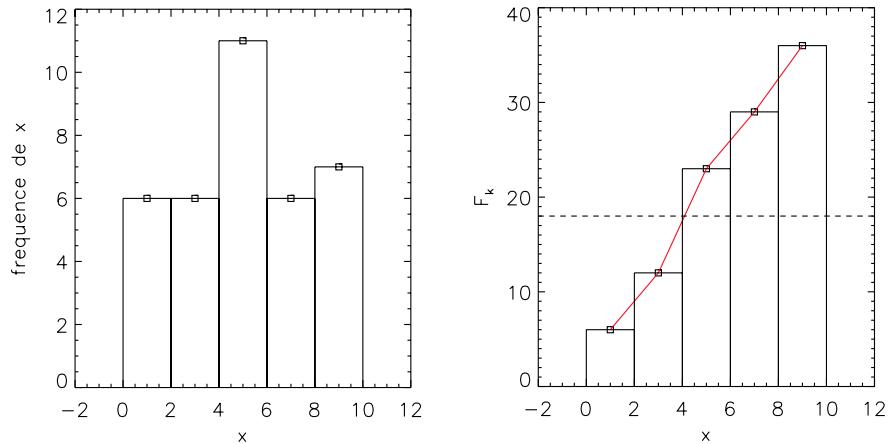


FIGURE 6.4 – A gauche : histogramme des 36 mesures, pour 5 classes ; à droite, histogramme cumulé correspondant. La ligne horizontale à la hauteur  $N_m/2$  permet de repérer la médiane, ici égale à 4, par interpolation.

cumulé est de mettre en évidence la valeur de la grandeur critique séparant les mesures en deux échantillons de dimension égale, **la médiane**, que nous introduisons ci-dessous.

Par ailleurs, puisque la fréquence cumulée est une somme, elle représente en quelque sorte l'intégrale de la fréquence ; inversement, on peut interpréter la fréquence  $f_k$  comme la dérivée de la fréquence cumulée. Nous reviendrons sur ces notions lors de l'introduction des distributions de probabilité, dans un prochain chapitre.

## 6.5 Médiane et mode

### 6.5.1 Médiane

La médiane de l'échantillon est définie par la valeur qui sépare l'histogramme des fréquences en deux parties de somme égales, en d'autres termes il existe autant de mesures de valeur inférieure à la médiane que de mesures de valeur supérieure à la médiane. La valeur médiane ne fait pas toujours partie de l'échantillon, ni de la population. Par exemple, dans l'exemple de l'échantillon à 36 mesures, il y a 12 valeurs inférieures ou égales à 3, mais 19 valeurs inférieures ou égales à 4. Or la médiane devrait séparer l'échantillon en 18 mesures inférieures à elle-même, et 18 mesures supérieures. Ce n'est pas possible avec cet échantillon. On choisira alors, pour la valeur médiane, la valeur partageant l'échantillon en deux parties de dimensions les plus égales possibles, en l'occurrence, ici, 4.

A noter que lorsque l'histogramme est symétrique autour de la valeur moyenne, la médiane est naturellement égale à la moyenne de l'échantillon.

### 6.5.2 Mode

Le mode de l'échantillon est défini par la valeur la plus représentée, c'est-à-dire la valeur ayant la plus haute fréquence. Si l'échantillon consiste en une série de mesures ayant toutes des valeurs différentes, ce qui arrive souvent lorsque les mesures sont des nombres réels, alors la notion de mode n'a pas de sens, car aucune valeur n'est plus représentée qu'une autre.

En revanche, si on constitue l'histogramme de l'échantillon, et que l'on choisit un nombre de classes convenable (par exemple la racine carrée du nombre de mesures), alors le regroupement dans les classes va naturellement faire apparaître une classe plus peuplée que les autres. La valeur associée sera alors le mode de l'échantillon.

Dans le cas de notre échantillon de 36 mesures, si les mesures sont réparties en 5 classes, on trouve alors que la classe numéro 3 est la plus représentée, correspondant aux mesures comprises dans l'intervalle 4 à 6.

## 6.6 Exercices du chapitre 6

**Pour faire ces exercices, utilisez matlab**

### Exercice 6.1 - caractérisation de la qualité d'usinage de lentilles optiques

Une industrie de matériel optique fabrique des lentilles de focale  $f = 100$  mm, plan-convexes (première surface plane, seconde surface sphérique). L'indice de réfraction du verre des lentilles est  $n = 1.5$ . La relation entre la focale de la lentille et le rayon de courbure de la surface sphérique est

$$f = \frac{R}{n - 1} = 2R$$

Pour la mise au point du procédé de fabrication, 1000 lentilles sont usinées et leur rayon de courbure mesuré. Les 1000 mesures sont données - en mm - dans le fichier ASCII `RayonDeCourbure.txt` distribué avec cette série d'exercices. Chargez ces mesures au sein du logiciel de traitement de données `matlab`, et répondez aux questions suivantes :

1. on désire que la focale des lentilles soit égale à 100 mm avec une précision de 2% (c-à-d que l'on accepte les lentilles dont la focale est dans l'intervalle 98-102 mm). Quelle est la proportion de bonnes lentilles dans notre échantillon ? Si on veut conserver 90% des lentilles, quelle sera la précision de ces lentilles ?
2. calculez la moyenne, la médiane, le mode et l'écart-type de cet échantillon ;
3. déterminez le coefficient d'asymétrie  $\beta_1$  et d'aplatissement  $\gamma_2$  ;

4. d'après la valeur de  $\beta_1$  et de  $\gamma_2$ , à quelle forme d'histogramme vous attendez-vous ?
5. construisez la table de fréquences, puis l'histogramme, pour 5, 10, 20 et 40 classes ;
6. vous devez présenter ces mesures à un collègue ; quelle nombre de classes vous semble le plus approprié ? (vous pouvez en choisir un autre nombre que ceux donnés ci-dessus) ;
7. votre collègue utilise le tableau des fréquences que vous lui avez présenté pour calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon, et arrive à des chiffres différents de ce que vous avez calculé au premier point ci-dessus. Expliquez-lui pourquoi ce sont vos résultats qui sont les bons.

### **Exercice 6.2 - distance de pénétration des rayons $\gamma$ dans un substrat de germanium**

On dispose de 50 mesures de la distance de pénétration en mm (avant absorption) de photons  $\gamma$  (rayons gamma à très haute énergie) dans un morceau de germanium,

3088	1749	4085	1906	782	3683	1706	6445	2431	1418
3544	1398	625	2094	3807	1617	969	810	748	1535
5014	2255	4899	1726	1552	1811	524	980	41	2068
386	4084	615	388	1955	989	2206	6407	1019	1180
1448	673	4029	6589	2434	4388	2955	2010	1709	1064

Ces données sont contenues dans le fichier `PhotonsGammaGermanium.txt` distribué avec cette série d'exercices. Lancez `matlab` et chargez cette série dans une variable.

1. Calculez la moyenne, la médiane, le mode et l'écart-type de cet échantillon ;
2. déterminez le coefficient d'asymétrie  $\beta_1$  et d'aplatissement  $\gamma_2$  ;
3. d'après la valeur de  $\beta_1$  et de  $\gamma_2$ , à quelle forme d'histogramme vous attendez-vous ?
4. construisez la table de fréquences, puis l'histogramme, pour des classes de 300 mm, 1200 mm et 3000 mm de large, à l'aide d'un programme `matlab` ;
5. calculez la moyenne et l'écart-type à partir des tables de fréquences, avec et sans la correction de Sheppard ;
6. calculez la médiane et le mode pour l'histogramme de largeur de classe 1200 mm.

### **Exercice 6.3 - mesure de la pression atmosphérique martienne, Gusev crater, Mars**

Le robot d'exploration Curiosity a mesuré, le 17 novembre 2014, la pression atmosphérique à 1 m du sol, en pascal (Pa). 275 points de mesure ont été enregistrés. Les mesures sont données dans le fichier `GroundPressureGusev.txt` distribué avec cette série d'exercices. Chargez ces mesures au sein de `matlab`, et répondez aux questions suivantes :

1. choisir un nombre de classes tel qu'il y a au moins 10 mesures dans la classe la plus peuplée ;
2. calculez le tableau des fréquences cumulées ;
3. représentez l'histogramme cumulé correspondant ;
4. afin que l'eau puisse rester liquide au sol, à 10°C, il faut que la pression soit supérieure à 890 Pa ; quelle est alors la probabilité que l'eau puisse rester liquide pendant les phases de haute pression ?

# Chapitre 7

## La mesure vue comme une variable aléatoire. Distributions usuelles des variables aléatoires.

### 7.1 La mesure est une variable aléatoire

Toutes les grandeurs physiques que l'on peut mesurer en ingénierie, physique etc sont soit **stables**, par exemple les dimensions mécaniques d'une pièce, la masse d'un proton, soit **variables**, par exemple la vitesse en un point donné d'un fluide turbulent, ou la pression atmosphérique.

Par ailleurs, à toute mesure s'ajoute toujours (sauf exception) une erreur aléatoire inconnue<sup>1</sup>. Tout simplement parce que l'instrument de mesure lui-même est sensible aux conditions de son utilisation, et est susceptible de donner, pour la même grandeur physique, des mesures légèrement variables. Par exemple, lors de la mesure d'une dimension avec un pied-à-coulisse, si l'opérateur appuie un peu trop au contact de la pièce, les palpeurs vont se déformer légèrement, élastiquement, conduisant à une mesure qui diffère de la valeur réelle.

De fait, lorsque l'on effectue la mesure d'une grandeur physique, il est exceptionnel d'obtenir une valeur parfaitement stable : soit la grandeur est variable dans le temps, soit l'instrument de mesure est affecté par une erreur aléatoire, soit encore ces effets surviennent simultanément. Il n'y a en fait que lors de comptages d'éléments que les risques d'erreur sont pratiquement nuls (comptage du nombre de pièces dans une boîte, par ex.)

Nous considérerons donc, dans ce cours, que le résultat de toute mesure est entaché d'une fluctuation aléatoire **non prédictible**, et nous allons étudier les caractéristiques statistiques de ces fluctuations.

---

1. si elle était connue alors il s'agirait d'une erreur systématique que nous pourrions éliminer

## 7.2 Définitions

### 7.2.1 Variable aléatoire

Considérons une grandeur physique quelconque  $X$ , que l'on peut mesurer (comme la température). Si, d'une mesure à l'autre, le résultat de la mesure de  $X$ , noté  $x$ , varie de manière aléatoire, non prédictible, alors on dira que la variable  $X$  est une **variable de type aléatoire** (VA dans la suite).

En général, on s'intéresse à la valeur moyenne de la VA, et à son écart-type. Pour connaître ces propriétés statistiques, il faudra faire un grand nombre  $N \gg 1$  de mesures individuelles  $x_i, i = 1 \dots N$ .

### 7.2.2 Variable aléatoire stationnaire

Si les propriétés statistiques d'une VA - moyenne, écart-type etc - ne changent pas au cours du temps, alors cette VA est dite **stationnaire**.

**Un exemple de VA stationnaire :** le diamètre de pièces mécaniques usinées par une machine-outil ;

**Un exemple de VA non-stationnaire :** la vitesse du vent au sommet d'une montagne (car les conditions météorologiques évoluent de manière continue).

En fait, il est plus facile d'imaginer des exemples de VA non-stationnaires que le contraire. Une VA stationnaire, souvent, ne l'est que pendant un temps limité. Il suffit que les conditions externes à la mesure changent pour que les propriétés statistiques de la VA changent aussi. Par exemple, toutes les VA météorologiques ne sont que des VA momentanément stationnaires.

### 7.2.3 Variable aléatoire discrète

Une VA **discrète** est une VA qui ne peut prendre que des valeurs **bien déterminées**. Attention, ces valeurs ne sont pas forcément des valeurs entières ! Elles peuvent être le multiple d'une valeur de base, réelle. Par exemple, la VA dont la population est  $[0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, \dots, \infty[$  est une VA discrète.

La population d'une VA discrète peut être **finie ou infinie**. La VA précédente est de population infinie. La VA de population  $[A, C, G, T]$  est discrète, de population finie.

### 7.2.4 Variable aléatoire continue

Une VA continue est une VA qui peut prendre **n'importe quelle valeur réelle**. La population d'une VA continue est forcément infinie, même si le domaine dans lequel elle prend ses valeurs est borné. Par exemple, la VA associée à la vitesse de n'importe quelle

particule dans l'Univers est forcément bornée par l'intervalle  $[0, c]$  où  $c$  est la vitesse de la lumière dans le vide.

## Quelques exemples de variables aléatoires

Les VA suivantes sont-elles continues ou discrètes ? stationnaires ? de population limitée ou infinie ?

- La mesure du diamètre d'un axe avec un pied-à-coulisse dont la précision est de 0.01 mm. L'axe fait, selon les plans, 20 mm de diamètre. Cette VA est discrète, stationnaire, de population finie ;
- La température du lac Léman, en un point donné, pendant une année complète, avec un thermomètre dont la précision est de  $0.1^\circ\text{C}$  : cette VA est discrète, non-stationnaire, de population finie ;
- La masse des petits cailloux que l'on s'amuse à jeter dans l'eau, au bord d'une rivière, au lieu de travailler ses cours : cette VA est continue, stationnaire, de population infinie.

## 7.3 Universalité des lois de probabilité

Les probabilités interviennent dans tous les domaines de l'activité humaine (science, technologie, sociologie etc). Or, lorsque l'on étudie les répartitions de probabilité des VA associées à n'importe lequel des ces domaines, on retombe **toujours** sur les mêmes formules ! Seuls les paramètres de ces formules varient d'un cas à l'autre. Le comptage des abeilles qui rentrent à la ruche au coucher du soleil obéit aux mêmes lois que le nombre de voitures dans les bouchons sur l'autoroute à l'heure de pointe du soir, et au nombre de cancers du poumon dus à la pollution engendrée par ce trafic.

Nous allons présenter ici ces différentes lois, en espérant qu'elles puissent vous servir un jour à compter le nombre de papillons dans les champs plutôt que le nombre de balles que tire une mitrailleuse... bien qu'encore une fois les mathématiques soient les mêmes.

## 7.4 Les distributions de probabilité des variables aléatoires discrètes

Ce paragraphe constitue un rappel général sur les probabilités des VA discrètes, permettant de mieux appréhender les VA continues, dans les paragraphes suivants.

### 7.4.1 La probabilité discrète

Soit la VA **discrète**  $X$ , mesure d'une certaine grandeur physique. L'ensemble des valeurs possibles de  $X$  est donné par la population  $\mathcal{P} = [x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N_p}]$ , de dimension  $N_p$ . Soit  $\mathcal{E}$  un échantillon de  $N_m$  mesures de  $X$ . Dans cet échantillon, la probabilité que  $X = x_k$  est naturellement donnée par

$$P_\epsilon[X = x_k] = \frac{\text{nombre de fois que } X = x_k}{N_m} \quad (7.1)$$

Cependant, tout échantillon est - en principe - unique, c-à-d que si on effectue une autre série de  $N_m$  mesures, en général le nouvel échantillon sera différent. Par conséquent, pour connaître la vraie probabilité  $p_k$  que  $X$  soit égal à la valeur particulière  $x_k$ , on comprendra qu'il faudrait faire un nombre infini de mesures :

$$P[X = x_k] = p_k = \lim_{N_m \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre de fois que } X = x_k}{N_m} \quad (7.2)$$

Mais cette formule n'est pas pratique. Il existe une autre façon de déterminer  $p_k$ , **si la population est finie**. Il suffit d'identifier, dans le processus qui nous intéresse, de compter toutes les situations où la variable  $X$  va prendre la valeur particulière  $p_k$ , puis de diviser par le nombre de valeurs possibles pour  $X$ , c-à-d par la taille de la population. On aura donc

$$P[X = x_k] = p_k = \frac{\text{nombre total de situations où } X = x_k}{N_p} \quad (7.3)$$

#### Exemple : jet de deux dés à 6 faces

La mesure est définie par le nombre total de points. La population est donnée par toutes les valeurs possibles, soit

$$\mathcal{P} = [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]$$

Pour calculer  $p_k$  on va appliquer la définition de l'équation (7.3), et construire le tableau des probabilités :

$x_k$	combinaisons favorables	nb de c.f.	$p_k$
2	[1,1]	1	1/36
3	[1,2] [2,1]	2	2/36
4	[1,3] [2,2] [3,1]	3	3/36
5	[1,4] [2,3] [3,2] [4,1]	4	4/36
6	[1,5] [2,4] [3,3] [4,2] [5,1]	5	5/36
7	[1,6] [2,5] [3,4] [4,3] [5,2] [6,1]	6	6/36
8	[2,6] [3,5] [4,4] [5,3] [6,2]	5	5/36
9	[3,6] [4,5] [5,4] [6,3]	4	4/36
10	[4,6] [5,5] [6,4]	3	3/36
11	[5,6] [6,5]	2	2/36
12	[6,6]	1	1/36
		total 36	$\sum p_k = 1$

La distribution de probabilité est montrée en figure 7.1.

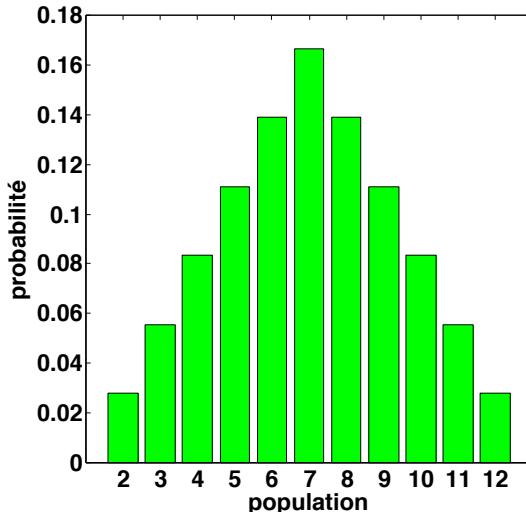


FIGURE 7.1 – Distribution de probabilité du résultat du jet de 2 dés.

#### 7.4.2 Propriétés de la probabilité discrète

- $0 \leq P[x_k] \leq 1$ , 0 si l'événement est impossible, 1 si il est certain.
- $P[x \in \text{population}] = 1$  c-à-d  $\sum_{k=1}^{N_p} p_k = 1$
- $P[x = x_k \text{ ou } x = x_l] = P[x = x_k] + P[x = x_l] = p_k + p_l$
- si  $x$  et  $y$  sont deux VA discrètes indépendantes, de populations identiques ou différentes, alors  $P[x = x_k \text{ et } y = y_l] = P[x = x_k] \cdot P[y = y_l]$ . Par exemple, soit  $p_1 = 1/20$  la probabilité qu'un étudiant de la HEIG-VD soit une fille, et  $p_2 = 1/10$

la probabilité d'attraper la grippe en hiver. La probabilité pour qu'une étudiante de l'école ait la grippe en hiver est donc égale à  $p_1 \cdot p_2 = 1/200$ .

### 7.4.3 Différence entre fréquence et probabilité

La fréquence  $f_k$  d'une classe  $k$  est une valeur que l'on détermine à partir d'un échantillon de mesures, de dimension forcément limité, puisque il s'agit de mesures réelles. Donc on comprend tout de suite que les valeurs des fréquences ne seront pas stables, puisque les échantillons de mesures réelles ne sont jamais identiques (sauf exception). Tandis qu'une probabilité est une valeur que l'on déduit soit d'un raisonnement - comme nous l'avons fait ci-dessus avec le jet de 2 dés - soit d'un nombre très grand de mesures, assez grand pour que les valeurs  $p_k$  soient stables. La fréquence ne s'associe donc à la probabilité que lorsque le nombre de mesures  $N_m$  tend vers l'infini :

$$p_k = \lim_{N_m \rightarrow \infty} \frac{f_k}{N_m} \quad (7.4)$$

### 7.4.4 Moments d'une variable aléatoire discrète

Considérons une VA discrète de population  $\mathcal{P} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$ . On effectue  $N_m = 100$  mesures, données dans le tableau ci-dessous :

3	2	3	8	7	2	4	4	3	5
3	6	6	3	6	5	6	4	2	7
4	6	4	7	9	5	4	1	10	5
8	10	7	9	8	9	3	3	8	2
8	6	6	5	7	9	4	9	5	4
4	8	6	6	4	9	5	7	8	6
10	8	8	5	1	7	7	5	3	6
9	6	7	7	1	5	5	2	8	7
3	4	3	2	8	2	2	4	9	6
10	5	4	7	5	3	7	1	5	6

Les valeurs s'échelonnent de 1 à 10, et leur fréquence est la suivante :

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_k$	4	8	11	13	14	14	13	11	8	4

Si il y a assez de mesures, la fréquence relative peut être assimilée à la probabilité  $p_k = f_k/N_m$ . On va faire l'hypothèse que c'est le cas ici (d'ailleurs le tableau des fréquences est très symétrique), et on aura :

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_k$	0.04	0.08	0.11	0.13	0.14	0.14	0.13	0.11	0.08	0.04

Voir aussi la figure 7.2. Calculons la moyenne de la VA  $x$ . Pratiquement, à partir des mesures, elle se calcule de la manière suivante :

$$\langle x \rangle = \frac{(\text{nb. de fois où } x=1) \cdot 1 + (\text{nb. de fois où } x=2) \cdot 2 + \dots + (\text{nb. de fois où } x=10) \cdot 10}{\text{nombre total de mesures}}$$

ce qui peut s'écrire, en notation plus compacte, comme la somme

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^{10} f_k x_k}{N_m} = \sum_{k=1}^{10} p_k x_k = 5.5 \quad (7.5)$$

On voit alors que la moyenne se calcule comme la somme des valeurs de la population, **pondérées** par leur probabilité d'occurrence. On généralise ce résultat pour toutes les puissances de  $x$ , en introduisant le **moment d'ordre m d'une VA x discrète**, égal à la moyenne de  $x^m$  :

$$\langle x^m \rangle = \sum_{k=1}^{N_p} p_k x_k^m \quad (7.6)$$

**La moyenne simple** est donc donnée par

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^{N_p} p_k x_k \quad (7.7)$$

**L'écart-quadratique moyen** est donné par

$$\text{EQM}(x) = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \sum_{k=1}^{N_p} p_k x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^{N_p} p_k x_k \right)^2 \quad (7.8)$$

que l'on appelle aussi la variance, et **l'écart-type** est simplement

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{EQM}(x)} \quad (7.9)$$

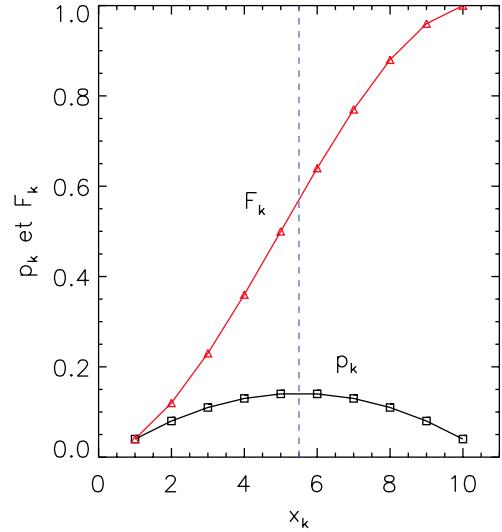


FIGURE 7.2 – Distribution de probabilité de l'exemple des 100 mesures (courbe noire). En rouge, la fonction de répartition. La médiane est égale à la moyenne et vaut 5.5.

### 7.4.5 Fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète

La somme partielle

$$F_k = \sum_{l=1}^k p_l = P[x \leq x_k] \quad (7.10)$$

définit la **fonction de répartition** de la VA. On a  $F_1 = p_1$  et  $F_{N_p} = 1$ , où  $N_p$  est la dimension de la population. Voir la figure 7.2, pour la fonction de répartition de l'exemple des 100 mesures précédent. Nous avons aussi vu un exemple de fonction de répartition au premier chapitre, avec la somme partielle des fréquences. A nouveau, la somme partielle des fréquences ne s'identifie à la fonction de répartition que lorsque le nombre de mesures tend vers l'infini.

### 7.4.6 Mode et médiane d'une variable aléatoire discrète

Le **mode** de la VA est la valeur de  $x$  pour laquelle  $p_k$  est maximale, et la **médiane** la valeur de  $x$  qui sépare la probabilité en deux sommes partielles égales :

$$\sum_{k=1}^{k_{\text{med}}} p_k = \sum_{k=k_{\text{med}}}^{N_p} p_k = \frac{1}{2} \quad (7.11)$$

Ici il y a une petite difficulté : il peut se faire qu'aucune valeur de la population  $\mathcal{P}$  ne satisfasse à cette définition, c-à-d que la valeur de la médiane soit située entre deux valeurs successives de  $\mathcal{P}$ , comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessus : la somme des probabilités entre  $x = 1$  et  $x = 5$  est de 0.5, et la somme de  $x = 6$  à  $x = 10$  est aussi égale à 0.5. La médiane est donc située entre  $x = 5$  et  $x = 6$ , soit, par interpolation,  $x = 5.5$ .

## 7.5 Les distributions de probabilité des variables aléatoires continues

Ce paragraphe constitue un rappel général sur les probabilités des VA continues. Au prochain paragraphe, nous introduirons les distributions continues les plus courantes.

### 7.5.1 La densité de probabilité

Soit une VA **continue**  $x$  (un nombre réel), mesure d'une grandeur physique  $\mathcal{G}$ . L'ensemble des valeurs possibles de  $x$  est la population  $\mathcal{P}$ . Cette population est un intervalle continu de valeurs réelles, entre 2 bornes (qui peuvent être infinies). Par conséquent, la dimension de la population d'une VA continue est forcément infinie.

Définir la probabilité de  $x$  est ici un peu plus difficile que dans le cas discret. Commençons tout d'abord par diviser la population en un certain nombre de classes (peu importe le nombre) de largeur  $\Delta X$ . On traite ainsi - momentanément - la VA continue comme une VA discrète. Il est alors possible de définir la probabilité que  $x$  appartienne à un intervalle  $[X, X + \Delta X]$  par

$$P\{x \in [X, X + \Delta X]\} = \frac{\text{nombre de fois où } x \in [X, X + \Delta X] \text{ parmi tous les résultats possibles}}{\text{nombre de résultats possibles d'une expérience}} \quad (7.12)$$

Définissons alors la **densité de probabilité** de la VA  $x$  par

$$p(x) = \lim_{\Delta X \rightarrow 0} \frac{P\{x \in [X, X + \Delta X]\}}{\Delta X} \quad (7.13)$$

et on remarquera que cette densité de probabilité ressemble à une dérivée. Si  $\Delta X$  est assez petit, alors  $p(X) \approx p(X + \Delta X)$  (noté  $\bar{p}$ ), et on aura

$$P\{x \in [X, X + \Delta X]\} = \bar{p} \Delta X$$

Si à présent  $\Delta X \rightarrow 0$ , alors  $P\{x \in [X, X + 0]\} = \bar{p} \cdot 0 = 0$ , et donc la probabilité que la VA  $x$  soit exactement égale à une valeur précise  $X$  sera nulle ! Résultat à priori surprenant, car la valeur  $X$  existe bel et bien. Cependant, dans la population  $\mathcal{P} \in \mathbb{R}$ , il existe un nombre infini de possibilités, et entre n'importe lesquelles des valeurs de  $\mathcal{P}$ , il existe encore une infinité de possibilités ! C'est du super-infini. Si on effectue une expérience numérique, le nombre de fois où on tombera exactement sur une valeur précise  $X$  sera *infiniment plus petit* que le nombre de fois où on tombera sur n'importe quoi d'autre. La probabilité d'une valeur particulière d'une VA continue est donc nulle, même si cela heurte notre intuition.

En revanche, la probabilité que la VA appartienne à un certain intervalle  $[a, b]$  n'est pas nulle ! A l'aide de la densité de probabilité, on pourra alors écrire,

$$P\{x \in [a, b]\} = \int_a^b p(x) dx \quad (7.14)$$

**On veillera donc à ne pas confondre probabilité et densité de probabilité !**

### 7.5.2 Propriétés de la probabilité continue

- si  $[a, b] \in \mathcal{P}$ , alors  $0 \leq P\{x \in [a, b]\} \leq 1$
- $P[x \in \text{population}] = 1$  c-à-d  $\int p(x)dx = 1$
- $P\{x \in [a, b] \text{ ou } x \in [c, d]\} = P\{x \in [a, b]\} + P\{x \in [c, d]\} = \int_a^b p(x)dx + \int_c^d p(x)dx$
- si  $x$  et  $y$  sont deux VA continues indépendantes, de densités de probabilité  $p_x$  et  $p_y$ , alors  $P\{x \in [a, b] \text{ et } y \in [c, d]\} = P\{x \in [a, b]\} \cdot P\{y \in [c, d]\} = \int_a^b p_x(x)dx \cdot \int_c^d p_y(y)dy$ .

### 7.5.3 Moments d'une variable aléatoire continue

Le moment d'ordre  $m$  d'une VA continue est défini par la moyenne de  $x^m$ , pondérée par la densité de probabilité  $p(x)$ , sur toute l'étendue de la population  $\mathcal{P}$ . De manière similaire au cas des VA discrètes, on a

$$\langle x^m \rangle = \int_{\mathcal{P}} p(x) x^m dx \quad (7.15)$$

**La moyenne simple** est donnée par

$$\langle x \rangle = \int_{\mathcal{P}} p(x) x dx \quad (7.16)$$

L'**écart-quadratique moyen** ou **variance** est donné par

$$\text{EQM}(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_{\mathcal{P}} p(x) x^2 dx - \left( \int_{\mathcal{P}} p(x) x dx \right)^2 \quad (7.17)$$

et l'**écart-type** sera, comme d'habitude,

$$\sigma(x) = \sqrt{\text{EQM}(x)} \quad (7.18)$$

à noter que, très souvent, on note la variance par  $\sigma^2$ .

### 7.5.4 Fonction de répartition d'une variable aléatoire continue

La fonction de répartition  $F(X)$  détermine la probabilité que la VA  $x$  soit inférieure ou égale à une certaine limite  $X$ ,

$$F(X) = \int_{\min(x)}^X p(x) dx \quad (7.19)$$

où  $\min(x)$  est la plus petite valeur de la VA dans la population  $\mathcal{P}$ .

Puisque la fonction de répartition est égale à l'intégrale de la densité de probabilité, il vient automatiquement que **la densité de probabilité est égale à la dérivée de la fonction de répartition**. En effet, si on dérive (7.19), il vient, avec  $P(x)$  la primitive de  $p(x)$ ,

$$\frac{d}{dX} F(X) = \frac{d}{dX} [P(X) - P(\min(x))] = p(X)$$

### 7.5.5 Mode et médiane d'une variable aléatoire continue

Le mode est, comme toujours, la valeur de  $x$  associée au maximum de la densité de probabilité  $p(x)$ . La médiane de la VA -  $\text{med}(x)$  - est la valeur de  $x$  qui sépare la probabilité en deux valeurs égales, naturellement égales à  $1/2$ ,

$$\int_{\min(x)}^{\text{med}(x)} p(x) dx = \int_{\text{med}(x)}^{\max(x)} p(x) dx = \frac{1}{2} \quad (7.20)$$

Dans le cas d'une VA continue, la médiane est donc définie sans ambiguïté.

## 7.6 Distributions de probabilité continues usuelles

Nous présentons ci-dessous les distributions de probabilité continues que l'on retrouve le plus souvent en pratique. **Dans le cas des VA continues, l'usage prévaut que l'on utilise aussi le terme distribution de probabilité pour désigner ce qui est en fait une densité de probabilité**, et dans ce cours, on utilisera indistinctement un terme ou l'autre - uniquement pour les VA continues, cela va de soit. En général, c'est en analysant qualitativement le processus de la mesure que l'on va pouvoir prédire le type de loi de probabilité auquel on doit s'attendre.

### 7.6.1 La distribution uniforme

Soit une population  $\mathcal{P}$  constituée par l'intervalle  $[a, b]$ . Si toutes les valeurs de la population sont équiprobables, c-à-d si  $p(x)$  est une constante  $p$ , alors on dit que la distribution est uniforme, et on aura

$$\int_a^b p(x) dx = p \int_a^b dx = p(b-a) = 1 \implies p = \frac{1}{b-a} \quad (7.21)$$

**Moments, moyenne, variance, écart-type, mode, médiane**

- **Le moment d'ordre  $m$**  est donné par

$$\langle x^m \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{(b-a)(m+1)} \quad (7.22)$$

- **La moyenne** est donnée par

$$\langle x \rangle = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \quad (7.23)$$

- L'**écart quadratique moyen** est donné par

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b^2 + 2ab + a^2}{4}\right) \\ &= \frac{(b-a)^2}{12}\end{aligned}\quad (7.24)$$

- L'**écart-type** par

$$\sigma(x) = \frac{b-a}{\sqrt{12}} \quad (7.25)$$

- Le **mode** n'est pas défini, tandis que la **médiane** est égale à la moyenne.

### 7.6.2 La distribution de Gauss ou « loi normale »

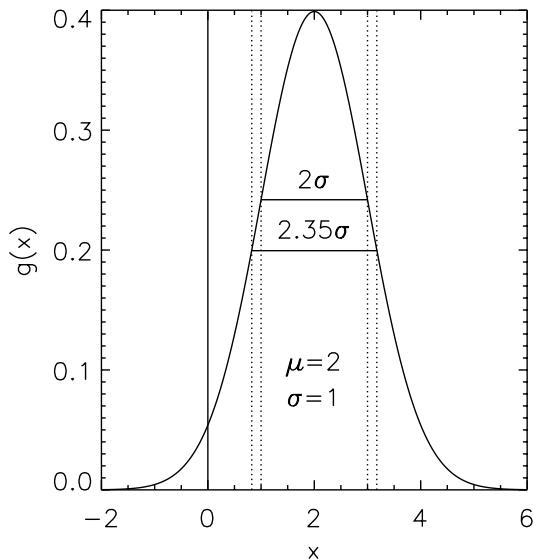


FIGURE 7.3 – Densité de probabilité d'une VA gaussienne de moyenne  $\mu = 2$  et d'écart-type  $\sigma = 1$ .

La distribution de Gauss<sup>2</sup> est de loin **la distribution la plus fréquente rencontrée** lors de la mesure de VA continues. Elle apparaît en pratique dans les processus naturels ou techniques qui résultent de la composition d'un grand nombre de processus plus simples et indépendants. Par exemple, dans le cas d'un appareil de mesure complexe - constitué d'un grand nombre de composantes - l'effet total des erreurs individuelles associées à chacune des composantes va se distribuer en général sous la forme d'une courbe de Gauss.

---

2. la courbe dite « en cloche »

Dans la pratique, très souvent, l'ingénieur fait face à des processus à composantes multiples (les machines construites sont presque toujours des assemblages complexes d'un grand nombre de pièces ou d'éléments), par conséquent on rencontrera, très fréquemment, des VA de type gaussien.

Soit donc  $X$  une VA continue de type gaussien, de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ . La densité de probabilité de  $X$  est donnée par la formule suivante, que l'on appelle aussi la **loi normale**

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (7.26)$$

ou encore la courbe gaussienne, voire parfois tout simplement une « gaussienne ». On montre en figure 7.3 la forme de la loi de Gauss pour une VA de moyenne  $\mu = 2$  et d'écart-type  $\sigma = 1$ .

### Largeur à mi-hauteur de la courbe de Gauss

On quantifie souvent la dispersion de la courbe de Gauss par sa largeur à mi-hauteur. On utilise dans la pratique l'acronyme du terme en anglais, soit FWHM pour *Full Width at Half-Maximum*. En posant  $g(x)/\max(g) = 1/2$ , on trouve (exercice)

$$\text{FWHM} = 2\sqrt{2 \ln 2} \sigma \approx 2.35 \sigma \quad (7.27)$$

### Loi normale centrée-réduite

Soit une VA  $X$  gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$ . Considérons ensuite la VA  $Y$  définie par  $Y = (X - \mu)/\sigma$ . Cette VA est de moyenne nulle, ce qui est évident, et de variance égale à 1, ce qui est moins immédiat mais se démontre très simplement en appliquant la définition de l'EQM. On dit alors que cette VA est **centrée** (de moyenne 0) et **réduite**, c-à-d de variance 1, et sa distribution est donnée par la loi normale dite centrée-réduite,

$$g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2) \quad (7.28)$$

### Moments, moyenne, variance, écart-type, mode, médiane

- **Le moment d'ordre  $m$**  est donné par la définition habituelle (équation 7.15)
- **La moyenne** est naturellement égale à  $\mu$
- **L'écart quadratique moyen ou variance** est donné par  $\sigma^2$
- **L'écart-type** par  $\sigma$
- **Le mode et la médiane** sont identiques et donnés par la moyenne  $\mu$

### 7.6.3 Convergence vers la distribution de Gauss : le théorème central-limite

Considérons un processus complexe, constitué d'un très grand nombre de processus individuels, chacun décrit par une distribution de probabilité **absolument quelconque**, de type continu ou discret. On peut montrer que si l'effet de ces processus s'additionne, ce qui est très souvent le cas, alors la distribution de probabilité de la VA constituée par l'addition de ces sous-processus sera donnée par la convolution des distributions individuelles.

Or, si on convolue entre elles des fonctions de forme quelconque, mais tout de même toujours positives, et tendant vers 0 d'un côté et de l'autre de l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , alors on peut montrer que le résultat va tendre vers une courbe gaussienne,

$$f_1(x) \star f_2(x) \star f_3(x) \star \cdots \star f_\infty(x) \rightarrow g(x) \quad (7.29)$$

Ce résultat très important en théorie des probabilités est connu sous le nom de **théorème central limite**. En général, la convergence est obtenue lorsqu'il existe au moins une dizaine de sous-processus indépendants.

La **variance globale** de la gaussienne sera donnée par la somme des variances de chaque sous-processus, et la **moyenne globale** sera égale à la moyenne des moyennes des chaque processus.

## 7.7 Incertitude de la moyenne empirique, intervalle et niveau de confiance

Nous avons commencé ce chapitre par discuter du fait que la mesure de toute grandeur physique constitue une variable aléatoire, soit parce que la grandeur physique varie par elle-même de manière aléatoire, soit que le processus de mesure soit lui-même source d'erreurs. Souvent, les deux causes interviennent en même temps, mais puisqu'en métrologie nous nous intéressons surtout à la problématique de la précision des mesures, nous allons considérer à partir de maintenant que la fluctuation des mesures est due à la précision limitée des instruments, et que la grandeur à mesurer est, par nature, constante dans le temps.

Nous avons introduit, avec la distribution de probabilité et les moments de la distribution, des outils permettant de quantifier de manière efficace les fluctuations des mesures expérimentales. Parmi ces outils, c'est surtout la moyenne et l'écart-type qui sont le plus largement utilisés, et le résultat d'une mesure est en général annoncé comme suit :

$$r = \text{moyenne} \pm \text{incertitude unité}$$

**Une question fondamentale se pose alors :** quelle est la fiabilité de la détermination de la moyenne ? ou en d'autres termes, quelle est l'écart probable entre la moyenne empirique, et la vraie valeur de la moyenne - celle que nous cherchons vraiment et que nous trouverions si nous avions une infinité de mesures ? **Estimer cet écart, c'est estimer la précision de notre mesure !** Examinons cela.

### Incertitude à $1-\sigma$ sur la moyenne

Soit donc un échantillon de  $N$  mesures, de moyenne et de variance empiriques (c-à-d calculées à partir des mesures elles-mêmes, selon les équations des paragraphes 7.4.4 ou 7.5.3) données par  $\mu$  et  $\sigma^2$ . Si  $N$  était infini, alors la moyenne empirique serait exactement égale à la moyenne de la grandeur physique étudiée. Mais comme  $N < \infty$ , il existe toujours un écart, inconnu, entre la moyenne vraie et  $\mu$ , qui n'est qu'une estimation.

On peut facilement montrer<sup>3</sup> que les erreurs sur la détermination de la moyenne se distribuent selon une loi gaussienne, de moyenne égale à  $\mu$ , et d'écart-type

$$\Delta\mu = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad (7.30)$$

et on voit que cet écart diminue avec le nombre de mesures.  $\Delta\mu$  est donc une estimation de l'erreur commise sur le calcul de la moyenne, à partir d'un échantillon de  $N$  mesures.

### Intervalle et niveau de confiance à $n-\sigma$

Pour terminer, il nous faut encore introduire le concept **d'intervalle et de niveau de confiance** sur l'estimation de la moyenne. Un intervalle de confiance est un intervalle centré sur la valeur moyenne empirique  $\mu$  dans lequel on estime que la vraie valeur de la moyenne se trouve avec un niveau de confiance  $\alpha$  (entre 0 et 1 - c'est une probabilité).

Sachant que la distribution des erreurs sur la détermination de la moyenne est décrite par une loi gaussienne, on peut calculer les niveaux de confiance (dits à  $n-\sigma$ ) associé aux intervalles  $\mu \pm n\Delta\mu$ , pour  $n = 1, 2, 3, \dots$ , en intégrant la loi de Gauss sur  $[\mu - n\Delta\mu, \mu + n\Delta\mu]$ , et on trouve

intervalle de confiance	1- $\sigma$	2- $\sigma$	3- $\sigma$
niveau de confiance	$\mu \pm \Delta\mu$	$\mu \pm 2\Delta\mu$	$\mu \pm 3\Delta\mu$
	68.3 %	95.4 %	99.7 %

Avec le concept de niveau de confiance, on devra désormais annoncer le résultat d'une mesure de la manière suivante :

$$\text{résultat} = \text{moyenne} \pm \text{incertitude [unité] à } \alpha \%$$

---

3. à l'aide du théorème central-limite

où  $\alpha$  est le niveau de confiance associé à l'intervalle moyenne±incertitude. Par exemple, on dira

$$m = 12.35 \pm 0.01 \text{ mg à } 95\%$$

ce qui signifie que la vraie valeur de  $m$  a 95 % de chances de se trouver dans l'intervalle [12.34,12.36] mg.

Quand on donne un résultat **sans spécifier** le niveau de confiance, alors par défaut on fera l'hypothèse qu'il s'agit d'un intervalle à  $1-\sigma$ , et que donc  $\alpha = 68.3\%$ .

## 7.8 Exercices du chapitre 7

**Pour faire ces exercices, utilisez matlab**

### Exercice 7.1 - variable aléatoire discrète et distribution de probabilité

On jette 2 dés à 6 faces. La variable aléatoire à laquelle on s'intéresse est la somme des points sur les deux faces supérieures. Répondre aux questions suivantes :

- quelle est la population ?
- quelle est la probabilité  $p(v)$  de chaque valeur  $v$  ?
- construire le graphique de la distribution de probabilité
- quels sont les modes ?
- quelle est la médiane ?
- quelle est la moyenne ? visuellement, et avec la formule utilisant  $p(v)$
- calculez l'écart-type, les coefficients d'asymétrie et d'aplatissement
- quelle est la probabilité que  $v \in [\langle v \rangle - \sigma_v, \langle v \rangle + \sigma_v]$  ?
- prenez deux dés, jetez-les 100 fois, et comparez la distribution des valeurs à ce que vous avez prédit théoriquement.

### Exercice 7.2 - variable aléatoire discrète

La variable aléatoire discrète X possède la distribution de probabilité suivante

$x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$p_i \%$	3.4	5.1	8.6	13.7	17.1	18.8	17.8	10.3	3.5	1.7

- vérifiez que  $\sum p_i = 1$
- calculez la moyenne et l'écart-type de X
- calculez les moments d'ordre 3 et 4
- donnez le mode
- calculez la fonction de répartition discrète  $F_i$
- calculez la médiane, par interpolation
- calculez le niveau de confiance à 1 et 2  $\sigma$ , c-à-d la probabilité que  $X \in [\langle x \rangle \pm \sigma]$  et que  $X \in [\langle x \rangle \pm 2\sigma]$

### Exercice 7.3 - variable aléatoire continue

La mesure d'une tension électrique soumise à des perturbations aléatoires générant une erreur de mesure autour de la valeur moyenne  $U_0$  a fourni la distribution de probabilité continue suivante

$$p(U) = \exp(-2|U - U_0|)$$

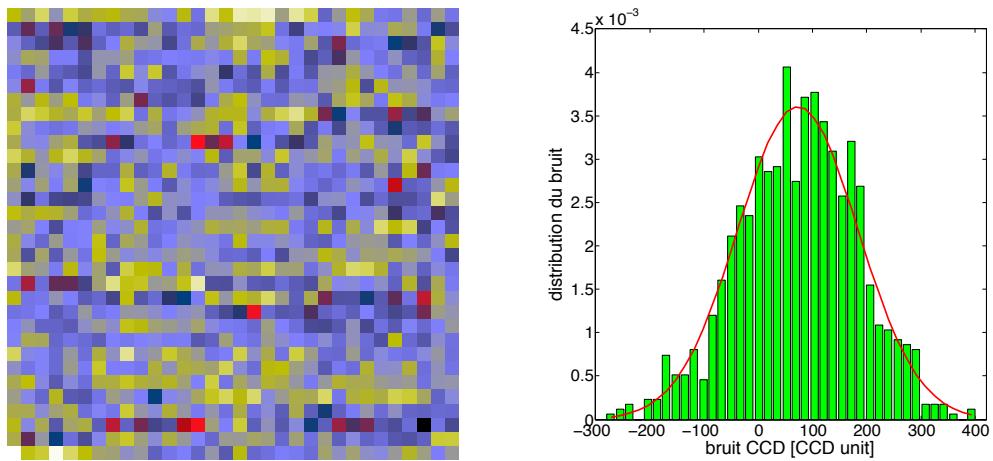


FIGURE 7.4 – A gauche : détail sur 32x32 pixels du bruit de lecture de la caméra CCD (WMKO) ; à droite : histogramme des valeurs, avec superposition de la courbe de Gauss correspondant à la moyenne et à l'écart-type mesuré sur l'image.

- vérifiez qu'il s'agit bien d'une distribution de probabilité, c-à-d que  $\int p dU = 1$
- calculez la moyenne et l'écart-type de  $U$
- calculez les moments d'ordre 3 et 4
- donnez le mode
- calculez la fonction de répartition  $F(U)$
- calculez la médiane
- calculez le niveau de confiance de l'intervalle d'incertitude à 1, 2 et 3  $\sigma$ , c-à-d la probabilité que  $U \in [U_0 - \Delta U, U_0 + \Delta U]$  avec  $\Delta U = \sigma, 2\sigma$  et  $3\sigma$ )

### Exercice 7.4 - variable aléatoire continue gaussienne

La figure 7.4 (gauche) représente une partie de l'image donnée par un détecteur CCD (détecteur d'image numérique) lors d'une observation stellaire à l'aide du télescope W. M. Keck à Hawaii, USA. Cette partie de l'image ne montre aucune source lumineuse, mais uniquement du bruit de lecture de nature électronique (amplificateur de sortie). L'histogramme des valeurs du bruit est montré dans la même figure, à droite, avec superposition d'une distribution gaussienne de moyenne et d'écart-type égale à celles de l'échantillon, respectivement 73 et 111 photons de bruit.

- Donnez la valeur moyenne, le mode et la valeur médiane du bruit de lecture, d'après la distribution gaussienne.
- Calculez la probabilité d'obtenir une valeur positive puis négative de la valeur du bruit.
- Calculez la largeur à mi-hauteur (notée  $\lambda_b$ ) de la distribution du bruit.
- Quel est le niveau de confiance de l'intervalle  $[\mu_b \pm \sigma_b]$  où  $\mu_b$  et  $\sigma_b$  sont la moyenne

et l'écart-type du bruit ?

— Et quel est ce niveau pour l'intervalle  $[\mu_b \pm \lambda_b/2]$  ?

Pour répondre à ces questions, vous pouvez calculez numériquement les intégrales avec Matlab, en approximant les intégrales par des sommes (soit  $\int f(x)dx \approx \sum_i f(x_i)\Delta x$ ), ou alors utiliser mathematica.

### Exercice 7.5 - densité de probabilité gaussienne

Démontrez la formule 7.27 de la largeur à mi-hauteur de la distribution gaussienne.

### Exercice 7.6 - théorème central limite

Lancez matlab, définissez un vecteur  $x$  de 1000 éléments, et dont les éléments 400 à 600 valent 1, et les autres 0. En utilisant la fonction de convolution de matlab, conv() (voir help), convolez ce vecteur avec lui-même 1 fois, puis 2 fois, 3 fois etc. La syntaxe est la suivante :

```
>> x=zeros(1000,1);
>> x(400:600,1)=1;
>> y=conv(x,x);
>> plot(y)
>> y=conv(y,x);
>> plot(y)
```

Répétez les deux dernières lignes un grand nombre de fois. Comment se comporte le résultat de ces convolutions multiples ?

**Exercice 7.7 - incertitude et niveau de confiance**

On a mesuré 10'000 fois la cote d'une pièce mécanique, et obtenu un écart-type des données de 0.005 mm. Quelle est l'incertitude sur la moyenne, pour un niveau de confiance à  $2\sigma$  ?

**Exercice 7.8 - incertitude et niveau de confiance**

Combien de mesures faut-il effectuer pour s'assurer que, pour l'exemple de l'Exercice 7.15 ci-dessus, l'incertitude à  $3\sigma$  sur la mesure soit inférieure à 0.001 mm ?

# Chapitre 8

## Mesures multidimensionnelles, corrélations, budget d'erreur

But du chapitre : admettons que l'on s'intéresse à mesurer une grandeur physique  $G$ , variable aléatoire, mais uniquement accessible de *manière indirecte* à travers la mesure de variables aléatoires internes,  $G = G(x_1, x_2, x_3, \dots)$ . Ce cas est très fréquent en pratique. On cherche à déterminer l'incertitude  $\Delta G$  dues aux erreurs sur les variables internes,  $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \dots$ . Or, la manière de tenir compte de cette incertitude va dépendre de la corrélation entre les variables internes.

Dans un cas (corrélation totale, et en pratique très rare), on additionne les incertitudes dues aux VA internes, dans l'autre (corrélation nulle, ce qui est la norme en pratique) les incertitudes s'additionnent de manière quadratique. Nous allons examiner dans ce chapitre la corrélation entre variables aléatoires. Comme application très importante, on introduira le concept de **budget d'erreur**, **absolument fondamental** pour l'ingénieur en conception.

### 8.1 La covariance et la corrélation

Soit deux séries de  $N$  mesures,  $x_1$  et  $x_2$ . On aimerait connaître le lien entre ces deux séries : est-ce que l'une va dépendre de l'autre ? un peu, beaucoup, pas du tout ? L'outil de mesure quantitatif de ce lien est la **corrélation**, notée  $\Gamma(x_1, x_2)$ . Elle s'introduit à travers une autre quantité de l'analyse statistique, la **covariance**, généralisation de la notion de variance, vue au chapitre précédent. Elle est définie par la valeur moyenne du produit des écarts des VA à leur valeur moyenne :

$$\text{cov}(x_1, x_2) \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) = \langle (x_1 - \langle x_1 \rangle)(x_2 - \langle x_2 \rangle) \rangle = \langle \Delta x_1 \Delta x_2 \rangle \quad (8.1)$$

Si, au long des mesures, les écarts  $\Delta x_1$  sont plutôt du même signe, c-à-d si lorsque  $\Delta x_1$  est positif (ou négatif),  $\Delta x_2$  l'est aussi, cela nous indique que  $x_1$  et  $x_2$  ont tendance à varier dans le même sens, et  $\text{cov}(x_1, x_2) > 0$ . De manière inverse, si lorsque  $\Delta x_1$  est positif (ou négatif),  $\Delta x_2$  est plutôt du signe opposé, cela signifie que  $x_1$  et  $x_2$  ont tendance à varier de manière opposée, et  $\text{cov}(x_1, x_2) < 0$ . Finalement, si en moyenne les écarts  $\Delta x_1$  et  $\Delta x_2$  varient de manière totalement indépendante, alors il y aura autant de chances que  $\Delta x_2$  et  $\Delta x_1$  aient le même signe ou un signe opposé, et la covariance sera faible, voir nulle. A noter qu'en développant l'équation 8.1, on a aussi la formulation utile suivante :

$$\text{cov}(x_1, x_2) = \langle x_1 x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle \langle x_2 \rangle \quad (8.2)$$

Si le signe de la covariance est un indicateur du lien entre  $x_1$  et  $x_2$  on ne sait en revanche pas interpréter sa valeur absolue : si la covariance est grande, est ce par ce que les écarts  $\Delta x_i$  sont grands ou parce que le lien est fort ? Afin de s'affranchir de l'effet de l'amplitude propre aux VA, on normalise la covariance par l'écart-type des VA  $x_1$  et  $x_2$ , ce qui détermine ce que l'on appelle la **corrélation** :

$$\Gamma(x_1, x_2) \equiv \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} = \frac{\langle \Delta x_1 \Delta x_2 \rangle}{\sigma_{x_1} \sigma_{x_2}} \quad (8.3)$$

### 8.1.1 Corrélation linéaire

**Dans le cas où  $x_1$  et  $x_2$  sont totalement dépendantes** l'une de l'autre, et de manière **linéaire**, c-à-d si

$$x_2 = ax_1 + b$$

la corrélation est naturellement maximale. Il vient, avec 8.2, et la formule de la variance (chapitre 2),

$$\text{cov}(x_1, x_2) = \langle x_1(ax_1 + b) \rangle - \langle x_1 \rangle \langle (ax_1 + b) \rangle = a\langle x_1^2 \rangle + b\langle x_1 \rangle - a\langle x_1 \rangle^2 - b\langle x_1 \rangle = a\sigma_{x_1}^2$$

de même

$$\begin{aligned} \sigma_{x_2}^2 &= \langle x_2^2 \rangle - \langle x_2 \rangle^2 = \langle (ax_1 + b)^2 \rangle - \langle (ax_1 + b) \rangle^2 \\ &= a^2\langle x_1^2 \rangle + 2ab\langle x_1 \rangle + b^2 - a^2\langle x_1 \rangle^2 - 2ab\langle x_1 \rangle - b^2 \\ &= a^2\sigma_{x_1}^2 \end{aligned}$$

d'où  $\sigma_{x_2} = \pm a\sigma_{x_1}$ . La corrélation est alors

$$\Gamma(x_1, x_2) = \frac{a\sigma_{x_1}^2}{\pm a\sigma_{x_1}^2} = \pm 1$$

On dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont totalement corrélées si le signe est  $+$ , et totalement anti-corrélées si le signe est  $-$ . Attention ! anti-corrélée ne signifie pas que la corrélation est nulle ! mais simplement que  $x_1$  et  $x_2$  varient de manière opposée, en signe.

**Dans le cas où  $x_1$  et  $x_2$  sont totalement indépendantes**, alors la covariance est nulle, et la corrélation aussi,

$$\Gamma(x_1, x_2) = 0$$

### 8.1.2 Corrélation non linéaire

Dans le cas où les deux VA  $x_1$  et  $x_2$  dépendent l'une de l'autre à travers une relation non-linéaire, alors il y a deux options pour examiner la corrélation :

**Si la relation est linéarisable**, par exemple si  $x_2 = a \cos^2 x_1 + b$ , alors on peut poser  $z = \cos^2 x_1$ , d'où  $x_2 = az + b$ , et examiner la corrélation entre  $x_2$  et  $z$ .

**Si la relation n'est pas linéarisable**, parce qu'elle est trop complexe, alors on utilisera une mesure de l'écart entre les mesures et le modèle  $x_2 = f(x_1)$ , par exemple l'écart quadratique moyen entre  $f(x_1)$  et  $x_2$ , normalisé par l'écart-type de  $x_2$  et  $x_1$  (mais on peut imaginer une autre méthode),

$$q^2 = \frac{\sum_{i=1}^N [x_{2,i} - f(x_{1,i})]^2}{N\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}}$$

## 8.2 Incertitude globale sur $G(x_1, x_2, \dots)$ et corrélation des variables internes

**La question** - Soit donc une mesure des VA  $x_1, x_2, \dots$ . On va commettre des erreurs sur ces mesures,  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ . Quelle sera alors l'incertitude  $\Delta G$  sur  $G(x_1, x_2, \dots)$  ?

**La réponse** - On va calculer les dérivées partielles de  $G$  par rapport aux composantes  $x_1, x_2, \dots$ , ce qui nous permettra de calculer l'effet que les variations  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  ont sur  $G$ . Voyons cela en détail.

Soit donc une variation infinitésimale  $dx_1, dx_2, \dots$  des VA internes  $x_1, x_2, \dots$ . La variation infinitésimale correspondante  $dG$  sera donnée par la somme du produit des dérivées partielles de  $G$  et des variations des VA internes,

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial G}{\partial x_2} dx_2 + \dots = \sum_{k=1}^M \frac{\partial G}{\partial x_k} dx_k \quad (8.4)$$

Considérons alors une mesure (une seule, de numéro  $i$ ) de toutes les VA internes  $\vec{x} = x_1, x_2, \dots$  (on utilise une notation de vecteurs pour simplifier), que l'on va écrire  $\vec{x}_i$ . L'écart entre la mesure  $\vec{x}_i$  et la moyenne de  $\vec{x}$  constitue l'erreur sur les VA  $\Delta \vec{x}_i = \vec{x}_i - \langle \vec{x} \rangle$ , qui n'est, en général, jamais nulle.

Si l'erreur n'est pas trop grande, alors on peut identifier  $\Delta\vec{x}_i$  à  $d\vec{x}$  et utiliser la formule 8.4 pour calculer l'erreur  $\Delta G_i$  engendrée par les erreurs sur  $\vec{x}$ ,

$$\Delta G_i = \frac{\partial G}{\partial x_1} \Delta x_{1,i} + \frac{\partial G}{\partial x_2} \Delta x_{2,i} + \cdots = \sum_{k=1}^M \frac{\partial G}{\partial x_k} \Delta x_{k,i} = \vec{\nabla}G \cdot \Delta\vec{x}_i \quad (8.5)$$

où  $M$  est le nombre de VA internes, et le vecteur  $\vec{\nabla}G$  n'est que la suite des dérivées partielles de  $G$  par rapport à chacun de ses composantes, que l'on appelle le **gradient** de  $G$ .

**En moyenne**, l'erreur  $\Delta G_i$  sur  $G$  est nulle. Si ce n'est pas le cas, c'est qu'il existe une erreur systématique dans la mesure, et ceci sort du cadre de cette analyse. Supposons donc que les erreurs sur  $\vec{x}$  sont nulles en moyenne, c-à-d que  $\langle \Delta\vec{x} \rangle = 0$ , il vient alors naturellement que  $\langle \Delta G \rangle = 0$ . Par conséquent, ce que nous allons devoir considérer, pour caractériser l'erreur sur  $G$ , sera l'écart-type de  $\Delta G$ ,  $\sigma_{\Delta G}$ , que l'on calcule à partir de la variance  $\sigma_{\Delta G}^2$ , et que nous développons ci-dessous

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta G}^2 &= \langle \Delta G^2 \rangle - \langle \Delta G \rangle^2 = \langle \Delta G^2 \rangle \\ &= \left\langle \left( \vec{\nabla}G \cdot \Delta\vec{x} \right)^2 \right\rangle = \left\langle \left( \sum_{k=1}^M \frac{\partial G}{\partial x_k} \Delta x_{k,i} \right)^2 \right\rangle \\ &= \left\langle \left( \sum_{m=1}^M \frac{\partial G}{\partial x_m} \Delta x_{m,i} \right) \left( \sum_{n=1}^M \frac{\partial G}{\partial x_n} \Delta x_{n,i} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial G}{\partial x_k} \right)^2 (\Delta x_{k,i})^2 \right\rangle + 2 \left\langle \sum_{m=1}^M \sum_{n=m+1}^M \frac{\partial G}{\partial x_m} \Delta x_{m,i} \frac{\partial G}{\partial x_n} \Delta x_{n,i} \right\rangle \\ &= \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial G}{\partial x_k} \right)^2 \langle (\Delta x_{k,i})^2 \rangle + 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=m+1}^M \frac{\partial G}{\partial x_m} \frac{\partial G}{\partial x_n} \langle \Delta x_{m,i} \Delta x_{n,i} \rangle \end{aligned}$$

c-à-d que l'on trouve le **résultat fondamental que la variance de l'erreur sur  $G$  est égale à la somme de la contribution des variances de chaque VA interne, plus un terme fonction de la covariance entre les VA internes :**

$$\sigma_{\Delta G}^2 = \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial G}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_{x_k}^2 + 2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=m+1}^M \frac{\partial G}{\partial x_m} \frac{\partial G}{\partial x_n} \text{cov}(x_n, x_m) \quad (8.6)$$

**Oubliez donc à tout jamais la formule de l'addition simple des erreurs ! cela ne se présente que pour les cas où les erreurs des éléments internes du système sont coordonnées, ce qui ne se réalise pratiquement jamais ! Il faut, et toujours, utiliser l'addition QUADRATIQUE des erreurs.**

### 8.2.1 Variables internes indépendantes

Dans le cas très fréquent en pratique où les VA internes sont indépendantes, les covariances croisées sont nulles, par conséquent

$$\sigma_G^2 = \sum_{k=1}^M \left( \frac{\partial G}{\partial x_k} \right)^2 \sigma_{x_k}^2 \quad (8.7)$$

on obtient alors que la variance totale est la somme des contributions des variances de chaque VA.

**dans le cas de VA internes indépendantes, les variances  
des erreurs dues à chaque VA s'additionnent**

### 8.2.2 En pratique

L'incertitude mesurée, ou alors la tolérance spécifiée dans le cas d'un budget d'erreur (voir ci-dessous) n'est pas toujours égale à l'écart-type  $\sigma_x$  des variables internes  $x$ , mais est parfois tout simplement un intervalle que l'on ne doit pas dépasser, ou alors une précision à  $n - \sigma$ . Par exemple, si la tension de sortie d'un appareil doit être de 10 V plus ou moins 0.1 V à  $3\sigma$  cela signifie, en supposant que la distribution des erreurs est gaussienne (c'est en général le cas), que  $3\sigma_U = 0.1$  V et que donc l'écart-type de la tension due aux fluctuations internes de l'appareil doit être au maximum de  $0.1/3$  V soit 33 mV.

On pourra alors soit poser que  $\sigma_{\Delta G}^2 = 33$  mV dans l'équation 8.6 ou alors remplacer  $\sigma_{\Delta G}^2$  par la notation plus générale  $\Delta_{\Delta G}^2$  et écrire qu'il faut que  $\Delta_{\Delta G}^2 = 0.1$  V, et de même, remplacer les écarts-types individuels  $\sigma_{x_k}$  par des intervalles  $\Delta_{x_k}$ . La sensibilité  $\frac{\partial G}{\partial x_k}$  restera la même, simplement dans le premier cas on déterminera les  $\sigma_x$  que l'on peut accepter pour assurer la tolérance spécifiée, tandis que dans le second cas on déterminera directement l'intervalle à  $3 - \sigma$  pour chaque composante  $x$ .

#### Exemple

On désire déterminer la focale d'une combinaison de deux lentilles minces, séparées d'une distance  $e = 200$  mm, et de focales  $f_1 = 100$  mm et  $f_2 = -50$  mm. On peut montrer que la focale totale est donnée par

$$f_t = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - e}$$

Calculer l'incertitude sur  $f_t$ , sachant que les incertitudes sur les variables internes sont  $\Delta f_1 = 0.1$  mm,  $\Delta f_2 = 0.1$  mm et  $\Delta e = 0.2$  mm.

Il est absolument évident qu'il n'y a aucune raison que les incertitudes sur les deux focales et sur la distance entre les lentilles soient corrélées. Par conséquent, il faudra

utiliser la formule 8.7 de l'addition quadratique des erreurs. Calculons les dérivées de  $f_t$  par rapport aux trois variables internes. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_t}{\partial f_1} &= \frac{f_2(f_1 + f_2 - e) - f_1 f_2}{(f_1 + f_2 - e)^2} = \frac{f_2(f_2 - e)}{(f_1 + f_2 - e)^2} = 1 \\ \frac{\partial f_t}{\partial f_2} &= \frac{f_1(f_1 + f_2 - e) - f_1 f_2}{(f_1 + f_2 - e)^2} = \frac{f_1(f_1 - e)}{(f_1 + f_2 - e)^2} = -0.5 \\ \frac{\partial f_t}{\partial e} &= \frac{f_1 f_2}{(f_1 + f_2 - e)^2} = -0.5\end{aligned}$$

par conséquent

$$(\Delta f_t)^2 = (\Delta f_1)^2 + (-0.5)^2 (\Delta f_2)^2 + (-0.5)^2 (\Delta e)^2 = 0.0225 \text{ mm}^2$$

d'où  $\Delta f_t = 0.15 \text{ mm}$ .

### 8.2.3 Variables internes totalement dépendantes

Dans ce cas (très rare en pratique), on trouve que les erreurs s'additionnent de manière simple, c-à-d que

$$\sigma_G = \sum_{k=1}^M \left| \frac{\partial G}{\partial x_k} \right| \sigma_{x_k} \quad (8.8)$$

ce n'est donc que dans le cas d'une corrélation totale entre les VA internes qu'il est légitime d'additionner de manière simples les contributions individuelles. Mais ce cas, encore une fois, est **exceptionnel**.

Notez encore qu'utiliser la somme simple en lieu et place de la somme quadratique, dans le cas où les variables internes sont décorrélées, conduit toujours à une surestimation de l'incertitude. Dans l'exemple plus haut, additionner les erreurs simples conduit à une estimation de l'incertitude sur la focale à 0.25 mm, au lieu de 0.15 mm.

## 8.3 Cas particuliers fréquents : addition et produit de variables aléatoires totalement indépendantes

Considérons le cas où la fonction  $G$  consiste en l'addition et/ou soustraction de VA indépendantes, par exemple

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 - x_2 + \dots - x_n \quad (8.9)$$

alors en vertu de l'équation (8.7), la variance de  $G$  sera donnée par

$$\sigma_G^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2 \quad (8.10)$$

où on voit bien que les variances individuelles s'additionnent **toujours** et ne se soustraient **jamais**, même si les VA apparaissent en soustraction dans la relation avec  $G$ .

Considérons ensuite le cas où la fonction  $G$  consiste un produit et/ou quotient de VA indépendantes, par exemple

$$G(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{x_2 x_3} \quad (8.11)$$

le calcul est plus compliqué, mais on verra que le résultat est très simple : appliquons l'équation (8.7), il vient

$$\sigma_G^2 = \frac{1}{x_2^2 x_3^2} \sigma_{x1}^2 + \frac{x_1^2}{x_2^4 x_3^2} \sigma_{x2}^2 + \frac{x_1^2}{x_2^2 x_3^4} \sigma_{x3}^2 \quad (8.12)$$

ce qui semble compliqué, mais si on divise par  $G^2$ , il vient

$$\frac{\sigma_G^2}{G^2} = \frac{\sigma_{x1}^2}{x_1^2} + \frac{\sigma_{x2}^2}{x_2^2} + \frac{\sigma_{x3}^2}{x_3^2} \quad (8.13)$$

on trouve alors que dans le cas d'un produit ou quotient de VA, l'erreur **relative** est la somme quadratique des erreurs relatives sur les VA indépendantes individuelles.

## 8.4 Budget d'erreur pour le dimensionnement de systèmes - un aspect central du travail de l'ingénieur

Lors de la conception d'une machine quelconque - ici au sens de système physique mécanique, électrique, optique etc - l'ingénieur se base au moins sur deux spécifications pour le design :

**les caractéristiques** de la machine à construire, c-à-d ce qu'elle doit fournir par exemple comme couple, tension, luminosité etc

**la précision** avec laquelle la machine doit fournir les caractéristiques demandées.

Cette précision est normalement indiqué par un chiffre représentant une erreur à ne pas dépasser, ou par un intervalle autour de la caractéristique spécifiée, dont il ne faut pas sortir. **Cette spécification de précision est fondamentale et guide les choix de l'ingénieur en conception.** On l'appelle aussi très souvent le **budget d'erreur**, dans le sens où on fournit à l'ingénieur un budget pour l'erreur totale, et ce dernier devra choisir les composantes internes de la machine de manière à ce que l'accumulation des erreurs générées par chaque composants, ou à chaque étape de la conception (usinage etc) ne dépasse pas le budget alloué.

## Exemple en mécanique : usinage d'un axe

Soit à usiner un axe en acier à un diamètre de 20 mm avec une précision de 0.01 mm. La chaîne de production comporte un certain nombre d'éléments, chacun pouvant être source d'erreurs : positionnement du burin de coupe par rapport à une référence (on pense qu'il est positionné au rayon  $r$ , mais on se trouve au rayon  $r + \Delta r$ ), mécanisme de déplacement du burin (jeu mécanique, erreur dans le capteur de position du burin), et finalement mesure du diamètre de l'axe en fin de coupe.

Cela fait au moins 3 sources d'erreur. **Puisque ces erreurs sont forcément indépendantes, on doit considérer une addition quadratique des erreurs.** On aura donc

$$\text{erreur pos. burin}^2 + \text{erreur dépl. burin}^2 + \text{erreur mesure} \leq 0.01^2$$

Ce sera le rôle de l'ingénieur de concevoir la chaîne de production de manière à ce que le budget d'erreur ci-dessus soit respecté.

## Exemple en optique : aberration totale d'un système optique à 3 miroirs

On doit concevoir un télescope à 3 miroirs, dont l'écart-type de l'erreur de surface ne doit pas dépasser 50 nm. Comme les usinages des trois miroirs sont réalisés de manière indépendante, il n'y a aucune raison que les erreurs des miroirs soient corrélées. On aura donc

$$\text{erreur } M_1^2 + \text{erreur } M_2^2 + \text{erreur } M_3 \leq 50^2 = 2500 \text{ nm}^2$$

En distribuant de manière identique sur les trois termes, on aura que

$$\text{erreur } M_1 = \text{erreur } M_2 = \text{erreur } M_3 \leq \sqrt{2500/3} = 28.9 \text{ nm}$$

En toute généralité, on devra tenir compte du facteur de sensibilité  $\left(\frac{\partial G}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_{x_k}^2$ , comme nous l'avons fait pour l'exemple du système à deux lentilles de la page 129. Dans les exemples ci-dessus, le facteur était toujours égal à 1, mais cela ne représente pas le cas général.

**Une dernière remarque.** Vous comprendrez à présent quel est l'effet catastrophique de l'utilisation d'une addition simple des erreurs dans le cadre de la conception d'un système. En effet, en additionnant de manière simple, vous allez très vite dépasser le budget d'erreur total spécifié, et conclure, faussement, que les composantes de votre système ne sont pas assez précises ou fiables, et vous décideriez alors de sur-construire les spécifications de précision de ces composantes, conduisant à un système inutilement plus cher, et éventuellement hors budget financier, c-à-d non faisable. On voit donc où peut mener une mauvaise compréhension des règles de bases de l'analyse statistique... (il y a pire :

les politiciens qui font exprès de trafiquer les résultats et les corrélations de variables économiques pour faire passer leur propos, mais ceci, c'est une autre histoire).

## 8.5 Exercices du chapitre 8

### Pour faire ces exercices, utilisez matlab

#### Exercice 8.1 - expressions analytiques de la propagation d'incertitude

Déterminez les expressions analytiques de l'incertitude pour les grandeurs suivantes, et fonction de l'incertitude sur les membres de droite des équations, sauf pour les constantes suivantes supposées parfaitement connues,  $h, c, k, P_0, n_1, n_2$ .

**loi d'Ohm**  $U = RI$ , calculez  $\Delta U$  en fonction de  $R, \Delta R, I$  et  $\Delta I$ .

**Energie du photon**  $E = hc/\lambda$ . Donnez  $\Delta E$  en fonction de  $\lambda$  et  $\Delta\lambda$ .

**Période d'oscillation masse et ressort**  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ . Calculez  $\Delta T$  en fonction de  $m$  et  $\Delta m$ .

**Décibels et puissance**  $dB = 20 \log P/P_0$ . Calculez  $\Delta dB$  en fonction de  $\Delta P$  et de  $P$ .

**Loi de Snell (optique)**  $n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$ . Calculez  $\Delta\theta_2$  en fonction de  $\theta_1$  et  $\Delta\theta_1$ .

#### Exercice 8.2 - propagation d'incertitude, un cas pratique : indice de réfraction dans l'atmosphère terrestre

L'indice de réfraction  $n$  d'un gaz (ici l'air) est relié à sa pression  $P$  et température absolue  $T$  par la loi suivante :

$$n - 1 = \alpha \frac{P}{T}$$

où  $\alpha = 80 \times 10^{-6}$  [K·m<sup>2</sup>/N] pour l'air en unités SI. La mesure de la température et de la pression en atmosphère libre au sommet du volcan Mauna Kea, Hawaii (USA) a fourni les valeurs suivantes,  $T = 276.5 \pm 0.3$  K et  $P = 616 \pm 10$  mb. Transformez la pression en unités SI, et calculez l'incertitude sur  $N = n - 1$  due à l'incertitude sur  $T$  et  $P$ .

#### Exercice 8.3 - usinage, budget d'erreur

On veut usiner un alésage avec une précision de  $10 \mu\text{m}$  sur le diamètre. Les grandeurs d'influence, ainsi que leur incertitudes, sont les suivantes

positionnement de la pièce par rapport au zéro de la machine outil	$3 \mu\text{m}$
positionnement de l'outil de coupe par rapport à la pièce	$1.5 \mu\text{m}$
erreur de positionnement de l'outil de coupe lors du déplacement	$0.8 \mu\text{m}$
erreur sur le diamètre de l'outil de coupe	$2 \mu\text{m}$

Calculez l'incertitude finale sur le diamètre de l'alésage.

### Exercice 8.4 - propagation des incertitudes

Pour les fonctions  $f(x, y)$  ci-dessous, liant les variables aléatoires  $x$  et  $y$ , calculer l'incertitude  $\Delta f$  en fonction des incertitudes  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , dans le cas où  $x$  et  $y$  sont totallement corrélées, et dans le cas où  $x$  et  $y$  sont indépendantes.

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= \sin(x) + \cos(x) \\
 f(x, y) &= \ln\left(\frac{y}{x}\right) \\
 f(x, y) &= \frac{x^2}{1 + xy} \\
 f(x, y) &= \exp(x^2 - y^2) \\
 f(x, y) &= x^3/y^2
 \end{aligned}$$

# Chapitre 9

## Ajustement d'un modèle $y = f(\vec{x}, \vec{a})$ sur une série de mesures

### 9.1 Introduction

Admettons que l'on soit en présence d'un circuit de type RLC série avec  $R = 10 \text{ k}\Omega$  et  $L = 10 \text{ H}$  mais dont on ne connaît pas la valeur de C. Une méthode très précise pour déterminer la valeur de C consiste à mesurer la fonction de transfert courant/tension dans le domaine fréquentiel, et **d'ajuster** sur cette mesure le modèle de la fonction de transfert, donnée par

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (9.1)$$

L'ajustement consistant, dans le cas présent, à trouver la valeur de C qui **minimise** l'écart entre modèle et mesures.

Pourquoi considérer tout une gamme de fréquence plutôt qu'une seule mesure à une fréquence donnée ? si nous connaissons en effet Y à une fréquence donnée, nous pourrions très bien utiliser l'équation 9.1 pour en tirer C, et, en utilisant les formules du chapitre précédent, déterminer l'incertitude sur C à partir de l'incertitude sur Y. Mais pour que cela fonctionne bien, il faut être certain qu'il n'existe pas d'erreur systématique sur la mesure de Y, et que l'erreur aléatoire sur Y soit bien connue.

En réalité, à cause du **bruit de mesure**, on peut se trouver dans une situation impossible à résoudre : admettons par exemple que la mesure bruitée de Y soit égale à  $1.5 \times 10^{-4}$ , or, il est impossible en théorie que Y soit supérieur à  $1/R$  c-à-d  $\max(Y) = 10^{-4}$ . Si on persiste à utiliser cette valeur de Y, on tombe sur  $(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 < 0$ , ce qui est impossible. On voit donc par cet exemple que le bruit peut rendre une mesure unique **complètement inutile** !

Supposons donc que nous disposions de 20 valeurs bruitées (mais pas trop quand même) de la fonction de transfert Y pour 20 valeurs de  $\omega$  de 1 à 20 kHz. Calculons, pour

$C$  entre 0.5 nF et 1.5 nF (si on choisit cet intervalle, c'est uniquement parce que l'on pense qu'il contient la valeur optimale de  $C$ ), l'erreur quadratique totale entre le modèle  $Y$  et les 20 mesures,

$$\mathcal{Q}^2(C) = \sum_{i=1}^{20} \left( Y_i - \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_i L - \frac{1}{\omega_i C}\right)^2}} \right)^2 \quad (9.2)$$

Le graphique de  $\mathcal{Q}^2(C)$  est donné en Fig. 9.1. On voit très bien qu'il existe une valeur de  $C$  qui minimise  $\mathcal{Q}^2(C)$ , et cette valeur est  $C = 1.005$  nF. La même figure montre aussi la superposition des mesures et du modèle optimal de  $Y(\omega)$ , c-à-d celui associé à la valeur optimale de  $C$ .

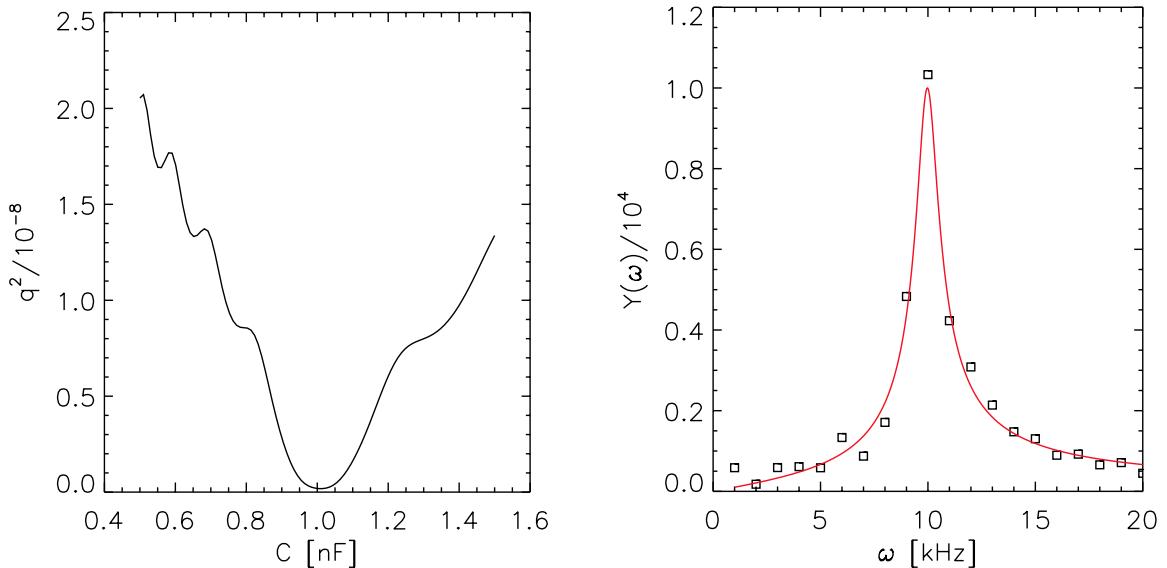


FIGURE 9.1 – A gauche : écart quadratique en fonction de la valeur d'essai de  $C$ . A droite : superposition du meilleur modèle  $Y(\omega)$ , pour  $C = 1.005$  nF, sur les 20 mesures bruitées.

En utilisant  $N$  mesures de  $Y$  en fonction de  $N$  valeurs de  $\omega$ , on a obtenu autant de mesures indépendantes, qui ont renforcé la validité de la détermination. Les valeurs impossibles de  $Y$ , dues au bruit, ne posent aucun problème, puisqu'on cherche à minimiser un écart quadratique, donc le signe de l'erreur n'a pas d'importance.

Par ailleurs, la comparaison visuelle des mesures et du modèle permet d'évaluer s'il existe des erreurs systématiques ou aberrantes dans les mesures, et donc de les éliminer. En conclusion, lorsqu'on en a la possibilité, il est **toujours** préférable de déterminer la valeur d'un paramètre inconnu à travers **l'ajustement d'un modèle** plutôt que sur une valeur unique.

## 9.2 Théorie

Soit donc une série de  $N_m$  mesures (bruitées ou imprécises) d'une variable  $y$  en fonction d'une autre,  $x$ . La variable  $x$  peut être unidimensionnelle, par exemple le temps  $t$ , ou alors multi-dimensionnelle, comme la position sur un plan, auquel cas  $x$  est un vecteur à deux composantes,  $\vec{x} = [x_1, x_2]$ , ou la position dans un espace, auquel cas  $x$  est un vecteur à trois composantes,  $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]$ . On montre en figure 9.2 un exemple de mesure unidimensionnelle.

Notre objectif est de trouver le modèle  $y = f(\vec{x}, \vec{a})$ , muni d'un certain nombre de paramètres  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots]$ , qui permet de décrire le mieux possible nos mesures. Par exemple, si nous avions la mesure d'un signal sinusoïdal en fonction du temps, et que nous désirions trouver la période de ce signal, il suffirait de chercher la valeur de  $T$  telle que le modèle  $y(t) = \sin(2\pi/T)$  s'ajuste le mieux aux mesures.

Deux cas se présentent dans la pratique : (1) on connaît déjà le modèle sous-jacent aux mesures (par exemple une sinusoïdale comme ci-dessus), ou (2) on ne le connaît pas. Dans ce cas, on peut soit chercher (par essais) un modèle qui va bien, ou adopter un modèle polynomial.

Mais dans le cas d'un modèle polynomial, il faut faire attention : on sait que par 2 points, on peut faire passer une droite, et que par 3 points, un polynôme en  $x^2$  etc, donc si on a  $N$  points, nous pourrions trouver un polynôme de degré  $N - 1$  qui passerait par tous les points. Mais cela n'a aucun sens ! en effet, **toute mesure est bruitée**, c'est-à-dire affectée d'une erreur aléatoire inconnue, par conséquent ajuster un modèle qui passerait par tous les points de mesure équivaut à s'ajuster à du bruit, ce qui conduirait à un modèle polynomial de nos mesures qui ne correspondrait à rien... Par ailleurs, lorsqu'on essaye d'ajuster un polynôme avec exactitude sur trop de points, on aboutit en général à un polynôme avec d'énormes oscillations entre les points, ce qui montre qu'il y a un problème. Donc, on se contentera en général de trouver le degré du polynôme tel que l'écart de l'ajustement soit assez petit, *sans* qu'il y ait d'oscillations.

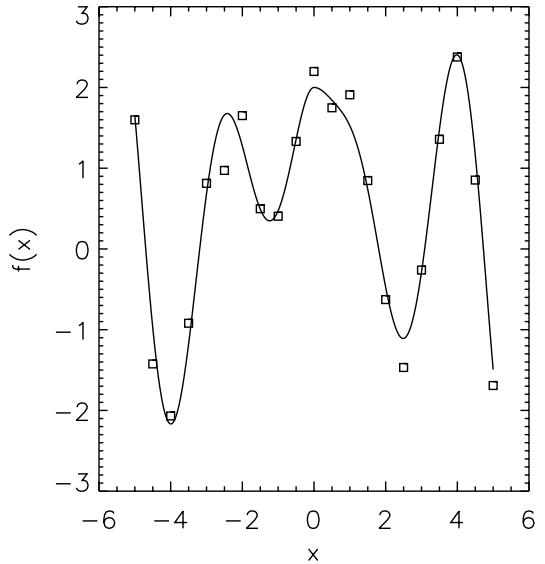


FIGURE 9.2 – Mesure unidimensionnelle (carrés) et modèle ajusté (courbe continue). Il y a ici 21 couples de mesure  $(x_i, y_i)_{i=1\dots 21}$ ,  $N_m = 21$ .

### 9.2.1 La méthode de la minimisation de l'écart quadratique entre [REDACTED] modèle et mesures

Admettons donc que nous ayons choisi un modèle avec paramètres,  $y = f(\vec{x}, \vec{a})$ , censé décrire nos mesures. Par exemple, le modèle associé aux mesures de la fig. 9.2 est le suivant :

$$f(x, \vec{a}) = \frac{x \sin a_1 x}{a_2} + \frac{a_3}{x^2 + a_4} \quad (9.3)$$

et les valeurs des paramètres utilisés dans le cas particulier de la fig. 9.2 sont  $\vec{a} = [2, 1.73, 2, 1]$ . En principe, on ne possède que la forme générale de la fonction  $f(\vec{x}, \vec{a})$ , mais on ne connaît pas les valeurs des paramètres.

**Ajuster le modèle  $f(\vec{x}, \vec{a})$ , en pratique, c'est trouver les valeurs des paramètres  $\vec{a} = [a_1, a_2, \dots]$  telles que l'écart entre le modèle et les mesures, aux coordonnées  $\vec{x}_i$  des points de mesures, soit le plus petit possible.**

Mathématiquement, on va *définir* l'écart  $Q^2$  par la somme, sur les  $N_m$  points de mesure, des écarts individuels, au carré, entre le modèle  $f(\vec{x}_i, \vec{a})$ , au point de coordonnées  $\vec{x}_i$ , et la mesure  $y_i$ , soit

$$Q^2(\vec{a}) = \sum_{i=1}^{N_m} [f(\vec{x}_i, \vec{a}) - y_i]^2 \quad (9.4)$$

et on a considéré le carré de l'écart, car puisque nous sommes intéressé à mesurer une distance entre points de mesure et modèle, il nous faut prendre une mesure de l'écart qui soit toujours positive. Nous aurions aussi pu considérer la valeur absolue de l'écart, mais les développements mathématiques que l'on va voir dans la suite auraient été plus complexes. En revanche, il ne faudrait surtout pas considérer l'écart simple, car la somme des écarts simples ne peut pas être minimisée : elle peut être nulle, sans que la valeur des paramètres soit optimale.

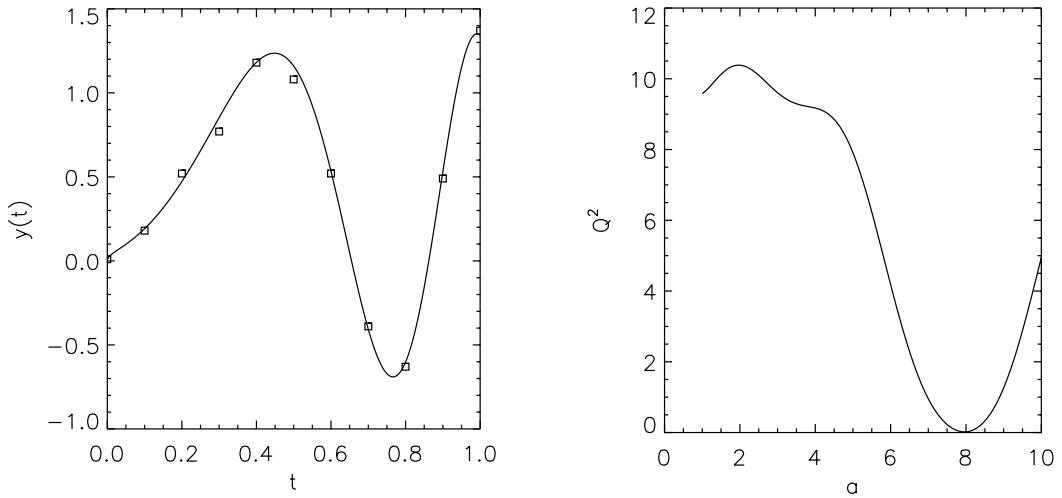


FIGURE 9.3 – A gauche : points de mesure (carrés) et modèle ; à droite : écart quadratique  $Q^2(a)$  en fonction du paramètre  $a$ .

Considérons, pour illustrer notre propos, le cas d'un modèle simple à 1 seul paramètre. On a les 11 points de mesure suivants (voir figure 9.3) :

$t_i$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$y_i$	0.01	0.18	0.52	0.77	1.18	1.08	0.52	-0.39	-0.63	0.49	1.37

auxquels on désire ajuster le modèle à un seul paramètre suivant :

$$y(t) = \sqrt{\frac{t}{a}} + \sin(at^2)$$

Il s'agit donc de trouver la valeur de  $a$  qui donne le meilleur ajustement du modèle aux données. Calculons (il faut programmer un peu, sous MATLAB) l'écart quadratique en fonction de  $a$  pour un intervalle de  $a$  - choisi un peu au hasard - entre 1 et 10. Le graphique de  $Q^2(a)$  est donné en figure 9.3, et on voit clairement qu'il existe une valeur de  $a$  optimale autour de 8 (avec  $Q^2(8) = 0.019$ ). Ici, le minimum est très marqué, mais dans certains cas, il peut l'être un peu moins, en particulier en présence de grandes erreurs de mesures : dans ce cas, même avec la valeur correcte du paramètre, l'écart entre modèle et mesure pourra être grand, et sera donné par la somme (quadratique) des erreurs de mesure.

Par essais successifs, en restreignant l'intervalle de recherche de  $a$  autour de la valeur minimale, on trouve que la valeur optimale de  $a$  converge vers 7.9613725. En réalité, la valeur de  $a$  qui fut utilisée pour la construction du modèle est 8, exactement. On voit donc ici l'effet du bruit de la mesure : la valeur optimale n'est pas toujours la "vraie" valeur ! Avec un calcul d'erreur, cependant, on arriverait à calculer une incertitude sur la détermination de  $a$ , en fonction des incertitudes sur les mesures - mais ce n'est pas le propos de ce document.

Lorsqu'il y a plus que 1 paramètre, il suffit d'effectuer le calcul de  $\mathcal{Q}^2$  sur des intervalles bien choisis pour l'ensemble des paramètres, et de déterminer les valeurs des paramètres où  $\mathcal{Q}^2$  est minimum (fond de la vallée d'une carte en  $a_1, a_2$  pour un problème à deux paramètres, etc.)

### 9.2.2 Soyons plus malins, et utilisons la dérivée !

En effet, le minimum de la courbe  $\mathcal{Q}^2(a)$ , qui nous donne le lieu de la solution optimale, peut se trouver facilement, sans faire de calculs numériques (ni programmation) en calculant analytiquement la dérivée de  $\mathcal{Q}^2(a)$  par rapport à  $a$ , et en posant = 0. On trouve une équation en  $a$  dont la solution est forcément la valeur optimale de  $a$ . Parfois, il y a plusieurs solutions à l'équation de la dérivée, et une de ces solutions peut en fait indiquer un *maximum* de  $\mathcal{Q}^2(a)$ , ou un **minimum local**, comme on peut le voir sur les Figs. 9.1 ou 9.3, donc il faut toujours être un peu prudent et vérifier si on a trouvé la bonne solution - en général, cependant, on tombe souvent sur le minimum de  $\mathcal{Q}^2(a)$ .

Dans le cas où on a un vecteur de paramètres  $\vec{a}$  (disons de dimension  $M$ , donc  $M$  paramètres), il suffit de calculer une dérivée pour chaque  $a_{k=1 \dots M}$ , et on se retrouve avec un système de  $M$  équations à  $M$  inconnues. Donc, en principe, on a tout ce qu'il faut pour trouver les valeurs optimales des paramètres.

Mais il y a parfois une difficulté. Il se peut, pour certains modèles, que les  $M$  équations ne soient pas du tout simples à transformer en formules donnant directement les valeurs optimales du vecteur  $\vec{a}$ . Dans ce cas, on est un peu obligé de retourner à une recherche numérique, comme dans l'exemple de la figure 9.3.

Ignorons cependant ce problème éventuel, et examinons le cas où  $f(\vec{x}, \vec{a})$  est une relation linéaire en  $\vec{a}$ ,

$$f(\vec{x}, \vec{a}) = a_1 f_1(\vec{x}) + a_2 f_2(\vec{x}) + a_3 f_3(\vec{x}) + \cdots + a_M f_M(\vec{x}) \quad (9.5)$$

Les fonctions  $f_{k=1 \dots M}$  peuvent être ce que l'on veut (quelconques), la seule chose qui compte est que ces fonctions ne contiennent aucun des paramètres  $a_k$ .

Minimisons l'écart quadratique total entre les données et le modèle, en posant que la dérivée de cet écart par rapport à chacun des paramètres  $a_{k=1 \dots M}$  est nulle,

$$\frac{\partial}{\partial a_k} \sum_{i=1}^{N_m} [f(\vec{x}_i, \vec{a}) - y_i]^2 = 0 \quad (9.6)$$

en développant, on trouve un système de  $M$  équations,

$$\sum_{i=1}^{N_m} \frac{\partial f(\vec{x}_i, \vec{a})}{\partial a_j} f(\vec{x}_i, \vec{a}) = \sum_{i=1}^{N_m} \frac{\partial f(\vec{x}_i, \vec{a})}{\partial a_j} y_i \quad (9.7)$$

Puisque l'on a  $M$  équations en  $\vec{a}$ , on peut en extraire à priori les  $M$  paramètres inconnus. Avec l'équation (9.5), il est facile de voir que le système des  $M$  équations devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_1} : \quad & \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N_m} a_k f_1(\vec{x}_i) f_j(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{N_m} f_1(\vec{x}_i) y_i \\ \frac{\partial}{\partial a_2} : \quad & \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N_m} a_k f_2(\vec{x}_i) f_j(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{N_m} f_2(\vec{x}_i) y_i \\ & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial a_M} : \quad & \sum_{k=1}^M \sum_{i=1}^{N_m} a_k f_M(\vec{x}_i) f_j(\vec{x}_i) = \sum_{i=1}^{N_m} f_M(\vec{x}_i) y_i \end{aligned} \quad (9.8)$$

et si on détaille les deux premières et la dernière des équations,

$$\begin{aligned} a_1 \sum_{i=1}^{N_m} f_1^2(\vec{x}_i) + a_2 \sum_{i=1}^{N_m} f_2(\vec{x}_i) f_1(\vec{x}_i) + \cdots a_M \sum_{i=1}^{N_m} f_M(\vec{x}_i) f_1(\vec{x}_i) &= \sum_{i=1}^{N_m} f_1(\vec{x}_i) y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^{N_m} f_1(\vec{x}_i) f_2(\vec{x}_i) + a_2 \sum_{i=1}^{N_m} f_2^2(\vec{x}_i) + \cdots a_M \sum_{i=1}^{N_m} f_M(\vec{x}_i) f_2(\vec{x}_i) &= \sum_{i=1}^{N_m} f_2(\vec{x}_i) y_i \\ & \vdots \\ a_1 \sum_{i=1}^{N_m} f_1(\vec{x}_i) f_M(\vec{x}_i) + a_2 \sum_{i=1}^{N_m} f_2(\vec{x}_i) f_M(\vec{x}_i) + \cdots a_M \sum_{i=1}^{N_m} f_M^2(\vec{x}_i) &= \sum_{i=1}^{N_m} f_M(\vec{x}_i) y_i \end{aligned} \quad (9.9)$$

on comprend vite alors que l'on peut écrire ce système sous la forme d'un produit de matrices,

$$\begin{bmatrix} \sum_i f_1^2(\vec{x}_i) & \sum_i f_2(\vec{x}_i) f_1(\vec{x}_i) & \cdots & \sum_i f_M(\vec{x}_i) f_1(\vec{x}_i) \\ \sum_i f_1(\vec{x}_i) f_2(\vec{x}_i) & \sum_i f_2^2(\vec{x}_i) & \cdots & \sum_i f_M(\vec{x}_i) f_2(\vec{x}_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_i f_1(\vec{x}_i) f_M(\vec{x}_i) & \sum_i f_2(\vec{x}_i) f_M(\vec{x}_i) & \cdots & \sum_i f_M^2(\vec{x}_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i f_1(\vec{x}_i) y_i \\ \sum_i f_2(\vec{x}_i) y_i \\ \vdots \\ \sum_i f_M(\vec{x}_i) y_i \end{bmatrix} \quad (9.10)$$

ou

$$A \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad (9.11)$$

La matrice  $A$  et le vecteur  $\vec{b}$  se calculent numériquement à partir de la connaissance des fonctions  $f_j(x)$  et des points de mesure  $(\vec{x}_i, y_i)$ . La solution est donnée par

$$\vec{a} = A^{-1} \cdot \vec{b} \quad (9.12)$$

### 9.3 Application : ajustement d'une droite $y = ax + b$ et lien avec la corrélation linéaire

Très souvent dans la pratique on observe des processus linéaires ou facilement linéarisables, c-à-d pouvant se ramener à une droite  $y = mx + p$ ,  $x$  et  $y$  étant les mesures et  $m$  et  $p$  les paramètres inconnus que l'on cherche. Par exemple la décharge d'un condensateur s'exprime par une relation exponentielle  $u(t) = u_0 \exp -kt$  où  $1/k$  est la constante de temps du condensateur. En mesurant  $u$  pour une série de valeurs de  $t$ , et en calculant le log naturel de  $u$  on obtient la relation linéarisée  $\ln u = \ln u_0 - kt$ . En ajustant une droite sur les points de mesure  $\ln u_i$  et  $t_i$  on va pouvoir trouver  $u_0$  et la constante de temps  $1/k$ .

Appliquons donc la théorie de l'ajustement ci-dessus au cas de la droite  $y = mx + p$ . On a  $a_1 = m$  et  $a_2 = p$ , ainsi que  $f_1(x) = x$  et  $f_2(x) = 1$  (une constante). Les éléments de la matrice de l'équation 9.10 sont les suivants, avec  $N$  le nombre de mesures,

$$A = \begin{bmatrix} \sum_i^N f_1^2(x_i) & \sum_i^N f_2(x_i)f_1(x_i) \\ \sum_i^N f_1(x_i)f_2(x_i) & \sum_i^N f_2^2(x_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^N x_i^2 & \sum_i^N x_i \\ \sum_i^N x_i & N \end{bmatrix} \quad (9.13)$$

le vecteur  $\vec{a}$  est simplement

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} \quad (9.14)$$

et le vecteur  $\vec{b}$  est

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \sum_i^N x_i y_i \\ \sum_i^N y_i \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

On a donc à résoudre le système simple

$$\begin{bmatrix} \sum_i^N x_i^2 & \sum_i^N x_i \\ \sum_i^N x_i & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i^N x_i y_i \\ \sum_i^N y_i \end{bmatrix} \quad (9.16)$$

dont la solution est (à vérifier vous-même)

$$m = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \Gamma(x, y) \quad (9.17)$$

$$p = \langle y \rangle - m \langle x \rangle \quad (9.18)$$

Nous obtenons donc un lien direct entre corrélation et pente de la droite de meilleur ajustement. Voir les exercices pour des exemples.

### 9.4 Un exemple complet en deux dimensions

Soit la mesure de la cote d'une surface (plus ou moins) plane, en 150 points de coordonnées  $\vec{x} = [x, y]_{i=1\dots 150}$ . Les points sont mesurés sur une grille de 15-par-10 éléments, la première composante  $x$  est la coordonnée horizontale,

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

la seconde composante,  $y$ , la coordonnée verticale,

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10

et les cotes mesurées en ces points sont les suivantes (en  $\mu\text{m}$ ), avec une erreur aléatoire,

14	33	-35	6	-5	-2	5	30	-6	17	-8	7	-14	39	12
32	9	65	34	1	20	38	62	40	90	22	83	47	114	82
45	52	69	65	91	99	94	84	104	75	149	174	138	194	194
97	91	73	144	72	139	154	186	141	220	173	195	209	227	247
87	119	155	147	174	157	186	224	213	226	246	333	291	298	341
126	152	156	174	208	222	250	235	295	302	295	320	341	401	399
160	168	186	234	242	280	270	316	355	383	369	402	432	457	456
161	189	196	237	277	313	356	335	381	371	412	459	471	536	586
172	241	261	285	311	315	358	415	429	487	431	535	604	646	672
214	248	276	296	321	322	429	458	474	499	597	566	619	664	698

On désire ajuster à ces mesures de cotes le modèle ci-dessous, d'ordre 2,

$$f(\vec{x}, \vec{a}) = a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 \quad (9.19)$$

Il y a donc 6 paramètres,  $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6]$ , et 6 fonctions  $f_k(\vec{x})$ ,

$$f_1(x, y) = 1 \quad (9.20)$$

$$f_2(x, y) = x \quad (9.21)$$

$$f_3(x, y) = y \quad (9.22)$$

$$f_4(x, y) = x^2 \quad (9.23)$$

$$f_5(x, y) = x y \quad (9.24)$$

$$f_6(x, y) = y^2 \quad (9.25)$$

La matrice  $A$ , de dimension 6-par-6, s'écrit (et on enlève les signes  $\sum_i$  pour alléger la notation)

$$A = \begin{bmatrix} N_m & x_i & y_i & x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ x_i & x_i^2 & y_i x_i & x_i^3 & x_i^2 y_i & y_i^2 x_i \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 & x_i^2 y_i & x_i y_i^2 & y_i^3 \\ x_i^2 & x_i^3 & y_i x_i^2 & x_i^4 & x_i^3 y_i & y_i^2 x_i^2 \\ x_i y_i & x_i^2 y_i & y_i^2 x_i & x_i^3 y_i & x_i^2 y_i^2 & y_i^3 x_i \\ y_i^2 & x_i y^2 & y_i^3 & x_i^2 y_i^2 & x_i y_i^3 & y_i^4 \end{bmatrix} \quad (9.26)$$

et le vecteur  $\vec{b}$ , où  $m_i$  sont les mesures aux 150 points,

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} m_i \\ x_i m_i \\ y_i m_i \\ x_i^2 m_i \\ x_i y_i m_i \\ y_i^2 m_i \end{bmatrix} \quad (9.27)$$

Numériquement, on trouve

$$A = \begin{bmatrix} 150 & 1200 & 825 & 12400 & 6600 & 5775 \\ 1200 & 12400 & 6600 & 144000 & 68200 & 46200 \\ 825 & 6600 & 5775 & 68200 & 46200 & 45375 \\ 12400 & 144000 & 68200 & 1783120 & 792000 & 477400 \\ 6600 & 68200 & 46200 & 792000 & 477400 & 363000 \\ 5775 & 46200 & 45375 & 477400 & 363000 & 379995 \end{bmatrix} \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} 34733 \\ 328927 \\ 252643 \\ 3701227 \\ 2392112 \\ 2010973 \end{bmatrix} \quad (9.28)$$

et les paramètres d'ajustement optimal sont données par

$$\vec{a} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} -13.3 \\ -8.2 \\ 24.1 \\ 0.31 \\ 3.9 \\ -0.50 \end{bmatrix} \quad \text{alors que les vraies valeurs sont } \vec{a}_{\text{init}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 20 \\ 0.4 \\ 4 \\ -0.2 \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

La solution, hormis le premier coefficient, est assez proche des valeurs des paramètres qui furent utilisés lors de la construction des données, et la différence s'explique par le fait qu'un bruit aléatoire fut ajouté aux données simulées. On montre en fig. 9.4 la carte de la cote mesurée, le modèle, et le résidu de l'ajustement, essentiellement dû au bruit (erreur) de mesure.

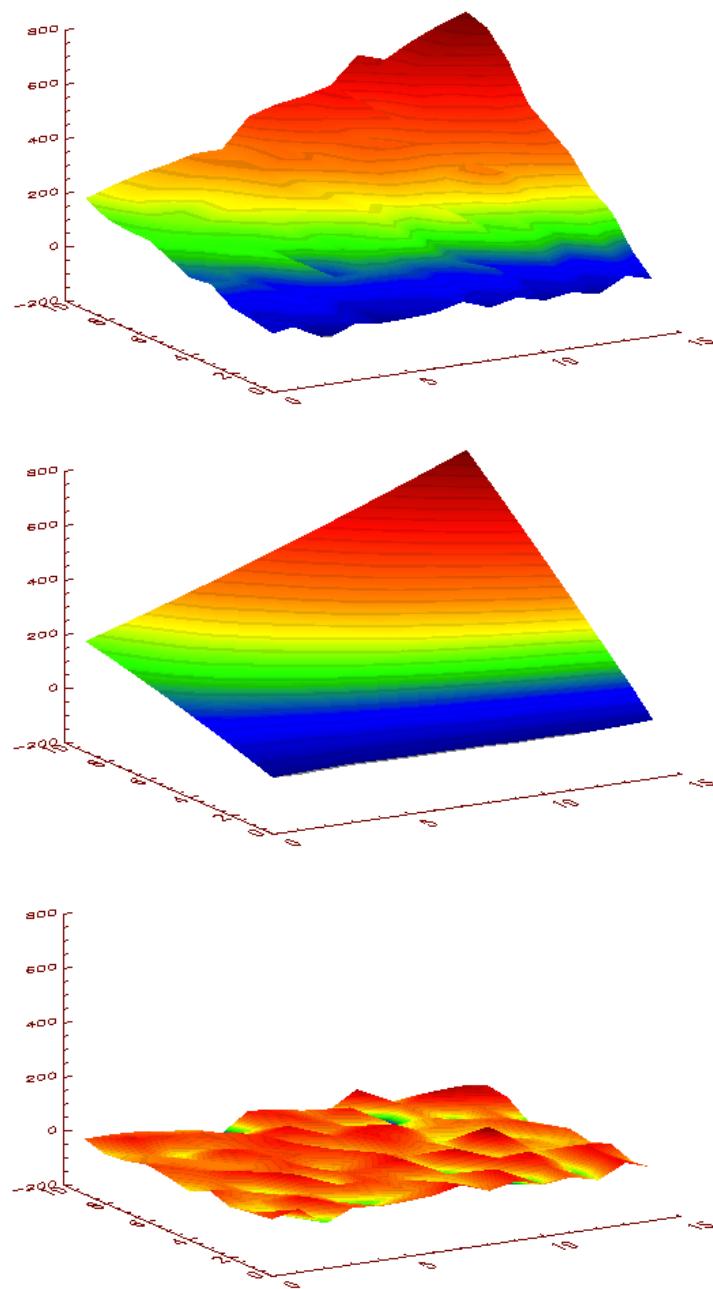


FIGURE 9.4 – De haut en bas : données, modèle, résidu = données - modèle.

## 9.5 Exercices du chapitre 9

### Pour faire ces exercices, utilisez matlab

#### Exercice 9.1 - corrélation linéaire, mesure d'une résistance électrique

Lors d'une séance de travaux pratiques, les étudiants doivent mesurer la valeur d'une résistance  $R$ . Chaque étudiant dispose d'un voltmètre, d'un ampèremètre et d'une alimentation à courant continu. Un étudiant a obtenu les 5 mesures suivantes :

U [V]	0.204	1.23	2.04	3.48	4.83
I [mA]	1.05	2.72	5.02	6.59	10.9

Ensuite, à la main (c-à-d sans Matlab, mais avec une calculatrice scientifique), en utilisant les formules du cours,

1. calculez le coefficient de corrélation linéaire  $r$  ;
2. déterminez les coefficients  $a$  et  $b$  de la droite de régression  $U = aI + b$ , en déduire la résistance  $R$  et l'offset  $U_0$  éventuel ;
3. refaites le calcul de la régression linéaire en posant  $b = 0$  ;
4. refaites le calcul de la régression en ajustant cette fois-ci le modèle **inverse**  $I = aU + b$ . Concluez.

#### Exercice 9.2 - corrélation linéaire, test d'un modèle scientifique

Dans le cadre d'un projet de recherche en instrumentation pour l'astrophysique, nous avons obtenu deux séries de mesures de la résolution angulaire à travers l'atmosphère terrestre turbulente, par deux moyens différents et totalement indépendants. Ces deux séries sont fournies dans le fichier `AngularResolutionSeries.txt`, sur `eistore1/profs/LJT/metrologie/cours/data....` Lancez Matlab et chargez ces deux séries dans deux variables,  $x$  et  $y$ .

1. calculez (à l'aide de Matlab) le coefficient de corrélation linéaire  $r$  des deux séries de mesures, en utilisant les formules du cours; quelle est la qualité de la corrélation ? que peut-on en déduire sur ces deux méthodes de mesures de la résolution angulaires ?
2. calculez aussi, pour les deux séries, la valeur médiane et le mode.

### Exercice 9.3 - corrélation polynomiale

Soit deux grandeurs physiques liées par la relation suivante :

$$y(x) = \exp(a x^2 + b x + c)$$

On a mesuré en laboratoire la série de 11 couples (x,y) suivante :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.36	0.49	0.58	0.56	0.51	0.49	0.38	0.23	0.16	0.09	0.06

Linéarisez le modèle, puis faites un ajustement polynomial d'ordre 2, et calculez les coefficients a, b, et c qui réalisent le meilleur ajustement du modèle ci-dessus avec les mesures. Solution en l'absence d'erreurs de mesures :  $[a, b, c] = [-5, 3, -1]$ .

### Exercice 9.4 - linéarisation d'un modèle exponentiel, régression linéaire

Un biologiste a mesuré le nombre moyen de bactéries encore actives en fonction de la durée d'un traitement chimique sur un substrat. Il a obtenu les résultats ci-dessous

durée $\Delta t$ [min]	10	20	30	40	50
nb. de bact. moyen	1.893	0.970	0.511	0.215	0.137
	60	70	80	90	100
	0.065	0.035	0.017	0.006	0.004

Le modèle associé à ces mesures est le suivant

$$n(\Delta t) = n_0 2^{-(\gamma \cdot \Delta t)}$$

Faites la transformation qu'il faut sur  $n(\Delta t)$  pour transformer cette expression ci-dessus en une relation linéaire du type  $y = ax + b$ , puis répondez aux questions suivantes

- quel est le coefficient de corrélation linéaire ? est-ce que le modèle en loi de puissance de 2 est un bon modèle ?
- calculez les coefficients de la droite de régression
- déduisez de ces coefficients les paramètres  $n_0$  et  $\gamma$  du modèle
- quel est le nombre initial, a priori, de bactéries actives avant le traitement, c'est-à-dire pour  $\Delta t = 0$  ?
- admettons que les spécifications de propreté pour les instruments chirurgicaux sont tels qu'il ne doit pas exister plus de 1 bactérie en moyenne pour  $100 \text{ mm}^2$ . Du modèle empirique que vous avez déduit des données, déterminez la durée de stérilisation nécessaire pour remplir cette spécification.

### Exercice 9.5 - test de corrélation linéaire

Les astrologues et autres charlatans aiment à dire qu'il existe une corrélation entre les phases lunaires et le nombre de naissances, afin de démontrer qu'il existe un lien entre les astres et les hommes (mais comme c'est chou !)

Lors d'une enquête dans un maternité, une statisticienne - quelqu'un de sérieux - a relevé les données suivantes

phase [%]	$p$	0	12.5	25	37.5	50	62.5	75	87.5	100
nb. de naissances/jour	$n$	10	14	9	10	15	17	4	18	12

où la phase évolue entre 0 et 100 entre deux nouvelle Lunes consécutives, la phase de 50 % correspondant à la pleine Lune.

Calculez le coefficient de corrélation linéaire entre la phase lunaire et le nombre de naissances. Concluez.

### Exercice 9.6 - régression polynomiale

$x_i$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y_i$	-25	2	9	2	-5	4	30

Ajustez le polynôme de 3-ème degré

$$y(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d$$

aux données ci-dessus.

### Exercice 9.7 - régression générale

Soit la fonction

$$y(x) = a \cos x + b \sin^2 x$$

à ajuster sur la série de mesures suivante

$x_i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y_i$	0.99	0.15	-0.73	-0.99	-0.87	-0.19	0.91	0.60	-0.54	-0.99	-0.90

- développez toute la méthode analytique et construisez le modèle matriciel pour trouver les coefficient  $a$  et  $b$ , à partir de la minimisation de l'écart quadratique entre le modèle et les données
- appliquez la méthode aux données. La solution doit être proche de  $[a, b] = [1, -0.5]$

## Exercice 9.8 - optimisation d'un processus

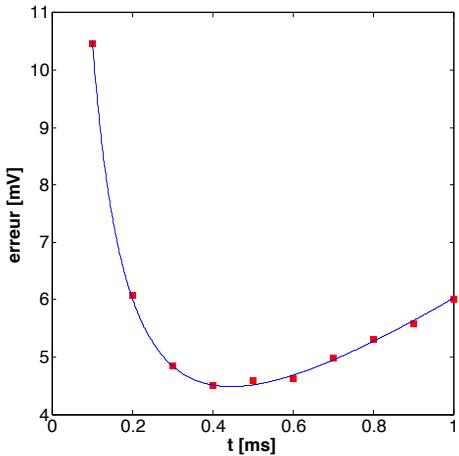


FIGURE 9.5 – Mesures et modèle, exercice 8.

Imaginons un système asservi en tension électrique, dont la commande est perturbée par deux composantes : une erreur de retard pur, proportionnelle au pas d'horloge (inverse de la fréquence d'échantillonnage), et une erreur due au bruit de lecture du capteur, inversement proportionnelle au pas d'horloge. Le modèle de l'erreur totale sur la commande en fonction du pas d'horloge  $\Delta t$  est le suivant

$$\epsilon = a \Delta t + \frac{b}{\Delta t}$$

Lors d'essais, on a mesuré l'erreur en fonction de  $\Delta t$ , et on a relevé les valeurs suivantes :

$\Delta t_i$ [ms]	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\epsilon_i$ [mV]	10.57	5.95	4.90	4.45	4.59
	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
	4.64	4.87	5.20	5.63	5.99

Par ajustement du modèle, déterminez le pas d'horloge optimal, c'est-à-dire celui qui minimise l'erreur totale (faites tout d'abord un graphique des points de mesure, car il faut TOUJOURS examiner les données avant de les exploiter).

## Annexe A

# métrologie et société, un peu d'histoire

(Article de Marie-Ange Cotteret, Revue du Syndicat National des Ingnieurs de l'Industrie et des Mines - février 2008)

### A.1 Naissance de la métrologie

*Le néolithique, que les préhistoriens considèrent maintenant comme l'installation de la civilisation agraire, voit les populations d'agriculteurs et d'âleveurs se sédentariser dans les régions où le sol est fertile et le climat favorable. Les groupes humains peuvent dorénavant se nourrir plus facilement sur un moindre territoire. Le changement social semble considérable. Les chasseurs-cueilleurs ont, depuis des millénaires, développé des connaissances innombrables sur les ressources naturelles qui les entourent. Les agriculteurs-âleveurs deviennent sédentaires. La transformation technique, économique et culturelle d'une part de la population jusqu'à culturellement et économiquement nomade, chasseurs, pêcheurs et cueilleurs, est, de mémoire, la première révolution technique connue.*

*En Basse mésopotamie, la terre est fertile et produit bientôt de considérables surplus de nourriture et de bétail. Entre la fin du quatrième et le début du troisième millénaire, la campagne mésopotamienne se dépeuple au profit des Cités-Etats qui se construisent, au Pays de Sumer, en complément des villages d'agriculteurs. Leur fonction est à la fois marchande et militaire. L'économie naissante transforme les statuts et les relations selon un processus mécanique qui semble invitable et paraît chapper à la volonté des acteurs. Le surplus démographique des villages se déverse dans les villes en même temps que le surplus de production vivrière, et cela d'autant plus aisément qu'il s'agit des enfants de ceux qui restent à la terre et continuent à assurer une base de subsistance et de repli éventuel pour leur progéniture.*

*Le commerce extérieur devient une composante structurelle de la société mésopotamienne.*

mienne. Pour faire fonctionner ce commerce, se développent l'écriture, la comptabilité, l'école, les tribunaux et, bien entendu, la métrologie qui joue un rôle central et s'organise dans l'organisation économique et sociale.

La métrologie et son usage, nécessairement collectif, supposent un ensemble d'actes cognitifs, techniques et sociaux complexes. Un pacte métrologique règle, à partir d'un contrat de confiance mutuelle, les conditions de l'échange dans l'espace commun. La mesure y est un outil de médiation pour l'échange d'objets ou de quantités de matière. Elle est aussi médiatrice entre des individus ou des groupes qui s'organisent pour créer une même réalité métrique en se mettant d'accord sur des pratiques, en choisissant des étalons et en organisant des dispositifs de contrôle réciproque.



Poids olive



Poids en pierre non marqués



Petits poids canard

FIGURE A.1 – Diverses références de masse utilisées durant l'Antiquité (mésopotamie, Chine).

Les plus vieux poids (figure A.1) retrouvés en mésopotamie sont en pierre polie. Les fouilles des différents trésors montrent une caractéristique surprenante : l'anonymat des poids et celle des monnaies. Ce fait ne démontre-t-il pas de solides relations de confiance entre les hommes et entre les groupes ?

Un autre constat surprenant : certains concepts de base de la métrologie mésopotamienne régissent l'infrastructure métrologique actuelle. Outre le fait que nous calculons, comme le faisaient les anciens habitants de la mésopotamie, l'heure, les minutes, les secondes et les angles sur la même base sexagésimale, il semble encore nécessaire pour avoir confiance dans les changes, de se mettre d'accord sur un étalon et la manière de s'en servir et donc de partager une culture métrologique commune au sein d'un "espace métrologique" commun.

## A.2 La référence commune : l'étalon

Les anciens étalons sont gardés précieusement dans de hauts lieux symboliques. Les poids mésopotamiens sont retrouvés dans d'anciens temples et palais. À Athènes, une compagnie de quinze officiers prend soin des mesures originales et de l'inspection de l'étalonnage. Chez les Romains, les étalons sont conservés au Capitole, dans le temple de

*Jupiter. Charlemagne les conserve dans son palais. En Europe chrétienne, ils sont scellés sur les halles de marché et sur les murs extérieurs des glises. Aujourd’hui encore et ce pour un temps seulement, l’étalon de masse, dernier étalon matériel, est gardé précieusement sous trois cloches au Bureau International des Poids et Mesures.*

*La référence commune, l’étalon, base de toute négociation réciproque et juste, a nécessité de tout temps un arbitrage entre plusieurs groupes de pression, marchands, acheteurs, paysans, classes dirigeantes, seigneurs fiefs, abbayes, pouvoir royal régulièrement, les marchands et la classe dirigeante cherchent, sous des formes diverses et renouvelées, à modifier les étalons pour servir leurs intérêts, ce qui va souvent de pair avec l’ignorance d’une part de la population des choses de la métrologie.*

*En contre partie, à travers le temps, un phénomène tout aussi régulier apparaît, celui d’une tentative d’unification qui s’accompagne naturellement d’actions éducatives. Des tablettes montrent que des écoles transmettent le savoir et les usages métrologiques en mésopotamie et en Egypte. Charlemagne unifie les mesures et développe le système scolaire. À la Révolution française, la commission du mètre est confiée au Comité d’Instruction publique.*

### A.3 Diversité des mesures

*Depuis l’Antiquité, ce ne sont pas sept unités fondamentales du système International, mais des milliers de mesures différentes, réinventées ou reconfigurées si elles après si elles qui vivent et s’extinguent. Tillet et Abeille présentent les ”Observations de la Société Royale d’Agriculture sur l’Uniformité des Poids et Mesures” réalisées par Villeneuve, à l’Assemblée nationale le 6 février 1790.*

*Ils constatent : ”C’est un fait notoire que non seulement on se sert en France de quantité de poids différents qui portent tous le nom de livre, mais encore une multitude de boisseaux, d’aunes, de verges, de cannes, de toises, de pines ; et que ces mesures diffèrent entre elles, quoiqu’elles soient signées par le même nom ; que ces différences sont très considérables, non pas d’une province à une autre, ou d’une ville à une autre, mais dans la même ville, dans le même bourg, dans le même village.”*

*Les révolutionnaires ne sont pas les premiers à percevoir les inconvénients du foisonnement métrologique. En France, les tentatives pour y remédier commencent avant l’an mille. En 744, Charles III voulut unifier les mesures. Les capitulaires de Charlemagne en 789, 803 et 806 ordonnent que les mesures soient égales et les poids justes. : *Aequales mensuras et rectas, pondera justa.**

*Enfin, la métrologie est nommée en 1780 par Pauçon dans son ouvrage métrologie ou traité des Mesures, Poids et Monnaies des Anciens peuples et des Modernes. Dans les Cahiers de dolances, les trois ordres demandent en substance et pour des raisons diverses qu’il n’y ait plus en France ”qu’un roi, une loi, un poids et une mesure”.*

*La métrologie est alors confiée aux savants. Ceux-ci sont aussi philosophes, hommes*

de sciences et acteurs politiques de l'époque. Le premier système cohérent de métrologie, le système métrique decimal est considéré comme un triomphe de l'esprit humain. Il sera le vecteur d'une égalité entre les citoyens, de fraternité entre les peuples et celui de la libération des hommes. Cette transformation de tous les rapports subjectifs et sociaux est largement plausiblement.

Petit, par exemple, écrit en 1809 : "Aujourd'hui les poids et les mesures tant partout que les mêmes, les affaires peuvent se traiter sans embarras, et il n'y a plus de nouveaux calculs à faire pour vendre ou pour acheter, quand on sait de quoi il s'agit ici. Il y a un temps qu'on dirait un pareil changement ; l'intérêt public autant que les intérêts particuliers le sollicitaient : le nouveau système des poids et des mesures est donc, sous ce rapport, un bienfait incontestable".

La métrologie, dorénavant confiée aux scientifiques et aux ingénieurs, va subir des transformations scientifiques, techniques et organisationnelles de très grande ampleur. Maintenant, avec le développement technique que nous connaissons, la métrologie du quotidien charpente et coordonne nos actes journaliers. Le bon fonctionnement de nos infrastructures urbaines, la localisation par satellites, les normes alimentaires, les diagnostics médicaux, les règles d'échanges de biens internationaux, notre montre bracelet ou le thermomètre familial, reposent sur une organisation internationale de la métrologie.

## A.4 Une culture métrologique commune

Je vais régulièrement au salon de l'éducation qui a lieu annuellement à Paris. J'y effectue un sondage (*c'est toujours Mme. Cotteret qui s'exprime ici*). Nous ne pouvons pas parler d'échantillon statistiquement significatif, mais d'un coup de loupe localement situé. En 2001, sur 91 personnes interrogées, 17 ans et adultes, 88 % ne savent pas ce qu'est la métrologie. En réponse à un QCM, 46 % pensent que c'est la science des transports urbains ! En 2004, sur 131 personnes, 93 % ne savent pas ce qu'est la métrologie. En réponse au QCM, 26 % d'entre elles, pensent que c'est la science de la prévision du temps.

En 2005, 50 enseignants sont sollicités pour répondre à la question : aujourd'hui, quelle est l'unité fondamentale de temps ? 50 % répondent injustement, l'heure. 10 % ne sait pas. 15 % pensent que c'est la minute. Seuls 25 % nomment la seconde !

Ces résultats font sourire... à moins qu'ils nous incitent à prendre conscience, comme le remarque Lord Kelvin (1824-1907), "... qu'un changement de système de mesure n'est pas sans conséquence sur les systèmes de pensée. à moins que ce ne soit l'évolution des idées qui conduise à bouleverser les unités de mesure".

Alors que la technique et la science du début du XXI<sup>e</sup> siècle mobilisent des performances métrologiques jamais atteintes, pour la fabrication des microprocesseurs ou le positionnement par satellite par exemple, l'enseignement de la métrologie semble avoir décliné depuis un siècle. On peut aujourd'hui arriver jusqu'à un diplôme d'enseignement

supérieur sans avoir pratiquà la mesure et ses calculs d'incertitude, donc vuln rable aux d sinformations et aux erreurs de toutes natures.

Entre l'ignorance généralisée de culture métrologique des gens et une demande accrue d'une opinion publique concernant des sujets hautement scientifiques et techniques, n'y a-t-il pas comme un d séquilibre ? Jusqu'o a t-on oublié qu'une des bases de l'exercice du bon sens et de la citoyenneté passerait par une connaissance des systèmes de mesure qui g re notre société ?

La métrologie, ou science de la mesure, est consid rée par les scientifiques comme le langage universel des sciences et des techniques. Le système international a remplacà le système métrique d cimal, mais qu'en est-il de sa diffusion ? Qu'en est-il de la prise en compte par le plus grand nombre des grands changements tant paradigmatiques que cognitifs, symboliques et philosophiques que ce nouveau système de mesure transporte ? Le dernier éta l on matériel, le kilogramme sera prochainement consid r comme une pi èce de musée et remplac par une d éfinition aussi obscure pour le public non averti que les d éfinitions des autres unités de base.

" Jusqu'o peut-on tromper le peuple ? " demandait Voltaire en 1756. Peut-on comprendre les r ègles sans avoir acc s aux r ègles qui font les r ègles ? Sans culture métrologique appropri e, les d cisions prises par des citoyens ignorants ne peuvent être que des opinions et, les opinions chacun le sait, sont manipulables.

En 1981, le Centre de Recherche sur la Culture Technique (CRCT) dans son Manifeste pour le développement de la culture technique constate : " La technique contemporaine n'est plus la technique des sociétés traditionnelles. Elle soutient par rapport à la recherche, un rapport tout diff érent. Technique et Science sont beaucoup plus proches l'une de l'autre que jadis, au point o ù l'ensemble scientifico-technique semble m ême constituer, pour le corps social, une menace globale qu'il lui est difficile à contrôler tant il lui est àtranger. Il est ajout : " Nous constatons que le milieu dans lequel nous vivons est de plus en plus constitué d'objets techniques inscrits dans une longue tradition historique, scientifique et culturelle. Il semble donc évident que celui qui manque de culture technique vit dans l'ignorance de son propre milieu. "

## A.5 La mesure d'une grandeur physique

On appelle **grandeur physique** toute propriété de la nature qui peut être quantifiée par la mesure ou le calcul, et dont les différentes valeurs possibles s'expriment à l'aide d'un nombre généralement accompagn d'une unité de mesure. Toute grandeur physique est en principe observable, et le terme d'**observable** est parfois utilisé pour d signer une grandeur physique que l'on mesure.

Ainsi par exemple, la masse et la longueur sont des grandeurs qui s'expriment respectivement en kilogramme et en m ètre (ou en multiples de ces unités de base), alors que l'indice de r fraction d'un milieu s'exprime à l'aide d'un nombre sans unité et constitue

une grandeur sans dimension.

L'addition et la soustraction de nombres n'est possible que s'ils sont relatifs à la même grandeur. En revanche, il est possible de multiplier ou de diviser des grandeurs différentes, auquel cas on obtient une nouvelle grandeur dérivée des deux autres. Par exemple, la vitesse est issue de la division de la longueur par le temps. Il existe donc théoriquement une infinité d'unités, mais seul un certain nombre d'entre elles sont utilisées dans la pratique.

On écritra le résultat de la mesure d'une grandeur sous la forme :

$$X = \{X\} [X]$$

où  $X$  est le nom de la grandeur physique,  $\{X\}$  est sa valeur numérique, et  $[X]$  représente l'unité. **Toute grandeur physique est invariante, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de l'unité dans laquelle on l'exprime.** Par exemple :

Longueur d'une règle	=	30.48	cm
		0.3048	m
		12	pouces
		$1.646 \times 10^{-4}$	mille marin.

On voit ici que la valeur numérique dépend de l'unité choisie. En conséquence, celle-ci doit toujours être précisée !

La métrologie traite de la relation entre mesure et instruments de mesure, qui sont deux choses fort différentes. Le concept de mesure et le concept d'instrument englobent un certain nombre de notions fondamentales, décrites ci-après.

## A.6 Nomenclature propre à la mesure

### A.6.1 Le mesurage

C'est l'**opération** consistant à mesurer une des caractéristiques d'un objet physique, et que la plupart d'entre nous appelle, de manière inexacte, la mesure.

### A.6.2 Le mesurande

C'est l'observable (la grandeur physique) soumise au mesurage.

### A.6.3 La mesure

La mesure est le **résultat numérique** de l'opération de mesurage appliquée au mesurande.

### A.6.4 L'incertitude sur la mesure

C'est l'intervalle numérique autour de la valeur mesurée dans lequel on *estime* que se trouve la vraie valeur de l'observable, avec une *certaine* probabilité.<sup>1</sup>

### A.6.5 Traabilité des mesurages

La traabilité est la propriété du résultat d'un mesurage tel qu'il puisse être relié à des références déterminées, généralement des étalons nationaux ou internationaux, par l'intermédiaire d'une chaîne interrompue de comparaisons ayant toutes des incertitudes déterminées. Son organisation est pyramidale (figure A.2), c'est-à-dire de la référence nationale (et/ou internationale) vers l'utilisateur. Les Laboratoires Nationaux de métrologie (LNM) tiennent les références nationales et les diffusent vers l'utilisateur. En Suisse, il s'agit du METAS - <http://www.metas.ch>

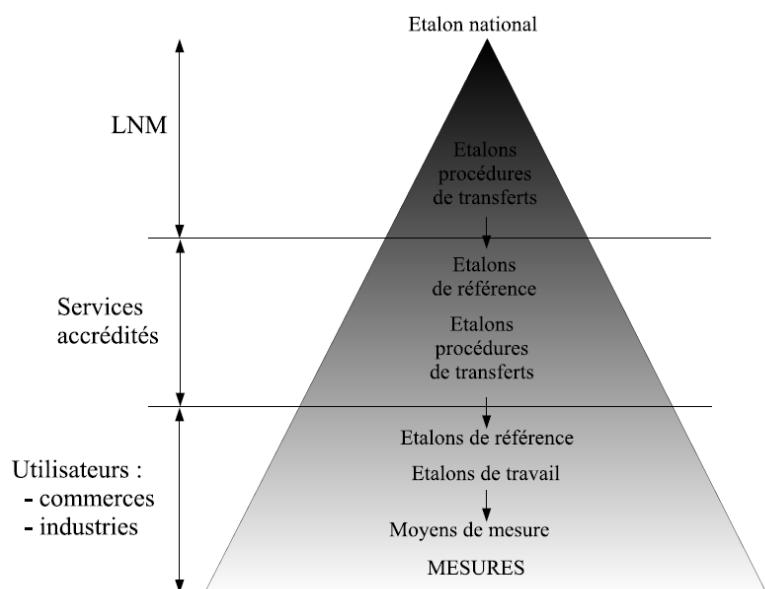


FIGURE A.2 – Pyramide de la traabilité

## A.7 Nomenclature propre aux instruments de mesure

(Ce paragraphe est fortement inspiré de la page [wikipedia](#) dédiée à la métrologie). Les principales caractéristiques des instruments de mesure (ou propriétés métrologiques des dispositifs de mesure) sont définies dans le cadre du Vocabulaire International de métrologie (VIM). Nous les décrivons ci-dessous.

1. voir la partie du cours de métrologie concernant l'analyse des données expérimentales

### A.7.1 Etalonnage ou calibration

L'etalonnage d'un instrument de mesure consiste à mesurer un mesurande de valeur numérique parfaitement connue (éalon ou calibre) et d'ajuster le système de mesurage propre à l'instrument de manière à ce que la valeur donnée corresponde à la valeur du mesurande-éalon.

En règle générale, tout instrument de mesure est sujet à une dérive de sa réponse - en raison du vieillissement des ses composants internes (usure mécanique p. ex.) - et nécessite un étalonnage périodique.

#### Dans le cas d'un système simple

Par exemple une balance ou un pied à coulisse. On peut se contenter d'un étalonnage dit **à un point** : on pèse par exemple une masse éalon, et on corrige la position de l'aiguille de la balance pour que celle-ci indique la valeur correcte. Cependant, cela ne suffit pas toujours. L'instrument peut en effet présenter :

**une dérive systématique** : il indique systématiquement une valeur supérieure ou inférieure d'une **quantité fixe** ; dans ce cas, la mesure est égale à la mesure vraie  $m_v$  plus une quantité fixe  $m_0$ ,  $m = m_v + m_0$  ; si c'est le cas, la calibration permet de s'affranchir immédiatement de cette erreur systématique ;

**une dérive de sensibilité** : il indique systématiquement une valeur supérieure ou inférieure d'une **proportion donnée** ; dans ce cas, l'erreur  $m_0$  est proportionnelle à  $m_v$ ,  $m_0 = \alpha m_v$ ,  $m = m_v (1 + \alpha)$  ; il convient alors de réaliser un étalonnage sur toute l'étendue de mesurage de l'instrument, de manière à vérifier que  $\alpha$  est bien constante.

#### Dans le cas d'instruments de mesure complexes

On préfère généralement établir une **courbe de calibration** (figure A.3), en suivant la procédure ci-dessous :

**1/ Sélection des étalons.** On commence par sélectionner un grand nombre de mesurandes étalons de valeurs numériques  $E$  comprises dans l'étendue de mesurage de l'instrument, distribuées de la manière la plus

TABLE A.1 – Calibration d'un thermocouple, un exemple pratique.

$T_e$ [°C]	$U_e$ [V]
10	5.43
11	6.21
12	7.19
13	8.16
14	9.11
15	10.31
16	11.35
17	12.55
18	13.73
19	15.38
20	16.67
21	18.36
22	20.29
23	22.03
24	24.13
25	26.33
26	28.77
27	30.73
28	33.27
29	35.89
30	38.09

régulière possible. Considérons le cas pratique de l'étalonnage d'un thermomètre à thermocouple<sup>2</sup> : on plongera le thermocouple dans un même liquide à diverses températures (parfaitement connues) et ces températures constitueront notre base d'étalons, comme par exemple les températures données en table A.1, que nous allons utiliser pour notre exemple pratique ;

**2/ Mesurage des étalons.** On effectue un mesurage de chacune des valeurs étalon<sup>3</sup>, et on note  $M(E)$  la valeur donnée par l'appareil - qui n'est pas forcément dans les mêmes unités que  $E$  ; pour le thermocouple,  $M(E)$  sera la tension mesurée entre les deux fils pour une certaine température du liquide ; on aura donc 21 valeurs de la tension  $U_e = M(T_e)$  - la mesure est en volts, mais l'étalon est en °C ; voir table A.1 pour les valeurs de  $U_e$  mesurées avec notre thermocouple ;

**3/ Les données.** Les couples (étalon  $E$ , mesure  $M(E)$ ) sont chargés dans un logiciel de traitement de données (MATLAB, par exemple) ; mais attention ! à présent, on inverse le problème : en effet, par exemple dans le cas du thermocouple, ce que l'on dira, c'est une courbe de calibration, c'est-à-dire une fonction mathématique qui permette, à partir de la donnée de la tension électrique  $U$  mesurée, de donner la valeur correspondante de la température de la soudure, au plus juste ; par conséquent, les mesures  $M(E)$  (ici  $U(T)$ ) constituent la variable d'**entrée**, et les valeurs étalon  $E$  (ici  $T$ ) la variable de **sortie** ;

**4/ Recherche de la courbe de calibration.** On ajuste un modèle mathématique (par exemple ci-dessous un polynôme, ou alors une exponentielle, un cosinus, ou une combinaison de fonctions de base, etc.)

$$\mathcal{C}(M) = a_0 + a_1 M + a_2 M^2 + a_3 M^3 + \dots$$

sur les couples  $(M(E), E)$ . L'ajustement consiste à trouver la valeur des paramètres  $a_0, a_1, a_2, \dots$  qui permet d'obtenir l'écart minimal entre mesures et modèle. Le modèle optimal constituera notre courbe de calibration,  $\mathcal{C}(M)$ .

---

2. il s'agit de deux fils conducteurs métalliques de composition différente, soudés ; on peut observer alors entre les deux fils une différence de potentiel électrique qui va croître avec la température de la soudure ; il est évident qu'un thermomètre à thermocouple doit être calibré, c-à-d que l'on aura besoin de connaître la courbe tension-température afin de l'utiliser.

3. éventuellement, si on constate que l'affichage du voltmètre n'est pas très stable, on effectuera plusieurs mesures à chaque valeur de la tension, et on considérera la moyenne.

TABLE A.2 – Ecart-type entre modèle et mesures, pour un degré croissant du modèle polynomial.

degré	$\sigma$ [°C]
1	1.010
2	0.288
3	0.060
4	0.054
5	0.054

Par exemple, pour le thermocouple, si on calcule l'écart-type moyen entre les données et un modèle polynomial, on trouve que le degré 4 est optimal - car au-delà, il n'y a pratiquement aucun gain de précision (voir table A.2), et la courbe de calibration est donnée par :

$$\mathcal{C}_T(U) = 2.439 + 1.621 U - 4.522 \cdot 10^{-2} U^2 + 7.221 \cdot 10^{-4} U^3 - 4.039 \cdot 10^{-6} U^4 \quad [\text{°C}]$$

**5/ précision de la calibration.** Bien entendu, puisqu'on effectue un ajustement de modèle - et que tout ajustement est forcément une approximation car la mesure de calibration est aussi soumise à une erreur - il est important de connaître la précision à laquelle on doit s'attendre lorsque l'on utilise la courbe de calibration. Ce niveau de sophistication est indispensable pour les mesures à très haute précision (physique fondamentale). Dans l'exemple du thermocouple, on trouve par exemple qu'avec le modèle d'ordre 4, la précision est de 0.054°C (table A.2).

### A.7.2 L'étendue de mesure

(inspiré de wikipedia). C'est le domaine de variation du mesurande auquel l'instrument est valeur minimale : la **port e minimale**, et une valeur maximale : la **port e maximale**. Par exemple, un voltmètre pourrait avoir une étendue de mesure de 1 mV à 100 V.

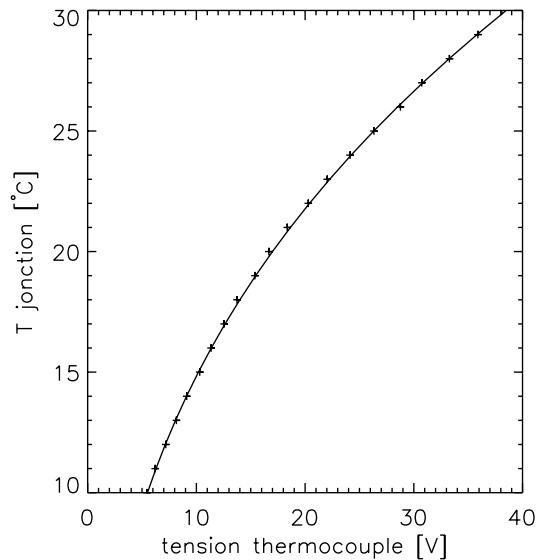


FIGURE A.3 – Courbe de calibration du thermocouple (polynôme de degré 4).

### A.7.3 La résolution

(inspiré de wikipedia). La résolution d'un appareil est la plus petite variation du mesurande qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument. Elle peut aussi être exprimée en nombre de points de résolution, qui sont alors le nombre de valeurs différentes que l'instrument peut afficher. Par exemple un multimètre de 2000 points pour une étendue de 2 V peut afficher toutes les valeurs comprises entre 0.000 V et 1.999 V ; sa résolution est donc de 1 mV.

On rencontre également une autre notation : un appareil sera dit " 3 point 1/2 " au lieu de " 2000 points ". Cela signifie que l'instrument peut afficher une mesure avec trois chiffres après la virgule, plus un " demi chiffre ", un chiffre affiché qui ne peut pas prendre toutes les valeurs (par exemple, le chiffre avant la virgule, qui ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1). Dans le cas du multimètre, le " 3 point " est associé aux 3 chiffres après

la virgule nécessaires pour exprimer les valeurs de 0.000 V à 1.999 V, et le " 1/2 " est associé aux 0 et 1 avant la virgule.

#### A.7.4 La sensibilité

La **sensibilité** (notée  $\mathcal{K}$ ) d'un instrument est définie par la pente de la courbe d'étalonnage  $\mathcal{C}(M)$

$$\mathcal{K}(M) = \frac{d\mathcal{C}(M)}{dM}$$

Elle caractérise l'influence d'un changement de la valeur d'entrée sur la valeur de sortie. Elle n'est constante que si l'instrument est parfaitement linéaire, c-à-d si sa courbe d'étalonnage est une droite de pente constante (un changement de la valeur d'entrée  $\Delta M$  produit un même changement de la valeur de sortie, quelque soit la valeur de  $M$ ). Dans les autres cas, la sensibilité de l'instrument va varier d'une extrémité à l'autre de son étendue (A.7.2). Un bon instrument devra avoir une grande sensibilité.

#### A.7.5 La justesse

La justesse d'un instrument (notée  $\mathcal{J}$ ) décrit sa capacité à fournir la vraie valeur du mesurande - en imaginant que toutes les sources d'erreur aléatoire ont été éliminées. Il ne reste donc que l'erreur systématique, qui comme on l'a vu plus haut peut être éliminée par étalonnage. On pourrait cependant imaginer des appareils impossibles à calibrer de manière interne (correction automatique impossible) et pour lesquels il soit utile de connaître la justesse. La correction de calibration serait alors appliquée sur les valeurs données par l'instrument.

L'étalonnage permet de déduire la justesse de l'instrument. En entrant une valeur connue, on peut mesurer l'erreur due à l'instrument et caractériser la justesse par

$$\mathcal{J} [\%] = 100 \left( 1 - \left| \frac{\text{valeur étalon} - \text{valeur mesurée}}{\text{valeur étalon}} \right| \right)$$

Un appareil sans erreur systématique est donc un appareil à 100% de justesse.

#### A.7.6 La fidélité, ou précision

Imaginons un instrument à 100% de justesse. La fidélité ou précision d'une mesure avec un tel instrument indique l'accord typique moyen (en valeur absolue) entre le résultat d'une mesure et la vraie valeur du mesurande. L'écart entre la mesure et la vraie valeur du mesurande est dues aux erreurs aléatoires imprédictibles et non compensables qui se présentent toujours dans les instruments réels (effets thermiques, mécaniques, perturbations électriques etc.) Un instrument infiniment précis fournirait une mesure exactement égale à la valeur du mesurande.

En d'autres termes, la précision est une mesure de la fluctuation aléatoire des caractéristiques physiques des composants de l'instrument : plus l'instrument est stable, plus il sera précis. Puisque l'erreur interne est de nature aléatoire, la précision se caractérise par l'écart-type moyen entre mesure  $M$  et valeur exacte du mesurande (on utilisera un étalon  $E$ )

$$\mathcal{P} = \sqrt{\langle [M - E]^2 \rangle}$$

La précision s'exprime naturellement dans les mêmes unités que le mesurande, et on notera encore que la précision peut tout à fait varier à travers l'étendue de l'instrument.

### A.7.7 L'exactitude = justesse + précision

Un instrument de mesure est d'autant plus exact que les résultats de mesure qu'il indique coïncident avec la vraie valeur du mesurande. Il est à remarquer que l'exactitude ne s'exprime pas par une valeur chiffrée. C'est une appréciation qualitative des résultats.

L'exactitude d'un appareil est essentiellement liée à la justesse et la fidélité. **Un appareil est exact s'il est à la fois juste et précis.** Voir la figure A.4.

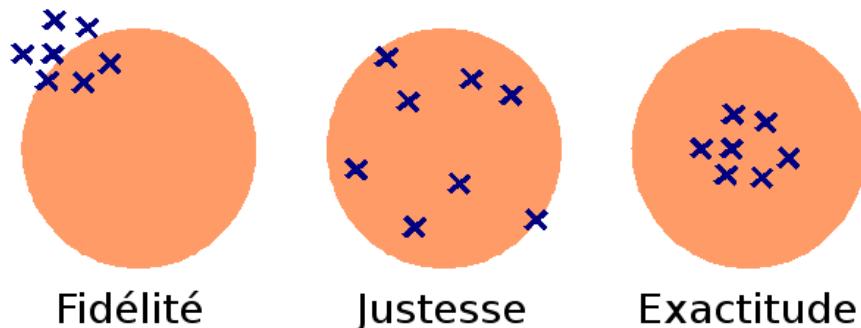


FIGURE A.4 – On peut représenter symboliquement la fidélité, la justesse et l'exactitude de la manière ci-dessus. Dans le premier cas, les mesures sont proches les unes des autres (bonne fidélité) mais en dehors de la zone de probabilité de la valeur vraie (mauvaise justesse). Dans le deuxième cas, les mesures sont au contraire bien dans la zone où se trouve la valeur vraie et le "barycentre" des points est au centre de la zone rouge (bonne justesse) mais bien que bonnes, les mesures sont dispersées entre elles (mauvaise fidélité). Enfin, le dernier cas présente des mesures justes (dans la zone de la valeur vraie) et fidèles (proches les unes des autres). C'est le cas d'un bon appareil de mesure, à qui l'apport d'une correction n'est a priori pas nécessaire et les mesures effectuées avec l'appareil sont exactes.

### A.7.8 La répétabilité

Une mesure est qualifiée de **répétable** lorsqu'il existe un accord entre les résultats des mesures **successives** du même mesurande (c-à-d séparées dans le temps), effectuées dans les **mêmes** conditions de mesure, c'est-à-dire :

- même instrument de mesure,
- même procédé de mesure,
- même observateur,
- même emplacement,
- répétition sur une courte période de temps (afin que la relation de calibration reste constante).

La dispersion naturelle entre les résultats des mesures individuelles du mesurande dans les conditions ci-dessus, permettra de donner une estimation quantitative de la répétabilité d'une mesure. Le contre-exemple d'une mesure non-répétable correspond au cas où à chaque mesure, le résultat est différent, avec des variations largement supérieures à ce que l'on pourrait s'attendre compte tenu de la précision de l'instrument.

### A.7.9 La reproductibilité

Une mesure est qualifiée de **reproductible** lorsqu'il existe un accord entre les résultats des mesures du même mesurande effectuées dans des **conditions de mesure différentes**. Par exemple, afin d'obtenir un statut universellement accepté par la communauté scientifique, le résultat d'une expérience scientifique destinée au test d'une théorie doit impérativement pouvoir être retrouvé (aux erreurs de mesure près) dans tout laboratoire convenablement équipé. Dans le cas contraire, la théorie teste ne saurait être considérée comme une théorie vraie. Une théorie non vérifiable n'a aucune valeur.

Considérons par exemple le cas de la détermination de la masse du proton, une constante fondamentale en physique nucléaire. Le premier laboratoire ayant réalisé cette mesure a bien entendu publié son résultat dans des revues scientifiques, et d'autres laboratoires à travers le monde se sont empressés de reproduire l'expérience, localement, afin de contrôler l'affirmation du premier laboratoire. Si aucun de ces laboratoires n'aurait réussi à reproduire le résultat initial, malgré tous les soins apportés à la mesure et à la minimisation des erreurs, la valeur publiée par le premier laboratoire aurait été rejetée - à raison - par la communauté scientifique. En d'autres termes : **une mesure non reproductible, ce n'est pas de la science !<sup>4</sup>**

---

4. pour cette simple raison, l'astrologie, la numérologie, l'homéopathie et autres fadaises - ne sauraient accorder au statut de vérité scientifique : **aucun résultat ni prédition** de ces machins n'a jamais pu être reproduit ! Jamais ! Seule la naïveté humaine est une certitude universelle.

## A.8 Introduction

Les mesures comme celle de la température, de l'heure ou de notre masse corporelle sont des activités quotidiennes si courantes que l'on porte généralement peu d'attention à l'instrument de mesure et à l'exactitude du résultat.

Pour des équipements plus complexes, comme ceux que l'on trouve dans les installations scientifiques, industrielles, et médicales, l'exactitude de la mesure revêt en revanche un aspect critique, essentiel. Il peut être en effet nécessaire de respecter des normes, de garantir la fiabilité d'un composant, de vérifier une prédition théorique : on doit donc être assuré de la **qualité des mesures** que l'on effectue. Pour cela il est indispensable d'apporter une grande attention à l'instrument de mesure ainsi qu'à la façon dont celle-ci est effectuée.

Un système de mesure est généralement constitué de quatre parties (fig. A.5) :

- le capteur** qui traduit la valeur physique mesurée en un signal ; il utilise un phénomène physique réagissant à la grandeur à mesurer et assure sa transformation en un signal électrique, optique ou mécanique plus facile à manipuler et à quantifier (voir le cours HEIG-VD *capteurs*).
- le conditionneur** qui transforme le signal pour le mettre dans une forme adéquate à sa lecture - par exemple l'amplifier ou le filtrer,
- la sortie** de l'instrument de mesure qui permet de lire puis enregistrer la mesure,
- un système de contrôle (optionnel)** par feedback dans le cas où le système de mesure est inclus dans un contrôle de processus.

## A.9 Les différents types de signaux

Un système de mesure transforme une **entrée**, en règle générale une grandeur physique, en un signal de **sortie**. Différents types de signaux sont transmis entre les capteurs, les conditionneurs et la sortie du système.

On peut classifier les signaux en trois catégories selon leur représentation temporelle et les valeurs prises par la quantité mesurée (fig. A.6) :

- Un signal continu** est défini pour toutes les valeurs du temps et peut prendre n'importe quelle valeur en amplitude,
- Un signal discret** est en général un signal continu qui est mesuré à certains instants seulement, mais il peut aussi s'agir d'un signal naturellement discontinu, tel que le nombre de photons reçus par un détecteur pendant une certaine durée de temps, un nombre de véhicules par tranche d'heure sur une route, etc.
- Un signal numérique** est un signal discret quantifié sur un certain nombre de niveaux (généralement des puissances de 2) et qui ne peut prendre qu'un ensemble discret

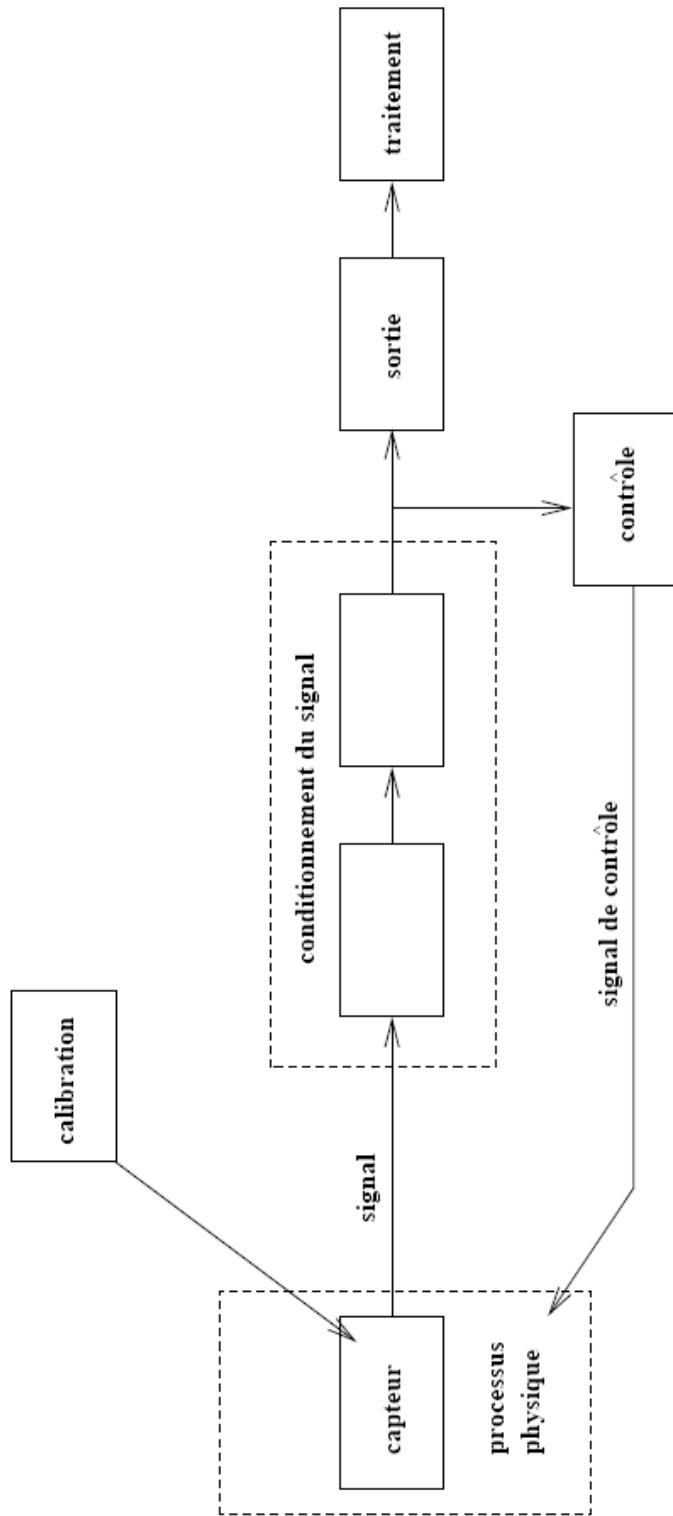


FIGURE A.5 – Schéma général d'un système de mesure

de valeurs, par exemple la numérisation d'un signal électrique de -10 à +10 V sur 8 bits non signés, de 0 à 255.

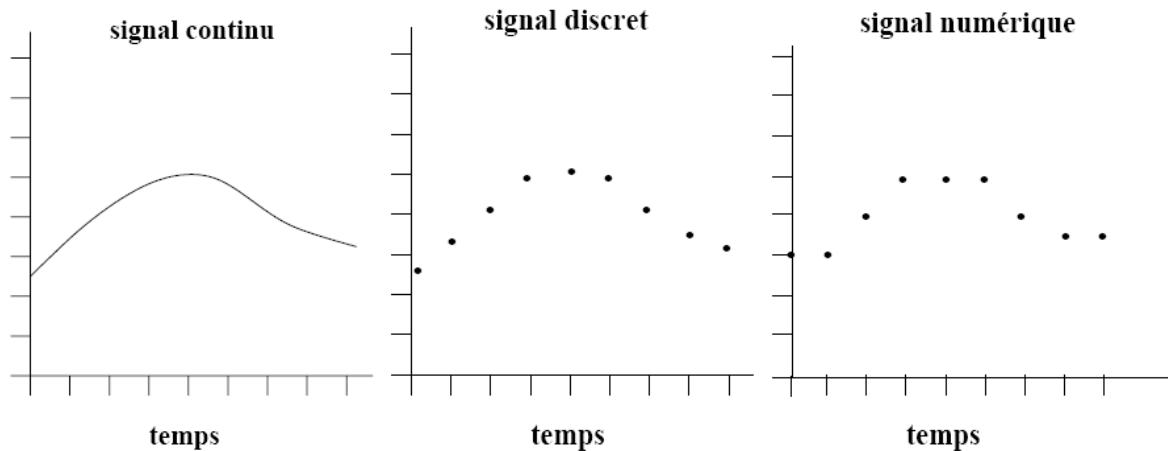


FIGURE A.6 – Les trois types de signaux les plus fréquents.

En fonction du phénomène physique qu'ils représentent, il faut aussi distinguer les signaux **déterministes**, c'est-à-dire les signaux pour lesquels les valeurs futures peuvent être prédites, et les signaux **aléatoires** qui ne sont pas prédictibles et qui nécessitent un traitement spécifique (fig. A.7).

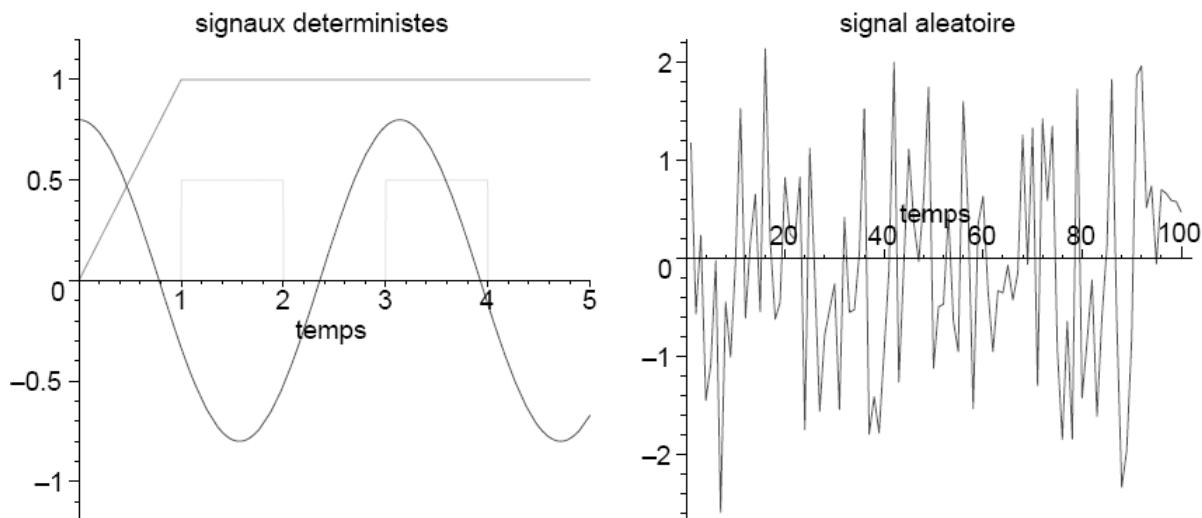


FIGURE A.7 – Signaux déterministes et aléatoires.

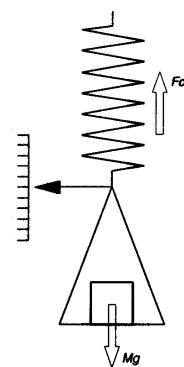
## A.10 méthodes générales de mesure

### A.10.1 Mesure par déviation

C'est la méthode qui consiste à obtenir la déviation d'un système, d'une position d'équilibre qu'il occupait en l'absence de mesurande, à une nouvelle position d'équilibre qu'il occupe en présence du mesurande. L'écart entre les deux positions fournit plus ou moins directement la mesure.

Dans la méthode de déviation par **longation simple**, les deux positions sont des positions au sens géométrique du mot ; elles ne mettent pas en jeu un équilibre particulier de force. Ainsi en est-il de la mesure d'une longueur au pied à coulisso, où l'opérateur déplace les palpeurs pour venir en contact entre eux (zéro), ou sur la pièce (mesure).

Dans la méthode de déviation par **équilibre spontané**, les positions d'équilibre sont le résultat d'une opposition entre deux forces égales. L'exemple typique d'une mesure par équilibre spontané est le **peson à ressort** (figure ci-contre). On suspend une masse sur un plateau fixé à l'extrémité d'un ressort vertical. Les forces de résistance, dont le ressort devient le siège quand il est déformé, et sont proportionnelles à l'allongement, augmentent jusqu'à



égaler le poids du corps, et c'est la valeur de l'allongement du ressort, à l'équilibre, qui indique la masse. On peut certes calculer les forces développées à partir des caractéristiques du ressort, mais il est plus simple et plus précis de tarer le ressort avec des masses connues.

Les appareils qui utilisent la méthode de déviation sont innombrables en métrologie. Quelques types élémentaires sont mentionnés dans le tableau ci-dessous :

Appareil	Mesurande	Grandeur d'opposition	Mesure	
Peson à ressort	force	contrainte ressort	allongement	
Peson à contrepoids	force	moment d'une force	angle	
Baromètre à mercure	pression	pression hydrostatique	différence de niveau	
Thermomètre à gaz	température	volume	déplacement d'un niveau	

Le **galvanomètre** à cadre mobile (figure A.8) est un autre exemple de méthode par déviation. C'est l'égalité du couple produit par les forces électromagnétiques et du contre-couple générée par la torsion du fil de suspension du cadre qui définit la déviation qui donne la mesure. Le système se déforme jusqu'à ce que cet équilibre soit atteint.

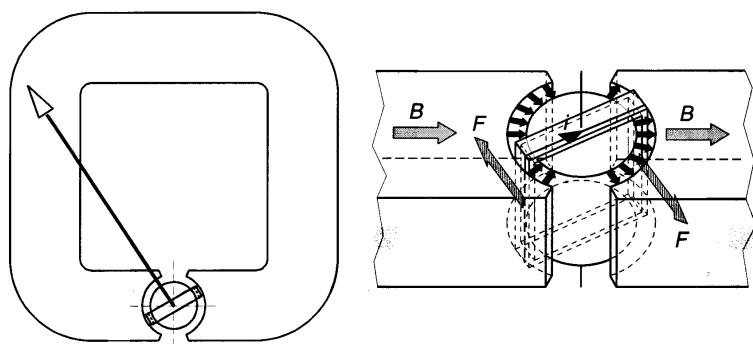


FIGURE A.8 – Principe du galvanomètre. A gauche, on observe l'aimant permanent générateur d'un champ magnétique à travers le cadre mobile du galvanomètre. A droite, vue détaillée du cadre et de la force d'origine électromagnétique subie par le cadre dans lequel circule le courant (ou la tension) que l'on désire mesurer.

Dans ce cas, cependant, la transformation et transmission d'énergie sont moins directes que dans le cas du peson : le premier effet de la tension électrique appliquée aux bornes du cadre sera d'instaurer un courant continu qui dépend des constantes électriques du circuit. Ce courant, plongé dans le champ magnétique de l'aimant permanent, crée une force électromagnétique mettant en rotation le cadre, et partant, tord le fil de torsion, support du cadre. Le contre-couple dû à la torsion du fil augmente avec l'angle de rotation

du cadre, jusqu'à se trouver en équilibre et compenser le couple engendré par la force électromagnétique. La rotation est alors stabilisée, et après quelques instants d'oscillation, la valeur finale pourra être lue.

### précautions d'emploi de la méthode par déviation

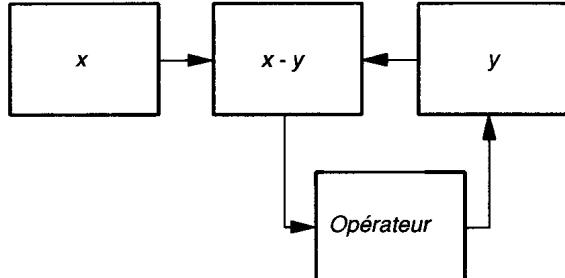
Mentionnons quelques précautions exigées par l'emploi de la méthode par déviation :

- **Mise à zéro** : la mesure est fournie par l'écart à partir d'une position d'origine prise comme zéro. Il est donc impératif de vérifier que l'instrument indique effectivement zéro en l'absence de mesurande. Sinon il faudra noter la position de départ qui est un "faux zéro". Les instruments électroniques, les thermomètres, les manomètres présentent souvent des calages de zéro (en anglais *offset*) dont il faut tenir compte.
- Il faut attendre que l'**équilibre soit atteint**.
- Il faut aussi porter attention aux **conditions de linéarité** : en effet, la loi la plus avantageuse qui puisse relier le mesurande et la mesure, tant pour son interprétation immédiate que pour son traitement ultérieur, est une **relation linéaire**. C'est elle que l'on cherche généralement à obtenir. Un bon moyen d'y parvenir est de n'utiliser que des transducteurs<sup>5</sup> linéaires dans la chaîne de mesurage. Les transducteurs sont en général linéaires dans une plage plus ou moins étroite de l'étendue, généralement au voisinage du zéro. Si le système de mesure comporte un traitement numérique, il est possible d'introduire, dans le programme traitant les mesures, la courbe de calibration du capteur, ce qui élimine les problèmes de non-linéarité.

---

5. Un transducteur est un dispositif convertissant un signal physique en un autre ; par exemple un signal lumineux en signal nerveux (vision animale) ou signal électrique (photodéTECTeur).

### A.10.2 Mesure par comparaison



sur  $y$  pour obtenir que la valeur de  $x - y$  formée par le **détecteur d'écart** soit nulle.

Les mesures par comparaison couvrent un très large nombre de mesures de toutes grandeurs. Le principe général est de comparer le mesurande  $x$  à une grandeur connue de même nature  $y$  pour obtenir  $x = y$  ou  $x - y = 0$ .

Cette grandeur de comparaison est parfois réglée par un opérateur - dont le rôle est celui d'un **asservissement** et peut être tenu par un dispositif automatique - qui agit

#### A. méthode d'opposition ou méthode de zéro

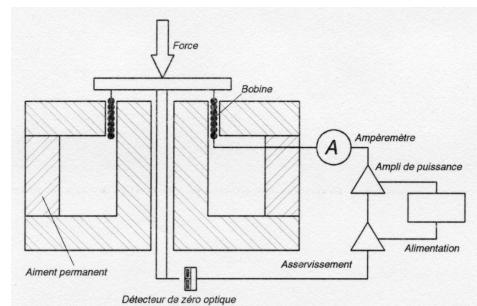


FIGURE A.9 – Gauche : balance de Roberval. Droite : dynamomètre électromagnétique.

Une **balance de Roberval** (figure A.9) possède tous les organes d'un appareil de zéro : le soustracteur (fléau), le détecteur d'écart (l'aiguille), la grandeur d'opposition (boîte de poids). C'est l'opérateur qui apprécie l'écart puis dépose ou retire les poids pour obtenir l'équilibre.

Un autre exemple de méthode de zéro par asservissement est présenté en figure A.9 (droite) : il s'agit d'un **dynamomètre électromagnétique**. L'équilibre de la force présente sur le plateau est réalisé par une force électromagnétique grâce à un dispositif analogue à celui d'une bobine de haut-parleur. La commande électrique comprend le détecteur d'écart, la source d'énergie, l'amplificateur de puissance réglant l'intensité du courant, et un ampermètre fournit la valeur du poids.

#### B. Montages en pont

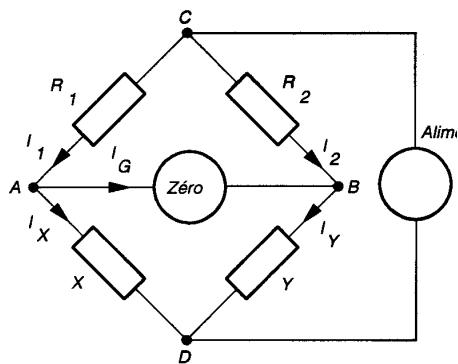


FIGURE A.10 – Pont de Wheatstone.

Le montage en pont est un montage différentiel qui soustrait les réponses de deux bras contigus. Ceci permet de s'affranchir de l'influence de certaines grandeurs parasites qui pourraient masquer le phénomène auquel on porte intérêt.

Un pont est présenté traditionnellement comme un quadrilatère et deux connections diagonales (AB et CD, figure A.10). Les 4 côtés du quadrilatère constituent les bras. Une des diagonales (CD) contient l'alimentation en énergie ; l'autre (AB) l'appareil de zéro. Lorsque la mesure d'une grandeur passive est faite par la méthode de déviation, les alimentations doivent avoir un niveau connu puisque la déviation leur est proportionnelle. Dans les montages en pont on est ramené en fait à la comparaison des valeurs des grandeurs passives qui constituent les bras, et par suite le niveau de l'unique source peut être quelconque à l'équilibre. L'application du **pont de Wheatstone** à la mesure des résistances électriques est bien connue (fig. A.10).

### C. méthode de déviation constante

C'est encore une variante de la méthode de comparaison, mais ici la grandeur de comparaison conserve une valeur constante. On ajoute au mesurande la quantité nécessaire pour atteindre la valeur fixée :  $x + y = \text{constante}$ . Cette méthode se retrouve en plusieurs variantes.

### D. méthode de la substitution

Au mesurande on substitue une grandeur connue qui doit provoquer un effet identique. Puisqu'il s'agit de comparer deux effets successifs, il faut qu'un élément garde la trace du premier effet ; il peut prendre dans certains appareils une place très importante, sous le nom de mémoire (figure A.11). Dans le cas du peson, par exemple, on croche le poids inconnu et on le remplace par des poids marqués pour retrouver l'indication précédemment notée.

Pour une balance on fait l'équilibre avec une tare, puis on substitue des poids marqués à l'objet à peser. C'est la méthode dite de **Borda**. C'est la tare qui fait office de mémoire. La méthode s'étend à toutes sortes de mesures : différence de potentiel dans certains convertisseurs analogique-numérique, radioactivité, longueur, etc.

En contrôle dimensionnel, il est classique de substituer à la pièce dont la cote inconnue est gardée en mémoire sur un comparateur, un empilement de cales dont les dimensions sont bien connues, jusqu'à ramener le comparateur à la même indication.

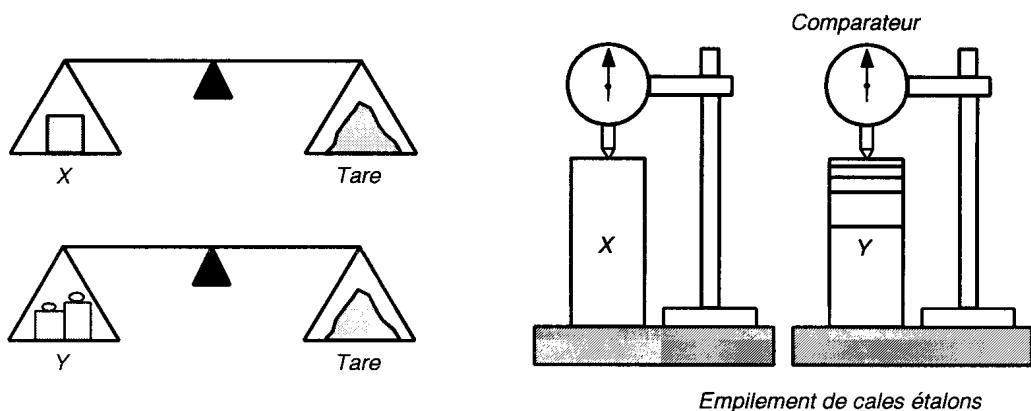


FIGURE A.11 – méthode de la substitution.

### E. méthode de la permutation

Lorsqu'on utilise un appareil qui réalise l'égalité  $ax = by$ , il faut en principe connaître  $a/b$  pour avoir la mesure. Cependant, il est possible d'éliminer le facteur  $a/b$  en effectuant deux mesures selon le schéma indiqué dans la figure A.12 : l'équilibre des moments donne

$$axg = byg \text{ et } a(y+z)g = bxg$$

et en divisant membre à membre on obtient

$$\frac{x}{y+z} = \frac{y}{x}$$

soit finalement  $x = \sqrt{y(y+z)}$ . Appliquée aux balances à bras inégaux, cette méthode est connue sous le nom de méthode de **Gauss**.

### F. Appareils à seuil

On se propose de connaître l'instant, ou les conditions, lorsque la grandeur  $x$  atteint une valeur prédéterminée. Ceci se rencontre en particulier lorsqu'on cherche à régler une variable à une valeur donnée (régulation), mais se rencontre aussi dans de nombreux processus métrologiques. La grandeur de comparaison a une valeur fixe et le détecteur de zéro se trouve bloqué par son action tant que le mesurande ne la dépasse pas. L'exemple typique en sont les accéléromètres des airbags.

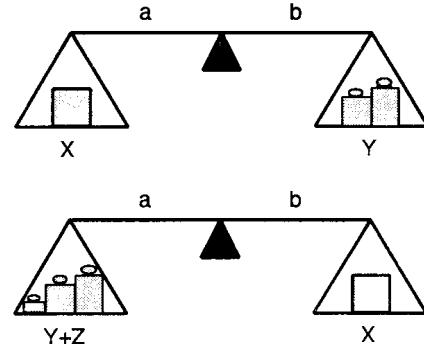


FIGURE A.12 – méthode de la permutation.

### A.10.3 Avantages et inconvénients des mesures par déviation et par comparaison

Les caractères des mesures par déviation et par comparaison sont très différents. Le bilan sera dans l'ensemble favorable aux dernières, qui n'ont guère contre elles que leur relative complication et leur prix.

C'est le **détecteur d'écart** qui donne aux mesures par comparaison l'essentiel de leur caractère. L'absence d'exigences métrologiques à son égard, par opposition aux exigences formées pour les instruments de mesure par déviation, rend les mesures par comparaison plus précises que celles par déviation.

En effet, dans les méthodes par comparaison, le repérage de la position zéro est assuré par le détecteur d'écart qui fournit le **signal d'erreur** dont seuls l'existence et le signe nous intéressent. Ce fait permet de simplifier à l'extrême le détecteur sans exiger de lui des qualités métrologiques poussées. Il suffit que sa position d'équilibre soit stable, qu'il soit fidèle au zéro.

Dans tout instrument de mesure, la **justesse** est limitée par les défauts intrinsèques de l'instrument. Ces défauts se retrouvent évidemment aussi bien dans les mesures par déviation que dans les mesures par comparaison. Dans le cas des balances, l'influence des erreurs d'étalonnage, des erreurs sur les masses utilisées, des erreurs sur le parallisme des couteaux, des erreurs sur les bras du fléau, etc. se retrouvent dans les deux cas.

Il n'en va pas de même des **erreurs de lecture**. Dans la mesure par déviation, l'erreur de lecture représente en effet une fraction donnée de l'étendue de mesure, généralement de l'ordre de 1 à 0.1%, alors que dans la méthode du zéro, la partie principale de la mesure porte sur des grandeurs connues avec exactitude, et leur somme ne peut être entachée d'aucune erreur (sauf de grossières erreurs, baptisées parasites par les normes, et qui sont en général faciles à dépister). L'erreur de lecture ne porte que sur l'évaluation du zéro, obtenue d'une manière précise par coïncidence. Pratiquement, elle est 100 à 1000 fois plus petite que l'erreur de la mesure par déviation.

Toutefois, l'usage de la méthode de déviation paraît plus simple, donc plus prompte. Par exemple, un corps à peser est posé sur le plateau du peson à ressort et il suffit d'attendre un temps suffisant pour que l'allongation ait le temps de se stabiliser et que les oscillations soient amorties. Alors que la méthode de zéro suppose une série d'opérations qui comprennent la constatation d'un écart, l'application de la contre-réaction puis l'attente d'un nouvel équilibre.

Finalement, toute mesure consomme de l'énergie. Cependant il y a de ce point de vue une grande différence entre les méthodes de déviation et de comparaison. Dans le premier cas l'énergie correspond à la déformation du système de mesure de sa position zéro à sa position d'équilibre final. Dans le second cas, elle ne correspond qu'à la déformation nécessaire pour observer l'écart.

Par exemple, si on évalue la tension d'une pile avec un voltmètre à cadre, il y a passage d'un courant tant que dure la mesure, et donc consommation d'énergie. Si au contraire

on utilise la méthode d'opposition, aucun courant ne circule dans le galvanomètre de zéro et il n'y a aucune consommation d'énergie (donc aucune déformation du phénomène) autre que celle qui peut correspondre au plus petit écart discernable du galvanomètre. L'instrument de mesure se comporte comme s'il avait une impédance infinie.

#### A.10.4 Comptages

Il est très fréquent d'avoir à compter une certaine quantité d'éléments (nombre de tours, nombre d'impulsions, nombre de particules, etc.). La mesure se réduit alors à un comptage.

La fréquence de comptage des systèmes mécaniques ne dépasse pas quelques centaines de hertz ; celle des compteurs électroniques dépasse 10 GHz.

Un système de mesure n'est jamais parfait puisqu'il est en général plus ou moins sensible à l'environnement (température, pression, humidité...), et même les étalons servant à la calibration de l'instrument ne sont qu'une matérialisation imparfaite de la définition de l'unité qu'ils sont chargés représenter. Par conséquent, toute mesure est inéluctablement attachée d'erreurs.

De manière générale, le but de la mesure est d'évaluer la valeur numérique d'une observable physique. Ce que l'on obtient en pratique est une valeur donnée par l'instrument de mesure. Soit cette valeur correspond directement à la valeur de l'observable (ex : pied-coulisse), soit il faut encore utiliser une courbe de calibration (ex : thermomètre à thermocouple).

Quoi qu'il en soit, la valeur numérique fournie par le mesurage ne sera jamais - ou alors sinon par pur hasard - exactement égale à la vraie valeur numérique de l'observable, en raison des erreurs de mesure, toujours présentes, jamais nulles. Et naturellement, les erreurs de mesures ne sont jamais connues - sinon il suffirait de corriger la valeur mesurée, et nous obtiendrions la vraie valeur de l'observable !

Notre objectif, en tant qu'opérateur du mesurage, sera donc non seulement de fournir la valeur numérique mesurée, mais aussi de donner l'incertitude associée à cette mesure, incertitude estimée à partir de l'analyse statistique des erreurs de mesure. précisons :

**L'erreur de mesure** est l'écart entre la valeur numérique de la mesure et la valeur vraie du mesurande. Elle varie de manière aléatoire entre deux mesures du même mesurande.

**L'incertitude** quant à elle est notre estimation de l'impact des erreurs sur la valeur annoncée de la mesure (en général la moyenne des mesures). L'incertitude est une valeur forcément positive, elle indique l'intervalle dans lequel on estime que se trouve la vraie valeur du mesurande.

En d'autres termes, les erreurs sont subies, tandis que les incertitudes sont estimées.

## Mais pourquoi donner une incertitude ? et est-ce toujours nécessaire ?

Tout va dépendre de l'application. Si vous allez commander des planches chez votre menuisier pour fabriquer une cage à lapins dans votre jardin, pas besoin d'indiquer de tolérance pour vos cotes. Par défaut, on sait bien que les planches seront coupées typiquement avec une précision de l'ordre du millimètre, ce qui suffit largement.

**En revanche**, lors d'un processus de fabrication industriel ou de la conception d'un prototype, il est évident que l'on spécifie toujours une tolérance pour les pièces fabriquées. De fait, lors de la **vérification** des pièces, afin de voir si les spécifications de tolérance sont respectées, il sera indispensable d'évaluer l'erreur probable commise sur la mesure, et il sera bien entendu absolument nécessaire que cette incertitude soit bien inférieure à la tolérance sur les pièces.

Admettons par exemple que la spécification du diamètre d'un axe usiné soit de 20 mm avec une tolérance de  $\pm 0.005$  mm soit  $\pm 5 \mu\text{m}$ . Il est simplement complètement évident que l'incertitude de notre mesure devra être significativement inférieure à  $5 \mu\text{m}$  (disons typiquement  $0.5 \mu\text{m}$ ), sinon notre mesure n'aura aucun intérêt. Et à plus forte raison, ne pas donner l'incertitude associée à la mesure enlève tout intérêt à cette dernière ! Comment en effet savoir si la tolérance est respectée et si nous n'avons aucune idée de la précision de la mesure ? si par exemple la mesure indique 20.01 mm, est-ce réellement 20.01 mm ou alors, en fait, 19.99 mm, mais avec une erreur de mesure de 0.02 mm ? Impossible ici de déterminer si la pièce est bonne ou non. En revanche, si on mesure 19.997 mm et que l'incertitude sur la mesure est de 0.0005 mm, alors on sait que la vraie valeur du mesurande sera dans l'intervalle 19.9965 à 19.9975 mm, ce qui est inclus dans la marge de tolérance de 19.995 à 20.005 mm, et conduira à l'acceptation de la pièce.

Autre exemple : si une théorie scientifique prédit un résultat, par exemple la masse du fameux boson de Higgs, il est clair que le laboratoire (ici le CERN) effectuant la vérification de cette prévision théorique devra préciser l'incertitude associée à la mesure. Si la valeur prédictive par la théorie est à l'intérieur de la marge d'erreur de la mesure, alors il y aura de bonnes chances que la théorie soit correcte. Dans le cas contraire, tout va dépendre de l'écart entre prévision théorique et mesure. Si l'écart est vraiment très grand, et la mesure très précise, alors il y a de fortes chances que la théorie soit fausse. Par contre, si l'écart est petit, il y a plus de chances que ce soit la précision de la mesure qui soit discutable. Quoi qu'il en soit, on comprend bien que sans indication de l'incertitude associée à la mesure, impossible de se prononcer sur quoi que ce soit.

## Intervalle et niveau de confiance

Mais ce n'est pas tout. Il faut encore préciser quelle est le niveau de confiance que l'on peut accorder à l'estimation de l'incertitude. En d'autres termes, avec quelle probabilité peut-on affirmer que la vraie valeur du mesurande se trouve en effet dans l'intervalle donné par l'incertitude, c-à-d dans l'intervalle

$$[\text{moyenne} - \text{incertitude}] \text{ à } [\text{moyenne} + \text{incertitude}] ?$$

Le niveau de confiance de l'incertitude se calcule à partir de la connaissance de la distribution de probabilité des erreurs, dont on discute au cours d'analyse de données. Il est égal à la probabilité que la valeur du mesurande soit dans l'intervalle ci-dessus, probabilité qui n'est rien d'autre que la somme (ou l'int grale) de la distribution de probabilité des erreurs de mesures entre les bornes  $\pm$  incertitude.

Pour connaître le niveau de confiance, il faut donc connaître la distribution de probabilité des erreurs de mesure, et pour connaître celle-ci, il faut faire un grand nombre de mesures. De toute manière, toute mesure demande toujours l'acquisition d'un nombre significatif de mesures individuelles, de manière à pouvoir déterminer, justement, l'incertitude.

**Un résultat de mesure sera ainsi toujours annoncé de la manière suivante :**  
 résultat = valeur numérique  $\pm$  incertitude [unité] ( n %)

où n est le niveau de confiance associé à l'intervalle d'incertitude (ou intervalle de confiance).

Dans ce chapitre, nous allons simplement nous concentrer sur les différents types d'erreur pouvant se retrouver en pratique. L'estimation des incertitudes et niveau de confiance est traité dans l'autre partie de ce cours : *L'analyse de données en sciences expérimentales*.

## A.11 Causes probables des erreurs de mesure

En toute généralité, les erreurs peuvent se classer en trois catégories :

### 1) Les erreurs d'étalonnage

dues aux étalons primaires

dues à la technique d'étalonnage

### 2) Les erreurs d'acquisition de données

dues aux capteurs

dues à l'appareil de mesure

dues aux variables non contrôlées

### 3) Les erreurs lors de l'analyse des données

dues au lissage (p.ex. méthode des moindres carrés)

dues à la troncature (conversion analogique-digital)

On donne ci-après quelques exemples des causes d'erreur les plus fréquentes. La liste n'est pas exhaustive : seul un examen approfondi du processus de mesurage pour un instrument donné permettra de déterminer l'ensemble et l'origine des erreurs possibles.

### A.11.1 Erreurs d'étalonnage ou de calibration

La grandeur étalon utilisée pour calibrer le système peut être elle-même entachée d'une petite erreur (différence entre la valeur réelle et la valeur annoncée). Par ailleurs, la mise en œuvre de la procédure d'étalonnage est elle aussi sujette à des erreurs, car la calibration est elle-aussi une mesure ! Bien entendu, la calibration d'un instrument va se faire avec de grandes précautions, mais des erreurs seront toujours présentes : les erreurs d'étalonnage.

### A.11.2 Hystérésis

Balayons la plage de valeurs d'entrée d'un système en partant de la plus petite valeur vers la plus grande puis de la plus grande vers la plus petite. En raison des frottements (pour un système mécanique), ou de la viscosité (système hydraulique) ou des charges électriques résiduelles (système électrique), la valeur finale sera également différente de la valeur de départ. Pour une même valeur d'entrée, un système soumis à de l'hystérésis donnera par conséquent deux valeurs différentes suivant le sens de balayage. L'erreur d'hystérésis sur la mesure  $M$  est alors définie par

$$\epsilon_h [\%] = 100 \left| \frac{M_{\max} - M_{\min}}{\text{moyenne}\{M\}} \right|$$

### A.11.3 Erreur de linéarité

La plupart des instruments sont conus pour fournir une relation linéaire entre la valeur physique entrée dans le système et la valeur de sortie. Mais comme les systèmes réels ne sont jamais parfaitement linéaires, une erreur est introduite à ce niveau, caractérisée par

$$\epsilon_{\text{lin}} [\%] = 100 \left| \frac{M - M_{\text{lin}}}{M} \right|$$

où  $M_{\text{lin}}$  est la valeur donnée par le système s'il était linéaire.

### A.11.4 Erreur de sensibilité

Dans la situation où la mesure est réalisée à l'aide d'un capteur, il faut encore passer par la courbe de calibration de ce dernier pour déterminer la mesure dans l'unité qui nous intéresse (par exemple dans le cas du thermocouple la tension est transformée en une température). Si le système est linéaire, une erreur dans l'application du facteur de transformation (ou gain ou sensibilité), pour une raison quelconque (parce que le gain est mal connu, par exemple) engendre ce que l'on appelle l'erreur de sensibilité.

### A.11.5 Erreur due à la résolution de l'instrument

L'erreur due à la résolution  $\rho$  de l'instrument (voir le chapitre 3) peut être évaluée par

$$\epsilon_{\text{res}} = \pm \rho / 2$$

car  $\rho/2$  est l'écart maximal possible entre la valeur mesurée et la valeur affichée : la mesure sera toujours affichée à la valeur la plus proche possible que peut donner l'affichage.

### A.11.6 Grandeurs d'influence externes

Le système peut, lors de son utilisation, être soumis en plus du mesurande à l'influence d'autres grandeurs physiques dont les variations peuvent modifier la valeur de la grandeur de sortie, et qui sont impossibles à distinguer de celle due à l'action du mesurande. Les principales grandeurs d'influence sont les suivantes (la liste n'est pas exhaustive) :

**la température**, qui a des effets électriques, mécaniques, géométriques (dilatation) ;

**la pression**, qui a un effet mécanique ;

**l'accélération et les vibrations**, qui génèrent déformations et contraintes ;

**l'humidité**, qui a un effet sur les constantes diélectriques, la résistivité, l'isolation ;

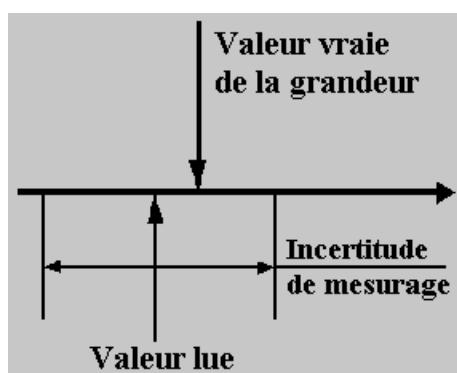
**le champ électro-magnétique**, qui génère une force  $-m$  et agit sur la résistivité ;

**la tension d'alimentation de l'instrument**, qui peut varier en amplitude et en fréquence.

On cherchera à réduire au maximum non seulement l'amplitude mais aussi et surtout la variation temporelle des grandeurs d'influence. En effet, si ces dernières sont stables, les erreurs engendrées seront constantes, donc systématiques, et il sera toujours possible de les identifier lors du processus de calibration : la courbe de calibration sera additionnée d'une valeur systématique non nulle même lorsque le mesurande est nul, représentant l'effet systématique des grandeurs d'influence, qu'il suffira de soustraire aux valeurs mesurées.

En revanche, si les grandeurs d'influence sont d'amplitude variable dans le temps, et de manière aléatoire et inconnue, alors il ne sera pas possible de s'affranchir de leur effet. Il conviendra alors de minimiser leur impact (par exemple, refroidissement stabilisé de l'appareil de mesure si la température est une grandeur d'influence critique).

## A.12 définitions de l'erreur et de l'incertitude



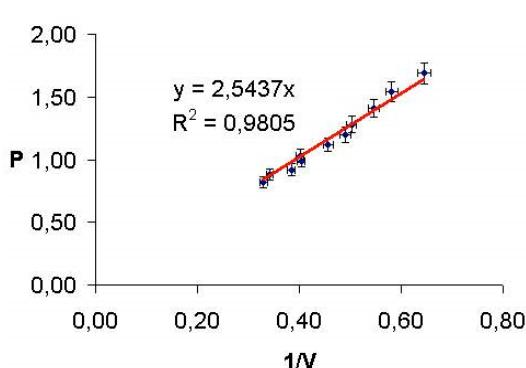
**L'erreur de mesure** est définie comme la différence entre la valeur annoncée et la valeur vraie qui reste inconnue. On ne connaît jamais la valeur de l'erreur, ni son signe, en revanche on peut estimer sa valeur absolue, en effectuant une calibration, et/ou un grand nombre de mesures.

**L'incertitude de mesure** décrit une région **autour** de la valeur mesurée dans laquelle on estime que se trouve la vraie valeur de l'observable. L'incertitude est un nombre que l'on calcule, à partir de la connaissance de la statistique des erreurs. Elle peut être annoncée de deux manières :

**absolue**, auquel cas elle a la même unité que la grandeur mesurée ;

**relative**, et se ramener à la valeur moyenne de l'observable, auquel cas elle est sans dimension et est généralement donnée en pourcentage % de la valeur moyenne.

**Une mesure sans indication d'incertitude est une mesure pratiquement inutile. On s'attachera donc à déterminer l'incertitude avec le même soin que celui apport à la mesure de la valeur elle-même.**



Sur un graphique de données expérimentales, l'incertitude de mesure sera décrite à l'aide de barres d'erreur, comme en figure A.13.

FIGURE A.13 – Graphique de données expérimentales avec barres d'erreur.

## A.13 Comment annoncer un résultat : les chiffres significatifs

L'incertitude est une grandeur que l'opérateur du mesurage a la responsabilité d'estimer, afin d'être indiquée avec la valeur de la mesure. L'incertitude n'est cependant elle-même rien d'autre qu'une valeur approximative ! car il faudrait une infinité de mesures, et une connaissance absolue des caractéristiques de l'instrument de mesure pour pouvoir évaluer avec précision l'erreur probable commise de la mesure.

Par consquent, lorsque l'on annonce la valeur de l'incertitude, il n'y a aucun sens à annoncer plus de 1 (voir 2) chiffres significatifs. De même, il n'y a aucun sens à donner, dans la valeur annoncée du résultat de la mesure, des chiffres d'ordre décimal en-dessous de la valeur de l'incertitude. Admettons par exemple que la valeur d'une mesure soit  $V = 9.876543$  et que l'incertitude estimée, dans la même unité, soit  $E = 0.004321$ . On arrondira alors l'incertitude au premier chiffre significatif, soit  $E = 0.004$ , et on arrondira la valeur  $V$  à la décimale associée à  $E$ , soit à  $10^{-3}$  ici. On noncera alors le résultat de la manière suivante :

$$V = 9.877 \pm 0.004 \text{ [unité]}$$

Si cela est requis, il faudra encore donner le niveau de confiance de l'intervalle d'incertitude,

$$V = 9.877 \pm 0.004 \text{ [unité], à } 95\%$$

## A.14 Erreurs systématiques et erreurs aléatoires

### A.14.1 généralités

L'incertitude comprend les effets d'erreurs **systématiques** et d'erreurs **aléatoires**, qui dépendent de la précision et résolution de l'instrument.

**L'erreur systématique**  $\epsilon_s$  est la moyenne qui résulteraient d'un nombre **infini** de mesurages du même mesurande, effectués dans des conditions de répétabilité, **moins** la valeur vraie du mesurande. En général, et à moins que l'instrument ne puisse être considéré d'une précision parfaite, l'erreur systématique et ses causes ne peuvent être connues qu'en partie. Les effets des erreurs systématiques, quand ils ne peuvent pas être corrigés, sont évalués d'après l'expérience acquise ou d'après d'autres informations.

**L'erreur aléatoire**  $\epsilon_a$  est définie comme le résultat d'un **seul** mesurage moins la **moyenne** d'un nombre infini de mesurages, effectués dans des conditions de répétabilité absolue. Comme on ne peut faire qu'un nombre limité (fini) de mesurages, il n'est pas

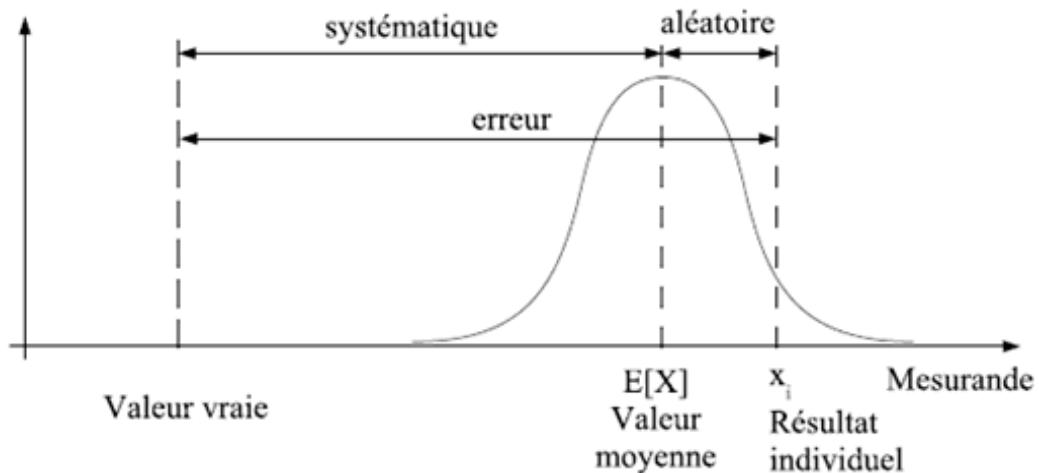


FIGURE A.14 – Erreurs systématiques et aléatoires.

possible de déterminer avec une précision arbitrairement petite la moyenne des mesurages, et de fait, l'erreur aléatoire est elle-même sujette à une incertitude... L'amplitude des **erreurs aléatoires** peuvent cependant être évaluées à partir de la statistique des résultats de séries de mesurages (voir cours *Analyse de données en sciences expérimentales*).

A ces deux erreurs peuvent s'ajouter les **erreurs grossières**, dues à des conditions anormales ou à des fautes techniques, et qui se manifesteront généralement par des valeurs mesurées considérablement différentes de toutes les autres valeurs.

## A.14.2 Traitement des erreurs systématiques

### Erreurs systématiques connues

Les erreurs systématiques connues d'une mesure sont des grandeurs pouvant être déterminées tant du point de leur intensité que de leur signe. Les normes (ex. DIN1319) fournissent d'autres significations telles que : erreurs systématiques avec signe connu, erreurs systématiques pures, erreurs corrigibles.

Un résultat peut être corrigé des erreurs systématiques connues. Lorsque la correction a été effectuée, les erreurs systématiques connues ne font plus partie de l'indication d'incertitude de mesure. Exemples d'erreurs systématiques connues :

- Une calibre-étalon plus longue de  $0.7 \mu\text{m}$  que la valeur nominale indiquée ;
- Une mesure de longueur effectuée à une température de  $25^\circ\text{C}$  au lieu de la température de référence de  $20^\circ\text{C}$ , produisant une erreur systématique à la suite de la dilatation thermique de l'objet ;
- Un palmer qui possède des touches de palpation présentant une usure mesurable ;
- Le tachymètre d'une voiture qui présente une indication de  $5 \text{ km/h}$  trop élevée

dans une certaine plage ;

- Un voltmètre dont on a vérifié qu'il possède un facteur d'amplification erroné ou indique une valeur trop élevée de 0.1 V dans toutes ses mesures.

### Erreurs systématiques inconnues

Il existe aussi des erreurs systématiques inconnues qui sont généralement dues à des imprécisions des instruments : celles-ci sont normalement définies en termes de valeurs (ou tolérances) maximums, souvent avec le signe  $\pm$ . Il se peut que ces erreurs soient constantes dans une série de mesures avec un équipement particulier, mais on ne connaît ni leur valeur ni leur signe. On définit souvent les erreurs systématiques inconnues comme des **erreurs de tolérance**.

Les méthodes pour prendre en compte les erreurs systématiques inconnues dans un calcul global d'incertitude font l'objet d'études et de controverses depuis près de 200 ans, et le sujet reste controversé encore aujourd'hui.

Une approche fréquemment utilisée est la méthode *ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM)*. L'idée de la méthode GUM est de "transformer" les erreurs systématiques inconnues en erreurs aléatoires, en postulant une distribution statistique ad hoc, généralement rectangulaire.

### A.14.3 Traitement des erreurs aléatoires

On distingue en métrologie deux types d'erreurs aléatoires<sup>6</sup> :

**Type A** Les erreurs aléatoires dont la valeur peut être estimée par des méthodes statistiques ;

**Type B** Les erreurs systématiques inconnues "converties" en erreurs pseudo-aléatoires et qui demandent pour leur évaluation la prise en compte additionnelle d'aspects non-statistiques tels que les caractéristiques et tolérances techniques de l'instrument, la précision et fiabilité de l'étalonnage, l'expérience de l'opérateur, etc..

#### Erreurs aléatoires de type A - évaluées par des méthodes statistiques

Ces erreurs aléatoires sont en général dues à des fluctuations des conditions environnementales (au sens large, ce qui inclut l'opérateur et l'instrument) au cours de la mesure. Ces erreurs sont par conséquent inconnues, tant du point de vue de leur intensité que de leur signe. Lors de mesures répétées au cours d'une série, on trouve que

1. les erreurs aléatoires fluctuent de manière imprévisible par rapport à une valeur moyenne ;

---

6. La dénomination type A ou B se réfère au *ISO Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement - la méthode GUM*

## 2. l'incertitude sur la moyenne diminue avec le nombre de mesures.

On qualifie ces erreurs aléatoires, qui ont souvent une distribution normale<sup>7</sup>, par leur écart-type.

Exemples d'erreurs aléatoires de type A :

- Bruit d'instruments électroniques (amplificateurs) produisant des fluctuations du signal transmis.
- Influence de vibrations mécaniques sur l'instrument de mesure.
- Jeux des roulements ainsi que des flexions d'arbres de dispositifs mécaniques.
- Jeux d'articulations de palpeurs.
- Erreurs de lecture des graduations d'un microscope en raison d'une netteté insuffisante.
- Erreurs de positionnement d'un palpeur sur l'objet à mesurer au cours d'une série de mesures.
- Fluctuation de la température ambiante à la suite d'un défaut de régulation thermostatique ou par ouverture et fermeture répétée d'une porte du local de mesure. Une fluctuation de la température de l'objet à mesurer peut également intervenir à la suite d'un contact avec la main de l'opérateur.
- Influence de la fluctuation aléatoire du champ électrique et magnétique sur l'indicateur d'instruments de mesure électriques.

## Erreurs pseudo-aléatoires de type B - évaluées par des méthodes non statistiques

Parmi de telles erreurs se trouvent, typiquement, les tolérances des instruments de mesure. Leur amplitude ainsi que leur signe au moment d'une mesure déterminée sont inconnus. Toutefois leur présence ainsi que l'intensité maximale (tolérance) est connue.

Dans le cadre de mesures répétées dans une série de mesures, il se peut que ces erreurs systématiques inconnues aient toujours la même valeur et le même signe. Le problème est que cette valeur ainsi que ce signe sont inconnus : on ne connaît en général que la valeur maximale.

Exemples d'erreurs de ce type :

- La résolution d'un affichage numérique ;
- Un palmer qui possède une tolérance connue de  $0.3 \mu\text{m}$ . On ne sait cependant pas si l'erreur est de  $-0.3 \mu\text{m}$  ou  $+0.3 \mu\text{m}$  ;
- Le cas où, lors d'une mesure de longueur, la température de l'objet n'est pas mesurée. On sait cependant qu'au cours des mesures, la température se trouvait dans la tolérance de  $\pm 1^\circ\text{C}$  par rapport à la température de référence de  $20^\circ\text{C}$  ;

---

7. voir le cours " Analyse de données en sciences expérimentales "

- Une jauge qui possède une grandeur nominale de 30.000 mm et une indication de tolérance de  $\pm 1\mu\text{m}$ .

On remarquera que les erreurs de type B se distinguent des erreurs de type A par le fait qu'elles ne peuvent normalement pas être diminuées en augmentant le nombre de mesures effectuées.

Les erreurs de ce type peuvent être déterminées ou estimées de plusieurs manières, selon le cas :

- A partir des caractéristiques de l'instrument donnée par le fabricant. Par exemple, si d'après ce dernier, la linéarité d'un voltmètre est de 0.1% de la gamme de mesure de 300 V, il en résulte une erreur systématique inconnue de  $\pm 0.3$  V, à laquelle on associera une distribution rectangulaire<sup>8</sup> ;
- Comparaison avec un instrument de mesure au moins dix fois plus précis ;
- Calcul des tolérances à partir des tolérances mécaniques et des relations géométriques de l'instrument de mesure, par exemple en cas de dilatation thermique.

#### A.14.4 Traitement des erreurs grossières

Après chaque série de mesures, il faut détecter et éliminer les erreurs grossières. L'origine de ces dernières doit aussitôt être élucidée de manière à ce que cette situation ne se reproduise plus au cours des séries de mesures suivantes. Si elles ne sont pas éliminées elles peuvent influencer considérablement la valeur moyenne et l'écart-type d'une série de mesures.

Quelques exemples d'erreurs grossières :

- Les premières valeurs d'une série de mesures peuvent être erronées si l'appareil de mesure ne fournit des valeurs fiables qu'après un certain temps d'chauffement ;
- Fausse lecture d'une mesure, par exemple par une erreur de virgule ou du facteur x10, x100 affiché ;
- Les éléments d'une chaîne de mesure ne sont pas correctement adaptés en impédance ;
- Tension d'alimentation fausse ou fluctuante ;
- Choc contre l'instrument de mesure au cours du mesurage ;
- L'appareil utilisé est défectueux en raison d'une chute antérieure ;
- Mauvaise manipulation de l'appareil en raison de la méconnaissance du mode d'emploi de ce dernier.

---

8. voir le cours " Analyse de données en sciences expérimentales "