СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{2m} \cdot x_m & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{3m} \cdot x_m & = & b_3 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & ... & + & a_{mm} \cdot x_m & = & b_m \end{cases}, \tag{1}$$

где $x_1, x_2, ..., x_m$ – неизвестные, которые необходимо определить; $\{a_{ij}\}$ и $b_1, b_2, ..., b_m$ – известные числовые коэффициенты левой и правой частей системы уравнений, соответственно.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (1) представляет совокупность m действительных или мнимых чисел $\{s_1, s_2, ..., s_m\}$, таких что их соответствующая подстановка вместо $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ в систему обращает все её уравнения в тождества:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot s_1 & + & a_{12} \cdot s_2 & + & ... & + & a_{1m} \cdot s_m & \equiv & b_1 \\ a_{21} \cdot s_1 & + & a_{22} \cdot s_2 & + & ... & + & a_{2m} \cdot s_m & \equiv & b_2 \\ a_{31} \cdot s_1 & + & a_{32} \cdot s_2 & + & ... & + & a_{3m} \cdot s_m & \equiv & b_3 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} \cdot s_1 & + & a_{m2} \cdot s_2 & + & ... & + & a_{mm} \cdot s_m & \equiv & b_m \end{cases},$$

Система линейных алгебраических уравнений (1) может быть представлена в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{2}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица $m \times m$, $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{b}$ – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности $1 \times m$, правых частей системы уравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера–Капелли устанавливает необходимое и достаточное условие совместности системы линейных алгебраических уравнений посредством свойств матричных представлений: система совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы, полученной путем добавления столбца правых частей $\boldsymbol{b}$ матрице системы $\mathbf{A}$:

$$(\mathbf{A}\,|\,\boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array}\right) \tag{3}$$

Преимущество расширенной матрицы заключается в возможности выполнения тех же операций с вектором правых частей системы уравнений, что и со строками матрицы.

Предполагается, что определитель матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, так что решение $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^{\mathrm{T}}$ существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы m способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка $m!$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – $O(m^3)$ действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы $\mathbf{A}$ ($m \approx 10^2 \dots 10^5$), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных x_i из системы линейных уравнений (3). Например, предположим, что $a_{11} \neq 0$, тогда разделим первое уравнение системы на a_{11}, и в результате получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array}\right),$$

где c_{1j} и y_1 – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на a_{i1} и вычтем полученное уравнение из каждого i-го уравнения системы $i = 2, 3, \dots, m$. В результате получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & a_{22} - a_{21} \cdot c_{12} & \cdots & a_{2m} - a_{21} \cdot c_{1m} & b_2 - a_{21} \cdot y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} - a_{m1} \cdot c_{12} & \cdots & a_{mm} - a_{m1} \cdot c_{1m} & b_m - a_{m1} \cdot y_1 \end{array}\right).$$

Запишем полученную матрицу в более компактном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right),$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - a_{i1} \cdot c_{1j}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - a_{i1} \cdot y_1), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то в модифицированной системе аналогично можно исключить неизвестное x_2. Для этого можно разделить второе уравнение системы на коэффициент при второй неизвестной $a_{22}^{(1)}$, и в результате получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array}\right),$$

где c_{2j} и y_2 – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на $a_{i2}^{(1)}$ и вычтем полученное уравнение из каждого i-го уравнения системы $i = 3, 4, \dots, m$. В результате расширенная матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot c_{2m} & b_m^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot y_2 \end{array}\right)$$

или в более компактном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array}\right)$$

где $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot c_{2j}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot y_2), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные $x_3, x_4, \dots, x_m$, исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_m \end{array}\right) \tag{4}$$

1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку расширенная матрица системы (4) имеет треугольный вид, то можно последовательно найти все неизвестные $x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1$:

$$\begin{cases} x_m & = & y_m \\ x_{m-1} & = & y_{m-1} & - & c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} & = & y_{m-2} & - & c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} & - & c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \ldots\ldots & = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 & = & y_1 & - & \sum\limits_{j=2}^{m} c_{1j} \cdot x_j \end{cases}$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \cdots, 1), \quad x_m = y_m$$

1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы **A** равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы **A** отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если $\det \mathbf{A} \neq 0$, то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Представим систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде и запишем расширенную матрицу этой системы, полученную путем добавления к матрице системы столбца правой части уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right)$$

Прямой ход метода Гаусса.

1) Разделим каждую строку матрицы на значение её элемента в первом столбце, т.е. первую строку делим на 2, вторую на 4, третью на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ \mathbf{1} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ \mathbf{1} & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ \mathbf{1} & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array}\right)$$

Вычитаем из второй и третьей строк матрицы её первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ \mathbf{0} & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array}\right)$$

2) Разделим вторую строку матрицы на $-\frac{1}{4}$, третью строку на $-\frac{7}{6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & -4 & -11 \\ 0 & \mathbf{1} & -1 & -2 \end{array}\right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 & 9 \end{array}\right)$$

3) Разделим третью строку матрицы на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array}\right)$$

Обратный ход метода Гаусса.

Последовательно определяем неизвестные в обратном порядке их следования $x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$:

1) Из третьего уравнения системы (третья строка матрицы) определяем неизвестное x_3:

$$x_3 = 3$$

2) Из второго уравнения системы (вторая строка матрицы) определяем неизвестное x_2:

$$x_2 - 4\,x_3 = -11 \;\rightarrow\; x_2 = 4\,x_3 - 11$$
$$x_2 = 4 \cdot 3 - 11 = 1$$

3) Из первого уравнения системы (первая строка матрицы) определяем неиз-

вестное x_1:

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{10}{2} \ \to \ x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 5$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = 2$$

Таким образом, найдено решение системы:

$$\mathring{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathring{\boldsymbol{x}} = (2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$$

Проведём *проверку решения* системы уравнений методом прямой подстановки найденного вектора неизвестных $\mathring{\boldsymbol{x}} = (2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$ в исходную систему уравнений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathring{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

После умножения расширенной матрицы системы уравнений на вектор найденного решения получим тождество:

$$\left(\begin{array}{c|c} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 22 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 10 & 10 \\ 31 & 31 \\ 22 & 22 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

1) Выбираем максимальный по модулю элемент в матрице (главный элемент) во второй строке, третьем столбце (выделен красным цветом):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \color{red}{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на 1, вторую строку на 6, а третью строку на 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \mathbf{1} & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \mathbf{1} & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \mathbf{1} & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \mathbf{1} & \frac{22}{5} \end{array}\right)$$

Вычитаем из первой и третьей строки вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & \mathbf{0} & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & \mathbf{0} & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & \mathbf{0} & -\frac{23}{30} \end{array}\right)$$

2) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (вторую строку) и выбираем новый главный элемент матрицы (первая строка, второй столбец):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array}\right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на $\frac{13}{6}$, а третью строку на $-\frac{19}{30}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & \mathbf{1} & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & \mathbf{1} & 0 & \frac{23}{19} \end{array}\right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & \mathbf{0} & 0 & -\frac{252}{247} \end{array}\right)$$

3) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (первую)

и выбираем новый главный элемент матрицы (третья строка, первый столбец):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array}\right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. третью строку делим на $-\frac{126}{247}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Обратный ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

Определим неизвестные из уравнений системы в обратном порядке следования номеров столбцов главных элементов, т.е. $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$:

1) Из третьего уравнения системы определим неизвестное x_1:

$$x_1 = 2$$

2) Из первого уравнения системы определим неизвестное x_2:

$$\frac{8}{13}x_1 + x_2 = \frac{29}{13} \rightarrow x_2 = -\frac{8}{13}x_1 + \frac{29}{13}$$

$$x_2 = -\frac{8}{13} \cdot 2 + \frac{29}{13} = 1$$

3) Из второго уравнения системы определим неизвестное x_3:

$$\frac{4}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + x_3 = \frac{31}{6} \rightarrow x_3 = -\frac{4}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{31}{6}$$

$$x_3 = -\frac{4}{6} \cdot 2 - \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{31}{6} = 3$$

Таким образом, найдено решение системы линейных уравнений:

$$\mathring{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathring{\boldsymbol{x}} = (2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.