Л. М. Дегтярев, А. П. Фаворский, Потоковый вариант метода прогонки, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968, том 8, номер 3, 679–684

УДК 518:517.91/.94

ПОТОКОВЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ПРОГОНКИ

Л. М. ДЕГТЯРЕВ, А. П. ФАВОРСКИЙ

(Москва)

В заметке рассматривается «потоковый» вариант метода прогонки, применимый для решения тепловых задач с большим коэффициентом теплопроводности (допускается наличие изотермических участков, где теплопроводность среды бесконечно велика).

Возникающие при этом трудности могут оказаться характерными для других задач, например для задачи о диффузии магнитного поля в среде с конечной электропроводностью, являющейся аналогом теплового сопротивления и которая на отдельных интервалах может быть мала или обращается в нуль.

1. Стационарные процессы различной физической природы, например процессы теплопроводности, диффузии магнитного поля, описываются в одномерном случае уравнением

$$\left(\frac{u'}{\sigma}\right)' - qu = f, \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$q(x) \geqslant 0 \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\varkappa^{(1)}u = \lambda^{(1)}u' + \nu^{(1)} \text{ при } x = 0, \tag{3}$$

$$\varkappa^{(2)}(u) = -\lambda^{(2)}u' + \nu^{(2)} \text{ при } x = 1, \tag{4}$$

$$\varkappa^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad \lambda^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad \alpha = 1{,}2. \tag{5}$$

Для численного решения (1) обычно пользуются однородными разностными схемами [1], которые приводят к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Получающаяся система решается методом прогонки [2–4], который применим лишь в случае

$$\sigma(x) \geqslant \delta > 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{6}$$

Если внутри рассматриваемой области имеются изотермические участки, где коэффициент теплопроводности $k = 1/\sigma$ обращается в бесконечность, т. е.

$$\sigma(x) \geqslant 0 \text{ при } 0 < x < 1, \tag{7}$$

то в уравнении (1) появляется особенность. При этом поток

$$\psi = u'/\sigma \tag{8}$$

остается конечным и непрерывным во всей области $0 < x < 1$. Это позволяет рассматривать его как зависимую переменную и с помощью метода факторизации получить «потоковый» вариант метода прогонки, применимый в общем случае (7) для задачи (1) — (5).

Аналогично получаются формулы прогонки для трехточечного разностного уравнения с краевыми условиями общего вида.

Потоковый вариант метода прогонки позволяет, наряду с решением исходной задачи, находить поток ψ, величина которого в ряде случаев представляет самостоятельный интерес.

Метод факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений основан на идее, предложенной в [5]; при выводе формул для разностного уравнения использован методический прием, принадлежащий А. А. Самарскому [4].

2. Рассмотрим первую и третью краевые задачи (1)—(5), предполагая, что

$$\varkappa^{(\alpha)} > 0, \quad \lambda^{(\alpha)} \geqslant 0, \quad \alpha = 1{,}2. \tag{9}$$

Факторизуем дифференциальный оператор исходного уравнения, т. е. представим его в виде произведения двух операторов:

$$\left(D\left(\frac{1}{\sigma}D\right)-qE\right)u=(\varkappa D-qE)\left(E-\frac{\lambda D}{\sigma}\right)u,$$

или, с помощью ранее введенного потока ψ,

$$\left(D\left(\frac{1}{\sigma}D\right)-qE\right)u=(\varkappa D-qE)(u-\lambda\psi). \tag{10}$$

Здесь

$$D=d/dx, \qquad Eu=u; \tag{11}$$

$\lambda(x)$, $\varkappa(x)$ — неизвестные функции, подлежащие определению. Требуя, чтобы (10) выполнялось тождественно, получим для $\lambda(x)$ уравнение

$$\lambda'=\sigma-q\lambda^2. \tag{12}$$

Функция

$$\nu=u-\lambda\psi \tag{13}$$

удовлетворяет, согласно (1) и (10), уравнению

$$\nu'=-\lambda(q\nu+f). \tag{14}$$

Воспользовавшись (13) совместно с уравнением (1), для потока ψ получаем уравнение

$$\psi'=(\lambda\psi+\nu)q+f. \tag{15}$$

Решим последовательно задачи Коши для уравнений (12) и (14) с начальными условиями

$$\lambda(0)=\frac{\lambda^{(1)}}{\varkappa^{(1)}}\sigma(0), \tag{16}$$

$$\nu(0)=\frac{\nu^{(1)}}{\varkappa^{(1)}} \tag{17}$$

и задачу Коши для уравнения (15) с начальным условием

$$\psi(1)=\frac{\nu^{(2)}-\varkappa^{(2)}\nu(1)}{\lambda(1)\varkappa^{(2)}+\sigma(1)\lambda^{(2)}}. \tag{18}$$

Зная ψ, из (13) находим решение исходной задачи (1) — (4), (6), (9)

$$u=\nu+\lambda\psi. \tag{19}$$

3. Рассмотрим вторую краевую задачу

$$\varkappa^{(\alpha)}=0, \qquad \psi(0)=\nu^{(1)}, \qquad \psi(1)=\nu^{(2)}, \qquad \alpha=1,2. \tag{20}$$

В этом случае факторизацию дифференциального оператора исходного уравнения проведем следующим образом:

$$\left(D\left(\frac{1}{\sigma}D\right)-qE\right)u=(D+\varkappa E)\left(\frac{D}{\sigma}-\lambda E\right)u,$$

или, используя поток ψ,

$$\left(D\left(\frac{1}{\sigma}D\right)-qE\right)u=(D+\varkappa E)(\psi-\lambda u). \tag{10'}$$

Как и раньше, требуя тождественного выполнения (10′) и вводя функцию

$$\nu = \psi - \lambda u, \tag{13′}$$

для λ и ν получаем уравнения

$$\lambda' = q - \sigma\lambda^2, \tag{12′}$$

$$\nu' = -\sigma\lambda\nu + f. \tag{14′}$$

В отличие от п.2, из (12′) получим уравнение для u:

$$u' = \sigma(\lambda u + \nu), \tag{15′}$$

поскольку уравнение для ψ содержало бы особенность при $\sigma = 0$. Далее, по аналогии с п.1 будем решать задачи Коши для уравнений (12′) и (14′) с начальными данными

$$\lambda(0) = 0, \tag{16′}$$

$$\nu(0) = \nu^{(1)}, \tag{17′}$$

а затем решим задачу Коши для уравнения (15′) с начальным условием

$$u(1) = \frac{\nu^{(2)} - \nu(1)}{\lambda(1)}.$$

Анализ интегральных кривых уравнений (12), (14), (15), (12′), (14′), (15′) показывает, что их решения в указанных предположениях (5) устойчивы в том смысле, что решения соответствующих им однородных уравнений стремятся к нулю и, следовательно, случайно допущенная ошибка затухает.

4. Рассмотрим трехточечное разностное уравнение

$$A_i w_i - B_i w_{i+1} - C_i y_i = -F_i, \tag{21}$$

$$\dot{w}_{i+1} = -\frac{y_{i+1} - y_i}{\sigma_{i+1}}. \tag{22}$$

Без ограничения общности можно переписать (21) в виде

$$\tilde{A}_i y_{i-1} + \tilde{B}_i y_{i+1} - \tilde{C}_i y_i = -F_i,$$

где

$$\tilde{A}_i = \frac{A_i}{\sigma_i}, \quad \tilde{B}_i = \frac{B_i}{\sigma_{i+1}}, \quad \tilde{C}_i = C_i + \frac{A_i}{\sigma_i} + \frac{B_i}{\sigma_{i+1}}.$$

Пусть краевые условия для уравнения (21) имеют вид

$$y_0 = -\bar{\lambda}^{(1)} w_0 + \bar{\nu}^{(1)}, \tag{23}$$

$$y_N = \bar{\lambda}^{(2)} w_N + \bar{\nu}^{(2)}, \tag{24}$$

$$\bar{\lambda}^{(\alpha)} \geqslant 0, \qquad \alpha = 1,2. \tag{25}$$

Аналогично п.1 выполним факторизацию разностного уравнения (21):

$$A_i w_i - B_i w_{i+i} - C_i y_i + F_i = (\alpha_i \Delta - C_i E)(y_i + \lambda w_i) + F_i, \tag{26}$$

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Выбирая неизвестные коэффициенты α_i, λ_i так, чтобы (26) выполнялось тождественно, получим

$$A_i = -\lambda_i(\alpha_i + C_i), \qquad B_i = \alpha_i(\sigma_{i+1} - \lambda_{i+1}). \tag{27}$$

Исключив из (27) α_i, β_i, получим для λ_i рекуррентную формулу

$$\lambda_{i+1} = \frac{B_i\lambda_i}{A_i + \lambda_i C_i} + \sigma_{i+1}. \tag{28}$$

Введем далее

$$\nu_i = y_i + \lambda_i w_i, \tag{29}$$

тогда из (26) следует

$$(\alpha_i\Delta - C_i E)\nu_i = -F_i, \tag{30}$$

откуда находим рекуррентную формулу для ν_i:

$$\nu_{i+1} = \frac{A_i\nu_i + \lambda_i F_i}{A_i + \lambda_i C_i}. \tag{31}$$

Используя левое краевое условие (23), получим

$$\lambda_0 = \bar{\lambda}^{(1)}, \qquad \nu_0 = \bar{\nu}^{(1)} \tag{32}$$

и затем из (28) и (31) найдем λ_i и ν_i. Из равенства (29) можно было бы получить рекуррентную формулу для y_i, однако она будет обладать особенностью при $\sigma_i = 0$. Поэтому получим сначала w_i по рекуррентной формуле

$$w_i = \frac{B_i w_{i+1} + C_i\nu_i - F_i}{A_i + \lambda_i C_i}, \tag{33}$$

которая следует из (21) и (29). Краевое значение w_N определим из (24) и (29):

$$w_N = \frac{\nu_N - \bar{\nu}^{(2)}}{\lambda_N + \bar{\lambda}^{(2)}}. \tag{34}$$

Наконец, зная w_i, получим решение y_i исходной задачи (21), (25) по формуле

$$y_i = \nu_i - \lambda_i w_i. \tag{35}$$

5. Рассмотрим вторую краевую задачу для уравнения (21):

$$w_0 = \bar{\nu}^{(1)}, \tag{23'}$$

$$w_N = \bar{\nu}^{(2)}. \tag{24'}$$

Аналогично п.3 проведем факторизацию разностного уравнения (21):

$$A_i w_i - B_i w_{i+1} - C_i y_i + F_i = (\delta_i\nabla - \alpha_i E)(w_{i+1} + \lambda_i y_{i+1}) + F_i, \tag{26'}$$

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}, \tag{27'}$$

откуда следует рекуррентная формула для λ_i

$$\lambda_{i+1} = \frac{A_i\lambda_i + C_i}{B_i + \sigma_{i+1}(C_i + \lambda_i A_i)}. \tag{28'}$$

Введем, как и ранее,

$$\nu_i = w_i + \lambda_i y_i, \tag{29'}$$

тогда из (27') получим

$$\nu_{i+1} = \frac{A_i\nu_i + F_i}{B_i + \sigma_{i+1}(C_i + A_i\lambda_i)}. \tag{31'}$$

Левое краевое условие (24') дает значения

$$\lambda_0 = 0, \qquad \nu_0 = \bar{\nu}^{(1)}, \tag{32'}$$

используя которые, по формулам (28′) и (31′) найдем λ_i и ν_i. Рекуррентная формула

$$y_i = \frac{B_i y_{i+1} + \sigma_{i+1}(A_i\lambda_i + F_i)}{B_i + \sigma_{i+1}(C_i + A_i\lambda_i)} \tag{35′}$$

следует из (29′). Наконец, вычислив

$$y_N = \frac{\nu_N - \overline{\nu}^{(2)}}{\lambda_N},$$

из (35′) находим решение y_i.

Таким образом, численное решение разностных уравнений (21), (22) в случае первой и третьей краевой задачи находится с помощью следующего алгоритма:

$$\overset{(\rightarrow)}{\lambda_{i+1}} = \frac{B_i\lambda_i}{A_i + \lambda_i C_i} + \sigma_{i+1}, \qquad i = 0, \ldots, N-1, \qquad \lambda_0 = \overline{\lambda}^{(1)};$$

$$\overset{(\rightarrow)}{\nu_{i+1}} = \frac{A_i\nu_i + \lambda_i F_i}{A_i + \lambda_i C_i}, \qquad i = 0, \ldots, N-1, \qquad \nu_0 = \overline{\nu}^{(1)};$$

$$\overset{(\leftarrow)}{w_i} = \frac{B_i w_{i+1} + C_i\nu_i - F_i}{A_i + \lambda_i C_i}, \qquad i = N-1, \ldots, 0, \qquad w_N = \frac{\nu_N - \overline{\nu}^{(2)}}{\lambda_N + \overline{\lambda}^{(2)}};$$

$$y_i = \nu_i - \lambda_i w_i, \qquad i = N-1, \ldots, 0.$$

Решение второй краевой задачи для разностных уравнений (21), (22) находится с помощью аналогичного алгоритма по формулам

$$\overset{(\rightarrow)}{\lambda_{i+1}} = \frac{A_i\lambda_i + C_i}{B_i + \sigma_{i+1}(C_i + \lambda_i A_i)}, \qquad i = 0, \ldots, N-1, \qquad \lambda_0 = 0;$$

$$\overset{(\rightarrow)}{\nu_{i+1}} = \frac{A_i\nu_i + F_i}{B_i + \sigma_{i+1}(C_i + \lambda_i A_i)}, \qquad i = 0, \ldots, N-1, \qquad \nu_0 = \overline{\nu}^{(1)};$$

$$\overset{(\leftarrow)}{y_i} = \frac{B_i y_{i+1} + \sigma_{i+1}(A_i y_i + F_i)}{B_i + \sigma_{i+1}(C_i + A_i\lambda_i)}, \qquad i = N-1, \ldots, 0, \qquad y_N = \frac{\nu_N - \overline{\nu}^{(2)}}{\lambda_N};$$

$$w_i = \nu_i - \lambda_i y_i, \qquad i = N-1, \ldots, 0.$$

Стрелки наверху указывают направление счета: $(\rightarrow)$ от i к $i+1$, $(\leftarrow)$ от $i+1$ к i.

Заметим, что для нестационарных задач первый способ факторизации применим и для второй краевой задачи, если пользоваться разностной аппроксимацией граничного условия с точностью $O(h^2)$ [2].

Из структуры рекуррентных формул прогонки (28), (31), (33) в п.3 следует, что они заведомо устойчивы по отношению к случайной ошибке, если

$$A_i \geqslant B_i > 0, \qquad C_i > 0,$$

а из формул прогонки (28′), (31′) и (35′) в п.4 следует их устойчивость при

$$B_i \geqslant A_i > 0, \qquad C_i > 0.$$

В частном случае консервативной схемы $A_i = B_i > 0$, $C_i > 0$ устойчивы оба варианта прогонки.

В заключение авторы пользуются случаем выразить благодарность А. А. Самарскому за полезные указания и советы.

Поступила в редакцию 10.05.1967

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—67.
2. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 1, 25—56.
3. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
4. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
5. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, Гостехиздат Украины, 1939.

УДК 518:517.91/.94

ПРОГОНКА ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н. Н. КАЛИТКИН

(Москва)

Рассмотрим дивергентное разностное уравнение, заданное на сетке $0 \leqslant i \leqslant N$:

$$k_i u_{i-1} - (k_i + k_{i+1} + a_i) u_i + k_{i+1} u_{i+1} = -b_i. \qquad (1)$$

Первое и последнее уравнения этой цепочки уравнений запишем в следующем виде:

$$-(k_0 + k_1 + a_0) u_0 + k_1 u_1 = -b_0; \quad k_N u_{N-1} - (k_N + k_{N+1} + a_N) u_N = -b_N. \qquad (1а)$$

К уравнению (1) сводится ряд задач, например численное решение одномерного параболического уравнения

$$c(u, x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u, x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + f(u, x, t)$$

трехточечными неявными разностными схемами (тогда (1а) соответствует краевым условиям).

Уравнение (1) решается методом прогонки (см., например, [1]):

$$\xi_0 = \eta_0 = 0, \qquad \xi_{i+1} = \frac{k_{i+1}}{k_{i+1} + (1 - \xi_i) k_i + a_i},$$
$$\eta_{i+1} = \frac{k_i \eta_i + b_i}{k_{i+1} + (1 - \xi_i) k_i + a_i}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N. \qquad (2а)$$

$$u_i = \xi_{i+1} u_{i+1} + \eta_{i+1}, \qquad i = N, N-1, \ldots, 1, 0 \qquad (u_{N+1} = 0). \qquad (2б)$$

Расчет по формулам (2а) невозможен при $k = \infty$. Однако в двух важных примерах имеет место именно этот случай. Во-первых, это уравнения диффузии магнитного поля в рамках магнитогидродинамического приближения; в них $k \sim \sigma^{-1}$, где σ — проводимость среды, которая может быть равной нулю. Во-вторых, это нелинейное уравнение теплопроводности; коэффициент теплопроводности формально не бесконечен, но практически может стать больше максимально представимого на ЭВМ числа.

В уравнениях магнитного поля k не обращается в нуль (если не рассматривать экзотический случай сверхпроводников): практически проводимость плазмы не превышает проводимости чистой меди при комнатной температуре. В этом случае удобен потоковый вариант прогонки [2], допускающий $k = \infty$ (но непригодный при $k = 0$).

Для уравнения теплопроводности требуется такая методика, которая позволяет рассчитывать оба предельных случая $k = 0$ и $k = \infty$ (причем первый случай встречается чаще). Поэтому возьмем формулы (2) за исходные.