

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1 Решение нелинейных уравнений . . . . .	3
1.1 Итервальный метод . . . . .	4
1.2 Метод бисекции . . . . .	5
1.3 Метод выделения корней. . . . .	8
1.4 Численное решение нелинейного уравнения методом бисекции . . . . .	9
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	16

## 1 Решение нелинейных уравнений

Пусть задана функция  $f(x)$  действительного переменного и необходимо найти корни уравнения или, что то же самое, нули функции  $f(x)$ :

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

На примере алгебраического многочлена известно, что нули  $f(x)$  могут быть как действительными, так и комплексными числами. Поэтому *более точная* постановка задачи состоит в нахождении корней уравнения, расположенных в заданной области комплексной плоскости. Можно рассматривать также задачу о нахождении действительных корней уравнения, которые расположены в пределах заданного отрезка  $x \in [a, b]$ .

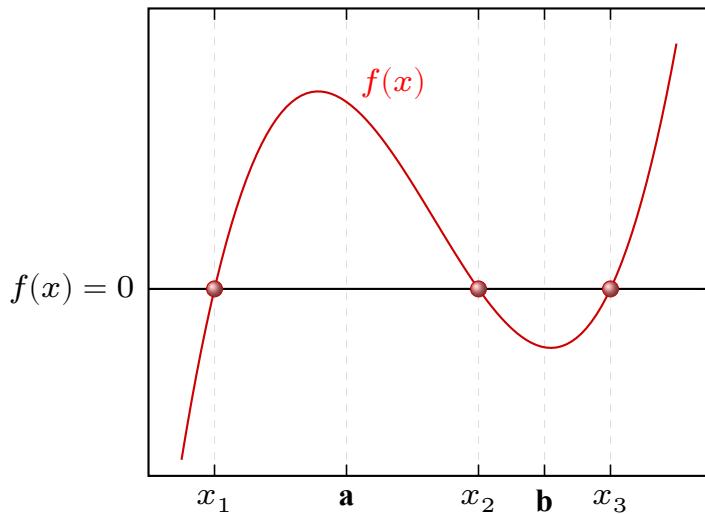


Рисунок 1 – График функции  $y = f(x)$

На рисунке (1) представлены  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  – действительные корни уравнения (1), т.е.  $f(x_1) = 0$ ,  $f(x_2) = 0$ ,  $f(x_3) = 0$

Задача нахождения корней уравнения  $f(x) = 0$  обычно решается в два этапа:

- 1) На первом этапе изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, т. е. выделяются области в комплексной плоскости, содержащие только один корень. Кроме того, изучается вопрос о кратности корней. Тем самым находятся начальные приближения для корней уравнения.
- 2) На втором этапе, используя заданное начальное приближение, строится ите-

рациональный процесс, позволяющий уточнить значение отыскиваемого корня.

Следует отметить, что не существует каких-то общих регулярных приемов решения задачи о расположении корней произвольной функции  $f(x)$ .

Численные методы решения нелинейных уравнений являются, как правило, итерационными методами, которые предполагают задание достаточно близких к искомому решению начальных данных.

## 1.1 Итервальный метод

Итервальный метод поиска корня уравнения  $f(x) = 0$  состоит следующим:

1) Область поиска корня  $[a, b]$  разбивается на заранее заданное количество интервалов  $N$ :

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_i, x_{i+1}] \cup \dots \cup [x_N, b]$$

2) Вычисляется таблица значений функции  $\{f(x_i)\}$  на границах этих интервалов  $\{x_i\}$ .

3) Проводится последовательный перебор таблицы значений функции  $\{f(x_i)\}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

4) Если при некотором  $i$  значения функции  $f(x_i)$  и  $f(x_{i+1})$  имеют разные знаки, то это означает, что на интервале  $x \in (x_i, x_{i+1})$  имеет по крайней мере один действительный корень уравнения  $f(x) = 0$ .

5) В качестве новой, более узкой ( $|x_i, x_{i+1}| < |a, b|$ ), области поиска выбирается отрезок  $(x_i, x_{i+1})$ , т.е. полагают

$$x_i = a, \quad x_{i+1} = b$$

и с помощью аналогичной процедуры (1) процесс поиска корня уравнения  $f(x) = 0$  повторяют до тех пор пока, область поиска не станет меньше заранее заданной величины  $\epsilon$  (погрешности поиска корня уравнения):

$$(b - a) < \epsilon$$

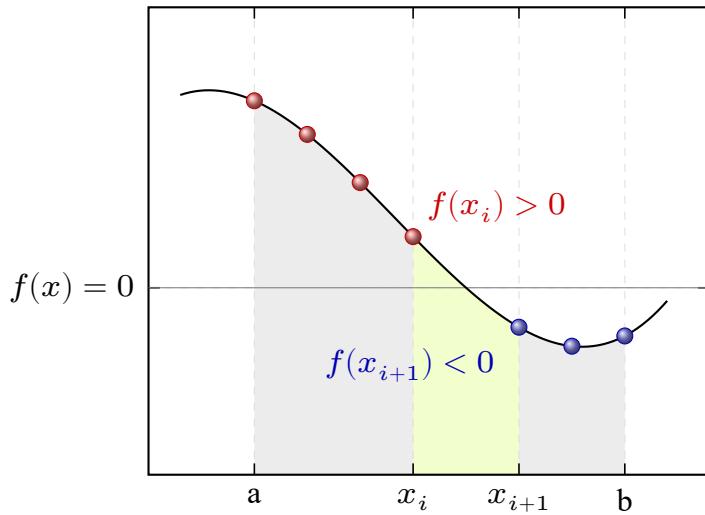


Рисунок 2 – Иллюстрация итервального метода поиска корня уравнения

## 1.2 Метод бисекции

Метод бисекции основан на теореме *Больцано-Коши* (теорема о промежуточном значении): если непрерывная функция  $f(x)$ , определённая на вещественном интервале  $[a, b]$ , принимает два различных значения  $f(a) \neq f(b)$ , тогда существует такое  $c \in [a, b]$ , что эта функция в этой точке принимает промежуточное значение  $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$ .

Следствие теоремы Больцано-Коши (теорема о нуле непрерывной функции): если функция  $f(x)$  непрерывна на некотором отрезке  $[a, b]$  и на концах этого отрезка принимает значения  $f(a)$  и  $f(b)$  противоположных знаков, то существует точка  $x_0$ , в которой значение функции равно нулю  $f(x_0) = 0$ .

Если непрерывная функция *строго монотонна* на отрезке  $[a, b]$ , т.е. для любого  $\forall x \in [a, b]$  выполняется условие  $f'(x) > 0$  либо  $f'(x) < 0$ , то в соответствие со следствием теоремы Больцано-Коши в пределах отрезка  $[a, b]$  существует *единственный* корень уравнения  $f(x) = 0$ .

*Метод бисекции* (деления пополам) является регулярным способом поиска действительного корня уравнения  $f(x) = 0$ , однако для реализации этого метода необходимо *правильно выбрать область поиска*, т.е. начальный отрезок  $[a, b]$  на концах которого функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков  $f(a) \cdot f(b) < 0$  и в пределах этого отрезка строго монотонна  $f'(x) < 0$  либо  $f'(x) > 0$ .

Алгоритм метода деления отрезка пополам (метод бисекции):

1) Область поиска корня уравнения отрезок  $[a, b]$  делится пополам:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

2) Вычисляется значение функции в середине отрезка  $f(c)$ .

3) Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка  $f(c)$  и, например, на левом конце отрезка  $f(a)$ :

- 1) если  $f(a) \cdot f(c) < 0$ , функция  $f(x)$  на концах отрезка  $[a, c]$  принимает значения разных знаков, следовательно, искомый корень уравнения  $f(x) = 0$  находится внутри отрезка  $[a, c]$ , поэтому правый конец отрезка “переносится“ в его середину.
- 2) если  $f(a) \cdot f(c) > 0$ , функция  $f(x)$  на концах отрезка  $[a, c]$  принимает значения одного знака, следовательно, искомый корень уравнения  $f(x) = 0$  находится внутри отрезка  $[c, b]$ , поэтому левый конец отрезка “переносится“ в его середину.

$$\text{sign}(f(a) \cdot f(c)) = \begin{cases} < 0, & b = c \\ > 0, & a = c \end{cases}$$

Таким образом, область поиска корня уравнения  $f(x) = 0$  “сужается наполовину“.

4) Процесс вычислений (1)–(3) повторяется до тех пока, длина вновь полученного интервала  $[a, b]$  станет меньше заранее заданного числа  $\epsilon$  (погрешности поиска корня уравнения):

$$(b - a) < \epsilon$$

В качестве корня уравнения  $x_0$  приближенно принимаются середину последнего полученного интервала  $[a, b]$ .

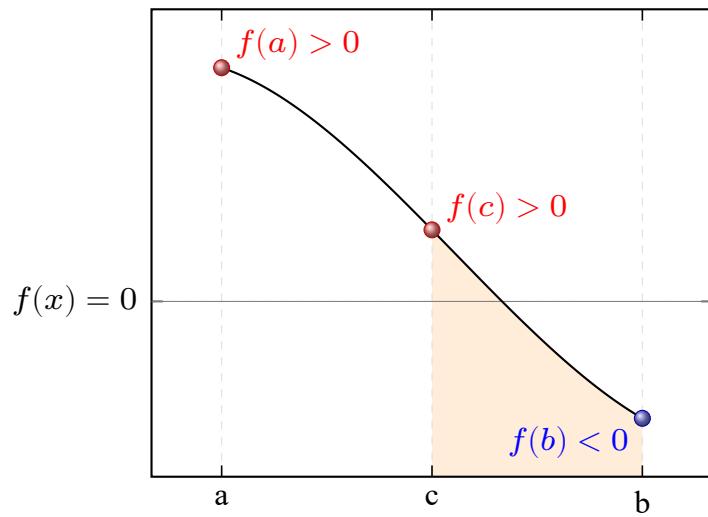


Рисунок 3 – Иллюстрация метода бисекции (деления отрезка пополам):  
 $f(a) \cdot f(c) > 0$ , поэтому новая область поиска корня отрезок  $[c, b]$

Следует отметить, что если условие строгой монотонности для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  не выполняется и на этом отрезке имеется несколько корней, то указанный итерационный процесс сойдется к одному из корней, но *заранее неизвестно, к какому именно.*

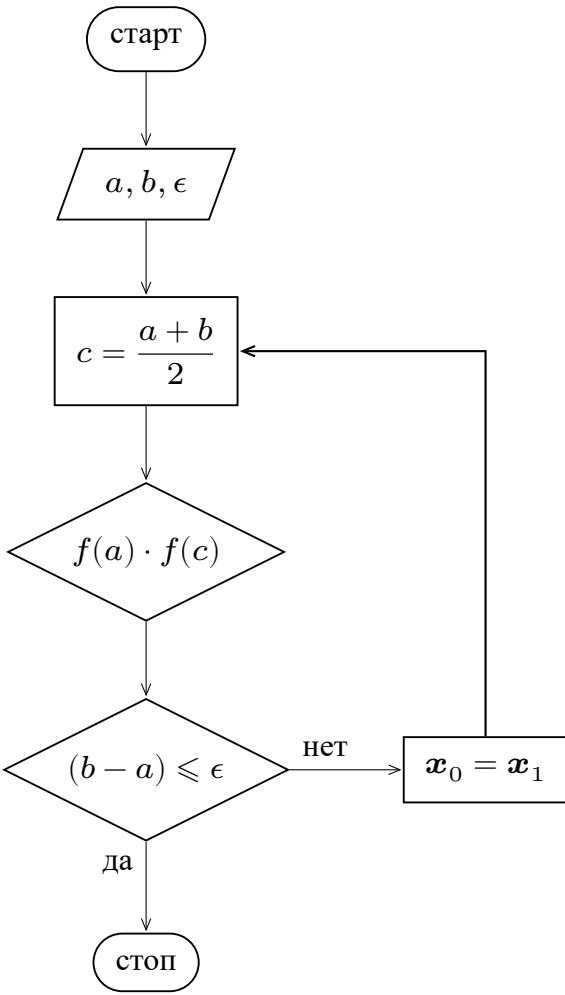


Рисунок 4 – Блок-схема алгоритма нахождения минимума функции  $f(\mathbf{x})$  многих переменных методом градиентного спуска

### 1.3 Метод выделения корней

Один из недостатков интервального метода и метода бисекции является сходимость итерационного процесса к заранее неизвестному корню уравнения  $f(x) = 0$ . Этот недостаток можно устранить удалением уже найденного корня.

Если  $x_1$  простой корень уравнения  $f(x) = 0$  и функция  $f(x)$  непрерывна по Липшицу, то вспомогательная функция

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)}$$

непрерывна, причем все нули функций  $f(x)$  и  $g(x)$  совпадают, за исключением  $x_1$ , так как  $g(x_1) \neq 0$ .

Поэтому найденный корень  $x_1$  можно удалить, т.е. перейти в процессе

поиска корня уравнения  $f(x) = 0$  от функции  $f(x)$  к функции  $g(x)$ . Тогда процесс нахождения остальных корней уравнения сводится к нахождению корней  $g(x) = 0$ .

Когда найден какой-нибудь новый корень  $x_2$  уравнения  $g(x) = 0$ , то этот корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию:

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{(x - x_2)} = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Таким образом, можно последовательно найти все корни исходного уравнения  $f(x) = 0$ .

В любом методе поиска корней уравнения  $f(x)$  окончательные итерации вблизи определяемого корня рекомендуется делать не по функциям типа  $g(x)$ , а по исходной функции  $f(x)$ . Последние итерации, вычисленные по функции  $g(x)$ , используются при этом в качестве нулевого приближения.

#### 1.4 Численное решение нелинейного уравнения методом бисекции

На отрезке  $x \in [-3, 5]$  задана непрерывная функция:

$$f(x) = \tanh(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \frac{1}{2}$$

С помощью метода бисекции найдем первый положительный корень  $x_1 > 0$  нелинейного уравнения  $f(x) = 0$ .

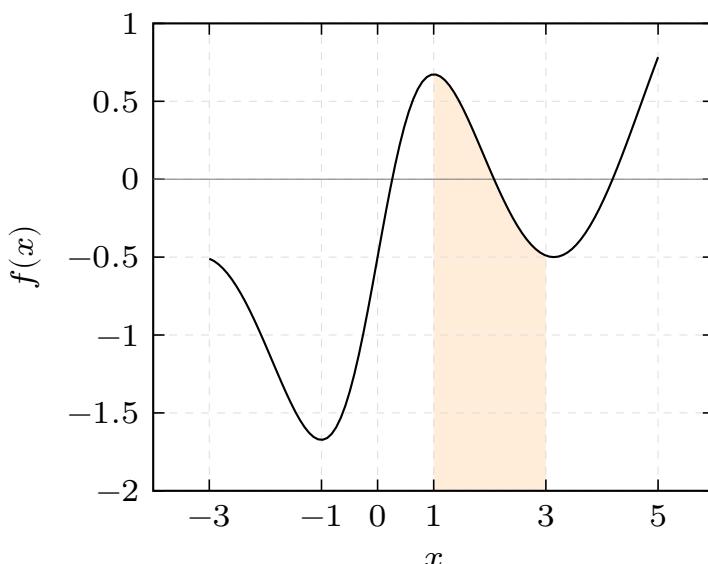


Рисунок 5 – График функции  $f(x) = \tanh(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \frac{1}{2}$

На основе анализа графика функции  $f(x)$  (рисунок 5) выбираем область поиска первого положительного корня уравнения ( $x > 0$ ), на границах которой функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков  $f(a) \cdot f(b) < 0$  и в пределах этого области строго монотонна  $f'(x) < 0$ .

Таким требованиям удовлетворяет отрезок  $x \in [1, 3]$  (выделенная область на графике), так как функция на отрезке монотонна  $f'(x) < 0$  и на концах отрезка принимает значения разных знаков:

$$f(1) = \tanh(1) \cdot (1 + \cos(1)) - \frac{1}{2} \approx 0.67 > 0$$

$$f(3) = \tanh(3) \cdot (1 + \cos(3)) - \frac{1}{2} \approx -0.49 < 0$$

Зададим погрешность поиска корня уравнения  $\varepsilon = 0.1$  и используем метод бисекции для поиска первого положительного корня уравнения:

- 1) Область поиска корня уравнения отрезок  $[1, 3]$  делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка  $f(c)$ :

$$c = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$f(c) = f(2) = \tanh(2) \cdot (1 + \cos(2)) - \frac{1}{2} \approx 0.06285 > 0$$

Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка  $f(c)$  и на левом конце отрезка  $f(a)$ :

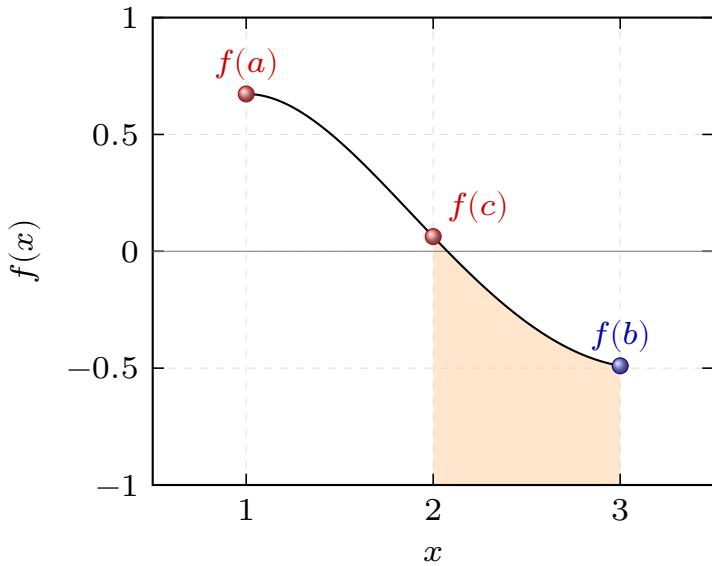
$$f(a) \cdot f(c) = f(1) \cdot f(2) = 0.67 \cdot 0.06285 = 0.0423 > 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка  $[2, 3]$ .

Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 3 - 2 = 1 > \varepsilon = 0.1$$

Так как длина отрезка больше погрешности поиска, то итерационный процесс продолжаем.



- 2) Область поиска корня уравнения отрезок  $[2, 3]$  делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка  $f(c)$ :

$$c = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$f(c) = f(2.5) = \tanh(2.5) \cdot (1 + \cos(2.5)) - \frac{1}{2} \approx -0.3038 < 0$$

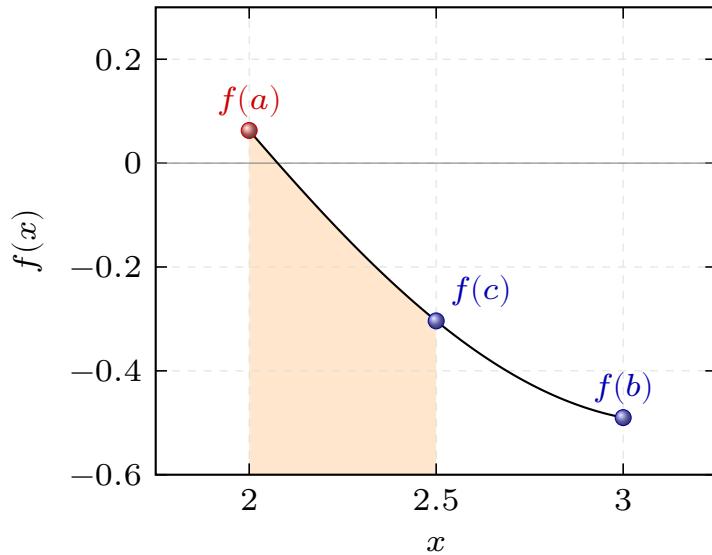
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка  $f(c)$  и на левом конце отрезка  $f(a)$ :

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.5) = 0.6285 \cdot (-0.3038) = -0.019094 < 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка  $[2, 2.5]$ . Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.5 - 2 = 0.5 > \varepsilon = 0.1$$

Так как длина отрезка больше погрешности поиска, то итерационный процесс продолжаем.



- 3) Область поиска корня уравнения отрезок  $[2, 2.5]$  делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка  $f(c)$ :

$$c = \frac{2 + 2.5}{2} = 2.25$$

$$f(c) = f(2.25) = \tanh(2.25) \cdot (1 + \cos(2.25)) - \frac{1}{2} \approx -0.13634 < 0$$

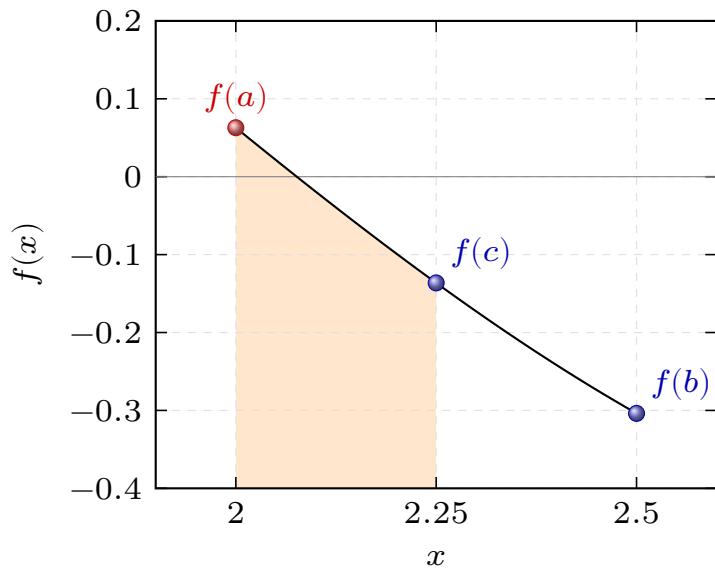
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка  $f(c)$  и на левом конце отрезка  $f(a)$ :

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.25) = 0.6285 \cdot (-0.13634) = -0.00857 < 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка  $[2, 2.25]$ . Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.25 - 2 = 0.25 > \varepsilon = 0.1$$

Длина отрезка меньше погрешности поиска, поэтому итерационный процесс продолжаем.



- 4) Область поиска корня уравнения отрезок  $[2, 2.25]$  делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка  $f(c)$ :

$$c = \frac{2 + 2.25}{2} = 2.125$$

$$f(c) = f(2.125) = \tanh(2.125) \cdot (1 + \cos(2.125)) - \frac{1}{2} \approx -0.03959 < 0$$

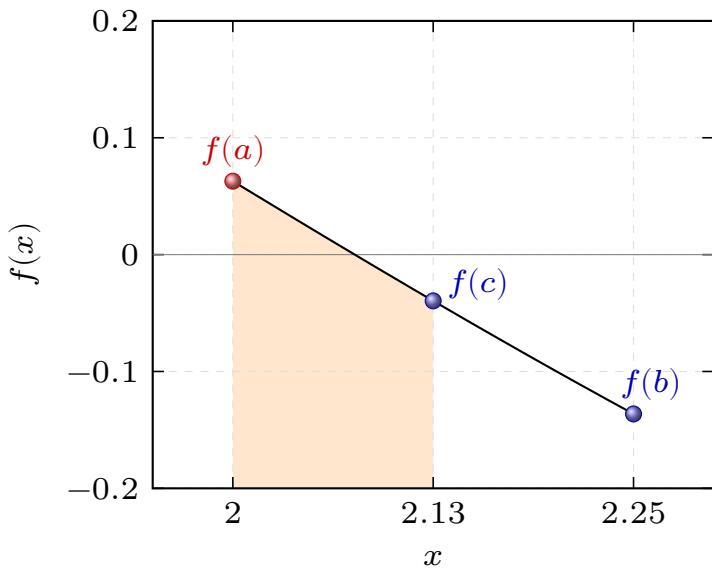
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка  $f(c)$  и на левом конце отрезка  $f(a)$ :

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.125) = 0.6285 \cdot (-0.03959) = -0.002488 < 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка  $[2, 2.125]$ . Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.125 - 2 = 0.125 > \varepsilon = 0.1$$

Длина отрезка меньше погрешности поиска, поэтому итерационный процесс продолжаем.



- 5) Область поиска корня уравнения отрезок  $[2, 2.125]$  делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка  $f(c)$ :

$$c = \frac{2 + 2.125}{2} = 2.0625$$

$$f(c) = f(2.0625) = \tanh(2.0625) \cdot (1 + \cos(2.0625)) - \frac{1}{2} \approx 0.01108 > 0$$

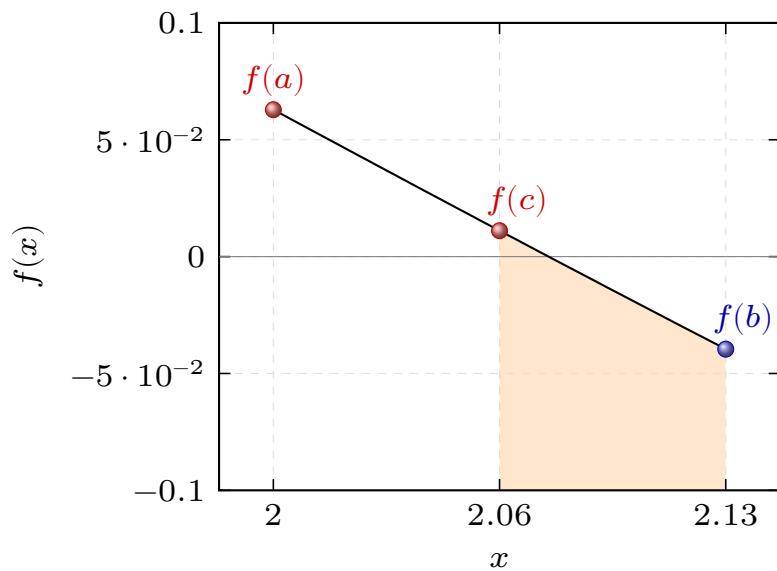
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка  $f(c)$  и на левом конце отрезка  $f(a)$ :

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.0625) = 0.6285 \cdot 0.01108 = 0.0007 > 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка  $[2.0625, 2.125]$ . Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.125 - 2.0625 = 0.0625 < \varepsilon = 0.1$$

Длина отрезка меньше погрешности поиска, поэтому итерационный процесс завершаем.



В качестве первого положительного корня  $x_1$  уравнения  $f(x) = 0$  приближенно выберем середину последнего полученного интервала  $[a, b]$  и для контроля определим значение функции в точке  $f(x_1)$  приближенного корня уравнения:

$$x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{2.0625 + 2.125}{2} = 2.09375$$

$$f(x_1) = f(2.09375) = \tanh(2.09375) \cdot (1 + \cos(2.09375)) - \frac{1}{2} \approx -0.01442$$

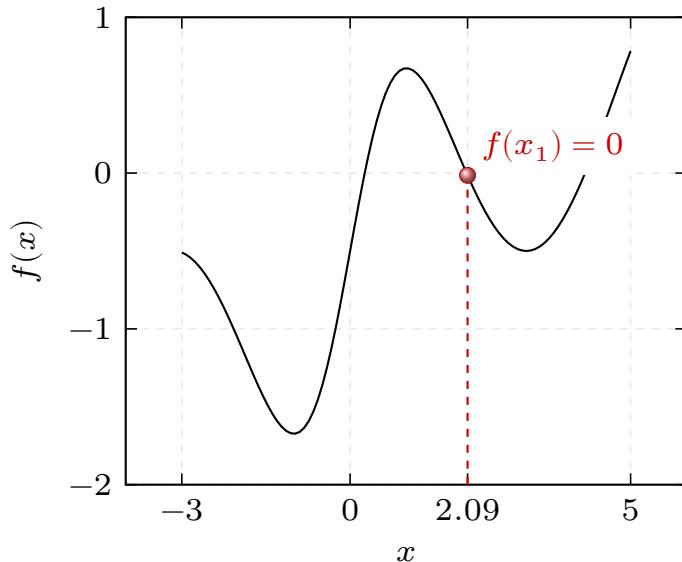


Рисунок 6 – График функции  $f(x)$  (**сплошная линия**) и первый положительный корень  $x_1 = 2.09375$  (маркер) уравнения  $f(x) = 0$

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.
- 7 [List of mathematical symbols by subject](#)