

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений .....	4
1.1 Прямой ход метода Гаусса .....	5
1.2 Обратный ход метода Гаусса .....	7
1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента .....	8
1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений ме- тодом Гаусса .....	8
2 Интерполирование функций .....	11
2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа .....	11
2.2 Пример интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$ .....	13
3 Аппроксимация функция .....	16
3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций .....	16
3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$ .....	18
4 Численное дифференцирование .....	22
4.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично .....	24
5 Численное интегрирование .....	34
5.1 Формула прямоугольников .....	35
5.2 Формула трапеций .....	36
5.3 Формула Симпсона .....	37
5.4 Численное интегрирования функции заданной таблично .....	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	43
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	44

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $m \times m$ ,  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$  – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности  $1 \times m$ :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , так что решение  $\vec{x}$  существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы  $m$  способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка  $m!$  арифметических действий, в то время как метод Гаусса –  $O(m^3)$  действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы  $\mathbf{A}$  ( $m \approx 10^2 \dots 10^5$ ), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{cases}$$

## 1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных  $x_i$  из системы линейных уравнений. Например, предположим, что  $a_{11} \neq 0$ , тогда разделим первое уравнение системы на  $a_{11}$ , и в результате получим:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = b_3, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{cases}$$

где  $c_{1j}$  и  $y_1$  – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на  $a_{i1}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 2, 3, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ (a_{22} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 + \dots + (a_{2m} - c_{1m} \cdot a_{21}) \cdot x_m = b_2 - y_1 \cdot a_{21} \\ (a_{32} - c_{12} \cdot a_{31}) \cdot x_2 + \dots + (a_{3m} - c_{1m} \cdot a_{31}) \cdot x_m = b_3 - y_1 \cdot a_{31} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ (a_{m2} - c_{12} \cdot a_{m1}) \cdot x_2 + \dots + (a_{mm} - c_{1m} \cdot a_{m1}) \cdot x_m = b_m - y_1 \cdot a_{m1} \end{cases}$$

Запишем полученную систему уравнений в более компактном виде:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{cases}$$

где  $a_{ij}^{(1)}$  и  $b_i^{(1)}$  – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное  $x_2$ . Для этого разделим второе уравнение системы на  $a_{22}^{(1)}$ , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где  $c_{2j}$  и  $y_2$  – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на  $a_{i2}^{(1)}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 3, 4, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \dots \quad (a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)}) \cdot x_m = b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)}, \\ \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \dots \quad (a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)}) \cdot x_m = b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{array} \right.$$

или в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \quad \dots + a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = b_3^{(2)}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \dots + a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = b_m^{(2)} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}^{(2)}$  и  $b_i^{(2)}$  – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные  $x_3, x_4, \dots, x_m$ , исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \quad x_3 + \dots + c_{3m} \cdot x_m = y_3 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_m = y_m \end{array} \right.$$

## 1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку матрица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с  $x_m$ , найти все неизвестные  $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = y_m \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \dots = \dots \\ x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{array} \right.$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1), \quad x_m = y_m$$

### 1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}$  равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}$  отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

*Основная идея метода* состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

### 1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Пример численного решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

*Прямой ход метода Гаусса.*

1) Разделим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (2)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

2) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (4) во 2-ом уравнении

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 20$$

и вычтем результат умножения из 2-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

3) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (3) в 3-ем уравнении

$$3x_1 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 15$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

4) Разделим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$  (-1)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

5) Умножим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$   $(-\frac{7}{2})$  в 3-ем уравнении

$$-\frac{7}{2}x_2 + 14x_3 = \frac{77}{2}$$



и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{21}{2}x_3 = -\frac{63}{2} \end{cases}$$

6) Разделим 3-ю строку на коэффициент при  $x_3$  ( $-\frac{21}{2}$ )

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

*Обратный ход метода Гаусса.*

Последовательно определяем неизвестные  $x_3, x_2, x_1$ :

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = -11 + 4x_3 = -11 + 4 \cdot 3 = 1$$

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

*Ответ:* решение системы линейных уравнений:  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ .

Проведём *проверку решения* системы уравнений методом прямой подстановки. Для этого подставим найденный вектор неизвестных  $\vec{x} = (2, 1, 3)$  в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 + 5 \cdot 3 = 22 \end{cases}$$

Проводим арифметические действия и получаем тождества для каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} 4 + 3 + 3 = 10 \\ 8 + 5 + 18 = 31 \\ 6 + 1 + 15 = 22 \end{cases} \implies \begin{cases} 10 = 10 \\ 31 = 31 \\ 22 = 22 \end{cases}$$

## 2 Интерполирование функций

### 2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Пусть на отрезке  $x \in [a, b]$  выбрана сетка  $\{x_i\}$  (здесь  $i = 0, 1, \dots, n$ ), в узлах которой известны значения функции  $y_i = f(x_i)$ . Задача интерполирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен степени  $n$

$$L_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i$$

значения которого в заданных точках  $\{x_i\}$ , совпадают со значениями функции  $\{y_i\}$  в этих точках.

Во всех узлах сетки  $\{x_i\}$  многочлен  $L_n(x)$  должен удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_n(x_0) = y_0 \\ L_n(x_1) = y_1 \\ L_n(x_2) = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ L_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен  $L_n(x)$  в виде линейной комбинации значений функции  $y(x)$  в узлах интерполирования:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 + \dots + c_n(x) \cdot y_n$$

где  $c_0(x), c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  – неизвестные функции.

Из условий интерполирования:

$$\begin{cases} c_0(x_0) \cdot y_0 + c_1(x_0) \cdot y_1 + c_2(x_0) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_0) \cdot y_n = y_0 \\ c_0(x_1) \cdot y_0 + c_1(x_1) \cdot y_1 + c_2(x_1) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_1) \cdot y_n = y_1 \\ c_0(x_2) \cdot y_0 + c_1(x_2) \cdot y_1 + c_2(x_2) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_2) \cdot y_n = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ c_0(x_n) \cdot y_0 + c_1(x_n) \cdot y_1 + c_2(x_n) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_n) \cdot y_n = y_n \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты  $c_i(x)$  можно искать в виде многочленов степени  $n$ :

[illegible]

Определим неизвестные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  из условия для коэффициентов  $c_i(x)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 = \alpha_0 \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n) \\ 1 = \alpha_1 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n) \\ \dots\dots\dots \\ 1 = \alpha_n \cdot (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{array} \right.$$

Таким образом, коэффициенты  $c_i(x)$  интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_0(x) & = & \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot \dots \cdot (x_0-x_n)} \\ c_1(x) & = & \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2) \cdot \dots \cdot (x_1-x_n)} \\ & \dots & \\ c_n(x) & = & \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0) \cdot (x_n-x_1) \cdot \dots \cdot (x_n-x_{n-1})} \end{array} \right.$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{i \neq j}^n (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

## 2.2 Пример интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции)  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), в которых определены значения функции  $y_i = f(x_i)$ :

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

$i$	0	1	2	3
$x_i$	-0.76	-0.09	0.22	0.55
$y_i$	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа  $L_3(x)$  на основе данных об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и значений функции в этих точках  $\{y_i\}$ :

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и извест-

ными значениями интерпретируемой функции в этих узлах  $\{y_i\}$ :

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.76 - (-0.09))(-0.76 - 0.22)(-0.76 - 0.55)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.55)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.55)}{(0.22 - (-0.76))(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.55)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.55 - (-0.76))(0.55 - (-0.09))(0.55 - 0.22)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{0.13} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{0.28} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & (x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot (-0.09) + \\
 & + (x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot 13.84 + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55) \cdot (-3.99) + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22) \cdot 3.47
 \end{aligned}$$

- 4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831 \cdot x + 0.9119 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

- 5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа  $L_3(x)$  (*сплошная линия*).

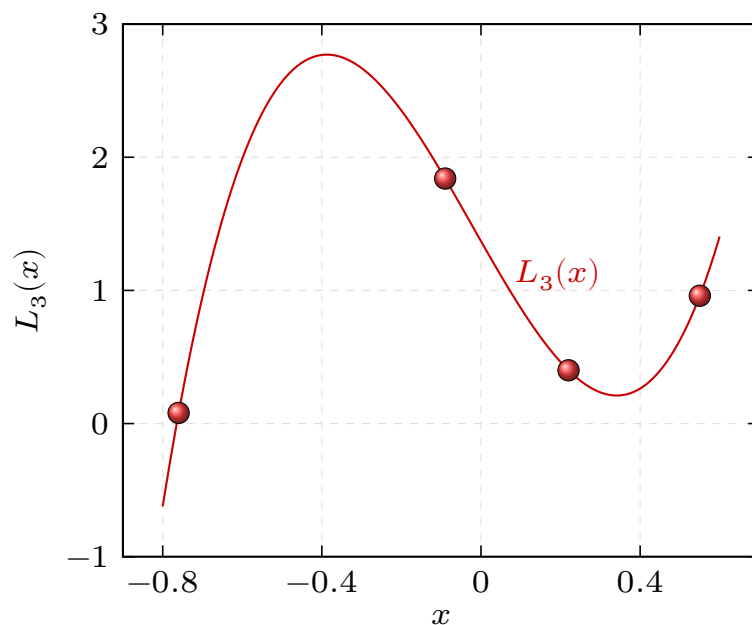


Рисунок 1 – График таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа  $L_3(x)$  (сплошная линия)

### 3 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию  $f(x)$  необходимо заменить обобщенным полиномом  $p_m(x)$  заданного порядка  $m$  так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции  $f(x)$  от обобщенного полинома  $p_m(x)$  на указанном множестве  $\vec{x} = \{x\}$  было наименьшим. При этом полином  $p_m(x)$  в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество  $\vec{x}$  состоит из отдельных точек  $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (узлов), то приближение называется *точечным*. Если  $\vec{x}$  есть отрезок  $x_a < x < x_b$ , то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

#### 3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок  $m$  приближающего полинома  $p_m(x)$  меньше числа узлов аппроксимации  $m < n$ , в которых известно значение функции  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени  $m$  вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения  $\|r\|$  полинома  $p_m(x)$  от известной функции  $y(x)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных  $\|r\| = g(c_0, c_1, \dots, c_m)$ , т.е. коэффициентов полинома  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей  $\|r\| \rightarrow \min$ . Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома  $p_m(x)$ , необ-

ходимо найти *положения минимума функции* многих переменных  $\|r\|$ .

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_1} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$  необходимо решить систему  $m + 1$  уравнений с  $m + 1$  неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \|r\|}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots = \dots = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома  $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$ :

$$\mathbf{A} \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$  и  $\vec{b} = \{b_k\}$  – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Если среди узлов сетки  $\{x_i\}$  нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации  $m < n$ , то определитель системы



не равен нулю  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Следовательно, эта система имеет единственное решение  $\{\dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{c}_2, \dots, \dot{c}_m\}$ , а полином  $p_m(x)$  с такими коэффициентами  $\dot{c}_i$  будет обладать минимальным квадратичным отклонением  $\|r\|_{\min}$ .

### 3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости  $y(x)$ :

Таблица 2 – Таблично заданная функциональная зависимость  $y_i = f(x_i)$

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	−0.76	−0.48	−0.09	0.22	0.55
$y_i$	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию  $\{y_i\}$ , заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени  $p_2(x)$ :

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

- 1) Построим меру отклонения полинома  $p_2(x)$  от таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ :

$$\|r\| = \sum_{i=0}^4 (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где  $y_i = f(x_i)$  – значение функции в точке  $x_i$ .

- 2) Запишем меру отклонения  $\|r\|$  в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} \|r\| = & (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- 3) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_0$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы  $\mathbf{A}$  и первый элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}a_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ a_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ a_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ b_0 &= 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65\end{aligned}$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_1$  и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c_1} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы  $\mathbf{A}$  и второй элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ b_1 &= 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24\end{aligned}$$

- 5) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_2$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы  $\mathbf{A}$  и третий элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned} c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\ b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ & 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94 \end{aligned}$$

- 6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов  $c_0, c_1, c_2$  аппроксимирующего полинома  $p_2(x)$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot c_0 - 0.56 \cdot c_1 + 1.18 \cdot c_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot c_0 + 1.18 \cdot c_1 - 0.38 \cdot c_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot c_0 - 0.38 \cdot c_1 + 0.49 \cdot c_2 = 5.94 \end{cases}$$

- 7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

- 8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и результаты вычислений ап-

проксимирующего алгебраического полинома второго порядка  $p_2(x)$  (сплошная линия).

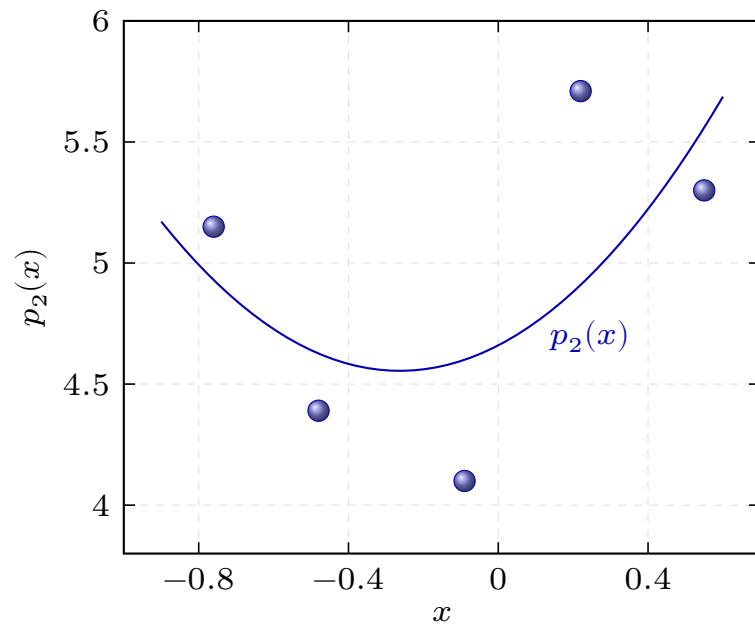


Рисунок 2 – График таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома  $p_2(x)$  (сплошная линия)

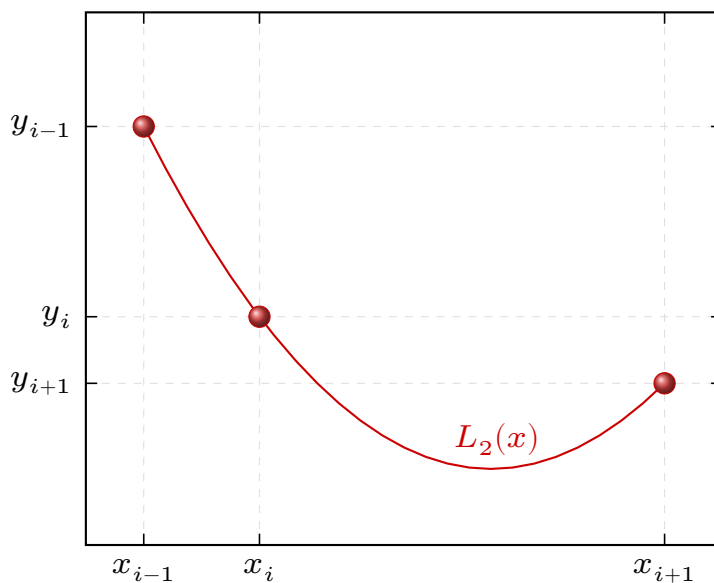
## 4 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции  $y(x)$  по заданным в конечном числе точек  $\{x_i\}$  значениям этой функции.

Численное дифференцирование применяется, если функцию  $y(x)$  трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию  $y(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа  $L_n(x)$  и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку  $\{x_i\}$  и проведем интерполирование функции  $y(x)$  в узлах сетки  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая  $y(x) \approx L_2(x)$  для  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ :



$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

где  $y_{i-1} = y(x_{i-1})$ ,  $y_i = y(x_i)$ ,  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  – значение функции  $y(x)$  в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа  $L_2(x)$ :

$$\begin{aligned}
L'_2(x) &= \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной  $y'(x)$  в любой точке отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Например, в точке  $x = x_i$  первая производная от функции  $y(x)$  приближенно равна:

$$\begin{aligned}
y'(x_i) \approx L'_2(x_i) &= \frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближен-

ное значение второй производной от функции  $y(x)$  в любой точке отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} y''(x) \approx L_2''(x) = & \frac{2}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\ & + \frac{2}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\ & + \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

На *равномерной сетке*  $\{x_i\}$ , расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке  $x = x_i$  упрощаются:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где  $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$  – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков  $y^{(n)}(x)$  уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ . Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции  $y(x)$  зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки  $\{x_i\}$ .

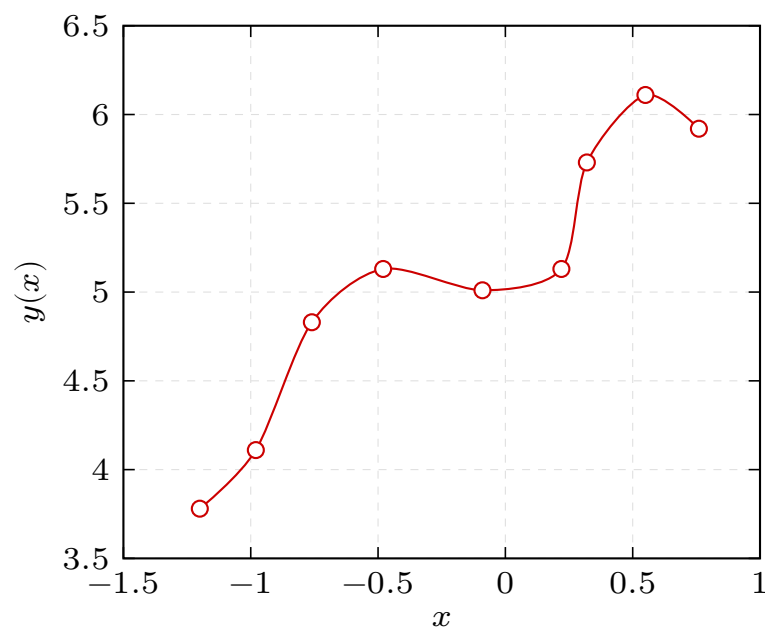
#### 4.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки)  $\{x_i\}$  в которых определены значения функции  $\{f(x_i)\}$ :

Таблица 3 – Таблично заданная функциональная зависимость  $y_i = f(x_i)$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	−1.2	−0.98	−0.76	−0.48	−0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
$y_i$	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции  $y(x)$ , используя данные таблицы 3.



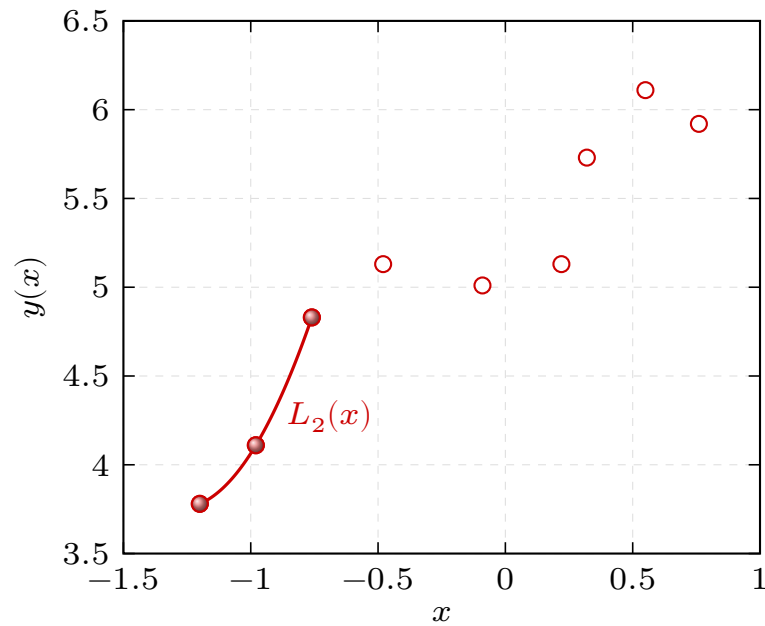
2) Аппроксимируем функцию  $y(x)$  в узлах  $\{x_0, x_1, x_2\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-1.20 - (-0.98))(-1.20 - (-0.76))} \cdot 3.78 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.76))}{(-0.98 - (-1.20))(-0.98 - (-0.76))} \cdot 4.11 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.98))}{(-0.76 - (-1.20))(-0.76 - (-0.98))} \cdot 4.83
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_0, x_2]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$





Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_1 = -0.98$ :

$$y'_1 = y'(x_1) = y'(-0.98) \approx L'_2(-0.98) = 2.386363635$$

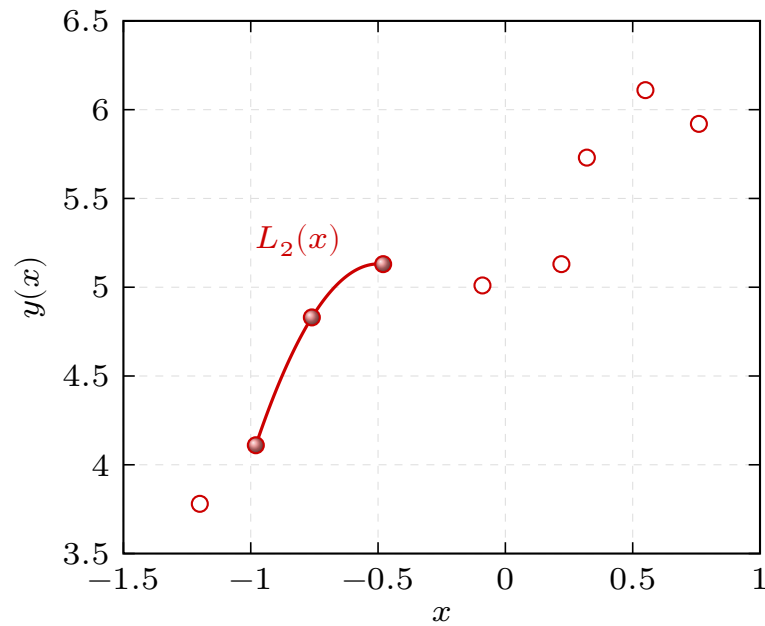
$$y''_1 = y''(x_1) = y''(-0.98) \approx L''_2(-0.98) = 8.057851240$$

3) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_1, x_2, x_3\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.98 - (-0.76))(-0.98 - (-0.48))} \cdot 4.11 + \\ & + \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.48))}{(-0.76 - (-0.98))(-0.76 - (-0.48))} \cdot 4.83 + \\ & + \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-0.48 - (-0.98))(-0.48 - (-0.76))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_1, x_3]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_2 = -0.76$ :

$$y'_2 = y'(x_2) = y'(-0.76) \approx L'_2(-0.76) = 2.304155844$$

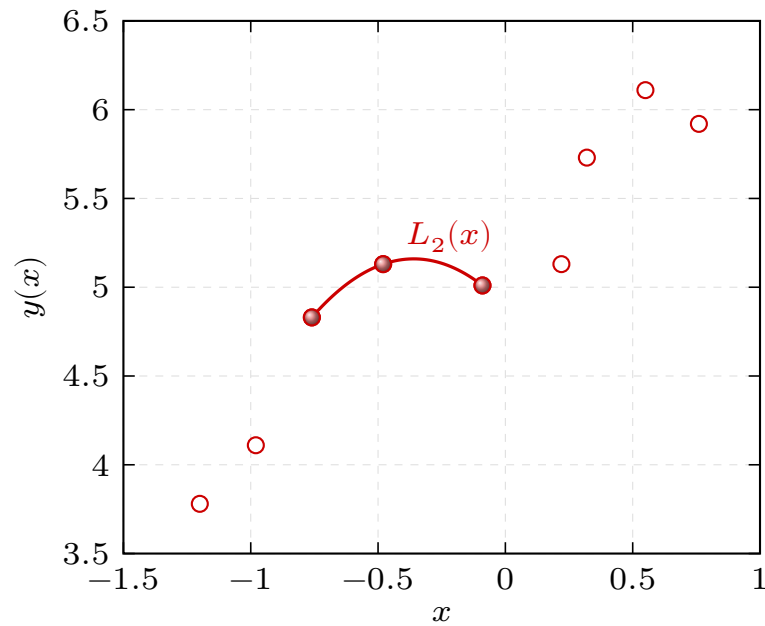
$$y''_2 = y''(x_2) = y''(-0.76) \approx L''_2(-0.76) = -8.805194780$$

- 4) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_2, x_3, x_4\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(-0.76 - (-0.48))(-0.76 - (-0.09))} \cdot 4.83 + \\ & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))}{(-0.48 - (-0.76))(-0.48 - (-0.09))} \cdot 5.13 + \\ & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - (-0.48))} \cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_2, x_4]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_3 = -0.48$ :

$$y'_3 = y'(x_3) = y'(-0.48) \approx L'_2(-0.48) = 0.495079546$$

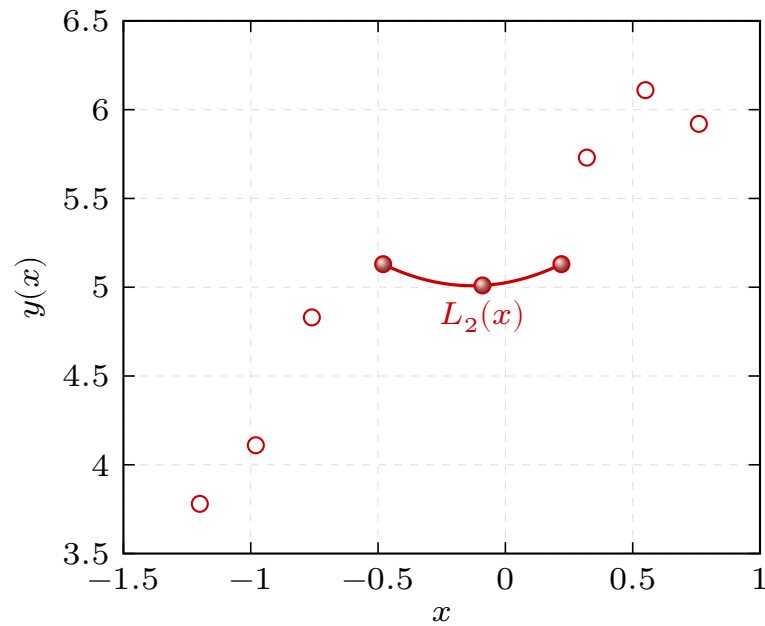
$$y''_3 = y''(x_3) = y''(-0.48) \approx L''_2(-0.48) = -4.116778740$$

5) Аппроксимацию функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_3, x_4, x_5\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(-0.48 - (-0.09))(-0.48 - 0.22)} \cdot 5.13 + \\ & + \frac{(x - (-0.48))(x - 0.22)}{(-0.09 - (-0.48))(-0.09 - 0.22)} \cdot 5.01 + \\ & + \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(0.22 - (-0.48))(0.22 - (-0.09))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_3, x_5]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 0.9925558300 \cdot x^2 + 0.2580645177 \cdot x + 5.025186105$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_4 = -0.09$ :

$$y'_4 = y'(x_4) = y'(-0.09) \approx L'_2(-0.09) = 0.0794044683$$

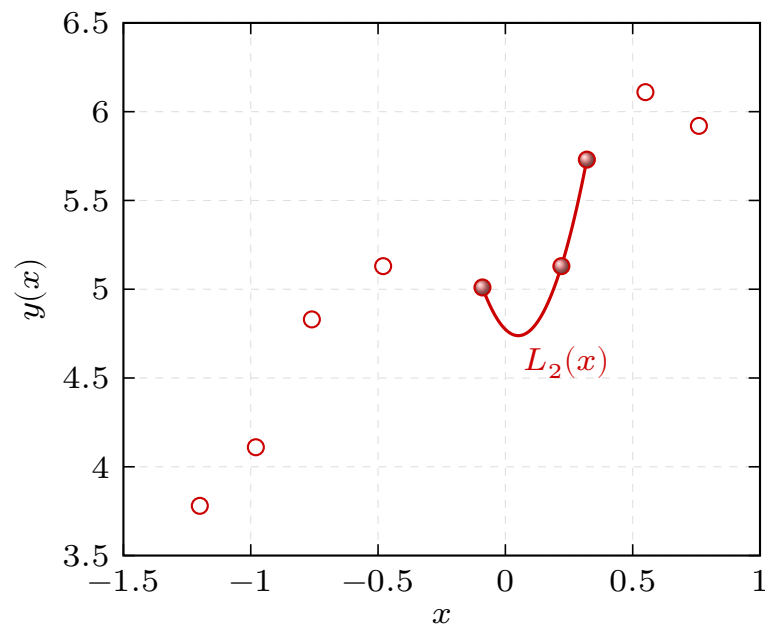
$$y''_4 = y''(x_4) = y''(-0.09) \approx L''_2(-0.09) = 1.985111660$$

- 6) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_4, x_5, x_6\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.32)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.32)}{(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.32)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.32 - (-0.09))(0.32 - 0.22)} \cdot 5.73 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_4, x_6]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 13.69000778 \cdot x^2 - 1.392604236 \cdot x + 4.773776556$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_5 = 0.22$ :

$$y'_5 = y'(x_5) = y'(0.22) \approx L'_2(0.22) = 4.630999187$$

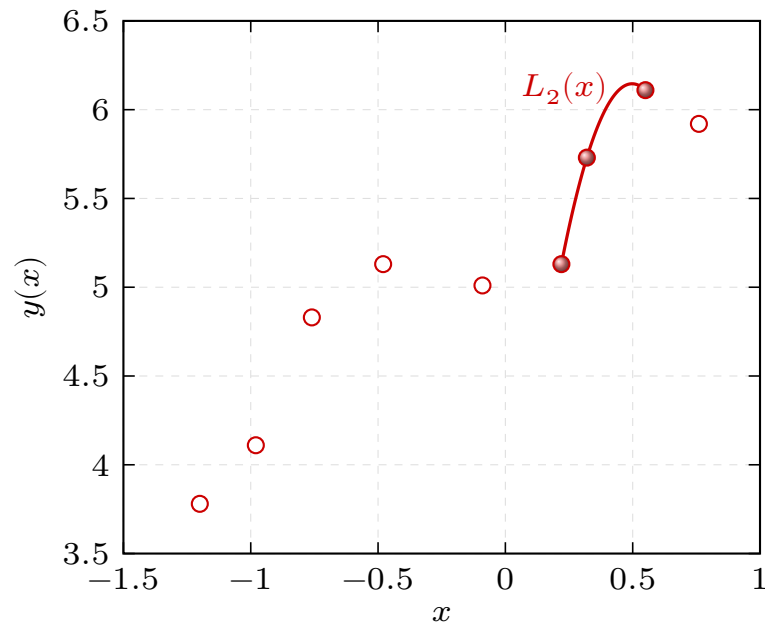
$$y''_5 = y''(x_5) = y''(0.22) \approx L''_2(0.22) = 27.38001556$$

7) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_5, x_6, x_7\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.22 - 0.32)(0.22 - 0.55)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.32 - 0.22)(0.32 - 0.55)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(0.55 - 0.22)(0.55 - 0.32)} \cdot 6.11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_5, x_7]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -13.17523062 \cdot x^2 + 13.11462456 \cdot x + 2.882463758$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_6 = 0.32$ :

$$y'_6 = y'(x_6) = y'(0.32) \approx L'_2(0.32) = 4.682476963$$

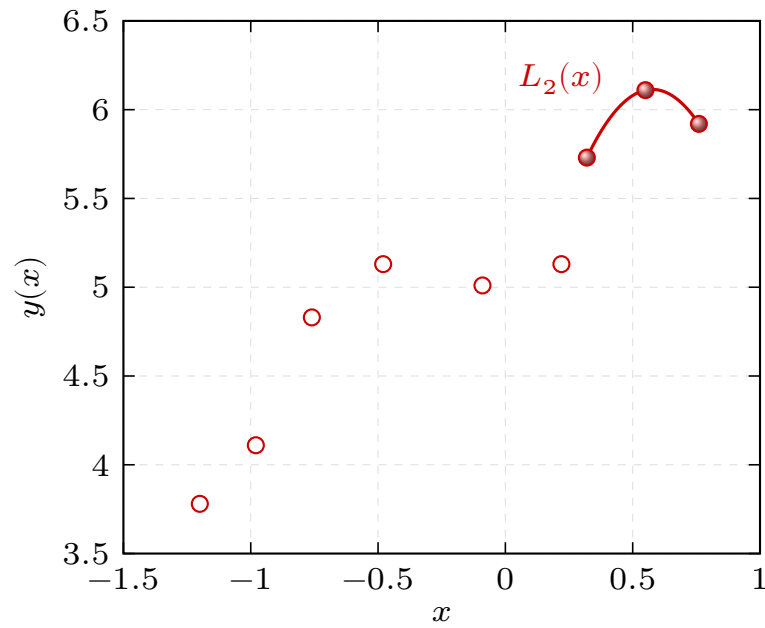
$$y''_6 = y''(x_6) = y''(0.32) \approx L''_2(0.32) = -26.35046124$$

8) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_6, x_7, x_8\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.55)(x - 0.76)}{(0.32 - 0.55)(0.32 - 0.76)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.76)}{(0.55 - 0.32)(0.55 - 0.76)} \cdot 6.11 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.76 - 0.32)(0.76 - 0.55)} \cdot 5.92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_6, x_8]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -5.811217790 \cdot x^2 + 6.707933391 \cdot x + 4.178530017$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_7 = 0.55$ :

$$y'_7 = y'(x_7) = y'(0.55) \approx L'_2(0.55) = 0.315593822$$

$$y''_7 = y''(x_7) = y''(0.55) \approx L''_2(0.55) = -11.62243558$$

9) Таким образом, определены значения первой  $y'(x)$  и второй  $y''(x)$  производной функции  $y(x)$  в каждом внутреннем узле сетки:

Таблица 4 – Значения первой и второй производных функции  $y(x)$  во внутренних узлах сетки  $\{x_i\}$

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55
$y'_i$	2.39	2.30	0.50	0.08	4.63	4.68	0.32
$y''_i$	8.06	-8.81	-4.12	1.99	27.38	-26.35	-11.62

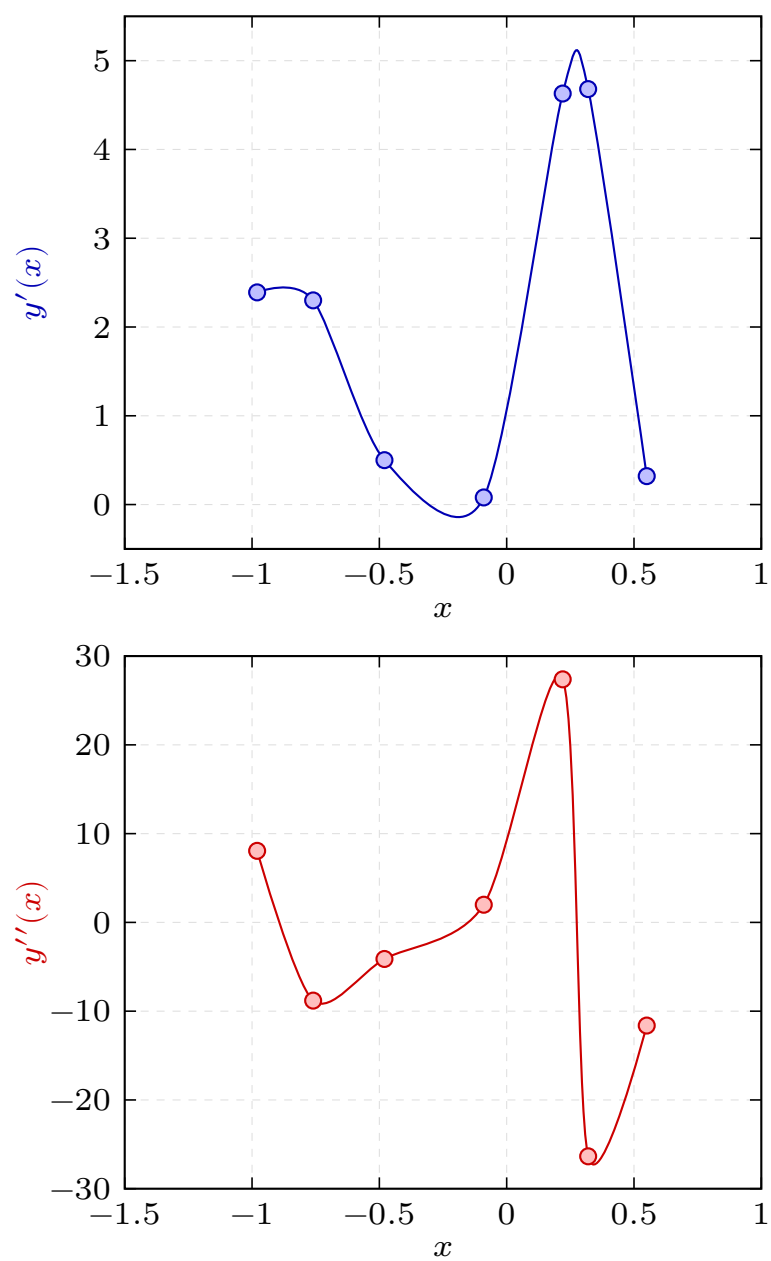


Рисунок 3 – Графики первой  $y'(x)$  и второй  $y''(x)$  производной от функции  $y(x)$ , заданной таблично



## 5 Численное интегрирование

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $x \in [a, b]$  и известна ее первообразная  $F(x)$ , то определенный интеграл от этой функции в пределах от  $a$  до  $b$  может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где  $F'(x) = f(x)$  – первообразная подынтегральной функции  $f(x)$ .

Однако во многих случаях первообразная функция  $F(x)$  не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция  $f(x)$  часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

*Задача численного интегрирования* функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции  $f(x)$ .

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию  $f(x)$  на рассматриваемом отрезке  $x \in [a, b]$  заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$  простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где  $c_i$  – числовые коэффициенты квадратурной формулы;  $x_i$  – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка  $[a, b]$ ,  $(i = 0, 1, \dots, n)$ .

На основании свойств определенных интегралов,  $I$  можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Поэтому, для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке  $[a, b]$  достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

### 5.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

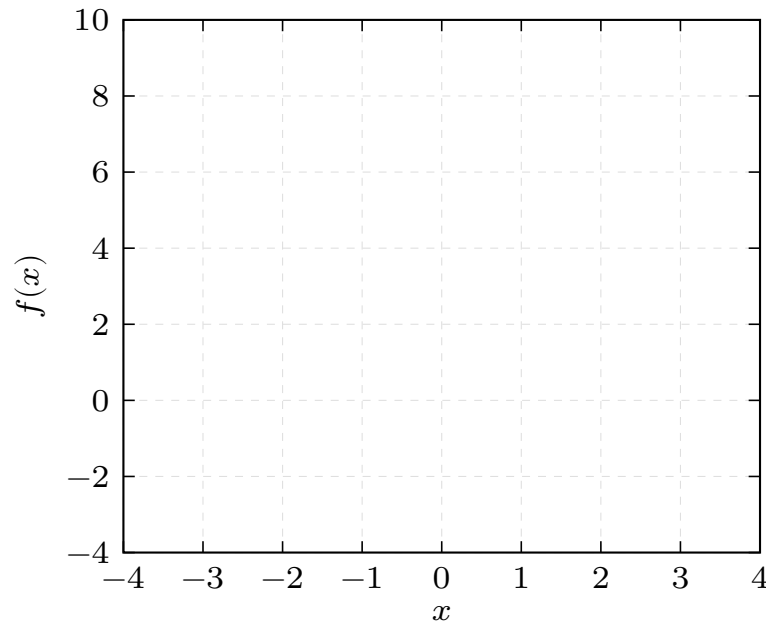
В зависимости от выбора узла сетки  $\{x_i\}$  для аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  различают левую и правую формулы прямоугольников: если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце от-

резка  $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ , то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка  $L_0 \approx f(x_i) = y_i$ , то справедлива правая формула прямоугольников:

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$



## 5.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по множеству узлов сетки  $\{x_{i-1}, x_i\}$ :

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном

отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

### 5.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  квадратурная формула Симпсона является следствием аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени  $f(x) \approx L_2(x)$ , который построен по узлам сетки  $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$ :

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\ & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x)}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_i + \\ & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

где  $x_{i-1/2}$  – узел вспомогательной сетки, расположенный между узлами основной сетки  $x_{i-1} < x_{i-1/2} < x_i$

Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где  $c_0, c_1, c_2$  – коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  в пределах частичного отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  на частичном отрезке  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$  определяет формулу Симпсона:

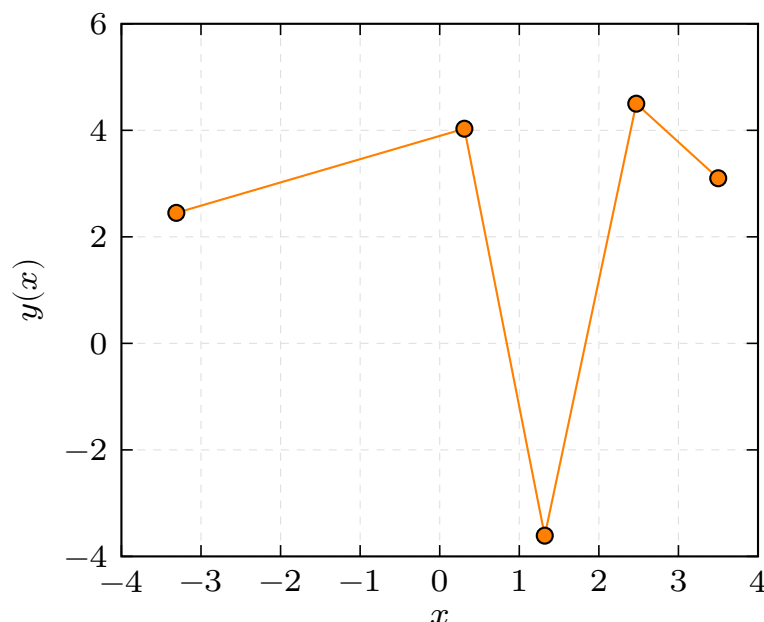
$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$

### 5.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки  $\{x_i\}$  определены значения некоторой функции  $\{y_i\}$ :

$x$	-3,31	0,31	1,32	2,47	3,50
$f(x)$	2,45	4,03	-3,61	4,50	3,1

- 1) Построим график функции  $f(x)$  заданной таблично.



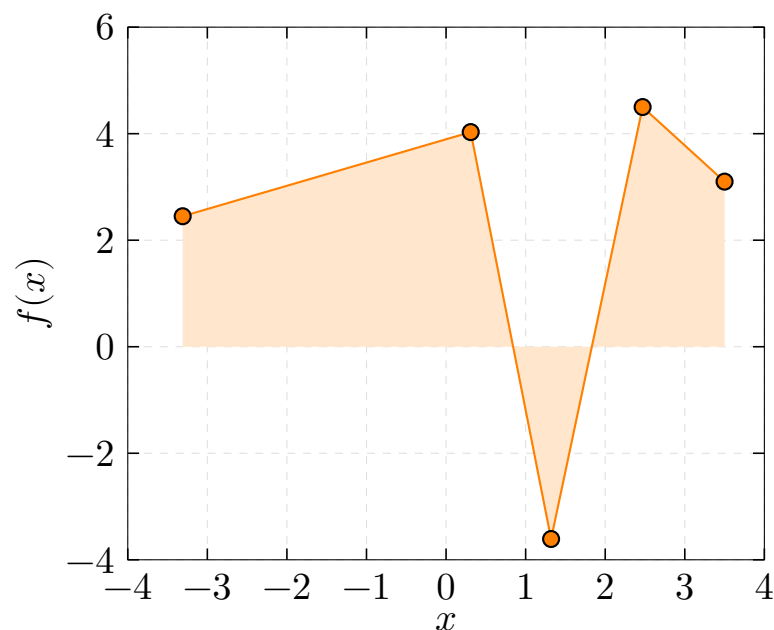
Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика и осью абсцисс  $Ox$  (выделенная область на графике).

- 2) Рассмотрим **метод трапеций** для нахождения численного значения интеграла функции  $f(x)$  заданной таблично на отрезке  $x \in [-3, 31; 3, 50]$ .

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по узлам  $x_{i-1}, x_i$ , т.е. прямой соединяющей два соседних узла.



Определим длину частичных отрезков:

$$h_1 = (x_1 - x_0) = 0,31 - (-3,31) = 3,62$$

$$h_2 = (x_2 - x_1) = 1,32 - 0,31 = 1,01$$

$$h_3 = (x_3 - x_2) = 2,47 - 1,32 = 1,15$$

$$h_4 = (x_4 - x_3) = 3,50 - 2,47 = 1,03$$

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$I_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h_1 = \frac{2,45 + 4,03}{2} \cdot 3,62 = 11,73$$

$$I_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h_2 = \frac{4,03 - 3,61}{2} \cdot 1,01 = 0,21$$

$$I_3 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h_3 = \frac{-3,61 + 4,50}{2} \cdot 1,15 = 0,51$$

$$I_4 = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \cdot h_4 = \frac{4,50 + 3,10}{2} \cdot 1,03 = 3,91$$

Определим интеграл  $I$  на всем отрезке интегрирования  $[-3, 31; 3, 50]$ , воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 11,73 + 0,21 + 0,51 + 3,91 = 16,37.$$

3) Рассмотрим **метод Симпсона** для нахождения численного значения интеграла

функции  $f(x)$  заданной таблично на отрезке  $x \in [-3, 31; 3, 50]$ .

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4]$$

На каждом из двух отрезков построим интерполяционный полинома Лагранжа  $L_2(x)$

- 4) В пределах первого частичного отрезка  $[-3, 31; 1, 32]$  построим полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам интерполяции  $x_0 = -3, 31; x_1 = 0, 31; x_2 = 1, 32$ :

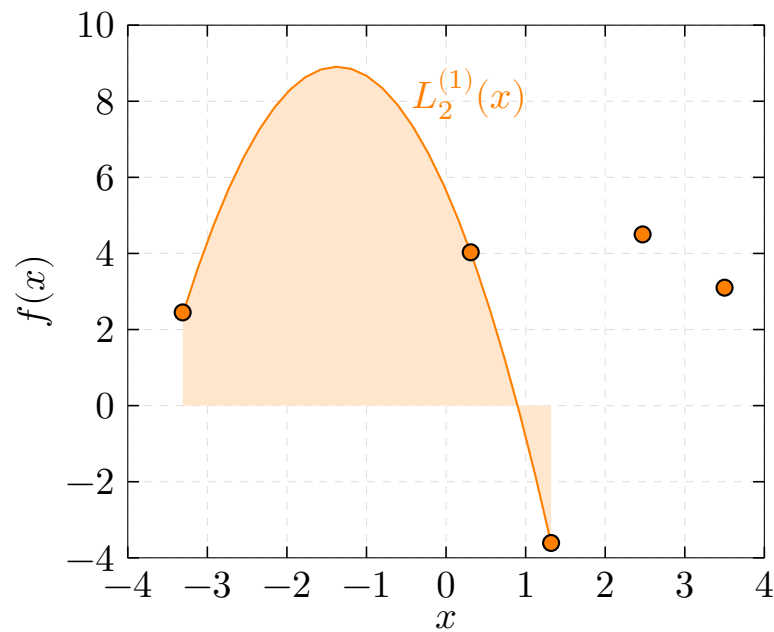
$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(x) &= \frac{(x - 0, 31)(x - 1, 32)}{((-3, 31 - 0, 31)(-3, 31 - 1, 32))} \cdot 2, 45 \quad + \\ &+ \frac{(x - (-3, 31))(x - 1, 32)}{(0, 31 - (-3, 31))(0, 31 - 1, 32))} \cdot 4, 03 \quad + \\ &+ \frac{(x - (-3, 31))(x - 0, 31)}{(1, 32 - (-3, 31))(1, 32 - 0, 31))} \cdot (-3, 61) \end{aligned}$$

В результате алгебраических преобразований получим:

$$L_2^{(1)}(x) = -1, 73 \cdot x^2 - 4, 74 \cdot x + 5, 66$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2^{(1)}(x)$  на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{-3, 31}^{1, 32} L_2^{(1)}(x) dx = \int_{-3, 31}^{1, 32} (-1, 73 \cdot x^2 - 4, 74 \cdot x + 5, 66) dx = 25, 88$$



- 5) В пределах второго частичного отрезка  $[1, 32; 3, 50]$  построим полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам интерполяции  $x_2 = 1, 32; x_3 = 2, 47; x_4 = 3, 50$ :

$$\begin{aligned}
 L_2^{(2)}(x) &= \frac{(x - 2, 47)(x - 3, 50)}{(1, 32 - 2, 47)(1, 32 - 3, 50)} \cdot (-3, 61) + \\
 &+ \frac{(x - 1, 32)(x - 3, 50)}{(2, 47 - 1, 32)(2, 47 - 3, 50)} \cdot 4, 50 + \\
 &+ \frac{(x - 1, 32)(x - 2, 47)}{(3, 50 - 1, 32)(3, 50 - 2, 47)} \cdot 3, 10
 \end{aligned}$$

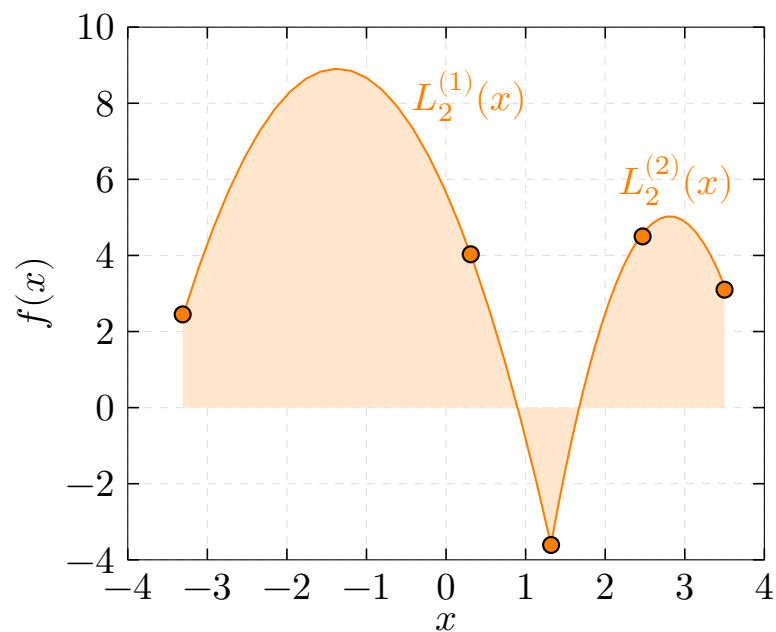
После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -3, 87 \cdot x^2 + 21, 76 \cdot x - 25, 56$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2^{(2)}(x)$  на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{1, 32}^{3, 50} L_2^{(2)}(x) dx = \int_{1, 32}^{3, 50} (-3, 87 \cdot x^2 + 21, 76 \cdot x - 25, 56) dx = 6, 13$$





- 6) Определим интеграл всем отрезке  $[-3, 31; 3, 50]$  воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25,88 + 6,13 = 32,01$$

- 7) Сравнивая численные значения интегралов рассчитанные по методу трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что значение интегралов существенно различаются: определенный интеграл рассчитанный по методу Симпсона в 1,96 больше, чем по методу трапеций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.