СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

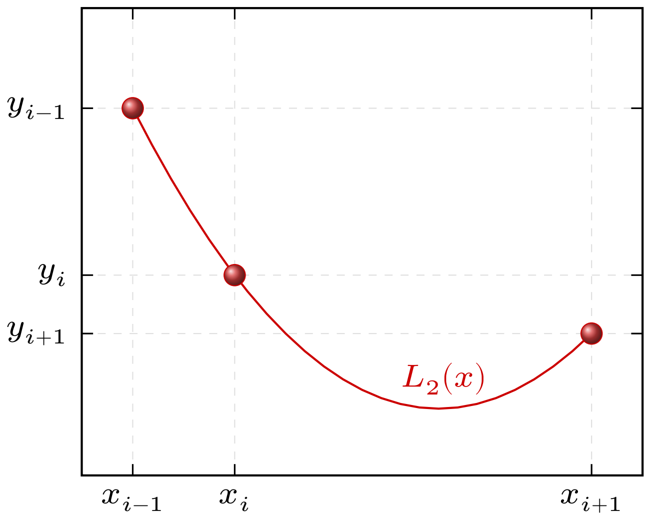
1 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных $y'(x)$ по заданным в конечном числе точек $\{x_i\}$ значениям этой функции $\{y_i\}$.

Численное дифференцирование применяется, если функцию $y(x)$ трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию $y(x)$ интерполяционным полиномом, например, алгебраическим полиномом в форме Лагранжа $L_n(x)$, и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку $\{x_i\}$ и проведем интерполирование функции $y(x)$ в узлах сетки $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая $y(x) \approx L_2(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:



$$
\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \quad + \\
&+ \quad \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \quad + \\
&+ \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

где $y_{i-1} = y(x_{i-1})$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ – значение функции $y(x)$ в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
L_2'(x) &= \frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \quad + \\
&+ \quad \frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \quad + \\
&+ \frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной $y'(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Например, в точке $x = x_i$ первая производная от функции $y(x)$ приближенно равна:

$$
\begin{aligned}
y'(x_i) \approx L_2'(x_i) &= \frac{x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \quad + \\
&+ \quad \frac{(x_i-x_{i-1})+(x_i-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \quad + \\
&+ \frac{x_i-x_{i-1}}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближенное значение второй производной от функции $y(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$y''(x) \approx L_2''(x) = \frac{2}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\ + \frac{2}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\ + \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}$$

На *равномерной сетке* $\{x_i\}$, расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке $x = x_i$ упрощаются:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$ – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков $y^{(n)}(x)$ уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка $L_2(x)$. Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции $y(x)$ зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки $\{x_i\}$.

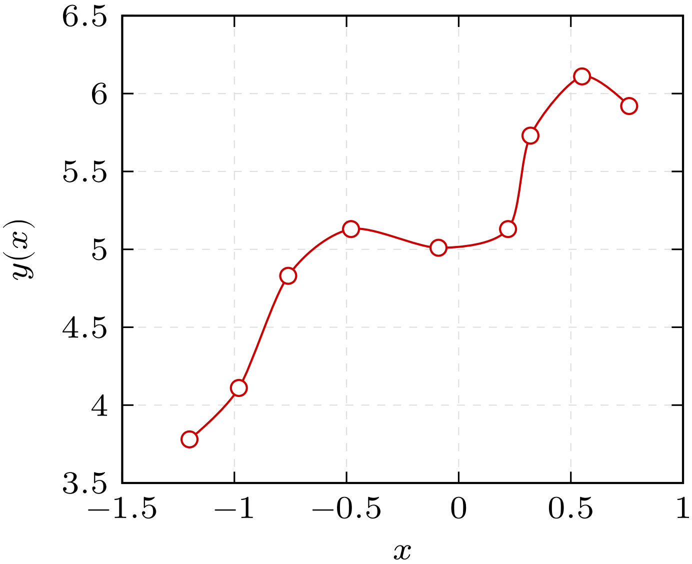
1.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки) $\{x_i\}$ в которых определены значения функции $\{f(x_i)\}$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-1.2	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
y_i	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции $y(x)$, используя данные таблицы 1.

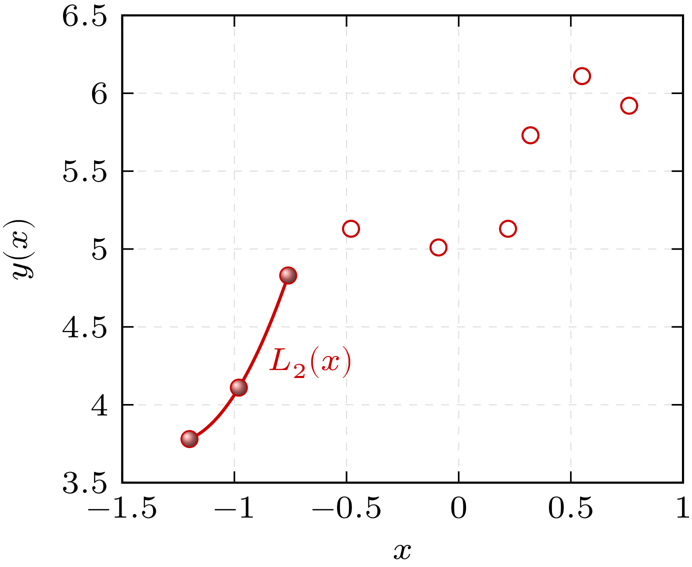


2) Аппроксимируем функцию $y(x)$ в узлах $\{x_0, x_1, x_2\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$
\begin{aligned}
L_2(x) \;&=\; \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.76))}{(-1.20-(-0.98))(-1.20-(-0.76))}\cdot 3.78 \;+ \\
&+\; \frac{(x-(-1.20))(x-(-0.76))}{(-0.98-(-1.20))(-0.98-(-0.76))}\cdot 4.11 \;+ \\
&+\; \frac{(x-(-1.20))(x-(-0.98))}{(-0.76-(-1.20))(-0.76-(-0.98))}\cdot 4.83
\end{aligned}
$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_0, x_2]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_1 = -0.98$:

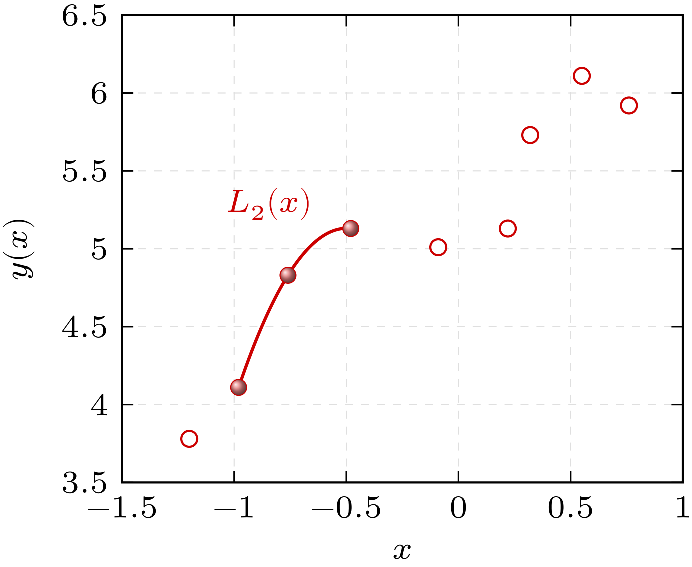
$$y_1' = y'(x_1) = y'(-0.98) \approx L_2'(-0.98) = 2.386363635$$
$$y_1'' = y''(x_1) = y''(-0.98) \approx L_2''(-0.98) = 8.057851240$$

3) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_1, x_2, x_3\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) \;&=\; \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.48))}{(-0.98-(-0.76))(-0.98-(-0.48))}\cdot 4.11 \;+ \\ &+\; \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.48))}{(-0.76-(-0.98))(-0.76-(-0.48))}\cdot 4.83 \;+ \\ &+\; \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.76))}{(-0.48-(-0.98))(-0.48-(-0.76))}\cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_1, x_3]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390\cdot x^2 - 4.387792189\cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_2 = -0.76$:

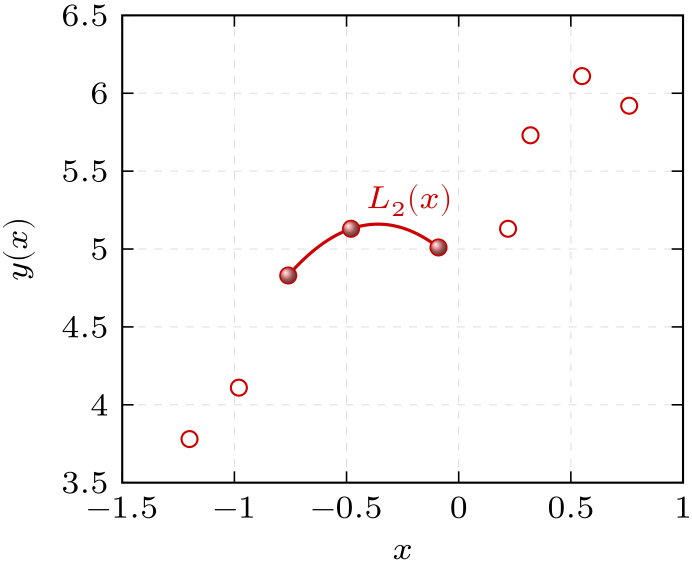
$$y_2' = y'(x_2) = y'(-0.76) \approx L_2'(-0.76) = 2.304155844$$
$$y_2'' = y''(x_2) = y''(-0.76) \approx L_2''(-0.76) = -8.805194780$$

4) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_2, x_3, x_4\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.48))(x-(-0.09))}{(-0.76-(-0.48))(-0.76-(-0.09))}\cdot 4.83 \ + \\ &+ \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))}{(-0.48-(-0.76))(-0.48-(-0.09))}\cdot 5.13 \ + \\ &+ \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.48))}{(-0.09-(-0.76))(-0.09-(-0.48))}\cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_2, x_4]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_3 = -0.48$:

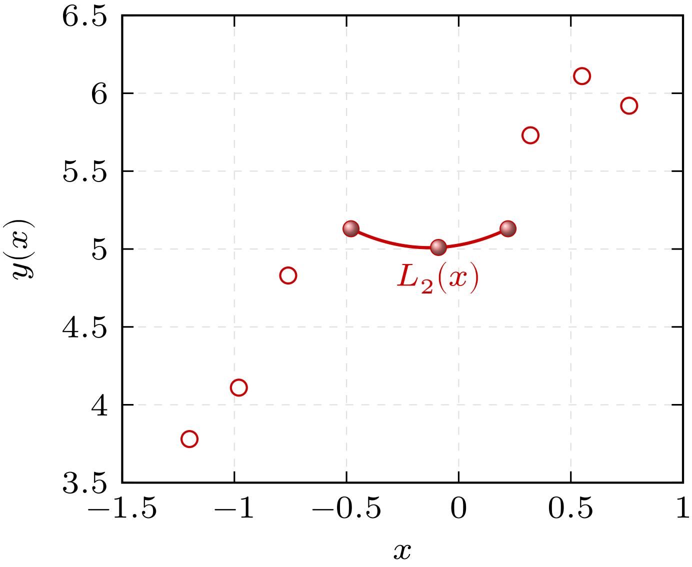
$$y'_3 = y'(x_3) = y'(-0.48) \approx L'_2(-0.48) = 0.495079546$$
$$y''_3 = y''(x_3) = y''(-0.48) \approx L''_2(-0.48) = -4.116778740$$

5) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_3, x_4, x_5\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)}{(-0.48-(-0.09))(-0.48-0.22)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x-(-0.48))(x-0.22)}{(-0.09-(-0.48))(-0.09-0.22)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x-(-0.48))(x-(-0.09))}{(0.22-(-0.48))(0.22-(-0.09))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_3, x_5]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 0.9925558300 \cdot x^2 + 0.2580645177 \cdot x + 5.025186105$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_4 = -0.09$:

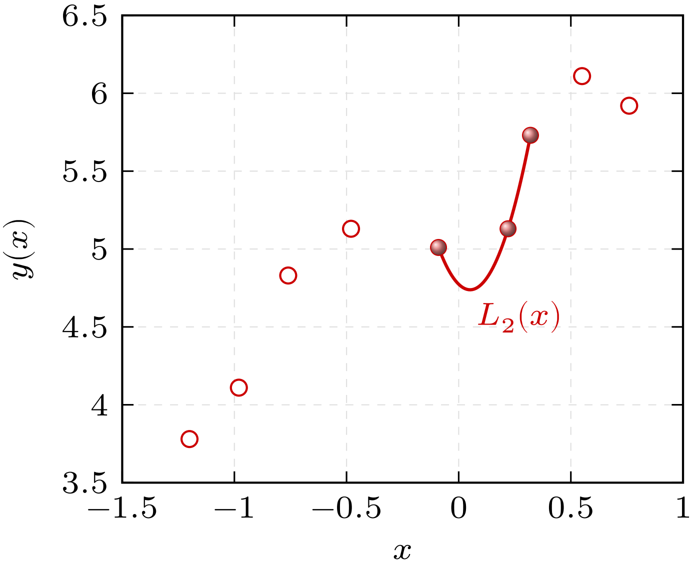
$$y'_4 = y'(x_4) = y'(-0.09) \approx L'_2(-0.09) = 0.0794044683$$
$$y''_4 = y''(x_4) = y''(-0.09) \approx L''_2(-0.09) = 1.985111660$$

6) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_4, x_5, x_6\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0.22)(x-0.32)}{(-0.09-0.22)(-0.09-0.32)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x-(-0.09))(x-0.32)}{(0.22-(-0.09))(0.22-0.32)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)}{(0.32-(-0.09))(0.32-0.22)} \cdot 5.73 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_4, x_6]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 13.69000778 \cdot x^2 - 1.392604236 \cdot x + 4.773776556$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_5 = 0.22$:

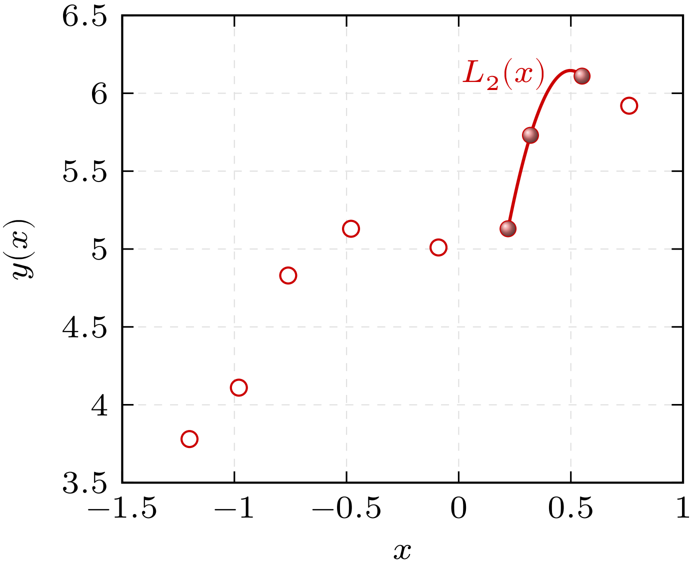
$$y'_5 = y'(x_5) = y'(0.22) \approx L'_2(0.22) = 4.630999187$$
$$y''_5 = y''(x_5) = y''(0.22) \approx L''_2(0.22) = 27.38001556$$

7) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_5, x_6, x_7\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0.32)(x-0.55)}{(0.22-0.32)(0.22-0.55)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x-0.22)(x-0.55)}{(0.32-0.22)(0.32-0.55)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x-0.22)(x-0.32)}{(0.55-0.22)(0.55-0.32)} \cdot 6.11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_5, x_7]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -13.17523062 \cdot x^2 + 13.11462456 \cdot x + 2.882463758$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_6 = 0.32$:

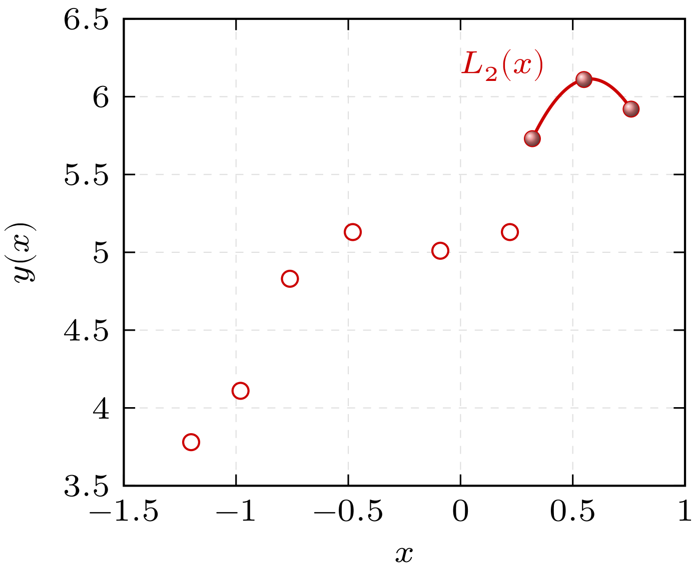
$$y'_6 = y'(x_6) = y'(0.32) \approx L'_2(0.32) = 4.682476963$$
$$y''_6 = y''(x_6) = y''(0.32) \approx L''_2(0.32) = -26.35046124$$

8) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_6, x_7, x_8\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0.55)(x-0.76)}{(0.32-0.55)(0.32-0.76)} \cdot 5.73 \; + \\ &+ \frac{(x-0.32)(x-0.76)}{(0.55-0.32)(0.55-0.76)} \cdot 6.11 \; + \\ &+ \frac{(x-0.32)(x-0.55)}{(0.76-0.32)(0.76-0.55)} \cdot 5.92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_6, x_8]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -5.811217790 \cdot x^2 + 6.707933391 \cdot x + 4.178530017$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_7 = 0.55$:

$$y'_7 = y'(x_7) = y'(0.55) \approx L'_2(0.55) = 0.315593822$$
$$y''_7 = y''(x_7) = y''(0.55) \approx L''_2(0.55) = -11.62243558$$

9) Таким образом, определены значения первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производной функции $y(x)$ в каждом внутреннем узле сетки:

Таблица 2 – Значения первой и второй производных функции $y(x)$ во внутренних узлах сетки $\{x_i\}$

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55
y'_i	2.39	2.30	0.50	0.08	4.63	4.68	0.32
y''_i	8.06	-8.81	-4.12	1.99	27.38	-26.35	-11.62

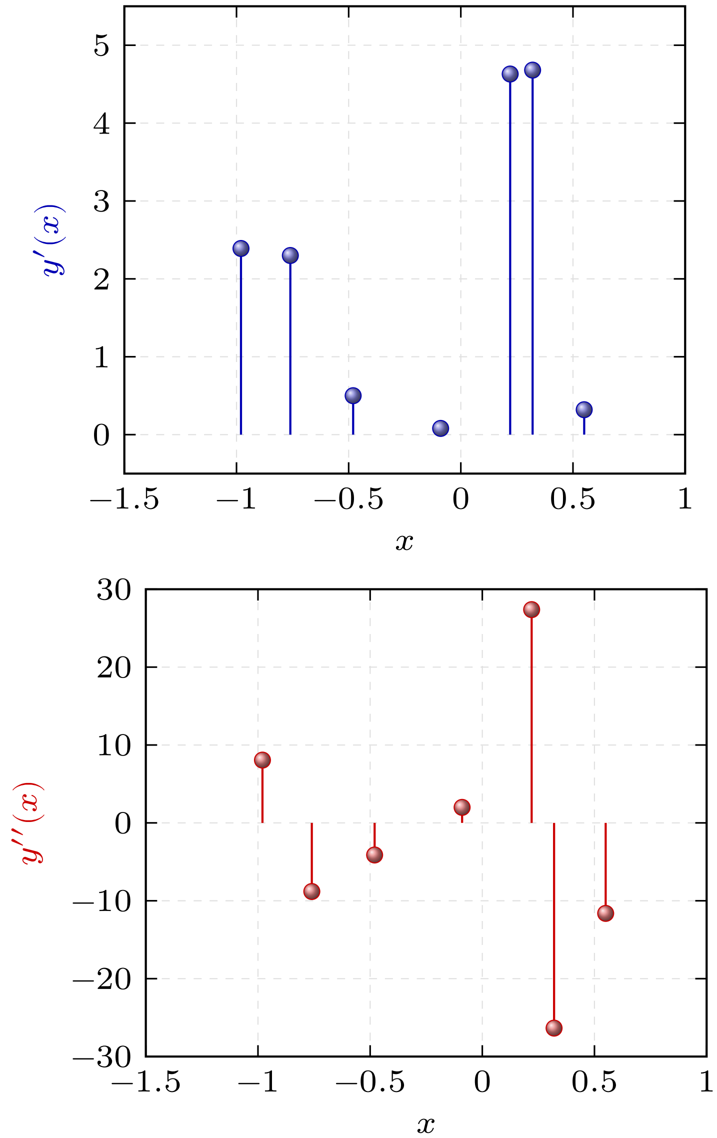


Рисунок 1 – Графики первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производной от функции $y(x)$, заданной таблично

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t)$ – $\epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.