СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

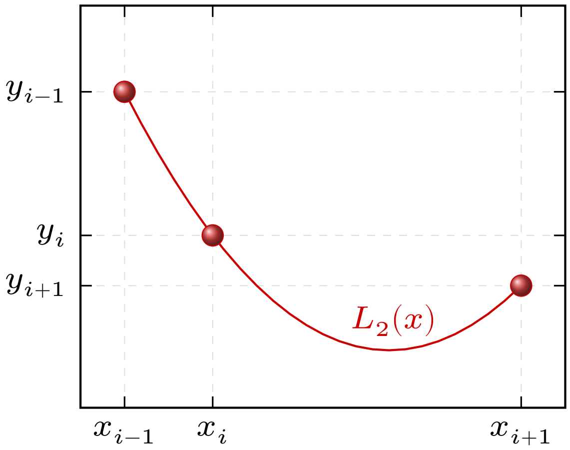
1 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных $y'(x)$ по заданным в конечном числе точек $\{x_i\}$ значениям этой функции $\{y_i\}$.

Численное дифференцирование применяется, если функцию $y(x)$ трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию $y(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$ и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку $\{x_i\}$ и проведем интерполирование функции $y(x)$ в узлах сетки $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая $y(x) \approx L_2(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:



$$
\begin{aligned}
L_2(x) \;=\; & \frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+ \\
+\; & \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \;+ \\
+\; & \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

где $y_{i-1} = y(x_{i-1})$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ – значение функции $y(x)$ в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$:

$$\begin{aligned} L_2'(x) \;=\; & \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i)\cdot(x_{i-1} - x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+ \\ + & \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})}\cdot y_i \;+ \\ + & \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1})\cdot(x_{i+1} - x_i)}\cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной $y'(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Например, в точке $x = x_i$ первая производная от функции $y(x)$ приближенно равна:

$$\begin{aligned} y'(x_i) \approx L_2'(x_i) \;=\; & \frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i)\cdot(x_{i-1} - x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+ \\ + & \frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})}\cdot y_i \;+ \\ + & \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1})\cdot(x_{i+1} - x_i)}\cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближенное значение второй производной от функции $y(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned} y''(x) \approx L_2''(x) \;=\; & \frac{2}{(x_{i-1} - x_i)\cdot(x_{i-1} - x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+ \\ + & \frac{2}{(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})}\cdot y_i \;+ \\ + & \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1})\cdot(x_{i+1} - x_i)}\cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

На *равномерной сетке* $\{x_i\}$, расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке $x = x_i$

упрощаются:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$ – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков $y^{(n)}(x)$ уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка $L_2(x)$. Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции $y(x)$ зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки $\{x_i\}$.

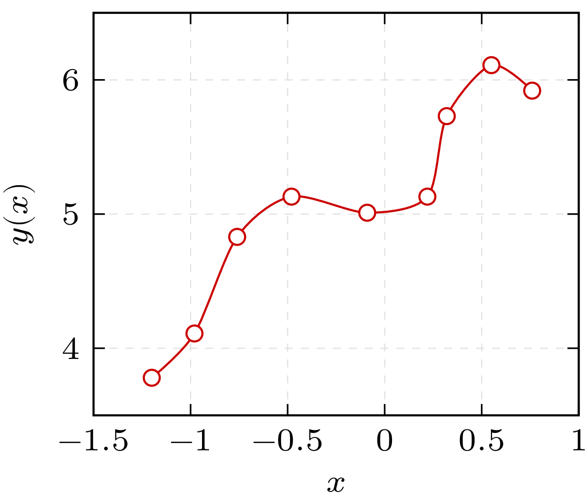
1.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки) $\{x_i\}$ в которых определены значения функции $\{f(x_i)\}$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	−1.2	−0.98	−0.76	−0.48	−0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
y_i	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции $y(x)$, используя данные таблицы 1.

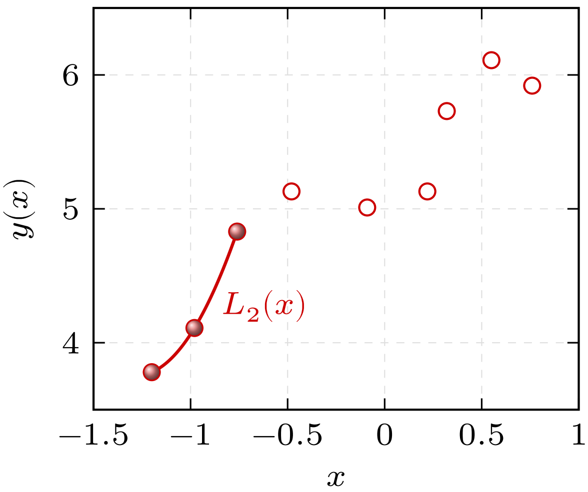


2) Аппроксимируем функцию $y(x)$ в узлах $\{x_0, x_1, x_2\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned}
L_2(x) \; &= \; \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.76))}{(-1.20-(-0.98))(-1.20-(-0.76))}\cdot 3.78 \; + \\
&+ \; \frac{(x-(-1.20))(x-(-0.76))}{(-0.98-(-1.20))(-0.98-(-0.76))}\cdot 4.11 \; + \\
&+ \; \frac{(x-(-1.20))(x-(-0.98))}{(-0.76-(-1.20))(-0.76-(-0.98))}\cdot 4.83
\end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_0, x_2]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_1 = -0.98$:

$$y_1' = y'(x_1) = y'(-0.98) \approx L_2'(-0.98) = 2.386363635$$
$$y_1'' = y''(x_1) = y''(-0.98) \approx L_2''(-0.98) = 8.057851240$$

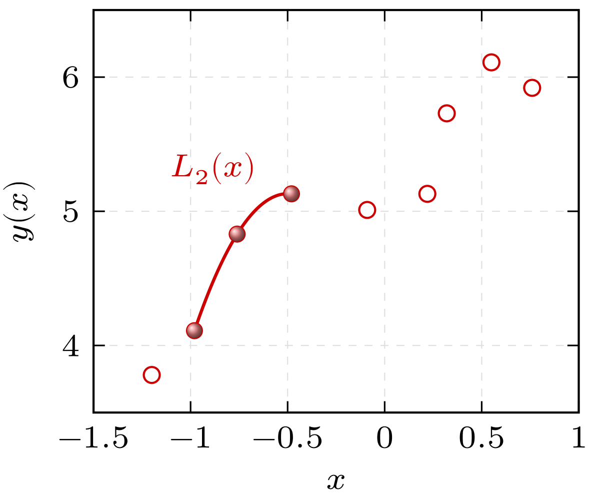
3) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_1, x_2, x_3\}$ полиномом Лагранжа вто-

рого порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.48))}{(-0.98-(-0.76))(-0.98-(-0.48))}\cdot 4.11 \;+ \\ &+ \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.48))}{(-0.76-(-0.98))(-0.76-(-0.48))}\cdot 4.83 \;+ \\ &+ \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.76))}{(-0.48-(-0.98))(-0.48-(-0.76))}\cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_1, x_3]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_2 = -0.76$:

$$y_2' = y'(x_2) = y'(-0.76) \approx L_2'(-0.76) = 2.304155844$$
$$y_2'' = y''(x_2) = y''(-0.76) \approx L_2''(-0.76) = -8.805194780$$

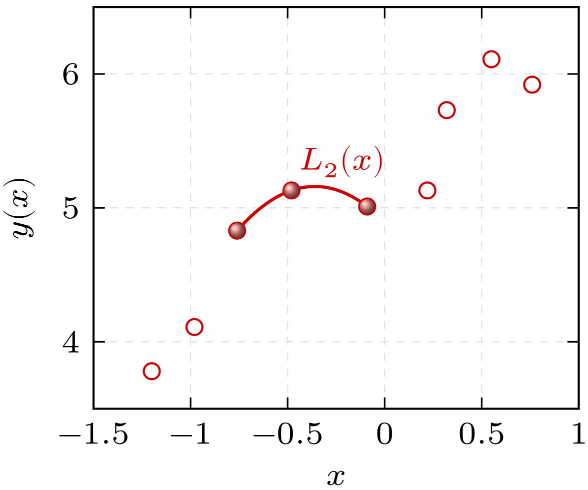
4) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_2, x_3, x_4\}$ полиномом Лагранжа вто-

рого порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) \;&=\; \frac{(x-(-0.48))(x-(-0.09))}{(-0.76-(-0.48))(-0.76-(-0.09))}\cdot 4.83 \;+ \\ &+\; \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))}{(-0.48-(-0.76))(-0.48-(-0.09))}\cdot 5.13 \;+ \\ &+\; \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.48))}{(-0.09-(-0.76))(-0.09-(-0.48))}\cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_2, x_4]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_3 = -0.48$:

$$y'_3 = y'(x_3) = y'(-0.48) \approx L'_2(-0.48) = 0.495079546$$
$$y''_3 = y''(x_3) = y''(-0.48) \approx L''_2(-0.48) = -4.116778740$$

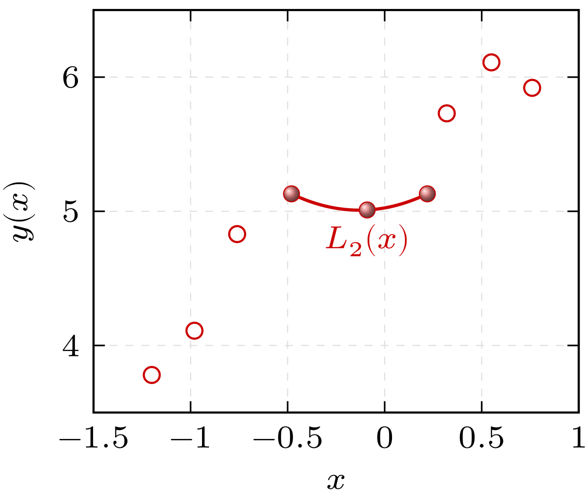
5) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_3, x_4, x_5\}$ полиномом Лагранжа вто-

рого порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)}{(-0.48-(-0.09))(-0.48-0.22)} \cdot 5.13 \;+ \\ &+ \frac{(x-(-0.48))(x-0.22)}{(-0.09-(-0.48))(-0.09-0.22)} \cdot 5.01 \;+ \\ &+ \frac{(x-(-0.48))(x-(-0.09))}{(0.22-(-0.48))(0.22-(-0.09))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_3, x_5]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 0.9925558300 \cdot x^2 + 0.2580645177 \cdot x + 5.025186105$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_4 = -0.09$:

$$y_4' = y'(x_4) = y'(-0.09) \approx L_2'(-0.09) = 0.0794044683$$
$$y_4'' = y''(x_4) = y''(-0.09) \approx L_2''(-0.09) = 1.985111660$$

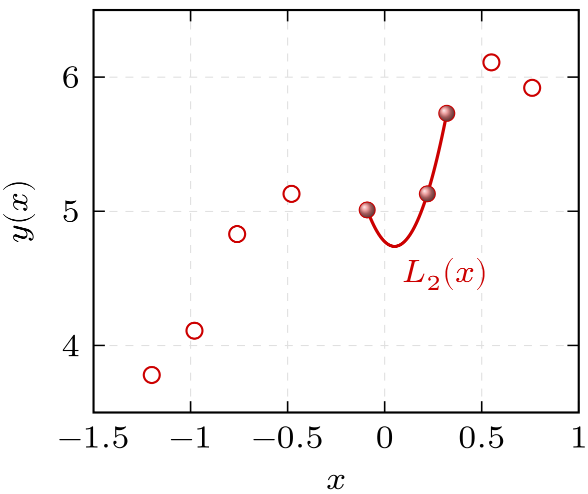
6) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_4, x_5, x_6\}$ полиномом Лагранжа вто-

рого порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned}
L_2(x) \; &= \; \frac{(x-0.22)(x-0.32)}{(-0.09-0.22)(-0.09-0.32)}\cdot 5.01 \; + \\
&+ \; \frac{(x-(-0.09))(x-0.32)}{(0.22-(-0.09))(0.22-0.32)}\cdot 5.13 \; + \\
&+ \; \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)}{(0.32-(-0.09))(0.32-0.22)}\cdot 5.73
\end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_4, x_6]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 13.69000778 \cdot x^2 - 1.392604236 \cdot x + 4.773776556$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_5 = 0.22$:

$$y'_5 = y'(x_5) = y'(0.22) \approx L'_2(0.22) = 4.630999187$$
$$y''_5 = y''(x_5) = y''(0.22) \approx L''_2(0.22) = 27.38001556$$

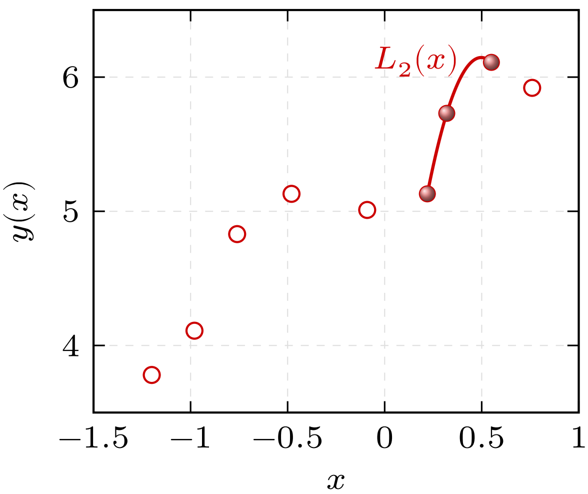
7) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_5, x_6, x_7\}$ полиномом Лагранжа вто-

рого порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) \;&=\; \frac{(x-0.32)(x-0.55)}{(0.22-0.32)(0.22-0.55)}\cdot 5.13 \;+ \\ &+\; \frac{(x-0.22)(x-0.55)}{(0.32-0.22)(0.32-0.55)}\cdot 5.73 \;+ \\ &+\; \frac{(x-0.22)(x-0.32)}{(0.55-0.22)(0.55-0.32)}\cdot 6.11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_5, x_7]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -13.17523062\cdot x^2 + 13.11462456\cdot x + 2.882463758$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_6 = 0.32$:

$$y_6' = y'(x_6) = y'(0.32) \approx L_2'(0.32) = 4.682476963$$
$$y_6'' = y''(x_6) = y''(0.32) \approx L_2''(0.32) = -26.35046124$$

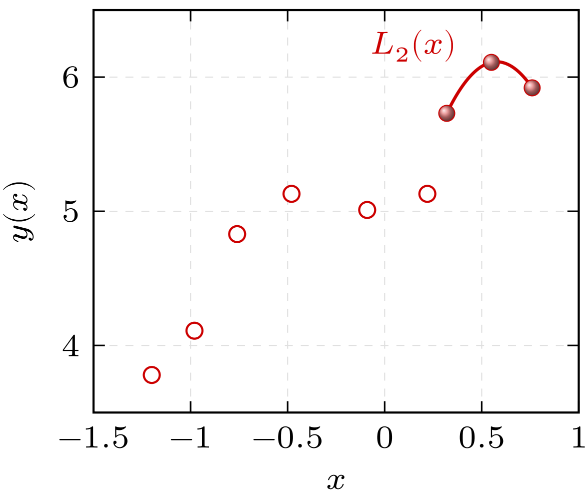
8) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_6, x_7, x_8\}$ полиномом Лагранжа вто-

рого порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) \;&=\; \frac{(x-0.55)(x-0.76)}{(0.32-0.55)(0.32-0.76)}\cdot 5.73 \;+\\ &+\; \frac{(x-0.32)(x-0.76)}{(0.55-0.32)(0.55-0.76)}\cdot 6.11 \;+\\ &+\; \frac{(x-0.32)(x-0.55)}{(0.76-0.32)(0.76-0.55)}\cdot 5.92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_6, x_8]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -5.811217790\cdot x^2 + 6.707933391\cdot x + 4.178530017$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_7 = 0.55$:

$$y'_7 = y'(x_7) = y'(0.55) \approx L'_2(0.55) = 0.315593822$$
$$y''_7 = y''(x_7) = y''(0.55) \approx L''_2(0.55) = -11.62243558$$

9) Таким образом, определены значения первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производной функции $y(x)$ в каждом внутреннем узле сетки:

Таблица 2 – Значения первой и второй производных функции $y(x)$ во внутренних узлах сетки $\{x_i\}$

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55
y'_i	2.39	2.30	0.50	0.08	4.63	4.68	0.32
y''_i	8.06	-8.81	-4.12	1.99	27.38	-26.35	-11.62

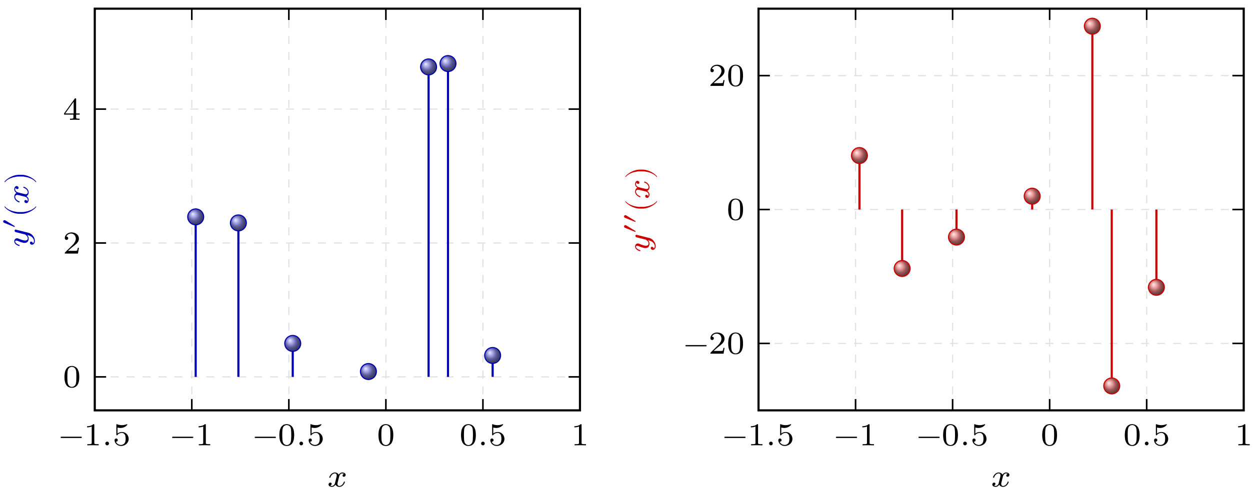


Рисунок 1 – Графики первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производной от функции $y(x)$, заданной таблично

2 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (начальным условием).

Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}(t, \vec{u}), \quad \vec{u}(0) = \mathring{\vec{u}}, \tag{1}$$

где $\vec{u}(t)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению; $\vec{f}(t, \vec{u})$ – известные функции, зависящие от времени и неизвестных функций $\vec{u}$; $\mathring{\vec{u}}$ – *начальные условия*, т.е. значения неизвестных функций в начальный момент времени $(t = 0)$.

Запишем в развернутом виде систему (1) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и начальные условия:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} & = & f_1(t, u_1, u_2, \cdots, u_n), & u_1(0) & = & \mathring{u}_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} & = & f_2(t, u_1, u_2, \cdots, u_n), & u_2(0) & = & \mathring{u}_2 \\ \dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots & = & ... \\ \dfrac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t} & = & f_n(t, u_1, u_2, \cdots, u_n), & u_n(0) & = & \mathring{u}_n \end{cases}, \tag{2}$$

где n – количество дифференциальных уравнений в системе (1).

Будем полагать, что решение задачи Коши (2) существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

2.1 Метод Эйлера решения задачи Коши

Введем по переменной t сетку, т.е. будем рассматривать множество моментов времени:

$$\{t_j\}, \quad j = 1, 2, \ldots N,$$

где j – номер временного интервала; $\Delta t_{j+1} = (t_{j+1} - t_j)$ – шаг сетки, т.е. временной интервал между двумя последовательными моментами времени; N –

количество узлов временной сетки.

Основная идея метода Эйлера заключается в предположении, о том что неизвестные функции $\vec{u}(t)$ изменяются линейно в интервале $[t_j, t_{j+1}]$ между двумя соседними узлами временной сетки и аппроксимация неизвестных функций проводится полиномом первого порядка $\vec{L}_1(t)$:

$$\vec{u} \approx \vec{L}_1(t) = \frac{t - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} \cdot \vec{u}(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot \vec{u}(t_{j+1}).$$

Производная от неизвестной функции приближенно аппроксимируется выражением вида:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} \approx \vec{L}_1'(t) = \frac{\vec{u}(t_{j+1}) - \vec{u}(t_j)}{t_{j+1} - t_j}, \tag{3}$$

где t_{j+1} и t_j – два последовательных момента времени.

Тогда систему дифференциальных уравнений первого порядка (1) приближенно можно записать в виде:

$$\frac{\vec{u}(t_{j+1}) - \vec{u}(t_j)}{\Delta t_{j+1}} \approx \vec{f}\left(t_j, \vec{u}(t_j)\right) \tag{4}$$

Относительно неизвестных $\vec{u}(t_{j+1})$ это система линейных алгебраических уравнений и решение системы (4) находится явным образом по рекуррентным формулам:

$$\vec{u}(t_{j+1}) = \vec{u}(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot \vec{f}\left(t_j, \vec{u}(t_j)\right), \quad \vec{u}(0) = \mathring{\vec{u}}. \tag{5}$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши. К недостаткам метода можно отнести малую точность и систематическое накопление ошибок.

Для простоты рассмотрим только одно дифференциальное уравнение с единственным начальным условием:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot f\left(t_j, y(t_j)\right), \quad y(0) = \mathring{y}$$

На рисунке 2 представлена графическая иллюстрация метода Эйлера численного решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка.

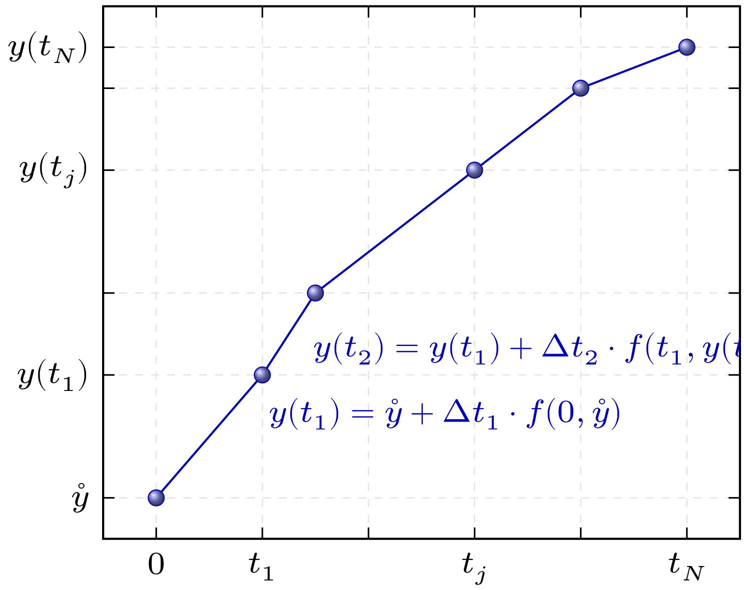


Рисунок 2 – Ломаная Эйлера

2.2 Оценка погрешности решения задачи Коши

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) по временной переменной t с учетом начальных условий:

$$\vec{v}(t) = \vec{u}(0) + \int\limits_0^t \vec{f}(\xi, \vec{v}) d\xi. \tag{6}$$

Уравнение (6) является интегральным уравнением для неизвестной функции $\vec{v}(t)$, а его решение эквивалентно решению задачи Коши (1), что можно проверить прямой подстановкой (6) в (1).

На временной сетке $\{t_j\}$ интеграл в правой части равенства (6) приближенно вычисляется по *формуле трапеций*:

$$\int\limits_0^{t_{j+1}} \vec{f}(\xi, \vec{v}) d\xi \approx \sum_{k=0}^{j} \frac{\vec{f}\left(t_{k+1}, \vec{v}(t_{k+1})\right) + \vec{f}\left(t_k, \vec{v}(t_k)\right)}{2} \cdot (t_{k+1} - t_k). \tag{7}$$

Воспользовавшись (7), выражением для решения интегрального уравнения (6) можно записать в рекуррентной форме:

$$\vec{v}(t_{j+1}) = \vec{v}(t_j) + \frac{\vec{f}\left(t_{j+1}, \vec{v}(t_{j+1})\right) + \vec{f}\left(t_j, \vec{v}(t_j)\right)}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \tag{8}$$

Для определения приближенного значения решения интегрального уравнения могут быть использованы значения неизвестных функций $\vec{u}(t_j)$, рассчитанные по методу Эйлера на j-ом временном слое:

$$\vec{v}(t_{j+1}) \approx \vec{v}(t_j) + \frac{\vec{f}\left(t_j, \vec{u}(t_j)\right) + \vec{f}\left(t_{j+1}, \vec{u}(t_{j+1})\right)}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \qquad (9)$$

В качестве предельной абсолютной погрешности приближенного решения $\vec{u}(t_j)$ задачи Коши (1) можно принять величину:

$$\varepsilon_i(t_j) = |v_i(t_j) - u_i(t_j)|, \quad i = 1, 2, \dots n \qquad (10)$$

2.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера

Применяя метод Эйлера, найдем решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} & = & 0,2t + u_2, & u_1(0) & = & 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} & = & -\dfrac{u_1}{2}, & u_2(0) & = & 0 \end{cases}, \qquad (11)$$

в пределах отрезка $t \in [0, 10]$ на равномерной сетке с количеством временных интервалов $N = 5$.

Введем обозначения

$$\begin{cases} f_1(t) & = & 0,2 \cdot t + u_2(t) \\ f_2(t) & = & -\dfrac{u_1(t)}{2} \end{cases}.$$

где f_1 и f_2 – функции, стоящие в правых частях дифференциальных уравнений системы (11):

Рекуррентные соотношения (**??**) для решения задачи Коши (11) методом Эйлера:

$$\begin{cases} u_1(t_{j+1}) & = & u_1(t_j) + \tau \cdot f_1(t_j), & u_1(0) & = & 1 \\ u_2(t_{j+1}) & = & u_2(t_j) + \tau \cdot f_2(t_j), & u_2(0) & = & 0 \end{cases}, \qquad (12)$$

Решение системы интегральных уравнений (6) определяется рекурретными соотношениями:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(t_{j+1}) & = & \hat{u}_1(t_j) + \tau \cdot \dfrac{f_1(t_j) + f_1(t_{j+1})}{2}, & \hat{u}_1(0) & = & 1 \\ \hat{u}_2(t_{j+1}) & = & \hat{u}_2(t_j) + \tau \cdot \dfrac{f_2(t_j) + f_2(t_{j+1})}{2}, & \hat{u}_2(0) & = & 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Определим временной шаг метода Эйлера, зная длину временного отрезка (“время наблюдения“) и количество интервалов:

$$\tau = \frac{t_{max} - t_0}{N} = \frac{10 - 0}{5} = 2,$$

где $t_0 = 0$ – начальный момент времени; $t_{\max}$ – максимальное время (“время наблюдения“).

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau = 2$:

$$\{t_j\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Последовательно определяем приближенное решение задачи Коши (11) методом Эйлера, используя рекуррентные соотношения (12).

1) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_1 = 2$:

$$\begin{aligned} f_1(0) &= 0,2 \cdot 0 + u_2(0) = 0,2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ f_2(0) &= -\frac{u_1(0)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1(2) & = & u_1(0) + 2 \cdot f_1(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ u_2(2) & = & u_2(0) + 2 \cdot f_2(0) = 0 + 2 \cdot (-0,5) = -1 \end{cases}.$$

2) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_2 = 4$:

$$\begin{aligned} f_1(2) &= 0,2 \cdot 2 + u_2(2) = 0,2 \cdot 2 + (-1) = -0,6 \\ f_2(2) &= -\frac{u_1(2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1(4) &= u_1(2) + 2 \cdot f_1(2) = 1 + 2 \cdot (-0,6) = -0,2 \\ u_2(4) &= u_2(2) + 2 \cdot f_2(2) = -1 + 2 \cdot (-0,5) = -2 \end{cases}.$$

3) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_3 = 6$:

$$f_1(4) = 0,2 \cdot 4 + u_2(4) = 0,2 \cdot 4 + (-2) = -1,2$$

$$f_2(4) = -\frac{u_1(4)}{2} = -\frac{-0,2}{2} = 0,1$$

$$\begin{cases} u_1(6) &= u_1(4) + 2 \cdot f_1(4) = -0,2 + 2 \cdot (-1,2) = -2,6 \\ u_2(6) &= u_2(4) + 2 \cdot f_2(4) = -2 + 2 \cdot (0,1) = -1,8 \end{cases}.$$

4) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_4 = 8$:

$$f_1(6) = 0,2 \cdot 6 + u_2(6) = 0,2 \cdot 6 + (-1,8) = -0,6$$

$$f_2(6) = -\frac{u_1(6)}{2} = -\frac{-2,6}{2} = 1,3$$

$$\begin{cases} u_1(8) &= u_1(6) + 2 \cdot f_1(4) = -2,6 + 2 \cdot (-0,6) = -3,8 \\ u_2(8) &= u_2(6) + 2 \cdot f_2(6) = -1,8 + 2 \cdot (1,3) = 0,8 \end{cases}.$$

5) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_5 = 10$:

$$f_1(8) = 0,2 \cdot 8 + u_2(8) = 0,2 \cdot 8 + 0,8 = 2,4$$

$$f_2(8) = -\frac{u_1(8)}{2} = -\frac{-3,8}{2} = 1,9$$

$$\begin{cases} u_1(10) &= u_1(10) + 2 \cdot f_1(4) = -3,8 + 2 \cdot (2,4) = 1 \\ u_2(10) &= u_2(8) + 2 \cdot f_2(8) = 0,8 + 2 \cdot (1,9) = 4,6 \end{cases}.$$

На рисунке 3 представлено решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений (11).

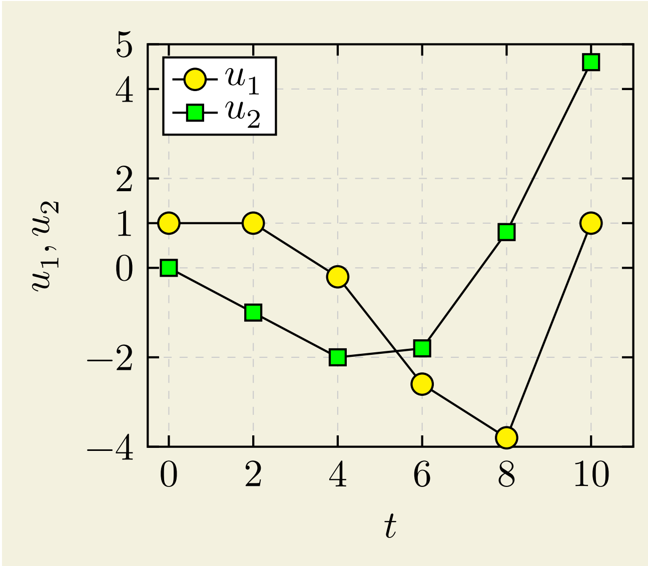


Рисунок 3 – Зависимость неизвестных функций от времени

Последовательно определяем приближенное решение интегрального уравнения (11), используя рекуррентные соотношения (13).

1) Определим значения неизвестных функций $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ в точке $t_1 = 2$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(2) = \hat{u}_1(0) + \tau \cdot \dfrac{f_1(0) + f_1(2)}{2} = 1 + 2 \cdot \dfrac{0 + (-0,6)}{2} = 0,4 \\ \hat{u}_2(2) = \hat{u}_2(0) + \tau \cdot \dfrac{f_2(0) + f_2(2)}{2} = 0 + 2 \cdot \dfrac{-0,5 + (-0,5)}{2} = -1 \end{cases}.$$

2) Определим значения неизвестных функций $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ в точке $t_2 = 4$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(4) = \hat{u}_1(2) + \tau \cdot \dfrac{f_1(2) + f_1(4)}{2} = 0,4 + 2 \cdot \dfrac{(-0,6) + (-1,2)}{2} = -2,4 \\ \hat{u}_2(4) = \hat{u}_2(2) + \tau \cdot \dfrac{f_2(2) + f_2(4)}{2} = -1 + 2 \cdot \dfrac{-0,5 + 0,1}{2} = -1,4 \end{cases}.$$

3) Определим значения неизвестных функций $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ в точке $t_3 = 6$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(6) = \hat{u}_1(4) + \tau \cdot \dfrac{f_1(4) + f_1(6)}{2} = -2,4 + 2 \cdot \dfrac{-1,2 + (-0,6)}{2} = -4,2 \\ \hat{u}_2(6) = \hat{u}_2(4) + \tau \cdot \dfrac{f_2(4) + f_2(6)}{2} = -1,4 + 2 \cdot \dfrac{0,1 + 1,3}{2} = 0 \end{cases}.$$

4) Определим значения неизвестных функций $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ в точке $t_4 = 8$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(8) = \hat{u}_1(6) + \tau \cdot \dfrac{f_1(6) + f_1(8)}{2} = -4,2 + 2 \cdot \dfrac{-0,6 + 2,4}{2} = -2,4 \\ \hat{u}_2(8) = \hat{u}_2(6) + \tau \cdot \dfrac{f_2(6) + f_2(8)}{2} = 0 + 2 \cdot \dfrac{1,3 + 1,9}{2} = 3,2 \end{cases}.$$

5) Определим значения неизвестных функций $\hat{u}_1$ и $\hat{u}_2$ в точке $t_5 = 10$:

$$f_1(10) = 0,2 \cdot 10 + u_2(10) = 0,2 \cdot 8 + 4,6 = 6,2$$

$$f_2(10) = -\frac{u_1(10)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$\begin{cases} \hat{u}_1(10) = \hat{u}_1(8) + \tau \cdot \dfrac{f_1(8) + f_1(10)}{2} = -2,4 + 2 \cdot \dfrac{2,4 + 6,2}{2} = 6,2 \\ \hat{u}_2(10) = \hat{u}_2(8) + \tau \cdot \dfrac{f_2(8) + f_2(10)}{2} = 3,2 + 2 \cdot \dfrac{1,9 + (-0,5)}{2} = 4,6 \end{cases}.$$

На рисунке 4 представлены решения задачи Коши (1) и интегрального уравнения (6), рассчитанные в различные моменты времени.

В таблице 3 и на рисунке 5 представлены значения предельной абсолютной погрешности приближенного решения задачи Коши для различных моментов времени.

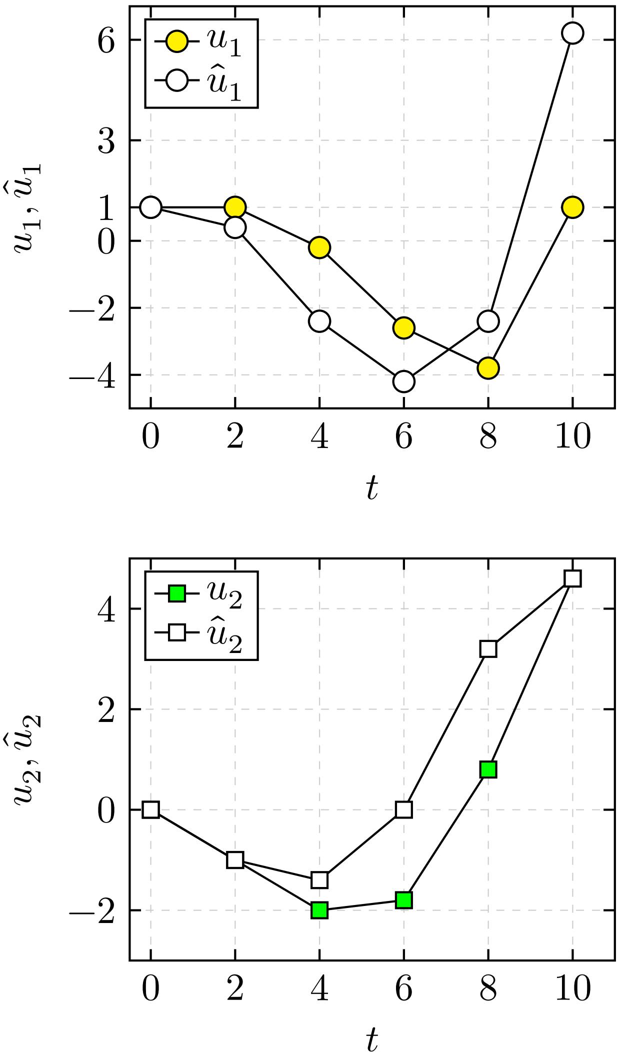


Рисунок 4 – Приближенное решение задачи Коши и соответствующего интегрального уравнения

Из рисунка 5 видно, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t)$ – $\epsilon_2 = 2,4$.

Таблица 3 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

[1pt] Время	0	2	4	6	8	10
Задача Коши						
u_1	1	1	-0,2	-2,6	-3,8	1
u_2	0	-1	-2	-1,8	0,8	4,6
Интегральное уравнение						
$\hat{u}_1$	1	0,4	-2,4	-4,2	-2,4	6,2
$\hat{u}_2$	0	-1	-1,4	0	3,2	4,6
Абсолютная погрешность $\epsilon = \lvert\hat{u} - u\rvert$						
ϵ_1	0	0,6	2,2	1,6	1,4	5,2
ϵ_2	0	0	0,6	1,8	2,4	0

[1pt]

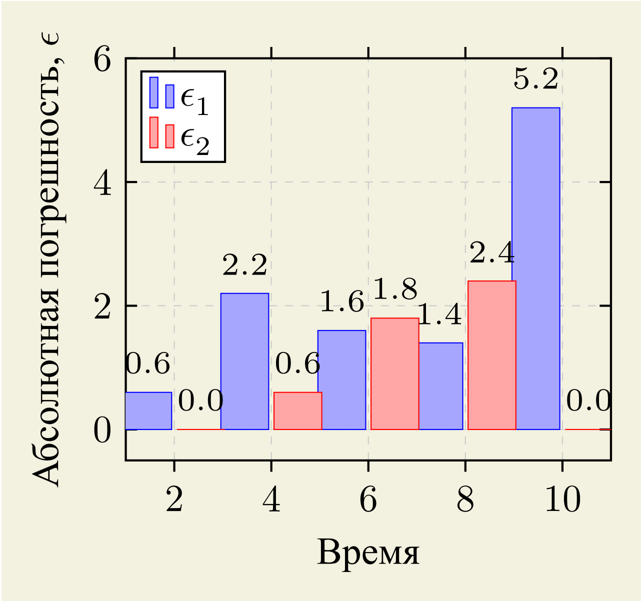


Рисунок 5 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t)$ – $\epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.