

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Интерполярование функций	4
1.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа	4
1.2 Пример интерполярование функции полиномом Лагранжа $L_3(x)$	6
2 Численное интегрирование	9
2.1 Формула прямоугольников	10
2.2 Формула трапеций	11
2.3 Формула Симпсона	11
2.4 Численное интегрирования функции заданной таблично	12
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	19

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Интерполяирование функций

1.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ выбрана сетка $\{x_i\}$ (здесь $i = 0, 1, \dots, n$), в узлах которой известны значения функции $y_i = f(x_i)$. Задача интерполяирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен степени n

$$L_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i$$

значения которого в заданных точках $\{x_i\}$, совпадают со значениями функции $\{y_i\}$ в этих точках.

Во всех узлах сетки $\{x_i\}$ многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_n(x_0) = y_0 \\ L_n(x_1) = y_1 \\ L_n(x_2) = y_2 \\ \dots \\ L_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполяции:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 + \dots + c_n(x) \cdot y_n$$

где $c_0(x), c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ – неизвестные функции.

Из условий интерполяции:

$$\begin{cases} c_0(x_0) \cdot y_0 + c_1(x_0) \cdot y_1 + c_2(x_0) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_0) \cdot y_n = y_0 \\ c_0(x_1) \cdot y_0 + c_1(x_1) \cdot y_1 + c_2(x_1) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_1) \cdot y_n = y_1 \\ c_0(x_2) \cdot y_0 + c_1(x_2) \cdot y_1 + c_2(x_2) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_2) \cdot y_n = y_2 \\ \dots \\ c_0(x_n) \cdot y_0 + c_1(x_n) \cdot y_1 + c_2(x_n) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_n) \cdot y_n = y_n \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $c_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n :

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $c_i(x)$:

Таким образом, коэффициенты $c_i(x)$ интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1.2 Пример интерполяирования функции полиномом Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих точках $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и извест-

ными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.76 - (-0.09))(-0.76 - 0.22)(-0.76 - 0.55)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.55)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.55)}{(0.22 - (-0.76))(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.55)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.55 - (-0.76))(0.55 - (-0.09))(0.55 - 0.22)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{0.13} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{0.28} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & (x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot (-0.09) + \\
 & + (x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot 13.84 + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55) \cdot (-3.99) + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22) \cdot 3.47
 \end{aligned}$$

- 4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831 \cdot x + 0.9119 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

- 5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (**сплошная линия**).

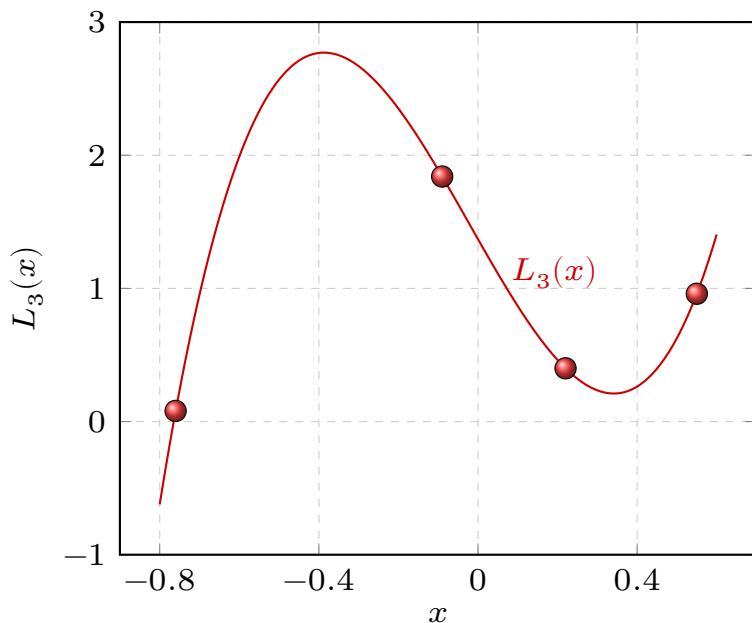


Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

2 Численное интегрирование

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$ – первообразная подынтегральной функции $f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции $f(x)$.

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$ заменяют интерполяющей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где c_i – числовые коэффициенты квадратурной формулы; x_i – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка $[a, b]$, ($i = 0, 1, \dots, n$).

На основании свойств определенных интегралов, I можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

Для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке $[a, b]$ достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке $x \in [x_{i-1}, x_i]$ для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

2.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

В зависимости от выбора узла сетки $\{x_i\}$ для аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_i, x_{i-1}]$ различают левую и правую формулы прямоугольников. Если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце

отрезка $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$, то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x)dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка $L_0 \approx f(x_i) = y_i$, то справедлива правая формула прямоугольников:

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x)dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

2.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным по множеству узлов сетки $\{x_{i-1}, x_i\}$:

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x)dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

2.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке квадратурная *формула Симпсона* является следствием аппроксимации на частичном отрезке подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени $f(x) \approx L_2(x)$, кото-

рый построен по узлам сетки $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x)}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_i + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
 \end{aligned}$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ на частичном отрезке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определяет формулу Симпсона:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx,$$

где a_i, b_i, c_i – коэффициенты при соответствующих степенях x интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ в пределах частичного отрезка $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Таким образом, квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$I \approx \sum_{i=1,3,5,\dots}^{N-1} \left[a_i \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3} + b_i \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_i (x_{i+1} - x_{i-1}) \right],$$

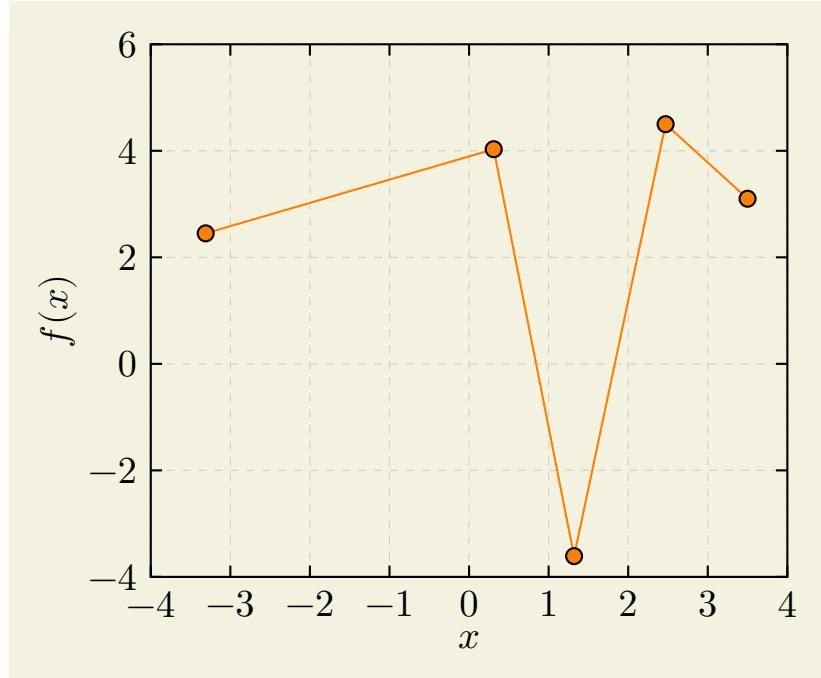
где N – количество узлов интерполяции.

2.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки $\{x_i\}$ определены значения некоторой функции $\{y_i\}$:

x	-3,31	0,31	1,32	2,47	3,50
$f(x)$	2,45	4,03	-3,61	4,50	3,1

- 1) Построим график функции $f(x)$ заданной таблично.

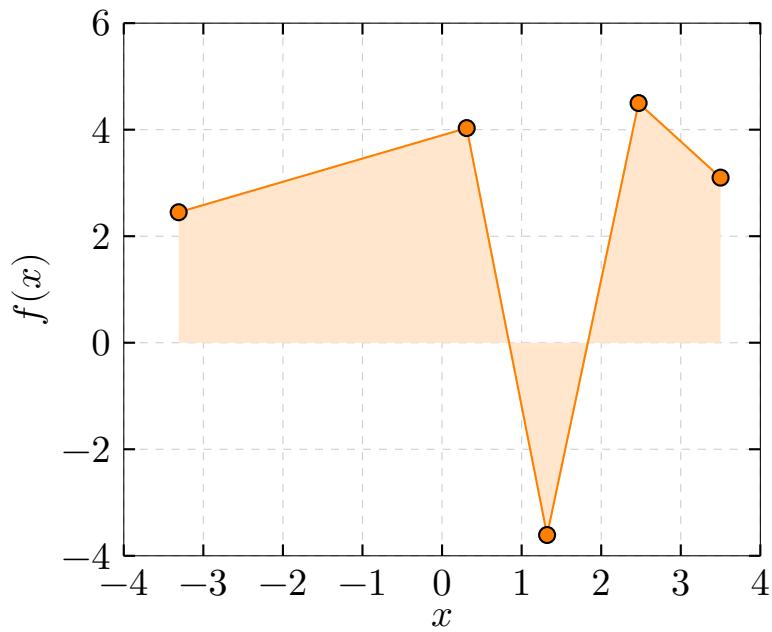


Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика и осью абсцисс Ox (выделенная область на графике).

- 2) Рассмотрим **метод трапеций** для нахождения численного значения интеграла функции $f(x)$ заданной таблично на отрезке $x \in [-3, 3]$.
- Разобъем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным на узлам x_{i-1}, x_i , т.е. прямой соединяющей два соседних узла.



Определим длину частичных отрезков:

$$h_1 = (x_1 - x_0) = 0,31 - (-3,31) = 3,62$$

$$h_2 = (x_2 - x_1) = 1,32 - 0,31 = 1,01$$

$$h_3 = (x_3 - x_2) = 2,47 - 1,32 = 1,15$$

$$h_4 = (x_4 - x_3) = 3,50 - 2,47 = 1,03$$

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$I_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h_1 = \frac{2,45 + 4,03}{2} \cdot 3,62 = 11,73$$

$$I_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h_2 = \frac{4,03 + 3,61}{2} \cdot 1,01 = 0,21$$

$$I_3 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h_3 = \frac{-3,61 + 4,50}{2} \cdot 1,15 = 0,51$$

$$I_4 = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \cdot h_4 = \frac{4,50 + 3,10}{2} \cdot 1,03 = 3,91$$

Определим интеграл I на всем отрезке интегрирования $[-3, 31; 3, 50]$, воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 11,73 + 0,21 + 0,51 + 3,91 = 16,37.$$

- 3) Рассмотрим **метод Симпсона** для нахождения численное значение интеграла

функции $f(x)$ заданной таблично на отрезке $x \in [-3, 31; 3, 50]$.

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4]$$

На каждом из двух отрезков построим интерполяционный полинома Лагранжа $L_2(x)$

- 4) В пределах первого частичного отрезка $[-3, 31; 1, 32]$ построим полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам интерполяции $x_0 = -3, 31; x_1 = 0, 31; x_2 = 1, 32$:

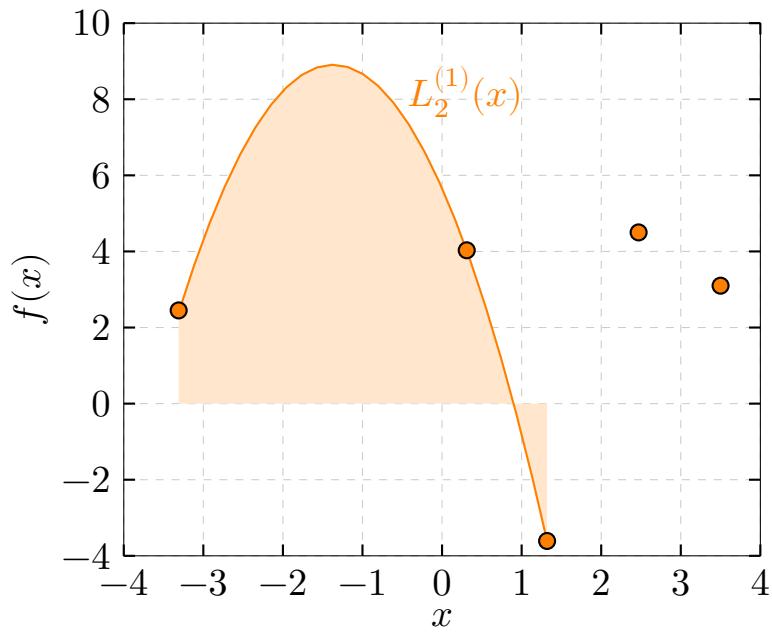
$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(x) &= \frac{(x - 0, 31)(x - 1, 32)}{((-3, 31) - 0, 31)(-3, 31 - 1, 32)} \cdot 2, 45 + \\ &+ \frac{(x - (-3, 31))(x - 1, 32)}{(0, 31 - (-3, 31))(0, 31 - 1, 32)} \cdot 4, 03 + \\ &+ \frac{(x - (-3, 31))(x - 0, 31)}{(1, 32 - (-3, 31))(1, 32 - 0, 31)} \cdot (-3, 61) \end{aligned}$$

В результате алгебраических преобразований получим:

$$L_2^{(1)}(x) = -1, 73 \cdot x^2 - 4, 74 \cdot x + 5, 66$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа $L_2^{(1)}(x)$ на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{-3,31}^{1,32} L_2^{(1)}(x) dx = \int_{-3,31}^{1,32} (-1, 73 \cdot x^2 - 4, 74 \cdot x + 5, 66) dx = 25, 88$$



- 5) В пределах второго частичного отрезка $[1, 32; 3, 50]$ построим полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам интерполяции $x_2 = 1, 32; x_3 = 2, 47; x_4 = 3, 50$:

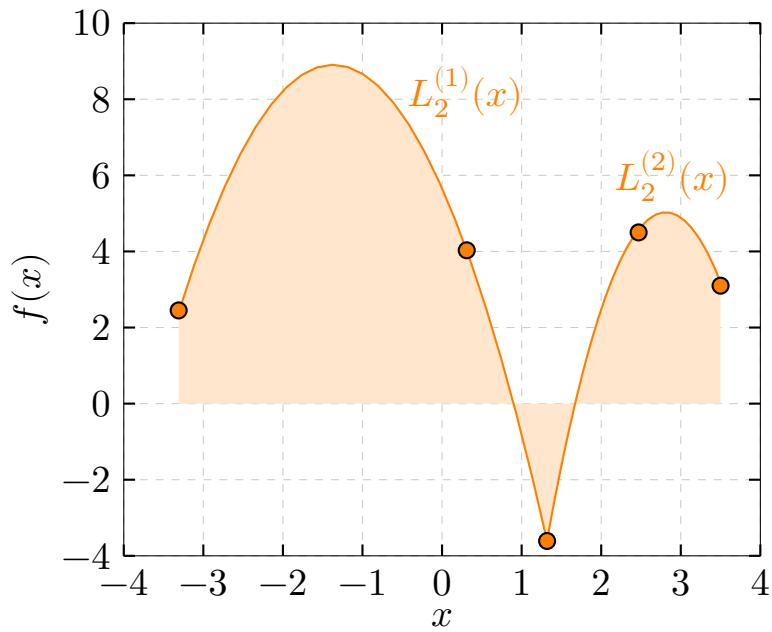
$$\begin{aligned}
 L_2^{(2)}(x) &= \frac{(x - 2, 47)(x - 3, 50)}{(1, 32 - 2, 47)(1, 32 - 3, 50)} \cdot (-3, 61) + \\
 &+ \frac{(x - 1, 32)(x - 3, 50)}{(2, 47 - 1, 32)(2, 47 - 3, 50)} \cdot 4, 50 + \\
 &+ \frac{(x - 1, 32)(x - 2, 47)}{(3, 50 - 1, 32)(3, 50 - 2, 47)} \cdot 3, 10
 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -3,87 \cdot x^2 + 21,76 \cdot x - 25,56$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа $L_2^{(2)}(x)$ на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{1,32}^{3,50} L_2^{(2)}(x) dx = \int_{1,32}^{3,50} (-3,87 \cdot x^2 + 21,76 \cdot x - 25,56) dx = 6,13$$



- 6) Определим интеграл всем отрезке $[-3, 3]$ воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25,88 + 6,13 = 32,01$$

- 7) Сравнивая численные значения интегралов рассчитанные по методу трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что значение интегралов существенно различаются: определенный интеграл рассчитанный по методу Симпсона в 1,96 больше, чем по методу трапеций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5, 1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.