

СОДЕРЖАНИЕ

1	Аппроксимация функций	2
1.1	Точечное квадратичное аппроксимирование функций.	2
1.1.1	Аппроксимирование функций алгебраическими полиномами	8
1.2	Аппроксимирование функций полиномом второй степени $p_2(x)$	8

1 Аппроксимация функций

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $x = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество x состоит из отдельных точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если x есть отрезок $x \in [a, b]$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

В случае постановки задачи поиска аппроксимирующей функции, которая обеспечивает погрешность не хуже заданной, необходимо подбирать и структуру этой функции. Эта задача значительно сложнее предыдущей и подходы в её решении основываются на переборе различных функций $p_m(x)$ и сравнении мер близости результатов расчета с исходными данными.

1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). В этом случае используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается обобщенный линейный полином порядка m вида:

$$p_m(x) = c_0 \cdot \phi_0(x) + c_1 \cdot \phi_1(x) + \dots + c_m \cdot \phi_m(x) = \sum_{\ell=0}^m c_\ell \cdot \phi_\ell(x), \quad (1)$$

где $\{c_\ell\}$ – неизвестные коэффициенты полинома; $\{\phi_\ell(x)\}$ – система базисная функций, которая выбирается произвольно, исходя из специфики решаемой задачи.

В качестве меры отклонения $\|r\|$ полинома (1) от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2 = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^m c_\ell \cdot \phi_\ell(x_i) - y_i \right)^2 \quad (2)$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $\|r\| = \rho(c_0, c_1, \dots, c_m)$, т.е. коэффициентов полинома $\{c_\ell\}$, которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей $\|r\| \rightarrow \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необходимо найти *положения минимума функции* многих переменных $\rho(c_0, c_1, \dots, c_m)$. Для этого определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial c_0} = \frac{\partial \rho}{\partial c_1} = \frac{\partial \rho}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \rho}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными:

$$\frac{\partial \rho}{\partial c_k} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^m c_\ell \cdot \phi_\ell(x_i) - y_i \right) \cdot \phi_k(x_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Изменяя порядок суммирования, последнее выражение можно записать в виде:

$$\sum_{\ell=0}^m c_\ell \cdot \left(\sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \cdot \phi_\ell(x_i) \right) = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \cdot y_i, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$ и $\mathbf{b} = \{b_k\}$ – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \cdot \phi_\ell(x_i), \quad b_k = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

На рисунках 1 и 2 представлены схемы алгоритмов расчета элементов матрицы $a_{k\ell}$, правых частей b_k , а также решения (рисунок 3) системы линейных уравнений (3).

Если среди узлов сетки $\{x_i\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы не равен нулю $\det \mathbf{A} \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\mathbf{c} = \{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$, а полином $p_m(x)$ с такими коэффициентами $\{c_i\}$ будет обладать минимальным квадратичным отклонением ρ_{\min} .

Зная коэффициенты аппроксимирующего полинома, можно вычислить величину $\|r\|$, например, для сравнения различных аппроксимирующих функций.

Следует отметить, что все коэффициенты $\{c_i\}$ полинома (4) находятся из решения системы уравнений (3), т.е. они связаны между собой. Поэтому если какой-либо коэффициент c_i вследствие его малости ($c_i \approx 0$) отбросить, то необходимо *пересчитывать все оставшиеся коэффициенты* полинома $p_m(x)$.

Кроме того, при изменении даже одного значения исходных данных $\{x_i, y_i\}$ все коэффициенты полинома (4) изменят свои значения, так как они полностью определяются исходными данными. Поэтому при повторении аппроксимации с несколько изменившимися данными (например, вследствие погрешностей измерения, помех, влияния неучтенных факторов и т.п.) получится другая аппроксимирующая функция, отличающаяся коэффициентами.

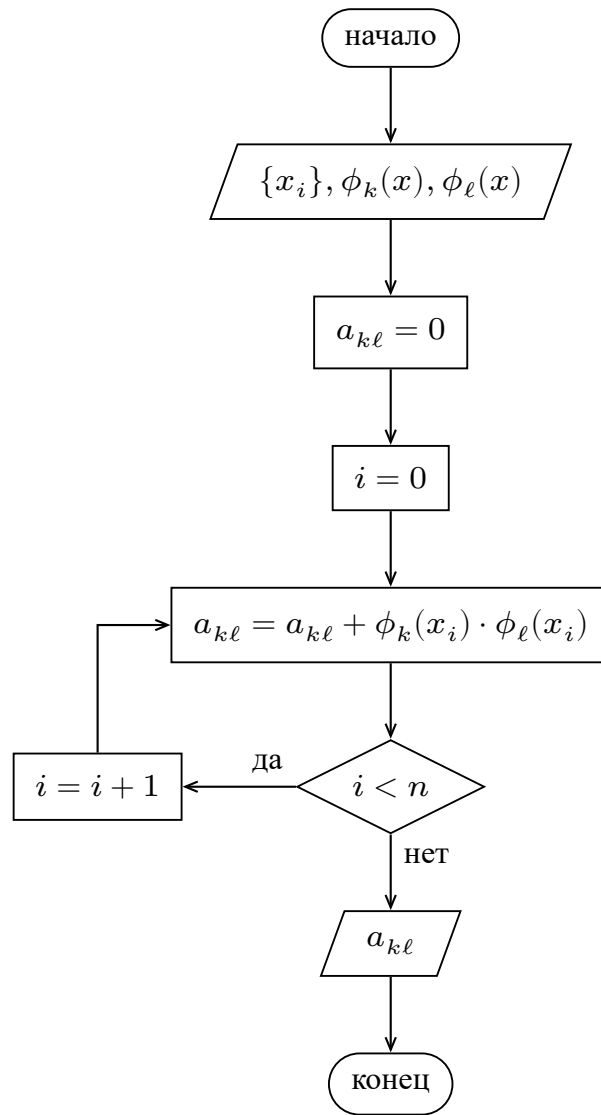


Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма нахождения элементов матрицы **A**

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \cdot \phi_l(x_i)$$

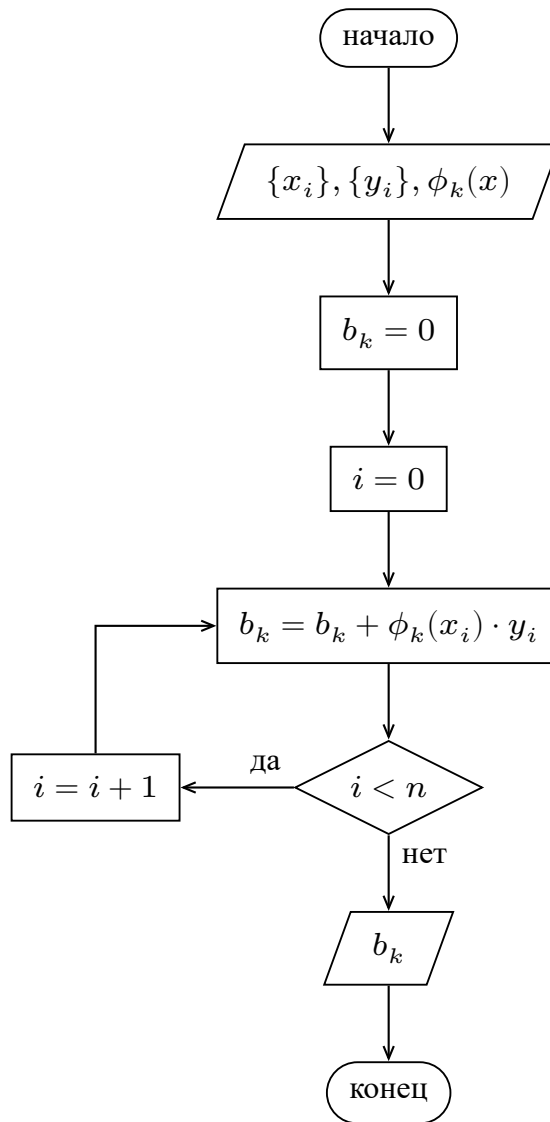


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма нахождения компонентов вектора правых частей системы уравнений $b_k = \sum_{i=0}^n \phi_k(x_i) \cdot y_i$

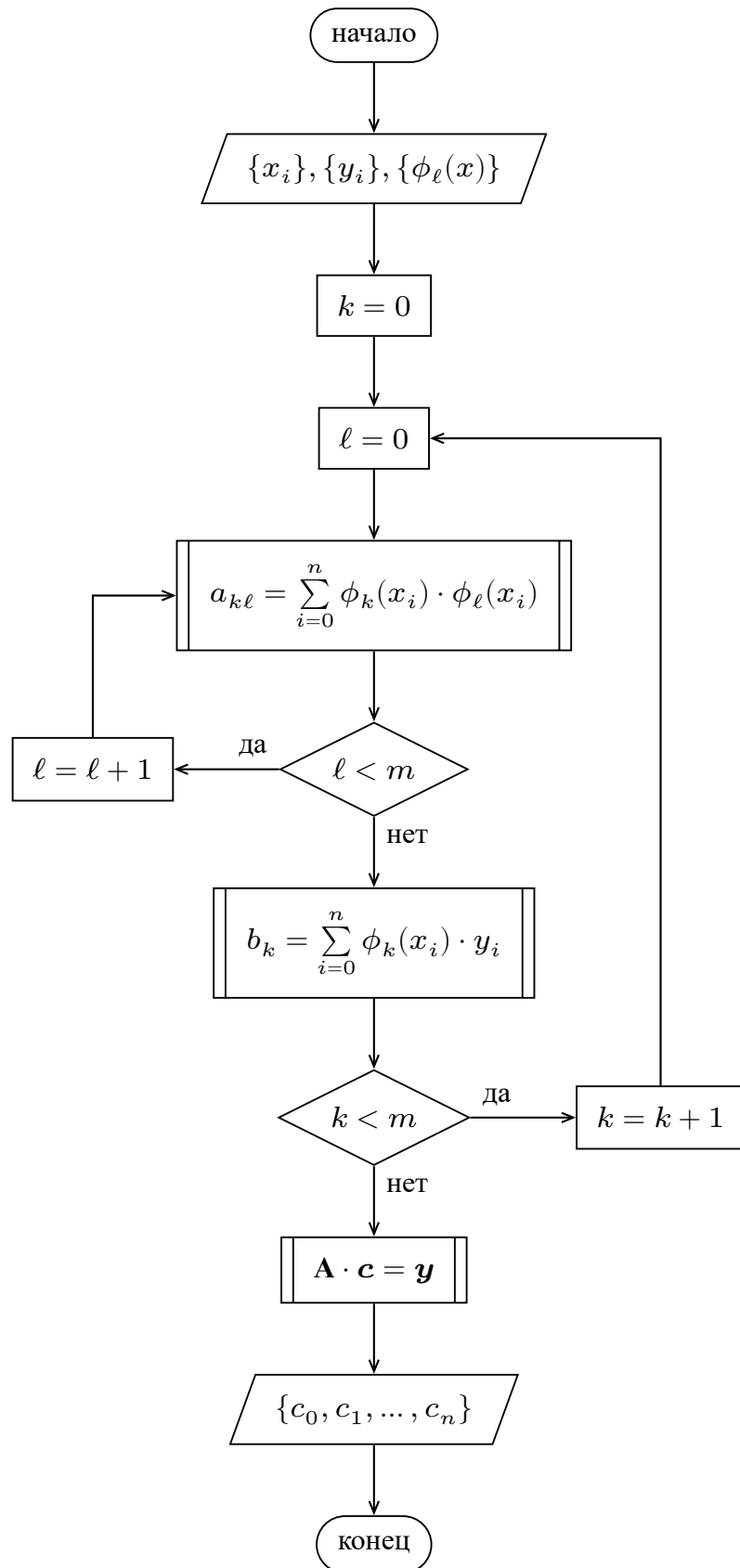


Рисунок 3 – Блок-схема алгоритма нахождения коэффициентов $\{c_i\}$ аппроксимирующего обобщенного линейного полинома $p_m(x)$

1.1.1 Аппроксимирование функций алгебраическими полиномами

Для аппроксимации функции алгебраическим полиномом используется точечный метод наименьших квадратов и рассматривается алгебраический полином степени m :

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j. \quad (4)$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial c_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial c_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial c_2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots = \dots = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial c_m} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$

Следовательно, задача точечной квадратичной аппроксимации функции алгебраическими полиномами сводится к решению системы линейных уравнений вида (3) относительно неизвестных коэффициентов полинома. Элементы матрицы системы уравнений и правые части определяются из соотношений:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

1.2 Аппроксимирование функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию $\{y_i\}$, заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени $p_2(x)$:

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

- 1) Построим меру отклонения полинома $p_2(x)$ от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\|r\| = \rho(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=0}^4 (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$ – значение функции в точке x_i .

- 2) Запишем меру отклонения $\rho(c_0, c_1, c_2)$ в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} \rho(c_0, c_1, c_2) = & (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- 3) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_0 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial c_0} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы **A** и первый элемент вектора **b**:

$$a_{00} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$a_{01} = (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56$$

$$a_{02} = (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18$$

$$b_0 = 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_1 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial c_1} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы **A** и второй элемент вектора **b**:

$$c_{10} = (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56$$

$$c_{11} = (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18$$

$$c_{12} = (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38$$

$$\begin{aligned} b_1 = & 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24 \end{aligned}$$

- 5) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_2 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial c_2} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы \mathbf{A} и третий элемент вектора \mathbf{b} :

$$c_{20} = (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18$$

$$c_{21} = (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38$$

$$c_{22} = (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49$$

$$b_2 = 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94$$

- 6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов c_0, c_1, c_2 аппроксимирующего полинома $p_2(x)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 5 & -0.56 & 1.18 \\ -0.56 & 1.18 & -0.38 \\ 1.18 & -0.38 & 0.49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.65 \\ -2.24 \\ 5.94 \end{pmatrix}$$

- 7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2 \quad (5)$$

- 8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений аппроксимирующего алгебраического полинома второго порядка $p_2(x)$ (сплошная линия).

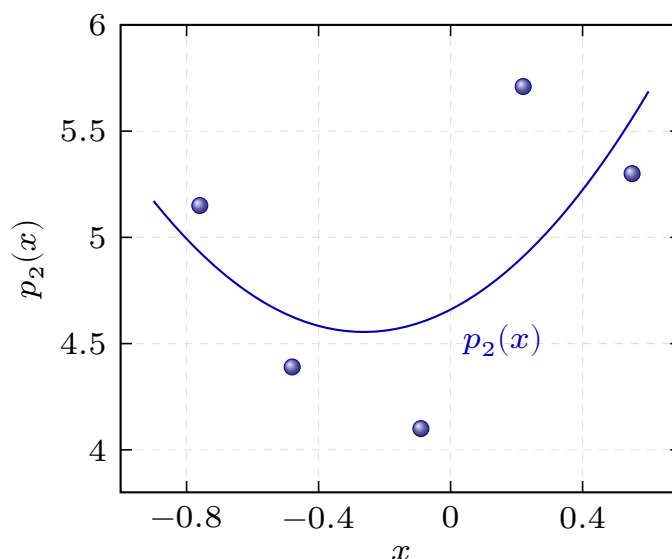


Рисунок 4 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома $p_2(x)$ (сплошная линия)

9) Рассчитаем значения аппроксимирующего полинома (5) и ошибку аппроксимации таблично заданной функции в узлах сетки $\{x_i\}$ (таблица 2):

$$\epsilon_i = y_i - p_2(x_i) \quad (6)$$

Таблица 2 – Рассчитанные значения аппроксимирующего полинома $p_2(x)$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30
$p_2(x_i)$	4.93	4.63	4.60	4.91	5.56
ϵ_i	0.22	-0.24	-0.50	0.80	-0.26

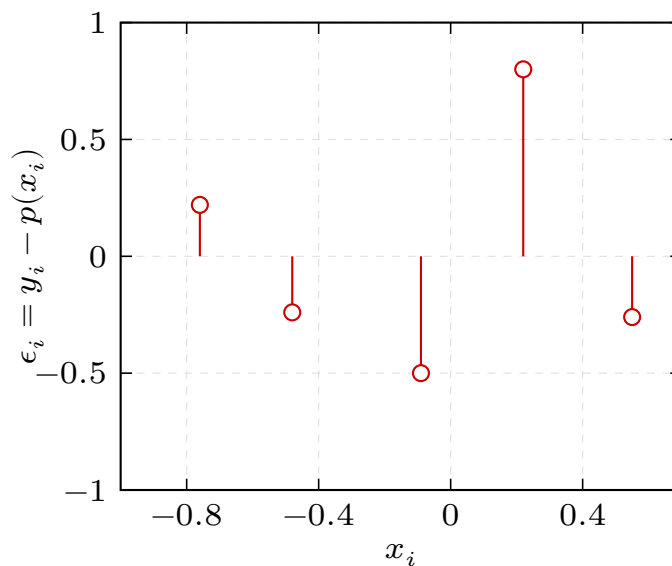


Рисунок 5 – Ошибка аппроксимации полиномом $p(x)$ функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$

10) Рассчитаем среднее квадратичное отклонение δ полинома (5) от значений функции $\{y_i\}$ в узлах сетки $\{x_i\}$:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i^2 = \frac{0.05 + 0.06 + 0.25 + 0.64 + 0.07}{5} = 0.213, \quad (7)$$

где $n = 5$ – количество узлов сетки.