СОДЕРЖАНИЕ

1 Решение нелинейных уравнений

Пусть задана функция $f(x)$ действительного переменного и необходимо найти корни уравнения или, что то же самое, нули функции $f(x)$:

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

На примере алгебраического многочлена известно, что нули $f(x)$ могут быть как действительными, так и комплексными числами. Поэтому *более точная* постановка задачи состоит в нахождении корней уравнения, расположенных в заданной области комплексной плоскости. Можно рассматривать также задачу о нахождении действительных корней уравнения, которые расположены в пределах заданного отрезка $x \in [a, b]$.

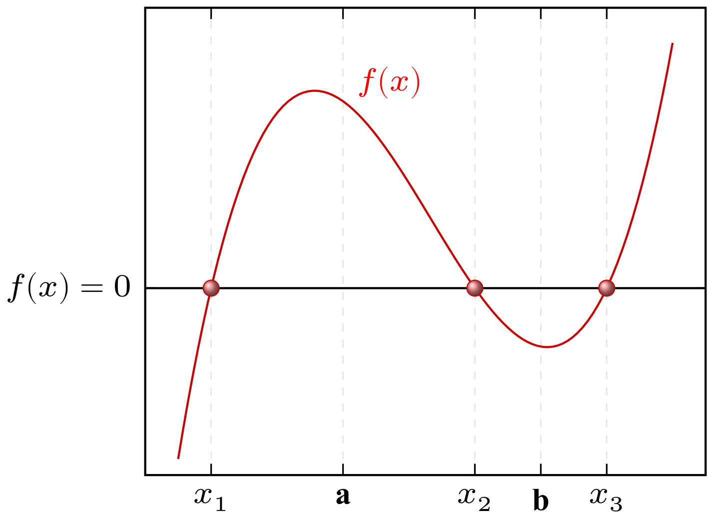

Рисунок 1 – График функции $y = f(x)$

На рисунке (1) представлены x_1, x_2 и x_3 – действительные корни уравнения (1), т.е. $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0$

Задача нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ обычно решается в два этапа:

1) На первом этапе изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, т. е. *выделяются области* в комплексной плоскости, *содержащие только один корень*. Кроме того, изучается вопрос о кратности корней. Тем самым находятся некоторые начальные приближения для корней уравнения.
2) На втором этапе, *используя заданное начальное приближение*, строится ите-

рационный процесс, позволяющий *уточнить значение отыскиваемого корня*.

Следует отметить, что не существует каких-то общих регулярных приемов решения задачи о расположении корней произвольной функции $f(x)$.

Численные методы решения нелинейных уравнений являются, как правило, итерационными методами, которые предполагают задание достаточно близких к искомому решению начальных данных.

1.1 Итервальный метод

Итервальный метод поиска корня уравнения $f(x) = 0$ состоит следующем:

1) Область поиска корня $[a, b]$ разбивается на заранее заданное количество интервалов N:

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_i, x_{i+1}] \cup \cdots [x_N, b]$$

2) Вычисляется таблица значений функции $\{f(x_i)\}$ на границах этих интервалов $\{x_i\}$.
3) Проводится последовательный перебор таблицы значений функции $\{f(x_i)\}$ $(i = 1, 2, \cdots, N)$.
4) Если при некотором i значения функции $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$ имеют разные знаки, то это означает, что на интервале $x \in (x_i, x_{i+1})$ имеет по крайней мере один действительный корень уравнения $f(x) = 0$.
5) В качестве новой, более узкой $\big(|x_i, x_{i+1}| < |a, b|\big)$, области поиска выбирается отрезок (x_i, x_{i+1}), т.е. полагают

$$x_i = a, \quad x_{i+1} = b$$

и с помощью аналогичной процедуры (1) процесс происка корня уравнения $f(x) = 0$ повторяют до тех пор пока, область поиска не станет меньше заранее заданной величины ε (погрешности поиска корня уравнения):

$$|a, b| < \varepsilon$$

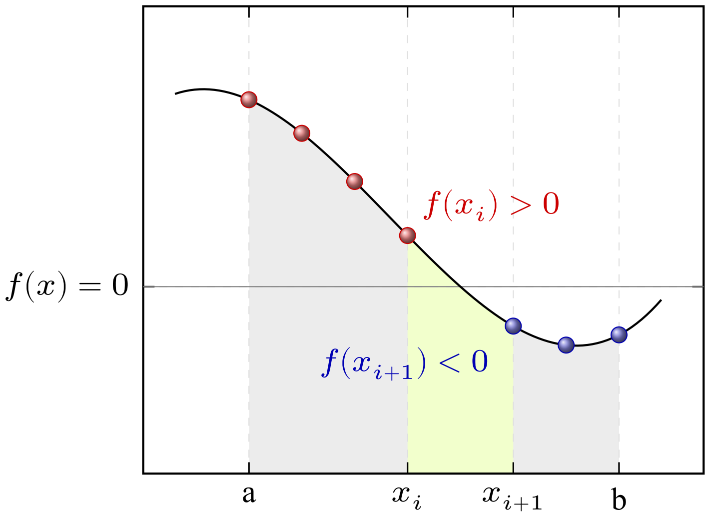

Рисунок 2 – Иллюстрация итервального метода поиска корня уравнения

1.2 Метод бисекции

Метод бисекции основан на теореме *Больцано-Коши* (теорема о промежуточном значении): если непрерывная функция $f(x)$, определённая на вещественном интервале $[a, b]$, принимает два различных значения $f(a) \neq f(b)$, тогда существует такое $c \in [a, b]$, что эта функция в этой точке принимает промежуточное значение $f(a) \leqslant f(c) \leqslant f(b)$.

Следствие теоремы Больцано-Коши (теорема о нуле непрерывной функции): если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения $f(a)$ и $f(b)$ противоположных знаков, то существует точка x_0, в которой значение функции равно нулю $f(x_0) = 0$.

Если непрерывная функция *строго монотонна* на отрезке $[a, b]$, т.е. для любого $\forall x \in [a, b]$ выполняется условие $f'(x) > 0$ либо $f'(x) < 0$, то в соответствие со следствие теоремы Больцано-Коши в пределах отрезка $[a, b]$ сущетсвует *единственный* корень уравнения $f(x) = 0$.

Метод бисекции (деления пополам) является регулярным способом поиска действительного корня уравнения $f(x) = 0$, однако для реализации этого метода необходимо *правильно выбрать область поиска*, т.е. начальный отрезок $[a, b]$ на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков $f(a) \cdot f(b) < 0$ и в пределах этого отрезка строго монотонна $f'(x) < 0$ либо $f'(x) > 0$.

Алгоритм метода деления отрезка пополам (метод бисекции):

1) Область поиска корня уравнения отрезок $[a, b]$ делится пополам:

$$c = \frac{a+b}{2}$$

2) Вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$.
3) Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и, например, на левом конце отрезка $f(a)$:
   1) если $f(a) \cdot f(c) < 0$, функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, c]$ принимает значения разных знаков, следовательно, искомый корень уравнения $f(x) = 0$ находится внутри отрезка $[a, c]$, поэтому правый конец отрезка “переносится“ в его середину.
   2) если $f(a) \cdot f(c) > 0$, функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, c]$ принимает значения одного знака, следовательно, искомый корень уравнения $f(x) = 0$ находится внутри отрезка $[c, b]$, поэтому левый конец отрезка “переносится“ в его середину.

$$\operatorname{sign}\left(f(a) \cdot f(c)\right) = \begin{cases} < 0, & b = c \\ > 0, & a = c \end{cases}$$

   Таким образом, область поиска корня уравнения $f(x) = 0$ “сужается наполовину“.
4) Процесс вычислений (1)–(3) повторятся до тех пока, длина вновь полученного интервала $[a, b]$ станет меньше заранее заданного числа ε (погрешности поиска корня уравнения):

$$|a, b| < \varepsilon$$

В качестве корня уравнения x_0 приближенно принимаются середину последнего полученного интервала $[a, b]$.

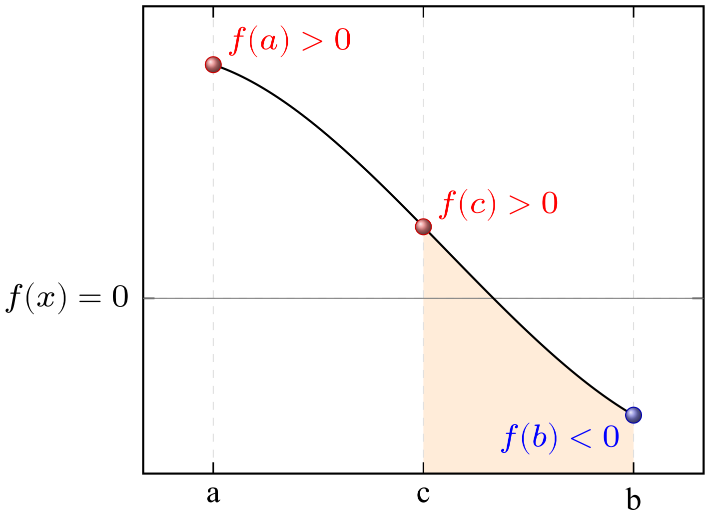

Рисунок 3 – Иллюстрация метода бисекции (деления отрезка пополам): $f(a) \cdot f(c) > 0$, поэтому новая область поиска корня отрезок $[c, b]$

Следует отметить, что если условие строгой монотонности для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не выполняется и на этом отрезке имеется несколько корней, то указанный итерационный процесс сойдется к одному из корней, но *заранее неизвестно, к какому именно*.

1.3 Метод выделения корней

Один из недостатков интервального метода и метода бисекции является сходимость итерационного процесса к заранее неизвестному корню уравнения $f(x) = 0$. Этот недостаток можно устранить удалением уже найденного корня.

Если x_1 простой корень уравнения $f(x) = 0$ и функция $f(x)$ непрерывна по Липшицу, то вспомогательная функция

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)}$$

непрерывна, причем все нули функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, за исключением x_1, так как $g(x_1) \neq 0$.

Поэтому найденный корень x_1 можно удалить, т.е. перейти в процессе поиска корня уравнения $f(x) = 0$ от функции $f(x)$ к функции $g(x)$. Тогда процесс нахождения остальных корней уравнения сведется к нахождению корней $g(x) = 0$.

Когда найден какой-нибудь новый корень x_2 уравнения $g(x) = 0$, то этот корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию:

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{(x - x_2)} = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Таким образом, можно последовательно найти все корни исходного уравнения $f(x) = 0$.

В любом методе поиска корней уравнения $f(x)$ окончательные итерации вблизи определяемого корня рекомендуется делать не по функциям типа $g(x)$, а по исходной функции $f(x)$. Последние итерации, вычисленные по функции $g(x)$, используются при этом в качестве нулевого приближения.

1.4 Численное решение нелинейного уравнения методом бисекции

На отрезке $x \in [-3, 5]$ задана непрерывная функция:

$$f(x) = \tanh(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \frac{1}{2}$$

С помощью метода бисекции найдем первый положительный корень $x_1 > 0$ нелинейного уравнения $f(x) = 0$.

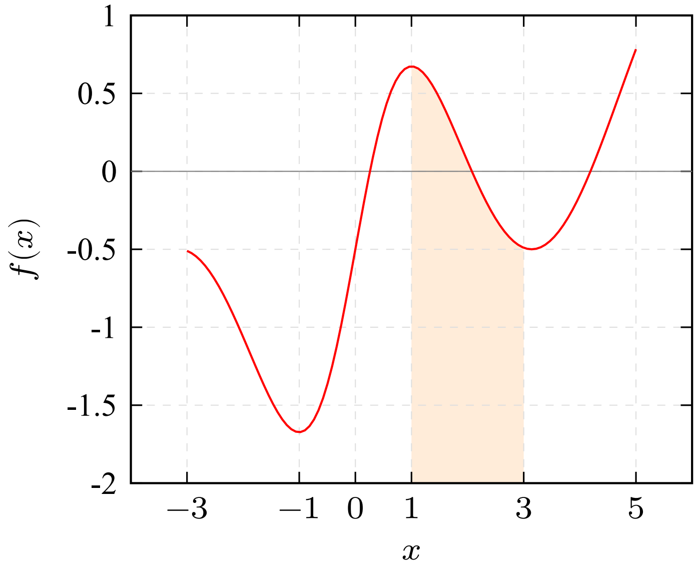

Рисунок 4 – График функции $f(x) = \tanh(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \frac{1}{2}$

На основе анализа графика функции $f(x)$ выбираем область поиска первого положительного корня уравнения $(x > 0)$, на границах которой функция $f(x)$ принимает значения разных знаков $f(a) \cdot f(b) < 0$ и в пределах этого области строго монотонна $f'(x) < 0$ либо $f'(x) > 0$.

Таким требованиям удовлетворяет отрезок $x \in [1, 3]$ (выдененная область на графике), так как функция на отрезке монотонна $f'(x) < 0$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков:

$$\begin{aligned} f(1) &= \tanh(1) \cdot (1 + \cos(1)) - \frac{1}{2} \approx 0.67 > 0 \\ f(3) &= \tanh(3) \cdot (1 + \cos(3)) - \frac{1}{2} \approx -0.49 < 0 \end{aligned}$$