

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений .....	4
1.1 Прямой ход метода Гаусса .....	5
1.2 Обратный ход метода Гаусса .....	7
1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента .....	8
1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений ме- тодом Гаусса .....	8
2 Интерполирование функций .....	11
2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа .....	11
2.2 Интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$ .....	13
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	16
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	17

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $m \times m$ ,  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$  – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности  $1 \times m$ :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , так что решение  $\vec{x}$  существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы  $m$  способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка  $m!$  арифметических действий, в то время как метод Гаусса –  $O(m^3)$  действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы  $\mathbf{A}$  ( $m \approx 10^2 \dots 10^5$ ), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{cases}$$



где  $a_{ij}^{(1)}$  и  $b_i^{(1)}$  – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное  $x_2$ . Для этого разделим второе уравнение системы на  $a_{22}^{(1)}$ , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где  $c_{2j}$  и  $y_2$  – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на  $a_{i2}^{(1)}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 3, 4, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \dots \quad (a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)}) \cdot x_m = b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)}, \\ \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \dots \quad (a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)}) \cdot x_m = b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{array} \right.$$

или в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \quad \quad \dots + a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = b_3^{(2)}, \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \dots + a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = b_m^{(2)} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}^{(2)}$  и  $b_i^{(2)}$  – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные  $x_3, x_4, \dots, x_m$ , исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \quad x_3 + \dots + c_{3m} \cdot x_m = y_3 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots = \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad x_m = y_m \end{array} \right.$$

## 1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку матрица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с  $x_m$ , найти все неизвестные  $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$ :

$$\begin{aligned} x_m &= y_m \\ x_{m-1} &= y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} &= y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ &\vdots = \dots \\ x_1 &= y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{aligned}$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1), \quad x_m = y_m$$

### 1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}$  равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}$  отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

**Основная идея метода** состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

### 1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Пример численного решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

*Прямой ход метода Гаусса.*

1) Разделим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (2)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

2) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (4) во 2-ом уравнении

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 20$$

и вычтем результат умножения из 2-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

3) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (3) в 3-ем уравнении

$$3x_1 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 15$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

4) Разделим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$  (-1)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

5) Умножим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$   $(-\frac{7}{2})$  в 3-ем уравнении

$$-\frac{7}{2}x_2 + 14x_3 = \frac{77}{2}$$



и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{21}{2}x_3 = -\frac{63}{2} \end{cases}$$

6) Разделим 3-ю строку на коэффициент при  $x_3$  ( $-\frac{21}{2}$ )

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

*Обратный ход метода Гаусса.*

Последовательно определяем неизвестные  $x_3, x_2, x_1$ :

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = -11 + 4x_3 = -11 + 4 \cdot 3 = 1$$

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

*Ответ:* решение системы линейных уравнений:  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ .

Проведём *проверку решения* системы уравнений методом прямой подстановки. Для этого подставим найденный вектор неизвестных  $\vec{x} = (2, 1, 3)$  в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 + 5 \cdot 3 = 22 \end{cases}$$

Проводим арифметические действия и получаем тождества для каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} 4 + 3 + 3 = 10 \\ 8 + 5 + 18 = 31 \\ 6 + 1 + 15 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10 = 10 \\ 31 = 31 \\ 22 = 22 \end{cases}$$



Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты  $c_i(x)$  можно искать в виде многочленов степени  $n$ :

[illegible]

Определим неизвестные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  из условия для коэффициентов  $c_i(x)$ :

[illegible]

Таким образом, коэффициенты  $c_i(x)$  интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_0(x) & = & \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} \\ c_1(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n)} \\ & \dots & \\ c_i(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (x_i - x_1) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} \\ & \dots & \\ c_n(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_2) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{array} \right.$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot f(x_i)$$

## 2.2 Интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$

.

Известно множество данных (узлов интерполяции)  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), в которых определены значения функции  $f(x)$ :

$x_i$	-0,76	-0,09	0,22	0,55
$f(x_i)$	0,08	1,84	0,40	0,96

Построим интерполяционный полином Лагранжа  $L_3(x)$  на основе данных об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и значений функции в этих точках  $\{f(x_i)\}$ :

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot f(x_i)$$

1) Распишем полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot f(x_0) + \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot f(x_1) + \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot f(x_2) + \\
 & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot f(x_3)
 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и значения интерпретируемой функции в этих узлах  $\{f(x_i)\}$ :

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0, 09))(x - 0, 22)(x - 0, 55)}{(-0, 76 - (-0, 09))(-0, 76 - 0, 22)(-0, 76 - 0, 55)} \cdot 0, 08 + \\
 & + \frac{(x - (-0, 76))(x - 0, 22)(x - 0, 55)}{(-0, 09 - (-0, 76))(-0, 09 - 0, 22)(-0, 09 - 0, 55)} \cdot 1, 84 + \\
 & + \frac{(x - (-0, 76))(x - (-0, 09))(x - 0, 55)}{(0, 22 - (-0, 76))(0, 22 - (-0, 09))(0, 22 - 0, 55)} \cdot 0, 40 + \\
 & + \frac{(x - (-0, 76))(x - (-0, 09))(x - 0, 22)}{(0, 55 - (-0, 76))(0, 55 - (-0, 09))(0, 55 - 0, 22)} \cdot 0, 96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0, 09)(x - 0, 22)(x - 0, 55)}{(-0, 67)(-0, 98)(-1, 31)} \cdot 0, 08 + \\
 & + \frac{(x + 0, 76)(x - 0, 22)(x - 0, 55)}{(0, 67)(-0, 31)(-0, 64)} \cdot 1, 84 + \\
 & + \frac{(x + 0, 76)(x + 0, 09)(x - 0, 55)}{(0, 98)(0, 31)(-0, 33)} \cdot 0, 40 + \\
 & + \frac{(x + 0, 76)(x + 0, 09)(x - 0, 22)}{(1, 31)(0, 64)(0, 33)} \cdot 0, 96
 \end{aligned}$$

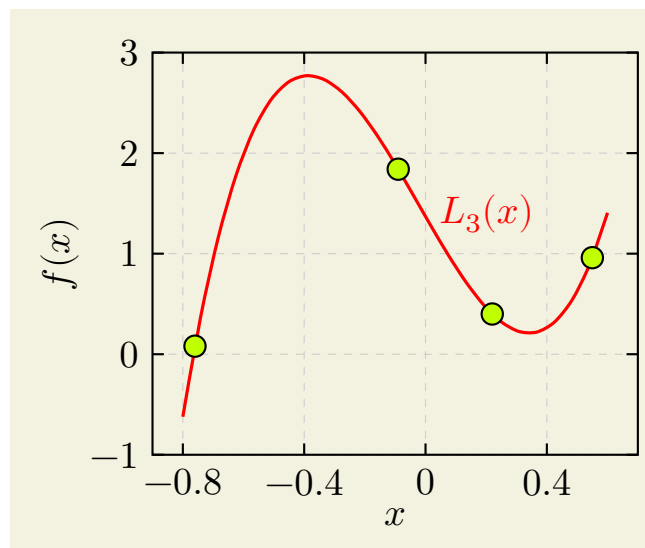
или

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0,09)(x - 0,22)(x - 0,55)}{-0,86} \cdot 0,08 + \\
 & + \frac{(x + 0,76)(x - 0,22)(x - 0,55)}{0,13} \cdot 1,84 + \\
 & + \frac{(x + 0,76)(x + 0,09)(x - 0,55)}{-0,10} \cdot 0,40 + \\
 & + \frac{(x + 0,76)(x + 0,09)(x - 0,22)}{0,28} \cdot 0,96
 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & (x + 0,09)(x - 0,22)(x - 0,55) \cdot (-0,09) + \\
 & + (x + 0,76)(x - 0,22)(x - 0,55) \cdot 13,84 + \\
 & + (x + 0,76)(x + 0,09)(x - 0,55) \cdot (-3,99) + \\
 & + (x + 0,76)(x + 0,09)(x - 0,22) \cdot 3,47
 \end{aligned}$$

- 4) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных  $f(x_i)$  (маркеры) и интерполяционный полином Лагранжа  $L_3(x)$  (**сплошная линия**).



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.