СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Интерполирование функций

1.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ выбрана сетка $\{x_i\}$ (здесь $i = 0, 1, \dots, n$), в узлах которой известны значения функции $y_i = f(x_i)$. Задача интерполирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен степени n

$$L_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i$$

значения которого в заданных точках $\{x_i\}$, совпадают со значениями функции $\{y_i\}$ в этих точках.

Во всех узлах сетки $\{x_i\}$ многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_n(x_0) & = & y_0 \\ L_n(x_1) & = & y_1 \\ L_n(x_2) & = & y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ L_n(x_n) & = & y_n \end{cases}$$

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполирования:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 + \dots + c_n(x) \cdot y_n$$

где $c_0(x), c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ – неизвестные функции.

Из условий интерполирования:

$$\begin{cases} c_0(x_0) \cdot y_0 + c_1(x_0) \cdot y_1 + c_2(x_0) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_0) \cdot y_n & = & y_0 \\ c_0(x_1) \cdot y_0 + c_1(x_1) \cdot y_1 + c_2(x_1) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_1) \cdot y_n & = & y_1 \\ c_0(x_2) \cdot y_0 + c_1(x_2) \cdot y_1 + c_2(x_2) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_2) \cdot y_n & = & y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0(x_n) \cdot y_0 + c_1(x_n) \cdot y_1 + c_2(x_n) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_n) \cdot y_n & = & y_n \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $c_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n:

$$\begin{cases} c_0(x) &= \alpha_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_2) \cdot \quad ... \quad \cdot (x - x_n) \\ c_1(x) &= \alpha_1 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \quad ... \quad \cdot (x - x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n(x) &= \alpha_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \quad ... \quad \cdot (x - x_{n-1}) \end{cases}$$

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $c_i(x)$:

$$\begin{cases} 1 &= \alpha_0 \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \quad ... \quad \cdot (x_0 - x_n) \\ 1 &= \alpha_1 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot \quad ... \quad \cdot (x_1 - x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 &= \alpha_n \cdot (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot \quad ... \quad \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты $c_i(x)$ интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\begin{cases} c_0(x) &= \dfrac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot ... \cdot (x_0 - x_n)} \\ c_1(x) &= \dfrac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot ... \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot ... \cdot (x_1 - x_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n(x) &= \dfrac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot ... \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot ... \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{cases}$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1.2 Пример интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$, в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих точках $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 \;+ \\ + \; & \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 \;+ \\ + \; & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 \;+ \\ + \; & \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и извест-

ными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.76-(-0.09))(-0.76-0.22)(-0.76-0.55)} \cdot 0.08 \ + \\ + \ & \frac{(x-(-0.76))(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.09-(-0.76))(-0.09-0.22)(-0.09-0.55)} \cdot 1.84 \ + \\ + \ & \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))(x-0.55)}{(0.22-(-0.76))(0.22-(-0.09))(0.22-0.55)} \cdot 0.40 \ + \\ + \ & \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))(x-0.22)}{(0.55-(-0.76))(0.55-(-0.09))(0.55-0.22)} \cdot 0.96 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифмитические действия:

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 \ + \\ + \ & \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 \ + \\ + \ & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 \ + \\ + \ & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 \ + \\ + \ & \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{0.13} \cdot 1.84 \ + \\ + \ & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 \ + \\ + \ & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{0.28} \cdot 0.96 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$
\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & (x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)\cdot(-0.09) \quad + \\
+ \quad & (x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)\cdot 13.84 \quad + \\
+ \quad & (x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)\cdot(-3.99) \quad + \\
+ \quad & (x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)\cdot 3.47
\end{aligned}
$$

4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831\cdot x + 0.9119\cdot x^2 + 13.23\cdot x^3$$

5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (*сплошная линия*).

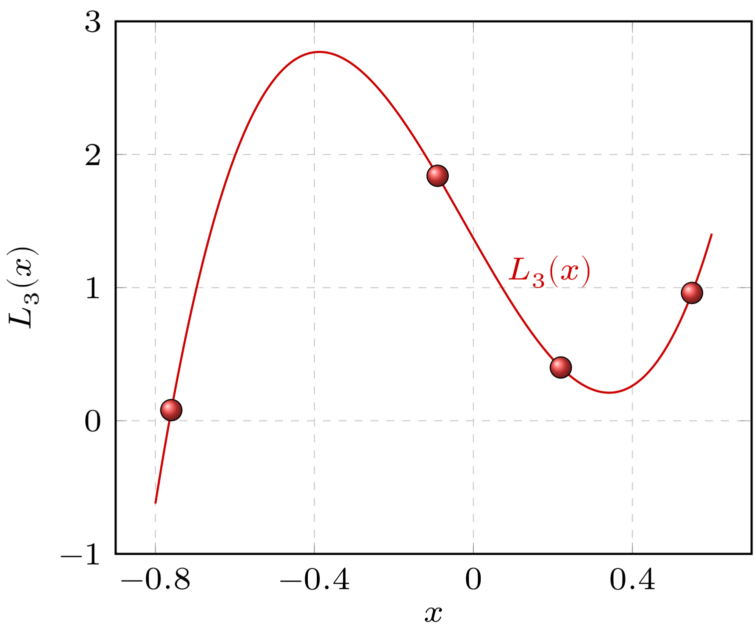


Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

2 Численное интегрирование

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$ – первообразная подынтегральной функции $f(x)$.

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции $f(x)$.

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$ заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где c_i – числовые коэффициенты квадратурной формулы; x_i – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка $[a, b]$, $(i = 0, 1, \cdots, n)$.

На основании свойств определенных интегралов, I можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке $[a, b]$ достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке $x \in [x_{i-1}, x_i]$ для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

2.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольниковов на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

В зависимости от выбора узла сетки $\{x_i\}$ для аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_i, x_{i-1}]$ различают левую и правую формулы прямоугольников. Если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце отрезка $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$, то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x)dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка $L_0 \approx f(x_i) = y_i$, то справедлива правая формула прямоугольников:

$$S_i^+ \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x)dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

2.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным по множеству узлов сетки $\{x_{i-1}, x_i\}$:

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x)dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

2.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке квадратурная *формула Симпсона* является следствием аппроксимации на частичном отрезке подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени $f(x) \approx L_2(x)$, который построен по узлам сетки $\{x_{i-1}, x_i, x_{i+1}\}$:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_{i-1})}\cdot y_{i-1} \quad + \\ &+ \quad \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x)}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_i \quad + \\ &+ \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где c_0, c_1, c_2 – коэффициенты при соответствующих степенях x интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ в пределах частичного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ на частичном отрезке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определяет формулу Симпсона:

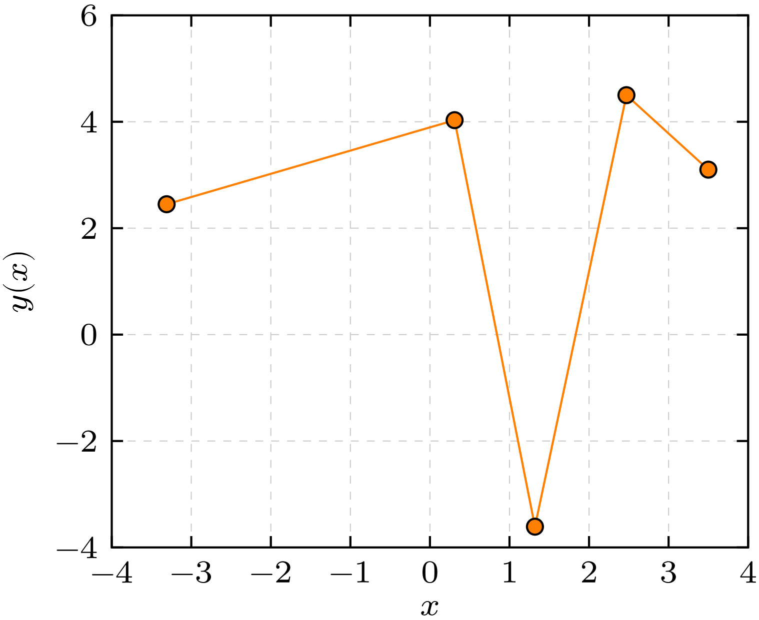
$$S_i \approx \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x)dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$

2.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки $\{x_i\}$ определены значения некоторой функции $\{y_i\}$:

x	-3,31	0,31	1,32	2,47	3,50
$f(x)$	2,45	4,03	-3,61	4,50	3,1

1) Построим график функции $f(x)$ заданной таблично.

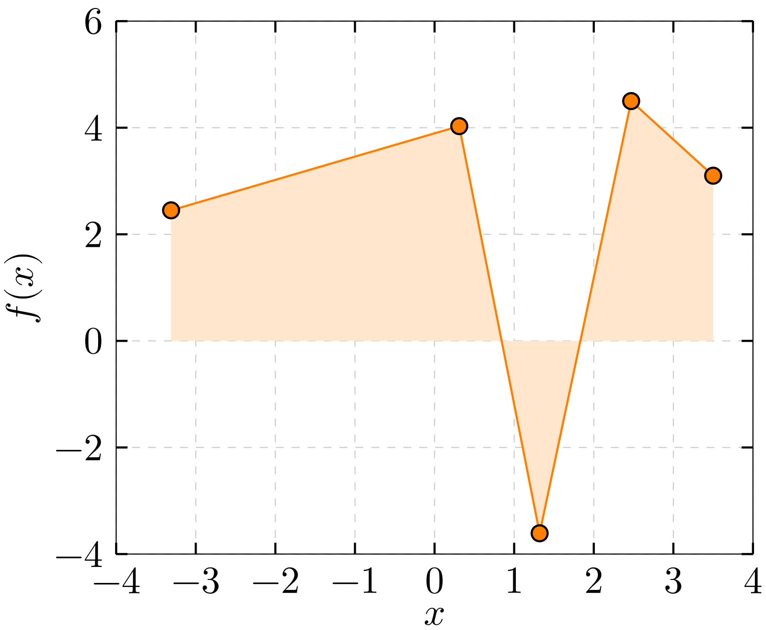


Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика и осью абсцисс Ox (выделенная область на графике).

2) Рассмотрим **метод трапеций** для нахождения численного значения интеграла функции $f(x)$ заданной таблично на отрезке $x \in [-3,31;3,50]$.
Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным но узлам x_{i-1}, x_i, т.е. прямой соединяющей два соседних узла.



Определим длину частичных отрезков:

$$\begin{aligned} h_1 &= (x_1 - x_0) = 0,31 - (-3,31) = 3,62 \\ h_2 &= (x_2 - x_1) = 1,32 - 0,31 = 1,01 \\ h_3 &= (x_3 - x_2) = 2,47 - 1,32 = 1,15 \\ h_4 &= (x_4 - x_3) = 3,50 - 2,47 = 1,03 \end{aligned}$$

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h_1 = \frac{2,45 + 4,03}{2} \cdot 3,62 = 11,73 \\ I_2 &= \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h_2 = \frac{4,03 - 3,61}{2} \cdot 1,01 = 0,21 \\ I_3 &= \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h_3 = \frac{-3,61 + 4,50}{2} \cdot 1,15 = 0,51 \\ I_4 &= \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \cdot h_4 = \frac{4,50 + 3,10}{2} \cdot 1,03 = 3,91 \end{aligned}$$

Определим интеграл I на всем отрезке интегрирования $[-3,31; 3,50]$, воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 11,73 + 0,21 + 0,51 + 3,91 = 16,37.$$

3) Рассмотрим **метод Симпсона** для нахождения численное значение интеграла

функции $f(x)$ заданной таблично на отрезке $x \in [-3,31; 3,50]$.
Разобъем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4]$$

На каждом из двух отрезков построим интерполяционный полинома Лагранжа $L_2(x)$

4) В пределах первого частичного отрезка $[-3,31; 1,32]$ построим полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам интерполяции $x_0 = -3,31; x_1 = 0,31; x_2 = 1,32$:

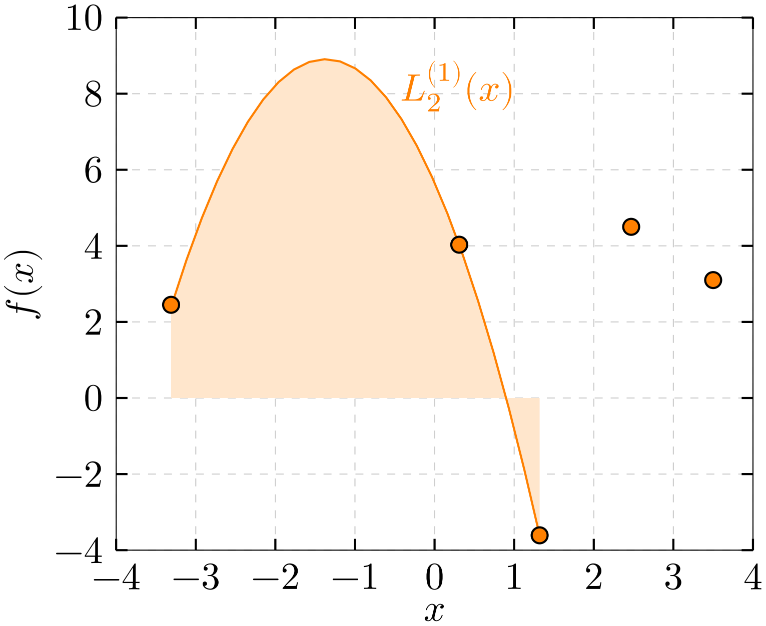
$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(x) \;&=\; \frac{(x-0,31)(x-1,32)}{((-3,31-0,31)(-3,31-1,32)} \cdot 2,45 \quad + \\ &+\; \frac{(x-(-3,31))(x-1,32)}{(0,31-(-3,31))(0,31-1,32)} \cdot 4,03 \quad + \\ &+\; \frac{(x-(-3,31))(x-0,31)}{(1,32-(-3,31))(1,32-0,31)} \cdot (-3,61) \end{aligned}$$

В результате алгебраических преобразований получим:

$$L_2^{(1)}(x) = -1,73 \cdot x^2 - 4,74 \cdot x + 5,66$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа $L_2^{(1)}(x)$ на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int\limits_{-3,31}^{1,32} L_2^{(1)}(x)dx = \int\limits_{-3,31}^{1,32} \left(-1,73 \cdot x^2 - 4,74 \cdot x + 5,66\right) dx = 25,88$$



5) В пределах второго частичного отрезка $[1,32; 3,50]$ построим полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам интерполяции $x_2 = 1,32; x_3 = 2,47; x_4 = 3,50$:

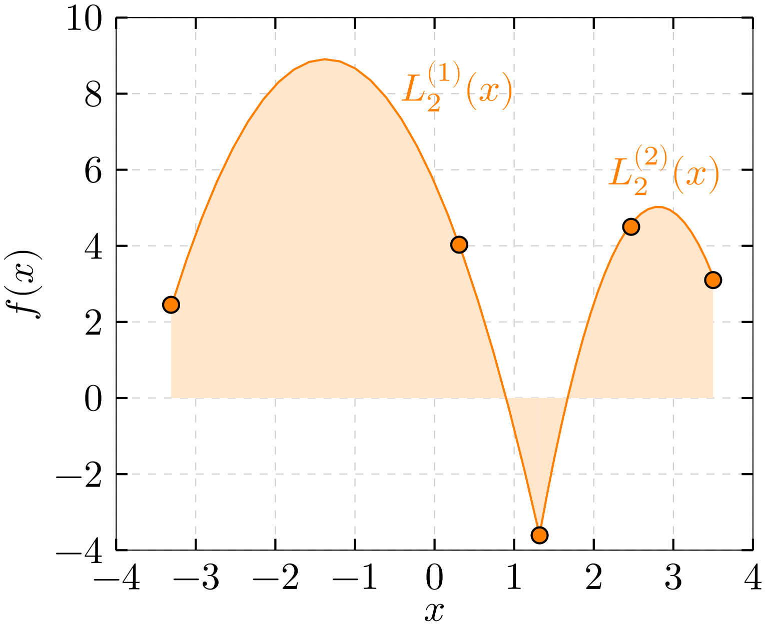
$$\begin{aligned} L_2^{(2)}(x) \;&=\; \frac{(x-2,47)(x-3,50)}{(1,32-2,47)(1,32-3,50)} \cdot (-3,61) \;+ \\ &+\; \frac{(x-1,32)(x-3,50)}{(2,47-1,32)(2,47-3,50)} \cdot 4,50 \;+ \\ &+\; \frac{(x-1,32)(x-2,47)}{(3,50-1,32)(3,50-2,47)} \cdot 3,10 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -3,87 \cdot x^2 + 21,76 \cdot x - 25,56$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа $L_2^{(2)}(x)$ на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int\limits_{1{,}32}^{3{,}50} L_2^{(2)}(x)dx = \int\limits_{1{,}32}^{3{,}50} \left(-3,87 \cdot x^2 + 21,76 \cdot x - 25,56\right) dx = 6,13$$



6) Определим интеграл всем отрезке $[-3,31; 3,50]$ воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25,88 + 6,13 = 32,01$$

7) Сравнивая численные значения интегралов рассчитанные по методу трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что значение интегралов существенно различаются: определенный интеграл рассчитанный по методу Симпсона в 1,96 больше, чем по методу трапеций.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t)$ – $\epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.