

## **СОДЕРЖАНИЕ**

1 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений . . . . .	3
1.1 Метод Эйлера решения задачи Коши. . . . .	4
1.2 Оценка погрешности решения задачи Коши. . . . .	6
1.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера . . . . .	8
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	15

## 1 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

При рассмотрении физических явлений и процессов часто не удается найти непосредственную взаимосвязь между величинами, характеризующими эволюционный, т.е. изменяющийся во времени, процесс. Однако во многих случаях можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные от неизвестных функций. Такие уравнения называют *дифференциальными*.

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (начальным условием) и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений эта задача формулируется в виде системы уравнений:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = \dot{u}, \quad (1)$$

где  $u(t)$  – неизвестные функции, которые подлежат определению;  $f(t, u)$  – известные функции, зависящие от времени и неизвестных функций;  $\dot{u}$  – *начальные условия*, т.е. значения неизвестных функций в начальный момент времени ( $t = 0$ ).

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и начальные условия (1) в развернутом виде могут быть записаны как:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_1(0) = \dot{u}_1 \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_2(0) = \dot{u}_2 \\ \dots = \dots \dots \dots \dots = \dots \\ \frac{du_n}{dt} = f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_n(0) = \dot{u}_n \end{cases}, \quad (2)$$

где  $n$  – количество дифференциальных уравнений в системе (1).

Точное решение систем дифференциальных уравнений вида (2), которые описывают многообразие прикладных задач, может быть получено лишь в исключительных случаях. Поэтому возникает необходимость *приближенного решения* таких задач. В настоящее время создано и разработано значительное чис-

ло приближенных методов решения дифференциальных уравнений, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

### 1.1 Метод Эйлера решения задачи Коши

Будем полагать, что решение задачи Коши (2) существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Введем временную сетку, т.е. будем рассматривать изменения неизвестных функций только в заданные моменты времени:

$$\{t_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где  $j$  – номер временного интервала;  $\Delta t_{j+1} = (t_{j+1} - t_j)$  – шаг сетки, т.е. временной интервал между двумя последовательными моментами времени;  $m$  – количество узлов временной сетки.

Основная идея метода Эйлера заключается в предположении, о том что неизвестные функции  $\mathbf{u}(t)$  изменяются линейно в интервале  $[t_j, t_{j+1}]$  между двумя соседними узлами временной сетки и интерполяция неизвестных функций проводится полиномом первого порядка  $\mathbf{L}_1(t)$ :

$$\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{L}_1(t) = \frac{t - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} \cdot \mathbf{u}(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot \mathbf{u}(t_{j+1}).$$

Производная от неизвестной функции приближенно аппроксимируется выражением вида:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \mathbf{L}'_1(t) = \frac{\mathbf{u}(t_{j+1}) - \mathbf{u}(t_j)}{t_{j+1} - t_j}, \quad (3)$$

где  $t_{j+1}$  и  $t_j$  – два последовательных момента времени.

Тогда систему дифференциальных уравнений первого порядка (1) приближенно можно записать в виде:

$$\frac{\mathbf{u}(t_{j+1}) - \mathbf{u}(t_j)}{\Delta t_{j+1}} \approx \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}(t_j)). \quad (4)$$

Относительно неизвестных  $\mathbf{u}(t_{j+1})$  это система линейных алгебраических уравнений и решение системы (4) находится явным образом по рекуррентным

формулам:

$$\mathbf{u}(t_{j+1}) = \mathbf{u}(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}(t_j)), \quad \mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши. К недостаткам метода можно отнести малую точность и систематическое накопление ошибок.

Для простоты рассмотрим только одно дифференциальное уравнение с единственным начальным условием:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot f(t_j, y(t_j)), \quad y(0) = \dot{y}$$

На рисунке 1 представлена графическая иллюстрация метода Эйлера численного решения (маркеры) задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка (сплошной линией представлено точное решение).

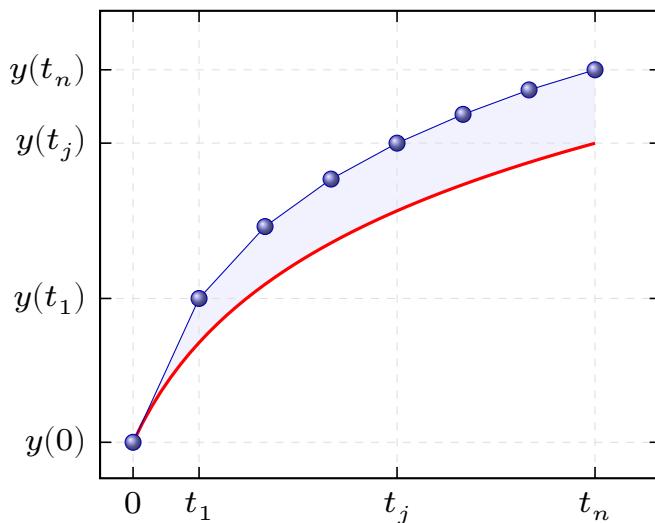


Рисунок 1 – Иллюстрация метода Эйлера:  
неизвестная кривая выделена красным цветом, а ее полигональная  
аппроксимация (ломаная Эйлера) – синим

## 1.2 Оценка погрешности решения задачи Коши

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) по временной переменной  $t$  с учетом начальных условий:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\xi, \mathbf{v}) d\xi. \quad (6)$$

Уравнение (6) является интегральным уравнением для неизвестной функции  $\mathbf{v}(t)$ , а его решение эквивалентно решению задачи Коши (1), что можно проверить прямой подстановкой (6) в (1).

На временной сетке  $\{t_j\}$  интеграл в правой части равенства (6) приближенно вычисляется по *формуле трапеций*:

$$\int_0^{t_{j+1}} \mathbf{f}(\xi, \vec{v}) d\xi \approx \sum_{k=0}^j \frac{\mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{v}(t_{k+1})) + \mathbf{f}(t_k, \mathbf{v}(t_k))}{2} \cdot (t_{k+1} - t_k). \quad (7)$$

Воспользовавшись (7), выражение для решения интегрального уравнения (6) можно записать в рекуррентной форме:

$$\mathbf{v}(t_{j+1}) = \mathbf{v}(t_j) + \frac{\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{v}(t_{j+1})) + \mathbf{f}(t_j, \mathbf{v}(t_j))}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (8)$$

Для определения приближенного значения решения интегрального уравнения (8) могут быть использованы значения неизвестных функций  $\mathbf{u}(t_j)$ , рассчитанные по методу Эйлера (5) на  $j$ -ом временном слое:

$$\mathbf{v}(t_{j+1}) \approx \mathbf{v}(t_j) + \frac{\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{u}(t_{j+1})) + \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}(t_j))}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (9)$$

В качестве предельной абсолютной погрешности приближенного решения  $\mathbf{u}(t_j)$  задачи Коши (1) можно принять какую-либо норму:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t_j) = \mathbf{v}(t_j) - \mathbf{u}(t_j) \quad (10)$$

Контроль точности приближенного решения может вестись покомпонентно или по норме. Для различных компонент решения задачи  $u_i(t_j)$  могут использоваться различные допустимые значения погрешности.

Контроль точности по норме означает, что контролируется некоторая опре-

деленная норма оценки погрешности:

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\infty} = \max_{i=1..n} \varepsilon_i \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_1 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i, \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2}$$

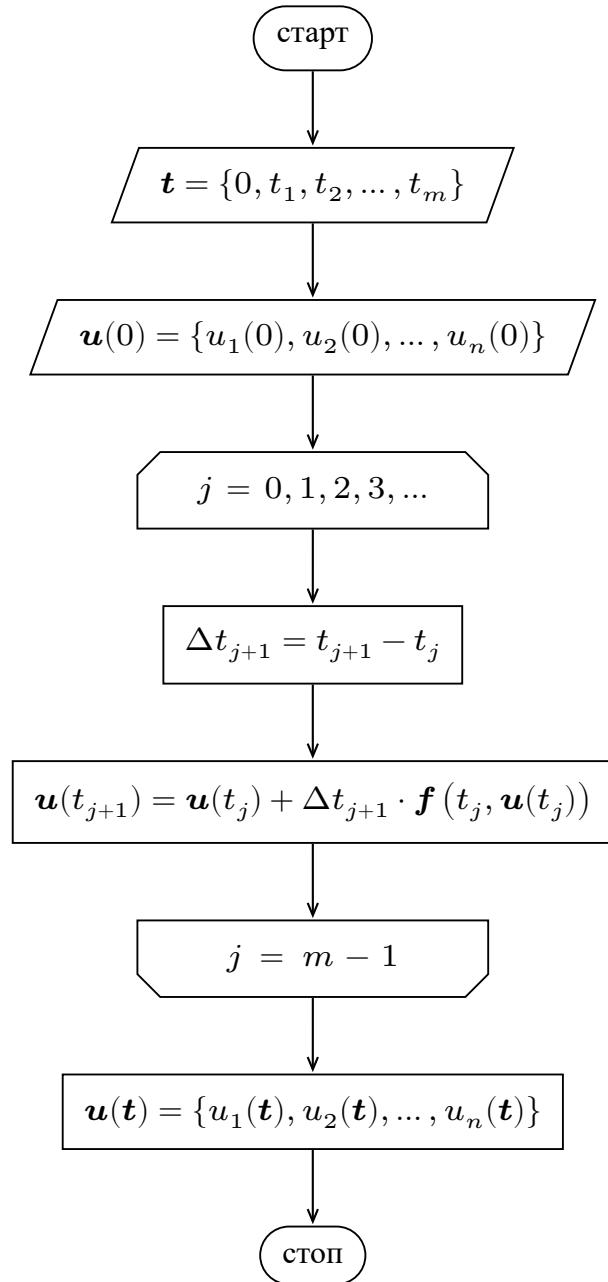


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма численного решения системы дифференциальных уравнений методом Эйлера

### 1.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера

Применяя метод Эйлера, найдем решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0.2 \cdot t + u_2, & u_1(0) = 1 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_1}{2}, & u_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

в пределах отрезка  $t \in [0, 10]$  на равномерной сетке с количеством временных интервалов  $n = 5$ .

Введем обозначения

$$\begin{cases} f_1(t) = 0.2 \cdot t + u_2(t) \\ f_2(t) = -\frac{u_1(t)}{2} \end{cases},$$

где  $f_1$  и  $f_2$  – функции, стоящие в правых частях дифференциальных уравнений системы (11):

Рекуррентные соотношения (5) для решения задачи Коши (11) методом Эйлера:

$$\begin{cases} u_1(t_{j+1}) = u_1(t_j) + \tau \cdot f_1(t_j), & u_1(0) = 1 \\ u_2(t_{j+1}) = u_2(t_j) + \tau \cdot f_2(t_j), & u_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

где  $\tau = (t_{j+1} - t_j)$  – временной шаг метода Эйлера, т.е. интервал между двумя последовательными моментами времени

Решение системы интегральных уравнений (6) определяется рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(t_{j+1}) = \tilde{u}_1(t_j) + \frac{f_1(t_j) + f_1(t_{j+1})}{2} \cdot \tau, & \tilde{u}_1(0) = 1 \\ \tilde{u}_2(t_{j+1}) = \tilde{u}_2(t_j) + \frac{f_2(t_j) + f_2(t_{j+1})}{2} \cdot \tau, & \tilde{u}_2(0) = 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Определим временной шаг метода Эйлера, зная длину временного отрезка (“время наблюдения”) и количество интервалов:

$$\tau = \frac{T - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{5} = 2,$$

где  $t_0 = 0$  – начальный момент времени;  $T = 10$  – максимальное время (“время наблюдения”).

Введем по переменной  $t$  равномерную сетку с шагом  $\tau = 2$ :

$$\{t_j\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Последовательно определяем приближенное решение задачи Коши (11) методом Эйлера, используя рекуррентные соотношения (12).

1) Определим значения неизвестных функций  $u_1$  и  $u_2$  в точке  $t_1 = 2$ :

$$f_1(0) = 0.2 \cdot 0 + u_2(0) = 0.2 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$f_2(0) = -\frac{u_1(0)}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\begin{cases} u_1(2) = u_1(0) + 2 \cdot f_1(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ u_2(2) = u_2(0) + 2 \cdot f_2(0) = 0 + 2 \cdot (-0.5) = -1 \end{cases}.$$

2) Определим значения неизвестных функций  $u_1$  и  $u_2$  в точке  $t_2 = 4$ :

$$f_1(2) = 0.2 \cdot 2 + u_2(2) = 0.2 \cdot 2 + (-1) = -0.6$$

$$f_2(2) = -\frac{u_1(2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\begin{cases} u_1(4) = u_1(2) + 2 \cdot f_1(2) = 1 + 2 \cdot (-0.6) = -0.2 \\ u_2(4) = u_2(2) + 2 \cdot f_2(2) = -1 + 2 \cdot (-0.5) = -2 \end{cases}.$$

3) Определим значения неизвестных функций  $u_1$  и  $u_2$  в точке  $t_3 = 6$ :

$$f_1(4) = 0.2 \cdot 4 + u_2(4) = 0.2 \cdot 4 + (-2) = -1.2$$

$$f_2(4) = -\frac{u_1(4)}{2} = -\frac{-0.2}{2} = 0.1$$

$$\begin{cases} u_1(6) = u_1(4) + 2 \cdot f_1(4) = -0.2 + 2 \cdot (-1.2) = -2.6 \\ u_2(6) = u_2(4) + 2 \cdot f_2(4) = -2 + 2 \cdot (0.1) = -1.8 \end{cases}.$$

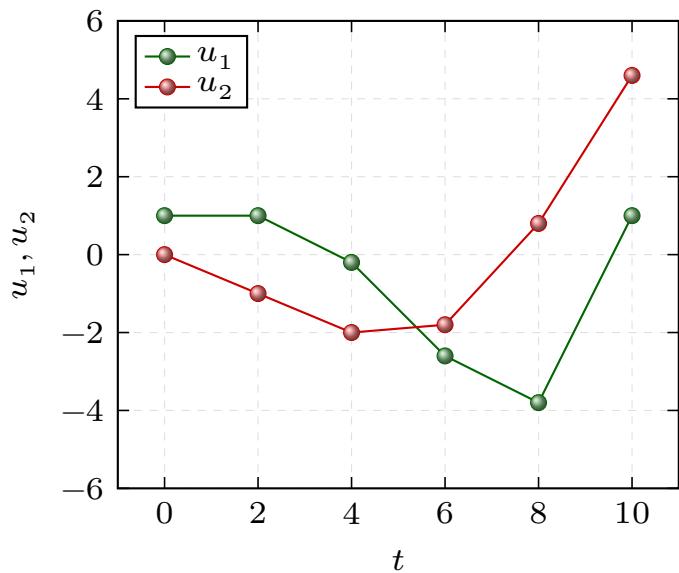


Рисунок 3 – Зависимость неизвестных функций от времени

4) Определим значения неизвестных функций  $u_1$  и  $u_2$  в точке  $t_4 = 8$ :

$$f_1(6) = 0.2 \cdot 6 + u_2(6) = 0.2 \cdot 6 + (-1.8) = -0.6$$

$$f_2(6) = -\frac{u_1(6)}{2} = -\frac{-2.6}{2} = 1.3$$

$$\begin{cases} u_1(8) = u_1(6) + 2 \cdot f_1(4) = -2.6 + 2 \cdot (-0.6) = -3.8 \\ u_2(8) = u_2(6) + 2 \cdot f_2(6) = -1.8 + 2 \cdot (1.3) = 0.8 \end{cases}$$

5) Определим значения неизвестных функций  $u_1$  и  $u_2$  в точке  $t_5 = 10$ :

$$f_1(8) = 0.2 \cdot 8 + u_2(8) = 0.2 \cdot 8 + 0.8 = 2.4$$

$$f_2(8) = -\frac{u_1(8)}{2} = -\frac{-3.8}{2} = 1.9$$

$$\begin{cases} u_1(10) = u_1(8) + 2 \cdot f_1(4) = -3.8 + 2 \cdot (2.4) = 1 \\ u_2(10) = u_2(8) + 2 \cdot f_2(8) = 0.8 + 2 \cdot (1.9) = 4.6 \end{cases}$$

На рисунке 3 представлено решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений (11).

Последовательно определяем приближенное решение интегрального урав-

нения (11), используя рекуррентные соотношения (13).

1) Определим значения неизвестных функций  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  в точке  $t_1 = 2$ :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(2) = \tilde{u}_1(0) + \tau \cdot \frac{f_1(0) + f_1(2)}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{0 + (-0.6)}{2} = 0.4 \\ \tilde{u}_2(2) = \tilde{u}_2(0) + \tau \cdot \frac{f_2(0) + f_2(2)}{2} = 0 + 2 \cdot \frac{-0.5 + (-0.5)}{2} = -1 \end{cases}$$

2) Определим значения неизвестных функций  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  в точке  $t_2 = 4$ :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(4) = \tilde{u}_1(2) + \tau \cdot \frac{f_1(2) + f_1(4)}{2} = 0.4 + 2 \cdot \frac{(-0.6) + (-1.2)}{2} = -2.4 \\ \tilde{u}_2(4) = \tilde{u}_2(2) + \tau \cdot \frac{f_2(2) + f_2(4)}{2} = -1 + 2 \cdot \frac{-0.5 + 0.1}{2} = -1.4 \end{cases}$$

3) Определим значения неизвестных функций  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  в точке  $t_3 = 6$ :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(6) = \tilde{u}_1(4) + \tau \cdot \frac{f_1(4) + f_1(6)}{2} = -2.4 + 2 \cdot \frac{-1.2 + (-0.6)}{2} = -4.2 \\ \tilde{u}_2(6) = \tilde{u}_2(4) + \tau \cdot \frac{f_2(4) + f_2(6)}{2} = -1.4 + 2 \cdot \frac{0.1 + 1.3}{2} = 0 \end{cases}$$

4) Определим значения неизвестных функций  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  в точке  $t_4 = 8$ :

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(8) = \tilde{u}_1(6) + \tau \cdot \frac{f_1(6) + f_1(8)}{2} = -4.2 + 2 \cdot \frac{-0.6 + 2.4}{2} = -2.4 \\ \tilde{u}_2(8) = \tilde{u}_2(6) + \tau \cdot \frac{f_2(6) + f_2(8)}{2} = 0 + 2 \cdot \frac{1.3 + 1.9}{2} = 3.2 \end{cases}$$

5) Определим значения неизвестных функций  $\tilde{u}_1$  и  $\tilde{u}_2$  в точке  $t_5 = 10$ :

$$f_1(10) = 0.2 \cdot 10 + u_2(10) = 0.2 \cdot 8 + 4.6 = 6.2$$

$$f_2(10) = -\frac{u_1(10)}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(10) = \tilde{u}_1(8) + \tau \cdot \frac{f_1(8) + f_1(10)}{2} = -2.4 + 2 \cdot \frac{2.4 + 6.2}{2} = 6.2 \\ \tilde{u}_2(10) = \tilde{u}_2(8) + \tau \cdot \frac{f_2(8) + f_2(10)}{2} = 3.2 + 2 \cdot \frac{1.9 + (-0.5)}{2} = 4.6 \end{cases}$$

На рисунке 4 представлены решения задачи Коши (1) и интегрального

уравнения (6), рассчитанные в различные моменты времени.

В таблице 1 и на рисунке 5 представлены значения предельной абсолютной погрешности приближенного решения задачи Коши для различных моментов времени.

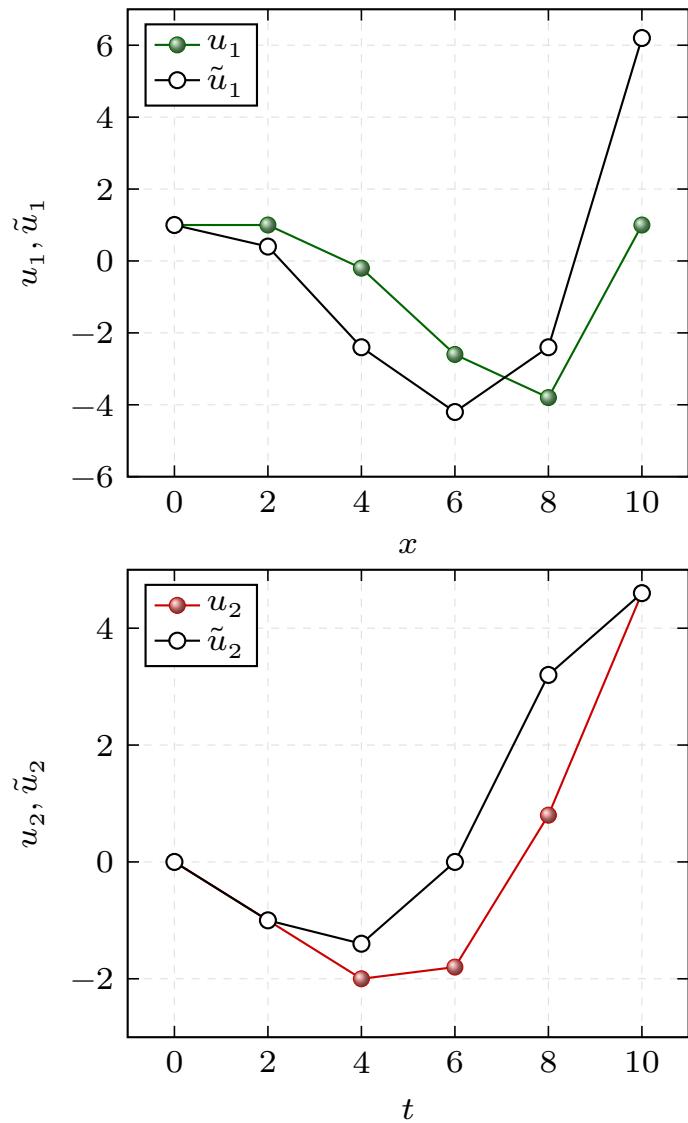


Рисунок 4 – Приближенное решение задачи Коши и соответствующего интегрального уравнения

Таблица 1 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

$i$	0	1	2	3	4	5
$t_i$	0	2	4	6	8	10
<b>Задача Коши</b>						
$u_1(t_i)$	1	1	-0.2	-2.6	-3.8	1
$u_2(t_i)$	0	-1	-2	-1.8	0.8	4.6
<b>Интегральное уравнение</b>						
$\tilde{u}_1(t_i)$	1	0.4	-2.4	-4.2	-2.4	6.2
$\tilde{u}_2(t_i)$	0	-1	-1.4	0	3.2	4.6
<b>Абсолютная погрешность <math>\varepsilon =  \tilde{u} - u </math></b>						
$\varepsilon_1$	0	0.6	2.2	1.6	1.4	5.2
$\varepsilon_2$	0	0	0.6	1.8	2.4	0

Из рисунка 5 видно, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\varepsilon_1 = 5.2$ , а для функции  $u_2(t) - \varepsilon_2 = 2.4$ .

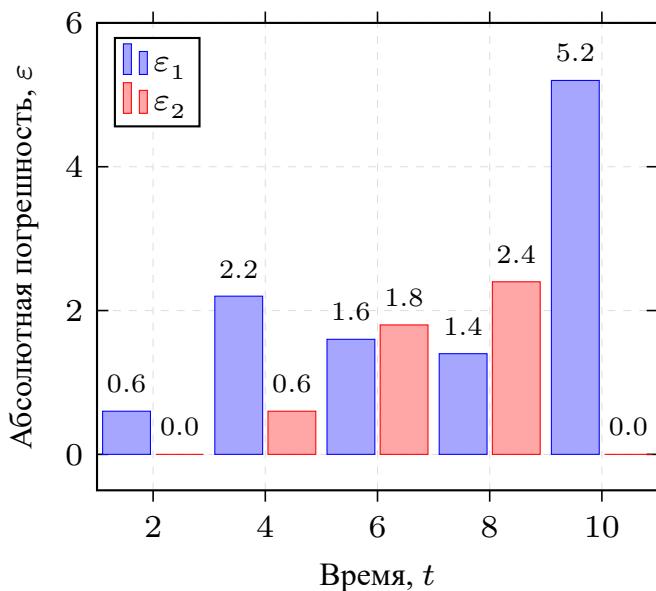


Рисунок 5 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.
- 7 Список математических символов  $\text{\LaTeX}$  –URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/List\\_of\\_mathematical\\_symbols\\_by\\_subject](https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematical_symbols_by_subject)
- 8 Бояршинов, М. Г. Вычислительные методы алгебры и анализа: учебное пособие / М. Г. Бояршинов. – Саратов : Вузовское образование, 2020. – 225 с. – ISBN 978-5-4487-0687-5. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/93065.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим до-ступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/93065>
- 9 Олейникова, С. А. Численные методы решения оптимизационных задач: учебное пособие / С. А. Олейникова. – Воронеж : Воронежский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2021. – 114 с. – ISBN 978-5-7731-0960-0. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/118626.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
- 10 Гарифуллин, М. Ф. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений / М. Ф. Гарифуллин. – Москва : Техносфера,

2020. – 192 с. – ISBN 978-5-94836-597-8. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/99103.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
- 11 Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 178 с. – ISBN 978-5-4497-1383-4. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
- 12 Рутта, Н. А. Методы и модели принятия оптимальных решений в экономике: учебное пособие для бакалавров / Н. А. Рутта. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 87 с. – ISBN 978-5-4497-1534-0. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/118015.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей