

СОДЕРЖАНИЕ

1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений	3
1.1 Прямой ход метода Гаусса	4
1.2 Обратный ход метода Гаусса	7
1.3 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса	7
1.4 Метод Гаусса с выбором главного элемента	10
1.5 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице	11
2 Интерполярование функций	14
2.1 Линейная интерполяция функции	14
2.2 Интерполяция алгебраическими полиномами	15
2.3 Интерполяционный полином в форме Лагранжа	16
2.4 Интерполяция функции заданной таблично обобщенным полиномом . .	18
2.5 Интерполяция функции заданной таблично алгебраическими полиномами в форме Лагранжа	20
3 Численное дифференцирование	24
3.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично	26
4 Численное интегрирование	36
4.1 Формула прямоугольников	38
4.2 Формула трапеций	39
4.3 Формула Симпсона	40
4.4 Численное интегрирования функции заданной таблично	41
5 Решение нелинейных уравнений	49
5.1 Итервальный метод	50
5.2 Метод бисекции	51
5.3 Метод выделения корней	53
5.4 Численное решение нелинейного уравнения методом бисекции	54
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	61

1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right. , \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_m – неизвестные, которые необходимо определить; $\{a_{ij}\}$ и b_1, b_2, \dots, b_m – известные числовые коэффициенты левой и правой частей системы уравнений, соответственно.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (1) представляет совокупность m действительных или мнимых чисел $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, таких что их соответствующая подстановка вместо $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ в систему обращает все её уравнения в тождества:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot s_1 + a_{12} \cdot s_2 + \dots + a_{1m} \cdot s_m \equiv b_1 \\ a_{21} \cdot s_1 + a_{22} \cdot s_2 + \dots + a_{2m} \cdot s_m \equiv b_2 \\ a_{31} \cdot s_1 + a_{32} \cdot s_2 + \dots + a_{3m} \cdot s_m \equiv b_3 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot s_1 + a_{m2} \cdot s_2 + \dots + a_{mm} \cdot s_m \equiv b_m \end{array} \right. ,$$

Система линейных алгебраических уравнений (1) может быть представлена в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица $m \times m$, \mathbf{x} и \mathbf{b} – искомый вектор неизвестных и

заданный вектор размерности $1 \times m$, правых частей системы уравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера–Капелли устанавливает необходимое и достаточное условие совместности системы линейных алгебраических уравнений посредством свойств матричных представлений: система совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы, полученной путем добавления столбца правых частей \mathbf{b} матрице системы \mathbf{A} :

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array} \right) \quad (3)$$

Преимущество расширенной матрицы заключается в возможности выполнения тех же операций с вектором правых частей системы уравнений, что и со строками матрицы.

Предполагается, что определитель матрицы \mathbf{A} отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, так что решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ существует и единственno. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы m способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка $m!$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – $O(m^3)$ действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы \mathbf{A} ($m \approx 10^2 \dots 10^5$), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных x_i из системы линейных уравнений (3). Например, предположим, что $a_{11} \neq 0$, тогда

разделим первое уравнение системы на a_{11} , и в результате получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array} \right),$$

где c_{1j} и y_1 – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на a_{i1} и вычтем полученное уравнение из каждого i -го уравнения системы $i = 2, 3, \dots, m$. В результате получим следующую матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & a_{22} - a_{21} \cdot c_{12} & \cdots & a_{2m} - a_{21} \cdot c_{1m} & b_2 - a_{21} \cdot y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} - a_{m1} \cdot c_{12} & \cdots & a_{mm} - a_{m1} \cdot c_{1m} & b_m - a_{m1} \cdot y_1 \end{array} \right).$$

Запишем полученную матрицу в более компактном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right),$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - a_{i1} \cdot c_{1j}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - a_{i1} \cdot y_1), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то в модифицированной системе аналогично можно исключить неизвестное x_2 . Для этого можно разделить второе уравнение системы на

коэффициент при второй неизвестной $a_{22}^{(1)}$, и в результате получим:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right),$$

где c_{2j} и y_2 – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на $a_{i2}^{(1)}$ и вычтем полученное уравнение из каждого i -го уравнения системы $i = 3, 4, \dots, m$. В результате расширенная матрица примет вид:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot c_{2m} & b_m^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot y_2 & \end{array} \right)$$

или в более компактном виде:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array} \right)$$

где $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot c_{2j}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot y_2), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные x_3, x_4, \dots, x_m , исходная система

линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_m \end{array} \right) \quad (4)$$

1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку расширенная матрица системы (4) имеет треугольный вид, то можно последовательно найти все неизвестные x_m, x_{m-1}, \dots, x_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = y_m \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \dots = \dots \\ x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{array} \right.$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_m = y_m, \quad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1)$$

1.3 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Представим систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде и запишем расширенную матрицу этой системы, полученную путем до-

бавления к матрице системы столбца правой части уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса.

- 1) Разделим каждую строку матрицы на значение её элемента в первом столбце, т.е. первую строку делим на 2, вторую на 4, третью на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right)$$

Вычитаем из второй и третьей строк матрицы её первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array} \right)$$

- 2) Разделим вторую строку матрицы на $-\frac{1}{4}$, третью строку на $-\frac{7}{6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

3) Разделим третью строку матрицы на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Обратный ход метода Гаусса.

Последовательно определяем неизвестные в обратном порядке их следования $x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$:

1) Из третьего уравнения системы (третья строка матрицы) определяем неизвестное x_3 :

$$x_3 = 3$$

2) Из второго уравнения системы (вторая строка матрицы) определяем неизвестное x_2 :

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= -11 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4x_3 - 11 \\ x_2 &= 4 \cdot 3 - 11 = 1 \end{aligned}$$

3) Из первого уравнения системы (первая строка матрицы) определяем неизвестное x_1 :

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 5 \\ x_1 &= -\frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = 2 \end{aligned}$$

Таким образом, найдено решение системы:

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff s = (2, 1, 3)^T$$

Проведём проверку решения системы уравнений методом прямой подстановки найденного вектора неизвестных $s = (2, 1, 3)^T$ в исходную систему уравнений:

нений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{b} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

После умножения расширенной матрицы системы уравнений на вектор найденного решения получим тождество:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 22 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 10 & 10 \\ 31 & 31 \\ 22 & 22 \end{array} \right)$$

1.4 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система (2) имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы \mathbf{A} равен нулю. Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы \mathbf{A} отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если $\det \mathbf{A} \neq 0$, то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

1.5 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице

Рассмотрим на примере решение системы линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

- 1) Выбираем максимальный по модулю элемент в матрице (главный элемент) во второй строке, третьем столбце (выделен цветом):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \textcolor{blue}{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

Разделим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на 1, вторую строку на 6, а третью строку на 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \textcolor{blue}{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array} \right)$$

Вычитаем из первой и третьей строки вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right)$$

- 2) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (вторую строку) и выбираем новый главный элемент матрицы (первая строка, второй

столбец):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на $\frac{13}{6}$, а третью строку на $-\frac{19}{30}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array} \right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right)$$

- 3) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (первую) и выбираем новый главный элемент матрицы (третья строка, первый столбец):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. третью строку делим на $-\frac{126}{247}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Обратный ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

Определим неизвестные из уравнений системы в обратном порядке след-

дования номеров столбцов главных элементов, т.е. $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$:

1) Из третьего уравнения системы определим неизвестное x_1 :

$$x_1 = 2$$

2) Из первого уравнения системы определим неизвестное x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{8}{13}x_1 + x_2 &= \frac{29}{13} \quad \rightarrow \quad x_2 = -\frac{8}{13}x_1 + \frac{29}{13} \\ x_2 &= -\frac{8}{13} \cdot 2 + \frac{29}{13} = 1 \end{aligned}$$

3) Из второго уравнения системы определим неизвестное x_3 :

$$\begin{aligned} \frac{4}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + x_3 &= \frac{31}{6} \quad \rightarrow \quad x_3 = -\frac{4}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{31}{6} \\ x_3 &= -\frac{4}{6} \cdot 2 - \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{31}{6} = 3 \end{aligned}$$

Таким образом, найдено решение системы линейных уравнений:

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \iff \quad s = (2, 1, 3)^T$$

2 Интерполяция функций

Задача интерполяции состоит в том, чтобы по известным значениям функции $f(x)$ в отдельных точках отрезка восстановить её значения в остальных точках этого отрезка. Такая постановка задачи допускает множество решений.

Например, задача интерполяции возникает, в том случае, когда известны результаты измерения $y_i = f(x_i)$ некоторой физической величины f в ограниченном количестве точек x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), а требуется оценить значения этой величины в других точках.

Интерполяция используется также, когда вычисление значений $f(x)$ трудоемко, например, значение искомой функции может быть определено как решение сложной задачи, в которой x играет роль параметра. При этом можно вычислить небольшую таблицу значений функции, но прямое нахождение функции при большом числе значений аргумента практически затруднительно или нецелесообразно.

2.1 Линейная интерполяция функции

При линейной интерполяции функция $f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ заменяется обобщенным интерполяционным полиномом $p_n(x)$, который построен в виде линейной комбинации ($n + 1$) аналитических функций $\{\phi_i(x)\}$

$$p_n(x) = c_0 \cdot \phi_0(x) + c_1 \cdot \phi_1(x) + \dots + c_n \cdot \phi_n(x) = \sum_{i=0}^n c_i \cdot \phi_i(x), \quad (5)$$

таким образом, чтобы значения полинома $p_n(x)$ в определённых точках отрезка $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (узлах сетки) совпадают со значениями функции в этих точках $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ (условия сопряжения):

$$\begin{cases} p_n(x_0) = y_0 \\ p_n(x_1) = y_1 \\ \dots \\ p_n(x_n) = y_n \end{cases}, \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^n c_i \cdot \phi_i(x_0) = y_0 \\ \sum_{i=0}^n c_i \cdot \phi_i(x_1) = y_1 \\ \dots \\ \sum_{i=0}^n c_i \cdot \phi_i(x_n) = y_n \end{cases}. \quad (6)$$

Из условий (6), накладываемых на интерполяционный полином, форму-

лируется система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома c_0, c_1, \dots, c_n :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{y}, \quad (7)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица $(n + 1) \times (n + 1)$, \mathbf{c} и \mathbf{y} – вектор неизвестных коэффициентов полинома $p_n(x)$ и вектор значений функции $f(x)$ в заданных точках $\{x_i\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Если среди узлов интерполяции $\{x_i\}$ нет совпадающих ($x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$) и определитель системы отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, то задача интерполяции имеет единственное решение, а система функций $\{\phi_i(x)\}$ называется чебышевской. Поэтому при линейной интерполяции необходимо строить обобщенный полином $p_n(x)$ на основе *чебышевской системы функций*.

Таким образом, для определения коэффициентов интерполяционного полинома (5) необходимо найти решение системы линейных уравнений (7), любыми аналитическими, приближенными или численными методами, например, методом Гаусса.

Интерполирование не всегда дает удовлетворительное решение задачи о приближении функции *с заданной точностью* на данном промежутке, так как совпадение функции $f(x)$ с полиномом $p(x)$ в точках x_i и x_{i+1} не гарантирует малость величины $|f(x) - p(x)|$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

2.2 Интерполяция алгебраическими полиномами

Задача интерполяции алгебраическими полиномами сводится к построению полинома степени n по чебышевской системе алгебраических функций $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$:

$$p_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i. \quad (8)$$

Определитель системы (7) представляет собой определителем Вандермонда, который отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, если среди точек $\{x_i\}$ нет совпадающих, т.е. $x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Выражение для коэффициентов алгебраического полинома и вид самого полинома (8) можно записать различными способами. Наиболее распространенная запись интерполяционного многочлена в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

2.3 Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполяции $\{x_i\}$:

$$L_n(x) = \lambda_0(x) \cdot y_0 + \lambda_1(x) \cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x) \cdot y_n = \sum_{i=0}^n \lambda_i(x) \cdot y_i \quad (9)$$

где $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ – произвольные неизвестные функции.

Для определения неизвестных функций $\lambda_i(x)$ из условий интерполяции следует:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_0(x_0) \cdot y_0 + \lambda_1(x_0) \cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x_0) \cdot y_n & = & y_0 \\ \lambda_0(x_1) \cdot y_0 + \lambda_1(x_1) \cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x_1) \cdot y_n & = & y_1 \\ \cdots & & \cdots \\ \lambda_0(x_n) \cdot y_0 + \lambda_1(x_n) \cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x_n) \cdot y_n & = & y_n \end{array} \right.$$

Эта система уравнений имеет решение если выполняются условия:

$$\lambda_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $\lambda_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n :

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $\lambda_i(x)$:

Таким образом, коэффициенты $\lambda_i(x)$ интерполяционного многочлена Лагранжа находятся из соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \lambda_0(x) & = & \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} \\ \lambda_1(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n)} \\ \dots & & \\ \lambda_n(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{array} \right.,$$

или в более компактной форме:

$$\lambda_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа (9) имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot y_i \quad (10)$$

2.4 Интерполяция функции заданной таблично обобщенным полиномом

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$, в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим обобщенный интерполяционный полином $p_3(x)$ для таблично заданной функции исходя из чебышевской системы функций $\{1, x, e^{-x}, e^x\}$:

$$p_4(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^x$$

- 1) Составим расширенную матрица системы уравнений (7) для определения коэффициентов полинома $(c_0, c_1, c_2, c_3)^T$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \phi_3(x_0) & y_0 \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) & y_1 \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) & y_2 \\ \phi_0(x_3) & \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) & \phi_3(x_3) & y_3 \end{array} \right), \quad \text{здесь} \quad \begin{cases} \phi_0(x) = 1 \\ \phi_1(x) = x \\ \phi_2(x) = e^{-x} \\ \phi_3(x) = e^x \end{cases}.$$

- 2) Воспользуемся данными таблицы 1 и заполним числовыми значения эле-

менты расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.76 & e^{0.76} & e^{-0.76} & 0.08 \\ 1 & -0.09 & e^{0.09} & e^{-0.09} & 1.84 \\ 1 & 0.22 & e^{-0.22} & e^{0.22} & 0.40 \\ 1 & 0.55 & e^{-0.55} & e^{0.55} & 0.96 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.76 & 2.138 & 0.468 & 0.08 \\ 1 & -0.09 & 1.094 & 0.914 & 1.84 \\ 1 & 0.22 & 0.803 & 1.246 & 0.40 \\ 1 & 0.55 & 0.577 & 1.733 & 0.96 \end{array} \right)$$

- 3) Решение системы линейных уравнений найдем методом Гаусса с выбором главного элемента в расширенной матрице (выделен цветом):

$$\mathbf{c} = (-0.393, -81.472, -37.288, 39.053)^T$$

Следовательно, обобщенный интерполяционный полином для функции заданной таблично можно записать в виде:

$$p_3(x) = -0.393 - 81.472 \cdot x - 37.288 \cdot e^{-x} + 39.053 \cdot e^x$$

- 4) В таблице 2 представлены данные расчета коэффициентов обобщенного интерполяционного полинома c_i , значений этого полинома в узлах сетки $p_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции $\varepsilon_i = y_i - p_3(x_i)$.

Таблица 2 – Коэффициенты обобщенного интерполяционного полинома c_i , значения этого полинома в узлах сетки $p_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции ε_i

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.4	0.96
c_i	-0.393	-81.472	-37.288	39.053
$p_3(x_i)$	0.057	1.832	0.422	0.973
ε_i	0.023	0.008	-0.022	-0.013

- 5) На рисунке 1 представлена диаграмма рассеяния (разброса) данных функции

заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений обобщенного интерполяционного полинома $p_3(x)$ (сплошная линия).

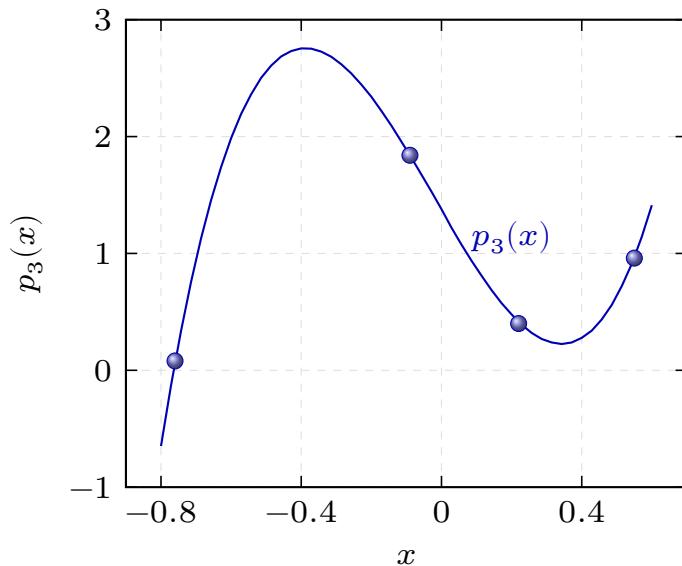


Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и обобщенного интерполяционного полинома $p_3(x)$ (сплошная линия)

Таблица 3 – Рассчётыные значения обобщенного интерполяционного полинома в узлах сетки $p_3(x_i)$

i	0	1	2	47	48	49
x_i	-0.800	-0.771	-0.743	0.543	0.571	0.600
y_i	-0.654	-0.128	0.330	0.920	1.145	1.419

2.5 Интерполяция функции заданной таблично алгебраическими полиномами в форме Лагранжа

Построим интерполяционный полином в форме Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\
 & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\
 & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\
 & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} \cdot y_3
 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и известными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$ (таблица 1):

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0.09)) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55)}{(-0.76 - (-0.09)) \cdot (-0.76 - 0.22) \cdot (-0.76 - 0.55)} \cdot 0.08 + \\
 & \frac{(x - (-0.76)) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55)}{(-0.09 - (-0.76)) \cdot (-0.09 - 0.22) \cdot (-0.09 - 0.55)} \cdot 1.84 + \\
 & \frac{(x - (-0.76)) \cdot (x - (-0.09)) \cdot (x - 0.55)}{(0.22 - (-0.76)) \cdot (0.22 - (-0.09)) \cdot (0.22 - 0.55)} \cdot 0.40 + \\
 & \frac{(x - (-0.76)) \cdot (x - (-0.09)) \cdot (x - 0.22)}{(0.55 - (-0.76)) \cdot (0.55 - (-0.09)) \cdot (0.55 - 0.22)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55)}{(-0.67) \cdot (-0.98) \cdot (-1.31)} \cdot 0.08 + \\
 & \frac{(x + 0.76) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55)}{(0.67) \cdot (-0.31) \cdot (-0.64)} \cdot 1.84 + \\
 & \frac{(x + 0.76) \cdot (x + 0.09) \cdot (x - 0.55)}{(0.98) \cdot (0.31) \cdot (-0.33)} \cdot 0.40 + \\
 & \frac{(x + 0.76) \cdot (x + 0.09) \cdot (x - 0.22)}{(1.31) \cdot (0.64) \cdot (0.33)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

или

$$L_3(x) = \frac{(x + 0.09) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 + \\ \frac{(x + 0.76) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55)}{0.13} \cdot 1.84 + \\ \frac{(x + 0.76) \cdot (x + 0.09) \cdot (x - 0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 + \\ \frac{(x + 0.76) \cdot (x + 0.09) \cdot (x - 0.22)}{0.28} \cdot 0.96$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$L_3(x) = (x + 0.09) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55) \cdot (-0.09) + \\ (x + 0.76) \cdot (x - 0.22) \cdot (x - 0.55) \cdot 13.84 + \\ (x + 0.76) \cdot (x + 0.09) \cdot (x - 0.55) \cdot (-3.99) + \\ (x + 0.76) \cdot (x + 0.09) \cdot (x - 0.22) \cdot 3.47$$

- 4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.37 - 5.248 \cdot x + 0.912 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

- 5) В таблице 4 представлены данные расчета коэффициентов интерполяционного полинома Лагранжа c_i , значений этого полинома в узлах сетки $L_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции $\varepsilon_i = y_i - L_3(x_i)$.

Таблица 4 – Коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа c_i , значения этого полинома в узлах сетки $L_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции ε_i

i	x_i	y_i	c_i	$L_3(x_i)$	ε_i
0	-0.76	0.08	1.37	0.078	0.002
1	-0.09	1.84	-5.248	1.840	0.000
2	0.22	0.40	0.912	0.400	0.000
3	0.55	0.96	13.23	0.961	-0.001

- 6) На рисунке (2) представлена диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия).

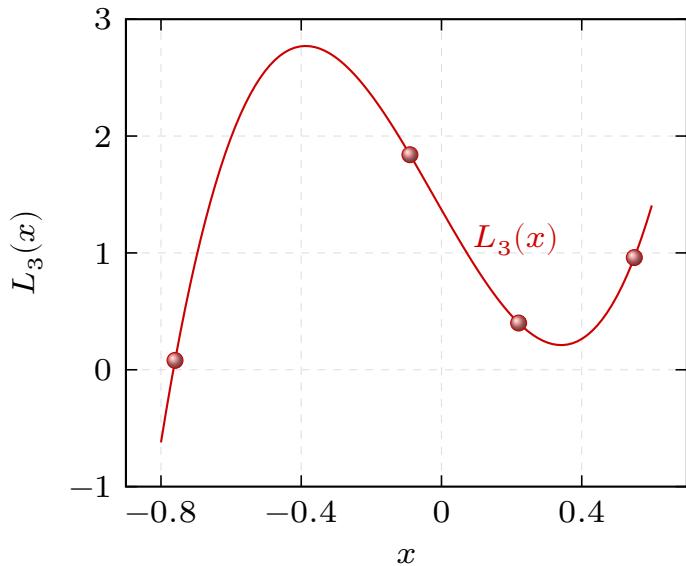


Рисунок 2 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

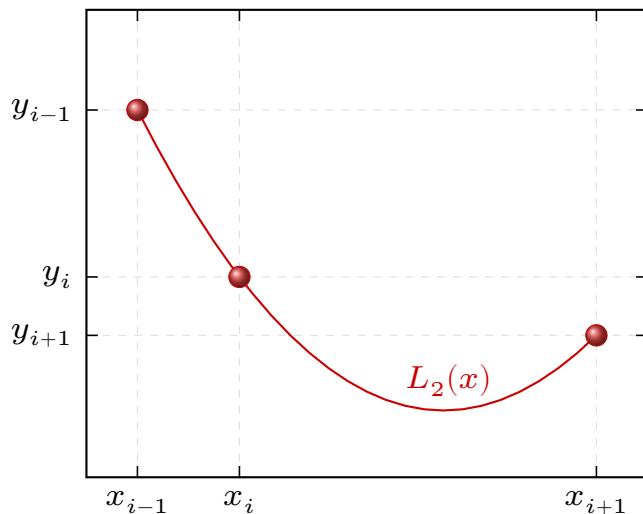
3 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных $y'(x)$ по заданным в конечном числе точек $\{x_i\}$ значениям этой функции $\{y_i\}$.

Численное дифференцирование применяется, если функцию $y(x)$ трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию $y(x)$ интерполяционным полиномом, например, алгебраическим полиномом в форме Лагранжа $L_n(x)$, и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку $\{x_i\}$ и проведем интерполирование функции $y(x)$ в узлах сетки $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая $y(x) \approx L_2(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:



$$\begin{aligned}
L_2(x) = & \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
& + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
& + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

где $y_{i-1} = y(x_{i-1})$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ – значение функции $y(x)$ в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$:

$$\begin{aligned}
L'_2(x) = & \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
& + \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
& + \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной $y'(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Например, в точке $x = x_i$ первая производная от функции $y(x)$ приближенно равна:

$$\begin{aligned}
y'(x_i) \approx L'_2(x_i) = & \frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
& + \frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
& + \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближенное значение второй производной от функции $y(x)$ в любой точке отрезка

$[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$\begin{aligned}
 y''(x) \approx L_2''(x) &= \frac{2}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
 &+ \frac{2}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
 &+ \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
 \end{aligned}$$

На равномерной сетке $\{x_i\}$, расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке $x = x_i$ упрощаются:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$ – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков $y^{(n)}(x)$ уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка $L_2(x)$. Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции $y(x)$ зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки $\{x_i\}$.

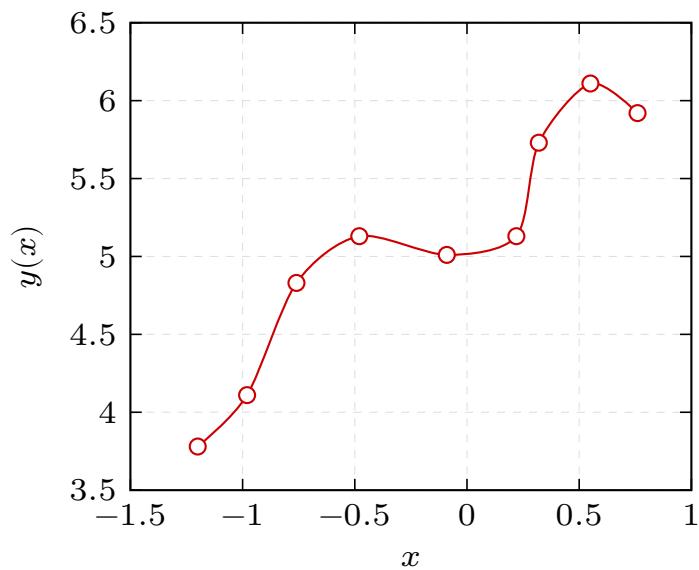
3.1 Численное дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки) $\{x_i\}$ в которых определены значения функции $\{f(x_i)\}$:

Таблица 5 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-1.2	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
y_i	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции $y(x)$, используя данные таблицы 5.

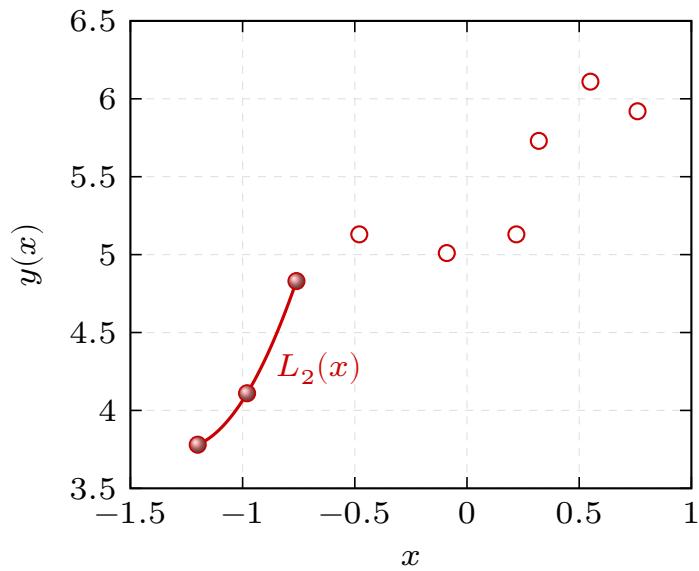


2) Аппроксимируем функцию $y(x)$ в узлах $\{x_0, x_1, x_2\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-1.20 - (-0.98))(-1.20 - (-0.76))} \cdot 3.78 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.76))}{(-0.98 - (-1.20))(-0.98 - (-0.76))} \cdot 4.11 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.98))}{(-0.76 - (-1.20))(-0.76 - (-0.98))} \cdot 4.83
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_0, x_2]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_1 = -0.98$:

$$y'_1 = y'(-0.98) \approx L'_2(-0.98) = 2.386363635$$

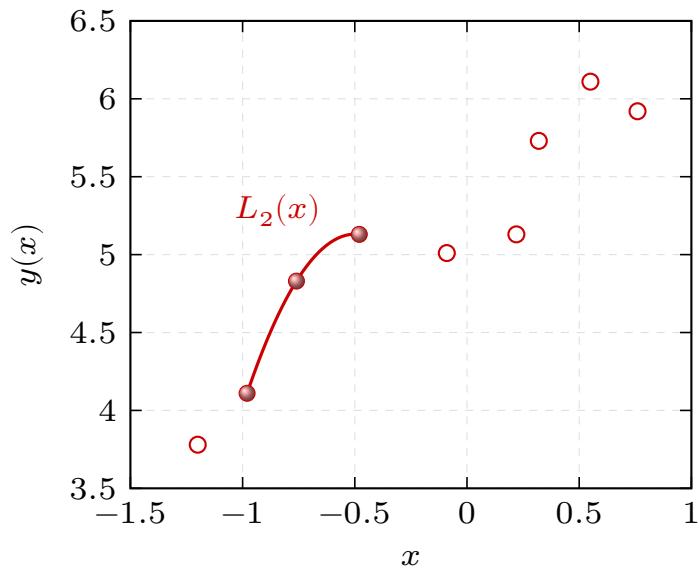
$$y''_1 = y''(-0.98) \approx L''_2(-0.98) = 8.057851240$$

- 3) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_1, x_2, x_3\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.98 - (-0.76))(-0.98 - (-0.48))} \cdot 4.11 + \\ &+ \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.48))}{(-0.76 - (-0.98))(-0.76 - (-0.48))} \cdot 4.83 + \\ &+ \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-0.48 - (-0.98))(-0.48 - (-0.76))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_1, x_3]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_2 = -0.76$:

$$y'_2 = y'(x_2) = y'(-0.76) \approx L'_2(-0.76) = 2.304155844$$

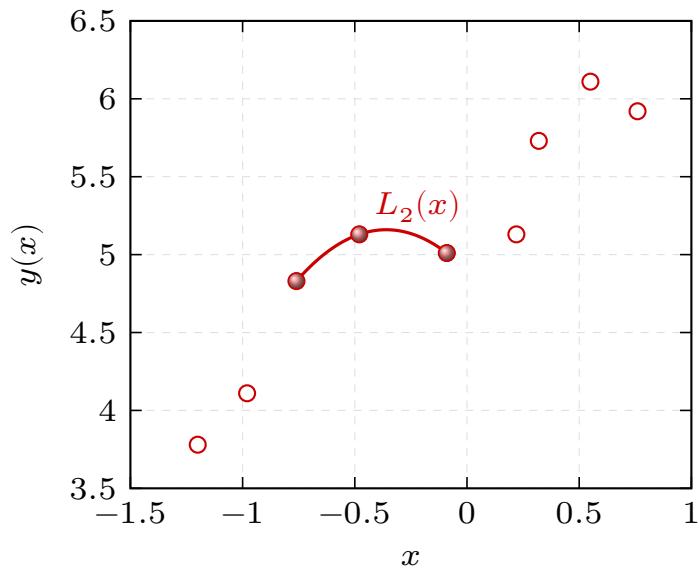
$$y''_2 = y''(x_2) = y''(-0.76) \approx L''_2(-0.76) = -8.805194780$$

- 4) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_2, x_3, x_4\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(-0.76 - (-0.48))(-0.76 - (-0.09))} \cdot 4.83 + \\ &+ \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))}{(-0.48 - (-0.76))(-0.48 - (-0.09))} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - (-0.48))} \cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_2, x_4]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_3 = -0.48$:

$$y'_3 = y'(x_3) = y'(-0.48) \approx L'_2(-0.48) = 0.495079546$$

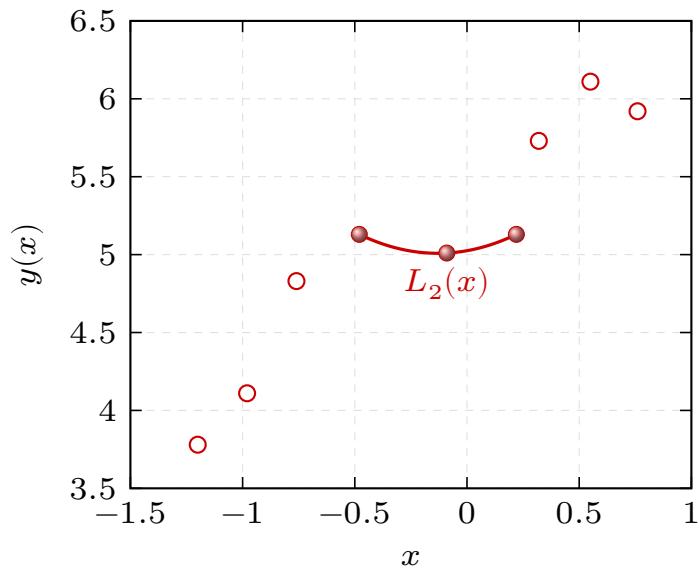
$$y''_3 = y''(x_3) = y''(-0.48) \approx L''_2(-0.48) = -4.116778740$$

- 5) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_3, x_4, x_5\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(-0.48 - (-0.09))(-0.48 - 0.22)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.48))(x - 0.22)}{(-0.09 - (-0.48))(-0.09 - 0.22)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(0.22 - (-0.48))(0.22 - (-0.09))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_3, x_5]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 0.9925558300 \cdot x^2 + 0.2580645177 \cdot x + 5.025186105$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_4 = -0.09$:

$$y'_4 = y'(-0.09) \approx L'_2(-0.09) = 0.0794044683$$

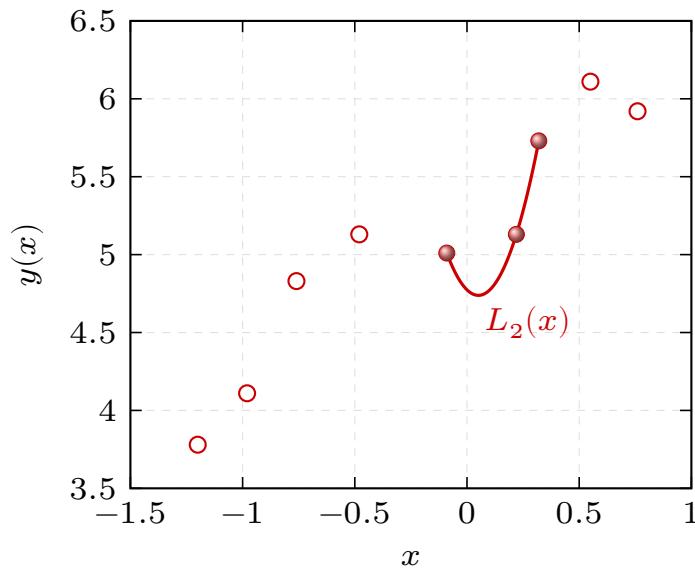
$$y''_4 = y''(-0.09) \approx L''_2(-0.09) = 1.985111660$$

- 6) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_4, x_5, x_6\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.32)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.32)}{(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.32)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.32 - (-0.09))(0.32 - 0.22)} \cdot 5.73 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_4, x_6]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 13.69000778 \cdot x^2 - 1.392604236 \cdot x + 4.773776556$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_5 = 0.22$:

$$y'_5 = y'(x_5) = y'(0.22) \approx L'_2(0.22) = 4.630999187$$

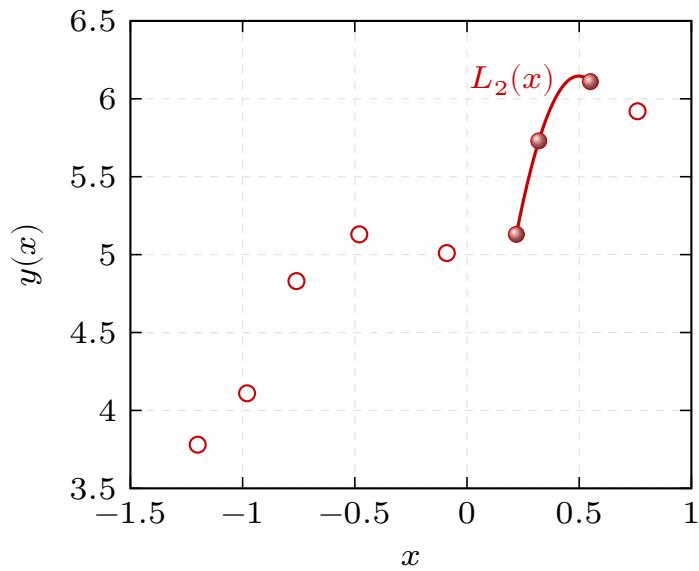
$$y''_5 = y''(x_5) = y''(0.22) \approx L''_2(0.22) = 27.38001556$$

- 7) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_5, x_6, x_7\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.22 - 0.32)(0.22 - 0.55)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.32 - 0.22)(0.32 - 0.55)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(0.55 - 0.22)(0.55 - 0.32)} \cdot 6.11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_5, x_7]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -13.17523062 \cdot x^2 + 13.11462456 \cdot x + 2.882463758$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_6 = 0.32$:

$$y'_6 = y'(x_6) = y'(0.32) \approx L'_2(0.32) = 4.682476963$$

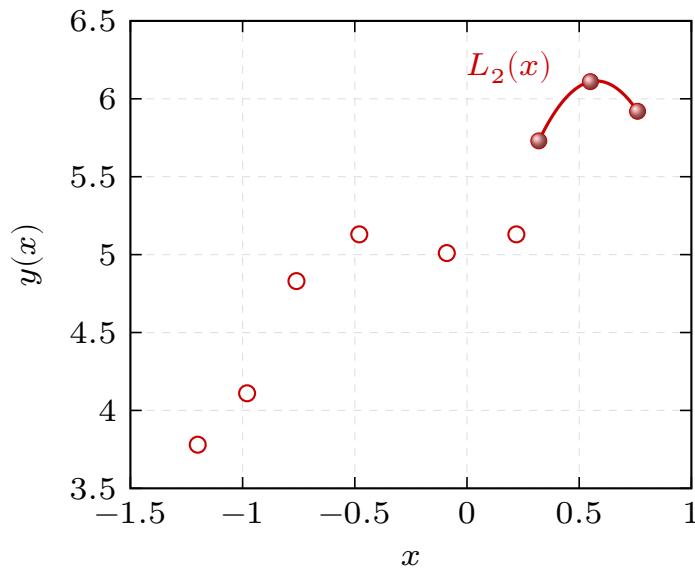
$$y''_6 = y''(x_6) = y''(0.32) \approx L''_2(0.32) = -26.35046124$$

- 8) Аппроксимация функции $y(x)$ в узлах $\{x_6, x_7, x_8\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 5:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.55)(x - 0.76)}{(0.32 - 0.55)(0.32 - 0.76)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.76)}{(0.55 - 0.32)(0.55 - 0.76)} \cdot 6.11 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.76 - 0.32)(0.76 - 0.55)} \cdot 5.92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_6, x_8]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -5.811217790 \cdot x^2 + 6.707933391 \cdot x + 4.178530017$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_7 = 0.55$:

$$y'_7 = y'(x_7) = y'(0.55) \approx L'_2(0.55) = 0.315593822$$

$$y''_7 = y''(x_7) = y''(0.55) \approx L''_2(0.55) = -11.62243558$$

9) Таким образом, определены значения первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производной функции $y(x)$ в каждом внутреннем узле сетки:

Таблица 6 – Значения первой и второй производных функции $y(x)$ во внутренних узлах сетки $\{x_i\}$

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55
y'_i	2.39	2.30	0.50	0.08	4.63	4.68	0.32
y''_i	8.06	-8.81	-4.12	1.99	27.38	-26.35	-11.62

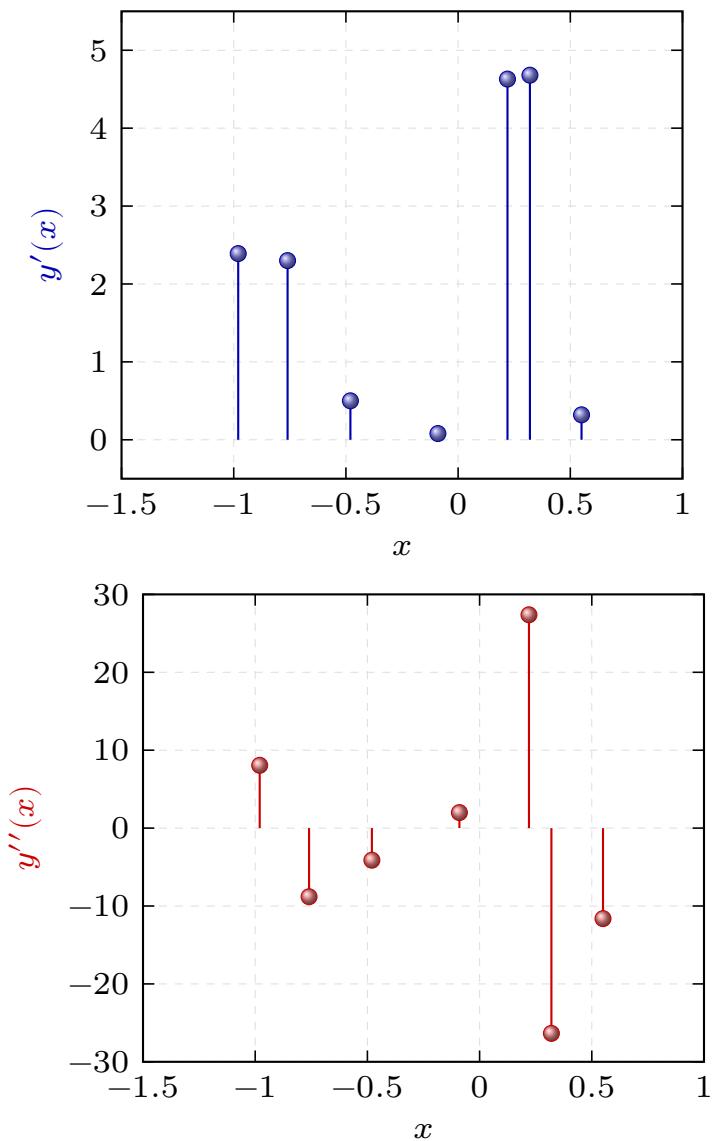


Рисунок 3 – Графики первой $y'(x)$ и второй $y''(x)$ производной от функции $y(x)$, заданной таблично

4 Численное интегрирование

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$ – первообразная подынтегральной функции $f(x)$.

Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика функции и осью абсцисс Ox (выделенная область на рисунке 4).

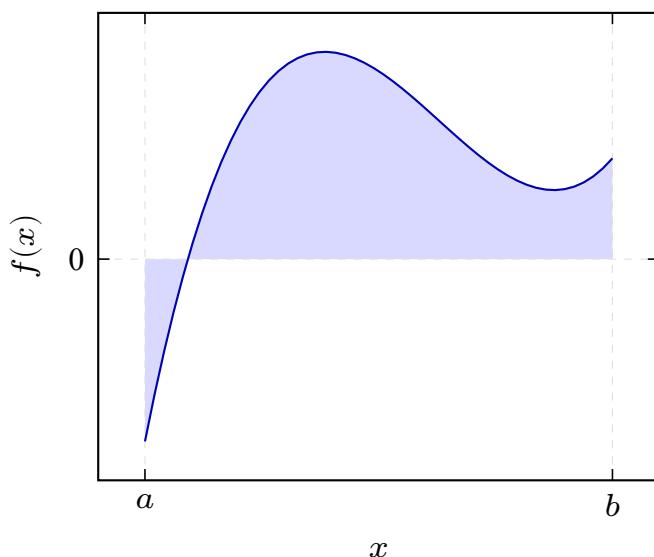


Рисунок 4 – Геометрический смысл определенного интеграла

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции $f(x)$.

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$ заменяют интерполяющей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где c_i – числовые коэффициенты квадратурной формулы; x_i – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка $[a, b]$, ($i = 0, 1, \dots, n$).

На основании свойств определенных интегралов, I можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Поэтому, для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке $[a, b]$ достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

4.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

В зависимости от выбора узла сетки $\{x_i\}$ для аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ различают левую и правую формулы прямоугольников: если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце отрезка $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ (рисунок 5), то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка $L_0 \approx f(x_i) = y_i$ (рисунок 5), то справедлива правая формула прямоугольников :

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

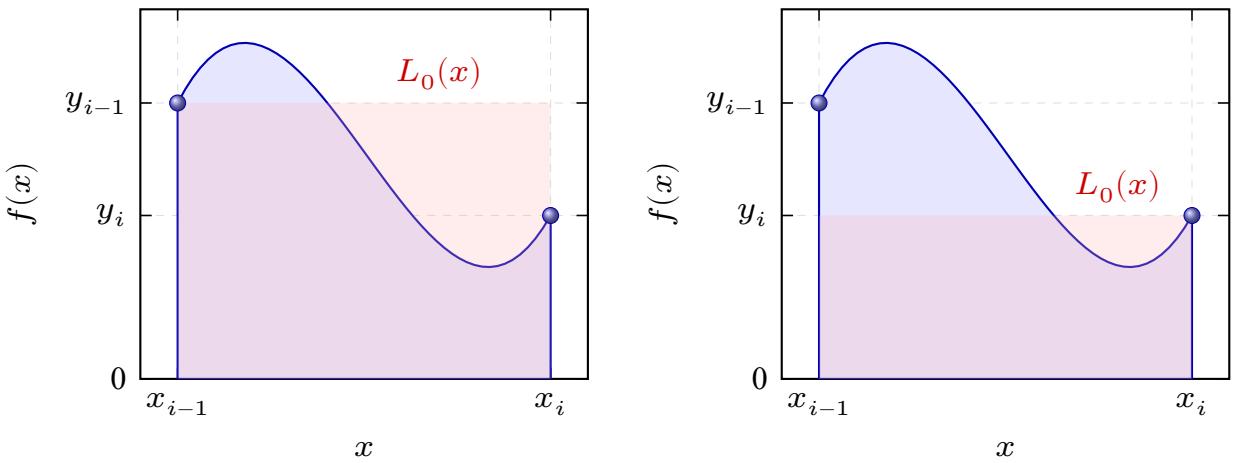


Рисунок 5 – График подынтегральной функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $L_0(x)$ на частичном отрезке для формулы прямоугольников

4.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным по множеству узлов сетки $\{x_{i-1}, x_i\}$:

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

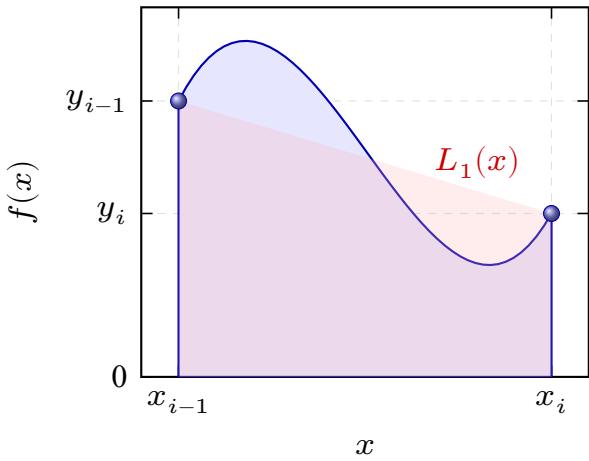


Рисунок 6 – График подынтегральной функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $L_1(x)$ на частичном отрезке для формулы трапеций

4.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ квадратурная *формула Симпсона* является следствием аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени $f(x) \approx L_2(x)$, который построен по узлам сетки $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - x_{i-1/2}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_i - x)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_{i-1/2} +, \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_i
 \end{aligned}$$

где $x_{i-1/2}$ – узел вспомогательной сетки, расположенный между узлами основной сетки $x_{i-1} < x_{i-1/2} < x_i$

Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где c_0, c_1, c_2 – коэффициенты при соответствующих степенях x интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ в пределах частичного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ на частич-

ном отрезке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определяет формулу Симпсона:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$

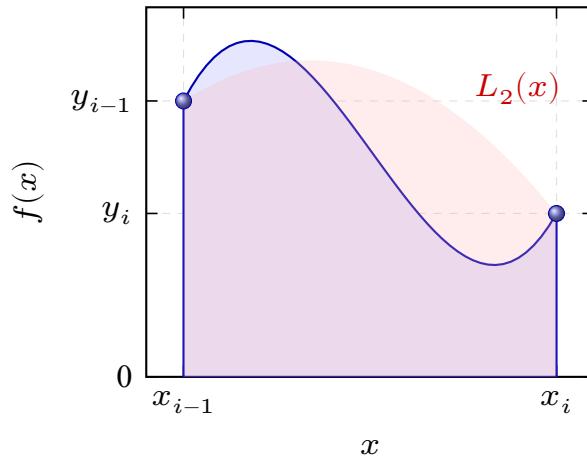


Рисунок 7 – График подынтегральной функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $L_2(x)$ на частичном отрезке для формулы Симпсона

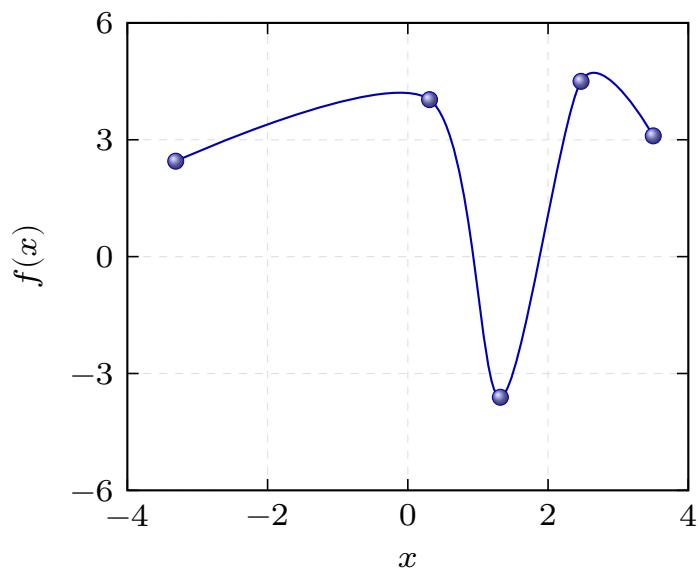
4.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки $\{x_i\}$ определены значения некоторой функции $\{y_i\} = f(x_i)$:

Таблица 7 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3	4
x_i	-3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
y_i	2.45	4.03	-3.61	4.50	3.10

- 1) Построим график функции $f(x)$ заданной таблично.



- 2) Воспользуемся левой и правой формулами прямоугольников для нахождения численного значения интеграла от функции $f(x)$, заданной таблично на отрезке $x \in [x_0, x_4]$. Для этого разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

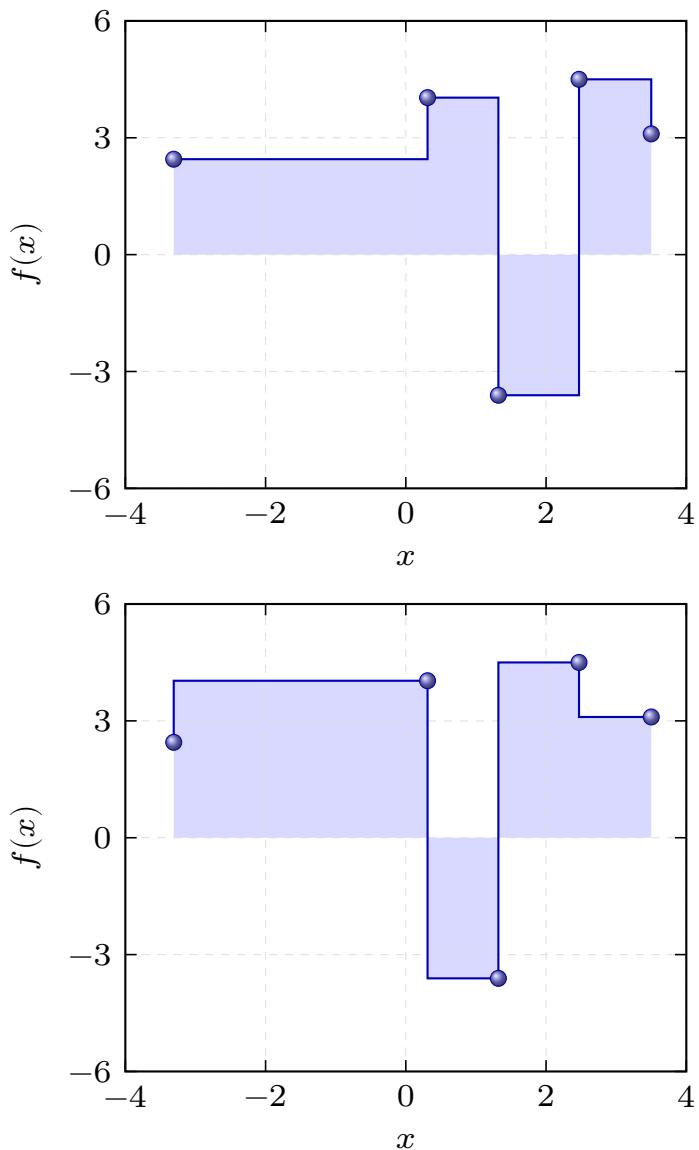


Рисунок 8 – Использование квадратурных формул левых и правых прямоугольников

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом нулевой степени $f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$, построенным на узлам $\{x_{i-1}, x_i\}$.

По методу прямоугольников, определим значение интеграла на каждом ча-

стичном отрезке (левые прямоугольники):

$$\begin{aligned}
 S_1^- &= y_0 \cdot (x_1 - x_0) = 2.45 \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 8.87 \\
 S_2^- &= y_1 \cdot (x_2 - x_1) = 4.03 \cdot (1.32 - 0.31) \approx 4.07 \\
 S_3^- &= y_2 \cdot (x_3 - x_2) = -3.61 \cdot (2.47 - 1.32) \approx -4.15 \\
 S_4^- &= y_3 \cdot (x_4 - x_3) = 4.5 \cdot (3.50 - 2.47) \approx 4.64
 \end{aligned}$$

(правые прямоугольники):

$$\begin{aligned}
 S_1^+ &= y_1 \cdot (x_1 - x_0) = 4.03 \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 14.59 \\
 S_2^+ &= y_2 \cdot (x_2 - x_1) = -3.61 \cdot (1.32 - 0.31) \approx -3.65 \\
 S_3^+ &= y_3 \cdot (x_3 - x_2) = 4.50 \cdot (2.47 - 1.32) \approx 5.18 \\
 S_4^+ &= y_4 \cdot (x_4 - x_3) = 3.10 \cdot (3.50 - 2.47) \approx 3.19
 \end{aligned}$$

Значение интегралов I^- и I^+ на всем отрезке интегрирования $[x_0, x_4]$:

$$\begin{aligned}
 I^- &= S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^- = 8.87 + 4.07 - 4.15 + 4.64 = 13.43 \\
 I^+ &= S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+ = 14.59 - 3.65 + 5.18 + 3.19 = 19.31
 \end{aligned}$$

3) Рассмотрим *метод трапеций* для нахождения численного значения интеграла от функции $f(x)$, заданной таблично на отрезке $x \in [x_0, x_4]$. Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным на узлам $\{x_{i-1}, x_i\}$, т.е. прямой соединяющей два соседних узла.

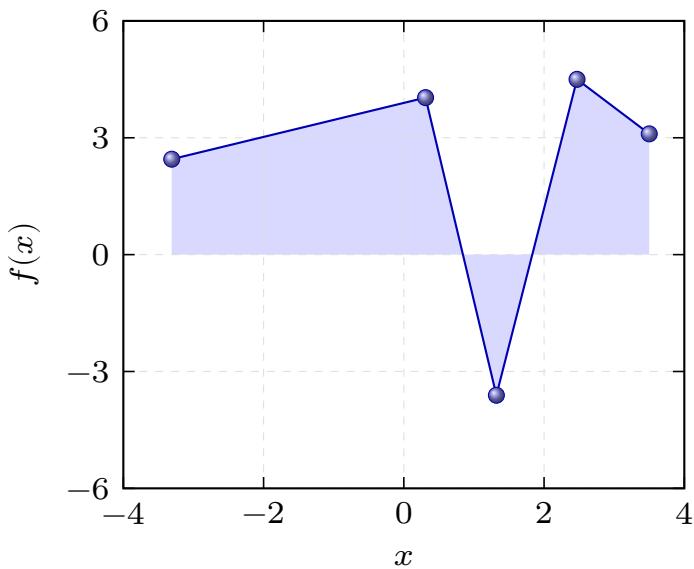


Рисунок 9 – Использование квадратурных формул трапеций

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$S_1 = \frac{y_1 + y_0}{2} \cdot (x_1 - x_0) = \frac{4.03 + 2.45}{2} \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 11.73$$

$$S_2 = \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{-3.61 + 4.03}{2} \cdot (1.32 - 0.31) \approx 0.21$$

$$S_3 = \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_3 - x_2) = \frac{4.50 - 3.61}{2} \cdot (2.47 - 1.32) \approx 0.51$$

$$S_4 = \frac{y_4 + y_3}{2} \cdot (x_4 - x_3) = \frac{3.10 + 4.50}{2} \cdot (3.50 - 2.47) \approx 3.91$$

Определим интеграл I на всем отрезке интегрирования $[x_0, x_4]$, воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 11.73 + 0.21 + 0.51 + 3.91 = 16.37.$$

- 4) Рассмотрим *метод Симпсона* для нахождения численное значение интеграла от функции $f(x)$, заданной таблично на отрезке $x \in [x_0, x_4]$.

Разделим всё множество узлов сетки $\{x_i\}$, в которых известны значения функции $\{y_i\}$, на основные и вспомогательные узлы:

Таблица 8 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	$1 - 1/2$	1	$1 + 1/2$	2
x_i	-3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
y_i	2.45	4.03	-3.61	4.50	3.10

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_2] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2].$$

В пределах первого частичного отрезка $[x_0, x_1]$ построим интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам сетки $x_0 = -3.31$, $x_{1-1/2} = 0.31$, $x_1 = 1.32$:

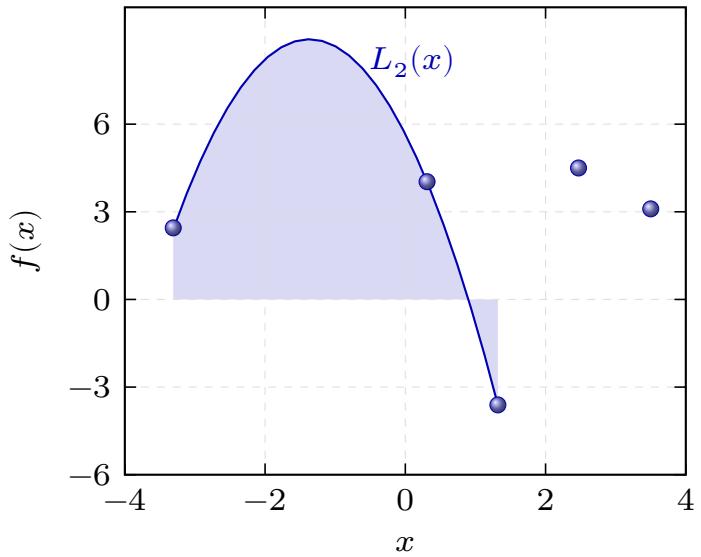
$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - 0.31)(x - 1.32)}{((-3.31) - 0.31)((-3.31) - 1.32)} \cdot 2.45 + \\ & + \frac{(x - (-3.31))(x - 1.32)}{(0.31 - (-3.31))(0.31 - 1.32)} \cdot 4.03 + \\ & + \frac{(x - (-3.31))(x - 0.31)}{(1.32 - (-3.31))(1.32 - 0.31)} \cdot (-3.61) \end{aligned}$$

После алгебраических преобразований запишем интерполяционный полином в каноническом виде:

$$L_2(x) = 5.66 - 4.74 \cdot x - 1.73 \cdot x^2$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома $L_2(x)$ на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} L_2(x) dx = \int_{-3.31}^{1.32} (5.66 - 4.74 \cdot x - 1.73 \cdot x^2) dx = 25.88$$



В пределах второго частичного отрезка $[x_1, x_2]$ построим интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам сетки $x_1 = 1.32$, $x_{1+1/2} = 2.47$, $x_2 = 3.50$:

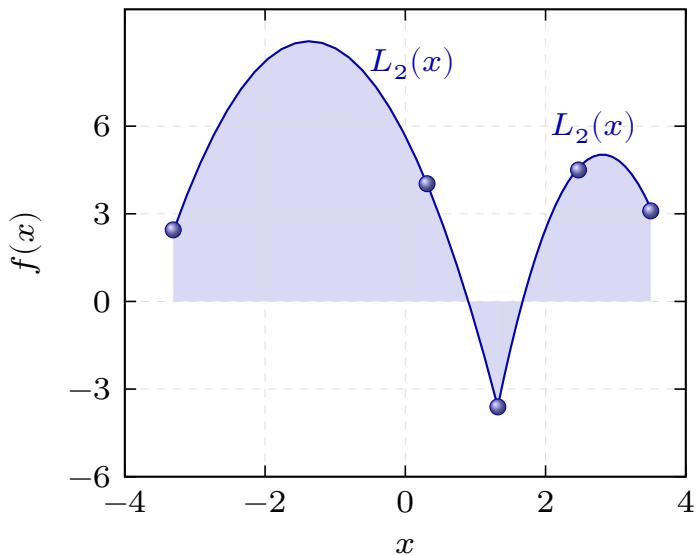
$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - 2.47)(x - 3.50)}{(1.32 - 2.47)(1.32 - 3.50)} \cdot (-3.61) + \\
 & + \frac{(x - 1.32)(x - 3.50)}{(2.47 - 1.32)(2.47 - 3.50)} \cdot 4.50 + \\
 & + \frac{(x - 1.32)(x - 2.47)}{(3.50 - 1.32)(3.50 - 2.47)} \cdot 3.10
 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2(x) = -25.56 + 21.76 \cdot x - 3.87 \cdot x^2$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома $L_2(x)$ на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} L_2(x) dx = \int_{1.32}^{3.50} (-25.56 + 21.76 \cdot x - 3.87 \cdot x^2) dx = 6.13$$



Определим интеграл всем отрезке $[x_0, x_2]$ воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25.88 + 6.13 = 32.01$$

- 5) Сравнивая численные значения определенного интеграла рассчитанные по методам прямоугольников, трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что рассчитанные значения различаются.

Таблица 9 – Численные значения интегралов

Метод интегрирования	Значение интеграла
Левых прямоугольников	13.43
Правых прямоугольников	19.31
Трапеций	16.37
Симпсона	32.01

Значение определенного интеграла от функции заданной таблично, рассчитанное по методу Симпсона является наибольшим, а значение рассчитанное по методу левых прямоугольников – наименьшее.

5 Решение нелинейных уравнений

Пусть задана функция $f(x)$ действительного переменного и необходимо найти корни уравнения или, что то же самое, нули функции $f(x)$:

$$f(x) = 0. \quad (11)$$

На примере алгебраического многочлена известно, что нули $f(x)$ могут быть как действительными, так и комплексными числами. Поэтому *более точная* постановка задачи состоит в нахождении корней уравнения, расположенных в заданной области комплексной плоскости. Можно рассматривать также задачу о нахождении действительных корней уравнения, которые расположены в пределах заданного отрезка $x \in [a, b]$.

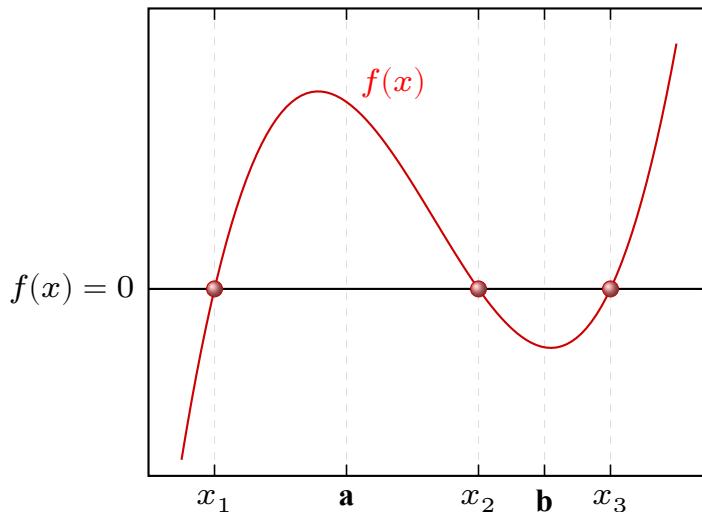


Рисунок 10 – График функции $y = f(x)$

На рисунке (10) представлены x_1 , x_2 и x_3 – действительные корни уравнения (11), т.е. $f(x_1) = 0$, $f(x_2) = 0$, $f(x_3) = 0$

Задача нахождения корней уравнения $f(x) = 0$ обычно решается в два этапа:

- 1) На первом этапе изучается расположение корней (в общем случае на комплексной плоскости) и проводится их разделение, т. е. выделяются области в комплексной плоскости, содержащие только один корень. Кроме того, изучается вопрос о кратности корней. Тем самым находятся некоторые начальные приближения для корней уравнения.
- 2) На втором этапе, используя заданное начальное приближение, строится ите-

рациональный процесс, позволяющий уточнить значение отыскиваемого корня.

Следует отметить, что не существует каких-то общих регулярных приемов решения задачи о расположении корней произвольной функции $f(x)$.

Численные методы решения нелинейных уравнений являются, как правило, итерационными методами, которые предполагают задание достаточно близких к искомому решению начальных данных.

5.1 Итервальный метод

Итервальный метод поиска корня уравнения $f(x) = 0$ состоит следующим:

- 1) Область поиска корня $[a, b]$ разбивается на заранее заданное количество интервалов N :

$$[a, b] = [a, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_i, x_{i+1}] \cup \dots \cup [x_N, b]$$

- 2) Вычисляется таблица значений функции $\{f(x_i)\}$ на границах этих интервалов $\{x_i\}$.
- 3) Проводится последовательный перебор таблицы значений функции $\{f(x_i)\}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).
- 4) Если при некотором i значения функции $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$ имеют разные знаки, то это означает, что на интервале $x \in (x_i, x_{i+1})$ имеет по крайней мере один действительный корень уравнения $f(x) = 0$.
- 5) В качестве новой, более узкой ($|x_i, x_{i+1}| < |a, b|$), области поиска выбирается отрезок (x_i, x_{i+1}) , т.е. полагают

$$x_i = a, \quad x_{i+1} = b$$

и с помощью аналогичной процедуры (1) процесс поиска корня уравнения $f(x) = 0$ повторяют до тех пор пока, область поиска не станет меньше заранее заданной величины ε (погрешности поиска корня уравнения):

$$|a, b| < \varepsilon$$

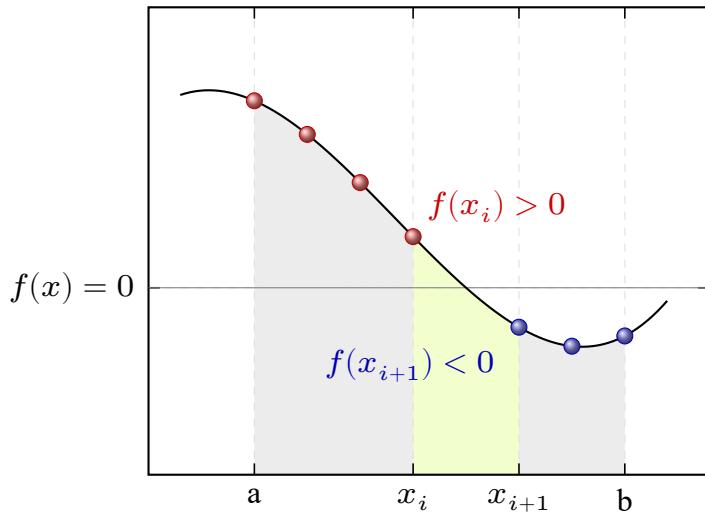


Рисунок 11 – Иллюстрация итервального метода поиска корня уравнения

5.2 Метод бисекции

Метод бисекции основан на теореме *Больцано-Коши* (теорема о промежуточном значении): если непрерывная функция $f(x)$, определённая на вещественном интервале $[a, b]$, принимает два различных значения $f(a) \neq f(b)$, тогда существует такое $c \in [a, b]$, что эта функция в этой точке принимает промежуточное значение $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$.

Следствие теоремы Больцано-Коши (теорема о нуле непрерывной функции): если функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения $f(a)$ и $f(b)$ противоположных знаков, то существует точка x_0 , в которой значение функции равно нулю $f(x_0) = 0$.

Если непрерывная функция *строго монотонна* на отрезке $[a, b]$, т.е. для любого $\forall x \in [a, b]$ выполняется условие $f'(x) > 0$ либо $f'(x) < 0$, то в соответствие со следствием теоремы Больцано-Коши в пределах отрезка $[a, b]$ существует *единственный* корень уравнения $f(x) = 0$.

Метод бисекции (деления пополам) является регулярным способом поиска действительного корня уравнения $f(x) = 0$, однако для реализации этого метода необходимо *правильно выбрать область поиска*, т.е. начальный отрезок $[a, b]$ на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков $f(a) \cdot f(b) < 0$ и в пределах этого отрезка строго монотонна $f'(x) < 0$ либо $f'(x) > 0$.

Алгоритм метода деления отрезка пополам (метод бисекции):

1) Область поиска корня уравнения отрезок $[a, b]$ делится пополам:

$$c = \frac{a + b}{2}$$

2) Вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$.

3) Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и, например, на левом конце отрезка $f(a)$:

- 1) если $f(a) \cdot f(c) < 0$, функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, c]$ принимает значения разных знаков, следовательно, искомый корень уравнения $f(x) = 0$ находится внутри отрезка $[a, c]$, поэтому правый конец отрезка “переносится“ в его середину.
- 2) если $f(a) \cdot f(c) > 0$, функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, c]$ принимает значения одного знака, следовательно, искомый корень уравнения $f(x) = 0$ находится внутри отрезка $[c, b]$, поэтому левый конец отрезка “переносится“ в его середину.

$$\text{sign}(f(a) \cdot f(c)) = \begin{cases} < 0, & b = c \\ > 0, & a = c \end{cases}$$

Таким образом, область поиска корня уравнения $f(x) = 0$ “сужается наполовину“.

4) Процесс вычислений (1)–(3) повторяется до тех пока, длина вновь полученного интервала $[a, b]$ станет меньше заранее заданного числа ε (погрешности поиска корня уравнения):

$$|a, b| < \varepsilon$$

В качестве корня уравнения x_0 приближенно принимаются середину последнего полученного интервала $[a, b]$.

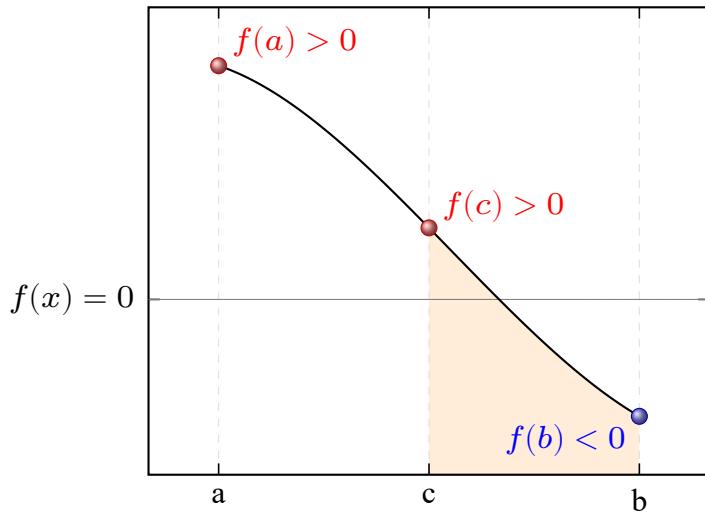


Рисунок 12 – Иллюстрация метода бисекции (деления отрезка пополам):
 $f(a) \cdot f(c) > 0$, поэтому новая область поиска корня отрезок $[c, b]$

Следует отметить, что если условие строгой монотонности для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ не выполняется и на этом отрезке имеется несколько корней, то указанный итерационный процесс сойдется к одному из корней, но *заранее неизвестно, к какому именно.*

5.3 Метод выделения корней

Один из недостатков интервального метода и метода бисекции является сходимость итерационного процесса к заранее неизвестному корню уравнения $f(x) = 0$. Этот недостаток можно устранить удалением уже найденного корня.

Если x_1 простой корень уравнения $f(x) = 0$ и функция $f(x)$ непрерывна по Липшицу, то вспомогательная функция

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)}$$

непрерывна, причем все нули функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, за исключением x_1 , так как $g(x_1) \neq 0$.

Поэтому найденный корень x_1 можно удалить, т.е. перейти в процессе поиска корня уравнения $f(x) = 0$ от функции $f(x)$ к функции $g(x)$. Тогда процесс нахождения остальных корней уравнения сводится к нахождению корней $g(x) = 0$.

Когда найден какой-нибудь новый корень x_2 уравнения $g(x) = 0$, то этот

корень тоже можно удалить, вводя новую вспомогательную функцию:

$$\varphi(x) = \frac{g(x)}{(x - x_2)} = \frac{f(x)}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Таким образом, можно последовательно найти все корни исходного уравнения $f(x) = 0$.

В любом методе поиска корней уравнения $f(x)$ окончательные итерации вблизи определяемого корня рекомендуется делать не по функциям типа $g(x)$, а по исходной функции $f(x)$. Последние итерации, вычисленные по функции $g(x)$, используются при этом в качестве нулевого приближения.

5.4 Численное решение нелинейного уравнения методом бисекции

На отрезке $x \in [-3, 5]$ задана непрерывная функция:

$$f(x) = \tanh(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \frac{1}{2}$$

С помощью метода бисекции найдем первый положительный корень $x_1 > 0$ нелинейного уравнения $f(x) = 0$.

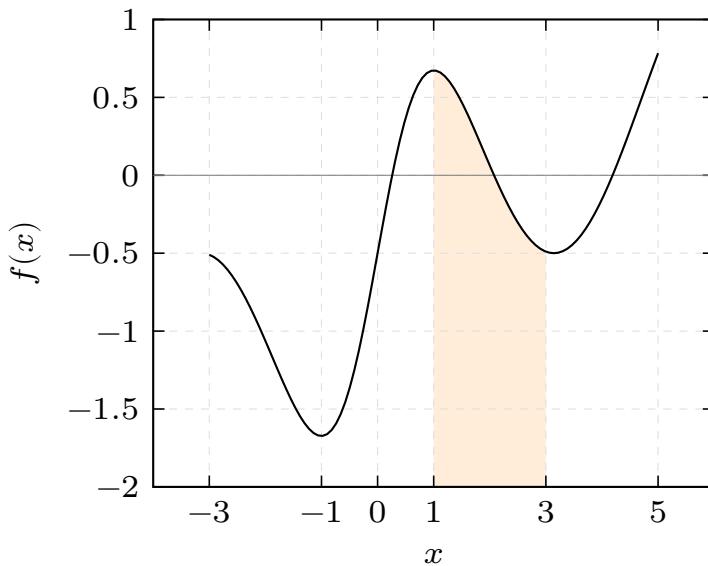


Рисунок 13 – График функции $f(x) = \tanh(x) \cdot (1 + \cos(x)) - \frac{1}{2}$

На основе анализа графика функции $f(x)$ (рисунок 13) выбираем область поиска первого положительного корня уравнения ($x > 0$), на границах которой функция $f(x)$ принимает значения разных знаков $f(a) \cdot f(b) < 0$ и в пределах

этого области строго монотонна $f'(x) < 0$.

Таким требованиям удовлетворяет отрезок $x \in [1, 3]$ (выделенная область на графике), так как функция на отрезке монотонна $f'(x) < 0$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков:

$$f(1) = \tanh(1) \cdot (1 + \cos(1)) - \frac{1}{2} \approx 0.67 > 0$$

$$f(3) = \tanh(3) \cdot (1 + \cos(3)) - \frac{1}{2} \approx -0.49 < 0$$

Зададим погрешность поиска корня уравнения $\varepsilon = 0.1$ и используем метод бисекции для поиска первого положительного корня уравнения:

- 1) Область поиска корня уравнения отрезок $[1, 3]$ делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$:

$$c = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$f(c) = f(2) = \tanh(2) \cdot (1 + \cos(2)) - \frac{1}{2} \approx 0.06285 > 0$$

Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и на левом конце отрезка $f(a)$:

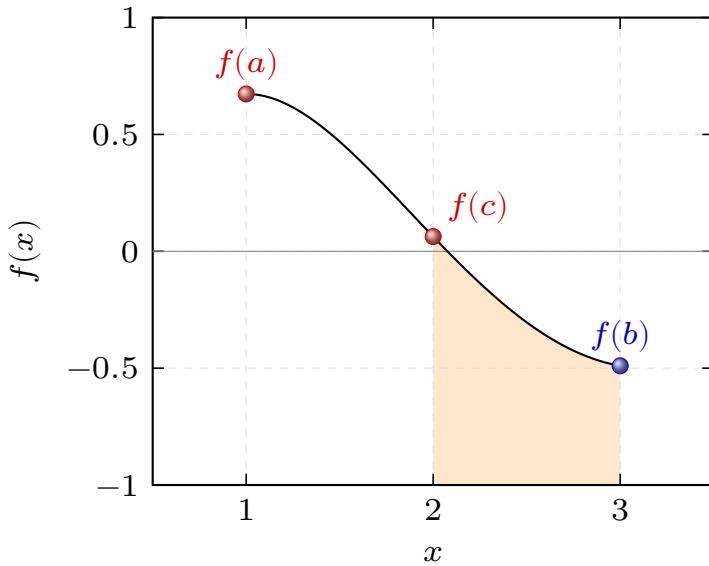
$$f(a) \cdot f(c) = f(1) \cdot f(2) = 0.67 \cdot 0.06285 = 0.0423 > 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка $[2, 3]$.

Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 3 - 2 = 1 > \varepsilon = 0.1$$

Так как длина отрезка больше погрешности поиска, то итерационный процесс продолжаем.



- 2) Область поиска корня уравнения отрезок $[2, 3]$ делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$:

$$c = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

$$f(c) = f(2.5) = \tanh(2.5) \cdot (1 + \cos(2.5)) - \frac{1}{2} \approx -0.3038 < 0$$

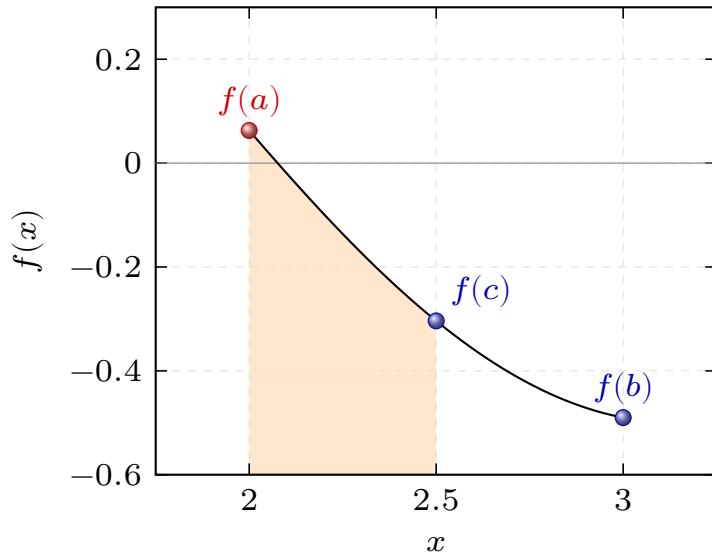
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и на левом конце отрезка $f(a)$:

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.5) = 0.6285 \cdot (-0.3038) = -0.019094 < 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка $[2, 2.5]$. Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.5 - 2 = 0.5 > \varepsilon = 0.1$$

Так как длина отрезка больше погрешности поиска, то итерационный процесс продолжаем.



- 3) Область поиска корня уравнения отрезок $[2, 2.5]$ делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$:

$$c = \frac{2 + 2.5}{2} = 2.25$$

$$f(c) = f(2.25) = \tanh(2.25) \cdot (1 + \cos(2.25)) - \frac{1}{2} \approx -0.13634 < 0$$

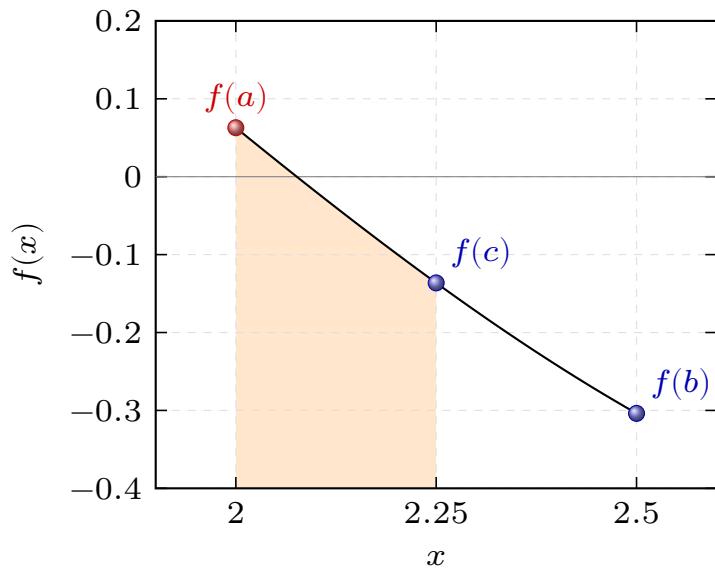
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и на левом конце отрезка $f(a)$:

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.25) = 0.6285 \cdot (-0.13634) = -0.00857 < 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка $[2, 2.25]$. Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.25 - 2 = 0.25 > \varepsilon = 0.1$$

Длина отрезка меньше погрешности поиска, поэтому итерационный процесс продолжаем.



- 4) Область поиска корня уравнения отрезок $[2, 2.25]$ делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$:

$$c = \frac{2 + 2.25}{2} = 2.125$$

$$f(c) = f(2.125) = \tanh(2.125) \cdot (1 + \cos(2.125)) - \frac{1}{2} \approx -0.03959 < 0$$

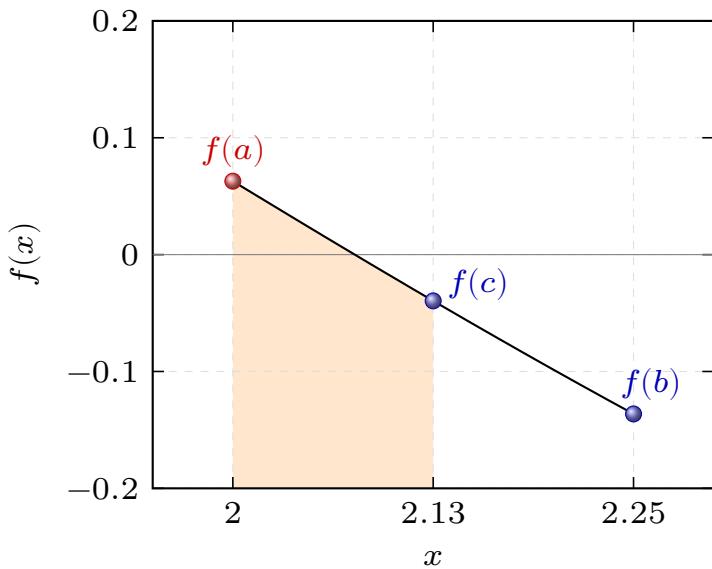
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и на левом конце отрезка $f(a)$:

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.125) = 0.6285 \cdot (-0.03959) = -0.002488 < 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка $[2, 2.125]$. Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.125 - 2 = 0.125 > \varepsilon = 0.1$$

Длина отрезка меньше погрешности поиска, поэтому итерационный процесс продолжаем.



- 5) Область поиска корня уравнения отрезок $[2, 2.125]$ делится пополам и вычисляется значение функции в середине отрезка $f(c)$:

$$c = \frac{2 + 2.125}{2} = 2.0625$$

$$f(c) = f(2.0625) = \tanh(2.0625) \cdot (1 + \cos(2.0625)) - \frac{1}{2} \approx 0.01108 > 0$$

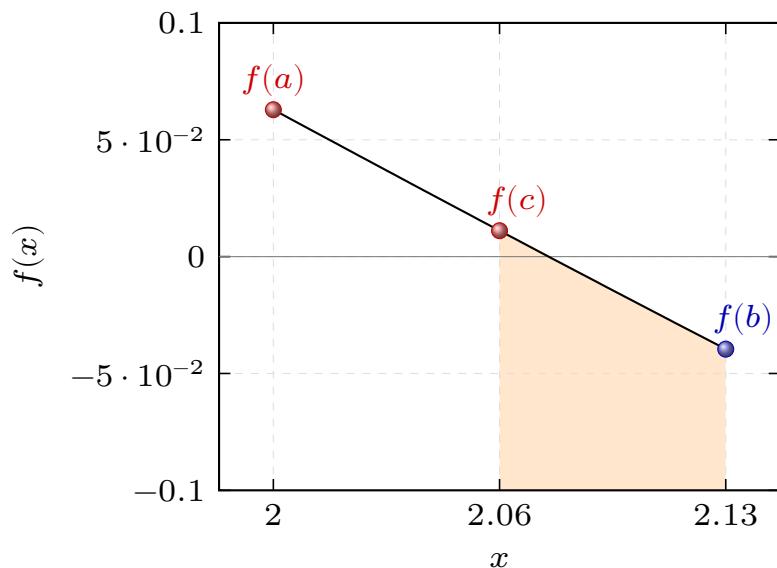
Проводится сравнение знаков функции в середине отрезка $f(c)$ и на левом конце отрезка $f(a)$:

$$f(a) \cdot f(c) = f(2) \cdot f(2.0625) = 0.6285 \cdot 0.01108 = 0.0007 > 0$$

Следовательно, искомый корень уравнения находится внутри отрезка $[2.0625, 2.125]$. Проведем сравнение длины отрезка и погрешности поиска корня:

$$|a, b| = b - a = 2.125 - 2.0625 = 0.0625 < \varepsilon = 0.1$$

Длина отрезка меньше погрешности поиска, поэтому итерационный процесс завершаем.



В качестве первого положительного корня x_1 уравнения $f(x) = 0$ приближенно выберем середину последнего полученного интервала $[a, b]$ и для контроля определим значение функции в точке $f(x_1)$ приближенного корня уравнения:

$$x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{2.0625 + 2.125}{2} = 2.09375$$

$$f(x_1) = f(2.09375) = \tanh(2.09375) \cdot (1 + \cos(2.09375)) - \frac{1}{2} \approx -0.01442$$

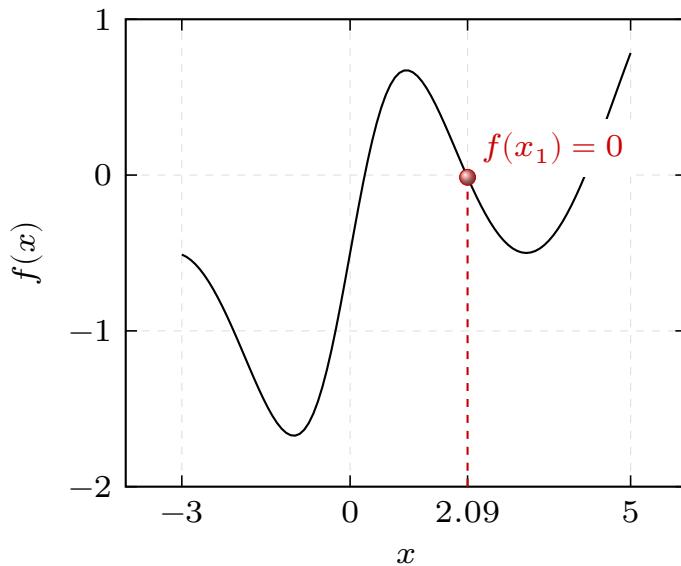


Рисунок 14 – График функции $f(x)$ (**сплошная линия**) и первый положительный корень $x_1 = 2.09375$ (маркер) уравнения $f(x) = 0$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.
- 7 [List of mathematical symbols by subject](#)