

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Численное интегрирование.....	4
1.1 Формула прямоугольников	6
1.2 Формула трапеций	7
1.3 Формула Симпсона	8
1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично	9
2 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений .	17
2.1 Метод Эйлера решения задачи Коши.....	18
2.2 Оценка погрешности решения задачи Коши.....	19
2.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера	20
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	28
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	29

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Численное интегрирование

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a, b]$ и известна ее первообразная $F(x)$, то определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$ – первообразная подынтегральной функции $f(x)$.

Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика функции и осью абсцисс Ox (выделенная область на рисунке 1).

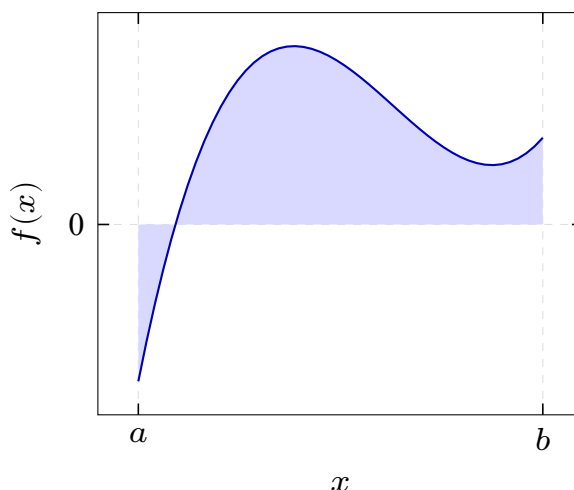


Рисунок 1 – Геометрический смысл определенного интеграла

Однако во многих случаях первообразная функция $F(x)$ не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция $f(x)$ часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

Задача численного интегрирования функции заключается в вычислении

значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции $f(x)$.

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию $f(x)$ на рассматриваемом отрезке $x \in [a, b]$ заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией $\varphi(x)$ простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где c_i – числовые коэффициенты квадратурной формулы; x_i – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка $[a, b]$, $(i = 0, 1, \dots, n)$.

На основании свойств определенных интегралов, I можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Поэтому, для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке $[a, b]$ достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

1.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

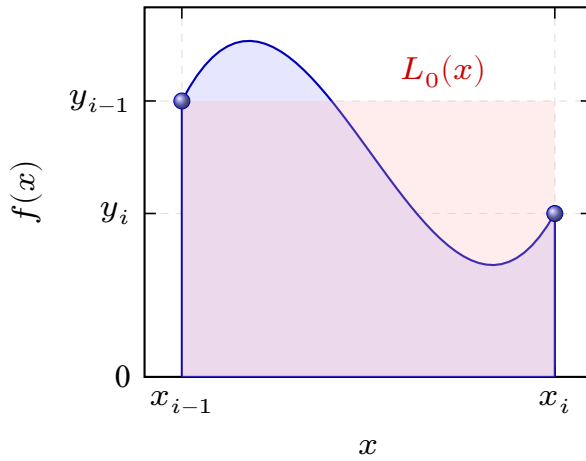
С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

В зависимости от выбора узла сетки $\{x_i\}$ для аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ различают левую и правую формулы прямоугольников: если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце отрезка $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ (рисунок 2), то справедлива левая формула прямоугольников:

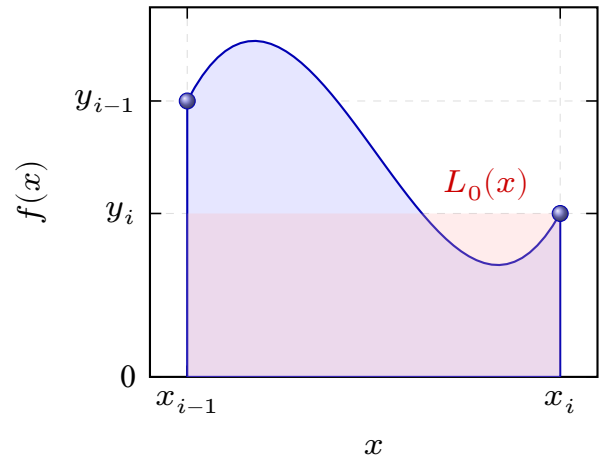
$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка $L_0 \approx f(x_i) = y_i$ (рисунок 2), то справедлива правая формула прямоугольников :

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$



a)



a)

Рисунок 2 – График подынтегральной функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $L_0(x)$ на частичном отрезке для формулы прямоугольников

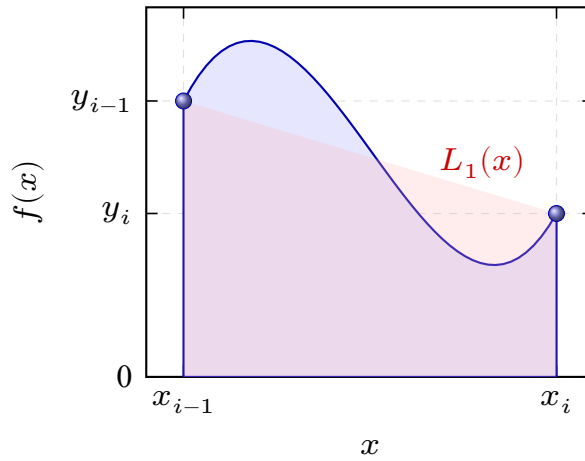
1.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным по множеству узлов сетки $\{x_{i-1}, x_i\}$:

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$



а)

Рисунок 3 – График подынтегральной функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $L_1(x)$ на частичном отрезке для формулы трапеций

1.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ квадратурная *формула Симпсона* является следствием аппроксимации подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени $f(x) \approx L_2(x)$, который построен по узлам сетки $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - x_{i-1/2}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_i - x)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_{i-1/2} +, \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_i
 \end{aligned}$$

где $x_{i-1/2}$ – узел вспомогательной сетки, расположенный между узлами основной сетки $x_{i-1} < x_{i-1/2} < x_i$

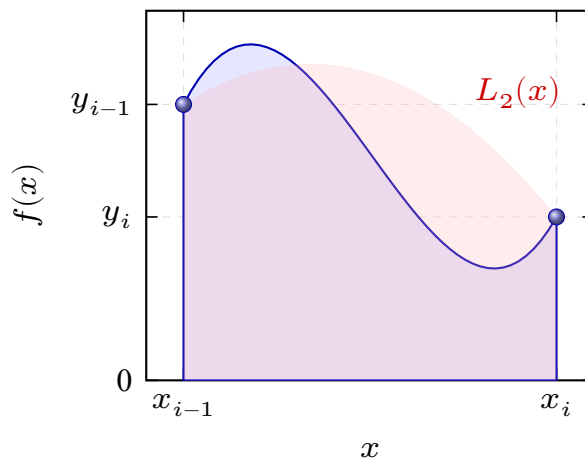
Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где c_0, c_1, c_2 – коэффициенты при соответствующих степенях x интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ в пределах частичного отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа $L_2(x)$ на частичном отрезке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ определяет формулу Симпсона:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$



а)

Рисунок 4 – График подынтегральной функции $f(x)$ и аппроксимирующего полинома $L_2(x)$ на частичном отрезке для формулы Симпсона

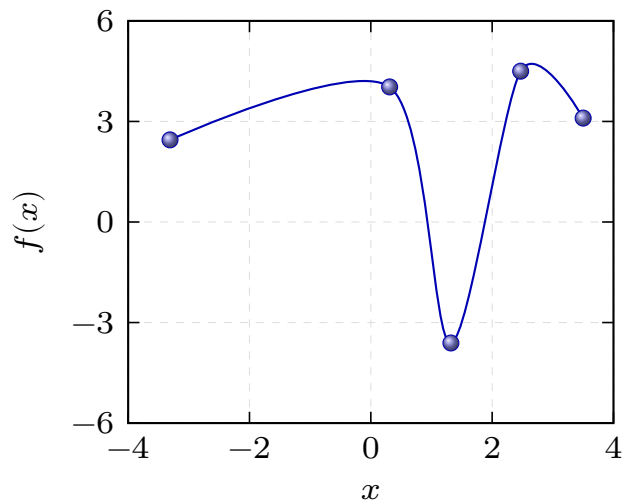
1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки $\{x_i\}$ определены значения некоторой функции $\{y_i\} = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3	4
x_i	−3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
y_i	2.45	4.03	−3.61	4.50	3.10

1) Построим график функции $f(x)$ заданной таблично.



- 2) Воспользуемся левой и правой формулами прямоугольников для нахождения численного значения интеграла от функции $f(x)$, заданной таблично на отрезке $x \in [x_0, x_4]$. Для этого разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

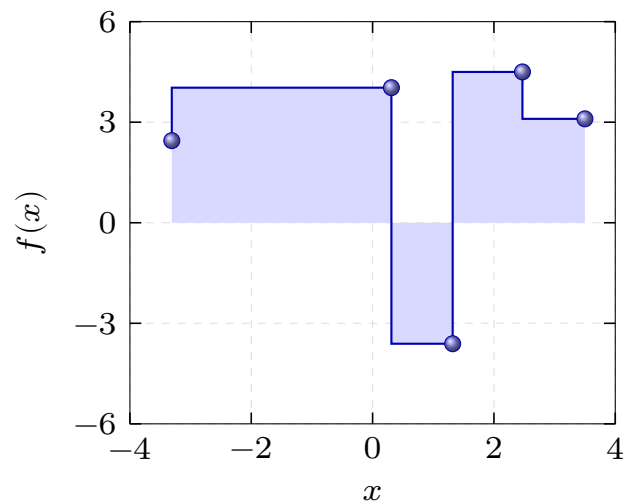
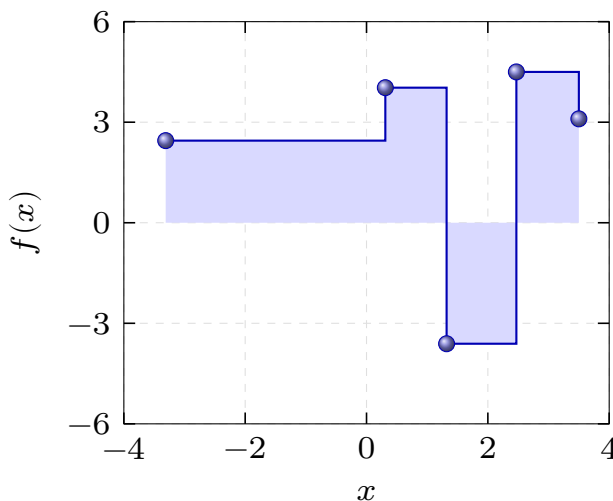


Рисунок 5 – Использование квадратурных формул левых и правых прямоугольников

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом нулевой степени $f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$, построенным по узлам $\{x_{i-1}, x_i\}$.

По методу прямоугольников, определим значение интеграла на каждом ча-

стичном отрезке (левые прямоугольники):

$$\begin{aligned} S_1^- &= y_0 \cdot (x_1 - x_0) = 2.45 \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 8.87 \\ S_2^- &= y_1 \cdot (x_2 - x_1) = 4.03 \cdot (1.32 - 0.31) \approx 4.07 \\ S_3^- &= y_2 \cdot (x_3 - x_2) = -3.61 \cdot (2.47 - 1.32) \approx -4.15 \\ S_4^- &= y_3 \cdot (x_4 - x_3) = 4.5 \cdot (3.50 - 2.47) \approx 4.64 \end{aligned}$$

(правые прямоугольники):

$$\begin{aligned} S_1^+ &= y_1 \cdot (x_1 - x_0) = 4.03 \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 14.59 \\ S_2^+ &= y_2 \cdot (x_2 - x_1) = -3.61 \cdot (1.32 - 0.31) \approx -3.65 \\ S_3^+ &= y_3 \cdot (x_3 - x_2) = 4.50 \cdot (2.47 - 1.32) \approx 5.18 \\ S_4^+ &= y_4 \cdot (x_4 - x_3) = 3.10 \cdot (3.50 - 2.47) \approx 3.19 \end{aligned}$$

Значение интегралов I^- и I^+ на всем отрезке интегрирования $[x_0, x_4]$:

$$\begin{aligned} I^- &= S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^- = 8.87 + 4.07 - 4.15 + 4.64 = 13.43 \\ I^+ &= S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+ = 14.59 - 3.65 + 5.18 + 3.19 = 19.31 \end{aligned}$$

- 3) Рассмотрим *метод трапеций* для нахождения численного значения интеграла от функции $f(x)$, заданной таблично на отрезке $x \in [x_0, x_4]$. Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции $f(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени $f(x) \approx L_1(x)$, построенным по узлам $\{x_{i-1}, x_i\}$, т.е. прямой соединяющей два соседних узла.

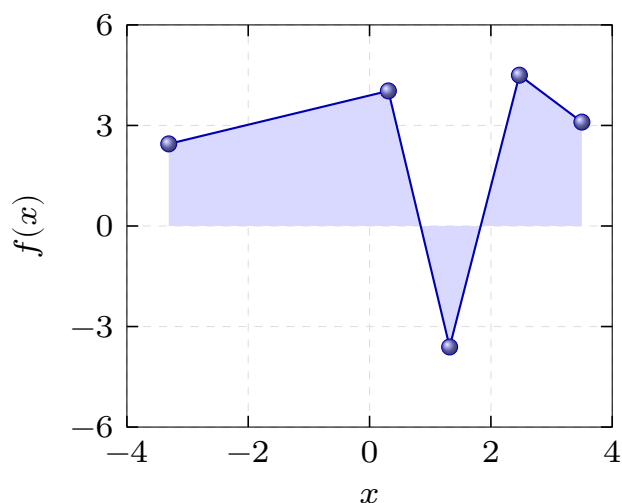


Рисунок 6 – Использование квадратурных формул трапеций

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$S_1 = \frac{y_1 + y_0}{2} \cdot (x_1 - x_0) = \frac{4.03 + 2.45}{2} \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 11.73$$

$$S_2 = \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{-3.61 + 4.03}{2} \cdot (1.32 - 0.31) \approx 0.21$$

$$S_3 = \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_3 - x_2) = \frac{4.50 - 3.61}{2} \cdot (2.47 - 1.32) \approx 0.51$$

$$S_4 = \frac{y_4 + y_3}{2} \cdot (x_4 - x_3) = \frac{3.10 + 4.50}{2} \cdot (3.50 - 2.47) \approx 3.91$$

Определим интеграл I на всем отрезке интегрирования $[x_0, x_4]$, воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 11.73 + 0.21 + 0.51 + 3.91 = 16.37.$$

- 4) Рассмотрим *метод Симпсона* для нахождения численного значения интеграла от функции $f(x)$, заданной таблично на отрезке $x \in [x_0, x_4]$.

Разделим всё множество узлов сетки $\{x_i\}$, в которых известны значения функции $\{y_i\}$, на основные и вспомогательные узлы:

Таблица 2 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	$1 - 1/2$	1	$1 + 1/2$	2
x_i	-3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
y_i	2.45	4.03	-3.61	4.50	3.10

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_2] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2].$$

В пределах первого частичного отрезка $[x_0, x_1]$ построим интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам сетки $x_0 = -3.31$, $x_{1-1/2} = 0.31$, $x_1 = 1.32$:

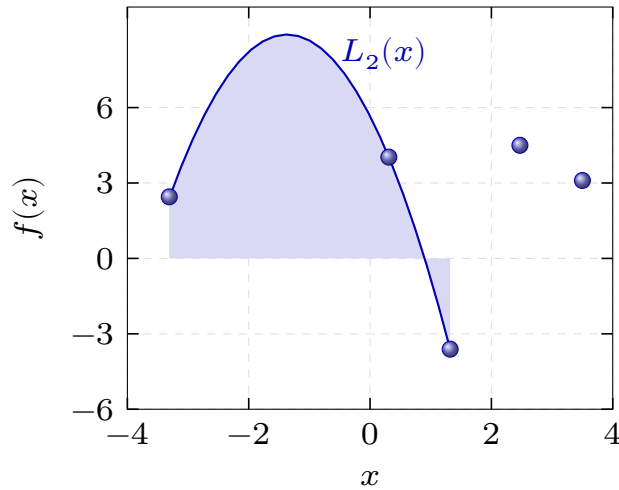
$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - 0.31)(x - 1.32)}{((-3.31 - 0.31)(-3.31 - 1.32))} \cdot 2.45 + \\ & + \frac{(x - (-3.31))(x - 1.32)}{(0.31 - (-3.31))(0.31 - 1.32)} \cdot 4.03 + \\ & + \frac{(x - (-3.31))(x - 0.31)}{(1.32 - (-3.31))(1.32 - 0.31)} \cdot (-3.61) \end{aligned}$$

После алгебраических преобразований запишем интерполяционный полином в каноническом виде:

$$L_2(x) = 5.66 - 4.74 \cdot x - 1.73 \cdot x^2$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома $L_2(x)$ на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} L_2(x) dx = \int_{-3.31}^{1.32} (5.66 - 4.74 \cdot x - 1.73 \cdot x^2) dx = 25.88$$



В пределах второго частичного отрезка $[x_1, x_2]$ построим интерполяционный полином Лагранжа $L_2(x)$ по узлам сетки $x_1 = 1.32$, $x_{1+1/2} = 2.47$, $x_2 = 3.50$:

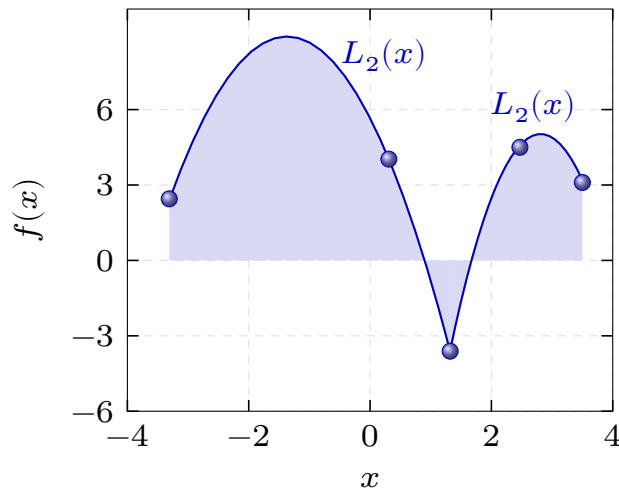
$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 2.47)(x - 3.50)}{(1.32 - 2.47)(1.32 - 3.50)} \cdot (-3.61) + \\ &+ \frac{(x - 1.32)(x - 3.50)}{(2.47 - 1.32)(2.47 - 3.50)} \cdot 4.50 + \\ &+ \frac{(x - 1.32)(x - 2.47)}{(3.50 - 1.32)(3.50 - 2.47)} \cdot 3.10 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -25.56 + 21.76 \cdot x - 3.87 \cdot x^2$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома $L_2(x)$ на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} L_2(x) dx = \int_{1.32}^{3.50} (-25.56 + 21.76 \cdot x - 3.87 \cdot x^2) dx = 6.13$$



Определим интеграл всем отрезке $[x_0, x_2]$ воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25.88 + 6.13 = 32.01$$

- 5) Сравнивая численные значения определенного интеграла рассчитанные по методам прямоугольников, трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что рассчитанные значения различаются.

Таблица 3 – Численные значения интегралов

Метод интегрирования	Значение интеграла
Левых прямоугольников	13.43
Правых прямоугольников	19.31
Трапеций	16.37
Симпсона	32.01

Значение определенного интеграла от функции заданной таблично, рассчитанное по методу Симпсона является наибольшим, а значение рассчитанное по методу левых прямоугольников – наименьшее.

2 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

При рассмотрении физических явлений и процессов часто не удается найти непосредственную взаимосвязь между величинами, характеризующими эволюционный, т.е. изменяющийся во времени, процесс. Однако во многих случаях можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные от неизвестных функций. Такие уравнения называют *дифференциальными*.

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (начальным условием) и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений эта задача формулируется в виде системы уравнений:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{u}), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}, \quad (1)$$

где $\vec{u}(t)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению; $\vec{f}(t, \vec{u})$ – известные функции, зависящие от времени и неизвестных функций; \vec{u} – *начальные условия*, т.е. значения неизвестных функций в начальный момент времени ($t = 0$).

Запишем в развернутом виде систему (1) линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и начальные условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_1(0) = \dot{u}_1 \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_2(0) = \dot{u}_2 \\ \dots = \dots \dots \dots \dots \dots \dots = \dots \\ \frac{du_n}{dt} = f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_n(0) = \dot{u}_n \end{array} \right., \quad (2)$$

где n – количество дифференциальных уравнений в системе (1).

Будем полагать, что решение задачи Коши (2) существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

2.1 Метод Эйлера решения задачи Коши

Введем временную сетку, т.е. будем рассматривать изменения неизвестных функций только в заданные моменты времени:

$$\{t_j\}, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

где j – номер временного интервала; $\Delta t_{j+1} = (t_{j+1} - t_j)$ – шаг сетки, т.е. временной интервал между двумя последовательными моментами времени; N – количество узлов временной сетки.

Основная идея метода Эйлера заключается в предположении, о том что неизвестные функции $\vec{u}(t)$ изменяются линейно в интервале $[t_j, t_{j+1}]$ между двумя соседними узлами временной сетки и интерполяция неизвестных функций проводится полиномом первого порядка $\vec{L}_1(t)$:

$$\vec{u} \approx \vec{L}_1(t) = \frac{t - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} \cdot \vec{u}(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot \vec{u}(t_{j+1}).$$

Производная от неизвестной функции приближенно аппроксимируется выражением вида:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} \approx \vec{L}'_1(t) = \frac{\vec{u}(t_{j+1}) - \vec{u}(t_j)}{t_{j+1} - t_j}, \quad (3)$$

где t_{j+1} и t_j – два последовательных момента времени.

Тогда систему дифференциальных уравнений первого порядка (1) приближенно можно записать в виде:

$$\frac{\vec{u}(t_{j+1}) - \vec{u}(t_j)}{\Delta t_{j+1}} \approx \vec{f}(t_j, \vec{u}(t_j)) \quad (4)$$

Относительно неизвестных $\vec{u}(t_{j+1})$ это система линейных алгебраических уравнений и решение системы (4) находится явным образом по рекуррентным формулам:

$$\vec{u}(t_{j+1}) = \vec{u}(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot \vec{f}(t_j, \vec{u}(t_j)), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}. \quad (5)$$

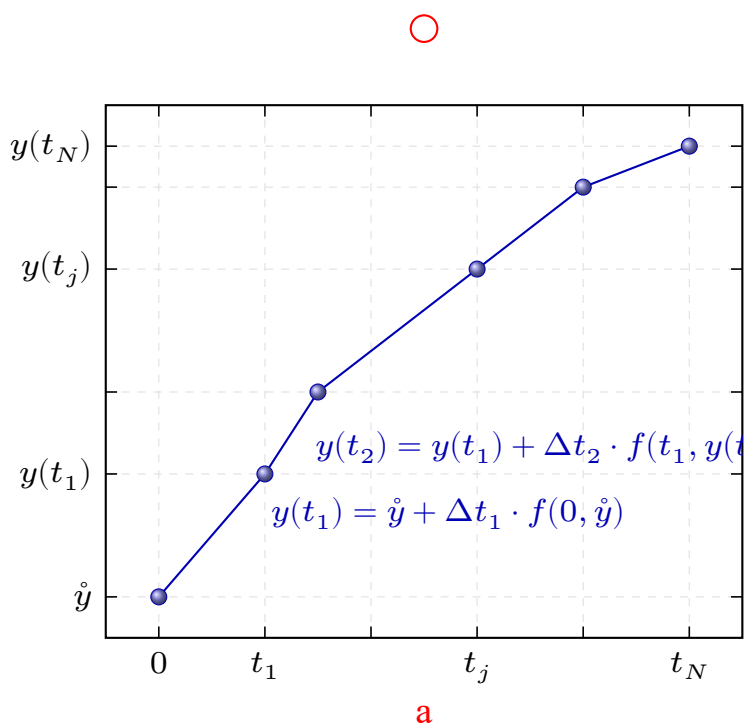
Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши. К недостаткам метода можно отнести малую точность и систематическое накопление ошибок.

Для простоты рассмотрим только одно дифференциальное уравнение с

единственным начальным условием:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot f(t_j, y(t_j)), \quad y(0) = \dot{y}$$

На рисунке 7 представлена графическая иллюстрация метода Эйлера численного решения задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка.



а)

Рисунок 7 – Ломаная Эйлера

2.2 Оценка погрешности решения задачи Коши

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) по временной переменной t с учетом начальных условий:

$$\vec{v}(t) = \vec{u}(0) + \int_0^t \vec{f}(\xi, \vec{v}) d\xi. \quad (6)$$

Уравнение (6) является интегральным уравнением для неизвестной функции $\vec{v}(t)$, а его решение эквивалентно решению задачи Коши (1), что можно проверить прямой подстановкой (6) в (1).

На временной сетке $\{t_j\}$ интеграл в правой части равенства (6) прибли-

женно вычисляется по формуле трапеций:

$$\int_0^{t_{j+1}} \vec{f}(\xi, \vec{v}) d\xi \approx \sum_{k=0}^j \frac{\vec{f}(t_{k+1}, \vec{v}(t_{k+1})) + \vec{f}(t_k, \vec{v}(t_k))}{2} \cdot (t_{k+1} - t_k). \quad (7)$$

Воспользовавшись (7), выражением для решения интегрального уравнения (6) можно записать в рекуррентной форме:

$$\vec{v}(t_{j+1}) = \vec{v}(t_j) + \frac{\vec{f}(t_{j+1}, \vec{v}(t_{j+1})) + \vec{f}(t_j, \vec{v}(t_j))}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (8)$$

Для определения приближенного значения решения интегрального уравнения могут быть использованы значения неизвестных функций $\vec{u}(t_j)$, рассчитанные по методу Эйлера на j -ом временном слое:

$$\vec{v}(t_{j+1}) \approx \vec{v}(t_j) + \frac{\vec{f}(t_j, \vec{u}(t_j)) + \vec{f}(t_{j+1}, \vec{u}(t_{j+1}))}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (9)$$

В качестве предельной абсолютной погрешности приближенного решения $\vec{u}(t_j)$ задачи Коши (1) можно принять величину:

$$\varepsilon_i(t_j) = |v_i(t_j) - u_i(t_j)|, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

2.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера

Применяя метод Эйлера, найдем решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0, 2t + u_2, & u_1(0) = 1 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_1}{2}, & u_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

в пределах отрезка $t \in [0, 10]$ на равномерной сетке с количеством временных интервалов $N = 5$.

Введем обозначения

$$\begin{cases} f_1(t) = 0, 2 \cdot t + u_2(t) \\ f_2(t) = -\frac{u_1(t)}{2} \end{cases}.$$

где f_1 и f_2 – функции, стоящие в правых частях дифференциальных уравнений системы (11):

Рекуррентные соотношения (??) для решения задачи Коши (11) методом Эйлера:

$$\begin{cases} u_1(t_{j+1}) = u_1(t_j) + \tau \cdot f_1(t_j), & u_1(0) = 1 \\ u_2(t_{j+1}) = u_2(t_j) + \tau \cdot f_2(t_j), & u_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

Решение системы интегральных уравнений (6) определяется рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(t_{j+1}) = \hat{u}_1(t_j) + \tau \cdot \frac{f_1(t_j) + f_1(t_{j+1})}{2}, & \hat{u}_1(0) = 1 \\ \hat{u}_2(t_{j+1}) = \hat{u}_2(t_j) + \tau \cdot \frac{f_2(t_j) + f_2(t_{j+1})}{2}, & \hat{u}_2(0) = 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Определим временной шаг метода Эйлера, зная длину временного отрезка (“время наблюдения”) и количество интервалов:

$$\tau = \frac{t_{max} - t_0}{N} = \frac{10 - 0}{5} = 2,$$

где $t_0 = 0$ – начальный момент времени; t_{max} – максимальное время (“время наблюдения”).

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau = 2$:

$$\{t_j\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Последовательно определяем приближенное решение задачи Коши (11) методом Эйлера, используя рекуррентные соотношения (12).

1) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_1 = 2$:

$$f_1(0) = 0, 2 \cdot 0 + u_2(0) = 0, 2 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$f_2(0) = -\frac{u_1(0)}{2} = -\frac{1}{2} = -0, 5$$

$$\begin{cases} u_1(2) = u_1(0) + 2 \cdot f_1(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ u_2(2) = u_2(0) + 2 \cdot f_2(0) = 0 + 2 \cdot (-0,5) = -1 \end{cases}.$$

2) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_2 = 4$:

$$f_1(2) = 0,2 \cdot 2 + u_2(2) = 0,2 \cdot 2 + (-1) = -0,6$$

$$f_2(2) = -\frac{u_1(2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$\begin{cases} u_1(4) = u_1(2) + 2 \cdot f_1(2) = 1 + 2 \cdot (-0,6) = -0,2 \\ u_2(4) = u_2(2) + 2 \cdot f_2(2) = -1 + 2 \cdot (-0,5) = -2 \end{cases}.$$

3) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_3 = 6$:

$$f_1(4) = 0,2 \cdot 4 + u_2(4) = 0,2 \cdot 4 + (-2) = -1,2$$

$$f_2(4) = -\frac{u_1(4)}{2} = -\frac{-0,2}{2} = 0,1$$

$$\begin{cases} u_1(6) = u_1(4) + 2 \cdot f_1(4) = -0,2 + 2 \cdot (-1,2) = -2,6 \\ u_2(6) = u_2(4) + 2 \cdot f_2(4) = -2 + 2 \cdot (0,1) = -1,8 \end{cases}.$$

4) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_4 = 8$:

$$f_1(6) = 0,2 \cdot 6 + u_2(6) = 0,2 \cdot 6 + (-1,8) = -0,6$$

$$f_2(6) = -\frac{u_1(6)}{2} = -\frac{-2,6}{2} = 1,3$$

$$\begin{cases} u_1(8) = u_1(6) + 2 \cdot f_1(6) = -2,6 + 2 \cdot (-0,6) = -3,8 \\ u_2(8) = u_2(6) + 2 \cdot f_2(6) = -1,8 + 2 \cdot (1,3) = 0,8 \end{cases}.$$

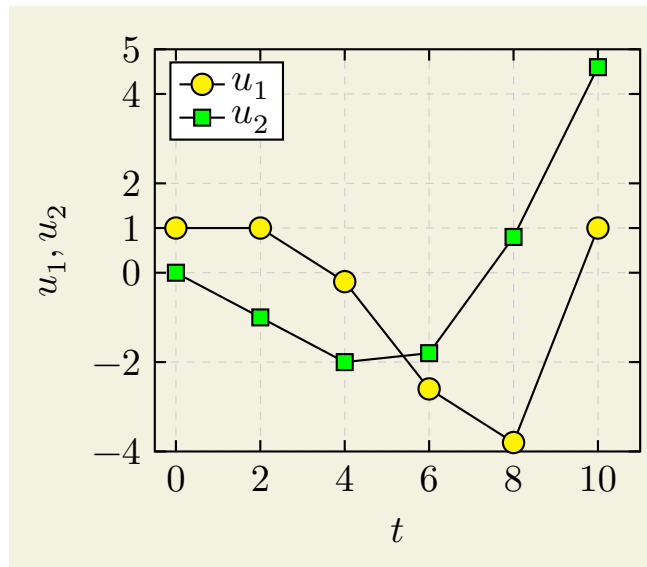


Рисунок 8 – Зависимость неизвестных функций от времени

5) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_5 = 10$:

$$f_1(8) = 0,2 \cdot 8 + u_2(8) = 0,2 \cdot 8 + 0,8 = 2,4$$

$$f_2(8) = -\frac{u_1(8)}{2} = -\frac{-3,8}{2} = 1,9$$

$$\begin{cases} u_1(10) = u_1(8) + 2 \cdot f_1(8) = -3,8 + 2 \cdot (2,4) = 1 \\ u_2(10) = u_2(8) + 2 \cdot f_2(8) = 0,8 + 2 \cdot (1,9) = 4,6 \end{cases}.$$

На рисунке 8 представлено решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений (11).

Последовательно определяем приближенное решение интегрального уравнения (11), используя рекуррентные соотношения (13).

1) Определим значения неизвестных функций \hat{u}_1 и \hat{u}_2 в точке $t_1 = 2$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(2) = \hat{u}_1(0) + \tau \cdot \frac{f_1(0) + f_1(2)}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{0 + (-0,6)}{2} = 0,4 \\ \hat{u}_2(2) = \hat{u}_2(0) + \tau \cdot \frac{f_2(0) + f_2(2)}{2} = 0 + 2 \cdot \frac{-0,5 + (-0,5)}{2} = -1 \end{cases}.$$

2) Определим значения неизвестных функций \hat{u}_1 и \hat{u}_2 в точке $t_2 = 4$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(4) = \hat{u}_1(2) + \tau \cdot \frac{f_1(2) + f_1(4)}{2} = 0,4 + 2 \cdot \frac{(-0,6) + (-1,2)}{2} = -2,4 \\ \hat{u}_2(4) = \hat{u}_2(2) + \tau \cdot \frac{f_2(2) + f_2(4)}{2} = -1 + 2 \cdot \frac{-0,5 + 0,1}{2} = -1,4 \end{cases}.$$

3) Определим значения неизвестных функций \hat{u}_1 и \hat{u}_2 в точке $t_3 = 6$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(6) = \hat{u}_1(4) + \tau \cdot \frac{f_1(4) + f_1(6)}{2} = -2,4 + 2 \cdot \frac{-1,2 + (-0,6)}{2} = -4,2 \\ \hat{u}_2(6) = \hat{u}_2(4) + \tau \cdot \frac{f_2(4) + f_2(6)}{2} = -1,4 + 2 \cdot \frac{0,1 + 1,3}{2} = 0 \end{cases}.$$

4) Определим значения неизвестных функций \hat{u}_1 и \hat{u}_2 в точке $t_4 = 8$:

$$\begin{cases} \hat{u}_1(8) = \hat{u}_1(6) + \tau \cdot \frac{f_1(6) + f_1(8)}{2} = -4,2 + 2 \cdot \frac{-0,6 + 2,4}{2} = -2,4 \\ \hat{u}_2(8) = \hat{u}_2(6) + \tau \cdot \frac{f_2(6) + f_2(8)}{2} = 0 + 2 \cdot \frac{1,3 + 1,9}{2} = 3,2 \end{cases}.$$

5) Определим значения неизвестных функций \hat{u}_1 и \hat{u}_2 в точке $t_5 = 10$:

$$f_1(10) = 0,2 \cdot 10 + u_2(10) = 0,2 \cdot 8 + 4,6 = 6,2$$

$$f_2(10) = -\frac{u_1(10)}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$\begin{cases} \hat{u}_1(10) = \hat{u}_1(8) + \tau \cdot \frac{f_1(8) + f_1(10)}{2} = -2,4 + 2 \cdot \frac{2,4 + 6,2}{2} = 6,2 \\ \hat{u}_2(10) = \hat{u}_2(8) + \tau \cdot \frac{f_2(8) + f_2(10)}{2} = 3,2 + 2 \cdot \frac{1,9 + (-0,5)}{2} = 4,6 \end{cases}.$$

На рисунке 9 представлены решения задачи Коши (1) и интегрального уравнения (6), рассчитанные в различные моменты времени.

В таблице 4 и на рисунке 10 представлены значения предельной абсолютной погрешности приближенного решения задачи Коши для различных моментов времени.

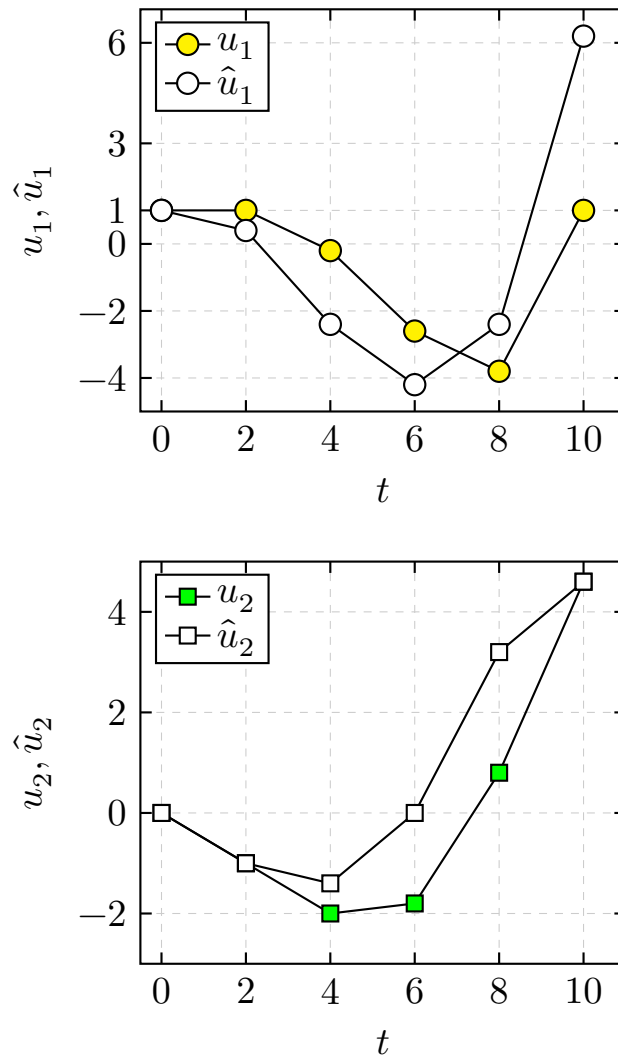


Рисунок 9 – Приближенное решение задачи Коши и соответствующего интегрального уравнения

Из рисунка 10 видно, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2,4$.

Таблица 4 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

[1pt] Время	0	2	4	6	8	10
Задача Коши						
u_1	1	1	-0,2	-2,6	-3,8	1
u_2	0	-1	-2	-1,8	0,8	4,6
Интегральное уравнение						
\hat{u}_1	1	0,4	-2,4	-4,2	-2,4	6,2
\hat{u}_2	0	-1	-1,4	0	3,2	4,6
Абсолютная погрешность $\epsilon = \hat{u} - u $						
ϵ_1	0	0,6	2,2	1,6	1,4	5,2
ϵ_2	0	0	0,6	1,8	2,4	0
[1pt]						

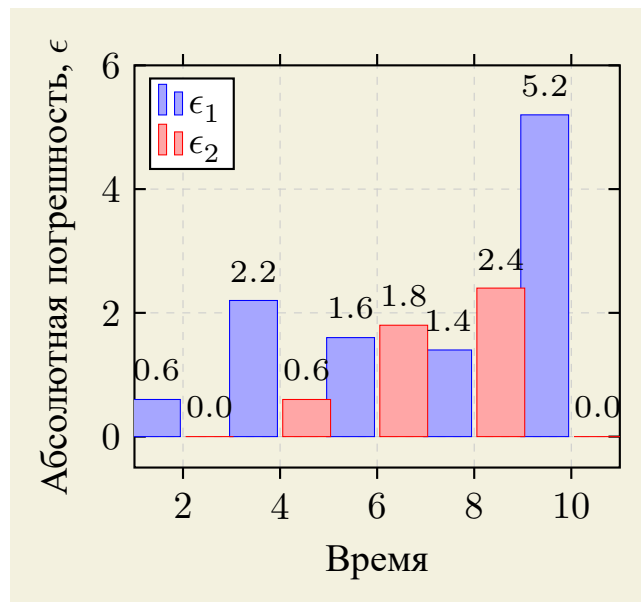


Рисунок 10 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5, 1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.