СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $\vec{x} = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество $\vec{x}$ состоит из отдельных точек $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если $\vec{x}$ есть отрезок $x_a < x < x_b$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени m вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \cdots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^{m} c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения $\|r\|$ полинома $p_m(x)$ от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^{n} \left(p_m(x_i) - y_i\right)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $\|r\| = g(c_0, c_1, \dots, c_m)$, т.е. коэффициентов полинома c_i ($i = 0, 1, \dots, m$), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей $\|r\| \to \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необходимо найти *положения минимума функции* многих переменных $\|r\|$.

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_1} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \|r\|}{\partial a_0} &= & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot 1 &= & 0 \\ \dfrac{\partial \|r\|}{\partial a_1} &= & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i &= & 0 \\ \dfrac{\partial \|r\|}{\partial a_2} &= & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^2 &= & 0 \\ \dots\dots &= & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots &= & 0 \\ \dfrac{\partial \|r\|}{\partial a_m} &= & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^m &= & 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$ и $\vec{b} = \{b_k\}$ – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Если среди узлов сетки $\{x_i\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы не равен нулю $\det \mathbf{A} \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\{\mathring{c}_0, \mathring{c}_1, \mathring{c}_2, \ldots, \mathring{c}_m\}$, а полином $p_m(x)$ с такими коэффициентами $\mathring{c}_i$ будет обладать минимальным квадратичным отклонением $\|r\|_{\min}$.

1.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4
x_i	–0.76	–0.48	–0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию $\{y_i\}$, заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени $p_2(x)$:

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

1) Построим меру отклонения полинома $p_2(x)$ от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^{4} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i\right)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$ – значение функции в точке x_i.

2) Запишем меру отклонения $\|r\|$ в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned}\|r\| = &\left(c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15\right)^2 + \\ &+ \left(c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39\right)^2 + \\ &+ \left(c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10\right)^2 + \\ &+ \left(c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71\right)^2 + \\ &+ \left(c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30\right)^2\end{aligned}$$

3) Определим частную производную от меры отклонений $\|r\|$ по аргументу c_0

и приравняем её нулю:

$$\frac{\partial \left\| r \right\|}{\partial c_0} = 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 +$$
$$2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 +$$
$$2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 +$$
$$2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 +$$
$$2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0$$

Коэффициенты первой строки матрицы **A** и первый элемент вектора $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}
a_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\
a_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\
a_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\
b_0 &= 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65
\end{aligned}$$

4) Определим частную производную от меры отклонений $\left\| r \right\|$ по аргументу c_1 и приравняем её нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) +$$
$$2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) +$$
$$2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) +$$
$$2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) +$$
$$2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0$$

Коэффициенты второй строки матрицы **A** и второй элемент вектора $\vec{b}$:

$$\begin{aligned}
c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\
c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\
c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\
b_1 &= 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\
&\quad 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24
\end{aligned}$$

5) Определим частную производную от меры отклонений $\left\| r \right\|$ по аргументу c_2

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} =& 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ &+2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ &+2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ &+2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ &+2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы **A** и третий элемент вектора $\vec{b}$:

$$\begin{aligned} c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\ b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ & \quad 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94 \end{aligned}$$

6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов c_0, c_1, c_2 аппроксимирующего полинома $p_2(x)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot c_0 - 0.56 \cdot c_1 + 1.18 \cdot c_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot c_0 + 1.18 \cdot c_1 - 0.38 \cdot c_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot c_0 - 0.38 \cdot c_1 + 0.49 \cdot c_2 = 5.94 \end{cases}$$

7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений ап-

проксимирующего алгебраического полинома второго порядка $p_2(x)$ (сплошная линия).

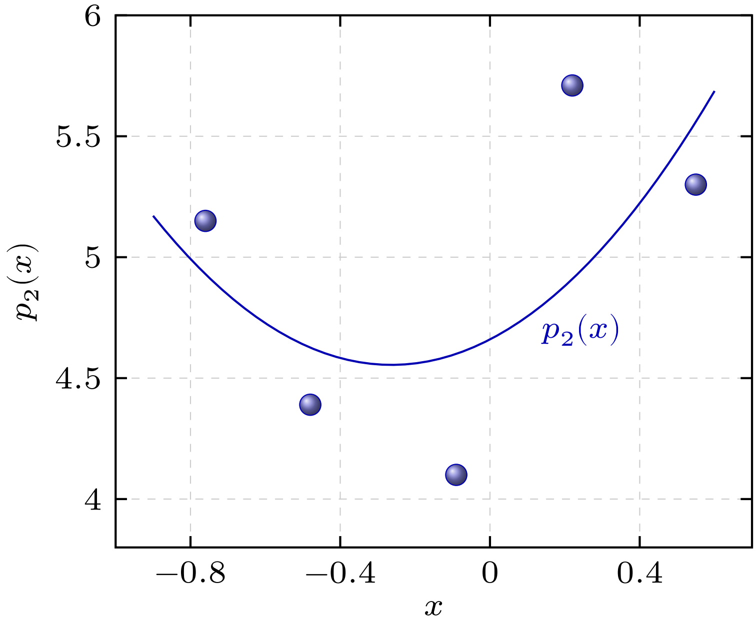


Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома $p_2(x)$ (сплошная линия)

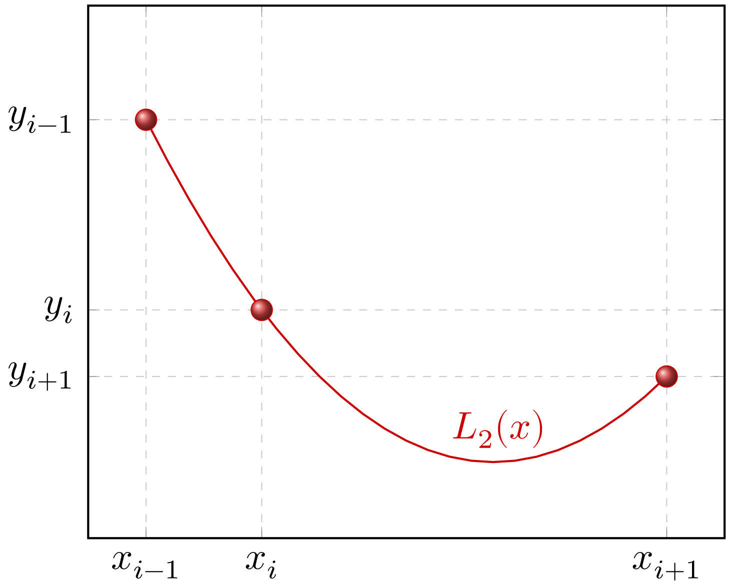
2 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $y(x)$ по заданным в конечном числе точек $\{x_i\}$ значениям этой функции.

Численное дифференцирование применяется, если функцию $y(x)$ трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию $y(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$ и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку $\{x_i\}$ и проведем интерполирование функции $y(x)$ в узлах сетки $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая $y(x) \approx L_2(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:



$$
\begin{aligned}
L_2(x) \;=\; & \frac{(x-x_i)\cdot(x-x_{i+1})}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+\\
+\; & \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \;+\\
+\; & \frac{(x-x_{i-1})\cdot(x-x_i)}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

где $y_{i-1} = y(x_{i-1})$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ – значение функции $y(x)$ в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$:

$$
\begin{aligned}
L_2'(x) \;=\; & \frac{2x-x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+\\
+\; & \frac{2x-x_{i-1}-x_{i+1}}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \;+\\
+\; & \frac{2x-x_{i-1}-x_i}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной $y'(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$. Например, в точке $x = x_i$ первая производная от функции $y(x)$ приближенно равна:

$$
\begin{aligned}
y'(x_i) \approx L_2'(x_i) \;=\; & \frac{x_i-x_{i+1}}{(x_{i-1}-x_i)\cdot(x_{i-1}-x_{i+1})}\cdot y_{i-1} \;+\\
+\; & \frac{(x_i-x_{i-1})+(x_i-x_{i+1})}{(x_i-x_{i-1})\cdot(x_i-x_{i+1})}\cdot y_i \;+\\
+\; & \frac{x_i-x_{i-1}}{(x_{i+1}-x_{i-1})\cdot(x_{i+1}-x_i)}\cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближенное значение второй производной от функции $y(x)$ в любой точке отрезка $[x_{i-1}, x_{i+1}]$:

$$
\begin{aligned}
y''(x) \approx L_2''(x) \;=\; & \frac{2}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} \;+ \\
+ \;& \frac{2}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i \;+ \\
+ \;& \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}
$$

На *равномерной сетке* $\{x_i\}$, расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке $x = x_i$ упрощаются:

$$
y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},
$$

где $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$ – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков $y^{(n)}(x)$ уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка $L_2(x)$. Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции $y(x)$ зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки $\{x_i\}$.

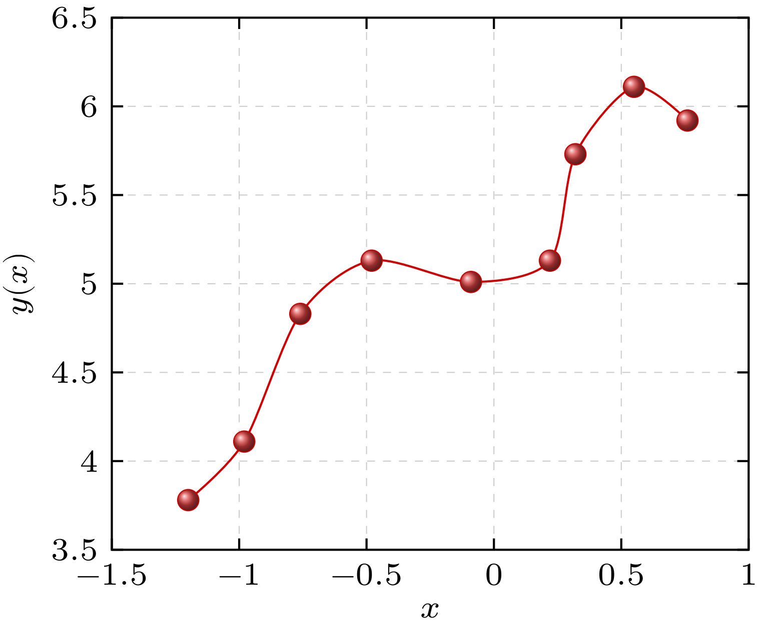
2.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки) $\{x_i\}$ в которых определены значения функции $\{f(x_i)\}$:

Таблица 2 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	-1.2	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
y_i	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции $y(x)$, используя данные таблицы 2.

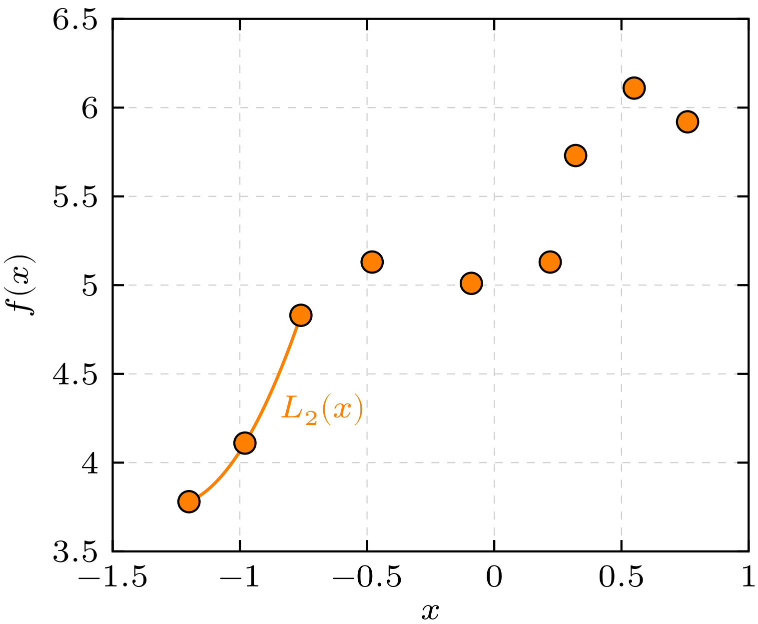


2) Аппроксимируем функцию $y(x)$ в узлах $\{x_0, x_1, x_2\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 2:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.76))}{(-1.20-(-0.98))(-1.20-(-0.76))} \cdot 3.78 \; + \\ &+ \frac{(x-(-1.20))(x-(-0.76))}{(-0.98-(-1.20))(-0.98-(-0.76))} \cdot 4.11 \; + \\ &+ \frac{(x-(-1.20))(x-(-0.98))}{(-0.76-(-1.20))(-0.76-(-0.98))} \cdot 4.83 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_0, x_2]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_1 = -0.98$:

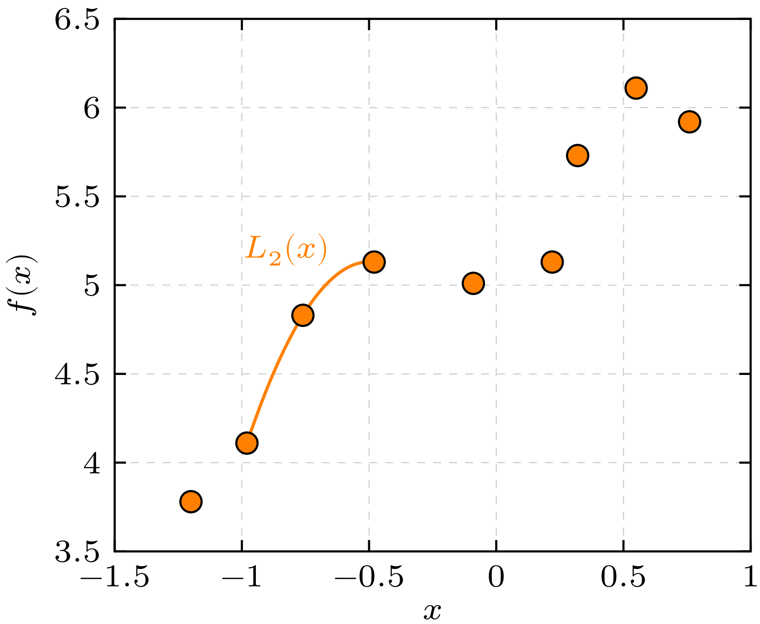
$$y'(-0.98) \approx L_2'(-0.98) = 2.386363635$$
$$y''(-0.98) \approx L_2''(-0.98) = 8.057851240$$

3) Апроксимацию функции $y(x)$ в узлах $\{x_1, x_2, x_3\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 2:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.48))}{(-0.98-(-0.76))(-0.98-(-0.48))} \cdot 4.11 + \\ &+ \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.48))}{(-0.76-(-0.98))(-0.76-(-0.48))} \cdot 4.83 + \\ &+ \frac{(x-(-0.98))(x-(-0.76))}{(-0.48-(-0.98))(-0.48-(-0.76))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_1, x_3]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_2 = -0.76$:

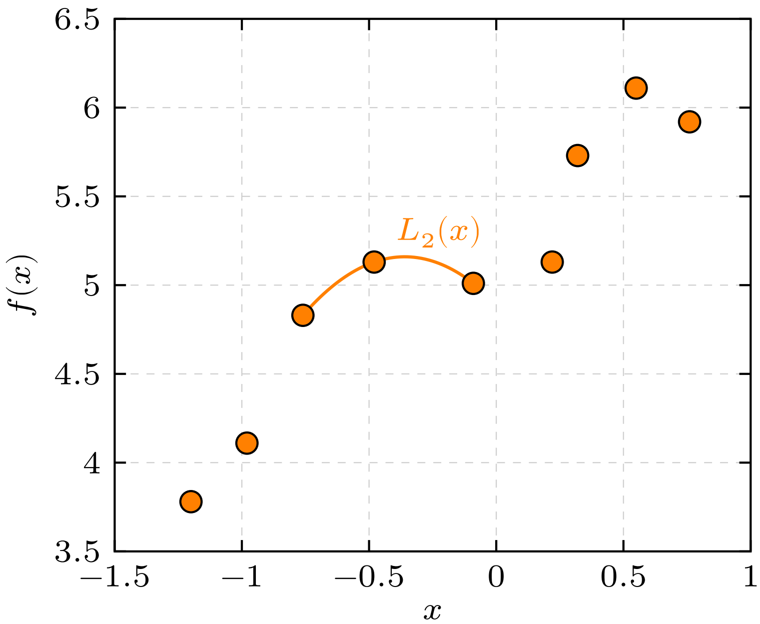
$$y'(-0.76) \approx L_2'(-0.76) = 2.304155844$$
$$y''(-0.76) \approx L_2''(-0.76) = -8.805194780$$

4) Апроксимацию функции $y(x)$ в узлах $\{x_2, x_3, x_4\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные таблицы 2:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-(-0.48))(x-(-0.09))}{(-0.76-(-0.48))(-0.76-(-0.09))} \cdot 4.83 + \\ &+ \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))}{(-0.48-(-0.76))(-0.48-(-0.09))} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.48))}{(-0.09-(-0.76))(-0.09-(-0.48))} \cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[x_2, x_4]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции $y(x)$ в точке $x_3 = -0.48$:

$$y'(-0.48) \approx L_2'(-0.48) = 0.495079546$$
$$y''(-0.48) \approx L_2''(-0.48) = -4.116778740$$

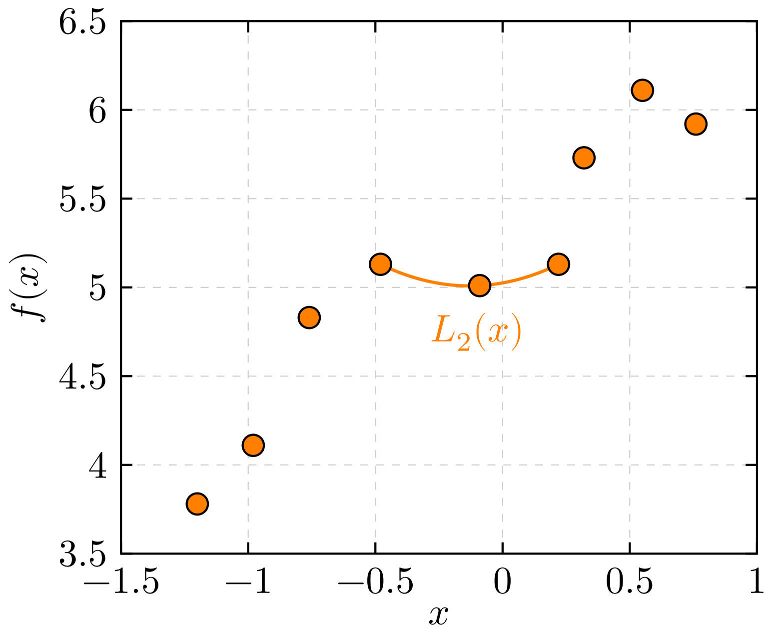
5) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_3 < x_4 < x_5\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

i	…	3	4	5	…
x_i	…	-0,48	-0,09	0,22	…
$f(x_i)$	…	5,13	5,01	5,13	…

$$\begin{aligned} L_2(x) \; &= \; \frac{(x-(-0,09))(x-0,22)}{(-0,48-(-0,09))(-0,48-0,22)} \cdot 5,13 \; + \\ &+ \; \frac{(x-(-0,48))(x-0,22)}{(-0,09-(-0,48))(-0,09-0,22)} \cdot 5,01 \; + \\ &+ \; \frac{(x-(-0,48))(x-(-0,09))}{(0,22-(-0,48))(0,22-(-0,09))} \cdot 5,13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-0,48; 0,22]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 0,9925558300 \cdot x^2 + 0,2580645177 \cdot x + 5,025186105$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_4 = -0,09$:

$$f'(-0,09) \approx L_2'(-0,09) = 0,0794044683$$
$$f''(-0,09) \approx L_2''(-0,09) = 1,985111660$$

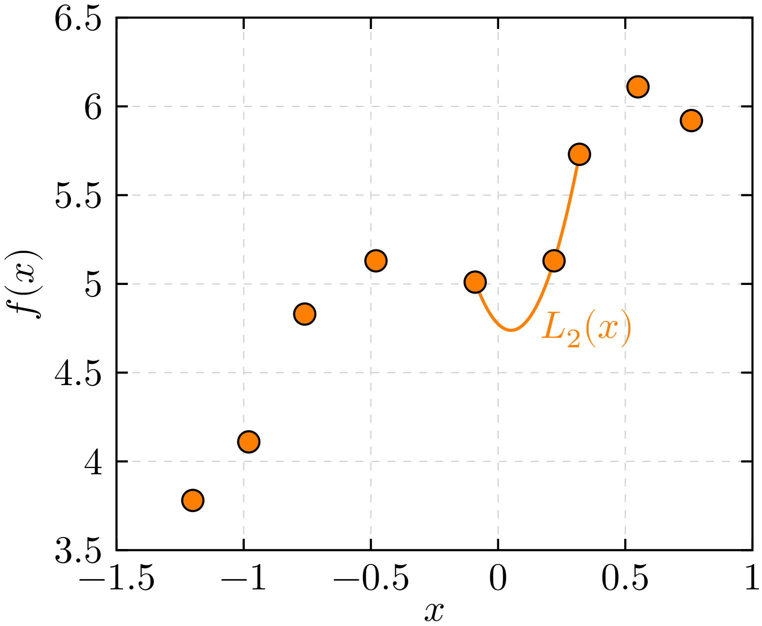
6) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_4 < x_5 < x_6\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

i	…	4	5	6	…
x_i	…	-0,09	0,22	0,32	…
$f(x_i)$	…	5,01	5,13	5.73	…

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0,22)(x-0,32)}{(-0,09-0,22)(-0,09-0,32)} \cdot 5,01 + \\ &+ \frac{(x-(-0,09))(x-0,32)}{(0,22-(-0,09))(0,22-0,32)} \cdot 5,13 + \\ &+ \frac{(x-(-0,09))(x-0,22)}{(0,32-(-0,09))(0,32-0,22)} \cdot 5,73 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-0,09; 0,32]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 13,69000778 \cdot x^2 - 1,392604236 \cdot x + 4,773776556$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_5 = 0,22$:

$$f'(0,22) \approx L_2'(0,22) = 4,630999187$$
$$f''(0,22) \approx L_2''(0,22) = 27,38001556$$

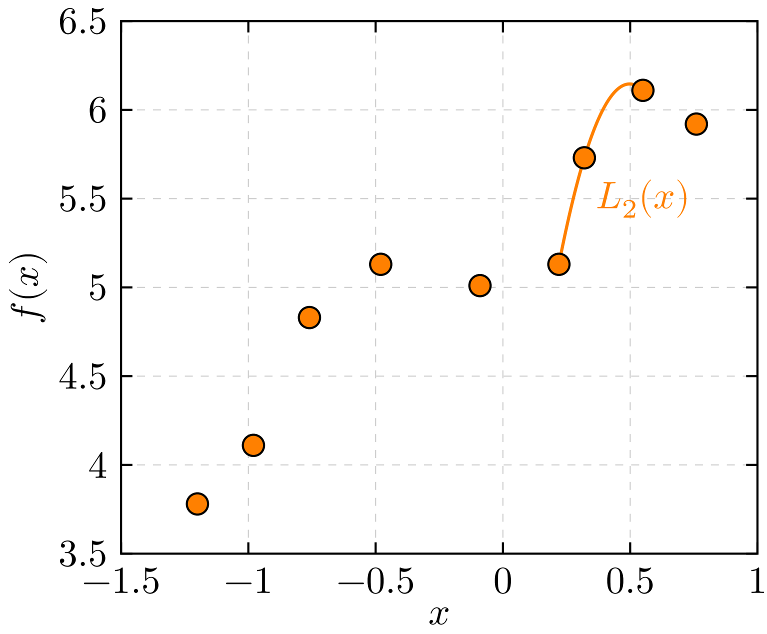
7) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_5 < x_6 < x_7\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

i	…	5	6	7	…
x_i	…	0,22	0,32	0,55	…
$f(x_i)$	…	5,13	5.73	6,11	…

$$\begin{aligned} L_2(x) \;&=\; \frac{(x-0,32)(x-0,55)}{(0,22-0,32)(0,22-0,55)} \cdot 5,13 \;+ \\ &+\; \frac{(x-0,22)(x-0,55)}{(0,32-0,22)(0,32-0,55)} \cdot 5,73 \;+ \\ &+\; \frac{(x-0,22)(x-0,32)}{(0,55-0,22)(0,55-0,32)} \cdot 6,11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[0,22; 0,55]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -13,17523062 \cdot x^2 + 13,11462456 \cdot x + 2,882463758$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_6 = 0,32$:

$$f'(0,32) \approx L_2'(0,32) = 4,682476963$$
$$f''(0,32) \approx L_2''(0,32) = -26,35046124$$

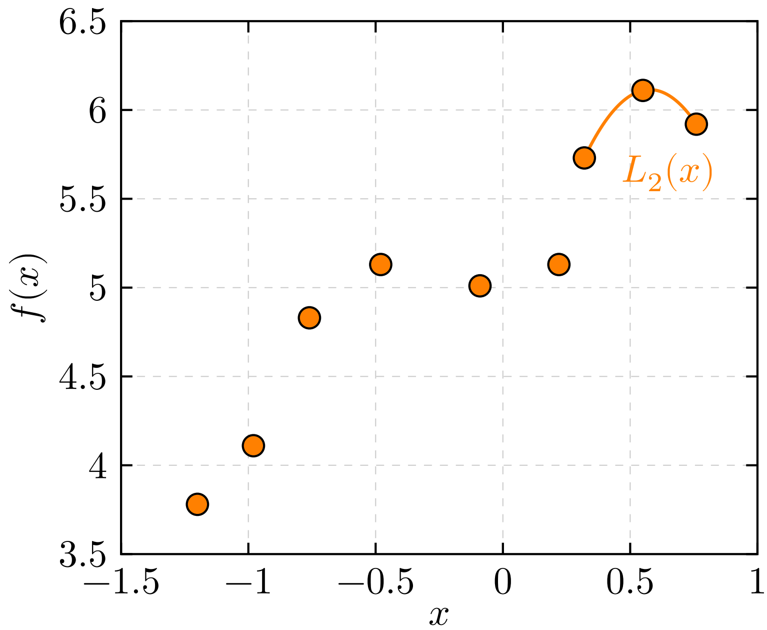
8) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_6 < x_7 < x_8\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

i	…	6	7	8
x_i	…	0,32	0,55	0,76
$f(x_i)$	…	5.73	6,11	5,92

$$\begin{aligned} L_2(x) \;&=\; \frac{(x-0,55)(x-0,76)}{(0,32-0,55)(0,32-0,76)} \cdot 5,73 \;+ \\ &+\; \frac{(x-0,32)(x-0,76)}{(0,55-0,32)(0,55-0,76)} \cdot 6,11 \;+ \\ &+\; \frac{(x-0,32)(x-0,55)}{(0,76-0,32)(0,76-0,55)} \cdot 5,92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[0,32; 0,76]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -5,811217790 \cdot x^2 + 6,707933391 \cdot x + 4,178530017$$

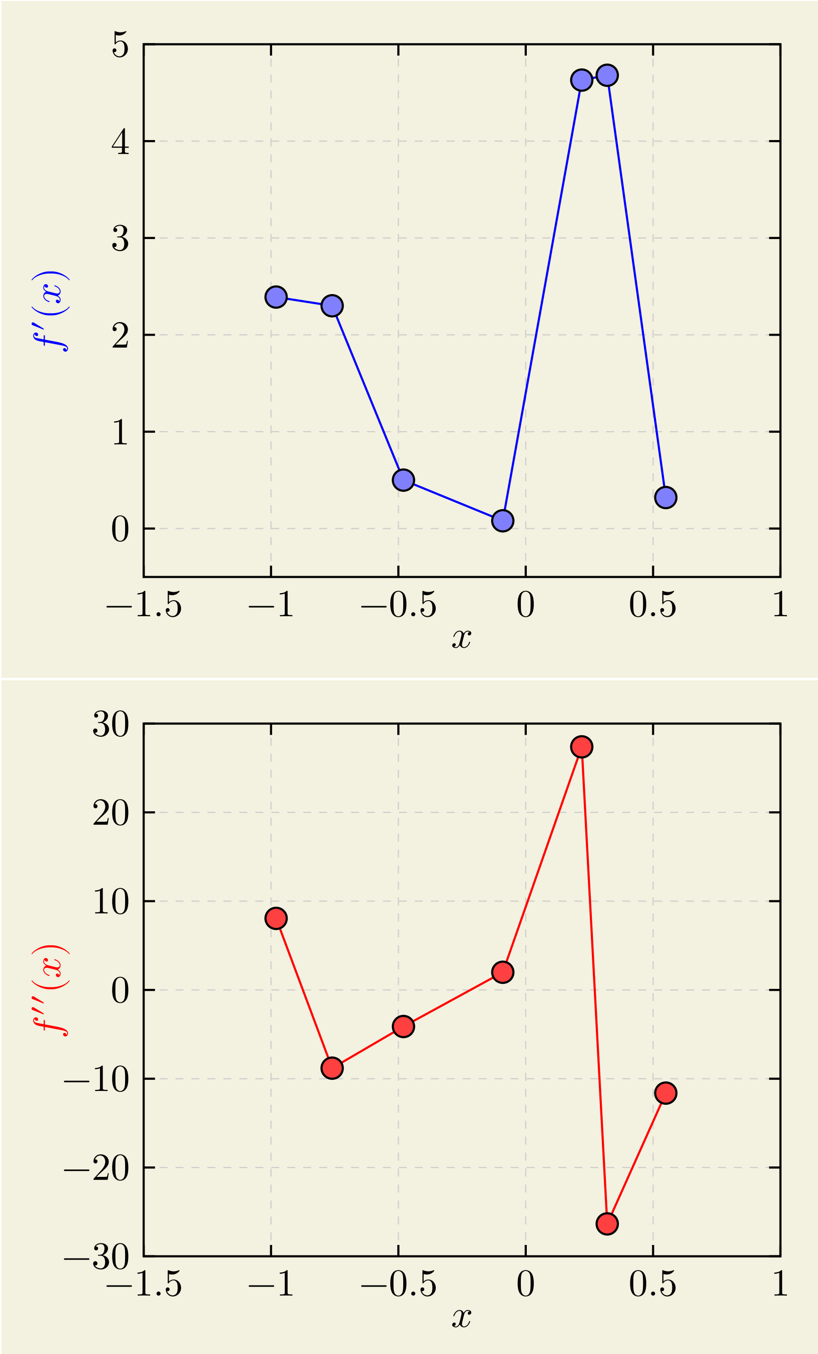


Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_7 = 0,55$:

$$f'(0,55) \approx L_2'(0,55) = 0,315593822$$
$$f''(0,55) \approx L_2''(0,55) = -11,62243558$$

9) Таким образом, определены значения первой $f'(x_i)$ и второй $f''(x_i)$ производной функции $f(x)$ в каждом внутреннем узле сетки $\{x_i\}$:

x	-0,98	-0,76	-0,48	-0,09	0,22	0,32	0,55
$f'(x)$	2,39	2,30	0,50	0,08	4,63	4,68	0,32
$f''(x)$	8,06	-8,81	-4,12	1,99	27,38	-26,35	-11,62



$f'(x)$
x
$f''(x)$
x

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t)$ – $\epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.