

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра материаловедения,
технологии и управления качеством

Синёв И.В., Симаков В.В.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

Учебное пособие

для студентов 2 курса
направления подготовки бакалавриата
22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов»,
профиля подготовки «Нанотехнологии, диагностика и синтез
современных материалов»,
института физики

Авторы

Синёв Илья Владимирович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры материаловедения, технологии и управления качеством, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

Симаков Вячеслав Владимирович – д.т.н., доцент, профессор кафедры материаловедения, технологии и управления качеством, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений	4
1.1 Метод Эйлера решения задачи Коши.	5
1.2 Оценка погрешности решения задачи Коши.	9
1.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера	12
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	19

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы являются основой решения комплексных задач, возникающих в ходе развития материаловедения и новейших областей техники и технологий. Использование ЭВМ при решении научных и технических задач позволяет провести детальное математическое моделирование процессов и систем, которое существенно сокращает потребность в натурных экспериментах, а в ряде случаев может их заменить.

Важным аспектом алгоритмов численных методов является гарантирование нахождения приближенного решения с заданной точностью за конечное число математических операций. При этом для численных методов характерна множественность возможных методов решения.

В пособии излагаются основы численных методов решения задач алгебры, математического анализа, оптимизации, обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены алгоритмы и возможности их применения для приближенного решения различных классов математических задач. В пособии изложен материал, необходимый студентам для приобретения навыков применения численных методов для решения задач теоретического и прикладного характера в области профессиональной деятельности. Наибольшее внимание уделяется фундаментальным разделам численных методов – численному решению систем линейных алгебраических уравнений, методам оптимизации и разностным методам решения задач математической физики.

Теоретический материал изложен сжато, но при этом большое вниманиеделено рекомендациям по практическому применению рассмотренных алгоритмов. Изложение материала проиллюстрировано рядом примеров направленных на развитие практических навыков применения численных методов для решения конкретных задач. Предполагается, что при изучении данного курса студенты знакомы с основами высшей математики и владеют навыками программирования.

1 Задача Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

При рассмотрении физических явлений и процессов часто не удается найти непосредственную взаимосвязь между величинами, характеризующими эволюционный, т.е. изменяющийся во времени, процесс. Однако во многих случаях можно установить связь между искомыми характеристиками изучаемого явления (функциями) и скоростями их изменения относительно других переменных, т.е. найти уравнения, в которые входят производные от неизвестных функций. Такие уравнения называют *дифференциальными*.

Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Кроме того, ряд важных задач для уравнений в частных производных сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, многомерная задача допускающая разделение пространственных переменных (например, задачи нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если решение многомерной задачи зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. Поэтому, методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Задача Коши обычно возникает при анализе процессов, определяемых дифференциальным законом эволюции и начальным состоянием (начальным условием) и для системы обыкновенных дифференциальных уравнений эта задача формулируется в виде системы уравнений:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(0) = \dot{u}, \quad (1)$$

где $u(t)$ – неизвестные функции, которые подлежат определению; $f(t, u)$ – известные функции, зависящие от времени и неизвестных функций; \dot{u} – *начальные условия*, т.е. значения неизвестных функций в начальный момент времени

$(t = 0)$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и начальные условия (1) в развернутом виде могут быть записаны как:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = f_1(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_1(0) = \dot{u}_1 \\ \frac{du_2}{dt} = f_2(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_2(0) = \dot{u}_2 \\ \dots = \dots \dots \dots = \dots \\ \frac{du_n}{dt} = f_n(t, u_1, u_2, \dots, u_n), & u_n(0) = \dot{u}_n \end{cases}, \quad (2)$$

где n – количество дифференциальных уравнений в системе (1).

Точное решение систем дифференциальных уравнений вида (2), которые описывают многообразие прикладных задач, может быть получено лишь в исключительных случаях. Поэтому возникает необходимость *приближенного решения* таких задач. В настоящее время создано и разработано значительное число приближенных методов решения дифференциальных уравнений, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки.

1.1 Метод Эйлера решения задачи Коши

Будем полагать, что решение задачи Коши (2) существует, единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

Введем временную сетку, т.е. будем рассматривать изменения неизвестных функций только в заданные моменты времени:

$$t = \{t_j\}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где j – номер временного интервала; $\Delta t_{j+1} = (t_{j+1} - t_j)$ – шаг сетки, т.е. временной интервал между двумя последовательными моментами времени; m – количество узлов временной сетки.

Основная идея метода Эйлера заключается в предположении, о том что неизвестные функции $u(t)$ изменяются линейно в интервале $[t_j, t_{j+1}]$ между двумя соседними узлами временной сетки и интерполяция неизвестных функ-

ций проводится полиномом первого порядка $\mathbf{L}_1(t)$:

$$\mathbf{u}(t) \approx \mathbf{L}_1(t) = \frac{t - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} \cdot \mathbf{u}(t_j) + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \cdot \mathbf{u}(t_{j+1}).$$

Производная от неизвестной функции приближенно аппроксимируется выражением вида:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \approx \mathbf{L}'_1(t) = \frac{\mathbf{u}(t_{j+1}) - \mathbf{u}(t_j)}{t_{j+1} - t_j}, \quad (3)$$

где t_{j+1} и t_j – два последовательных момента времени.

Тогда систему дифференциальных уравнений первого порядка (1) приближенно можно записать в виде:

$$\frac{\mathbf{u}(t_{j+1}) - \mathbf{u}(t_j)}{\Delta t_{j+1}} \approx \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}(t_j)). \quad (4)$$

Относительно неизвестных $\mathbf{u}(t_{j+1})$ это система линейных алгебраических уравнений и решение системы (4) находится явным образом по рекуррентным формулам:

$$\mathbf{u}(t_{j+1}) = \mathbf{u}(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}(t_j)), \quad \mathbf{u}(0) = \dot{\mathbf{u}}. \quad (5)$$

Метод Эйлера является простейшим численным методом решения задачи Коши. Блок-схема алгоритма метода Эйлера представлена на рисунке 2. К недостаткам метода можно отнести малую точность и систематическое накопление ошибок.

Для простоты рассмотрим только одно дифференциальное уравнение с единственным начальным условием:

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \Delta t_{j+1} \cdot f(t_j, y(t_j)), \quad y(0) = \dot{y}$$

На рисунке 1 представлена графическая иллюстрация метода Эйлера численного решения (маркеры) задачи Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка (сплошной линией представлено точное решение).

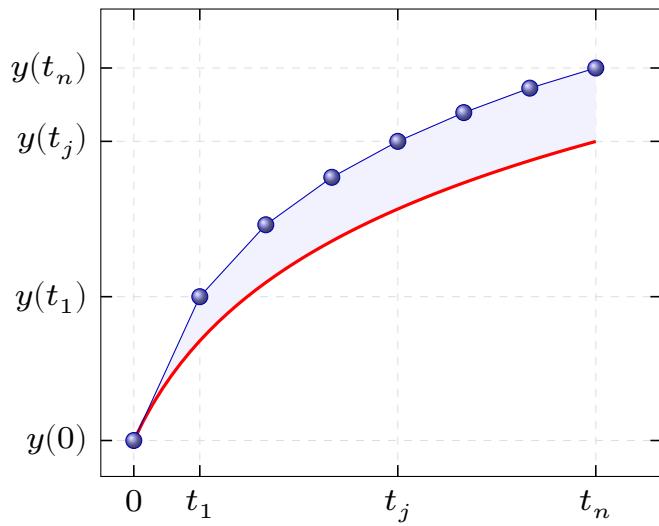


Рисунок 1 – Иллюстрация метода Эйлера:
неизвестная кривая выделена красным цветом, а ее полигональная
аппроксимация (ломаная Эйлера) – синим

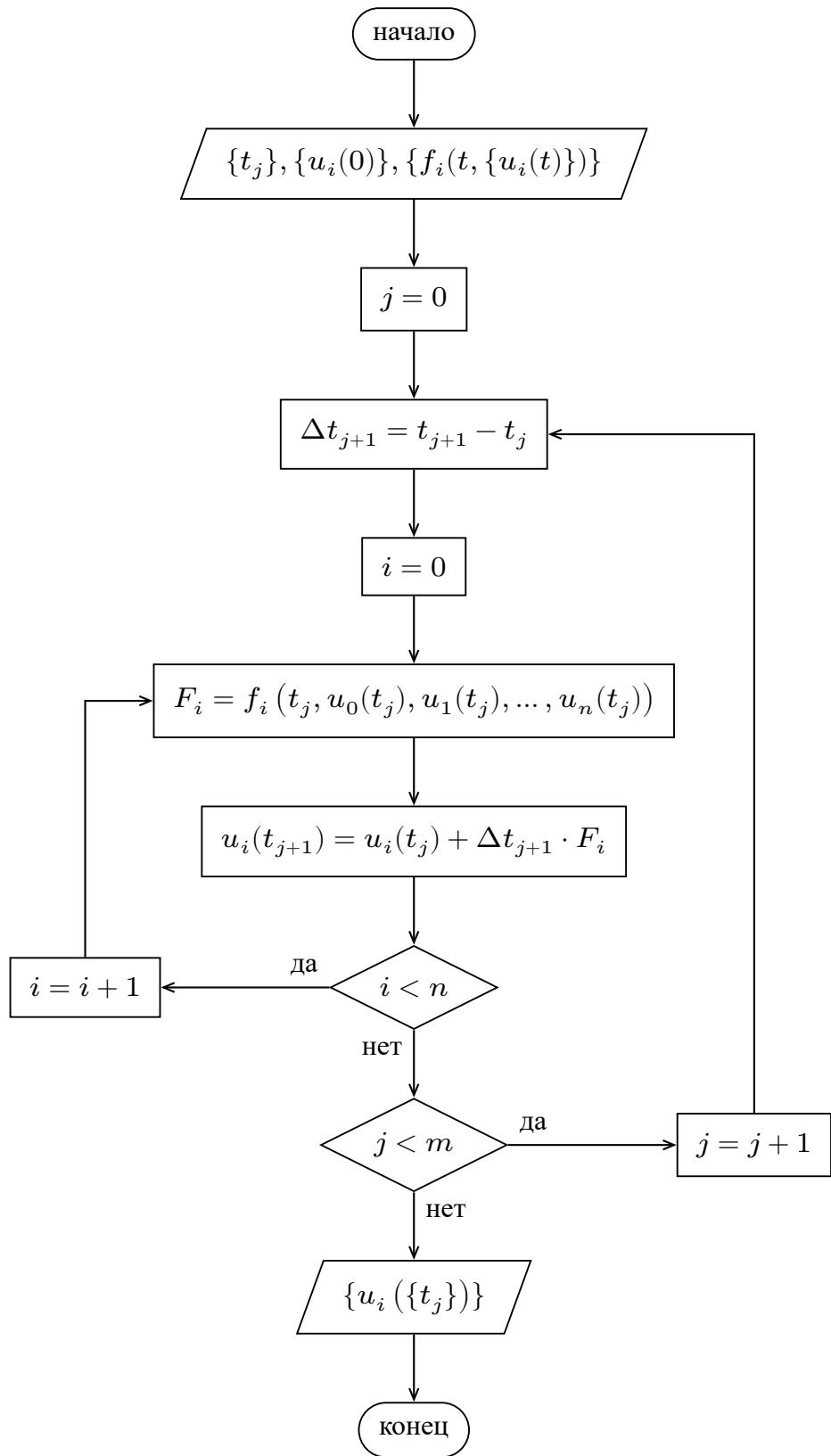


Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма численного решения системы дифференциальных уравнений методом Эйлера

1.2 Оценка погрешности решения задачи Коши

Интегрирование системы дифференциальных уравнений (1) по временной переменной t с учетом начальных условий:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathbf{f}(\xi, \mathbf{v}) d\xi. \quad (6)$$

Уравнение (6) является интегральным уравнением для неизвестной функции $\mathbf{v}(t)$, а его решение эквивалентно решению задачи Коши (1), что можно проверить прямой подстановкой (6) в (1).

На временной сетке $\{t_j\}$ интеграл в правой части равенства (6) приближенно вычисляется по *формуле трапеций*:

$$\int_0^{t_{j+1}} \mathbf{f}(\xi, \mathbf{v}) d\xi \approx \sum_{k=0}^j \frac{\mathbf{f}(t_{k+1}, \mathbf{v}(t_{k+1})) + \mathbf{f}(t_k, \mathbf{v}(t_k))}{2} \cdot (t_{k+1} - t_k). \quad (7)$$

Воспользовавшись (7), выражение для решения интегрального уравнения (6) можно записать в рекуррентной форме:

$$\mathbf{v}(t_{j+1}) = \mathbf{v}(t_j) + \frac{\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{v}(t_{j+1})) + \mathbf{f}(t_j, \mathbf{v}(t_j))}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (8)$$

Для определения приближенного значения решения интегрального уравнения (8) могут быть использованы значения неизвестных функций $\mathbf{u}(t_j)$, рассчитанные по методу Эйлера (5) на j -ом временном слое:

$$\mathbf{v}(t_{j+1}) \approx \mathbf{v}(t_j) + \frac{\mathbf{f}(t_{j+1}, \mathbf{u}(t_{j+1})) + \mathbf{f}(t_j, \mathbf{u}(t_j))}{2} \cdot \Delta t_{j+1}. \quad (9)$$

В качестве предельной абсолютной погрешности приближенного решения $\mathbf{u}(t_j)$ задачи Коши (1) можно принять какую-либо норму:

$$\epsilon(t_j) = \mathbf{v}(t_j) - \mathbf{u}(t_j) \quad (10)$$

Контроль точности приближенного решения может вестись покомпонентно или по норме. Для различных компонент решения задачи $\mathbf{u}(t_j)$ могут использоваться различные допустимые значения погрешности. Контроль точности по норме означает, что контролируется некоторая определенная норма оценки по-

грешности (рисунок 3):

$$\|\boldsymbol{\epsilon}\|_{\infty} = \max_{i=1..n} |\epsilon_i| \quad \|\boldsymbol{\epsilon}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\epsilon_i|, \quad \|\boldsymbol{\epsilon}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}$$

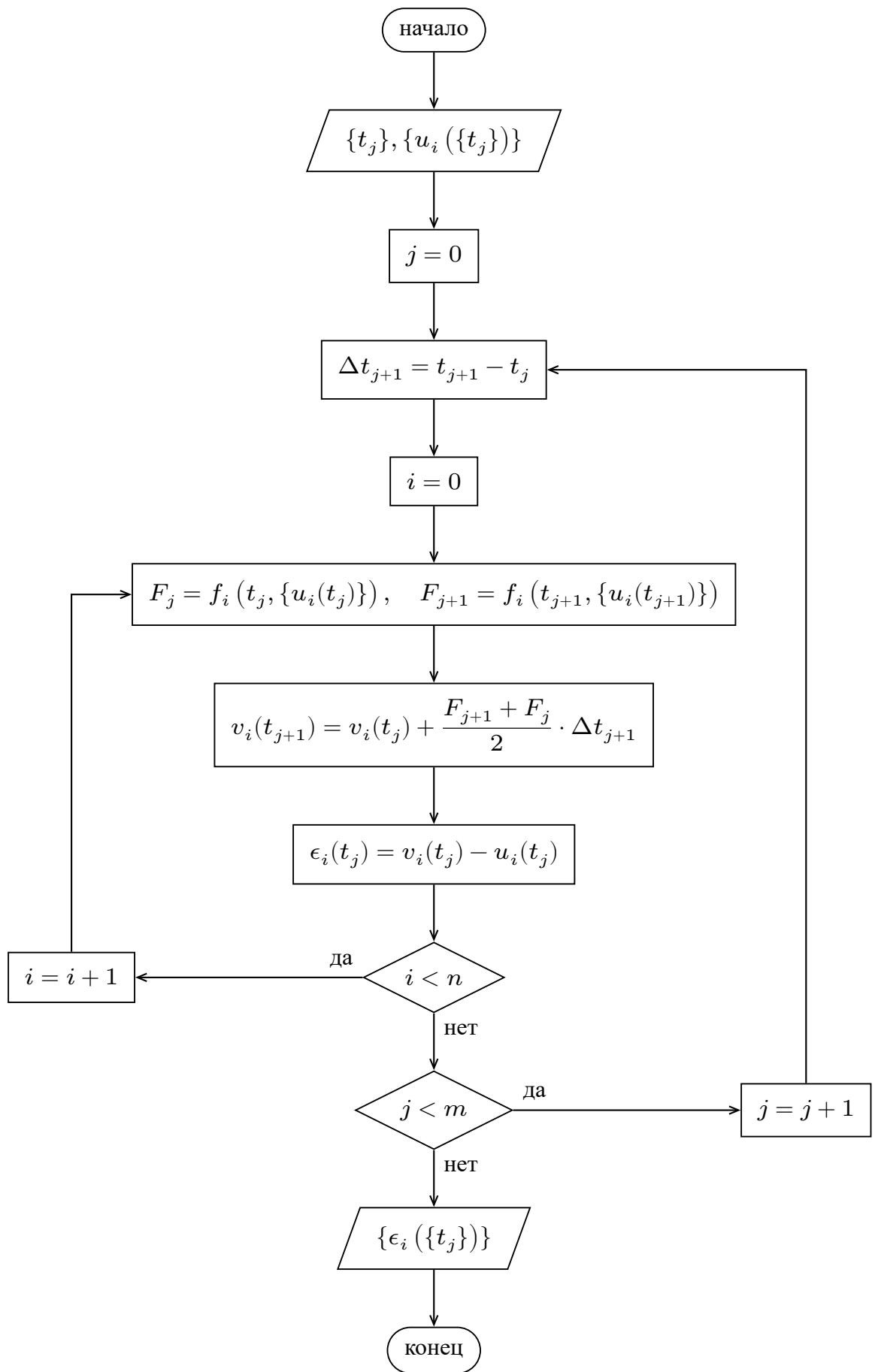


Рисунок 3 – Блок-схема для вычисления погрешности метода Эйлера

1.3 Численное решение задачи Коши методом Эйлера

Применяя метод Эйлера, найдем решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0.2 \cdot t + u_2, & u_1(0) = 1 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{u_1}{2}, & u_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

в пределах отрезка $t \in [0, 10]$ на равномерной сетке с количеством временных интервалов $n = 5$.

Введем обозначения

$$\begin{cases} f_1(t) = 0.2 \cdot t + u_2(t) \\ f_2(t) = -\frac{u_1(t)}{2} \end{cases},$$

где f_1 и f_2 – функции, стоящие в правых частях дифференциальных уравнений системы (11):

Рекуррентные соотношения (5) для решения задачи Коши (11) методом Эйлера:

$$\begin{cases} u_1(t_{j+1}) = u_1(t_j) + \Delta t \cdot f_1(t_j), & u_1(0) = 1 \\ u_2(t_{j+1}) = u_2(t_j) + \Delta t \cdot f_2(t_j), & u_2(0) = 0 \end{cases}, \quad (12)$$

где $\Delta t = (t_{j+1} - t_j)$ – временной шаг метода Эйлера, т.е. интервал между двумя последовательными моментами времени

Решение системы интегральных уравнений (6) определяется рекуррентными соотношениями:

$$\begin{cases} \tilde{u}_1(t_{j+1}) = \tilde{u}_1(t_j) + \frac{f_1(t_j) + f_1(t_{j+1})}{2} \cdot \Delta t, & \tilde{u}_1(0) = 1 \\ \tilde{u}_2(t_{j+1}) = \tilde{u}_2(t_j) + \frac{f_2(t_j) + f_2(t_{j+1})}{2} \cdot \Delta t, & \tilde{u}_2(0) = 0 \end{cases}. \quad (13)$$

Определим временной шаг метода Эйлера, зная длину временного отрезка (“время наблюдения”) и количество интервалов:

$$\Delta t = \frac{T - t_0}{n} = \frac{10 - 0}{5} = 2,$$

где $t_0 = 0$ – начальный момент времени; $T = 10$ – максимальное время (“время наблюдения”).

Введем по переменной t равномерную сетку с шагом $\tau = 2$:

$$t = \{t_j\} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$$

Последовательно определяем приближенное решение задачи Коши (11) методом Эйлера, используя рекуррентные соотношения (12).

1) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_1 = 2$:

$$f_1(0) = 0.2 \cdot 0 + u_2(0) = 0.2 \cdot 0 + 0 = 0$$

$$f_2(0) = -\frac{u_1(0)}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\begin{cases} u_1(2) = u_1(0) + 2 \cdot f_1(0) = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ u_2(2) = u_2(0) + 2 \cdot f_2(0) = 0 + 2 \cdot (-0.5) = -1 \end{cases}.$$

2) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_2 = 4$:

$$f_1(2) = 0.2 \cdot 2 + u_2(2) = 0.2 \cdot 2 + (-1) = -0.6$$

$$f_2(2) = -\frac{u_1(2)}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\begin{cases} u_1(4) = u_1(2) + 2 \cdot f_1(2) = 1 + 2 \cdot (-0.6) = -0.2 \\ u_2(4) = u_2(2) + 2 \cdot f_2(2) = -1 + 2 \cdot (-0.5) = -2 \end{cases}.$$

3) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_3 = 6$:

$$f_1(4) = 0.2 \cdot 4 + u_2(4) = 0.2 \cdot 4 + (-2) = -1.2$$

$$f_2(4) = -\frac{u_1(4)}{2} = -\frac{-0.2}{2} = 0.1$$

$$\begin{cases} u_1(6) = u_1(4) + 2 \cdot f_1(4) = -0.2 + 2 \cdot (-1.2) = -2.6 \\ u_2(6) = u_2(4) + 2 \cdot f_2(4) = -2 + 2 \cdot (0.1) = -1.8 \end{cases}.$$

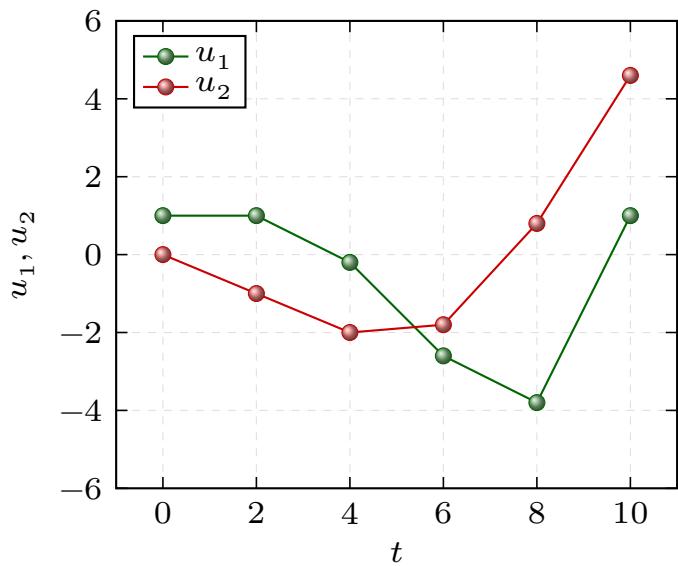


Рисунок 4 – Зависимость неизвестных функций от времени

4) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_4 = 8$:

$$f_1(6) = 0.2 \cdot 6 + u_2(6) = 0.2 \cdot 6 + (-1.8) = -0.6$$

$$f_2(6) = -\frac{u_1(6)}{2} = -\frac{-2.6}{2} = 1.3$$

$$\begin{cases} u_1(8) = u_1(6) + 2 \cdot f_1(4) = -2.6 + 2 \cdot (-0.6) = -3.8 \\ u_2(8) = u_2(6) + 2 \cdot f_2(6) = -1.8 + 2 \cdot (1.3) = 0.8 \end{cases}$$

5) Определим значения неизвестных функций u_1 и u_2 в точке $t_5 = 10$:

$$f_1(8) = 0.2 \cdot 8 + u_2(8) = 0.2 \cdot 8 + 0.8 = 2.4$$

$$f_2(8) = -\frac{u_1(8)}{2} = -\frac{-3.8}{2} = 1.9$$

$$\begin{cases} u_1(10) = u_1(8) + 2 \cdot f_1(4) = -3.8 + 2 \cdot (2.4) = 1 \\ u_2(10) = u_2(8) + 2 \cdot f_2(8) = 0.8 + 2 \cdot (1.9) = 4.6 \end{cases}$$

На рисунке 4 представлено решение задачи Коши системы дифференциальных уравнений (11).

Последовательно определяем приближенное решение интегрального уравнения (11), используя рекуррентные соотношения (13).

1) Определим значения неизвестных функций v_1 и v_2 в точке $t_1 = 2$:

$$\begin{cases} v_1(2) = v_1(0) + \tau \cdot \frac{f_1(0) + f_1(2)}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{0 + (-0.6)}{2} = 0.4 \\ v_2(2) = v_2(0) + \tau \cdot \frac{f_2(0) + f_2(2)}{2} = 0 + 2 \cdot \frac{-0.5 + (-0.5)}{2} = -1 \end{cases}$$

2) Определим значения неизвестных функций v_1 и v_2 в точке $t_2 = 4$:

$$\begin{cases} v_1(4) = v_1(2) + \tau \cdot \frac{f_1(2) + f_1(4)}{2} = 0.4 + 2 \cdot \frac{(-0.6) + (-1.2)}{2} = -2.4 \\ v_2(4) = v_2(2) + \tau \cdot \frac{f_2(2) + f_2(4)}{2} = -1 + 2 \cdot \frac{-0.5 + 0.1}{2} = -1.4 \end{cases}$$

3) Определим значения неизвестных функций v_1 и v_2 в точке $t_3 = 6$:

$$\begin{cases} v_1(6) = v_1(4) + \tau \cdot \frac{f_1(4) + f_1(6)}{2} = -2.4 + 2 \cdot \frac{-1.2 + (-0.6)}{2} = -4.2 \\ v_2(6) = v_2(4) + \tau \cdot \frac{f_2(4) + f_2(6)}{2} = -1.4 + 2 \cdot \frac{0.1 + 1.3}{2} = 0 \end{cases}$$

4) Определим значения неизвестных функций v_1 и v_2 в точке $t_4 = 8$:

$$\begin{cases} v_1(8) = v_1(6) + \tau \cdot \frac{f_1(6) + f_1(8)}{2} = -4.2 + 2 \cdot \frac{-0.6 + 2.4}{2} = -2.4 \\ v_2(8) = v_2(6) + \tau \cdot \frac{f_2(6) + f_2(8)}{2} = 0 + 2 \cdot \frac{1.3 + 1.9}{2} = 3.2 \end{cases}$$

5) Определим значения неизвестных функций v_1 и v_2 в точке $t_5 = 10$:

$$f_1(10) = 0.2 \cdot 10 + u_2(10) = 0.2 \cdot 8 + 4.6 = 6.2$$

$$f_2(10) = -\frac{u_1(10)}{2} = -\frac{1}{2} = -0.5$$

$$\begin{cases} v_1(10) = v_1(8) + \tau \cdot \frac{f_1(8) + f_1(10)}{2} = -2.4 + 2 \cdot \frac{2.4 + 6.2}{2} = 6.2 \\ v_2(10) = v_2(8) + \tau \cdot \frac{f_2(8) + f_2(10)}{2} = 3.2 + 2 \cdot \frac{1.9 + (-0.5)}{2} = 4.6 \end{cases}$$

На рисунке 5 представлены решения задачи Коши (1) и интегрального уравнения (6), рассчитанные в различные моменты времени.

В таблице 1 и на рисунке 6 представлены значения предельной абсолют-

ной погрешности приближенного решения задачи Коши для различных моментов времени.

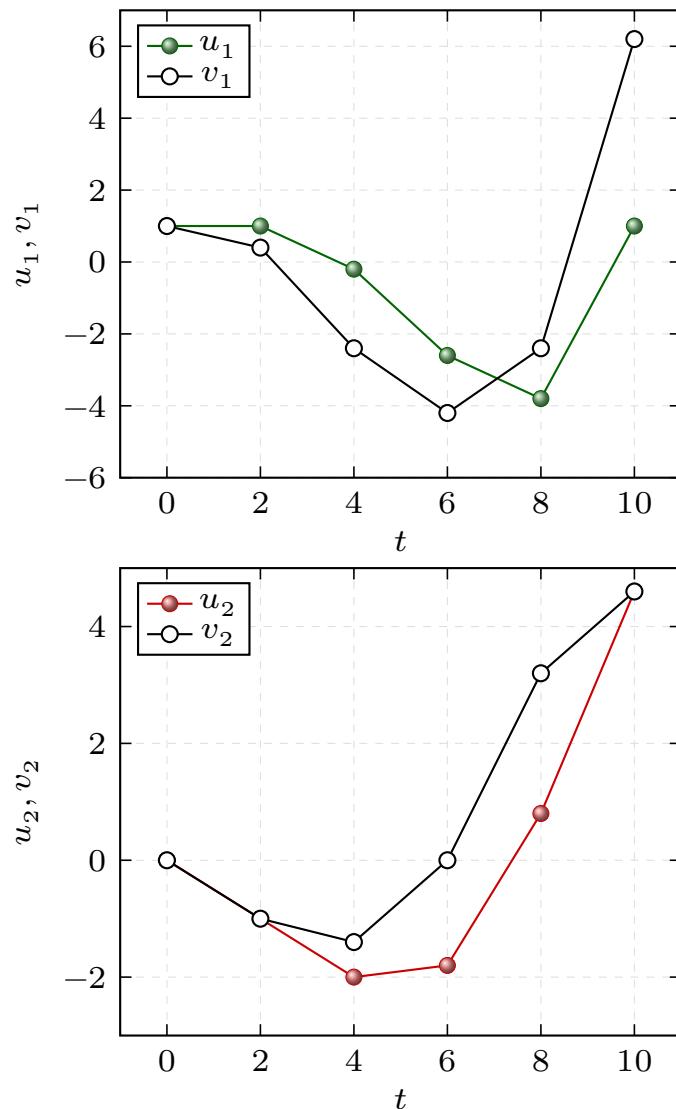


Рисунок 5 – Приближенное решение задачи Коши и соответствующего интегрального уравнения

Таблица 1 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

i	0	1	2	3	4	5
t_i	0	2	4	6	8	10
Задача Коши						
$u_1(t_i)$	1	1	-0.2	-2.6	-3.8	1
$u_2(t_i)$	0	-1	-2	-1.8	0.8	4.6
Интегральное уравнение						
$v_1(t_i)$	1	0.4	-2.4	-4.2	-2.4	6.2
$v_2(t_i)$	0	-1	-1.4	0	3.2	4.6
Абсолютная погрешность $\epsilon = \mathbf{v} - \mathbf{u} $						
ϵ_1	0	0.6	2.2	1.6	1.4	5.2
ϵ_2	0	0	0.6	1.8	2.4	0

Из рисунка 6 видно, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5.2$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2.4$.

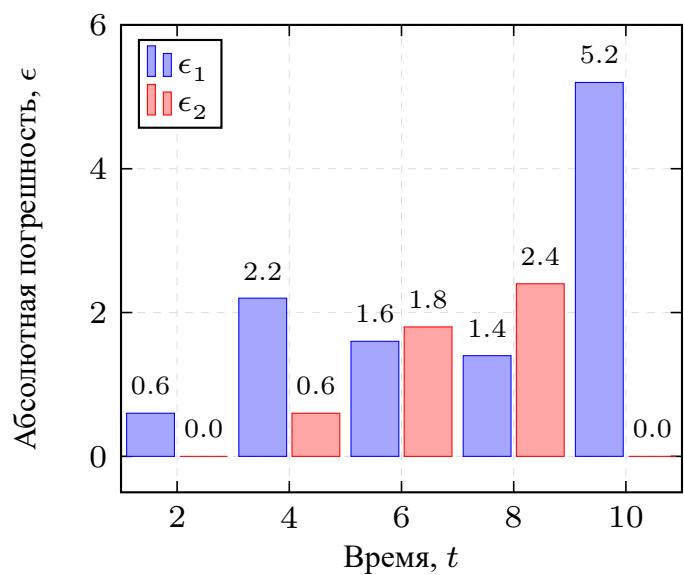


Рисунок 6 – Предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши (11)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. – 288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. – 432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 368 с.
- 7 Список математических символов \LaTeX –URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematical_symbols_by_subject
- 8 Бояршинов, М. Г. Вычислительные методы алгебры и анализа: учебное пособие / М. Г. Бояршинов. – Саратов : Вузовское образование, 2020. – 225 с. – ISBN 978-5-4487-0687-5. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/93065.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим до-ступа: для авторизир. пользователей. - DOI: <https://doi.org/10.23682/93065>
- 9 Олейникова, С. А. Численные методы решения оптимизационных задач: учебное пособие / С. А. Олейникова. – Воронеж : Воронежский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2021. – 114 с. – ISBN 978-5-7731-0960-0. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/118626.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
- 10 Гарифуллин, М. Ф. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений / М. Ф. Гарифуллин. – Москва : Техносфера,

2020. – 192 с. – ISBN 978-5-94836-597-8. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/99103.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
- 11 Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 178 с. – ISBN 978-5-4497-1383-4. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/116448.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей
- 12 Рутта, Н. А. Методы и модели принятия оптимальных решений в экономике: учебное пособие для бакалавров / Н. А. Рутта. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 87 с. – ISBN 978-5-4497-1534-0. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: <https://www.iprbookshop.ru/118015.html> (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей