

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений . . . . .	4
1.1 Прямой ход метода Гаусса . . . . .	5
1.2 Обратный ход метода Гаусса . . . . .	7
1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента . . . . .	8
1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса . . . . .	8
2 Интерполярование функций . . . . .	11
2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа . . . . .	11
2.2 Пример интерполярование функции полиномом Лагранжа $L_3(x)$ . . . . .	13
3 Аппроксимация функция . . . . .	16
3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций . . . . .	16
3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $Q_2(x)$ . . . . .	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	22
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	23

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $m \times m$ ,  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$  – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности  $1 \times m$ :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , так что решение  $\vec{x}$  существует и единствено. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы  $m$  способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка  $m!$  арифметических действий, в то время как метод Гаусса –  $O(m^3)$  действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы  $\mathbf{A}$  ( $m \approx 10^2 \dots 10^5$ ), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развернутом виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right.$$

## 1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных  $x_i$  из системы линейных уравнений. Например, предположим, что  $a_{11} \neq 0$ , тогда разделим первое уравнение системы на  $a_{11}$ , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m} \cdot x_m = b_3, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right.$$

где  $c_{1j}$  и  $y_1$  – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на  $a_{i1}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 2, 3, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ (a_{22} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 + \cdots + (a_{2m} - c_{1m} \cdot a_{21}) \cdot x_m = b_2 - y_1 \cdot a_{21} \\ (a_{32} - c_{12} \cdot a_{31}) \cdot x_2 + \cdots + (a_{3m} - c_{1m} \cdot a_{31}) \cdot x_m = b_3 - y_1 \cdot a_{31} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ (a_{m2} - c_{12} \cdot a_{m1}) \cdot x_2 + \cdots + (a_{mm} - c_{1m} \cdot a_{m1}) \cdot x_m = b_m - y_1 \cdot a_{m1} \end{array} \right.$$

Запишем полученную систему уравнений в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}^{(1)}$  и  $b_i^{(1)}$  – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное  $x_2$ . Для этого разделим второе уравнение системы на  $a_{22}^{(1)}$ , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где  $c_{2j}$  и  $y_2$  – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на  $a_{i2}^{(1)}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 3, 4, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \cdots \left( a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)} \right) \cdot x_m = b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)}, \\ \ddots \quad \vdots \\ \cdots \left( a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)} \right) \cdot x_m = b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{array} \right.$$

или в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \cdots a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = b_3^{(2)}, \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = b_m^{(2)} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}^{(2)}$  и  $b_i^{(2)}$  – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные  $x_3, x_4, \dots, x_m$ , исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ x_3 + \cdots + c_{3m} \cdot x_m = y_3 \\ \ddots \quad \vdots \quad = \quad \vdots \\ x_m = y_m \end{array} \right.$$

## 1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку матрица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с  $x_m$ , найти все неизвестные  $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$ :

$$x_m = y_m$$

$$x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m$$

$$x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m$$

$$\vdots = \cdots$$

$$x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1), \quad x_m = y_m$$

### 1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}$  равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}$  отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

**Основная идея метода** состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

### 1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Пример численного решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

*Прямой ход метода Гаусса.*

1) Разделим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (2)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

2) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (4) во 2-ом уравнении

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 20$$

и вычтем результат умножения из 2-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

3) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (3) в 3-ем уравнении

$$3x_1 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 15$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

4) Разделим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$  (-1)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

5) Умножим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$  ( $-\frac{7}{2}$ ) в 3-ем уравнении

$$-\frac{7}{2}x_2 + 14x_3 = \frac{77}{2}$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{21}{2}x_3 = -\frac{63}{2} \end{array} \right.$$

6) Разделим 3-ю строку на коэффициент при  $x_3$  ( $-\frac{21}{2}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \end{array} \right.$$

*Обратный ход метода Гаусса.*

Последовательно определяем неизвестные  $x_3, x_2, x_1$ :

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = -11 + 4x_3 = -11 + 4 \cdot 3 = 1$$

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

*Ответ:* решение системы линейных уравнений:  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ .

Проведём проверку решения системы уравнений методом прямой подстановки. Для этого подставим найденный вектор неизвестных  $\vec{x} = (2, 1, 3)$  в исходную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 + 5 \cdot 3 = 22 \end{array} \right.$$

Проводим арифметические действия и получаем тождества для каждого уравнения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 + 3 + 3 = 10 \\ 8 + 5 + 18 = 31 \\ 6 + 1 + 15 = 22 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 = 10 \\ 31 = 31 \\ 22 = 22 \end{array} \right.$$

## 2 Интерполяирование функций

### 2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Пусть на отрезке  $x \in [a, b]$  выбраны узлы интерполяции  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), в которых известны значения функции  $y_i = f(x_i)$ . Задача интерполяции алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен степени  $n$

$$L_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

значения которого в заданных точках  $\{x_i\}$ , совпадают со значениями функции  $\{y_i\}$  в этих точках.

Многочлен  $L_n(x)$  должен удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_n(x_0) = y_0 \\ L_n(x_1) = y_1 \\ L_n(x_2) = y_2 \\ \dots \\ L_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен  $L_n(x)$  в виде линейной комбинации значений функции  $y(x)$  в узлах интерполяции:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 + \dots + c_n(x) \cdot y_n$$

где  $c_0(x), c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  – неизвестные функции.

Из условий интерполяции:

$$\begin{cases} c_0(x_0) \cdot y_0 + c_1(x_0) \cdot y_1 + c_2(x_0) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_0) \cdot y_n = y_0 \\ c_0(x_1) \cdot y_0 + c_1(x_1) \cdot y_1 + c_2(x_1) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_1) \cdot y_n = y_1 \\ c_0(x_2) \cdot y_0 + c_1(x_2) \cdot y_1 + c_2(x_2) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_2) \cdot y_n = y_2 \\ \dots \\ c_0(x_n) \cdot y_0 + c_1(x_n) \cdot y_1 + c_2(x_n) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_n) \cdot y_n = y_n \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты  $c_i(x)$  можно искать в виде многочленов степени  $n$ :

Определим неизвестные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  из условия для коэффициентов  $c_i(x)$ :

Таким образом, коэффициенты  $c_i(x)$  интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

## 2.2 Пример интерполяирования функции полиномом Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции)  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), в которых определены значения функции  $y_i = f(x_i)$ :

$x_i$	-0.76	-0.09	0.22	0.55
$y_i$	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа  $L_3(x)$  на основе данных об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и значений функции в этих точках  $\{y_i\}$ :

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и значе-

ния интерпретируемой функции в этих узлах  $\{y_i\}$ :

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.76 - (-0.09))(-0.76 - 0.22)(-0.76 - 0.55)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.55)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.55)}{(0.22 - (-0.76))(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.55)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.55 - (-0.76))(0.55 - (-0.09))(0.55 - 0.22)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{0.13} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{0.28} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

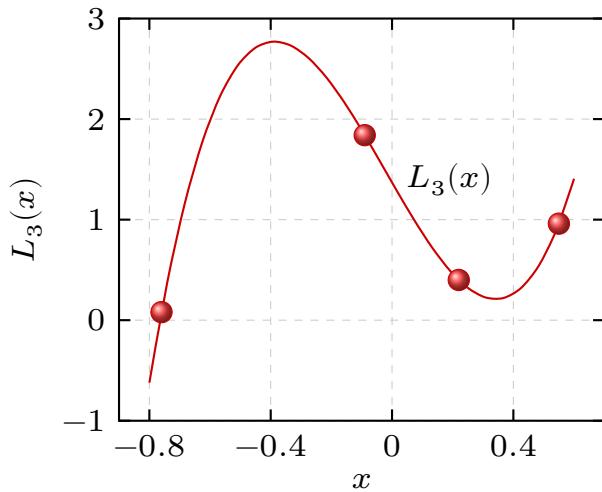
Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & (x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot (-0.09) + \\
 & + (x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot 13.84 + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55) \cdot (-3.99) + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22) \cdot 3.47
 \end{aligned}$$

4) Представим полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831 \cdot x + 0.9119 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных  $y_i$  (маркеры) и интерполяционный полином Лагранжа  $L_3(x)$  (сплошная линия).



### 3 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию  $f(x)$  необходимо заменить обобщенным полиномом  $Q_m(x)$  заданного порядка  $m$  так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции  $f(x)$  от обобщенного полинома  $Q_m(x)$  на указанном множестве  $\vec{x} = \{x\}$  было наименьшим. При этом полином  $Q_m(x)$  в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество  $\vec{x}$  состоит из отдельных точек  $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (узлов), то приближение называется *точечным*. Если  $\vec{x}$  есть отрезок  $x_a < x < x_b$ , то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

#### 3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок  $m$  приближающего полинома  $Q_m(x)$  меньше числа узлов аппроксимации  $m < n$ , в которых известно значение функции  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени  $m$  вида:

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m a_j \cdot x^j,$$

где  $S_m$  – мера отклонения полинома  $Q_m(x)$  от известной функции  $y(x)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , которая принимается равная сумме квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$S_m = \sum_{i=0}^n (Q_m(x_i) - y_i)^2$$

Следует отметить, что  $S_m = S_m(a_0, a_1, \dots, a_n)$  есть функция многих переменных, т.е. коэффициентов полинома  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), которые необходимо подобрать так, чтобы величина  $S_m$  была наименьшей  $S_m \rightarrow \min$ . Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома  $Q_m(x)$ , необ-

ходимо найти *положения минимума функции* многих переменных  $S_m$ .

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial S_m}{\partial a_0} = \frac{\partial S_m}{\partial a_1} = \frac{\partial S_m}{\partial a_2} = \dots = \frac{\partial S_m}{\partial a_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$  необходимо решить систему  $m + 1$  уравнений с  $m + 1$  неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_m}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial S_m}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial S_m}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial S_m}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \dots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений вида:

$$\mathbf{C} \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0m} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m0} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

относительно неизвестных коэффициентов полинома  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ .

Если среди точек  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации  $m < n$ , то определитель системы не равен нулю. Следовательно, эта система имеет единственное решение  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , а полином  $Q_m(x)$  с такими коэффициентами  $a_i$  будет обладать минимальным квадратичным отклонением  $S_m = S_{min}$ .

### 3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $Q_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости  $y(x)$ .

$x_i$	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
$y_i$	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать экспериментальные данные полиномом второй степени  $Q_2(x)$ :

$$Q_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

- 1) Построим меру отклонения полинома  $Q_2(x)$  от таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ :

$$S_2 = \sum_{i=0}^4 (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где  $y_i = f(x_i)$  – значение функции в точке  $x_i$ .

Запишем меру отклонения  $S_2$  в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} S_2 = & (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- 2) Определим частную производную от меры отклонений  $S_2$  по аргументу  $a_0$  и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial a_0} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы **C**:

$$c_{00} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

$$c_{01} = (-0,76) + (-0,48) + (-0,09) + (0,22) + (0,55) = -0,56$$

$$c_{02} = (-0,76)^2 + (-0,48)^2 + (-0,09)^2 + (0,22)^2 + (0,55)^2 = 1,18$$

Первый элемент вектора правой части  $\vec{b}$ :

$$b_0 = 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65$$

- 3) Определим частную производную от меры отклонений  $S_2$  по аргументу  $a_1$  и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial a_1} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы **C**:

$$c_{10} = (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56$$

$$c_{11} = (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18$$

$$c_{12} = (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38$$

Второй элемент вектора правой части  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned} b_1 = & 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & + 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24 \end{aligned}$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений  $S_2$  по аргументу  $a_2$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_2}{\partial a_2} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы **C**:

$$\begin{aligned}c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49\end{aligned}$$

Третий элемент вектора правой части  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}b_2 = & 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94\end{aligned}$$

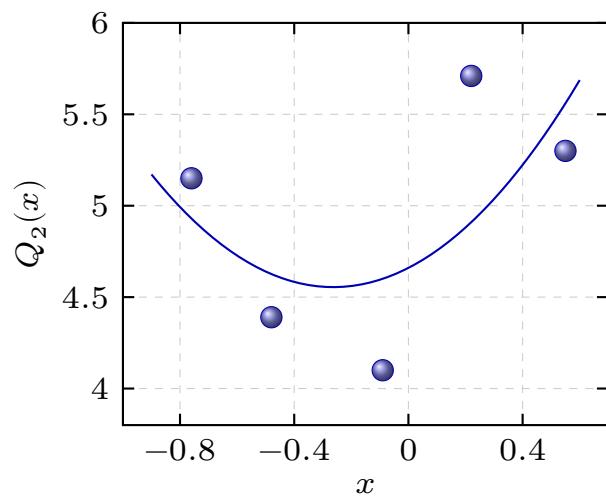
- 5) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов аппроксимирующего полинома необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot a_0 - 0.56 \cdot a_1 + 1.18 \cdot a_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot a_0 + 1.18 \cdot a_1 - 0.38 \cdot a_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot a_0 - 0.38 \cdot a_1 + 0.49 \cdot a_2 = 5.94 \end{cases}$$

- 6) Решение системы линейных алгебраических уравнений находится с помощью метода Гаусса.  $a_0 = 4.66$ ,  $a_1 = 0.80$ ,  $a_2 = 1.52$ . Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$Q_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

- 7) Построение графиков таблично заданной функции  $y(x)$  и аппроксимирующего полинома второго порядка  $Q_2(x)$ :



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.