СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Интерполирование функций

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по известным значениям функции $f(x)$ в отдельных точках отрезка восстановить её значения в остальных точках этого отрезка. Такая постановка задачи допускает множество решений.

Например, задача интерполирования возникает, в том случае, когда известны результаты измерения $y_i = f(x_i)$ некоторой физической величины f в ограниченном количестве точек x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), а требуется оценить значения этой величины в других точках.

Интерполирование используется также, когда вычисление значений $f(x)$ трудоемко, например, значение искомой функции может быть определено как решение сложной задачи, в которой x играет роль параметра. При этом можно вычислить небольшую таблицу значений функции, но прямое нахождение функции при большом числе значений аргумента практически затруднительно или нецелесообразно.

При *линейной интерполяции* функция $f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ заменяется интерполяционным полиномом $f(x) \approx p_n(x)$, который построен как линейная комбинация n аналитических функций $\{\phi_i(x)\}$

$$p_n(x) = c_0 \cdot \phi_0(x) + c_1 \cdot \phi_1(x) + \dots + c_n \cdot \phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x), \tag{1}$$

таким образом, чтобы значения полинома $p_n(x)$ в определённых точках отрезка $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (узлах сетки) совпадают со значениями функции в этих точках $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ (условия сопряжения):

$$\begin{cases} p_n(x_0) & = & y_0 \\ p_n(x_1) & = & y_1 \\ \dots\dots\dots & & \\ p_n(x_n) & = & y_n \end{cases}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x_0) & = & y_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x_1) & = & y_1 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x_n) & = & y_n \end{cases}. \tag{2}$$

Из условий (2), накладываемых на интерполяционный полином, формулируется система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, \dots, c_n$:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица $(n+1) \times (n+1)$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}$ – вектор неизвестных коэффициентов полинома $p_n(x)$ и вектор значений функции $f(x)$ в заданных точках $\{x_i\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Если среди узлов интерполяции $\{x_i\}$ нет совпадающих ($x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$) и определитель системы отличен от нуля $\det \mathrm{A} \neq 0$, то задача интерполяции имеет единственное решение, а система функций $\{\phi_i(x)\}$ называется чебышевской. Поэтому при линейной интерполяции необходимо строить обобщенный полином $p_n(x)$ на основе *чебышевской системы функций*.

Таким образом, для определения коэффициентов интерполяционного полинома (**??**) необходимо найти решение системы линейных уравнений (3), любыми аналитическими, приближенными или численными методами, например, методом Гаусса.

Интерполирование не всегда дает удовлетворительное решение задачи о приближении функции *с заданной точностью* на данном промежутке, так как совпадение функции $f(x)$ с полиномом $p(x)$ в точках x_i и x_{i+1} не гарантирует малость величины $|f(x) - p(x)|$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

1.1 Интерполяция алгебраическими полиномами

Задача интерполяции алгебраическими полиномами сводится к построению полинома степени n по чебышевской системе алгебраических функций $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$:

$$p_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i. \tag{4}$$

Определитель системы (3) представляет собой определителем Вандермонда, который отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, если среди точек $\{x_i\}$ нет совпадающих, т.е. $x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Выражение для коэффициентов алгебраического полинома и вид самого полинома (4) можно записать различными способами. Наиболее распространенная запись интерполяционного многочлена в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

1.2 Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполирования $\{x_i\}$:

$$L_n(x) = \lambda_0(x) \cdot y_0 + \lambda_1(x) \cdot y_1 + \dots + \lambda_n(x) \cdot y_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x) \cdot y_i \qquad (5)$$

где $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$ – произвольные неизвестные функции.

Для определения неизвестных функций $\lambda_i(x)$ из условий интерполирования следует:

$$\begin{cases} \lambda_0(x_0) \cdot y_0 + \lambda_1(x_0) \cdot y_1 + \dots + \lambda_n(x_0) \cdot y_n & = & y_0 \\ \lambda_0(x_1) \cdot y_0 + \lambda_1(x_1) \cdot y_1 + \dots + \lambda_n(x_1) \cdot y_n & = & y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_0(x_n) \cdot y_0 + \lambda_1(x_n) \cdot y_1 + \dots + \lambda_n(x_n) \cdot y_n & = & y_n \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет решение если выполняются условия:

$$\lambda_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $\lambda_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n:

$$\begin{cases} \lambda_0(x) & = & \alpha_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_2) \cdot & \ldots & \cdot (x - x_n) \\ \lambda_1(x) & = & \alpha_1 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot & \ldots & \cdot (x - x_n) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \lambda_n(x) & = & \alpha_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot & \ldots & \cdot (x - x_{n-1}) \end{cases}$$

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $\lambda_i(x)$:

$$\begin{cases} 1 & = & \alpha_0 \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_2) \cdot & \ldots & \cdot (x_0 - x_n) \\ 1 & = & \alpha_1 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot & \ldots & \cdot (x_1 - x_n) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & = & \alpha_n \cdot (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot & \ldots & \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты $\lambda_i(x)$ интерполяционного многочлена Лагранжа находятся из соотношений:

$$\begin{cases} \lambda_0(x) & = & \dfrac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \cdots \cdot (x_0 - x_n)} \\ \lambda_1(x) & = & \dfrac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \cdots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \cdots \cdot (x_1 - x_n)} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \lambda_n(x) & = & \dfrac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{cases},$$

или в более компактной форме:

$$\lambda_i(x) = \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа (5) имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot y_i \tag{6}$$

1.3 Интерполяция функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$, в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином в форме Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_3)}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{(x_3 - x_0) \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и известными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \frac{(x-(-0.09))\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{(-0.76-(-0.09))\cdot(-0.76-0.22)\cdot(-0.76-0.55)}\cdot 0.08+$$
$$\frac{(x-(-0.76))\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{(-0.09-(-0.76))\cdot(-0.09-0.22)\cdot(-0.09-0.55)}\cdot 1.84+$$
$$\frac{(x-(-0.76))\cdot(x-(-0.09))\cdot(x-0.55)}{(0.22-(-0.76))\cdot(0.22-(-0.09))\cdot(0.22-0.55)}\cdot 0.40+$$
$$\frac{(x-(-0.76))\cdot(x-(-0.09))\cdot(x-0.22)}{(0.55-(-0.76))\cdot(0.55-(-0.09))\cdot(0.55-0.22)}\cdot 0.96$$

3) Проведем необходимые арифмитические действия:

$$\begin{aligned} L_3(x) = &\quad \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)}\cdot 0.08 \;+ \\ &+ \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)}\cdot 1.84 \;+ \\ &+ \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)}\cdot 0.40 \;+ \\ &+ \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)}\cdot 0.96 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} L_3(x) = &\quad \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{-0.86}\cdot 0.08 \;+ \\ &+ \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{0.13}\cdot 1.84 \;+ \\ &+ \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{-0.10}\cdot 0.40 \;+ \\ &+ \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{0.28}\cdot 0.96 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned}
L_3(x) = &\quad (x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)\cdot(-0.09) &+\\
+ &\quad (x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)\cdot 13.84 &+\\
+ &\quad (x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)\cdot(-3.99) &+\\
+ &\quad (x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)\cdot 3.47 &
\end{aligned}$$

4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831\cdot x + 0.9119\cdot x^2 + 13.23\cdot x^3$$

5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия).

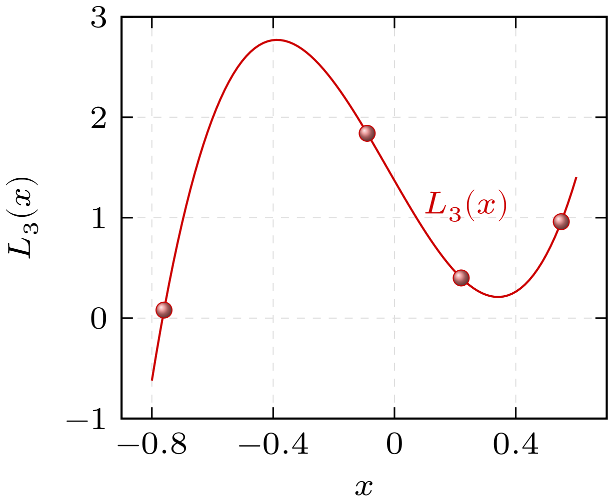

Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.