

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Численное интегрирование.....	4
1.1 Формула прямоугольников .....	6
1.2 Формула трапеций .....	7
1.3 Формула Симпсона .....	8
1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично .....	9
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	16
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	17

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Численное интегрирование

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $x \in [a, b]$  и известна ее первообразная  $F(x)$ , то определенный интеграл от этой функции в пределах от  $a$  до  $b$  может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где  $F'(x) = f(x)$  – первообразная подынтегральной функции  $f(x)$ .

Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика функции и осью абсцисс  $Ox$  (выделенная область на рисунке 1).

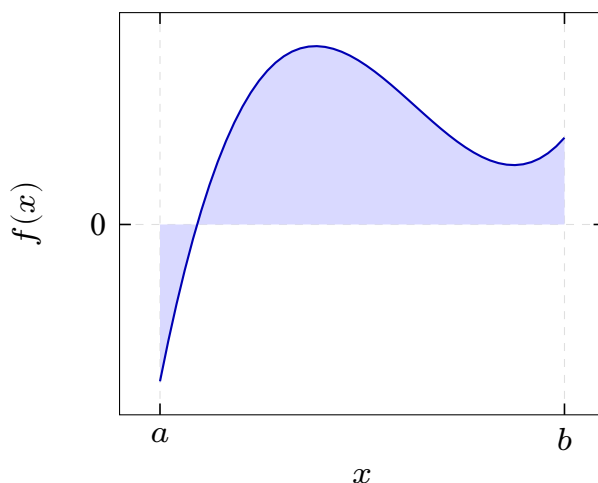


Рисунок 1 – Геометрический смысл определенного интеграла

Однако во многих случаях первообразная функция  $F(x)$  не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция  $f(x)$  часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

*Задача численного интегрирования* функции заключается в вычислении

значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции  $f(x)$ .

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию  $f(x)$  на рассматриваемом отрезке  $x \in [a, b]$  заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$  простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где  $c_i$  – числовые коэффициенты квадратурной формулы;  $x_i$  – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка  $[a, b]$ ,  $(i = 0, 1, \dots, n)$ .

На основании свойств определенных интегралов,  $I$  можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Поэтому, для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке  $[a, b]$  достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

## 1.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

В зависимости от выбора узла сетки  $\{x_i\}$  для аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  различают левую и правую формулы прямоугольников: если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце отрезка  $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$  (рисунок 2), то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка  $L_0 \approx f(x_i) = y_i$  (рисунок 2), то справедлива правая формула прямоугольников :

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

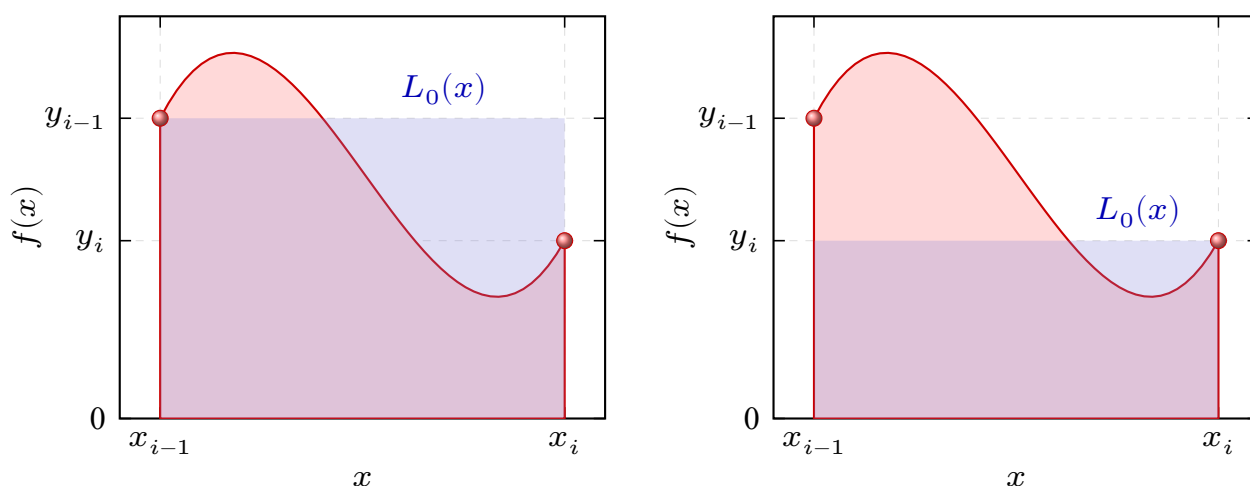


Рисунок 2 – График подынтегральной функции  $f(x)$  и аппроксимирующего полинома  $L_0(x)$  на частичном отрезке для формулы прямоугольников

## 1.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по множеству узлов сетки  $\{x_{i-1}, x_i\}$ :

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

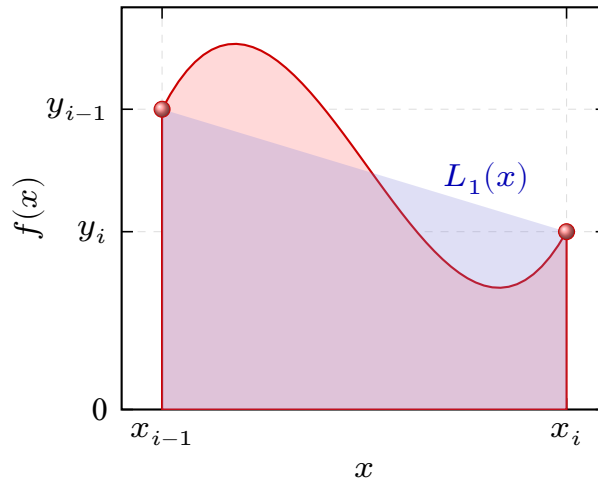


Рисунок 3 – График подынтегральной функции  $f(x)$  и аппроксимирующего полинома  $L_1(x)$  на частичном отрезке для формулы трапеций

### 1.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  квадратурная *формула Симпсона* является следствием аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени  $f(x) \approx L_2(x)$ , который построен по узлам сетки  $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$ :

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - x_{i-1/2}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_i - x)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_{i-1/2} + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_i
 \end{aligned}$$

где  $x_{i-1/2}$  – узел вспомогательной сетки, расположенный между узлами основной сетки  $x_{i-1} < x_{i-1/2} < x_i$

Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где  $c_0, c_1, c_2$  – коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  в пределах частичного отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  на частич-

ном отрезке  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$  определяет формулу Симпсона:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$

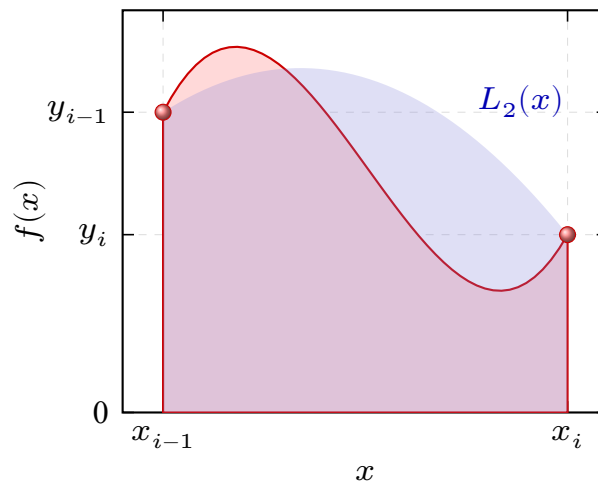


Рисунок 4 – График подынтегральной функции  $f(x)$  и аппроксимирующего полинома  $L_2(x)$  на частичном отрезке для формулы Симпсона

#### 1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

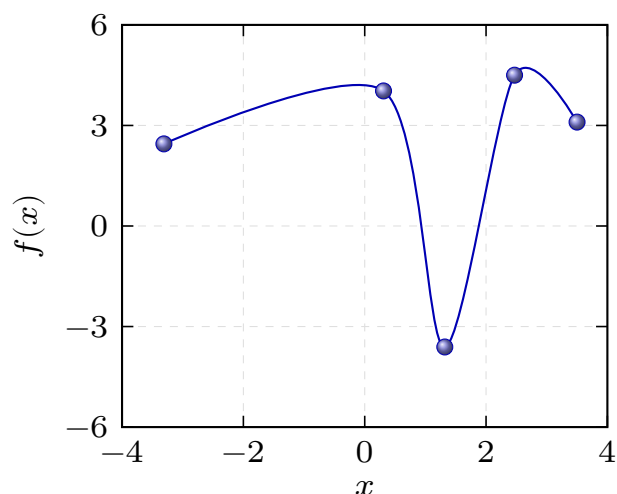
На множестве узлов сетки  $\{x_i\}$  определены значения некоторой функции  $\{y_i\} = f(x_i)$ :

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	−3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
$y_i$	2.45	4.03	−3.61	4.50	3.10

1) Построим график функции  $f(x)$  заданной таблично.





2) Воспользуемся левой и правой формулами прямоугольников для нахождения численного значения интеграла от функции  $f(x)$ , заданной таблично на отрезке  $x \in [x_0, x_4]$ . Для этого разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

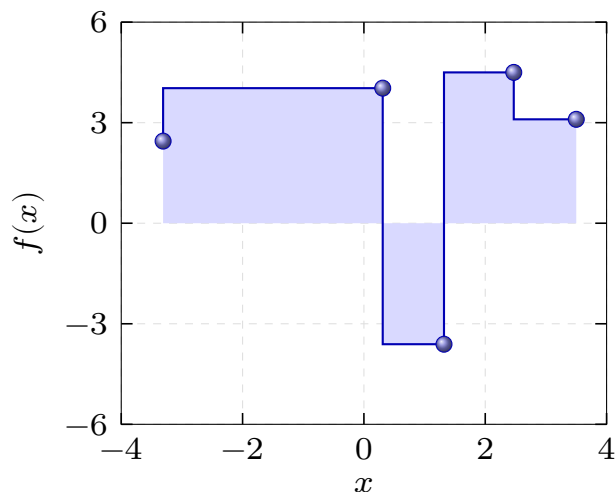
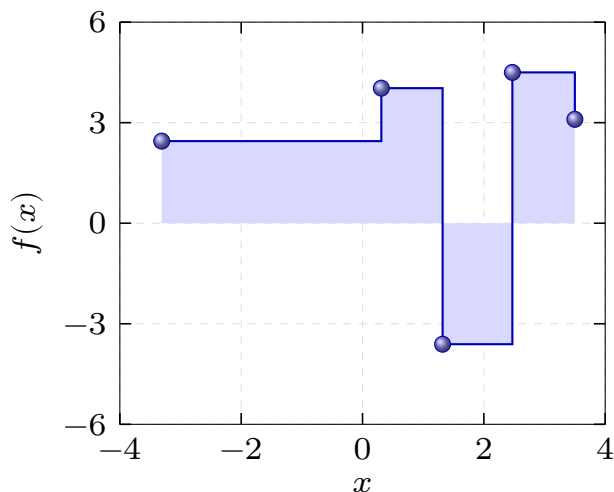


Рисунок 5 – Использование квадратурных формул левых и правых прямоугольников

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом нулевой степени  $f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$ , построенным по узлам  $\{x_{i-1}, x_i\}$ .

По методу прямоугольников, определим значение интеграла на каждом ча-

стичном отрезке (левые прямоугольники):

$$\begin{aligned} S_1^- &= y_0 \cdot (x_1 - x_0) = 2.45 \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 8.87 \\ S_2^- &= y_1 \cdot (x_2 - x_1) = 4.03 \cdot (1.32 - 0.31) \approx 4.07 \\ S_3^- &= y_2 \cdot (x_3 - x_2) = -3.61 \cdot (2.47 - 1.32) \approx -4.15 \\ S_4^- &= y_3 \cdot (x_4 - x_3) = 4.5 \cdot (3.50 - 2.47) \approx 4.64 \end{aligned}$$

(правые прямоугольники):

$$\begin{aligned} S_1^+ &= y_1 \cdot (x_1 - x_0) = 4.03 \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 14.59 \\ S_2^+ &= y_2 \cdot (x_2 - x_1) = -3.61 \cdot (1.32 - 0.31) \approx -3.65 \\ S_3^+ &= y_3 \cdot (x_3 - x_2) = 4.50 \cdot (2.47 - 1.32) \approx 5.18 \\ S_4^+ &= y_4 \cdot (x_4 - x_3) = 3.10 \cdot (3.50 - 2.47) \approx 3.19 \end{aligned}$$

Значение интегралов  $I^-$  и  $I^+$  на всем отрезке интегрирования  $[x_0, x_4]$ :

$$\begin{aligned} I^- &= S_1^- + S_2^- + S_3^- + S_4^- = 8.87 + 4.07 - 4.15 + 4.64 = 13.43 \\ I^+ &= S_1^+ + S_2^+ + S_3^+ + S_4^+ = 14.59 - 3.65 + 5.18 + 3.19 = 19.31 \end{aligned}$$

- 3) Рассмотрим *метод трапеций* для нахождения численного значения интеграла от функции  $f(x)$ , заданной таблично на отрезке  $x \in [x_0, x_4]$ . Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по узлам  $\{x_{i-1}, x_i\}$ , т.е. прямой соединяющей два соседних узла.

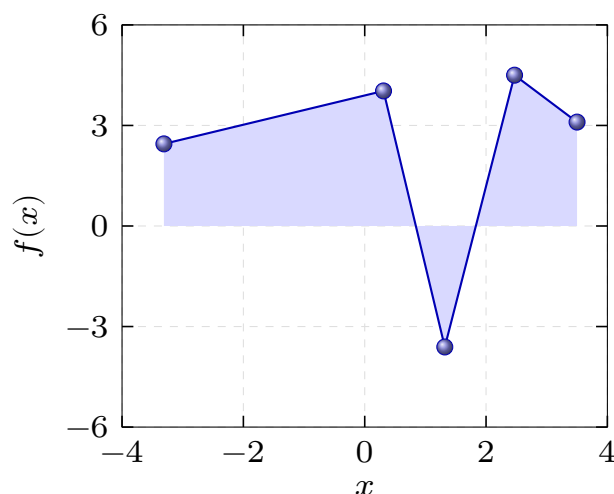


Рисунок 6 – Использование квадратурных формул трапеций

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$S_1 = \frac{y_1 + y_0}{2} \cdot (x_1 - x_0) = \frac{4.03 + 2.45}{2} \cdot (0.31 - (-3.31)) \approx 11.73$$

$$S_2 = \frac{y_2 + y_1}{2} \cdot (x_2 - x_1) = \frac{-3.61 + 4.03}{2} \cdot (1.32 - 0.31) \approx 0.21$$

$$S_3 = \frac{y_3 + y_2}{2} \cdot (x_3 - x_2) = \frac{4.50 - 3.61}{2} \cdot (2.47 - 1.32) \approx 0.51$$

$$S_4 = \frac{y_4 + y_3}{2} \cdot (x_4 - x_3) = \frac{3.10 + 4.50}{2} \cdot (3.50 - 2.47) \approx 3.91$$

Определим интеграл  $I$  на всем отрезке интегрирования  $[x_0, x_4]$ , воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 11.73 + 0.21 + 0.51 + 3.91 = 16.37.$$

- 4) Рассмотрим *метод Симпсона* для нахождения численного значения интеграла от функции  $f(x)$ , заданной таблично на отрезке  $x \in [x_0, x_4]$ .

Разделим всё множество узлов сетки  $\{x_i\}$ , в которых известны значения функции  $\{y_i\}$ , на основные и вспомогательные узлы:

Таблица 2 – Таблично заданная функциональная зависимость

$i$	0	$1 - 1/2$	1	$1 + 1/2$	2
$x_i$	-3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
$y_i$	2.45	4.03	-3.61	4.50	3.10

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_2] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2].$$

В пределах первого частичного отрезка  $[x_0, x_1]$  построим интерполяционный полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам сетки  $x_0 = -3.31$ ,  $x_{1-1/2} = 0.31$ ,  $x_1 = 1.32$ :

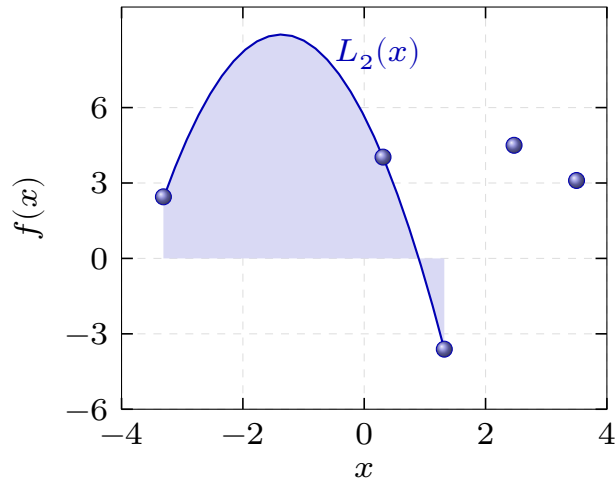
$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - 0.31)(x - 1.32)}{((-3.31 - 0.31)(-3.31 - 1.32))} \cdot 2.45 + \\
 & + \frac{(x - (-3.31))(x - 1.32)}{(0.31 - (-3.31))(0.31 - 1.32)} \cdot 4.03 + \\
 & + \frac{(x - (-3.31))(x - 0.31)}{(1.32 - (-3.31))(1.32 - 0.31)} \cdot (-3.61)
 \end{aligned}$$

После алгебраических преобразований запишем интерполяционный полином в каноническом виде:

$$L_2(x) = 5.66 - 4.74 \cdot x - 1.73 \cdot x^2$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома  $L_2(x)$  на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{x_0}^{x_1} L_2(x) dx = \int_{-3.31}^{1.32} (5.66 - 4.74 \cdot x - 1.73 \cdot x^2) dx = 25.88$$



В пределах второго частичного отрезка  $[x_1, x_2]$  построим интерполяционный полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам сетки  $x_1 = 1.32$ ,  $x_{1+1/2} = 2.47$ ,  $x_2 = 3.50$ :

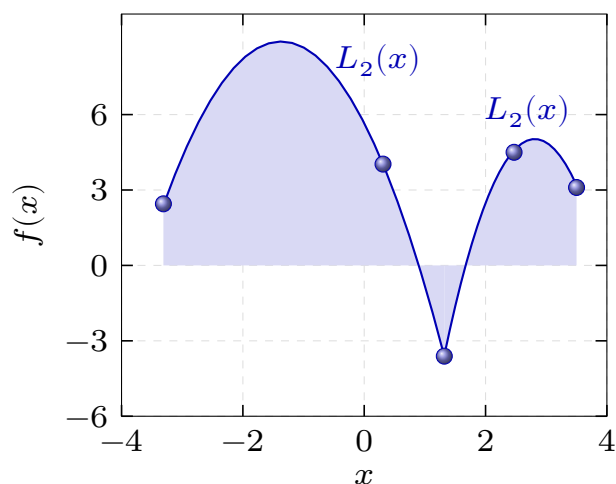
$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - 2.47)(x - 3.50)}{(1.32 - 2.47)(1.32 - 3.50)} \cdot (-3.61) + \\ & + \frac{(x - 1.32)(x - 3.50)}{(2.47 - 1.32)(2.47 - 3.50)} \cdot 4.50 + \\ & + \frac{(x - 1.32)(x - 2.47)}{(3.50 - 1.32)(3.50 - 2.47)} \cdot 3.10 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -25.56 + 21.76 \cdot x - 3.87 \cdot x^2$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома  $L_2(x)$  на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} L_2(x) dx = \int_{1.32}^{3.50} (-25.56 + 21.76 \cdot x - 3.87 \cdot x^2) dx = 6.13$$



Определим интеграл всем отрезке  $[x_0, x_2]$  воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25.88 + 6.13 = 32.01$$

- 5) Сравнивая численные значения определенного интеграла рассчитанные по методам прямоугольников, трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что рассчитанные значения различаются.

Таблица 3 – Численные значения интегралов

Метод интегрирования	Значение интеграла
Левых прямоугольников	13.43
Правых прямоугольников	19.31
Трапеций	16.37
Симпсона	32.01

Значение определенного интеграла от функции заданной таблично, рассчитанное по методу Симпсона является наибольшим, а значение рассчитанное по методу левых прямоугольников – наименьшее.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.