СОДЕРЖАНИЕ

1 Интерполирование функций

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по известным значениям функции $f(x)$ в отдельных точках отрезка восстановить её значения в остальных точках этого отрезка. Такая постановка задачи допускает множество решений.

Например, задача интерполирования возникает, в том случае, когда известны результаты измерения $y_i = f(x_i)$ некоторой физической величины f в ограниченном количестве точек x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), а требуется оценить значения этой величины в других точках.

Интерполирование используется также, когда вычисление значений $f(x)$ трудоемко, например, значение искомой функции может быть определено как решение сложной задачи, в которой x играет роль параметра. При этом можно вычислить небольшую таблицу значений функции, но прямое нахождение функции при большом числе значений аргумента практически затруднительно или нецелесообразно.

1.1 Линейная интерполяция функции

При *линейной интерполяции* функция $f(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ заменяется обобщенным интерполяционным полиномом $p_n(x)$, который построен в виде линейной комбинации $(n + 1)$ аналитических функций $\{\phi_i(x)\}$

$$p_n(x) = c_0 \cdot \phi_0(x) + c_1 \cdot \phi_1(x) + \dots + c_n \cdot \phi_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x), \qquad (1)$$

таким образом, чтобы значения полинома $p_n(x)$ в определённых точках отрезка $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ (узлах сетки) совпадают со значениями функции в этих точках $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ (условия сопряжения):

$$\begin{cases} p_n(x_0) & = & y_0 \\ p_n(x_1) & = & y_1 \\ \dots\dots\dots & & \\ p_n(x_n) & = & y_n \end{cases}, \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x_0) & = & y_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x_1) & = & y_1 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot \phi_i(x_n) & = & y_n \end{cases}. \qquad (2)$$

Из условий (2), накладываемых на интерполяционный полином, формулируется система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, \dots, c_n$:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица $(n+1) \times (n+1)$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}$ – вектор неизвестных коэффициентов полинома $p_n(x)$ и вектор значений функции $f(x)$ в заданных точках $\{x_i\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \cdots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \cdots & \phi_n(x_n) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Если среди узлов интерполяции $\{x_i\}$ нет совпадающих ($x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$) и определитель системы отличен от нуля $\det \mathrm{A} \neq 0$, то задача интерполяции имеет единственное решение, а система функций $\{\phi_i(x)\}$ называется чебышевской. Поэтому при линейной интерполяции необходимо строить обобщенный полином $p_n(x)$ на основе *чебышевской системы функций*.

Таким образом, для определения коэффициентов интерполяционного полинома (1) необходимо найти решение системы линейных уравнений (3), любыми аналитическими, приближенными или численными методами, например, методом Гаусса.

Интерполирование не всегда дает удовлетворительное решение задачи о приближении функции *с заданной точностью* на данном промежутке, так как совпадение функции $f(x)$ с полиномом $p(x)$ в точках x_i и x_{i+1} не гарантирует малость величины $|f(x) - p(x)|$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$.

1.2 Интерполяция алгебраическими полиномами

Задача интерполяции алгебраическими полиномами сводится к построению полинома степени n по чебышевской системе алгебраических функций $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$:

$$p_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i. \tag{4}$$

Определитель системы (3) представляет собой определителем Вандермонда, который отличен от нуля $\det\mathbf{A} \neq 0$, если среди точек $\{x_i\}$ нет совпадающих, т.е. $x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \ldots, n$:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Выражение для коэффициентов алгебраического полинома и вид самого полинома (4) можно записать различными способами. Наиболее распространенная запись интерполяционного многочлена в форме Лагранжа и в форме Ньютона.

1.3 Интерполяционный полином в форме Лагранжа

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполирования $\{x_i\}$:

$$L_n(x) = \lambda_0(x)\cdot y_0 + \lambda_1(x)\cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x)\cdot y_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(x)\cdot y_i \tag{5}$$

где $\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_n(x)$ – произвольные неизвестные функции.

Для определения неизвестных функций $\lambda_i(x)$ из условий интерполирования следует:

$$\begin{cases} \lambda_0(x_0)\cdot y_0 + \lambda_1(x_0)\cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x_0)\cdot y_n & = & y_0 \\ \lambda_0(x_1)\cdot y_0 + \lambda_1(x_1)\cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x_1)\cdot y_n & = & y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \lambda_0(x_n)\cdot y_0 + \lambda_1(x_n)\cdot y_1 + \cdots + \lambda_n(x_n)\cdot y_n & = & y_n \end{cases}$$

Эта система уравнений имеет решение если выполняются условия:

$$\lambda_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $\lambda_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n:

$$\begin{cases} \lambda_0(x) &= \alpha_0 \cdot (x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_2)\cdot \quad ... \quad \cdot(x-x_n) \\ \lambda_1(x) &= \alpha_1 \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot \quad ... \quad \cdot(x-x_n) \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \lambda_n(x) &= \alpha_n \cdot (x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot \quad ... \quad \cdot(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, ... , \alpha_n$ из условия для коэффициентов $\lambda_i(x)$:

$$\begin{cases} 1 &= \alpha_0 \cdot (x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_2)\cdot \quad ... \quad \cdot(x_0-x_n) \\ 1 &= \alpha_1 \cdot (x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot \quad ... \quad \cdot(x_1-x_n) \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ 1 &= \alpha_n \cdot (x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot(x_n-x_2)\cdot \quad ... \quad \cdot(x_n-x_{n-1}) \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты $\lambda_i(x)$ интерполяционного многочлена Лагранжа находятся из соотношений:

$$\begin{cases} \lambda_0(x) &= \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\dots\cdot(x_0-x_n)} \\ \lambda_1(x) &= \dfrac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot\dots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot\dots\cdot(x_1-x_n)} \\ \multicolumn{2}{l}{\dotfill} \\ \lambda_n(x) &= \dfrac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\dots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\dots\cdot(x_n-x_{n-1})} \end{cases},$$

или в более компактной форме:

$$\lambda_i(x) = \frac{\prod\limits_{j\neq i}^{n}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа (5) имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot y_i \tag{6}$$

1.4 Интерполяция функции заданной таблично обобщенным полиномом

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$, в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим обобщенный интерполяционный полином $p_3(x)$ для таблично заданной функции исходя из чебышевской системы функций $\{1, x, e^{-x}, e^x\}$:

$$p_4(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot e^{-x} + c_3 \cdot e^x$$

1) Составим расширенную матрица системы уравнений (3) для определения коэффициентов полинома $(c_0, c_1, c_2, c_3)^{\mathrm{T}}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \phi_3(x_0) & y_0 \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \phi_2(x_1) & \phi_3(x_1) & y_1 \\ \phi_0(x_2) & \phi_1(x_2) & \phi_2(x_2) & \phi_3(x_2) & y_2 \\ \phi_0(x_3) & \phi_1(x_3) & \phi_2(x_3) & \phi_3(x_3) & y_3 \end{array}\right), \quad \text{здесь} \quad \begin{cases} \phi_0(x) & = & 1 \\ \phi_1(x) & = & x \\ \phi_2(x) & = & e^{-x} \\ \phi_3(x) & = & e^x \end{cases}.$$

2) Воспользуемся данными таблицы 1 и заполним числовыми значения эле-

менты расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.76 & e^{0.76} & e^{-0.76} & 0.08 \\ 1 & -0.09 & e^{0.09} & e^{-0.09} & 1.84 \\ 1 & 0.22 & e^{-0.22} & e^{0.22} & 0.40 \\ 1 & 0.55 & e^{-0.55} & e^{0.55} & 0.96 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -0.76 & 2.138 & 0.468 & 0.08 \\ 1 & -0.09 & 1.094 & 0.914 & 1.84 \\ 1 & 0.22 & 0.803 & 1.246 & 0.40 \\ 1 & 0.55 & 0.577 & 1.733 & 0.96 \end{array}\right)$$

3) Решение системы линейных уравнений найдем методом Гаусса с выбором главного элемента в расширенной матрице (выделен цветом):

$$\boldsymbol{c} = (-0.393, -81.472, -37.288, 39.053)^{\mathrm{T}}$$

Следовательно, обобщенный интерполяционный полином для функции заданной таблично можно записать в виде:

$$p_3(x) = -0.393 - 81.472 \cdot x - 37.288 \cdot e^{-x} + 39.053 \cdot e^{x}$$

4) В таблице 2 представлены данные расчета коэффициентов обобщенного интерполяционного полинома c_i, значений этого полинома в узлах сетки $p_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции $\varepsilon_i = y_i - p_3(x_i)$.

Таблица 2 – Коэффициенты обобщенного интерполяционного полинома c_i, значения этого полинома в узлах сетки $p_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции ε_i

i	0	1	2	3
x_i	−0.76	−0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.4	0.96
c_i	−0.393	−81.472	−37.288	39.053
$p_3(x_i)$	0.057	1.832	0.422	0.973
ε_i	0.023	0.008	−0.022	−0.013

5) На рисунке 1 представлена диаграмма рассеяния (разброса) данных функции

заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений обобщенного интерполяционного полинома $p_3(x)$ (сплошная линия).

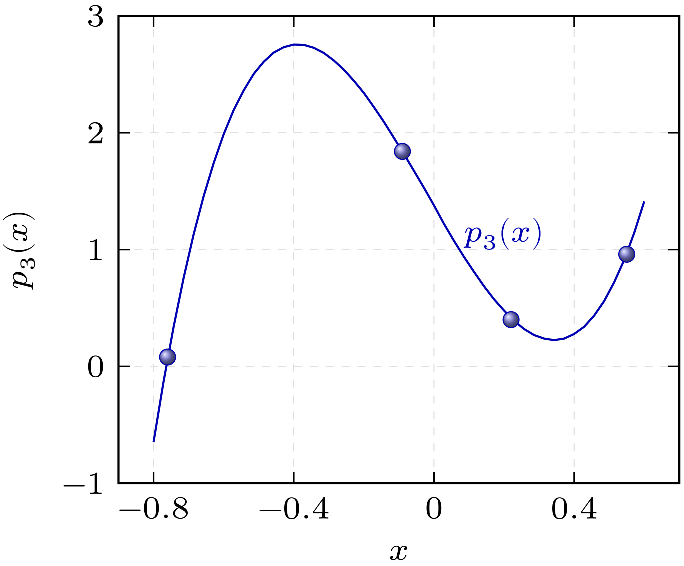

Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и обобщенного интерполяционного полинома $p_3(x)$ (сплошная линия)

Таблица 3 – Рассчётные значения обобщенного интерполяционного полинома в узлах сетки $p_3(x_i)$

i	0	1	2	...	...	...	47	48	49
x_i	-0.800	-0.771	-0.743	...	...	...	0.543	0.571	0.600
y_i	-0.654	-0.128	0.330	...	...	...	0.920	1.145	1.419

1.5 Интерполяция функции заданной таблично алгебраическими полиномами в форме Лагранжа

Построим интерполяционный полином в форме Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$L_3(x) = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}\cdot y_0 +$$
$$\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)}\cdot y_1 +$$
$$\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_3)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)\cdot(x_2-x_3)}\cdot y_2 +$$
$$\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_3-x_0)\cdot(x_3-x_1)\cdot(x_3-x_2)}\cdot y_3$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и известными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$ (таблица 1):

$$L_3(x) = \frac{(x-(-0.09))\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{(-0.76-(-0.09))\cdot(-0.76-0.22)\cdot(-0.76-0.55)}\cdot 0.08 +$$
$$\frac{(x-(-0.76))\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{(-0.09-(-0.76))\cdot(-0.09-0.22)\cdot(-0.09-0.55)}\cdot 1.84 +$$
$$\frac{(x-(-0.76))\cdot(x-(-0.09))\cdot(x-0.55)}{(0.22-(-0.76))\cdot(0.22-(-0.09))\cdot(0.22-0.55)}\cdot 0.40 +$$
$$\frac{(x-(-0.76))\cdot(x-(-0.09))\cdot(x-0.22)}{(0.55-(-0.76))\cdot(0.55-(-0.09))\cdot(0.55-0.22)}\cdot 0.96$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$L_3(x) = \frac{(x+0.09)\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{(-0.67)\cdot(-0.98)\cdot(-1.31)}\cdot 0.08 +$$
$$\frac{(x+0.76)\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{(0.67)\cdot(-0.31)\cdot(-0.64)}\cdot 1.84 +$$
$$\frac{(x+0.76)\cdot(x+0.09)\cdot(x-0.55)}{(0.98)\cdot(0.31)\cdot(-0.33)}\cdot 0.40 +$$
$$\frac{(x+0.76)\cdot(x+0.09)\cdot(x-0.22)}{(1.31)\cdot(0.64)\cdot(0.33)}\cdot 0.96$$

или

$$L_3(x) = \frac{(x+0.09)\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{-0.86}\cdot 0.08 + \frac{(x+0.76)\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)}{0.13}\cdot 1.84 + \frac{(x+0.76)\cdot(x+0.09)\cdot(x-0.55)}{-0.10}\cdot 0.40 + \frac{(x+0.76)\cdot(x+0.09)\cdot(x-0.22)}{0.28}\cdot 0.96$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned} L_3(x) = &(x+0.09)\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)\cdot(-0.09)+\\ &(x+0.76)\cdot(x-0.22)\cdot(x-0.55)\cdot 13.84+\\ &(x+0.76)\cdot(x+0.09)\cdot(x-0.55)\cdot(-3.99)+\\ &(x+0.76)\cdot(x+0.09)\cdot(x-0.22)\cdot 3.47 \end{aligned}$$

4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.37 - 5.248\cdot x + 0.912\cdot x^2 + 13.23\cdot x^3$$

5) В таблице 4 представлены данные расчета коэффициентов интерполяционного полинома Лагранжа c_i, значений этого полинома в узлах сетки $L_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции $\varepsilon_i = y_i - L_3(x_i)$.

Таблица 4 – Коэффициенты интерполяционного полинома Лагранжа c_i, значения этого полинома в узлах сетки $L_3(x_i)$ и абсолютная погрешность интерполяции ε_i

i	x_i	y_i	c_i	$L_3(x_i)$	ε_i
0	-0.76	0.08	1.37	0.078	0.002
1	-0.09	1.84	-5.248	1.840	0.000
2	0.22	0.40	0.912	0.400	0.000
3	0.55	0.96	13.23	0.961	-0.001

6) На рисунке (2) представлена диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия).

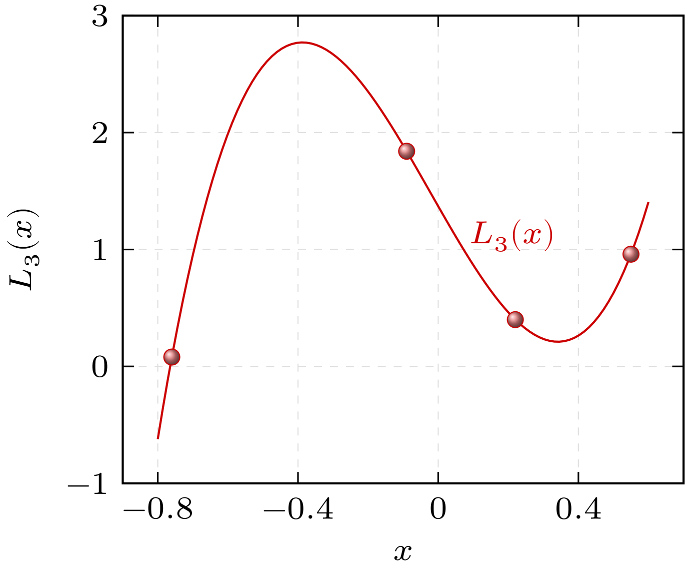

Рисунок 2 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.

7 List of mathematical symbols by subject