

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Численное интегрирование.....	4
1.1 Формула прямоугольников .....	5
1.2 Формула трапеций .....	6
1.3 Формула Симпсона .....	7
1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично .....	7
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	13
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	14

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Численное интегрирование

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $x \in [a, b]$  и известна ее первообразная  $F(x)$ , то определенный интеграл от этой функции в пределах от  $a$  до  $b$  может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где  $F'(x) = f(x)$  – первообразная подынтегральной функции  $f(x)$ .

Однако во многих случаях первообразная функция  $F(x)$  не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция  $f(x)$  часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

*Задача численного интегрирования* функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции  $f(x)$ .

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию  $f(x)$  на рассматриваемом отрезке  $x \in [a, b]$  заменяют интерполирующей или аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$  простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где  $c_i$  – числовые коэффициенты квадратурной формулы;  $x_i$  – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка  $[a, b]$ ,  $(i = 0, 1, \dots, n)$ .

На основании свойств определенных интегралов,  $I$  можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Поэтому, для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке  $[a, b]$  достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

### 1.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

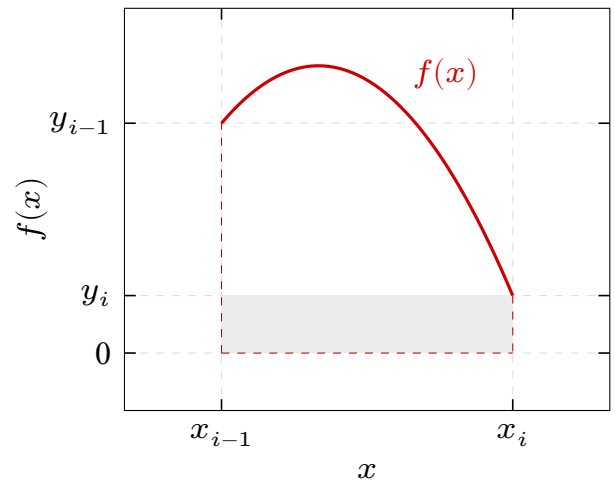
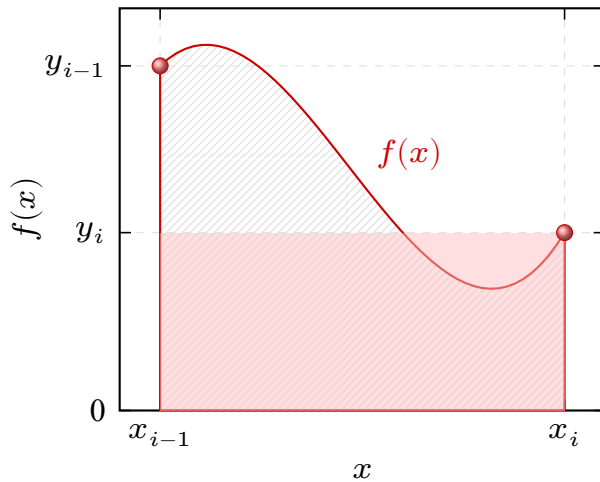
В зависимости от выбора узла сетки  $\{x_i\}$  для аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  различают левую и правую формулы прямоугольников: если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце от-

резка  $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ , то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка  $L_0 \approx f(x_i) = y_i$ , то справедлива правая формула прямоугольников:

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$



## 1.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по множеству узлов сетки  $\{x_{i-1}, x_i\}$ :

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

### 1.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  квадратурная формула Симпсона является следствием аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени  $f(x) \approx L_2(x)$ , который построен по узлам сетки  $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$ :

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\ & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x)}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_i + \\ & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

где  $x_{i-1/2}$  – узел вспомогательной сетки, расположенный между узлами основной сетки  $x_{i-1} < x_{i-1/2} < x_i$

Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где  $c_0, c_1, c_2$  – коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  в пределах частичного отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  на частичном отрезке  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$  определяет формулу Симпсона:

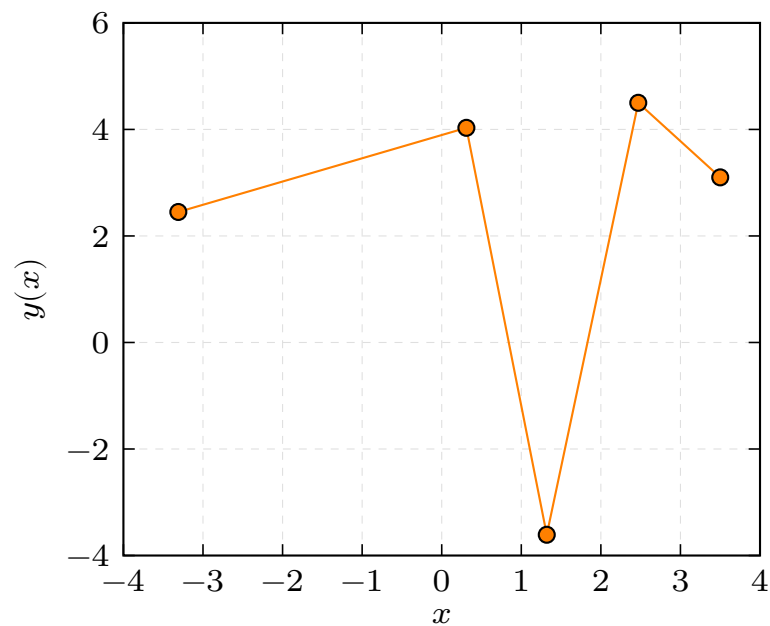
$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$

### 1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки  $\{x_i\}$  определены значения некоторой функции  $\{y_i\}$ :

$x$	-3,31	0,31	1,32	2,47	3,50
$f(x)$	2,45	4,03	-3,61	4,50	3,1

- 1) Построим график функции  $f(x)$  заданной таблично.



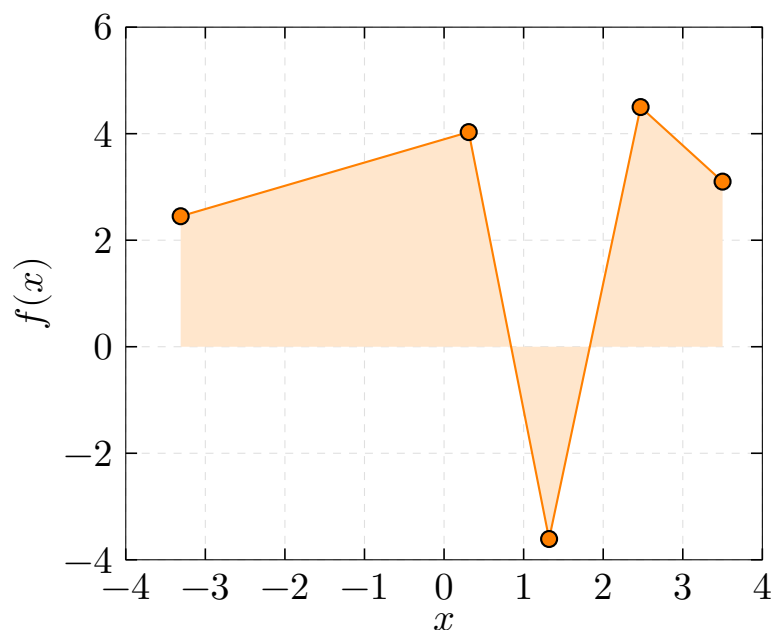
Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика и осью абсцисс  $Ox$  (выделенная область на графике).

- 2) Рассмотрим **метод трапеций** для нахождения численного значения интеграла функции  $f(x)$  заданной таблично на отрезке  $x \in [-3, 31; 3, 50]$ .

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по узлам  $x_{i-1}, x_i$ , т.е. прямой соединяющей два соседних узла.



Определим длину частичных отрезков:

$$h_1 = (x_1 - x_0) = 0,31 - (-3,31) = 3,62$$

$$h_2 = (x_2 - x_1) = 1,32 - 0,31 = 1,01$$

$$h_3 = (x_3 - x_2) = 2,47 - 1,32 = 1,15$$

$$h_4 = (x_4 - x_3) = 3,50 - 2,47 = 1,03$$

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$I_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h_1 = \frac{2,45 + 4,03}{2} \cdot 3,62 = 11,73$$

$$I_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h_2 = \frac{4,03 - 3,61}{2} \cdot 1,01 = 0,21$$

$$I_3 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h_3 = \frac{-3,61 + 4,50}{2} \cdot 1,15 = 0,51$$

$$I_4 = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \cdot h_4 = \frac{4,50 + 3,10}{2} \cdot 1,03 = 3,91$$

Определим интеграл  $I$  на всем отрезке интегрирования  $[-3, 31; 3, 50]$ , воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 11,73 + 0,21 + 0,51 + 3,91 = 16,37.$$

3) Рассмотрим **метод Симпсона** для нахождения численное значение интеграла



функции  $f(x)$  заданной таблично на отрезке  $x \in [-3, 31; 3, 50]$ .

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4]$$

На каждом из двух отрезков построим интерполяционный полинома Лагранжа  $L_2(x)$

- 4) В пределах первого частичного отрезка  $[-3, 31; 1, 32]$  построим полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам интерполяции  $x_0 = -3, 31; x_1 = 0, 31; x_2 = 1, 32$ :

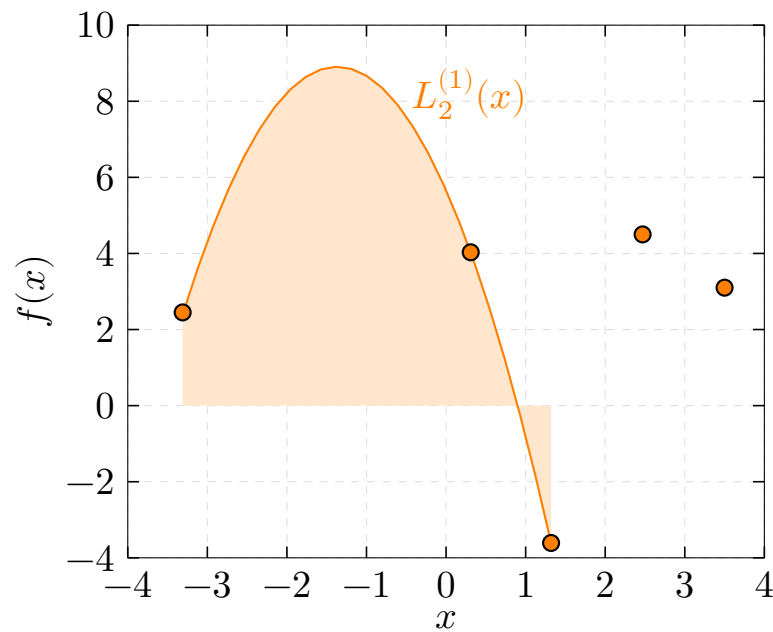
$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(x) &= \frac{(x - 0, 31)(x - 1, 32)}{((-3, 31 - 0, 31)(-3, 31 - 1, 32))} \cdot 2, 45 \quad + \\ &+ \frac{(x - (-3, 31))(x - 1, 32)}{(0, 31 - (-3, 31))(0, 31 - 1, 32))} \cdot 4, 03 \quad + \\ &+ \frac{(x - (-3, 31))(x - 0, 31)}{(1, 32 - (-3, 31))(1, 32 - 0, 31))} \cdot (-3, 61) \end{aligned}$$

В результате алгебраических преобразований получим:

$$L_2^{(1)}(x) = -1, 73 \cdot x^2 - 4, 74 \cdot x + 5, 66$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2^{(1)}(x)$  на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{-3, 31}^{1, 32} L_2^{(1)}(x) dx = \int_{-3, 31}^{1, 32} (-1, 73 \cdot x^2 - 4, 74 \cdot x + 5, 66) dx = 25, 88$$



- 5) В пределах второго частичного отрезка  $[1, 32; 3, 50]$  построим полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам интерполяции  $x_2 = 1, 32; x_3 = 2, 47; x_4 = 3, 50$ :

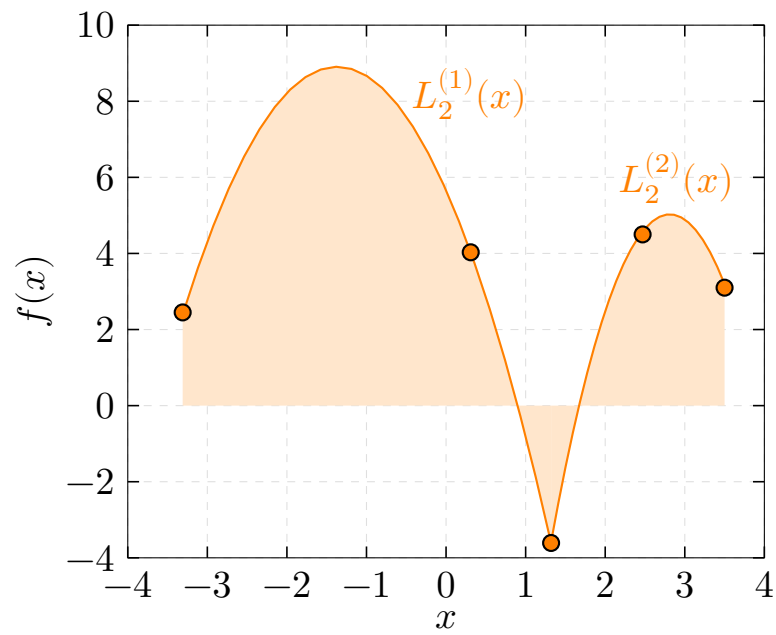
$$\begin{aligned}
 L_2^{(2)}(x) &= \frac{(x - 2, 47)(x - 3, 50)}{(1, 32 - 2, 47)(1, 32 - 3, 50)} \cdot (-3, 61) + \\
 &+ \frac{(x - 1, 32)(x - 3, 50)}{(2, 47 - 1, 32)(2, 47 - 3, 50)} \cdot 4, 50 + \\
 &+ \frac{(x - 1, 32)(x - 2, 47)}{(3, 50 - 1, 32)(3, 50 - 2, 47)} \cdot 3, 10
 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -3, 87 \cdot x^2 + 21, 76 \cdot x - 25, 56$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2^{(2)}(x)$  на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{1, 32}^{3, 50} L_2^{(2)}(x) dx = \int_{1, 32}^{3, 50} (-3, 87 \cdot x^2 + 21, 76 \cdot x - 25, 56) dx = 6, 13$$



- 6) Определим интеграл всем отрезке  $[-3, 31; 3, 50]$  воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25,88 + 6,13 = 32,01$$

- 7) Сравнивая численные значения интегралов рассчитанные по методу трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что значение интегралов существенно различаются: определенный интеграл рассчитанный по методу Симпсона в 1,96 больше, чем по методу трапеций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.