СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица $m \times m$, $\vec{x}$ и $\vec{b}$ – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности $1 \times m$:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, так что решение $\vec{x}$ существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы m способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка $m!$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – $O(m^3)$ действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы $\mathbf{A}$ ($m \approx 10^2 \ldots 10^5$), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 & + & a_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{1m} \cdot x_m & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{2m} \cdot x_m & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{3m} \cdot x_m & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{mm} \cdot x_m & = & b_m \end{cases}$$

1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных x_i из системы линейных уравнений. Например, предположим, что $a_{11} \neq 0$, тогда разделим первое уравнение системы на a_{11}, и в результате получим:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{2m} \cdot x_m & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{3m} \cdot x_m & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{mm} \cdot x_m & = & b_m \end{cases},$$

где c_{1j} и y_1 – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на a_{i1} и вычтем полученное уравнение из каждого i-го уравнения системы $i = 2, 3, \dots, m$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ & & (a_{22} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 & + & \cdots & (a_{2m} - c_{1m} \cdot a_{21}) \cdot x_m & = & b_2 - y_1 \cdot a_{21} \\ & & (a_{32} - c_{12} \cdot a_{31}) \cdot x_2 & + & \cdots & (a_{3m} - c_{1m} \cdot a_{31}) \cdot x_m & = & b_3 - y_1 \cdot a_{31} \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & (a_{m2} - c_{12} \cdot a_{m1}) \cdot x_2 & + & \cdots & (a_{mm} - c_{1m} \cdot a_{m1}) \cdot x_m & = & b_m - y_1 \cdot a_{m1} \end{cases}$$

Запишем полученную систему уравнений в более компактном виде:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ & & a_{22}^{(1)} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{2m}^{(1)} \cdot x_m & = & b_2^{(1)} \\ & & a_{32}^{(1)} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{3m}^{(1)} \cdot x_m & = & b_3^{(1)} \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{mm}^{(1)} \cdot x_m & = & b_m^{(1)} \end{cases},$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \cdots, m)$$

Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное x_2. Для этого разделим второе уравнение системы на $a_{22}^{(1)}$, и в результате получим:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ & & x_2 & + & \cdots & c_{2m} \cdot x_m & = & y_2 \\ & & a_{32}^{(1)} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{3m}^{(1)} \cdot x_m & = & b_3^{(1)} \\ & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 & + & \cdots & a_{mm}^{(1)} \cdot x_m & = & b_m^{(1)} \end{cases},$$

где c_{2j} и y_2 – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \ldots, m), \quad y_2 = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на $a_{i2}^{(1)}$ и вычтем полученное уравнение из каждого i-го уравнения системы $i = 3, 4, \ldots, m$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ & & x_2 & + & \cdots & c_{2m} \cdot x_m & = & y_2 \\ & & & & \cdots & \left(a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)}\right) \cdot x_m & = & b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)} \\ & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \cdots & \left(a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)}\right) \cdot x_m & = & b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{cases},$$

или в более компактном виде:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ & & x_2 & + & \cdots & c_{2m} \cdot x_m & = & y_2 \\ & & & & \cdots & a_{3m}^{(2)} \cdot x_m & = & b_3^{(2)} \\ & & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & \cdots & a_{mm}^{(2)} \cdot x_m & = & b_m^{(2)} \end{cases},$$

где $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = \left(a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)}\right), \quad b_i^{(2)} = \left(b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)}\right), \quad (i, j = 3, 4, \cdots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные $x_3, x_4, \cdots, x_m$, исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\begin{cases} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & c_{13} \cdot x_3 & + & \cdots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ & & x_2 & + & c_{23} \cdot x_3 & + & \cdots & c_{2m} \cdot x_m & = & y_2 \\ & & & & x_3 & + & \cdots & c_{3m} \cdot x_m & = & y_3 \\ & & & & & & \ddots & \vdots & = & \vdots \\ & & & & & & & x_m & = & y_m \end{cases}$$

1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных $x_1, x_2, \cdots, x_m$ полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку матрица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с x_m, найти все неизвестные $x_{m-1}, x_{m-2}, \cdots, x_1$:

$$\begin{aligned} x_m &= y_m \\ x_{m-1} &= y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} &= y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \vdots &= \cdots \\ x_1 &= y_1 - \sum_{j=2}^{m} c_{1j} \cdot x_j \end{aligned}$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{m} c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \cdots, 1), \quad x_m = y_m$$

1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы **A** равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы **A** отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Пример численного решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 31 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 22 \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса.

1) Разделим 1-ю строку на коэффициент при x_1 (2)

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & = & 31 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 22 \end{cases}$$

2) Умножим 1-ю строку на коэффициент при x_1 (4) во 2-ом уравнении

$$4x_1 \; + \; 6x_2 \; + \; 2x_3 \; = \; 20$$

и вычтем результат умножения из 2-й строки

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 22 \end{cases}$$

3) Умножим 1-ю строку на коэффициент при x_1 (3) в 3-ем уравнении

$$3x_1 \; + \; \frac{9}{2}x_2 \; + \; \frac{3}{2}x_3 \; = \; 15$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & 11 \\ & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{7}{2}x_3 & = & 7 \end{cases}$$

4) Разделим 2-ю строку на коэффициент при x_2 (-1)

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -11 \\ & - & \frac{7}{2}x_2 & + & \frac{7}{2}x_3 & = & 7 \end{cases}$$

5) Умножим 2-ю строку на коэффициент при x_2 $\left(-\frac{7}{2}\right)$ в 3-ем уравнении

$$-\;\frac{7}{2}x_2 \; + \; 14x_3 \; = \; \frac{77}{2}$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -11 \\ & & & - & \frac{21}{2}x_3 & = & -\frac{63}{2} \end{cases}$$

6) Разделим 3-ю строку на коэффициент при x_3 $\left(-\frac{21}{2}\right)$

$$\begin{cases} x_1 & + & \frac{3}{2}x_2 & + & \frac{1}{2}x_3 & = & 5 \\ & & x_2 & - & 4x_3 & = & -11 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса.

Последовательно определяем неизвестные x_3, x_2, x_1:

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \\ x_2 &= -11 + 4x_3 = -11 + 4 \cdot 3 = 1 \\ x_1 &= 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2 \end{aligned}$$

Ответ: решение системы линейных уравнений: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

Проведём *проверку решения* системы уравнений методом прямой подстановки. Для этого подставим найденный вектор неизвестных $\vec{x} = (2, 1, 3)$ в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 & + & 3 \cdot 1 & + & 1 \cdot 3 & = & 10 \\ 4 \cdot 2 & + & 5 \cdot 1 & + & 6 \cdot 3 & = & 31 \\ 3 \cdot 2 & + & 1 & + & 5 \cdot 3 & = & 22 \end{cases}$$

Проводим арифметические действия и получаем тождества для каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} 4 & + & 3 & + & 3 & = & 10 \\ 8 & + & 5 & + & 18 & = & 31 \\ 6 & + & 1 & + & 15 & = & 22 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10 & = & 10 \\ 31 & = & 31 \\ 22 & = & 22 \end{cases}$$

2 Интерполирование функций

2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ выбраны узлы интерполирования $\{x_i\}$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, в которых известны значения функции $y_i = f(x_i)$. Задача интерполирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен степени n

$$L_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

значения которого в заданных точках $\{x_i\}$, совпадают со значениями функции $\{y_i\}$ в этих точках.

Многочлен $L_n(x)$ должен удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_n(x_0) & = & y_0 \\ L_n(x_1) & = & y_1 \\ L_n(x_2) & = & y_2 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ L_n(x_n) & = & y_n \end{cases}$$

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполирования:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 + \dots + c_n(x) \cdot y_n$$

где $c_0(x), c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$ – неизвестные функции.

Из условий интерполирования:

$$\begin{cases} c_0(x_0) \cdot y_0 + c_1(x_0) \cdot y_1 + c_2(x_0) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_0) \cdot y_n & = & y_0 \\ c_0(x_1) \cdot y_0 + c_1(x_1) \cdot y_1 + c_2(x_1) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_1) \cdot y_n & = & y_1 \\ c_0(x_2) \cdot y_0 + c_1(x_2) \cdot y_1 + c_2(x_2) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_2) \cdot y_n & = & y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ c_0(x_n) \cdot y_0 + c_1(x_n) \cdot y_1 + c_2(x_n) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_n) \cdot y_n & = & y_n \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $c_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n:

$$\begin{cases} c_0(x) &=& \alpha_0 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_2) \cdot & \dots & \cdot (x - x_n) \\ c_1(x) &=& \alpha_1 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot & \dots & \cdot (x - x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n(x) &=& \alpha_n \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot & \dots & \cdot (x - x_{n-1}) \end{cases}$$

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $c_i(x)$:

$$\begin{cases} 1 &=& \alpha_0 \cdot (x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot (x_0 - x_2) \cdot & \dots & \cdot (x_0 - x_n) \\ 1 &=& \alpha_1 \cdot (x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot & \dots & \cdot (x_1 - x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 &=& \alpha_n \cdot (x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot (x_n - x_2) \cdot & \dots & \cdot (x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты $c_i(x)$ интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\begin{cases} c_0(x) &=& \dfrac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} \\ c_1(x) &=& \dfrac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n(x) &=& \dfrac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{cases}$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j\neq i}^{n}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}^{n}(x_i - x_j)} \cdot y_i$$

2.2 Пример интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих точках $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\prod\limits_{j\neq i}^{3}(x - x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}^{3}(x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 \;+ \\ + \; & \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 \;+ \\ + \; & \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 \;+ \\ + \; & \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и извест-

ными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.76-(-0.09))(-0.76-0.22)(-0.76-0.55)}\cdot 0.08 \; + \\
+ \quad & \frac{(x-(-0.76))(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.09-(-0.76))(-0.09-0.22)(-0.09-0.55)}\cdot 1.84 \; + \\
+ \quad & \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))(x-0.55)}{(0.22-(-0.76))(0.22-(-0.09))(0.22-0.55)}\cdot 0.40 \; + \\
+ \quad & \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))(x-0.22)}{(0.55-(-0.76))(0.55-(-0.09))(0.55-0.22)}\cdot 0.96
\end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифмитические действия:

$$\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)}\cdot 0.08 \; + \\
+ \quad & \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)}\cdot 1.84 \; + \\
+ \quad & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)}\cdot 0.40 \; + \\
+ \quad & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)}\cdot 0.96
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{-0.86}\cdot 0.08 \; + \\
+ \quad & \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{0.13}\cdot 1.84 \; + \\
+ \quad & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{-0.10}\cdot 0.40 \; + \\
+ \quad & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{0.28}\cdot 0.96
\end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & (x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)\cdot(-0.09) \quad + \\ + \quad & (x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)\cdot 13.84 \quad + \\ + \quad & (x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)\cdot(-3.99) \quad + \\ + \quad & (x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)\cdot 3.47 \end{aligned}$$

4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831\cdot x + 0.9119\cdot x^2 + 13.23\cdot x^3$$

5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (*сплошная линия*).

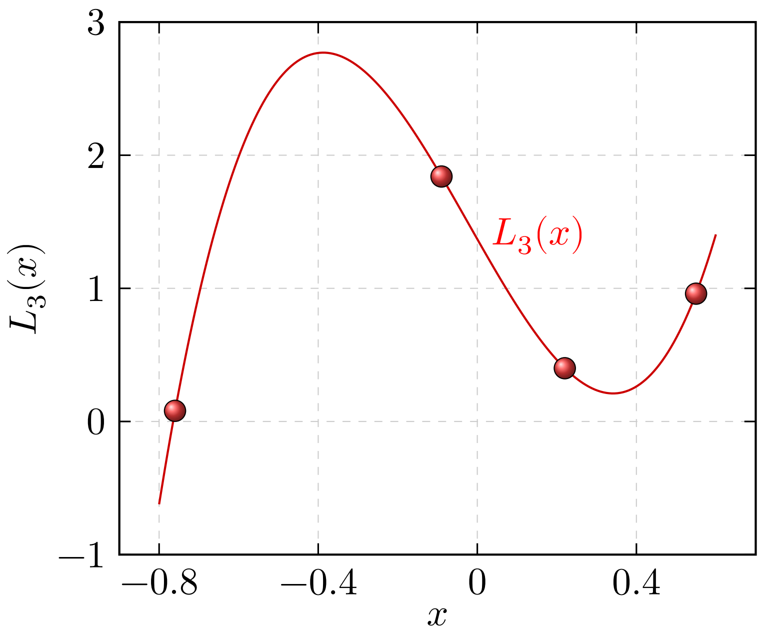

Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

3 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $\vec{x} = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество $\vec{x}$ состоит из отдельных точек $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если $\vec{x}$ есть отрезок $x_a < x < x_b$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени m вида:

$$p_m(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^{m} a_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения S полинома $p_m(x)$ от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(p_m(x_i) - y_i\right)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $S = S(a_0, a_1, \cdots, a_n)$, т.е. коэффициентов полинома a_i ($i = 0, 1, \dots, m$), которые необходимо подобрать так, чтобы величина S была наименьшей $S \to \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необходимо найти *положения минимума функции* многих переменных S.

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial S_m}{\partial a_0} = \frac{\partial S_m}{\partial a_1} = \frac{\partial S_m}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial S_m}{\partial a_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $a_0, a_1, a_2, \cdots a_m$ необходимо решить систему $m + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S_m}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot 1 = 0 \\ \dfrac{\partial S_m}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i = 0 \\ \dfrac{\partial S_m}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial S_m}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^m = 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений вида:

$$\mathbf{C} \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0m} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m0} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

относительно неизвестных коэффициентов полинома $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m\}$.

Если среди точек $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы не равен нулю. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, а полином $Q_m(x)$ с такими коэффициентами a_i будет обладать минимальным квадратичным отклонением $S_m = S_{min}$.

3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $Q_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$.

x_i	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30