СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Интерполирование функций

Задача интерполирования состоит в том, чтобы по известным значениям функции $f(x)$ в отдельных точках отрезка восстановить её значения в остальных точках этого отрезка. Такая постановка задачи допускает множество решений.

Например, задача интерполирования возникает, в том случае, когда известны результаты измерения $y_i = f(x_i)$ некоторой физической величины f в ограниченном количестве точек x_i ($i = 0, 1, \dots, n$), а требуется оценить значения этой величины в других точках.

Интерполирование используется также, когда вычисление значений $f(x)$ трудоемко, например, значение искомой функции может быть определено как решение сложной задачи, в которой x играет роль параметра. При этом можно вычислить небольшую таблицу значений функции, но прямое нахождение функции при большом числе значений аргумента практически затруднительно или нецелесообразно.

Пусть на отрезке $x \in [a, b]$ выбрана сетка $\{x_i\}$ (здесь $i = 0, 1, \dots, n$), в узлах которой известны значения функции $y_i = f(x_i)$. Задача интерполирования алгебраическими полиномами состоит в том, чтобы построить полином степени n

$$p_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot x^i \tag{1}$$

значения которого в заданных точках $\{x_i\}$, совпадают со значениями функции $\{y_i\}$ в этих точках.

Т.е. полином $p_n(x)$ должен удовлетворять условиям сопряжения:

$$\begin{cases} p_n(x_0) & = & y_0 \\ p_n(x_1) & = & y_1 \\ \dots\dots\dots\dots & & \\ p_n(x_n) & = & y_n \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot x_0^i & = & y_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot x_1^i & = & y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \cdot x_n^i & = & y_n \end{cases} \tag{2}$$

На основе условий (2) формулируется система линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, \dots, c_n$:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{y}, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ – квадратная матрица $(n+1) \times (n+1)$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{y}$ – вектор неизвестных коэффициентов полинома $p_n(x)$ и вектор значений функции $f(x)$ в заданных точках $\{x_i\}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Определитель системы (3) представляет собой определителем Вандермонда, который отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, если среди точек $\{x_i\}$ нет совпадающих, т.е. $x_i \neq x_j$ для всех $i, j = 0, 1, \dots, n$.

Таким образом, для определения коэффициентов интерполяционного полинома (1) необходимо найти решение системы линейных уравнений (3), любыми аналитическими, приближенными или численными методами, например, методом Гаусса.

1.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Решение системы (3) можно записать различным образом. Наиболее распространенная запись интерполяционного многочлена в форме Лагранжа и в форме Ньютона. Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен $L_n(x)$ в виде линейной комбинации значений функции $y(x)$ в узлах интерполирования:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + \dots + c_n(x) \cdot y_n = \sum_{i=0}^{n} c_i(x) \cdot y_i \tag{4}$$

где $c_0(x), c_1(x), \dots, c_n(x)$ – произвольные неизвестные функции.

Из условий интерполирования:

$$\begin{cases} c_0(x_0)\cdot y_0 + c_1(x_0)\cdot y_1 + \cdots + c_n(x_0)\cdot y_n &= y_0 \\ c_0(x_1)\cdot y_0 + c_1(x_1)\cdot y_1 + \cdots + c_n(x_1)\cdot y_n &= y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_0(x_n)\cdot y_0 + c_1(x_n)\cdot y_1 + \cdots + c_n(x_n)\cdot y_n &= y_n \end{cases}$$

Система уравнений имеет решение если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $c_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n:

$$\begin{cases} c_0(x) &= \alpha_0\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_2)\cdot \;\ldots\; \cdot(x-x_n) \\ c_1(x) &= \alpha_1\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot \;\ldots\; \cdot(x-x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n(x) &= \alpha_n\cdot(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot \;\ldots\; \cdot(x-x_{n-1}) \end{cases}$$

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $c_i(x)$:

$$\begin{cases} 1 &= \alpha_0\cdot(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_2)\cdot \;\ldots\; \cdot(x_0-x_n) \\ 1 &= \alpha_1\cdot(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot(x_1-x_3)\cdot \;\ldots\; \cdot(x_1-x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 1 &= \alpha_n\cdot(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot(x_n-x_2)\cdot \;\ldots\; \cdot(x_n-x_{n-1}) \end{cases}$$

Таким образом, коэффициенты $c_i(x)$ интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\begin{cases} c_0(x) &= \dfrac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot\cdots\cdot(x-x_n)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_0-x_n)} \\ c_1(x) &= \dfrac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)\cdot\ldots\cdot(x_1-x_n)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n(x) &= \dfrac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)\cdot(x_n-x_1)\cdot\ldots\cdot(x_n-x_{n-1})} \end{cases}$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа (4) имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{n} (x_i - x_j)} \cdot y_i \tag{5}$$

1.2 Интерполяция таблично заданной функции полином Лагранжа

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

i	0	1	2	3
x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих точках $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x - x_j)}{\prod\limits_{j \neq i}^{3} (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$
\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} \cdot y_0 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \cdot y_1 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \cdot y_2 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \cdot y_3
\end{aligned}
$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и известными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$
\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & \frac{(x-(-0.09))(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.76-(-0.09))(-0.76-0.22)(-0.76-0.55)} \cdot 0.08 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x-(-0.76))(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.09-(-0.76))(-0.09-0.22)(-0.09-0.55)} \cdot 1.84 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))(x-0.55)}{(0.22-(-0.76))(0.22-(-0.09))(0.22-0.55)} \cdot 0.40 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x-(-0.76))(x-(-0.09))(x-0.22)}{(0.55-(-0.76))(0.55-(-0.09))(0.55-0.22)} \cdot 0.96
\end{aligned}
$$

3) Проведем необходимые арифмитические действия:

$$
\begin{aligned}
L_3(x) = \quad & \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 \;\; + \\
+ \;\; & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96
\end{aligned}
$$

или

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & \frac{(x+0.09)(x-0.22)(x-0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 \; + \\ + \; & \frac{(x+0.76)(x-0.22)(x-0.55)}{0.13} \cdot 1.84 \; + \\ + \; & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 \; + \\ + \; & \frac{(x+0.76)(x+0.09)(x-0.22)}{0.28} \cdot 0.96 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned} L_3(x) = \quad & (x+0.09)(x-0.22)(x-0.55) \cdot (-0.09) \; + \\ + \; & (x+0.76)(x-0.22)(x-0.55) \cdot 13.84 \; + \\ + \; & (x+0.76)(x+0.09)(x-0.55) \cdot (-3.99) \; + \\ + \; & (x+0.76)(x+0.09)(x-0.22) \cdot 3.47 \end{aligned}$$

4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831 \cdot x + 0.9119 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия).

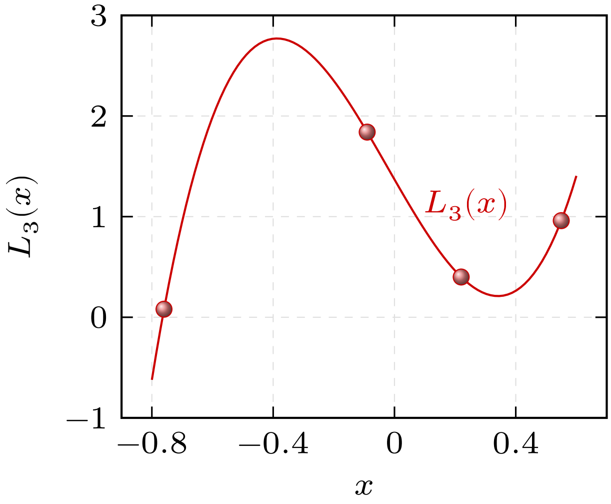

Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ.

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ.

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5,1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2,4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.