МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра материаловедения,
технологии и управления качеством

Синёв И.В., Симаков В.В.

МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

Учебное пособие

для студентов 2 курса
направления подготовки бакалавриата
22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов»,
профиля подготовки «Нанотехнологии, диагностика и синтез современных материалов»,
института физики

Саратов 2022

Авторы

Синёв Илья Владимирович – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры материаловедения, технологии и управления качеством, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

Симаков Вячеслав Владимирович – д.т.н., доцент, профессор кафедры материаловедения, технологии и управления качеством, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Численные методы являются основой решения комплексных задач, возникающих в ходе развития материаловедения и новейших областей техники и технологии. Использование ЭВМ при решении научных и технических задач позволяет провести детальное математическое моделирование процессов и систем, которое существенно сокращает потребность в натурных экспериментах, а в ряде случаев может их заменить.

Важным аспектом алгоритмов численных методов является гарантирование нахождения приближенного решения с заданной точностью за конечное число математических операций. При этом для численных методов характерна множественность возможных методов решения.

В пособии излагаются основы численных методов решения задач алгебры, математического анализа, оптимизации, обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены алгоритмы и возможности их применения для приближенного решения различных классов математических задач. В пособии изложен материал, необходимый студентам для приобретения навыков применения численных методов для решения задач теоретического и прикладного характера в области профессиональной деятельности. Наибольшее внимание уделяется фундаментальным разделам численных методов – численному решению систем линейных алгебраических уравнений, методам оптимизации и разностным методам решения задач математической физики.

Теоретический материал изложен сжато, но при этом большое внимание уделено рекомендациям по практическому применению рассмотренных алгоритмов. Изложение материала проиллюстрировано рядом примеров направленных на развитие практических навыков применения численных методов для решения конкретных задач. Предполагается, что при изучении данного курса студенты знакомы с основами высшей математики и владеют навыками программирования.

1 Аппроксимация функций

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $\boldsymbol{x} = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество $\boldsymbol{x}$ состоит из отдельных точек $\{x_0, x_1, x_2, ... x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если $\boldsymbol{x}$ есть отрезок $x \in [a, b]$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

В случае постановки задачи поиска аппроксимирующей функции, которая обеспечивает погрешность не хуже заданной, необходимо подбирать и структуру этой функции. Эта задача значительно сложнее предыдущей и подходы в её решении основываются на переборе различных функций $p_m(x)$ и сравнении мер близости результатов расчета с исходными данными.

1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$). В этом случае используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается обобщенный линейный полином порядка m вида:

$$p_m(x) = c_0 \cdot \phi_0(x) + c_1 \cdot \phi_1(x) + ... + c_m \cdot \phi_m(x) = \sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \cdot \phi_\ell(x), \qquad (1)$$

где $\{c_\ell\}$ – неизвестные коэффициенты полинома; $\{\phi_\ell(x)\}$ – система базисная функций, которая выбирается произвольно, исходля из специфики решаемой задачи.

В качестве меры отклонения $\|r\|$ полинома (1) от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^{n} \left(p_m(x_i) - y_i\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \cdot \phi_\ell(x_i) - y_i\right)^2 \qquad (2)$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $\|r\| = \rho(c_0, c_1, \dots, c_m)$, т.е. коэффициентов полинома $\{c_\ell\}$, которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей $\|r\| \to \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необходимо найти *положения минимума функции* многих переменных $\rho(c_0, c_1, \dots, c_m)$. Для этого определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial c_0} = \frac{\partial \rho}{\partial c_1} = \frac{\partial \rho}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \rho}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\frac{\partial \rho}{\partial c_k} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \cdot \phi_\ell(x_i) - y_i \right) \cdot \phi_k(x_i) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Изменяя порядок суммирование, последнее выражение можно записать в виде:

$$\sum_{\ell=0}^{m} c_\ell \cdot \left(\sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) \cdot \phi_\ell(x_i) \right) = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) \cdot y_i, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

где $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_k\}$ – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) \cdot \phi_\ell(x_i), \quad b_k = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \ldots, m$$

Если среди узлов сетки $\{x_i\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы не равен нулю $\det \mathbf{A} \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\boldsymbol{c} = \{c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m\}$, а полином $p_m(x)$ с такими коэффициентами $\{c_i\}$ будет обладать минимальным квадратичным отклонением $\rho_{\min}$.

Зная коэффициенты аппроксимирующего полинома, можно вычислить величину $\|r\|$, например, для сравнения различных аппроксимирующих функций.

Следует отметить, что все коэффициенты $\{c_i\}$ полинома (4) находятся из решения системы уравнений (3), т.е. они связаны между собой. Поэтому если какой-либо коэффициент c_i вследствие его малости ($c_i \approx 0$) отбросить, то необходимо *пересчитывать все оставшиеся коэффициенты* полинома $p_m(x)$.

Кроме того, при изменении даже одного значения исходных данных $\{x_i, y_i\}$ все коэффициенты полинома (4) изменят свои значения, так как они полностью определяются исходными данными. Поэтому при повторении аппроксимации с несколько изменившимися данными (например, вследствие погрешностей измерения, помех, влияния неучтенных факторов и т.п.) получится другая аппроксимирующая функция, отличающаяся коэффициентами.

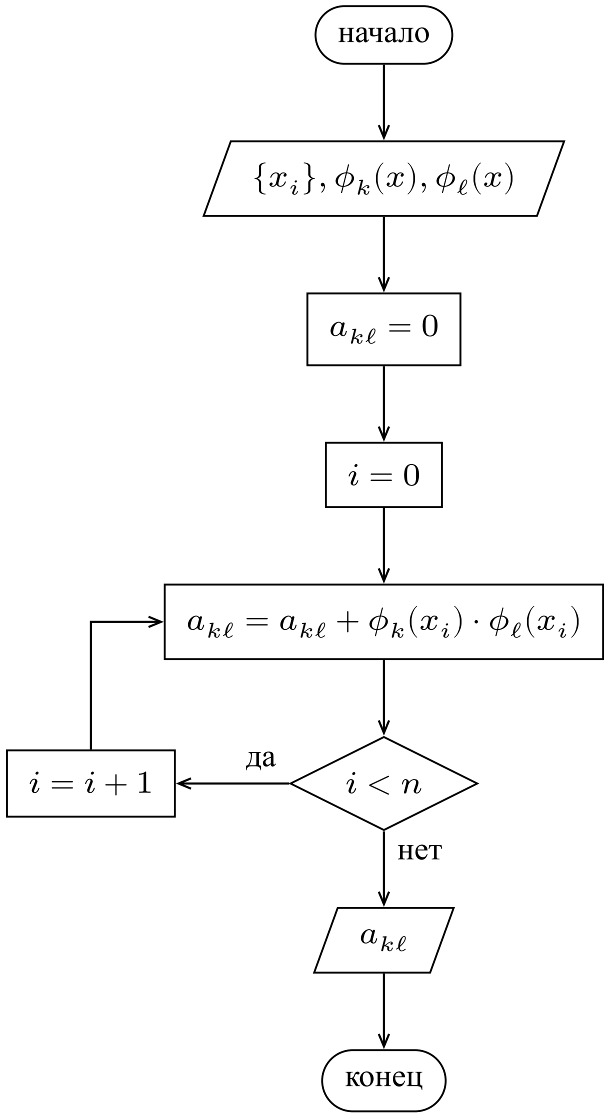

Рисунок 1 – Блок-схема алгоритма нахождения элементов матрицы **A**
$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) \cdot \phi_\ell(x_i)$$

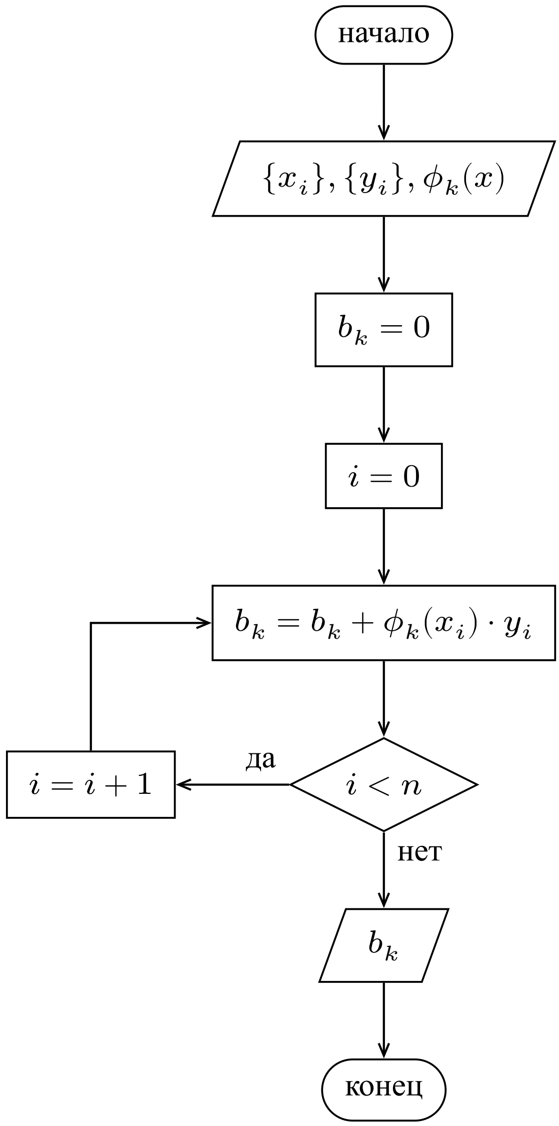

Рисунок 2 – Блок-схема алгоритма нахождения компонентов вектора правых частей системы уравнений $b_k = \sum_{i=0}^{n} \phi_k(x_i) \cdot y_i$

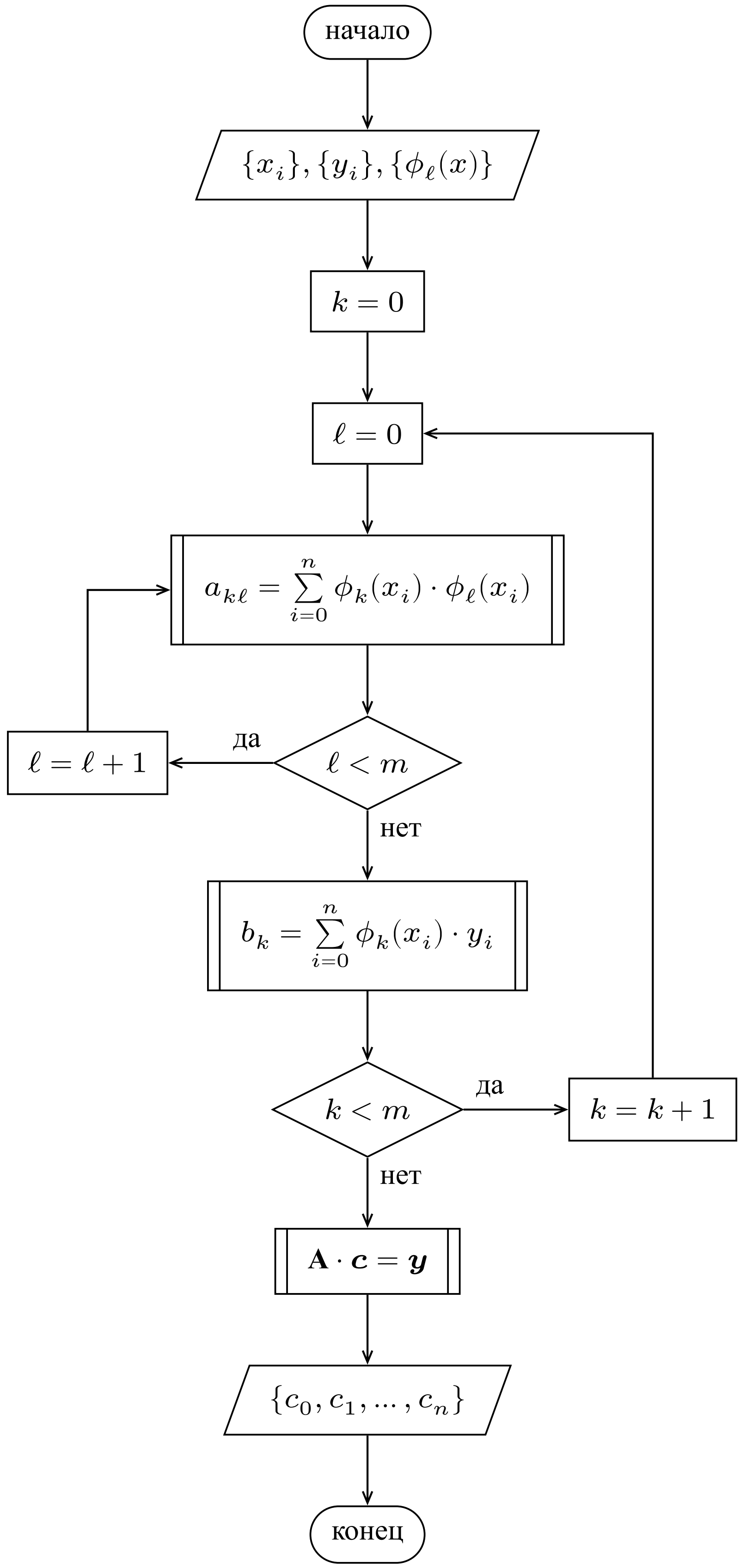

Рисунок 3 – Блок-схема алгоритма нахождения коэффициентов $\{c_i\}$ аппроксимирующего обобщенного линейного полинома $p_m(x)$

1.1.1 Аппроксимирование функций алгебраическими полиномами

Для аппроксимации функции алгебраическим полиномом используется точечный метод наименьших квадратов и рассматривается алгебраический полином степени m:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^{m} c_j \cdot x^j. \tag{4}$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial c_0} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \ldots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot 1 & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c_1} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \ldots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c_2} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \ldots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^2 & = & 0 \\ \dots. & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c_m} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \ldots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^m & = & 0 \end{cases}$$

Следовательно, задача точечной квадратичной аппроксимации функции алгебраическими полиномами сводится к решению системы линейных уравнений вида (3) относительно неизвестных коэффициентов полинома. Элементы матрицы системы уравнений и правые части определяются из соотношений:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

1.2 Аппроксимирование функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию $\{y_i\}$, заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени $p_2(x)$:

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

1) Построим меру отклонения полинома $p_2(x)$ от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\|r\| = \rho(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=0}^{4} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i\right)^2,$$

   где $y_i = f(x_i)$ – значение функции в точке x_i.

2) Запишем меру отклонения $\rho(c_0, c_1, c_2)$ в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned}\rho(c_0, c_1, c_2) = &\left(c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15\right)^2 + \\ &\left(c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39\right)^2 + \\ &\left(c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10\right)^2 + \\ &\left(c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71\right)^2 + \\ &\left(c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30\right)^2\end{aligned}$$

3) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_0 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial c_0} = &2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ &2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ &2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ &2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ &2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы $\mathbf{A}$ и первый элемент вектора $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}
a_{00} &= 1+1+1+1+1 = 5 \\
a_{01} &= (-0.76)+(-0.48)+(-0.09)+(0.22)+(0.55) = -0.56 \\
a_{02} &= (-0.76)^2+(-0.48)^2+(-0.09)^2+(0.22)^2+(0.55)^2 = 1.18 \\
b_0 &= 5.15+4.39+4.10+5.71+5.30 = 24.65
\end{aligned}$$

4) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_1 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial c_1} =& 2\cdot(c_0 + c_1\cdot(-0.76) + c_2\cdot(-0.76)^2 - 5.15)\cdot(-0.76) + \\
& 2\cdot(c_0 + c_1\cdot(-0.48) + c_2\cdot(-0.48)^2 - 4.39)\cdot(-0.48) + \\
& 2\cdot(c_0 + c_1\cdot(-0.09) + c_2\cdot(-0.09)^2 - 4.10)\cdot(-0.09) + \\
& 2\cdot(c_0 + c_1\cdot(0.22) + c_2\cdot(0.22)^2 - 5.71)\cdot(0.22) + \\
& 2\cdot(c_0 + c_1\cdot(0.55) + c_2\cdot(0.55)^2 - 5.30)\cdot(0.55) = 0
\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы $\mathbf{A}$ и второй элемент вектора $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}
c_{10} &= (-0.76)+(-0.48)+(-0.09)+(0.22)+(0.55) = -0.56 \\
c_{11} &= (-0.76)^2+(-0.48)^2+(-0.09)^2+(0.22)^2+(0.55)^2 = 1.18 \\
c_{12} &= (-0.76)^3+(-0.48)^3+(-0.09)^3+(0.22)^3+(0.55)^3 = -0.38 \\
b_1 &= 5.15\cdot(-0.76)+4.39\cdot(-0.48)+4.10\cdot(-0.09) + \\
& \quad 5.71\cdot(0.22)+5.30\cdot(0.55) = -2.24
\end{aligned}$$

5) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_2 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial c_2} =& 2\cdot(c_0 + c_1\cdot(-0.76) + c_2\cdot(-0.76)^2 - 5.15)\cdot(-0.76)^2 + \\
& +2\cdot(c_0 + c_1\cdot(-0.48) + c_2\cdot(-0.48)^2 - 4.39)\cdot(-0.48)^2 + \\
& +2\cdot(c_0 + c_1\cdot(-0.09) + c_2\cdot(-0.09)^2 - 4.10)\cdot(-0.09)^2 + \\
& +2\cdot(c_0 + c_1\cdot(0.22) + c_2\cdot(0.22)^2 - 5.71)\cdot(0.22)^2 + \\
& +2\cdot(c_0 + c_1\cdot(0.55) + c_2\cdot(0.55)^2 - 5.30)\cdot(0.55)^2 = 0
\end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы $\mathbf{A}$ и третий элемент вектора $\boldsymbol{b}$:

$$
\begin{aligned}
c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\
c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\
c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\
b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\
&\quad 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94
\end{aligned}
$$

6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов c_0, c_1, c_2 аппроксимирующего полинома $p_2(x)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$
\begin{pmatrix} 5 & -0.56 & 1.18 \\ -0.56 & 1.18 & -0.38 \\ 1.18 & -0.38 & 0.49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.65 \\ -2.24 \\ 5.94 \end{pmatrix}
$$

7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$
\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}
$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$
p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2 \tag{5}
$$

8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений аппроксимирующего алгебраического полинома второго порядка $p_2(x)$ (сплошная линия).

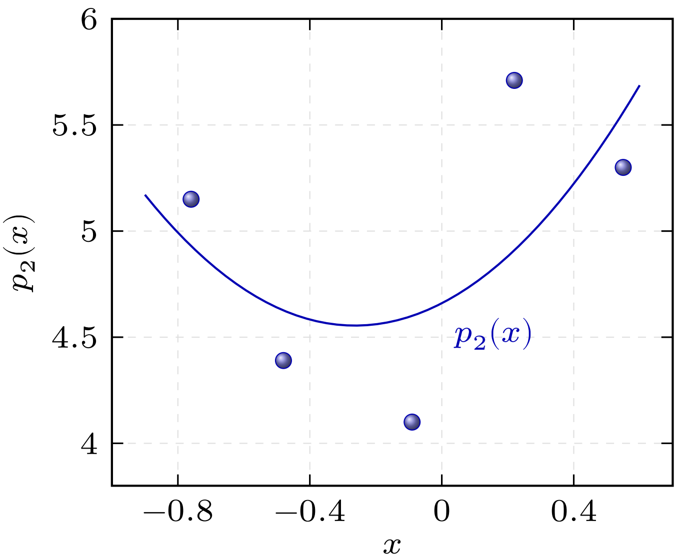

Рисунок 4 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома $p_2(x)$ (сплошная линия)

9) Рассчитаем значения аппроксимирующего полинома (5) и ошибку аппроксимации таблично заданной функции в узлах сетки $\{x_i\}$ (таблица 2):

$$\epsilon_i = y_i - p_2(x_i) \tag{6}$$

Таблица 2 – Рассчитанные значения аппроксимирующего полинома $p_2(x)$

i	0	1	2	3	4
x_i	−0.76	−0.48	−0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30
$p_2(x_i)$	4.93	4.63	4.60	4.91	5.56
ϵ_i	0.22	−0.24	−0.50	0.80	−0.26

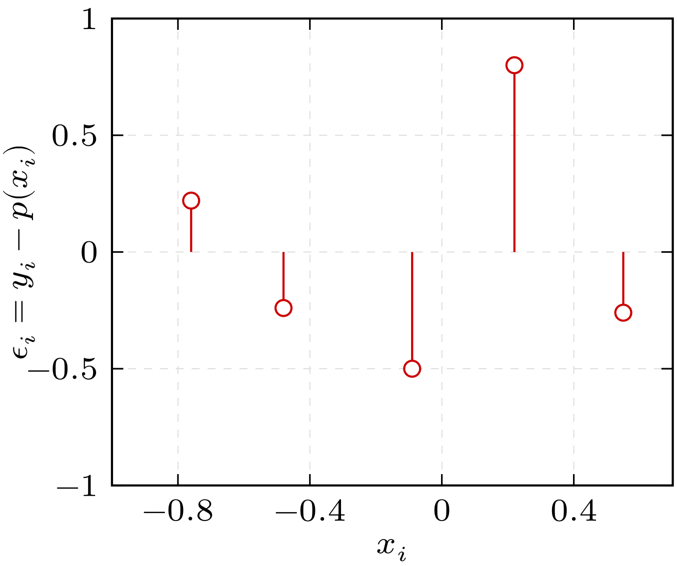

Рисунок 5 – Ошибка аппроксимации полином $p(x)$ функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$

10) Рассчитаем среднее квадратичное отклонение δ полинома (5) от значений функции $\{y_i\}$ в узлах сетки $\{x_i\}$:

$$\delta = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i^2 = \frac{0.05 + 0.06 + 0.25 + 0.64 + 0.07}{5} = 0.213, \tag{7}$$

где $n = 5$ – количество узлов сетки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. – 288 с.

2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. – 432 с.

3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 208 с.

4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. – СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.

5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 511 с.

6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 368 с.

7 Список математических символов LaTeX –URL: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mathematical_symbols_by_subject

8 Бояршинов, М. Г. Вычислительные методы алгебры и анализа: учебное пособие / М. Г. Бояршинов. – Саратов : Вузовское образование, 2020. – 225 с. – ISBN 978-5-4487-0687-5. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/93065.html (дата обращения: 30.01.2022). – Режим до-ступа: для авторизир. пользователей. - DOI: https://doi.org/10.23682/93065

9 Олейникова, С. А. Численные методы решения оптимизационных задач: учебное пособие / С. А. Олейникова. – Воронеж : Воронежский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2021. – 114 с. – ISBN 978-5-7731-0960-0. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/118626.html (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей

10 Гарифуллин, М. Ф. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений / М. Ф. Гарифуллин. – Москва : Техносфера,

2020. – 192 с. – ISBN 978-5-94836-597-8. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/99103.html (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей

11 Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации: учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 178 c. – ISBN 978-5-4497-1383-4. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/116448.html (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей

12 Рутта, Н. А. Методы и модели принятия оптимальных решений в экономике: учебное пособие для бакалавров / Н. А. Рутта. – Москва : Ай Пи Ар Медиа, 2022. – 87 c. – ISBN 978-5-4497-1534-0. – Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/118015.html (дата обращения: 30.01.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей