

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Аппроксимация функция .....	4
1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций. ....	4
1.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$ . ....	6
2 Численное дифференцирование .....	10
2.1 Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$ .....	11
2.2 Вторая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$ .....	12
2.3 Численного дифференцирование функции заданной таблично .....	12
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	22
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	23

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию  $f(x)$  необходимо заменить обобщенным полиномом  $p_m(x)$  заданного порядка  $m$  так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции  $f(x)$  от обобщенного полинома  $p_m(x)$  на указанном множестве  $\vec{x} = \{x\}$  было наименьшим. При этом полином  $p_m(x)$  в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество  $\vec{x}$  состоит из отдельных точек  $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (узлов), то приближение называется *точечным*. Если  $\vec{x}$  есть отрезок  $x_a < x < x_b$ , то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

### 1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок  $m$  приближающего полинома  $p_m(x)$  меньше числа узлов аппроксимации  $m < n$ , в которых известно значение функции  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени  $m$  вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения  $\|r\|$  полинома  $p_m(x)$  от известной функции  $y(x)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных  $\|r\| = g(c_0, c_1, \dots, c_m)$ , т.е. коэффициентов полинома  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей  $\|r\| \rightarrow \min$ . Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома  $p_m(x)$ , необ-

ходимо найти *положения минимума функции* многих переменных  $\|r\|$ .

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_1} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$  необходимо решить систему  $m + 1$  уравнений с  $m + 1$  неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \|r\|}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots\dots\dots = \dots\dots\dots = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома  $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$ :

$$\mathbf{A} \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$  и  $\vec{b} = \{b_k\}$  – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Если среди узлов сетки  $\{x_i\}$  нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации  $m < n$ , то определитель системы

не равен нулю  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Следовательно, эта система имеет единственное решение  $\{\check{c}_0, \check{c}_1, \check{c}_2, \dots, \check{c}_m\}$ , а полином  $p_m(x)$  с такими коэффициентами  $\check{c}_i$  будет обладать минимальным квадратичным отклонением  $\|r\|_{\min}$ .

## 1.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости  $y(x)$ :

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость  $y_i = f(x_i)$

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	−0.76	−0.48	−0.09	0.22	0.55
$y_i$	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию  $\{y_i\}$ , заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени  $p_2(x)$ :

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

- 1) Построим меру отклонения полинома  $p_2(x)$  от таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ :

$$\|r\| = \sum_{i=0}^4 (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где  $y_i = f(x_i)$  – значение функции в точке  $x_i$ .

- 2) Запишем меру отклонения  $\|r\|$  в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} \|r\| = & (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- 3) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_0$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы  $\mathbf{A}$  и первый элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}a_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ a_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ a_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ b_0 &= 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65\end{aligned}$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_1$  и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c_1} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы  $\mathbf{A}$  и второй элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ b_1 &= 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24\end{aligned}$$

- 5) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_2$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0 \end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы  $\mathbf{A}$  и третий элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned} c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\ b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ & 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94 \end{aligned}$$

- 6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов  $c_0, c_1, c_2$  аппроксимирующего полинома  $p_2(x)$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot c_0 - 0.56 \cdot c_1 + 1.18 \cdot c_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot c_0 + 1.18 \cdot c_1 - 0.38 \cdot c_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot c_0 - 0.38 \cdot c_1 + 0.49 \cdot c_2 = 5.94 \end{cases}$$

- 7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

- 8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и результаты вычислений ап-

проксимирующего алгебраического полинома второго порядка  $p_2(x)$  (сплошная линия).

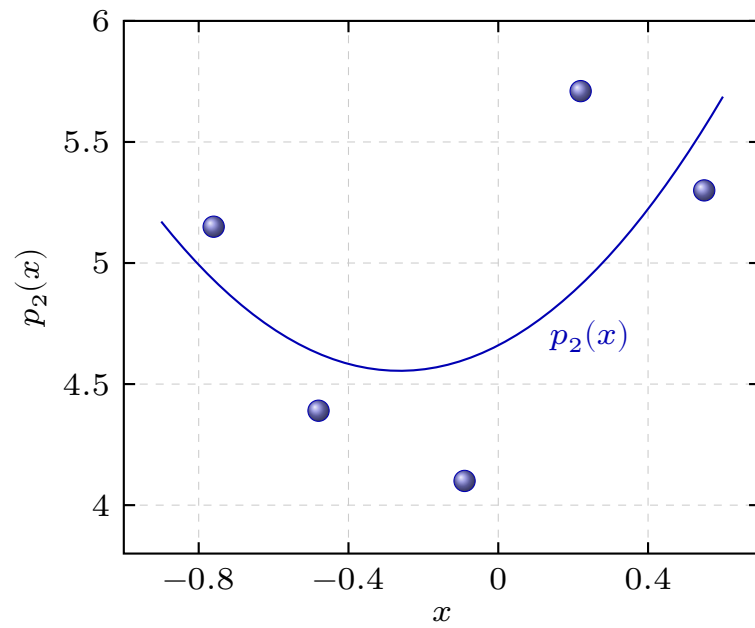


Рисунок 1 – График таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома  $p_2(x)$  (сплошная линия)



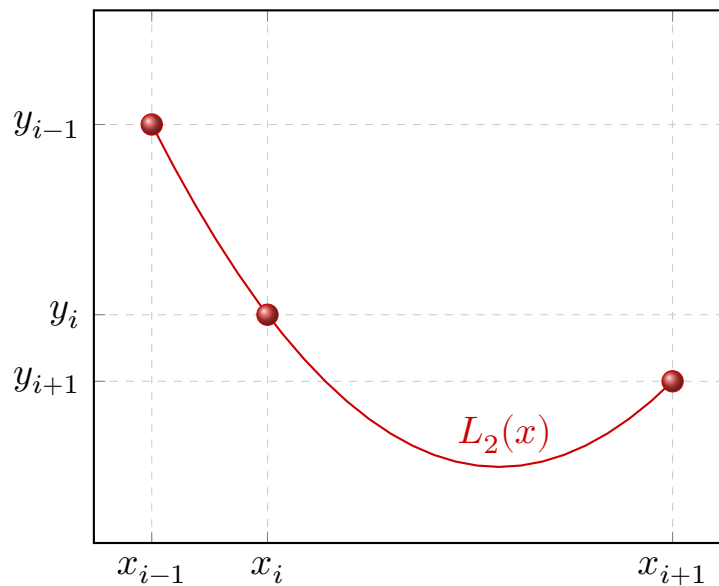
## 2 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции  $y(x)$  по заданным в конечном числе точек  $\{x_i\}$  значениям этой функции.

Численное дифференцирование применяется, если функцию  $y(x)$  трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию  $y(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа  $L_n(x)$  и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку  $\{x_i\}$  и проведем интерполирование функции  $y(x)$  в узлах сетки  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая  $y(x) \approx L_2(x)$  для  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ :



$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

где  $y_{i-1} = y(x_{i-1})$ ,  $y_i = y(x_i)$ ,  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  – значение функции  $y(x)$  в узлах сетки.

## 2.1 Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$

Первая производная многочлена Лагранжа  $L_2(x)$ :

$$\begin{aligned}
L'_2(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение  $f'(x)$  в любой точке  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

Например, в точке  $x = x_i$  первая производная от функции  $f(x)$  приближенно равна:

$$f'(x_i) \approx L'_2(x_i) = -\frac{h_{i+1}}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \frac{h_i}{(h_{i+1} + h_i) \cdot h_{i+1}} \cdot y_{i+1}$$

На *равномерной сетке*  $\{x_i\}$  расстояние между соседними узлами одинаковое  $h_i = h$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) и выражение для первой производной в точке  $x = x_i$  упрощается:

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

## 2.2 Вторая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$

Вторая производная многочлена Лагранжа  $L_2(x)$ :

$$L_2''(x) = \frac{2}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} - \frac{2}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \frac{2}{(h_{i+1} + h_i) \cdot h_{i+1}} \cdot y_{i+1},$$

величину которой можно принять за приближенное значение второй производной функции  $f''(x)$  в любой точке  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

На *равномерной сетке* выражение для второй производной  $f''(x)$  на отрезке  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$  упрощается:

$$L_2''(x) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где  $h$  – шаг сетки (расстояние между соседними узлами).

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков  $f^{(n)}(x)$  уже недостаточно многочлена Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ . Поэтому необходимо использовать многочлены более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов, участвующих в аппроксимации.

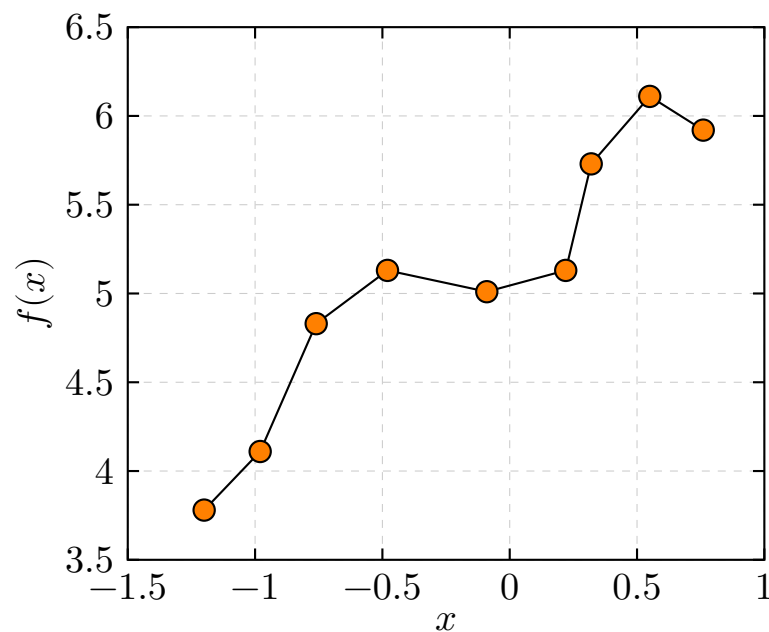
Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации зависит как от порядка интерполяционного многочлена, так и от расположения узлов интерполирования.

## 2.3 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки)  $\{x_i\}$  в которых определены значения функции  $\{f(x_i)\}$ :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	-1,2	-0,98	-0,76	-0,48	-0,09	0,22	0,32	0,55	0,76
$f(x_i)$	3,78	4,11	4,83	5,13	5,01	5,13	5,73	6,11	5,92

- 1) Построим график функции  $f(x)$  заданной таблично.



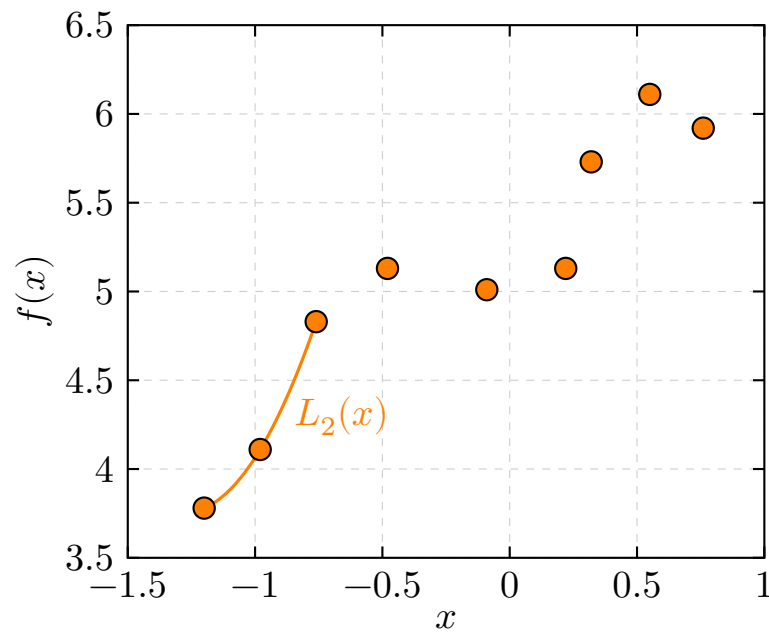
- 2) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_0 < x_1 < x_2\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

$i$	0	1	2	...
$x_i$	-1,2	-0,98	-0,76	...
$f(x_i)$	3,78	4,11	4,83	...

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0,98))(x - (-0,76))}{(-1,20 - (-0,98))(-1,20 - (-0,76))} \cdot 3,78 + \\
 & + \frac{(x - (-1,20))(x - (-0,76))}{(-0,98 - (-1,20))(-0,98 - (-0,76))} \cdot 4,11 + \\
 & + \frac{(x - (-1,20))(x - (-0,98))}{(-0,76 - (-1,20))(-0,76 - (-0,98))} \cdot 4,83
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[-1, 2; -0, 76]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 4,028925620 \cdot x^2 + 10,28305785 \cdot x + 10,31801653$$



Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_1 = -0,98$ :

$$f'(-0,98) \approx L'_2(-0,98) = 2,386363635$$

$$f''(-0,98) \approx L''_2(-0,98) = 8,057851240$$

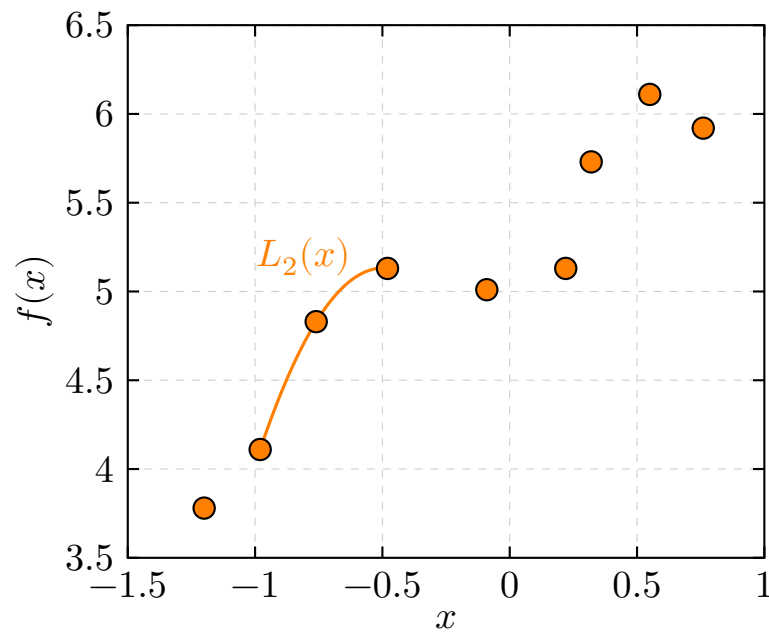
- 3) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_1 < x_2 < x_3\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

$i$	...	1	2	3	...
$x_i$	...	-0,98	-0,76	-0,48	...
$f(x_i)$	...	4,11	4,83	5,13	...

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0,76))(x - (-0,48))}{(-0,98 - (-0,76))(-0,98 - (-0,48))} \cdot 4,11 + \\
 & + \frac{(x - (-0,98))(x - (-0,48))}{(-0,76 - (-0,98))(-0,76 - (-0,48))} \cdot 4,83 + \\
 & + \frac{(x - (-0,98))(x - (-0,76))}{(-0,48 - (-0,98))(-0,48 - (-0,76))} \cdot 5,13
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[-0,98; -0,48]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_2 = -0,76$ :

$$f'(-0,76) \approx L'_2(-0,76) = 2,304155844$$

$$f''(-0,76) \approx L''_2(-0,76) = -8,805194780$$

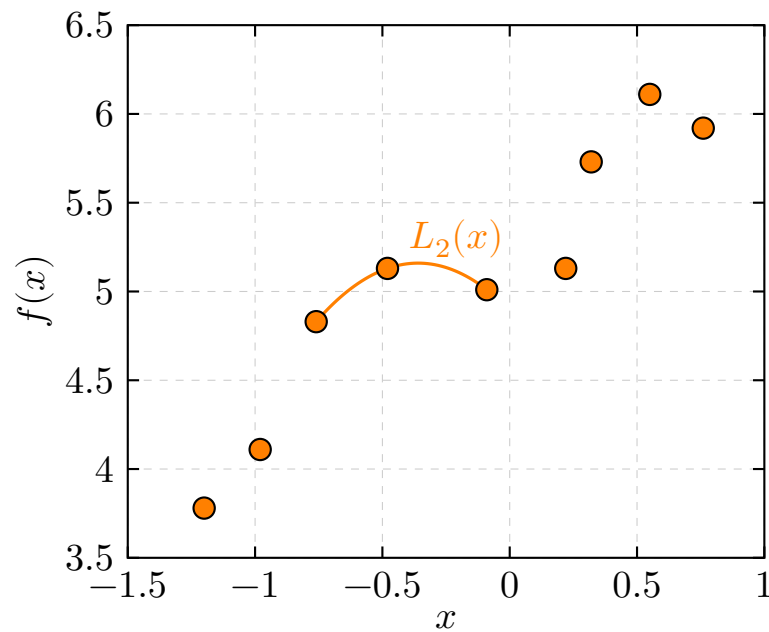
- 4) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_2 < x_3 < x_4\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

$i$	...	2	3	4	...
$x_i$	...	-0,76	-0,48	-0,09	...
$f(x_i)$	...	4,83	5,13	5,01	...

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0,48))(x - (-0,09))}{(-0,76 - (-0,48))(-0,76 - (-0,09))} \cdot 4,83 + \\
 & + \frac{(x - (-0,76))(x - (-0,09))}{(-0,48 - (-0,76))(-0,48 - (-0,09))} \cdot 5,13 + \\
 & + \frac{(x - (-0,76))(x - (-0,48))}{(-0,09 - (-0,76))(-0,09 - (-0,48))} \cdot 5,01
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[-0,76; -0,09]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_3 = -0,48$ :

$$f'(-0,48) \approx L'_2(-0,48) = 0,495079546$$

$$f''(-0,48) \approx L''_2(-0,48) = -4,116778740$$

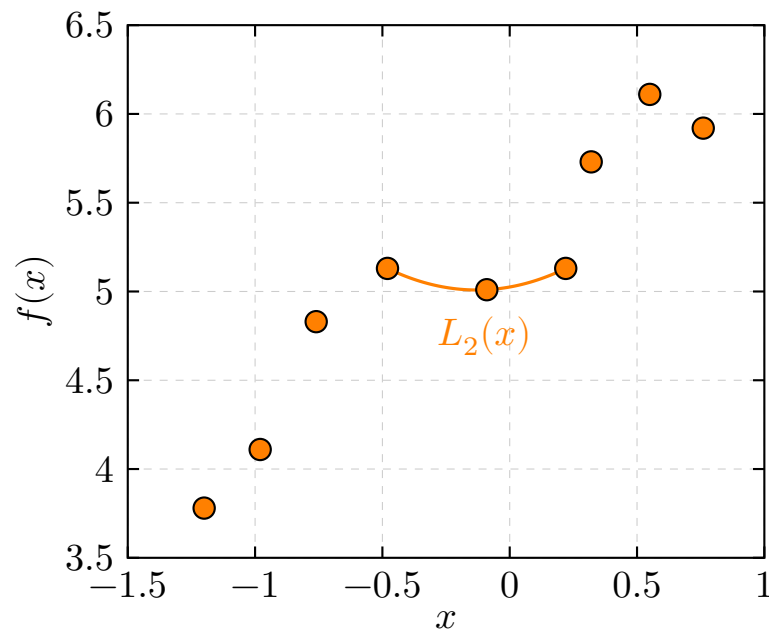
- 5) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_3 < x_4 < x_5\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

$i$	...	3	4	5	...
$x_i$	...	-0,48	-0,09	0,22	...
$f(x_i)$	...	5,13	5,01	5,13	...

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0,09))(x - 0,22)}{(-0,48 - (-0,09))(-0,48 - 0,22)} \cdot 5,13 + \\
 & + \frac{(x - (-0,48))(x - 0,22)}{(-0,09 - (-0,48))(-0,09 - 0,22)} \cdot 5,01 + \\
 & + \frac{(x - (-0,48))(x - (-0,09))}{(0,22 - (-0,48))(0,22 - (-0,09))} \cdot 5,13
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[-0,48; 0,22]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 0,9925558300 \cdot x^2 + 0,2580645177 \cdot x + 5,025186105$$



Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_4 = -0,09$ :

$$f'(-0,09) \approx L'_2(-0,09) = 0,0794044683$$

$$f''(-0,09) \approx L''_2(-0,09) = 1,985111660$$

- 6) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_4 < x_5 < x_6\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

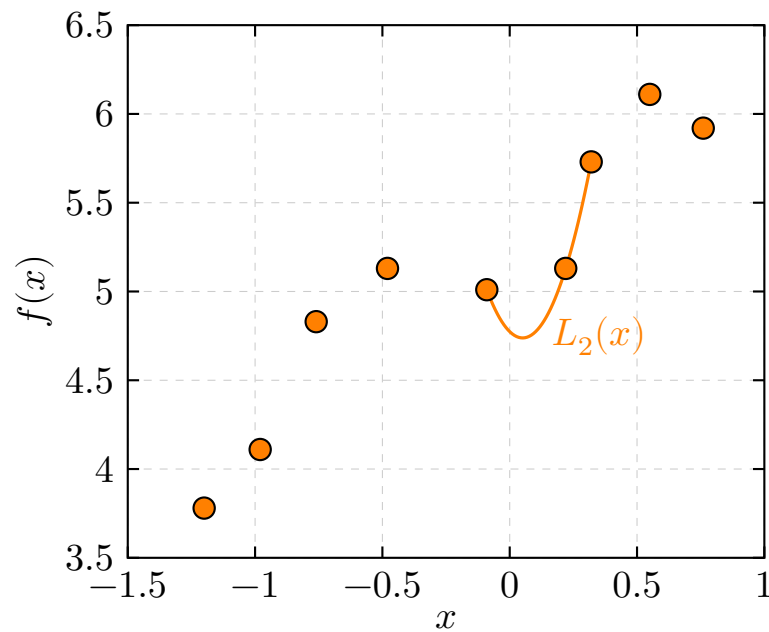
$i$	...	4	5	6	...
$x_i$	...	-0,09	0,22	0,32	...
$f(x_i)$	...	5,01	5,13	5,73	...

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - 0,22)(x - 0,32)}{(-0,09 - 0,22)(-0,09 - 0,32)} \cdot 5,01 + \\
 & + \frac{(x - (-0,09))(x - 0,32)}{(0,22 - (-0,09))(0,22 - 0,32)} \cdot 5,13 + \\
 & + \frac{(x - (-0,09))(x - 0,22)}{(0,32 - (-0,09))(0,32 - 0,22)} \cdot 5,73
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[-0,09; 0,32]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 13,69000778 \cdot x^2 - 1,392604236 \cdot x + 4,773776556$$





Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_5 = 0,22$ :

$$f'(0,22) \approx L'_2(0,22) = 4,630999187$$

$$f''(0,22) \approx L''_2(0,22) = 27,38001556$$

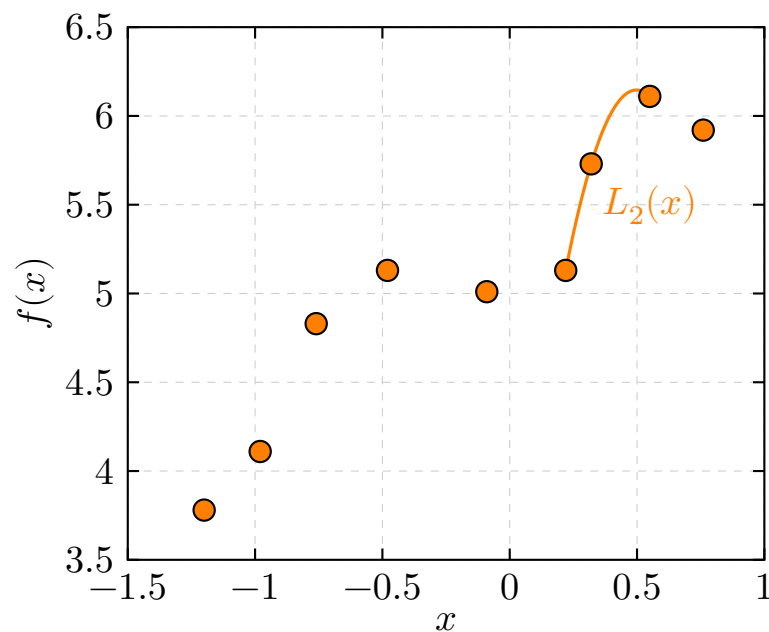
- 7) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_5 < x_6 < x_7\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

$i$	...	5	6	7	...
$x_i$	...	0,22	0,32	0,55	...
$f(x_i)$	...	5,13	5,73	6,11	...

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - 0,32)(x - 0,55)}{(0,22 - 0,32)(0,22 - 0,55)} \cdot 5,13 + \\
 & + \frac{(x - 0,22)(x - 0,55)}{(0,32 - 0,22)(0,32 - 0,55)} \cdot 5,73 + \\
 & + \frac{(x - 0,22)(x - 0,32)}{(0,55 - 0,22)(0,55 - 0,32)} \cdot 6,11
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[0,22; 0,55]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -13,17523062 \cdot x^2 + 13,11462456 \cdot x + 2,882463758$$



Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_6 = 0,32$ :

$$f'(0,32) \approx L'_2(0,32) = 4,682476963$$

$$f''(0,32) \approx L''_2(0,32) = -26,35046124$$

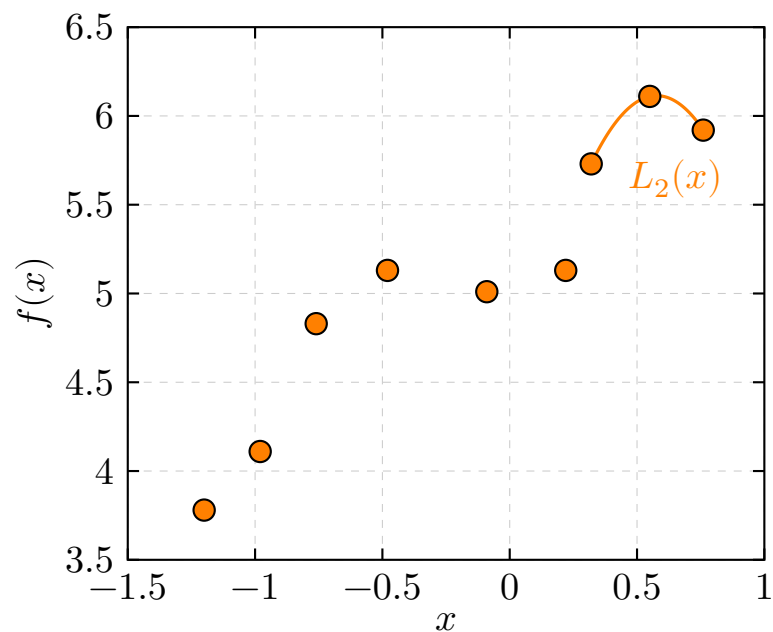
- 8) Аппроксимацию функции  $f(x)$  в узлах  $\{x_6 < x_7 < x_8\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные:

$i$	...	6	7	8
$x_i$	...	0,32	0,55	0,76
$f(x_i)$	...	5,73	6,11	5,92

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - 0,55)(x - 0,76)}{(0,32 - 0,55)(0,32 - 0,76)} \cdot 5,73 + \\
 & + \frac{(x - 0,32)(x - 0,76)}{(0,55 - 0,32)(0,55 - 0,76)} \cdot 6,11 + \\
 & + \frac{(x - 0,32)(x - 0,55)}{(0,76 - 0,32)(0,76 - 0,55)} \cdot 5,92
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[0,32; 0,76]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -5,811217790 \cdot x^2 + 6,707933391 \cdot x + 4,178530017$$



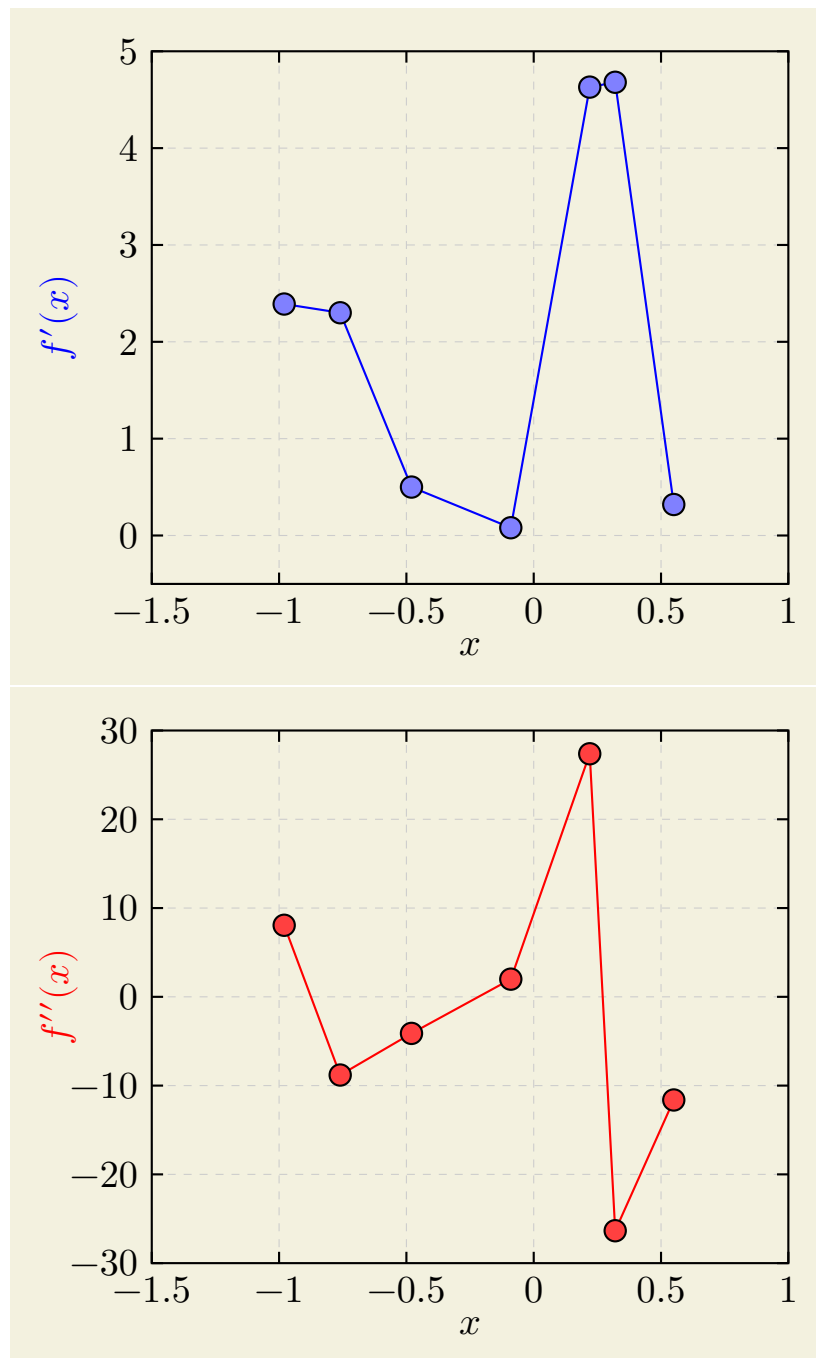
Определим первую и вторую производную функции  $f(x)$  в точке  $x_7 = 0,55$ :

$$f'(0,55) \approx L'_2(0,55) = 0,315593822$$

$$f''(0,55) \approx L''_2(0,55) = -11,62243558$$

- 9) Таким образом, определены значения первой  $f'(x_i)$  и второй  $f''(x_i)$  производной функции  $f(x)$  в каждом внутреннем узле сетки  $\{x_i\}$ :

$x$	-0,98	-0,76	-0,48	-0,09	0,22	0,32	0,55
$f'(x)$	2,39	2,30	0,50	0,08	4,63	4,68	0,32
$f''(x)$	8,06	-8,81	-4,12	1,99	27,38	-26,35	-11,62



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.