

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений .....	4
1.1 Виды краевых условий .....	5
1.2 Построение разностных схем методом баланса .....	6
1.2.1 Физическая интерпретация краевых задач .....	8

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Исследование большого круга естественно-научных и инженерных проблем приводит к математическим задачам, относящимся к решению дифференциальных уравнений и граничных проблем для них, интегральных и других функциональных уравнений.

В практике чаще всего встречаются задачи, для которых точное решение не может быть найдено или оно имеет невысокую эффективность. Поэтому приближенные методы решения задач граничных задач, например, задач математической физики, в особенности метод сеток получили широкое распространение.

Основные *достоинства приближенных методов* заключаются в том, что они являются *универсальными и эффективными*, так как позволяют находить приближенное решение для широкого класса задач новейших областей науки, техники и технологий. Как правило, такие задачи формулируются в виде основного дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) и дополнительных (граничных) условий, которые обеспечивают существование и единственность решения.

Под краевой (граничной) задачей понимают задачу о нахождении решения дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений), удовлетворяющего краевым условиям на границе рассматриваемой области.

В каждой краевой задаче искомое решение должно удовлетворять дифференциальному в рассматриваемой области  $\Omega$ , а также некоторому дополнительному условию на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$ . Например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = f \left( x, y, \frac{dy(x)}{dx} \right), \quad (1)$$

где  $y(x)$  – искомая неизвестная функция;  $x$  – независимое переменное;  $f$  – функция, определенная в некоторой замкнутой области  $\Omega$  изменения своих аргументов.

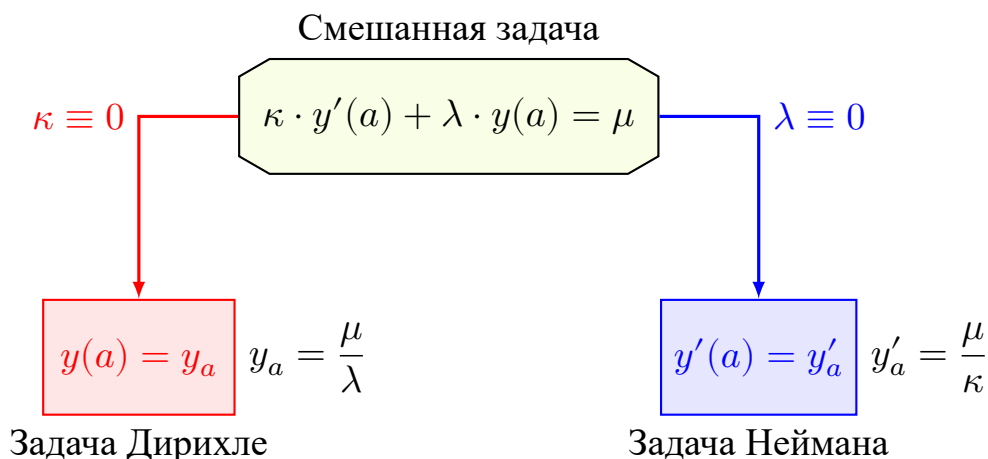


Рисунок 1 – Виды краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка

### 1.1 Виды краевых условий

В зависимости от вида краевого условия на границе  $\Sigma = \{a, b\}$  различают три основных типа граничных задач: задачу Дирихле, Неймана и смешанную краевую задачу (таблица 1). Необходимо отметить, что в отличие от задачи Коши, для которой при выполнении определенных условий гарантируется существование и единственность решения, *краевая задача* для того же дифференциального уравнения *может не иметь решения* или иметь несколько решений (в том числе и бесконечное множество решений).

Таблица 1 – Основные виды краевых условий для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1)

№	Краевое условие	Граница $x = a$	Граница $x = b$
1	Дирихле	$y(a) = y_a$	$y(b) = y_b$
2	Неймана	$y'(a) = y'_a$	$y'(b) = y'_b$
3	Смешанная	$\kappa_a \cdot y'(a) + \lambda_a \cdot y(a) = \mu_a$	$\kappa_b \cdot y'(b) + \lambda_b \cdot y(b) = \mu_b$

С формальной точки зрения, задача Дирихле и Неймана являются частными случаями смешанной краевой задачи (рисунок 1): например, если  $\kappa_a \equiv 0$ ,

то смешанная краевая задача трансформируется в задачу Дирихле:

$$0 \cdot y'(a) + \lambda_a \cdot y(a) = \mu_a, \quad \Rightarrow \quad y(a) = \frac{\mu_a}{\lambda_a} = y_a,$$

а если полагать  $\lambda_a \equiv 0$ , то формулируется задача Неймана:

$$\kappa_a \cdot y'(a) + 0 \cdot y(a) = \mu_a, \quad \Rightarrow \quad y'(a) = \frac{\mu_a}{\kappa_a} = y'_a.$$

Поэтому для общности, далее будем рассматривать только смешанную краевую задачу.

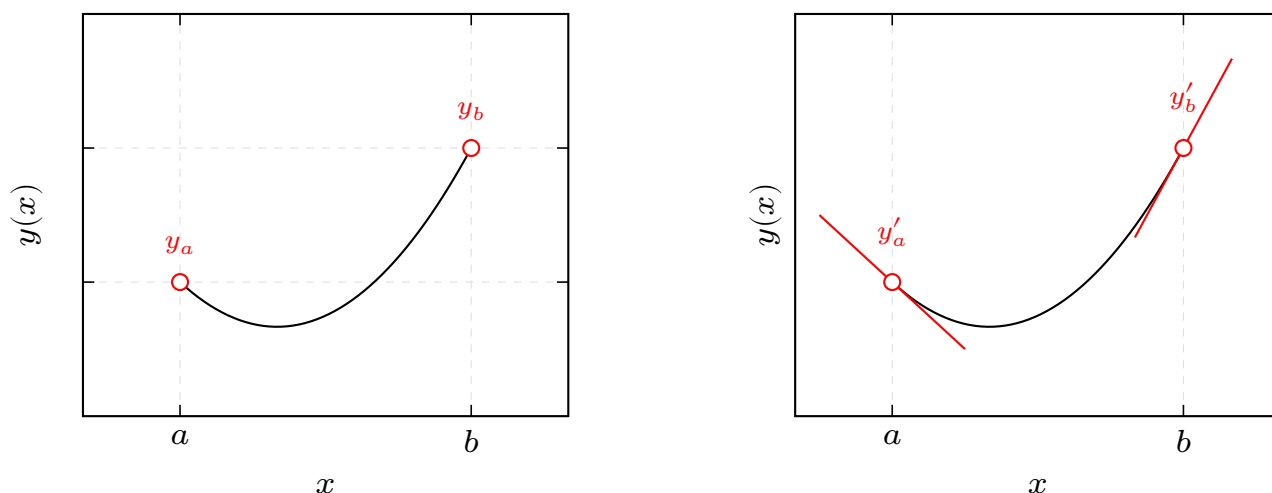


Рисунок 2 – Графическая иллюстрация постановки краевых задач  
(a) – Дирихле; (b) – Неймана

## 1.2 Построение разностных схем методом баланса

Различные физические процессы (теплопроводности или диффузии, колебаний, газодинамики и т. д.) характеризуются некоторыми интегральными законами сохранения (тепла, массы, количества движения, энергии и т. д.). При выводе дифференциальных уравнений различных математических моделей объектов или явлений отталкиваются от некоторого интегрального соотношения (уравнения баланса), выражающего закон сохранения для малого объема. Дифференциальное уравнение получается из уравнения баланса при стягивании рассматриваемого объема к нулю в предположении существования непрерывных производных, входящих в уравнение.

Метод конечных разностей физически означает переход от непрерывной

среды к некоторой ее дискретной модели. При таком переходе естественно требовать, чтобы основные свойства физического процесса сохранялись, т.е. выполнялись законы сохранения различных физических субстанций (количества тепла, массы, заряда, импульса и т.д.). Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения физических субстанций, называют консервативными (или дивергентными). Законы сохранения для всей сеточной области (“интегральные законы сохранения”) для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Входящие в эти уравнения баланса интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных однородных разностных схем называется интегро-интерполяционным методом (методом баланса).

Рассмотрим краевую задачу, включающую обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и дополнительные (граничные) условия на концах отрезка  $[0, \ell]$ :

$$-(k(x) \cdot u'(x))' + r(x) \cdot u(x) = g(x), \quad x \in [0, \ell] \quad (2)$$

$$\begin{cases} -k(0) \cdot u'(0) + \lambda_1 \cdot u(0) = \mu_1 \\ k(\ell) \cdot u'(\ell) + \lambda_2 \cdot u(\ell) = \mu_2 \end{cases}, \quad (3)$$

где  $u(x)$  – искомая неизвестная функция;  $k(x)$ ,  $r(x)$ ,  $g(x)$  – известные (заданные) функции, удовлетворяющие условиям  $k(x) > 0$ ,  $r(x) \geq 0$ ;  $\lambda_1$ ,  $\mu_1$  и  $\lambda_2$ ,  $\mu_2$  – заданные (известные) числа;  $\ell$  – размер области (длина отрезка).

Численные методы решения краевых задач основаны на замене дифференциальной задачи (2), (3) системой линейных алгебраических уравнений, т.е. разностной схемой.

*Разностная схема* – совокупность разностных алгебраических уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и дополнительные (граничные) условия исходной дифференциальной задачи.

### 1.2.1 Физическая интерпретация краевых задач

Уравнение (2) можно интерпретировать как уравнение установившегося распределения температуры  $u(x)$  в стержне длины  $\ell$ . В такой постановке краевую задачу (2), (3) можно записать в виде:

$$w'(x) + r(x) \cdot u(x) = g(x) \quad (4)$$

$$\begin{cases} w(0) + \lambda_1 \cdot u(0) = \mu_1 \\ -w(\ell) + \lambda_2 \cdot u(\ell) = \mu_2 \end{cases}, \quad (5)$$

где  $w(x)$  – тепловой поток, величина которого в соответствии с [законом теплопроводности Фурье](#) пропорциональна градиенту температуры:

$$w(x) = -k(x) \cdot u'(x); \quad (6)$$

$k(x)$  – коэффициент температуропроводности материала стержня;  $r(x) \cdot u(x)$  – мощность распределенных стоков тепла ( $r(x) < 0$  источников тепла) вдоль боковой поверхности стержня;  $r(x)$  – коэффициент конвекционного теплообмена боковой поверхности стержня с окружающей средой;  $g(x) > 0$  – мощность распределенных источников ( $g(x) < 0$  стоков) тепла внутри стержня.

Граничные условия (5) определяют процесс теплообмена концов стержня с окружающей средой по закону [конвекционного теплообмена Ньютона](#) – “Тепловой поток тепла  $q$  через поверхность материального тела в окружающую среду прямо пропорционален разнице температур между поверхностью тела и окружающей средой”:

$$q = \mathring{r} \cdot (u - \mathring{u}),$$

где  $\mathring{r}$  – коэффициент конвективного теплообмена;  $u$  – температура поверхности тела;  $\mathring{u}$  – температура окружающей среды.

Процессы выделения или поглощения тепла в твердом теле могут быть связаны с рядом явлений:

- 1) выделение тепла ( $g(x) > 0$ ) при пропускании электрического тока через стержень (закон Джоуля-Ленца), вследствие протекания в объеме стержня каких-либо экзотермических химических реакций;
- 2) поглощение тепла ( $g(x) < 0$ ) за счет термоэлектрических явлений (например, эффект Пельтье), а также вследствие протекания эндотермических хи-

мических реакций в объеме материала стержня.