

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>ВВЕДЕНИЕ . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1 Прямой ход метода Гаусса . . . . .	5
1.2 Обратный ход метода Гаусса. . . . .	8
1.3 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений ме- тодом Гаусса . . . . .	8
1.4 Метод Гаусса с выбором главного элемента . . . . .	11
1.5 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений ме- тодом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице . . . . .	12
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .</b>	<b>16</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right. , \quad (1)$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_m$  – неизвестные, которые необходимо определить;  $\{a_{ij}\}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_m$  – известные числовые коэффициенты левой и правой частей системы уравнений, соответственно.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (1) представляет совокупность  $m$  действительных или мнимых чисел  $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ , таких что их соответствующая подстановка вместо  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  в систему обращает все её уравнения в тождества:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot s_1 + a_{12} \cdot s_2 + \dots + a_{1m} \cdot s_m \equiv b_1 \\ a_{21} \cdot s_1 + a_{22} \cdot s_2 + \dots + a_{2m} \cdot s_m \equiv b_2 \\ a_{31} \cdot s_1 + a_{32} \cdot s_2 + \dots + a_{3m} \cdot s_m \equiv b_3 \\ \dots \dots \dots \\ a_{m1} \cdot s_1 + a_{m2} \cdot s_2 + \dots + a_{mm} \cdot s_m \equiv b_m \end{array} \right. ,$$

Система линейных алгебраических уравнений (1) может быть представлена в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $m \times m$ ,  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{b}$  – искомый вектор неизвестных и

заданный вектор размерности  $1 \times m$ , правых частей системы уравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера–Капелли устанавливает необходимое и достаточное условие совместности системы линейных алгебраических уравнений посредством свойств матричных представлений: система совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы, полученной путем добавления столбца правых частей  $\mathbf{b}$  матрице системы  $\mathbf{A}$ :

$$(\mathbf{A} | \mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array} \right) \quad (3)$$

Преимущество расширенной матрицы заключается в возможности выполнения тех же операций с вектором правых частей системы уравнений, что и со строками матрицы.

Предполагается, что определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , так что решение  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$  существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы  $m$  способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка  $m!$  арифметических действий, в то время как метод Гаусса –  $O(m^3)$  действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы  $\mathbf{A}$  ( $m \approx 10^2 \dots 10^5$ ), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

## 1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных  $x_i$  из системы линейных уравнений (3). Например, предположим, что  $a_{11} \neq 0$ , тогда

разделим первое уравнение системы на  $a_{11}$ , и в результате получим:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array} \right),$$

где  $c_{1j}$  и  $y_1$  – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на  $a_{i1}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 2, 3, \dots, m$ . В результате получим следующую матрицу:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & a_{22} - a_{21} \cdot c_{12} & \cdots & a_{2m} - a_{21} \cdot c_{1m} & b_2 - a_{21} \cdot y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} - a_{m1} \cdot c_{12} & \cdots & a_{mm} - a_{m1} \cdot c_{1m} & b_m - a_{m1} \cdot y_1 \end{array} \right).$$

Запишем полученную матрицу в более компактном виде:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2m}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right),$$

где  $a_{ij}^{(1)}$  и  $b_i^{(1)}$  – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - a_{i1} \cdot c_{1j}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - a_{i1} \cdot y_1), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , то в модифицированной системе аналогично можно исключить неизвестное  $x_2$ . Для этого можно разделить второе уравнение системы на

коэффициент при второй неизвестной  $a_{22}^{(1)}$ , и в результате получим:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & \cdots & a_{mm}^{(1)} & b_m^{(1)} \end{array} \right),$$

где  $c_{2j}$  и  $y_2$  – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на  $a_{i2}^{(1)}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 3, 4, \dots, m$ . В результате расширенная матрица примет вид:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot c_{2m} & b_m^{(1)} - a_{m2}^{(1)} \cdot y_2 & \end{array} \right)$$

или в более компактном виде:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{array} \right)$$

где  $a_{ij}^{(2)}$  и  $b_i^{(2)}$  – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot c_{2j}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)} \cdot y_2), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные  $x_3, x_4, \dots, x_m$ , исходная система

линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1m} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2m} & y_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_m \end{array} \right) \quad (4)$$

## 1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку расширенная матрица системы (4) имеет треугольный вид, то можно последовательно найти все неизвестные  $x_m, x_{m-1}, \dots, x_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = y_m \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \dots = \dots \\ x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{array} \right.$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_m = y_m, \quad x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1)$$

## 1.3 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Представим систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде и запишем расширенную матрицу этой системы, полученную путем до-

бавления к матрице системы столбца правой части уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

*Прямой ход метода Гаусса.*

- 1) Разделим каждую строку матрицы на значение её элемента в первом столбце, т.е. первую строку делим на 2, вторую на 4, третью на 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right)$$

Вычитаем из второй и третьей строк матрицы её первую строку:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array} \right)$$

- 2) Разделим вторую строку матрицы на  $-\frac{1}{4}$ , третью строку на  $-\frac{7}{6}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её вторую строку:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

3) Разделим третью строку матрицы на 3:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

*Обратный ход метода Гаусса.*

Последовательно определяем неизвестные в обратном порядке их следования  $x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ :

1) Из третьего уравнения системы (третья строка матрицы) определяем неизвестное  $x_3$ :

$$x_3 = 3$$

2) Из второго уравнения системы (вторая строка матрицы) определяем неизвестное  $x_2$ :

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= -11 \quad \rightarrow \quad x_2 = 4x_3 - 11 \\ x_2 &= 4 \cdot 3 - 11 = 1 \end{aligned}$$

3) Из первого уравнения системы (первая строка матрицы) определяем неизвестное  $x_1$ :

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{10}{2} \quad \rightarrow \quad x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 5 \\ x_1 &= -\frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = 2 \end{aligned}$$

Таким образом, найдено решение системы:

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff s = (2, 1, 3)^T$$

Проведём проверку решения системы уравнений методом прямой подстановки найденного вектора неизвестных  $s = (2, 1, 3)^T$  в исходную систему уравнений:

нений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{s} = \mathbf{b} \iff \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

После умножения расширенной матрицы системы уравнений на вектор найденного решения получим тождество:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 22 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|c} 10 & 10 \\ 31 & 31 \\ 22 & 22 \end{array} \right)$$

#### 1.4 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система (2) имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}$  равен нулю. Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}$  отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

*Основная идея метода* состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

## 1.5 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице

Рассмотрим на примере решение системы линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице системы:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

*Прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента.*

- 1) Выбираем максимальный по модулю элемент в матрице (главный элемент) во второй строке, третьем столбце (выделен цветом):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \textcolor{blue}{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

Разделим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на 1, вторую строку на 6, а третью строку на 5:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \textcolor{blue}{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array} \right)$$

Вычитаем из первой и третьей строки вторую строку:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right)$$

- 2) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (вторую строку) и выбираем новый главный элемент матрицы (первая строка, второй

столбец):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на  $\frac{13}{6}$ , а третью строку на  $-\frac{19}{30}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array} \right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её первую строку:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right)$$

- 3) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (первую) и выбираем новый главный элемент матрицы (третья строка, первый столбец):

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. третью строку делим на  $-\frac{126}{247}$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

*Обратный ход метода Гаусса с выбором главного элемента.*

Определим неизвестные из уравнений системы в обратном порядке след-

дования номеров столбцов главных элементов, т.е.  $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$ :

1) Из третьего уравнения системы определим неизвестное  $x_1$ :

$$x_1 = 2$$

2) Из первого уравнения системы определим неизвестное  $x_2$ :

$$\begin{aligned} \frac{8}{13}x_1 + x_2 &= \frac{29}{13} \quad \rightarrow \quad x_2 = -\frac{8}{13}x_1 + \frac{29}{13} \\ x_2 &= -\frac{8}{13} \cdot 2 + \frac{29}{13} = 1 \end{aligned}$$

3) Из второго уравнения системы определим неизвестное  $x_3$ :

$$\begin{aligned} \frac{4}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + x_3 &= \frac{31}{6} \quad \rightarrow \quad x_3 = -\frac{4}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{31}{6} \\ x_3 &= -\frac{4}{6} \cdot 2 - \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{31}{6} = 3 \end{aligned}$$

Таким образом, найдено решение системы линейных уравнений:

$$s = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad s = (2, 1, 3)^T$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.