

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений	4
1.1 Прямой ход метода Гаусса	6
1.2 Обратный ход метода Гаусса	8
1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента	9
1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений ме- тодом Гаусса	10
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	15
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	16

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = b_3 , \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right. , \quad (1)$$

где x_1, x_2, \dots, x_m – неизвестные, которые необходимо определить; $\{a_{ij}\}$ и b_1, b_2, \dots, b_m – известные числовые коэффициенты левой и правой частей системы уравнений, соответственно.

Решение системы линейных алгебраических уравнений (1) представляет совокупность m действительных или мнимых чисел c_1, c_2, \dots, c_m , таких что их соответствующая подстановка вместо x_1, x_2, \dots, x_m в систему обращает все её уравнения в тождества:

[illegible]

Система линейных алгебраических уравнений (1) может быть представлена в более компактной матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица $m \times m$, \mathbf{x} и \mathbf{b} – искомый вектор неизвестных и

заданный вектор размерности $1 \times m$, правых частей системы уравнений:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы \mathbf{A} отличен от нуля $\det \mathbf{A} \neq 0$, так что решение $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы m способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка $m!$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – $O(m^3)$ действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы \mathbf{A} ($m \approx 10^2 \dots 10^5$), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Теорема Кронекера–Капелли устанавливает необходимое и достаточное условие совместности системы линейных алгебраических уравнений посредством свойств матричных представлений: система совместна тогда и только тогда, когда ранг её матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы, полученной путем добавления столбца правых частей \mathbf{b} матрице системы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{array} \right), \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развер-

НУТОМ ВИДЕ:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right.$$

1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных x_i из системы линейных уравнений. Например, предположим, что $a_{11} \neq 0$, тогда разделим первое уравнение системы на a_{11} , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + & \dots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + & a_{22} \cdot x_2 & + & \dots & a_{2m} \cdot x_m & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 & + & a_{32} \cdot x_2 & + & \dots & a_{3m} \cdot x_m & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + & a_{m2} \cdot x_2 & + & \dots & a_{mm} \cdot x_m & = & b_m \end{array} \right. ,$$

где c_{1j} и y_1 – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на a_{i1} и вычтем полученное уравнение из каждого i -го уравнения системы $i = 2, 3, \dots, m$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} x_1 & + & c_{12} \cdot x_2 & + \dots & c_{1m} \cdot x_m & = & y_1 \\ (a_{22} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 & + & \dots & (a_{2m} - c_{1m} \cdot a_{21}) \cdot x_m & = & b_2 - y_1 \cdot a_{21} \\ (a_{32} - c_{12} \cdot a_{31}) \cdot x_2 & + & \dots & (a_{3m} - c_{1m} \cdot a_{31}) \cdot x_m & = & b_3 - y_1 \cdot a_{31} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (a_{m2} - c_{12} \cdot a_{m1}) \cdot x_2 & + & \dots & (a_{mm} - c_{1m} \cdot a_{m1}) \cdot x_m & = & b_m - y_1 \cdot a_{m1} \end{array} \right.$$

Запишем полученную систему уравнений в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное x_2 . Для этого разделим второе уравнение системы на $a_{22}^{(1)}$, и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где c_{2j} и y_2 – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на $a_{i2}^{(1)}$ и вычтем полученное уравнение из каждого i -го уравнения системы $i = 3, 4, \dots, m$. В

результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots & c_{1m} \cdot x_m & = y_1 \\ & x_2 + \dots & c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ & \dots & \left(a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)} \right) \cdot x_m = b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)}, \\ & \ddots & \vdots \\ & \dots & \left(a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)} \right) \cdot x_m = b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{array} \right.$$

или в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots & c_{1m} \cdot x_m & = y_1 \\ & x_2 + \dots & c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ & \dots & a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = b_3^{(2)}, \\ & \ddots & \vdots \\ & \dots & a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = b_m^{(2)} \end{array} \right.$$

где $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = \left(a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)} \right), \quad b_i^{(2)} = \left(b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)} \right), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные x_3, x_4, \dots, x_m , исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots & c_{1m} \cdot x_m & = y_1 \\ & x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots & c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ & & x_3 + \dots & c_{3m} \cdot x_m = y_3 \\ & & \ddots & \vdots = \vdots \\ & & & x_m = y_m \end{array} \right.$$

1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку мат-

рица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с x_m , найти все неизвестные $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$:

$$\begin{cases} x_m &= y_m \\ x_{m-1} &= y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} &= y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \dots &= \dots \\ x_1 &= y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{cases}$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1), \quad x_m = y_m$$

1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы \mathbf{A} равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы \mathbf{A} отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если $\det \mathbf{A} \neq 0$, то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Представим систему линейных алгебраических уравнений в матричном виде и запишем расширенную матрицу этой системы, полученную путем добавления к матрице системы столбца правой части уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

Прямой ход метода Гаусса.

- 1) Разделим каждую строку матрицы на значение её элемента в первом столбце, т.е. первую строку делим на 2, вторую на 4, третью на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right)$$

Вычитаем из второй и третьей строк матрицы её первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} & \frac{31}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array} \right)$$

- 2) Разделим вторую строку матрицы на $-\frac{1}{4}$, третью строку на $-\frac{7}{6}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & -\frac{1}{4} & 1 & \frac{11}{4} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{7}{6} & \frac{7}{3} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right)$$

3) Разделим третью строку матрицы на 3:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{10}{2} \\ 0 & 1 & -4 & -11 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{3} \end{array} \right)$$

Обратный ход метода Гаусса.

Последовательно определяем неизвестные в обратном порядке их следования $x_3 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$:

1) Из третьего уравнения системы (третья строка матрицы) определяем неизвестное x_3 :

$$x_3 = 3$$

2) Из второго уравнения системы (вторая строка матрицы) определяем неизвестное x_2 :

$$x_2 - 4x_3 = -11 \rightarrow x_2 = 4x_3 - 11$$

$$x_2 = 4 \cdot 3 - 11 = 1$$

3) Из первого уравнения системы (первая строка матрицы) определяем неизвестное x_1 :

$$x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{10}{2} \rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 5$$

$$x_1 = -\frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 + 5 = 2$$

Таким образом, найдено решение системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \dot{\mathbf{x}} = (2, 1, 3)^T$$

Проведём *проверку решения* системы уравнений методом прямой подстановки найденного вектора неизвестных $\dot{\mathbf{x}} = (2, 1, 3)^T$ в исходную систему урав-

нений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{\hat{x}} = \mathbf{b} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & 6 & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

После умножения расширенной матрицы системы уравнений на вектор найденного решения получим тождество:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 & 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 22 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} 10 & 10 \\ 31 & 31 \\ 22 & 22 \end{array} \right)$$

Метод Гаусса с выбором главного элемента

Прямой ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

- 1) Выбираем максимальный по модулю элемент в матрице (главный элемент) во второй строке, третьем столбце (**выделен красным цветом**):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \mathbf{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на 1, вторую строку на 6, а третью строку на 5:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ 4 & 5 & \mathbf{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & \mathbf{1} & 10 \\ 4 & 5 & \mathbf{6} & 31 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ 2 & 3 & \mathbf{1} & 10 \\ 3 & 1 & 5 & 22 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \mathbf{1} & \frac{22}{5} \\ 2 & 3 & \mathbf{1} & 10 \end{array} \right)$$

Вычитаем из первой и третьей строки вторую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 10 \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & \mathbf{0} & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{22}{5} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & \mathbf{0} & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & \mathbf{1} & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & \mathbf{0} & -\frac{23}{30} \end{array} \right)$$

- 2) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (вторую строку) и выбираем новый главный элемент матрицы (первая строка, второй столбец):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. первую строку делим на $\frac{13}{6}$, а третью строку на $-\frac{19}{30}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{4}{3} & \frac{13}{6} & 0 & \frac{29}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{1}{15} & -\frac{19}{30} & 0 & -\frac{23}{30} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array} \right)$$

Вычитаем из третьей строки матрицы её первую строку:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ \frac{2}{19} & 1 & 0 & \frac{23}{19} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right)$$

- 3) Исключаем из рассмотрения строку с текущим главным элементом (первую) и выбираем новый главный элемент матрицы (третья строка, первый столбец):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right)$$

Делим каждую строку матрицы на значение элемента матрицы в столбце главного элемента, т.е. третью строку делим на $-\frac{126}{247}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ -\frac{126}{247} & 0 & 0 & -\frac{252}{247} \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{8}{13} & 1 & 0 & \frac{29}{13} \\ \frac{4}{6} & \frac{5}{6} & 1 & \frac{31}{6} \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Обратный ход метода Гаусса с выбором главного элемента.

Определим неизвестные из уравнений системы в обратном порядке следования номеров столбцов главных элементов, т.е. $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$:

1) Из третьего уравнения системы определим неизвестное x_1 :

$$x_1 = 2$$

2) Из первого уравнения системы определим неизвестное x_2 :

$$\begin{aligned}\frac{8}{13}x_1 + x_2 &= \frac{29}{13} \rightarrow x_2 = -\frac{8}{13}x_1 + \frac{29}{13} \\ x_2 &= -\frac{8}{13} \cdot 2 + \frac{29}{13} = 1\end{aligned}$$

3) Из второго уравнения системы определим неизвестное x_3 :

$$\begin{aligned}\frac{4}{6}x_1 + \frac{5}{6}x_2 + x_3 &= \frac{31}{6} \rightarrow x_3 = -\frac{4}{6}x_1 - \frac{5}{6}x_2 + \frac{31}{6} \\ x_3 &= -\frac{4}{6} \cdot 2 - \frac{5}{6} \cdot 1 + \frac{31}{6} = 3\end{aligned}$$

Таким образом, найдено решение системы линейных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \dot{\mathbf{x}} = (2, 1, 3)^T$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5, 1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.