

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| 1 Аппроксимация функция | 4 |
| 1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций. | 4 |
| 1.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$ | 6 |
| 2 Численное дифференцирование | 10 |
| 2.1 Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$ | 11 |
| 2.2 Вторая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$ | 12 |
| 2.3 Численного дифференцирование функции заданной таблично | 12 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 22 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 23 |

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $\vec{x} = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество \vec{x} состоит из отдельных точек $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если \vec{x} есть отрезок $x_a < x < x_b$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени m вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения $\|r\|$ полинома $p_m(x)$ от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $\|r\| = g(c_0, c_1, \dots, c_m)$, т.е. коэффициентов полинома c_i ($i = 0, 1, \dots, m$), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей $\|r\| \rightarrow \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необ-

ходимо найти *положения минимума функции* многих переменных $\|r\|$.

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_1} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m + 1$ уравнений с $m + 1$ неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \|r\|}{\partial a_0} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_1} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_2} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots & = & \dots = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_m} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$ и $\vec{b} = \{b_k\}$ – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Если среди узлов сетки $\{x_i\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы

не равен нулю $\det \mathbf{A} \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\{\dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{c}_2, \dots, \dot{c}_m\}$, а полином $p_m(x)$ с такими коэффициентами \dot{c}_i будет обладать минимальным квадратичным отклонением $\|r\|_{\min}$.

1.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------|-------|-------|-------|------|------|
| x_i | -0.76 | -0.48 | -0.09 | 0.22 | 0.55 |
| y_i | 5.15 | 4.39 | 4.10 | 5.71 | 5.30 |

Необходимо аппроксимировать функцию $\{y_i\}$, заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени $p_2(x)$:

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

- Построим меру отклонения полинома $p_2(x)$ от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^4 (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$ – значение функции в точке x_i .

- Запишем меру отклонения $\|r\|$ в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} \|r\| = & (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- Определим частную производную от меры отклонений $\|r\|$ по аргументу c_0

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы \mathbf{A} и первый элемент вектора \vec{b} :

$$\begin{aligned}a_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ a_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ a_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ b_0 &= 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65\end{aligned}$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений $\|r\|$ по аргументу c_1 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c_1} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы \mathbf{A} и второй элемент вектора \vec{b} :

$$\begin{aligned}c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ b_1 &= 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24\end{aligned}$$

- 5) Определим частную производную от меры отклонений $\|r\|$ по аргументу c_2

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы \mathbf{A} и третий элемент вектора \vec{b} :

$$\begin{aligned}c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\ b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ &\quad 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94\end{aligned}$$

- 6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов c_0, c_1, c_2 аппроксимирующего полинома $p_2(x)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot c_0 - 0.56 \cdot c_1 + 1.18 \cdot c_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot c_0 + 1.18 \cdot c_1 - 0.38 \cdot c_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot c_0 - 0.38 \cdot c_1 + 0.49 \cdot c_2 = 5.94 \end{cases}$$

- 7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

- 8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений аппроксимации.

проксимирующего алгебраического полинома второго порядка $p_2(x)$ (сплошная линия).

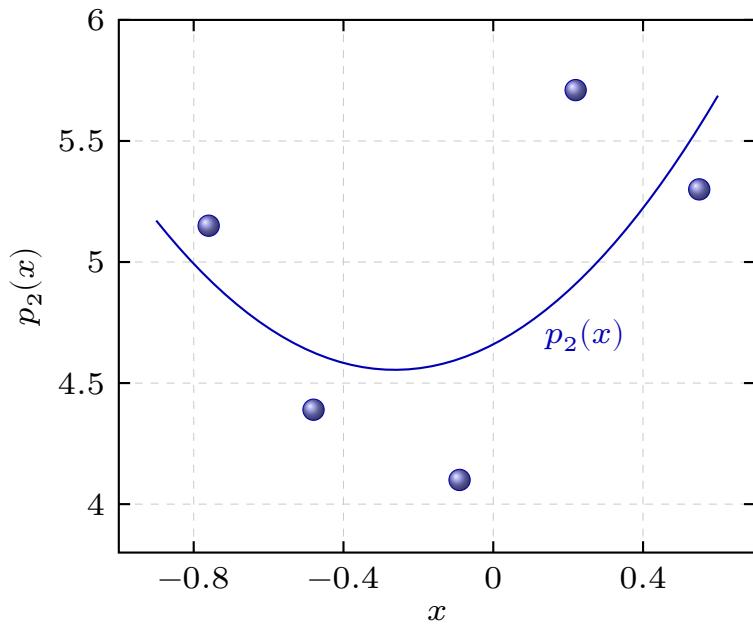


Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома $p_2(x)$ (сплошная линия)

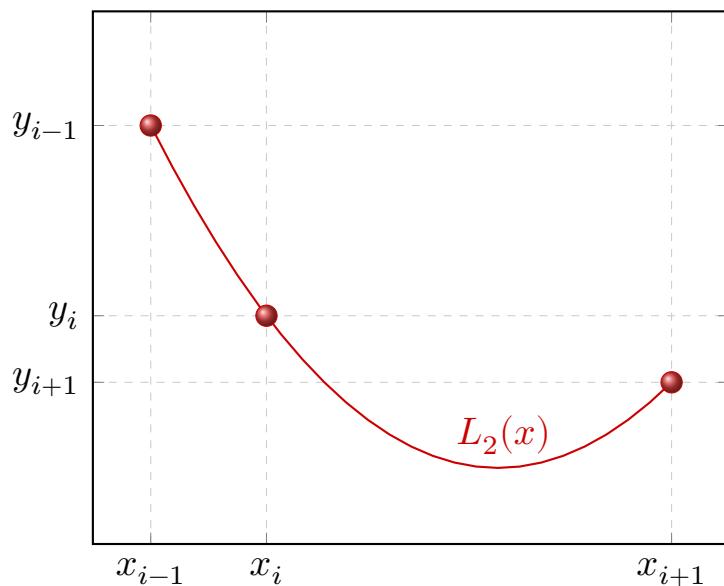
2 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции $y(x)$ по заданным в конечном числе точек $\{x_i\}$ значениям этой функции.

Численное дифференцирование применяется, если функцию $y(x)$ трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию $y(x)$ интерполяционным полиномом Лагранжа $L_n(x)$ и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку $\{x_i\}$ и проведем интерполирование функции $y(x)$ в узлах сетки $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая $y(x) \approx L_2(x)$ для $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$:



$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

где $y_{i-1} = y(x_{i-1})$, $y_i = y(x_i)$, $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ – значение функции $y(x)$ в узлах сетки.

2.1 Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$

Первая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$:

$$\begin{aligned}
L'_2(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение $f'(x)$ в любой точке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

Например, в точке $x = x_i$ первая производная от функции $f(x)$ приближенно равна:

$$f'(x_i) \approx L'_2(x_i) = -\frac{h_{i+1}}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \frac{h_{i+1} - h_i}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \frac{h_i}{(h_{i+1} + h_i) \cdot h_{i+1}} \cdot y_{i+1}$$

На равномерной сетке $\{x_i\}$ расстояние между соседними узлами одинаковое $h_i = h$ ($i = 1, 2, \dots, N$) и выражение для первой производной в точке $x = x_i$ упрощается:

$$f'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

2.2 Вторая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$

Вторая производная многочлена Лагранжа $L_2(x)$:

$$L_2''(x) = \frac{2}{h_i \cdot (h_i + h_{i+1})} \cdot y_{i-1} - \frac{2}{h_i \cdot h_{i+1}} \cdot y_i + \frac{2}{(h_{i+1} + h_i) \cdot h_{i+1}} \cdot y_{i+1},$$

величину которой можно принять за приближенное значение второй производной функции $f''(x)$ в любой точке $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$.

На равномерной сетке выражение для второй производной $f''(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ упрощается:

$$L_2''(x) = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где h – шаг сетки (расстояние между соседними узлами).

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков $f^{(n)}(x)$ уже недостаточно многочлена Лагранжа второго порядка $L_2(x)$. Поэтому необходимо использовать многочлены более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов, участвующих в аппроксимации.

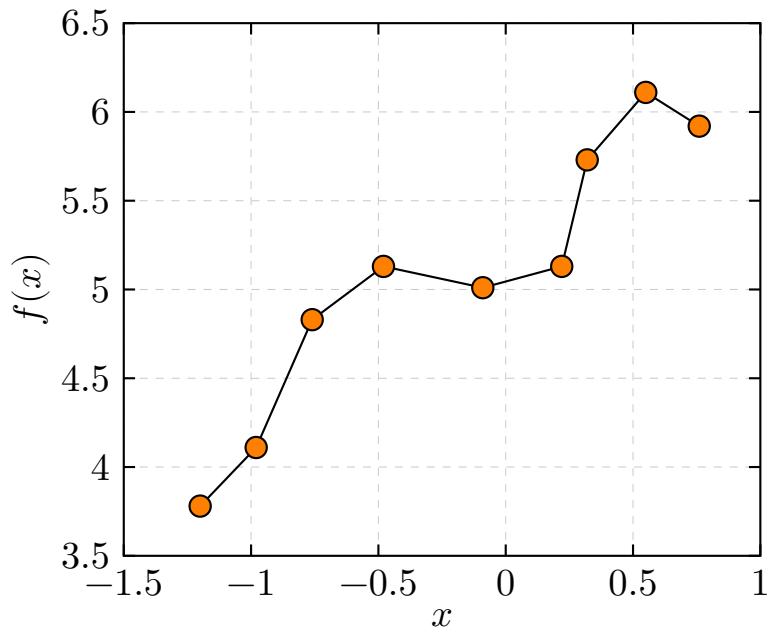
Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации зависит как от порядка интерполяционного многочлена, так и от расположения узлов интерполирования.

2.3 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки) $\{x_i\}$ в которых определены значения функции $\{f(x_i)\}$:

| i | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| x_i | -1,2 | -0,98 | -0,76 | -0,48 | -0,09 | 0,22 | 0,32 | 0,55 | 0,76 |
| $f(x_i)$ | 3,78 | 4,11 | 4,83 | 5,13 | 5,01 | 5,13 | 5,73 | 6,11 | 5,92 |

- 1) Построим график функции $f(x)$ заданной таблично.



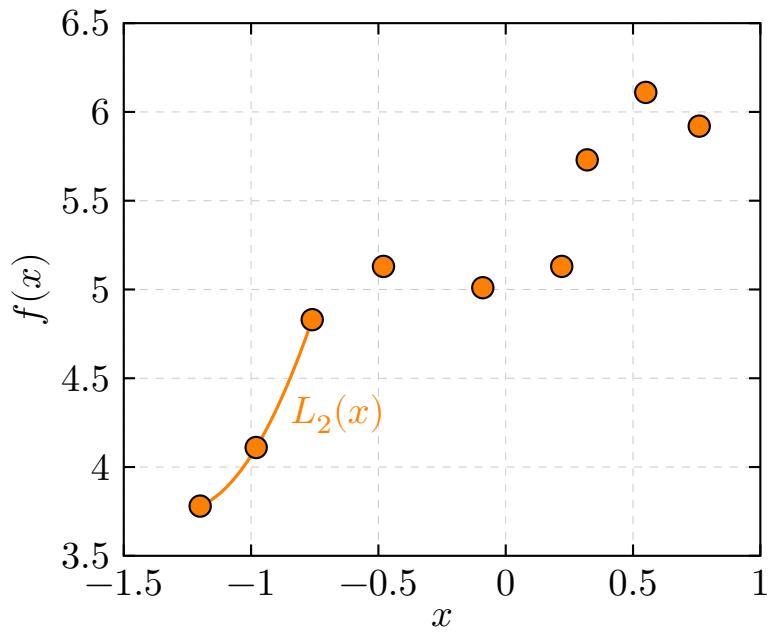
- 2) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_0 < x_1 < x_2\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| i | 0 | 1 | 2 | ... |
|----------|------|-------|-------|-----|
| x_i | -1,2 | -0,98 | -0,76 | ... |
| $f(x_i)$ | 3,78 | 4,11 | 4,83 | ... |

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0,98))(x - (-0,76))}{(-1,20 - (-0,98))(-1,20 - (-0,76))} \cdot 3,78 + \\
 & + \frac{(x - (-1,20))(x - (-0,76))}{(-0,98 - (-1,20))(-0,98 - (-0,76))} \cdot 4,11 + \\
 & + \frac{(x - (-1,20))(x - (-0,98))}{(-0,76 - (-1,20))(-0,76 - (-0,98))} \cdot 4,83
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-1,2; -0,76]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 4,028925620 \cdot x^2 + 10,28305785 \cdot x + 10,31801653$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_1 = -0,98$:

$$f'(-0,98) \approx L'_2(-0,98) = 2,386363635$$

$$f''(-0,98) \approx L''_2(-0,98) = 8,057851240$$

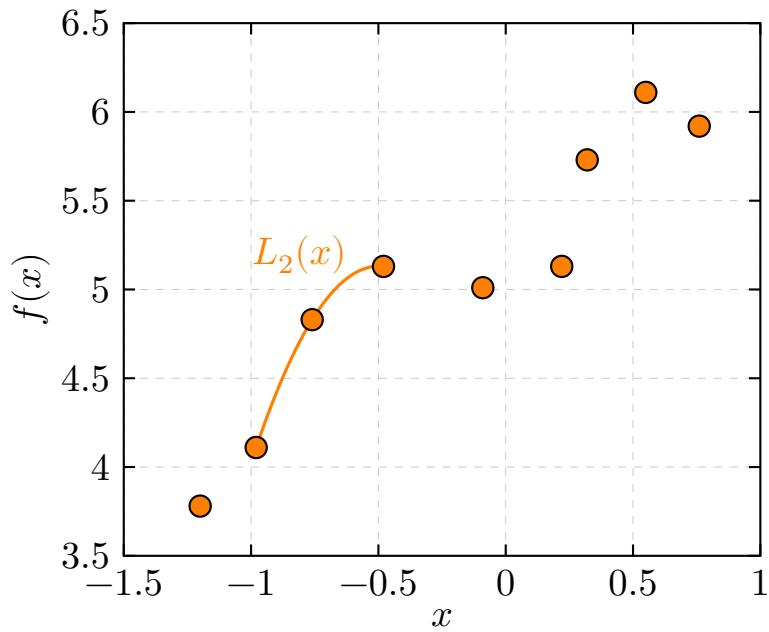
- 3) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_1 < x_2 < x_3\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| | | | | | |
|----------|-----|-------|-------|-------|-----|
| i | ... | 1 | 2 | 3 | ... |
| x_i | ... | -0,98 | -0,76 | -0,48 | ... |
| $f(x_i)$ | ... | 4,11 | 4,83 | 5,13 | ... |

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x - (-0,76))(x - (-0,48))}{(-0,98 - (-0,76))(-0,98 - (-0,48))} \cdot 4,11 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,98))(x - (-0,48))}{(-0,76 - (-0,98))(-0,76 - (-0,48))} \cdot 4,83 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,98))(x - (-0,76))}{(-0,48 - (-0,98))(-0,48 - (-0,76))} \cdot 5,13
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-0,98; -0,48]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_2 = -0,76$:

$$f'(-0,76) \approx L'_2(-0,76) = 2,304155844$$

$$f''(-0,76) \approx L''_2(-0,76) = -8,805194780$$

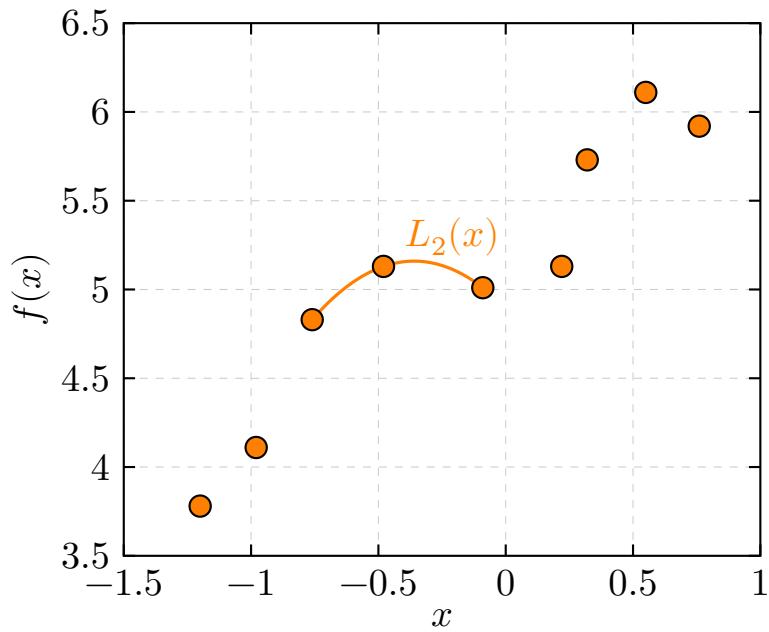
- 4) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_2 < x_3 < x_4\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| | | | | | |
|----------|-----|-------|-------|-------|-----|
| i | ... | 2 | 3 | 4 | ... |
| x_i | ... | -0,76 | -0,48 | -0,09 | ... |
| $f(x_i)$ | ... | 4,83 | 5,13 | 5,01 | ... |

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x - (-0,48))(x - (-0,09))}{(-0,76 - (-0,48))(-0,76 - (-0,09))} \cdot 4,83 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,76))(x - (-0,09))}{(-0,48 - (-0,76))(-0,48 - (-0,09))} \cdot 5,13 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,76))(x - (-0,48))}{(-0,09 - (-0,76))(-0,09 - (-0,48))} \cdot 5,01
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-0,76; -0,09]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_3 = -0,48$:

$$f'(-0,48) \approx L'_2(-0,48) = 0,495079546$$

$$f''(-0,48) \approx L''_2(-0,48) = -4,116778740$$

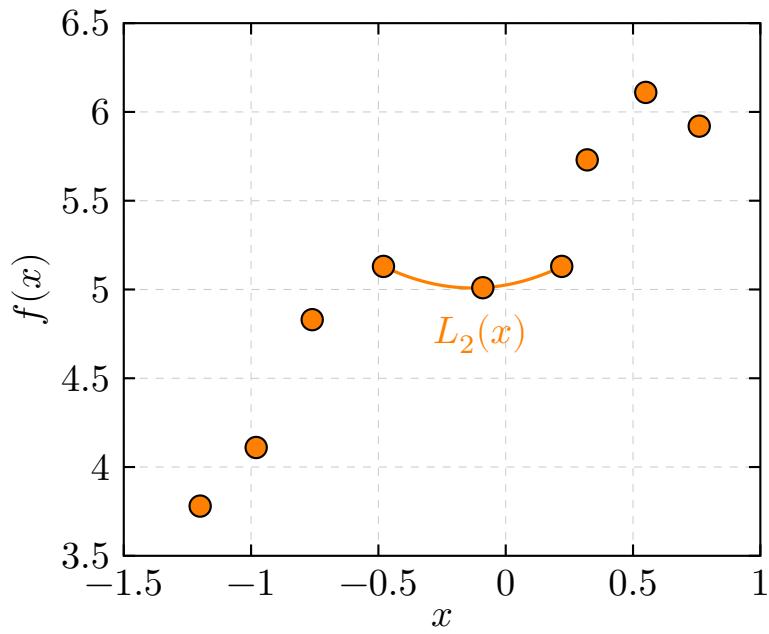
- 5) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_3 < x_4 < x_5\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| | | | | | |
|----------|-----|-------|-------|------|-----|
| i | ... | 3 | 4 | 5 | ... |
| x_i | ... | -0,48 | -0,09 | 0,22 | ... |
| $f(x_i)$ | ... | 5,13 | 5,01 | 5,13 | ... |

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x - (-0,09))(x - 0,22)}{(-0,48 - (-0,09))(-0,48 - 0,22)} \cdot 5,13 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,48))(x - 0,22)}{(-0,09 - (-0,48))(-0,09 - 0,22)} \cdot 5,01 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,48))(x - (-0,09))}{(0,22 - (-0,48))(0,22 - (-0,09))} \cdot 5,13
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-0,48; 0,22]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 0,9925558300 \cdot x^2 + 0,2580645177 \cdot x + 5,025186105$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_4 = -0,09$:

$$f'(-0,09) \approx L'_2(-0,09) = 0,0794044683$$

$$f''(-0,09) \approx L''_2(-0,09) = 1,985111660$$

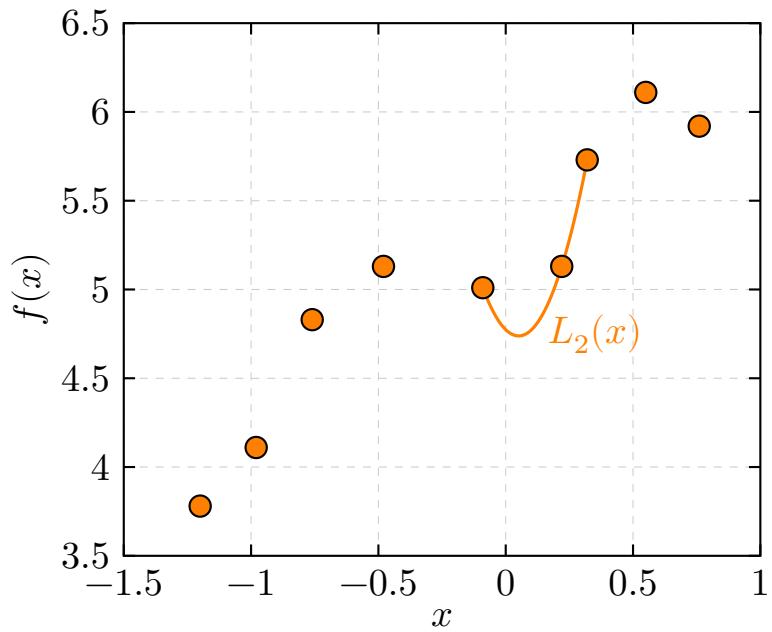
- 6) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_4 < x_5 < x_6\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| | | | | | |
|----------|-----|-------|------|------|-----|
| i | ... | 4 | 5 | 6 | ... |
| x_i | ... | -0,09 | 0,22 | 0,32 | ... |
| $f(x_i)$ | ... | 5,01 | 5,13 | 5,73 | ... |

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x - 0,22)(x - 0,32)}{(-0,09 - 0,22)(-0,09 - 0,32)} \cdot 5,01 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,09))(x - 0,32)}{(0,22 - (-0,09))(0,22 - 0,32)} \cdot 5,13 + \\
 &+ \frac{(x - (-0,09))(x - 0,22)}{(0,32 - (-0,09))(0,32 - 0,22)} \cdot 5,73
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[-0,09; 0,32]$ имеет вид:

$$L_2(x) = 13,69000778 \cdot x^2 - 1,392604236 \cdot x + 4,773776556$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_5 = 0, 22$:

$$f'(0, 22) \approx L'_2(0, 22) = 4,630999187$$

$$f''(0, 22) \approx L''_2(0, 22) = 27,38001556$$

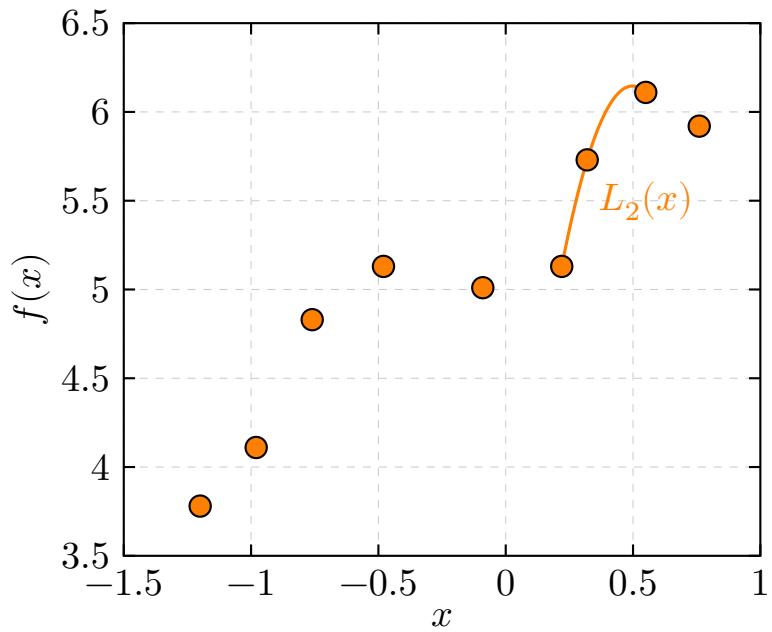
- 7) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_5 < x_6 < x_7\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| | | | | | |
|----------|-----|------|------|------|-----|
| i | ... | 5 | 6 | 7 | ... |
| x_i | ... | 0,22 | 0,32 | 0,55 | ... |
| $f(x_i)$ | ... | 5,13 | 5,73 | 6,11 | ... |

$$\begin{aligned}
 L_2(x) &= \frac{(x - 0,32)(x - 0,55)}{(0,22 - 0,32)(0,22 - 0,55)} \cdot 5,13 + \\
 &+ \frac{(x - 0,22)(x - 0,55)}{(0,32 - 0,22)(0,32 - 0,55)} \cdot 5,73 + \\
 &+ \frac{(x - 0,22)(x - 0,32)}{(0,55 - 0,22)(0,55 - 0,32)} \cdot 6,11
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[0, 22; 0, 55]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -13,17523062 \cdot x^2 + 13,11462456 \cdot x + 2,882463758$$



Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_6 = 0,32$:

$$f'(0,32) \approx L'_2(0,32) = 4,682476963$$

$$f''(0,32) \approx L''_2(0,32) = -26,35046124$$

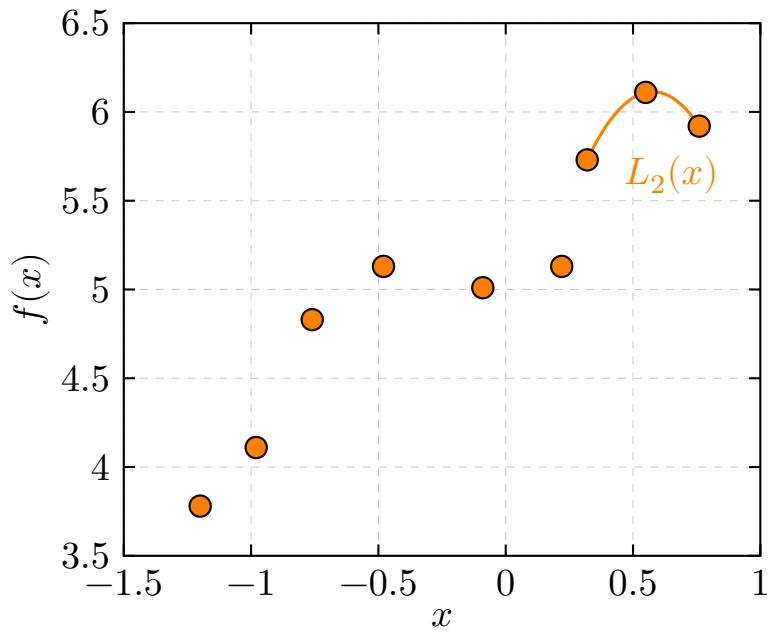
- 8) Апроксимацию функции $f(x)$ в узлах $\{x_6 < x_7 < x_8\}$ полиномом Лагранжа второго порядка $L_2(x)$, используя данные:

| i | ... | 6 | 7 | 8 |
|----------|-----|------|------|------|
| x_i | ... | 0,32 | 0,55 | 0,76 |
| $f(x_i)$ | ... | 5,73 | 6,11 | 5,92 |

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0,55)(x - 0,76)}{(0,32 - 0,55)(0,32 - 0,76)} \cdot 5,73 + \\ &+ \frac{(x - 0,32)(x - 0,76)}{(0,55 - 0,32)(0,55 - 0,76)} \cdot 6,11 + \\ &+ \frac{(x - 0,32)(x - 0,55)}{(0,76 - 0,32)(0,76 - 0,55)} \cdot 5,92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка $[0,32; 0,76]$ имеет вид:

$$L_2(x) = -5,811217790 \cdot x^2 + 6,707933391 \cdot x + 4,178530017$$



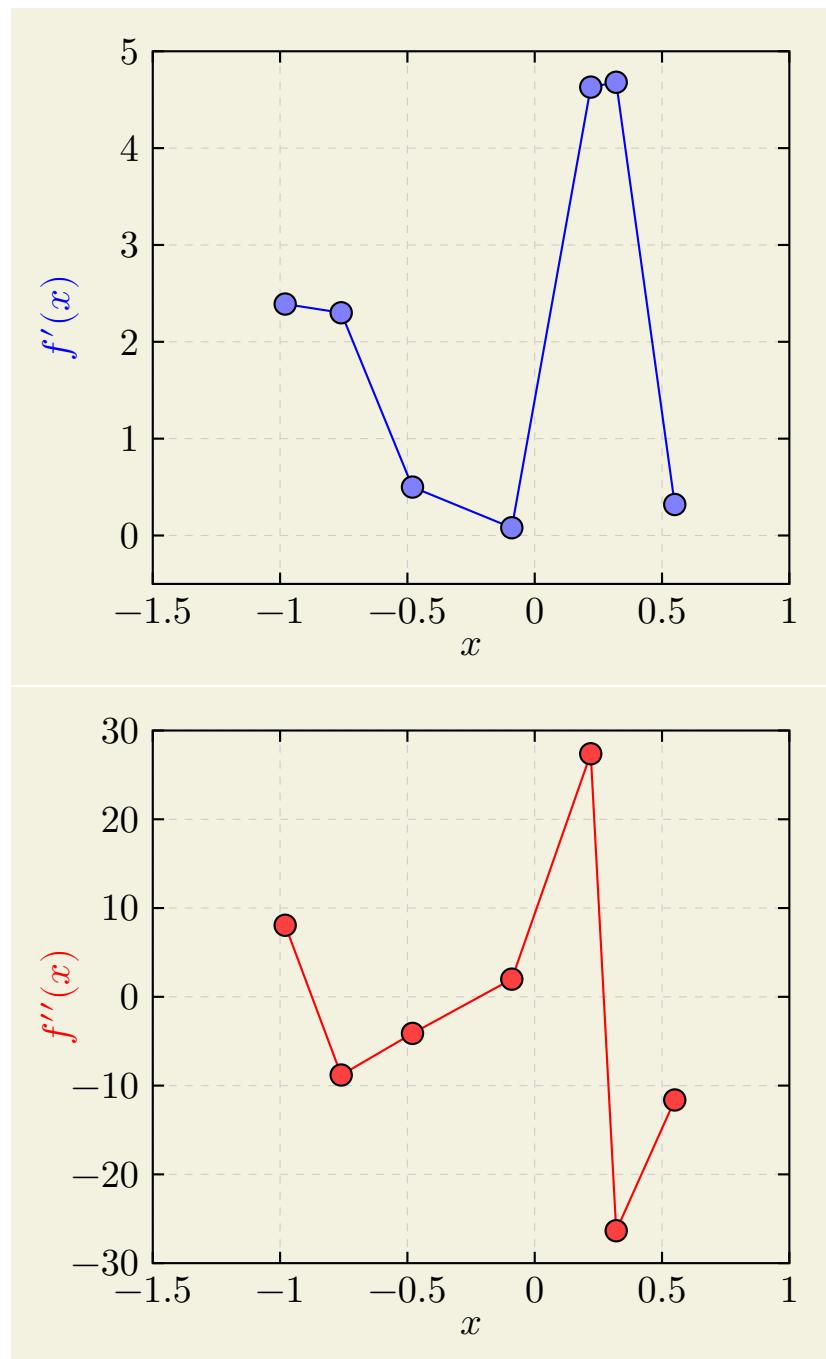
Определим первую и вторую производную функции $f(x)$ в точке $x_7 = 0,55$:

$$f'(0,55) \approx L'_2(0,55) = 0,315593822$$

$$f''(0,55) \approx L''_2(0,55) = -11,62243558$$

- 9) Таким образом, определены значения первой $f'(x_i)$ и второй $f''(x_i)$ производной функции $f(x)$ в каждом внутреннем узле сетки $\{x_i\}$:

| | | | | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| x | -0,98 | -0,76 | -0,48 | -0,09 | 0,22 | 0,32 | 0,55 |
| $f'(x)$ | 2,39 | 2,30 | 0,50 | 0,08 | 4,63 | 4,68 | 0,32 |
| $f''(x)$ | 8,06 | -8,81 | -4,12 | 1,99 | 27,38 | -26,35 | -11,62 |



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5, 1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.