СОДЕРЖАНИЕ

1 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $\boldsymbol{x} = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество $\boldsymbol{x}$ состоит из отдельных точек $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если $\boldsymbol{x}$ есть отрезок $x_a < x < x_b$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

1.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \cdots, n$). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается алгебраический полином степени m вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \cdots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^{m} c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения $\|r\|$ полинома $p_m(x)$ от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^{n} \left(p_m(x_i) - y_i\right)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $\|r\| = \rho(c_0, c_1, \dots, c_m)$, т.е. коэффициентов полинома c_i ($i = 0, 1, \dots, m$), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей $\|r\| \to \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е.

определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необходимо найти *положения минимума функции* многих переменных $\rho(c_0, c_1, \dots, c_m)$.

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \rho}{\partial c_0} = \frac{\partial \rho}{\partial c_1} = \frac{\partial \rho}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \rho}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$ необходимо решить систему $m+1$ уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial c_0} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot 1 & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c_1} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c_2} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^2 & = & 0 \\ \dots\dots & = & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & = & 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial c_m} & = & 2 \cdot \sum\limits_{i=0}^{n} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i\right) \cdot x_i^m & = & 0 \end{cases}$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$ и $\boldsymbol{b} = \{b_k\}$ – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Если среди узлов сетки $\{x_i\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы не равен нулю $\det \mathbf{A} \neq 0$. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\mathring{\boldsymbol{c}} = \{\mathring{c}_0, \mathring{c}_1, \mathring{c}_2, \dots, \mathring{c}_m\}$, а полином $p_m(x)$ с такими коэффициентами $\mathring{c}_i$ будет обладать минимальным квадратичным отклонением $\rho_{\min}$.

1.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$:

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость $y_i = f(x_i)$

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию $\{y_i\}$, заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени $p_2(x)$:

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

1) Построим меру отклонения полинома $p_2(x)$ от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$\|r\| = \rho(c_0, c_1, c_2) = \sum_{i=0}^{4} \left(c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i\right)^2,$$

   где $y_i = f(x_i)$ – значение функции в точке x_i.

2) Запишем меру отклонения $\rho(c_0, c_1, c_2)$ в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned}\rho(c_0, c_1, c_2) = {} & \left(c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15\right)^2 + \\ & \left(c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39\right)^2 + \\ & \left(c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10\right)^2 + \\ & \left(c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71\right)^2 + \\ & \left(c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30\right)^2\end{aligned}$$

3) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_0 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial c_0} =& 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы $\mathbf{A}$ и первый элемент вектора $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}a_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ a_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ a_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ b_0 &= 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65\end{aligned}$$

4) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргументу c_1 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial c_1} =& 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы $\mathbf{A}$ и второй элемент вектора $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ b_1 &= 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & \quad 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24\end{aligned}$$

5) Определим частную производную от меры отклонений $\rho(c_0, c_1, c_2)$ по аргу-

менту c_2 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial c_2} =& 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\
&+ 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\
&+ 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\
&+ 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\
&+ 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0
\end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы $\mathbf{A}$ и третий элемент вектора $\boldsymbol{b}$:

$$\begin{aligned}
c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\
c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\
c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\
b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\
& \quad 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94
\end{aligned}$$

6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов c_0, c_1, c_2 аппроксимирующего полинома $p_2(x)$ необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 5 & -0.56 & 1.18 \\ -0.56 & 1.18 & -0.38 \\ 1.18 & -0.38 & 0.49 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24.65 \\ -2.24 \\ 5.94 \end{pmatrix}$$

7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений ап-

проксимирующего алгебраического полинома второго порядка $p_2(x)$ (сплошная линия).

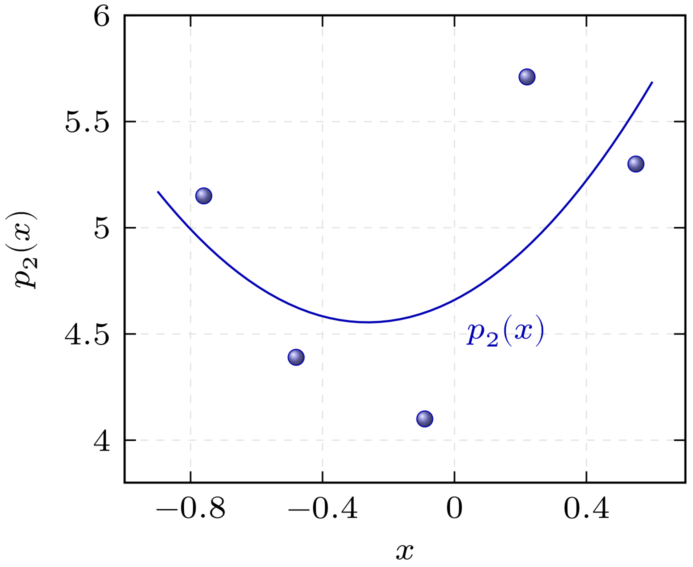

Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома $p_2(x)$ (сплошная линия)