

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 Численное дифференцирование .....	4
1.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично .....	6
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	16
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....	17

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

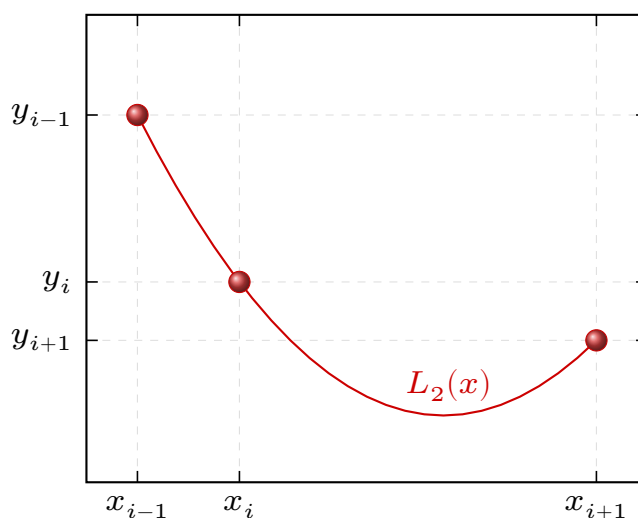
## 1 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных  $y'(x)$  по заданным в конечном числе точек  $\{x_i\}$  значениям этой функции  $\{y_i\}$ .

Численное дифференцирование применяется, если функцию  $y(x)$  трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию  $y(x)$  интерполяционным полиномом, например, алгебраическим полиномом в форме Лагранжа  $L_n(x)$ , и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку  $\{x_i\}$  и проведем интерполирование функции  $y(x)$  в узлах сетки  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая  $y(x) \approx L_2(x)$  для  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ :



$$\begin{aligned}
L_2(x) &= \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

где  $y_{i-1} = y(x_{i-1})$ ,  $y_i = y(x_i)$ ,  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  – значение функции  $y(x)$  в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа  $L_2(x)$ :

$$\begin{aligned}
L'_2(x) &= \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной  $y'(x)$  в любой точке отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Например, в точке  $x = x_i$  первая производная от функции  $y(x)$  приближенно равна:

$$\begin{aligned}
y'(x_i) \approx L'_2(x_i) &= \frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
&+ \frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
&+ \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближен-

ное значение второй производной от функции  $y(x)$  в любой точке отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned} y''(x) \approx L_2''(x) = & \frac{2}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\ & + \frac{2}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\ & + \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1} \end{aligned}$$

На *равномерной сетке*  $\{x_i\}$ , расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке  $x = x_i$  упрощаются:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где  $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$  – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков  $y^{(n)}(x)$  уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ . Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции  $y(x)$  зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки  $\{x_i\}$ .

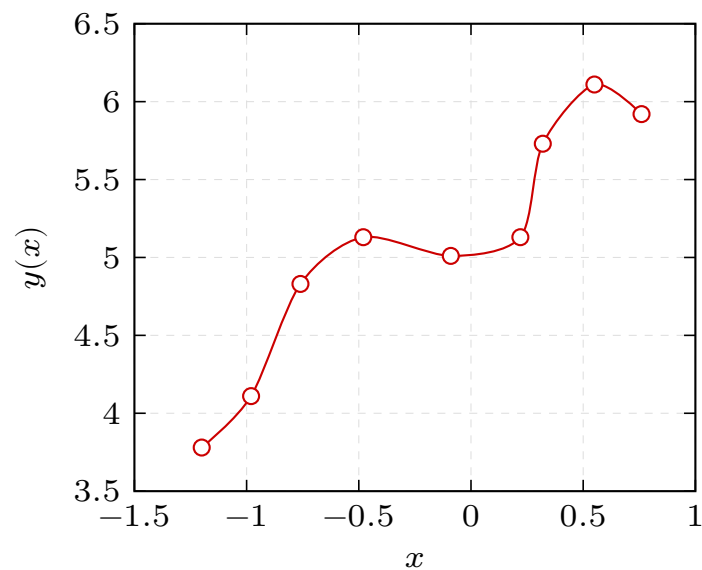
### 1.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки)  $\{x_i\}$  в которых определены значения функции  $\{f(x_i)\}$ :

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость  $y_i = f(x_i)$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	−1.2	−0.98	−0.76	−0.48	−0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
$y_i$	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции  $y(x)$ , используя данные таблицы 1.

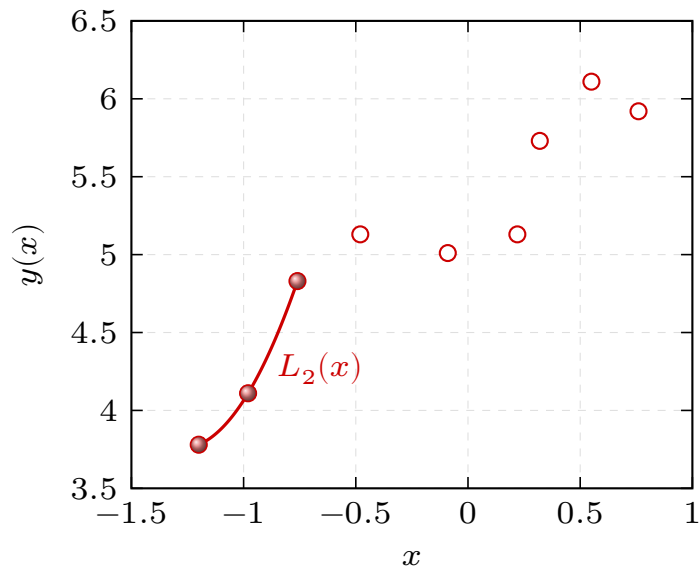


2) Аппроксимируем функцию  $y(x)$  в узлах  $\{x_0, x_1, x_2\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-1.20 - (-0.98))(-1.20 - (-0.76))} \cdot 3.78 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.76))}{(-0.98 - (-1.20))(-0.98 - (-0.76))} \cdot 4.11 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.98))}{(-0.76 - (-1.20))(-0.76 - (-0.98))} \cdot 4.83
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_0, x_2]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_1 = -0.98$ :

$$y'_1 = y'(x_1) = y'(-0.98) \approx L'_2(-0.98) = 2.386363635$$

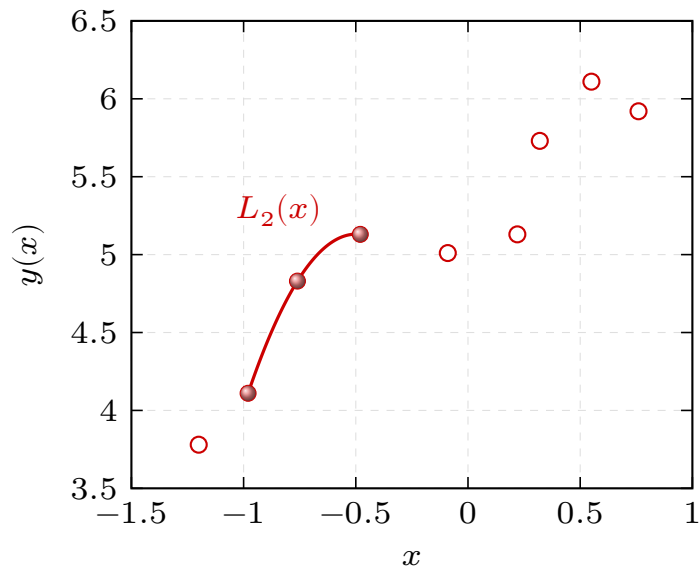
$$y''_1 = y''(x_1) = y''(-0.98) \approx L''_2(-0.98) = 8.057851240$$

3) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_1, x_2, x_3\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.98 - (-0.76))(-0.98 - (-0.48))} \cdot 4.11 + \\ & + \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.48))}{(-0.76 - (-0.98))(-0.76 - (-0.48))} \cdot 4.83 + \\ & + \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-0.48 - (-0.98))(-0.48 - (-0.76))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_1, x_3]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_2 = -0.76$ :

$$y'_2 = y'(x_2) = y'(-0.76) \approx L'_2(-0.76) = 2.304155844$$

$$y''_2 = y''(x_2) = y''(-0.76) \approx L''_2(-0.76) = -8.805194780$$

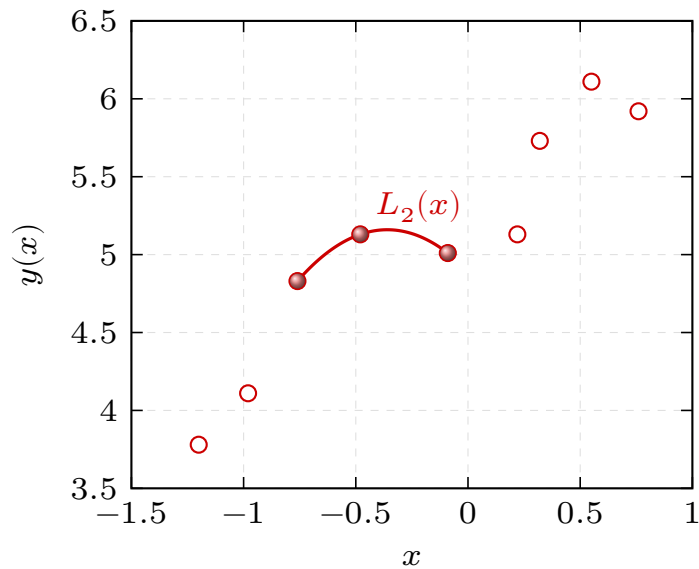
- 4) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_2, x_3, x_4\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(-0.76 - (-0.48))(-0.76 - (-0.09))} \cdot 4.83 + \\ & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))}{(-0.48 - (-0.76))(-0.48 - (-0.09))} \cdot 5.13 + \\ & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - (-0.48))} \cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_2, x_4]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$





Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_3 = -0.48$ :

$$y'_3 = y'(x_3) = y'(-0.48) \approx L'_2(-0.48) = 0.495079546$$

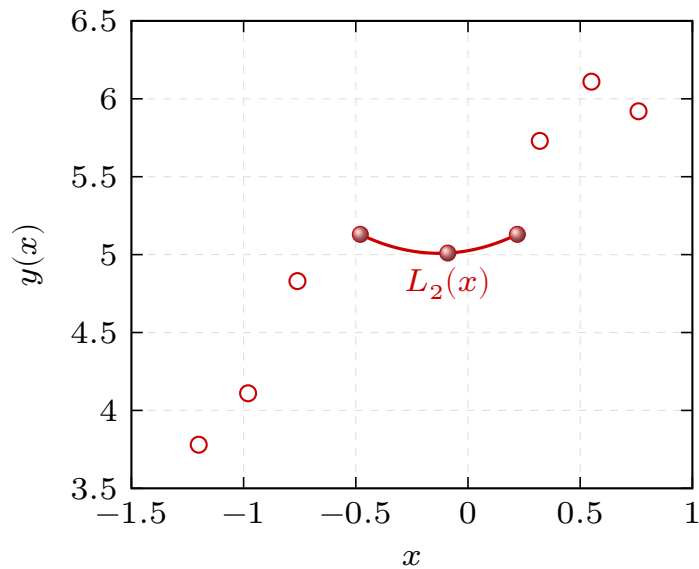
$$y''_3 = y''(x_3) = y''(-0.48) \approx L''_2(-0.48) = -4.116778740$$

5) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_3, x_4, x_5\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(-0.48 - (-0.09))(-0.48 - 0.22)} \cdot 5.13 + \\ & + \frac{(x - (-0.48))(x - 0.22)}{(-0.09 - (-0.48))(-0.09 - 0.22)} \cdot 5.01 + \\ & + \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(0.22 - (-0.48))(0.22 - (-0.09))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_3, x_5]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 0.9925558300 \cdot x^2 + 0.2580645177 \cdot x + 5.025186105$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_4 = -0.09$ :

$$y'_4 = y'(x_4) = y'(-0.09) \approx L'_2(-0.09) = 0.0794044683$$

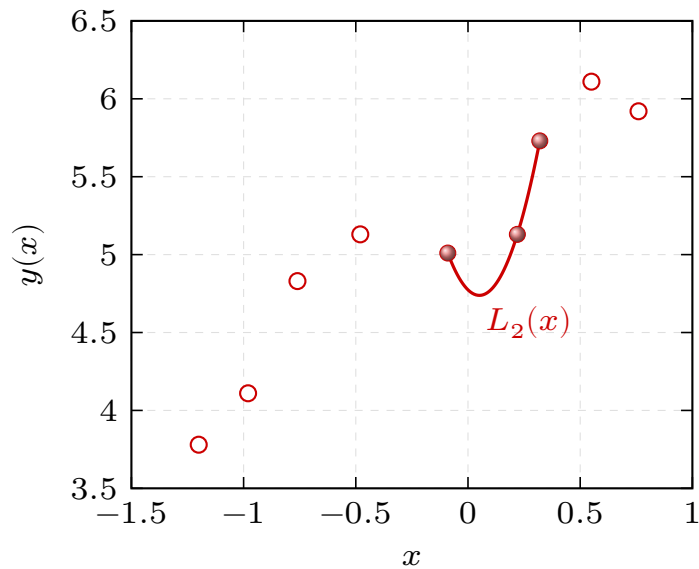
$$y''_4 = y''(x_4) = y''(-0.09) \approx L''_2(-0.09) = 1.985111660$$

- 6) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_4, x_5, x_6\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.32)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.32)}{(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.32)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.32 - (-0.09))(0.32 - 0.22)} \cdot 5.73 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_4, x_6]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 13.69000778 \cdot x^2 - 1.392604236 \cdot x + 4.773776556$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_5 = 0.22$ :

$$y'_5 = y'(x_5) = y'(0.22) \approx L'_2(0.22) = 4.630999187$$

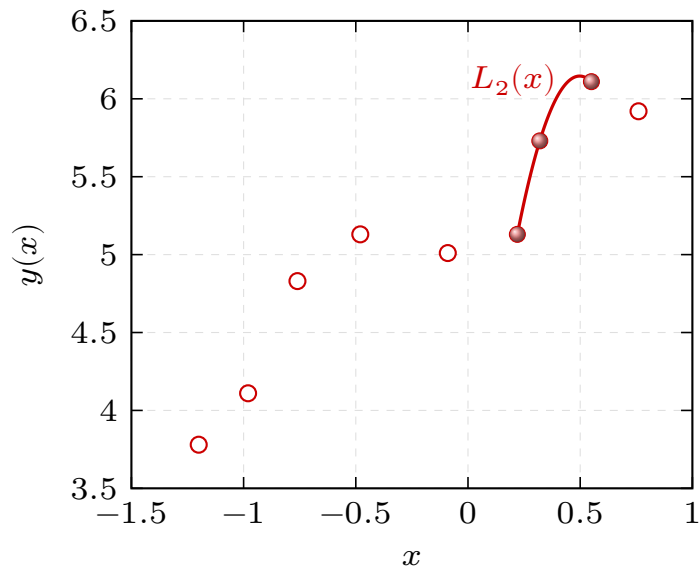
$$y''_5 = y''(x_5) = y''(0.22) \approx L''_2(0.22) = 27.38001556$$

7) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_5, x_6, x_7\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.22 - 0.32)(0.22 - 0.55)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.32 - 0.22)(0.32 - 0.55)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(0.55 - 0.22)(0.55 - 0.32)} \cdot 6.11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_5, x_7]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -13.17523062 \cdot x^2 + 13.11462456 \cdot x + 2.882463758$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_6 = 0.32$ :

$$y'_6 = y'(x_6) = y'(0.32) \approx L'_2(0.32) = 4.682476963$$

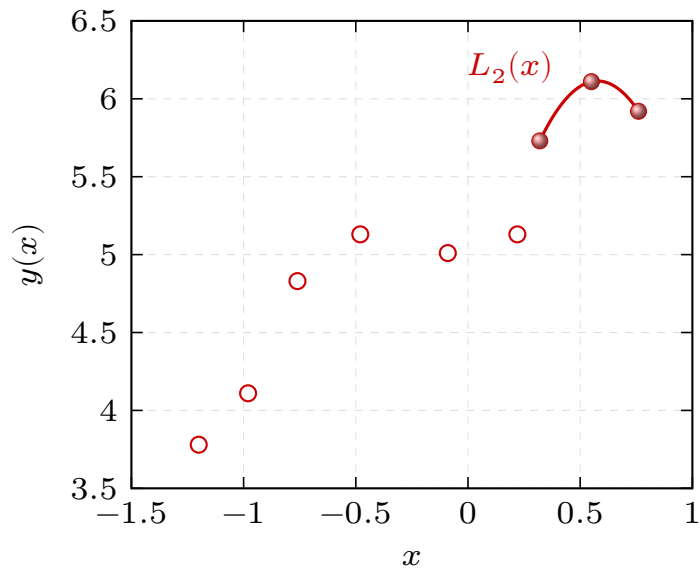
$$y''_6 = y''(x_6) = y''(0.32) \approx L''_2(0.32) = -26.35046124$$

8) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_6, x_7, x_8\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 1:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.55)(x - 0.76)}{(0.32 - 0.55)(0.32 - 0.76)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.76)}{(0.55 - 0.32)(0.55 - 0.76)} \cdot 6.11 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.76 - 0.32)(0.76 - 0.55)} \cdot 5.92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_6, x_8]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -5.811217790 \cdot x^2 + 6.707933391 \cdot x + 4.178530017$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_7 = 0.55$ :

$$y'_7 = y'(x_7) = y'(0.55) \approx L'_2(0.55) = 0.315593822$$

$$y''_7 = y''(x_7) = y''(0.55) \approx L''_2(0.55) = -11.62243558$$

9) Таким образом, определены значения первой  $y'(x)$  и второй  $y''(x)$  производной функции  $y(x)$  в каждом внутреннем узле сетки:

Таблица 2 – Значения первой и второй производных функции  $y(x)$  во внутренних узлах сетки  $\{x_i\}$

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55
$y'_i$	2.39	2.30	0.50	0.08	4.63	4.68	0.32
$y''_i$	8.06	-8.81	-4.12	1.99	27.38	-26.35	-11.62

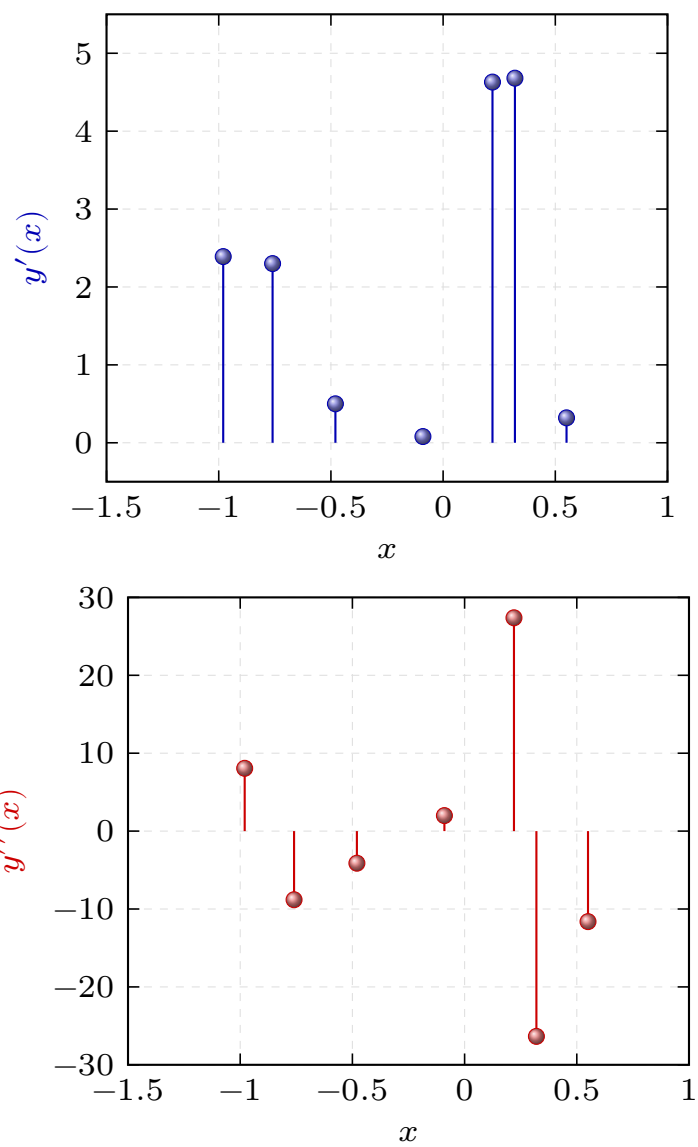


Рисунок 1 – Графики первой  $y'(x)$  и второй  $y''(x)$  производной от функции  $y(x)$ , заданной таблично

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.