Н. Н. Калиткин, Прогонка при бесконечном коэффициенте теплопроводности, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1968, том 8, номер 3, 684–686

Цитированная литература

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Об однородных разностных схемах. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 1, 5—67.
2. А. А. Самарский. Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, 2, № 1, 25—56.
3. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
4. Г. И. Марчук. Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
5. Э. Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков, Гостехиздат Украины, 1939.

УДК 518:517.91/.94

ПРОГОНКА ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Н. Н. КАЛИТКИН

(Москва)

Рассмотрим дивергентное разностное уравнение, заданное на сетке $0 \leqslant i \leqslant N$:

$$k_i u_{i-1} - (k_i + k_{i+1} + a_i) u_i + k_{i+1} u_{i+1} = -b_i. \qquad (1)$$

Первое и последнее уравнения этой цепочки уравнений запишем в следующем виде:

$$-(k_0 + k_1 + a_0) u_0 + k_1 u_1 = -b_0; \quad k_N u_{N-1} - (k_N + k_{N+1} + a_N) u_N = -b_N. \qquad (1а)$$

К уравнению (1) сводится ряд задач, например численное решение одномерного параболического уравнения

$$c(u, x, t)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(u, x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + f(u, x, t)$$

трехточечными неявными разностными схемами (тогда (1а) соответствует краевым условиям).

Уравнение (1) решается методом прогонки (см., например, [1]):

$$\xi_0 = \eta_0 = 0, \qquad \xi_{i+1} = \frac{k_{i+1}}{k_{i+1} + (1 - \xi_i) k_i + a_i},$$

$$\eta_{i+1} = \frac{k_i \eta_i + b_i}{k_{i+1} + (1 - \xi_i) k_i + a_i}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, N. \qquad (2а)$$

$$u_i = \xi_{i+1} u_{i+1} + \eta_{i+1}, \qquad i = N, N-1, \ldots, 1, 0 \qquad (u_{N+1} = 0). \qquad (2б)$$

Расчет по формулам (2а) невозможен при $k = \infty$. Однако в двух важных примерах имеет место именно этот случай. Во-первых, это уравнения диффузии магнитного поля в рамках магнитогидродинамического приближения; в них $k \sim \sigma^{-1}$, где σ — проводимость среды, которая может быть равной нулю. Во-вторых, это нелинейное уравнение теплопроводности; коэффициент теплопроводности формально не бесконечен, но практически может стать больше максимально представимого на ЭВМ числа.

В уравнениях магнитного поля k не обращается в нуль (если не рассматривать экзотический случай сверхпроводников): практически проводимость плазмы не превышает проводимости чистой меди при комнатной температуре. В этом случае удобен потоковый вариант прогонки [2], допускающий $k = \infty$ (но непригодный при $k = 0$).

Для уравнения теплопроводности требуется такая методика, которая позволяет рассчитывать оба предельных случая $k = 0$ и $k = \infty$ (причем первый случай встречается чаще). Поэтому возьмем формулы (2) за исходные.

Пусть внутри области (далее называемой изотермической), ограниченной узлами p и q сетки, коэффициенты k_i велики, причем они много больше, чем на ее границах и вне ее. Введем обозначения

$$A_i = (1-\xi_p)k_p + \sum_{j=p}^{i-1} a_j, \qquad B_i = k_p\eta_p + \sum_{j=p}^{i-1} b_j \qquad (i > p)$$

и разложим в этой области (2а) по малому параметру A_i / k_i. Удерживая несколько членов разложения, получим

$$\xi_i \approx 1 - (A_i/k_i) + \frac{1}{k_i}\sum_{j=p+1}^{i} (A_j^2/k_j),$$

$$\eta_i \approx \frac{1}{k_i}\left[B_i - \sum_{j=p+1}^{i} (A_jB_j/k_j)\right], \qquad p+1 \leqslant i \leqslant q-1. \tag{3а}$$

$$\xi_q \approx k_q\left[k_q + A_q - \sum_{j=p+1}^{q-1} (A_j^2/k_j)\right]^{-1},$$

$$\eta_q \approx \left[B_q - \sum_{j=p+1}^{q-1} (A_jB_j/k_j)\right]\left[k_q + A_q - \sum_{j=p+1}^{q-1} (A_j^2/k_j)\right]^{-1}. \tag{3б}$$

Выражение (3б) имеет погрешность второго порядка относительно параметра разложения, а (3а) — погрешность третьего порядка. Последний член в (3а) удерживался только для получения второго порядка точности в (3б); в численном расчете его можно опустить и полагать

$$\xi_i \approx 1 - (A_i/k_i) \approx \frac{1}{1+(A_i/k_i)}, \qquad \eta_i \approx (B_i/k_i), \qquad p+1 \leqslant i \leqslant q-1. \tag{3в}$$

Если в изотермической области $k_i \to \infty$, то

$$\xi_i \to 1, \qquad \eta_i \to 0, \qquad p+1 \leqslant i \leqslant q-1; \qquad \xi_q \to k_q / (k_q + A_q),$$
$$\eta_q \to B_q / (k_q + A_q). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2б), убеждаемся, что в изотермической области температура примерно одинакова во всех точках.

Будем рассчитывать коэффициенты прогонки по формулам (2а) там, где коэффициент теплопроводности невелик; в противном случае перейдем на формулы (3) или (4) *). Определим условие перехода на формулы (3). В изотермической области $\xi \approx 1$; расчет по (2а) требует определения $(1-\xi_i)$ и поэтому связан с сильной потерей точности. Формулы (3б), (3в) имеют погрешность порядка $(A_i / k_i)^2$; если вычисления производятся с n значащими цифрами **), то при $(A_i / k_i) < 10^{-n/3}$ они дают большую точность, чем (2а). При $(A_i / k_i) < 10^{-n/2}$ даже формулы (4) точнее, чем (2а). Таким образом, предложенные формулы предпочтительнее даже при не очень больших коэффициентах теплопроводности.

Сделаем два замечания. Во-первых, в изотермической области тепловые потоки нельзя находить из разностного аналога выражения $w = -k\partial u / \partial x$; при этом велика потеря точности. Следует записать (1) в виде уравнения энергетического баланса

$$w_i - w_{i+1} - a_iu_i = -b_i$$

и рассматривать его как рекуррентное соотношение, выражающее поток в одном

*) Расчет самой функции всегда возможно производить по формуле (2б).

**) Для большинства ЭВМ $n \approx 11$.

узле через поток в соседнем узле. Начать счет по этому рекуррентному соотношению позволит одно из краевых условий (устойчивость счета очевидна).

Во-вторых, рассмотрим случай, когда изотермическая область примыкает к левой границе разностной сетки. Если k_0 невелико, то можно применять формулы (3), полагая $p = 0$. Но если k_0 велико, то точка $i = 0$ является «внутренней» точкой изотермической области. Тогда можно показать, что

$$\xi_i \approx \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} k_0/k_j\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{i} k_0/k_j\right)^{-1},$$

$$\eta_i = \frac{1}{k_i}\sum_{j=0}^{i-1} b_j\xi_{j+1}\xi_{j+2}\ldots\xi_i, \qquad 1 \leqslant i \leqslant q.$$

Легко видеть, что η_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ в этом случае — малые величины порядка $1/k_i$ и ξ_q — также малая величина порядка k_q/k_{q-1}. Поэтому величины u_i внутри изотермической области будут иметь такой же порядок малости.

Случай примыкания изотермической области к правой границе разностной сетки всегда описывается формулами (3).

Поступила в редакцию 10.05.1967

Цитированная литература

1. С. К. Годунов, В. С. Рябенький. Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962.
2. Л. В. Дегтярёв, А. П. Фаворский. Потоковый вариант метода прогонки. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, 8, настоящий выпуск.

УДК 517.9:533.9

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО КРИТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКТОРА

С. Б. ШИХОВ, Л. К. ШИШКОВ

(*Москва*)

В [1] исследовано критическое уравнение реактора

$$\hat{L}n = \frac{1}{\lambda}(\hat{K}_{is} + \hat{K}_f)n, \tag{1}$$

записанное относительно плотности нейтронов $n = n(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$, где $\bar{r} \in V$, $\bar{\Omega} \in V_\Omega$, $E \in [0, E_0]$; $(E, \bar{\Omega}) \in Q$, $(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \in D$. Для удобства будут использованы сокращенные обозначения:

$\hat{L}n = \frac{v}{\alpha}\bar{\Omega}\nabla n + \frac{v}{\alpha}\Sigma_t n$ — оператор переноса нейтронов,

$0 < \alpha = \inf v(E)\Sigma_t(\bar{r}, E) < \infty$;

$\hat{K}_{is}n = \int\limits_Q\int dE'\, d\Omega' n(\bar{r}, E', \bar{\Omega}')\frac{v(E')}{\alpha}\Sigma_{is}(\bar{r}, E')W_{is}(\bar{r}, E', E, \bar{\Omega}'\bar{\Omega})$ — оператор упругого и неупругого соударений нейтронов;