

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ . . . . .	3
1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений . . . . .	4
1.1 Прямой ход метода Гаусса . . . . .	5
1.2 Обратный ход метода Гаусса . . . . .	7
1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента . . . . .	8
1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса . . . . .	8
2 Интерполярование функций . . . . .	11
2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа . . . . .	11
2.2 Пример интерполярование функции полиномом Лагранжа $L_3(x)$ . . . . .	13
3 Аппроксимация функция . . . . .	16
3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций . . . . .	16
3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$ . . . . .	18
4 Численное дифференцирование . . . . .	22
4.1 Численного дифференцирование функции заданной таблично . . . . .	24
ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .	34
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .	35

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## 1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

где  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица  $m \times m$ ,  $\vec{x}$  и  $\vec{b}$  – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности  $1 \times m$ :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы  $\mathbf{A}$  отличен от нуля  $\det \mathbf{A} \neq 0$ , так что решение  $\vec{x}$  существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы  $m$  способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка  $m!$  арифметических действий, в то время как метод Гаусса –  $O(m^3)$  действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы  $\mathbf{A}$  ( $m \approx 10^2 \dots 10^5$ ), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развернутом виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1m} \cdot x_m & = & b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m} \cdot x_m & = & b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m} \cdot x_m & = & b_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm} \cdot x_m & = & b_m \end{array} \right.$$

## 1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных  $x_i$  из системы линейных уравнений. Например, предположим, что  $a_{11} \neq 0$ , тогда разделим первое уравнение системы на  $a_{11}$ , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m} \cdot x_m = b_3, \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{array} \right.$$

где  $c_{1j}$  и  $y_1$  – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на  $a_{i1}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 2, 3, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ (a_{22} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 + \cdots + (a_{2m} - c_{1m} \cdot a_{21}) \cdot x_m = b_2 - y_1 \cdot a_{21} \\ (a_{32} - c_{12} \cdot a_{31}) \cdot x_2 + \cdots + (a_{3m} - c_{1m} \cdot a_{31}) \cdot x_m = b_3 - y_1 \cdot a_{31} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ (a_{m2} - c_{12} \cdot a_{m1}) \cdot x_2 + \cdots + (a_{mm} - c_{1m} \cdot a_{m1}) \cdot x_m = b_m - y_1 \cdot a_{m1} \end{array} \right.$$

Запишем полученную систему уравнений в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}^{(1)}$  и  $b_i^{(1)}$  – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если  $a_{22}^{(1)} \neq 0$ , то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное  $x_2$ . Для этого разделим второе уравнение системы на  $a_{22}^{(1)}$ , и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \cdots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где  $c_{2j}$  и  $y_2$  – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_1^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на  $a_{i2}^{(1)}$  и вычтем полученное уравнение из каждого  $i$ -го уравнения системы  $i = 3, 4, \dots, m$ . В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \cdots \left( a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)} \right) \cdot x_m = b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)}, \\ \ddots \quad \vdots \\ \cdots \left( a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)} \right) \cdot x_m = b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{array} \right.$$

или в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \cdots a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = b_3^{(2)}, \\ \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \cdots a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = b_m^{(2)} \end{array} \right.$$

где  $a_{ij}^{(2)}$  и  $b_i^{(2)}$  – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные  $x_3, x_4, \dots, x_m$ , исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \cdots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \cdots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ x_3 + \cdots + c_{3m} \cdot x_m = y_3 \\ \ddots \quad \vdots \quad = \quad \vdots \\ x_m = y_m \end{array} \right.$$

## 1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных  $x_1, x_2, \dots, x_m$  полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку матрица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с  $x_m$ , найти все неизвестные  $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = y_m \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \cdots = \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{array} \right.$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1), \quad x_m = y_m$$

### 1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы  $\mathbf{A}$  равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы  $\mathbf{A}$  отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

**Основная идея метода** состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ , то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

### 1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Пример численного решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

*Прямой ход метода Гаусса.*

1) Разделим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (2)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

2) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (4) во 2-ом уравнении

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 20$$

и вычтем результат умножения из 2-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

3) Умножим 1-ю строку на коэффициент при  $x_1$  (3) в 3-ем уравнении

$$3x_1 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 15$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

4) Разделим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$  (-1)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

5) Умножим 2-ю строку на коэффициент при  $x_2$  ( $-\frac{7}{2}$ ) в 3-ем уравнении

$$-\frac{7}{2}x_2 + 14x_3 = \frac{77}{2}$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{21}{2}x_3 = -\frac{63}{2} \end{array} \right.$$

6) Разделим 3-ю строку на коэффициент при  $x_3$  ( $-\frac{21}{2}$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \end{array} \right.$$

*Обратный ход метода Гаусса.*

Последовательно определяем неизвестные  $x_3, x_2, x_1$ :

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = -11 + 4x_3 = -11 + 4 \cdot 3 = 1$$

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

*Ответ:* решение системы линейных уравнений:  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$ .

Проведём проверку решения системы уравнений методом прямой подстановки. Для этого подставим найденный вектор неизвестных  $\vec{x} = (2, 1, 3)$  в исходную систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 + 5 \cdot 3 = 22 \end{array} \right.$$

Проводим арифметические действия и получаем тождества для каждого уравнения системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} 4 + 3 + 3 = 10 \\ 8 + 5 + 18 = 31 \\ 6 + 1 + 15 = 22 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 10 = 10 \\ 31 = 31 \\ 22 = 22 \end{array} \right.$$

## 2 Интерполяирование функций

### 2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа

Пусть на отрезке  $x \in [a, b]$  выбрана сетка  $\{x_i\}$  (здесь  $i = 0, 1, \dots, n$ ), в узлах которой известны значения функции  $y_i = f(x_i)$ . Задача интерполяирования алгебраическими многочленами состоит в том, чтобы построить многочлен степени  $n$

$$L_n(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_n \cdot x^n = \sum_{i=0}^n c_i \cdot x^i$$

значения которого в заданных точках  $\{x_i\}$ , совпадают со значениями функции  $\{y_i\}$  в этих точках.

Во всех узлах сетки  $\{x_i\}$  многочлен  $L_n(x)$  должен удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} L_n(x_0) = y_0 \\ L_n(x_1) = y_1 \\ L_n(x_2) = y_2 \\ \dots \\ L_n(x_n) = y_n \end{cases}$$

Интерполяционная формула Лагранжа позволяет представить многочлен  $L_n(x)$  в виде линейной комбинации значений функции  $y(x)$  в узлах интерполяции:

$$L_n(x) = c_0(x) \cdot y_0 + c_1(x) \cdot y_1 + c_2(x) \cdot y_2 + \dots + c_n(x) \cdot y_n$$

где  $c_0(x), c_1(x), c_2(x), \dots, c_n(x)$  – неизвестные функции.

Из условий интерполяции:

$$\begin{cases} c_0(x_0) \cdot y_0 + c_1(x_0) \cdot y_1 + c_2(x_0) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_0) \cdot y_n = y_0 \\ c_0(x_1) \cdot y_0 + c_1(x_1) \cdot y_1 + c_2(x_1) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_1) \cdot y_n = y_1 \\ c_0(x_2) \cdot y_0 + c_1(x_2) \cdot y_1 + c_2(x_2) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_2) \cdot y_n = y_2 \\ \dots \\ c_0(x_n) \cdot y_0 + c_1(x_n) \cdot y_1 + c_2(x_n) \cdot y_2 + \dots + c_n(x_n) \cdot y_n = y_n \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты  $c_i(x)$  можно искать в виде многочленов степени  $n$ :

Определим неизвестные  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  из условия для коэффициентов  $c_i(x)$ :

Таким образом, коэффициенты  $c_i(x)$  интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_0(x) & = & \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_0 - x_n)} \\ c_1(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2) \cdot \dots \cdot (x_1 - x_n)} \\ \dots & & \dots \\ c_n(x) & = & \frac{(x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0) \cdot (x_n - x_1) \cdot \dots \cdot (x_n - x_{n-1})} \end{array} \right.$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

## 2.2 Пример интерполяирования функции полиномом Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции)  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ), в которых определены значения функции  $y_i = f(x_i)$ :

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

$i$	0	1	2	3
$x_i$	-0.76	-0.09	0.22	0.55
$y_i$	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа  $L_3(x)$  на основе данных об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и значений функции в этих точках  $\{y_i\}$ :

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции  $\{x_i\}$  и извест-

ными значениями интерпретируемой функции в этих узлах  $\{y_i\}$ :

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.76 - (-0.09))(-0.76 - 0.22)(-0.76 - 0.55)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.55)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.55)}{(0.22 - (-0.76))(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.55)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.55 - (-0.76))(0.55 - (-0.09))(0.55 - 0.22)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{0.13} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{0.28} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & (x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot (-0.09) + \\
 & + (x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot 13.84 + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55) \cdot (-3.99) + \\
 & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22) \cdot 3.47
 \end{aligned}$$

- 4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831 \cdot x + 0.9119 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

- 5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа  $L_3(x)$  (**сплошная линия**).

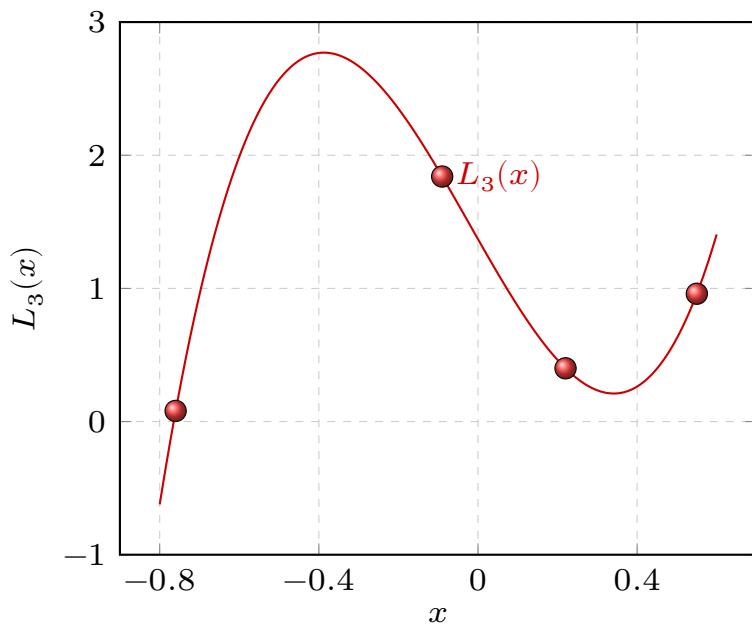


Рисунок 1 – График таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа  $L_3(x)$  (сплошная линия)

### 3 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию  $f(x)$  необходимо заменить обобщенным полиномом  $p_m(x)$  заданного порядка  $m$  так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции  $f(x)$  от обобщенного полинома  $p_m(x)$  на указанном множестве  $\vec{x} = \{x\}$  было наименьшим. При этом полином  $p_m(x)$  в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество  $\vec{x}$  состоит из отдельных точек  $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (узлов), то приближение называется *точечным*. Если  $\vec{x}$  есть отрезок  $x_a < x < x_b$ , то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

#### 3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок  $m$  приближающего полинома  $p_m(x)$  меньше числа узлов аппроксимации  $m < n$ , в которых известно значение функции  $y_i = f(x_i)$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени  $m$  вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения  $\|r\|$  полинома  $p_m(x)$  от известной функции  $y(x)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$\|r\| = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных  $\|r\| = g(c_0, c_1, \dots, c_m)$ , т.е. коэффициентов полинома  $c_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения была наименьшей  $\|r\| \rightarrow \min$ . Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома  $p_m(x)$ , необ-

ходимо найти *положения минимума функции* многих переменных  $\|r\|$ .

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_1} = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial \|r\|}{\partial c_m} = 0$$

Для определения неизвестных коэффициентов полинома  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_m$  необходимо решить систему  $m + 1$  уравнений с  $m + 1$  неизвестными:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial \|r\|}{\partial a_0} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_1} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_2} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots & = & \dots = 0 \\ \frac{\partial \|r\|}{\partial a_m} & = & 2 \cdot \sum_{i=0}^n (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 + \dots + c_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$

Таким образом, задача точечной квадратичной аппроксимации функции сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных – коэффициентов полинома  $\{c_0, c_1, c_2, \dots, c_m\}$ :

$$\mathbf{A} \cdot \vec{c} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m0} & a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{A} = \{a_{k\ell}\}$  и  $\vec{b} = \{b_k\}$  – квадратная матрица и вектор правых частей системы линейных уравнений, соответственно:

$$a_{k\ell} = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot x_i^\ell, \quad b_k = \sum_{i=0}^n x_i^k \cdot y_i, \quad k, \ell = 0, 1, 2, \dots, m$$

Если среди узлов сетки  $\{x_i\}$  нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации  $m < n$ , то определитель системы

не равен нулю  $\det \mathbf{A} \neq 0$ . Следовательно, эта система имеет единственное решение  $\{\dot{c}_0, \dot{c}_1, \dot{c}_2, \dots, \dot{c}_m\}$ , а полином  $p_m(x)$  с такими коэффициентами  $\dot{c}_i$  будет обладать минимальным квадратичным отклонением  $\|r\|_{\min}$ .

### 3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости  $y(x)$ :

Таблица 2 – Таблично заданная функциональная зависимость  $y_i = f(x_i)$

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
$y_i$	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию  $\{y_i\}$ , заданную таблично, алгебраическим полиномом второй степени  $p_2(x)$ :

$$p_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

- Построим меру отклонения полинома  $p_2(x)$  от таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  на множестве точек  $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$ :

$$\|r\| = \sum_{i=0}^4 (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где  $y_i = f(x_i)$  – значение функции в точке  $x_i$ .

- Запишем меру отклонения  $\|r\|$  в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} \|r\| = & (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & + (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_0$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_0} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы  $\mathbf{A}$  и первый элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}a_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ a_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ a_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ b_0 &= 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65\end{aligned}$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_1$  и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial c_1} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы  $\mathbf{A}$  и второй элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ b_1 &= 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ & 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24\end{aligned}$$

- 5) Определим частную производную от меры отклонений  $\|r\|$  по аргументу  $c_2$

и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \|r\|}{\partial c_2} = & 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.76) + c_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.48) + c_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (-0.09) + c_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.22) + c_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ & + 2 \cdot (c_0 + c_1 \cdot (0.55) + c_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты третьей строки матрицы  $\mathbf{A}$  и третий элемент вектора  $\vec{b}$ :

$$\begin{aligned}c_{20} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{21} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38 \\ c_{22} &= (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49 \\ b_2 &= 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ &\quad 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94\end{aligned}$$

- 6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов  $c_0, c_1, c_2$  аппроксимирующего полинома  $p_2(x)$  необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5 \cdot c_0 - 0.56 \cdot c_1 + 1.18 \cdot c_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot c_0 + 1.18 \cdot c_1 - 0.38 \cdot c_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot c_0 - 0.38 \cdot c_1 + 0.49 \cdot c_2 = 5.94 \end{cases}$$

- 7) Решение этой системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса:

$$\begin{cases} c_0 = 4.66 \\ c_1 = 0.80 \\ c_2 = 1.52 \end{cases}$$

Таким образом, аппроксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

- 8) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и результаты вычислений аппроксимации.

проксимирующего алгебраического полинома второго порядка  $p_2(x)$  (сплошная линия).

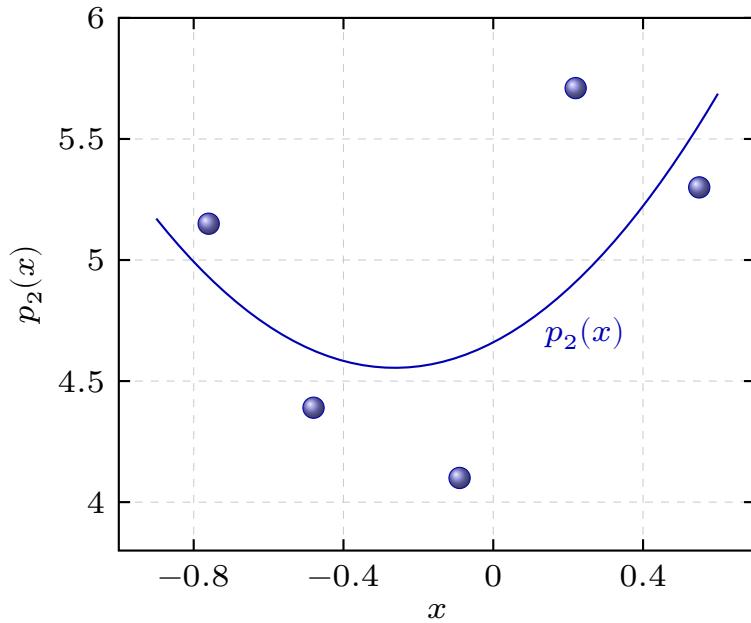


Рисунок 2 – График таблично заданной функции  $y_i = f(x_i)$  (маркеры) и аппроксимирующего алгебраического полинома  $p_2(x)$  (сплошная линия)

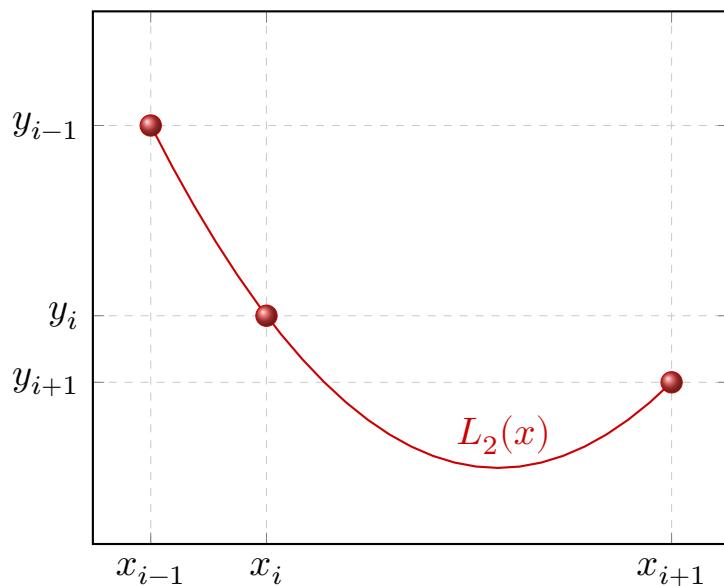
## 4 Численное дифференцирование

Задача численного дифференцирования состоит в приближенном вычислении производных функции  $y(x)$  по заданным в конечном числе точек  $\{x_i\}$  значениям этой функции.

Численное дифференцирование применяется, если функцию  $y(x)$  трудно или невозможно продифференцировать аналитически, например, если функция является таблично заданной, а также при решении дифференциальных уравнений разностными методами.

Многие формулы численного дифференцирования можно получить, используя интерполяционные формулы. Для этого достаточно заменить функцию  $y(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа  $L_n(x)$  и вычислить производные этого многочлена, используя его явное представление.

Рассмотрим произвольную сетку  $\{x_i\}$  и проведем интерполирование функции  $y(x)$  в узлах сетки  $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$  полиномом Лагранжа второго порядка, приближенно полагая  $y(x) \approx L_2(x)$  для  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ :



$$\begin{aligned}
L_2(x) = & \frac{(x - x_i) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
& + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
& + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

где  $y_{i-1} = y(x_{i-1})$ ,  $y_i = y(x_i)$ ,  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  – значение функции  $y(x)$  в узлах сетки.

Первая производная многочлена Лагранжа  $L_2(x)$ :

$$\begin{aligned}
L'_2(x) = & \frac{2x - x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
& + \frac{2x - x_{i-1} - x_{i+1}}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
& + \frac{2x - x_{i-1} - x_i}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Это выражение можно принять за приближенное значение первой производной  $y'(x)$  в любой точке отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ . Например, в точке  $x = x_i$  первая производная от функции  $y(x)$  приближенно равна:

$$\begin{aligned}
y'(x_i) \approx L'_2(x_i) = & \frac{x_i - x_{i+1}}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
& + \frac{(x_i - x_{i-1}) + (x_i - x_{i+1})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
& + \frac{x_i - x_{i-1}}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
\end{aligned}$$

Вторую производную полинома Лагранжа можно принять за приближен-

ное значение второй производной от функции  $y(x)$  в любой точке отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ :

$$\begin{aligned}
 y''(x) \approx L_2''(x) &= \frac{2}{(x_{i-1} - x_i) \cdot (x_{i-1} - x_{i+1})} \cdot y_{i-1} + \\
 &+ \frac{2}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1})} \cdot y_i + \\
 &+ \frac{2}{(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot (x_{i+1} - x_i)} \cdot y_{i+1}
 \end{aligned}$$

На равномерной сетке  $\{x_i\}$ , расстояние между соседними узлами которой одинаково, выражения для первой и второй производной в точке  $x = x_i$  упрощаются:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2},$$

где  $h = (x_i - x_{i-1}) = (x_{i+1} - x_i)$  – шаг сетки.

Для приближенного вычисления производных более высоких порядков  $y^{(n)}(x)$  уже недостаточно полинома Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ . Поэтому необходимо использовать полиномы более высокого порядка, что приводит к увеличению числа узлов аппроксимации.

Следует отметить, что порядок погрешности аппроксимации производных от функции  $y(x)$  зависит как от порядка интерполяционного полинома, так и от расположения узлов сетки  $\{x_i\}$ .

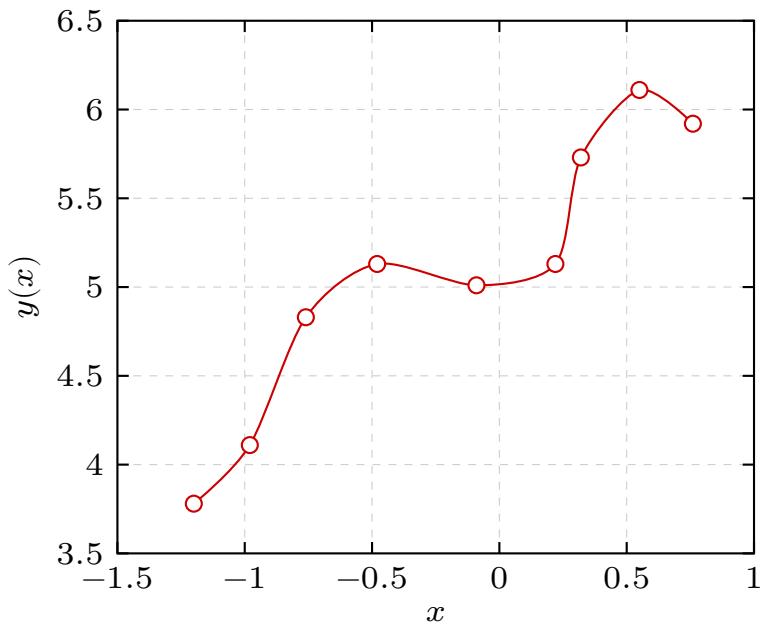
#### 4.1 Численное дифференцирование функции заданной таблично

Известно множество данных (узлов сетки)  $\{x_i\}$  в которых определены значения функции  $\{f(x_i)\}$ :

Таблица 3 – Таблично заданная функциональная зависимость  $y_i = f(x_i)$

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$x_i$	-1.2	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55	0.76
$y_i$	3.78	4.11	4.83	5.13	5.01	5.13	5.73	6.11	5.92

1) Построим график функции  $y(x)$ , используя данные таблицы 3.

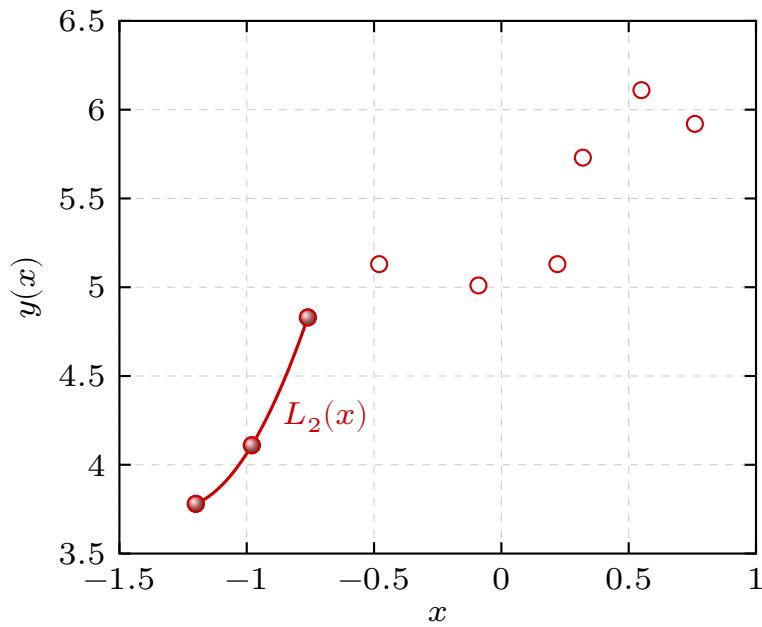


2) Аппроксимируем функцию  $y(x)$  в узлах  $\{x_0, x_1, x_2\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-1.20 - (-0.98))(-1.20 - (-0.76))} \cdot 3.78 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.76))}{(-0.98 - (-1.20))(-0.98 - (-0.76))} \cdot 4.11 + \\
 & + \frac{(x - (-1.20))(x - (-0.98))}{(-0.76 - (-1.20))(-0.76 - (-0.98))} \cdot 4.83
 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_0, x_2]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 4.028925620 \cdot x^2 + 10.28305785 \cdot x + 10.31801653$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_1 = -0.98$ :

$$y'_1 = y'(x_1) = y'(-0.98) \approx L'_2(-0.98) = 2.386363635$$

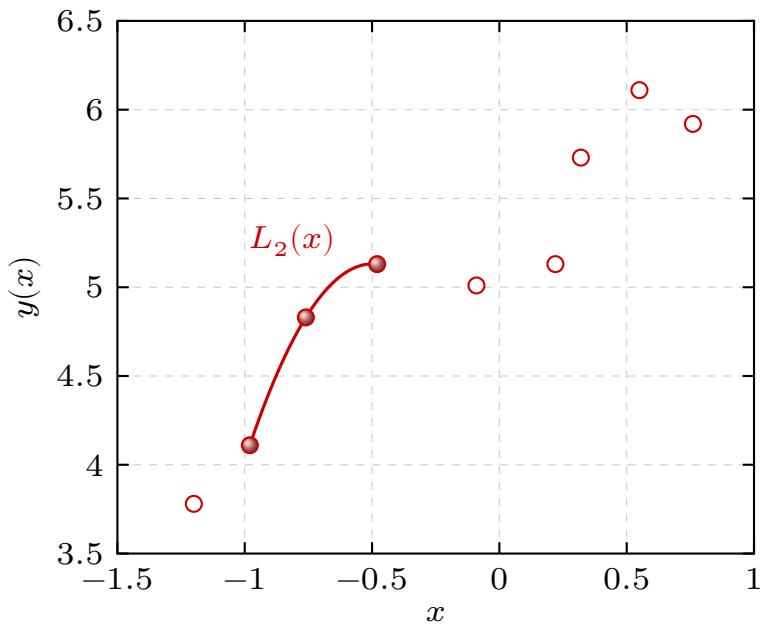
$$y''_1 = y''(x_1) = y''(-0.98) \approx L''_2(-0.98) = 8.057851240$$

- 3) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_1, x_2, x_3\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.98 - (-0.76))(-0.98 - (-0.48))} \cdot 4.11 + \\ &+ \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.48))}{(-0.76 - (-0.98))(-0.76 - (-0.48))} \cdot 4.83 + \\ &+ \frac{(x - (-0.98))(x - (-0.76))}{(-0.48 - (-0.98))(-0.48 - (-0.76))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_1, x_3]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -4.402597390 \cdot x^2 - 4.387792189 \cdot x + 4.038218187$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_2 = -0.76$ :

$$y'_2 = y'(x_2) = y'(-0.76) \approx L'_2(-0.76) = 2.304155844$$

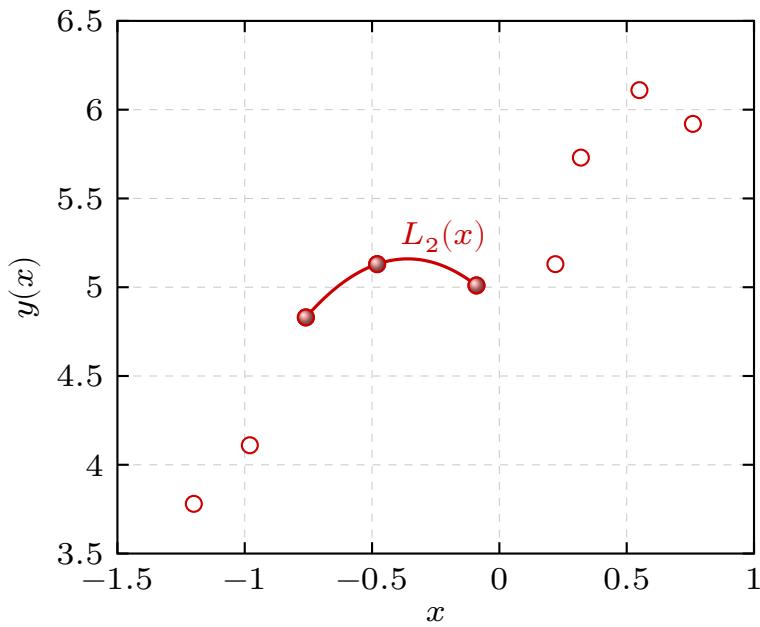
$$y''_2 = y''(x_2) = y''(-0.76) \approx L''_2(-0.76) = -8.805194780$$

- 4) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_2, x_3, x_4\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(-0.76 - (-0.48))(-0.76 - (-0.09))} \cdot 4.83 + \\ &+ \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))}{(-0.48 - (-0.76))(-0.48 - (-0.09))} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.48))}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - (-0.48))} \cdot 5.01 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_2, x_4]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -2.058389370 \cdot x^2 - 1.480974249 \cdot x + 4.893385272$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_3 = -0.48$ :

$$y'_3 = y'(x_3) = y'(-0.48) \approx L'_2(-0.48) = 0.495079546$$

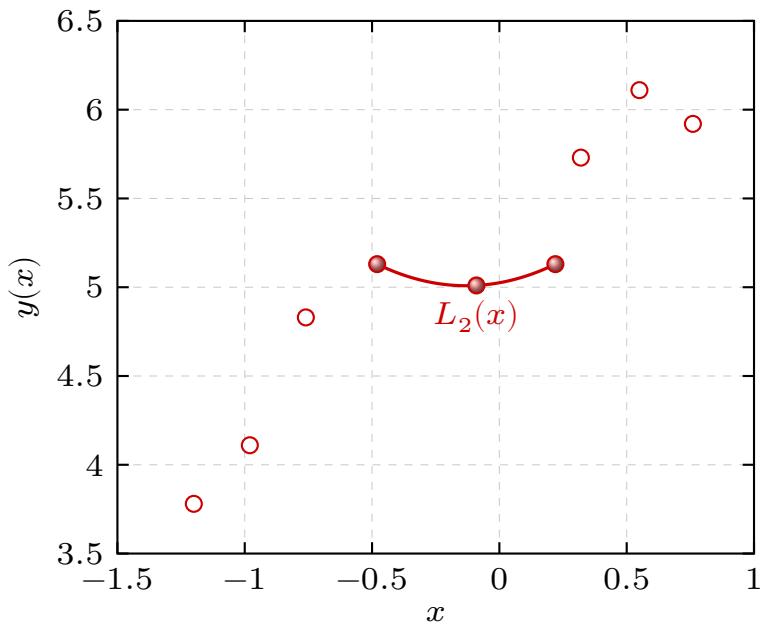
$$y''_3 = y''(x_3) = y''(-0.48) \approx L''_2(-0.48) = -4.116778740$$

- 5) Апроксимацию функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_3, x_4, x_5\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(-0.48 - (-0.09))(-0.48 - 0.22)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.48))(x - 0.22)}{(-0.09 - (-0.48))(-0.09 - 0.22)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x - (-0.48))(x - (-0.09))}{(0.22 - (-0.48))(0.22 - (-0.09))} \cdot 5.13 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_3, x_5]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 0.9925558300 \cdot x^2 + 0.2580645177 \cdot x + 5.025186105$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_4 = -0.09$ :

$$y'_4 = y'(x_4) = y'(-0.09) \approx L'_2(-0.09) = 0.0794044683$$

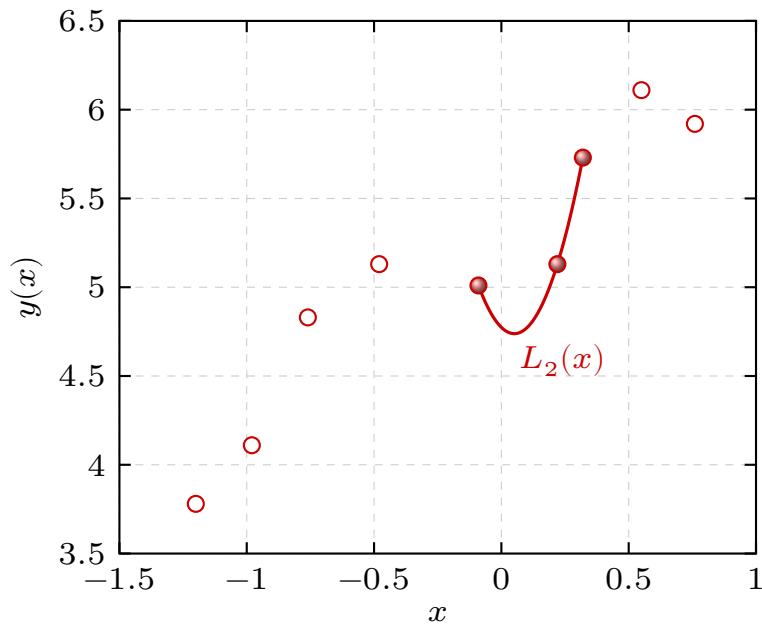
$$y''_4 = y''(x_4) = y''(-0.09) \approx L''_2(-0.09) = 1.985111660$$

- 6) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_4, x_5, x_6\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.32)} \cdot 5.01 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.32)}{(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.32)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.32 - (-0.09))(0.32 - 0.22)} \cdot 5.73 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_4, x_6]$  имеет вид:

$$L_2(x) = 13.69000778 \cdot x^2 - 1.392604236 \cdot x + 4.773776556$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_5 = 0.22$ :

$$y'_5 = y'(x_5) = y'(0.22) \approx L'_2(0.22) = 4.630999187$$

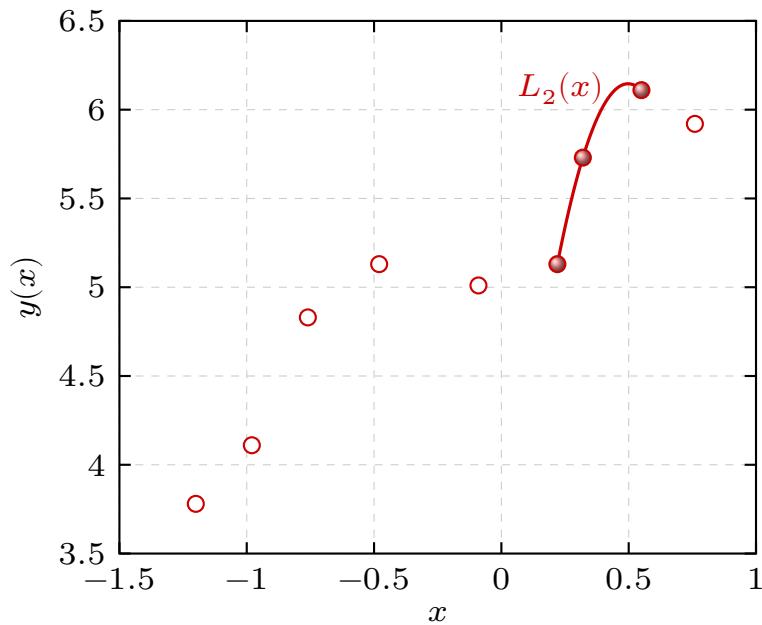
$$y''_5 = y''(x_5) = y''(0.22) \approx L''_2(0.22) = 27.38001556$$

- 7) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_5, x_6, x_7\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.22 - 0.32)(0.22 - 0.55)} \cdot 5.13 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.32 - 0.22)(0.32 - 0.55)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.22)(x - 0.32)}{(0.55 - 0.22)(0.55 - 0.32)} \cdot 6.11 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_5, x_7]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -13.17523062 \cdot x^2 + 13.11462456 \cdot x + 2.882463758$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_6 = 0.32$ :

$$y'_6 = y'(x_6) = y'(0.32) \approx L'_2(0.32) = 4.682476963$$

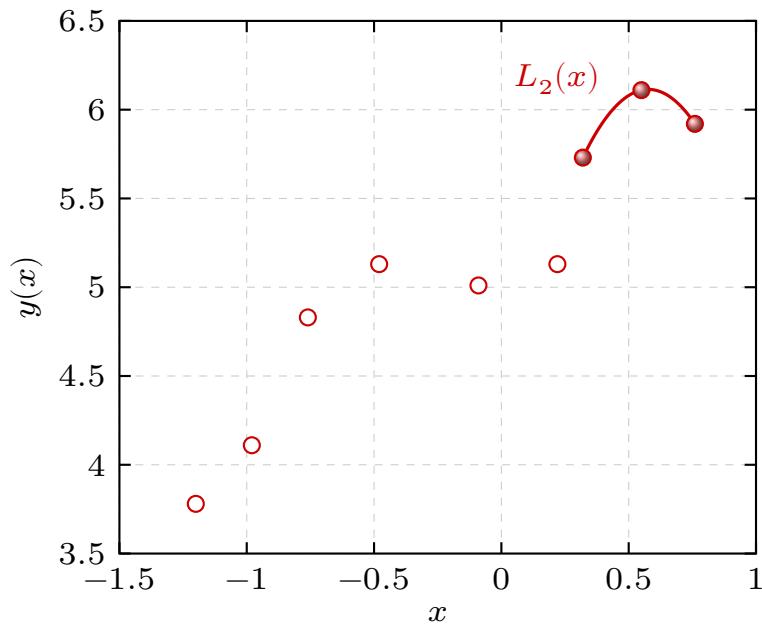
$$y''_6 = y''(x_6) = y''(0.32) \approx L''_2(0.32) = -26.35046124$$

- 8) Аппроксимация функции  $y(x)$  в узлах  $\{x_6, x_7, x_8\}$  полиномом Лагранжа второго порядка  $L_2(x)$ , используя данные таблицы 3:

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x - 0.55)(x - 0.76)}{(0.32 - 0.55)(0.32 - 0.76)} \cdot 5.73 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.76)}{(0.55 - 0.32)(0.55 - 0.76)} \cdot 6.11 + \\ &+ \frac{(x - 0.32)(x - 0.55)}{(0.76 - 0.32)(0.76 - 0.55)} \cdot 5.92 \end{aligned}$$

Проводя элементарные алгебраические преобразования полином Лагранжа в пределах отрезка  $[x_6, x_8]$  имеет вид:

$$L_2(x) = -5.811217790 \cdot x^2 + 6.707933391 \cdot x + 4.178530017$$



Определим первую и вторую производную функции  $y(x)$  в точке  $x_7 = 0.55$ :

$$y'_7 = y'(x_7) = y'(0.55) \approx L'_2(0.55) = 0.315593822$$

$$y''_7 = y''(x_7) = y''(0.55) \approx L''_2(0.55) = -11.62243558$$

- 9) Таким образом, определены значения первой  $y'(x)$  и второй  $y''(x)$  производной функции  $y(x)$  в каждом внутреннем узле сетки:

Таблица 4 – Значения первой и второй производных функции  $y(x)$  во внутренних узлах сетки  $\{x_i\}$

$i$	1	2	3	4	5	6	7
$x_i$	-0.98	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.32	0.55
$y'_i$	2.39	2.30	0.50	0.08	4.63	4.68	0.32
$y''_i$	8.06	-8.81	-4.12	1.99	27.38	-26.35	-11.62

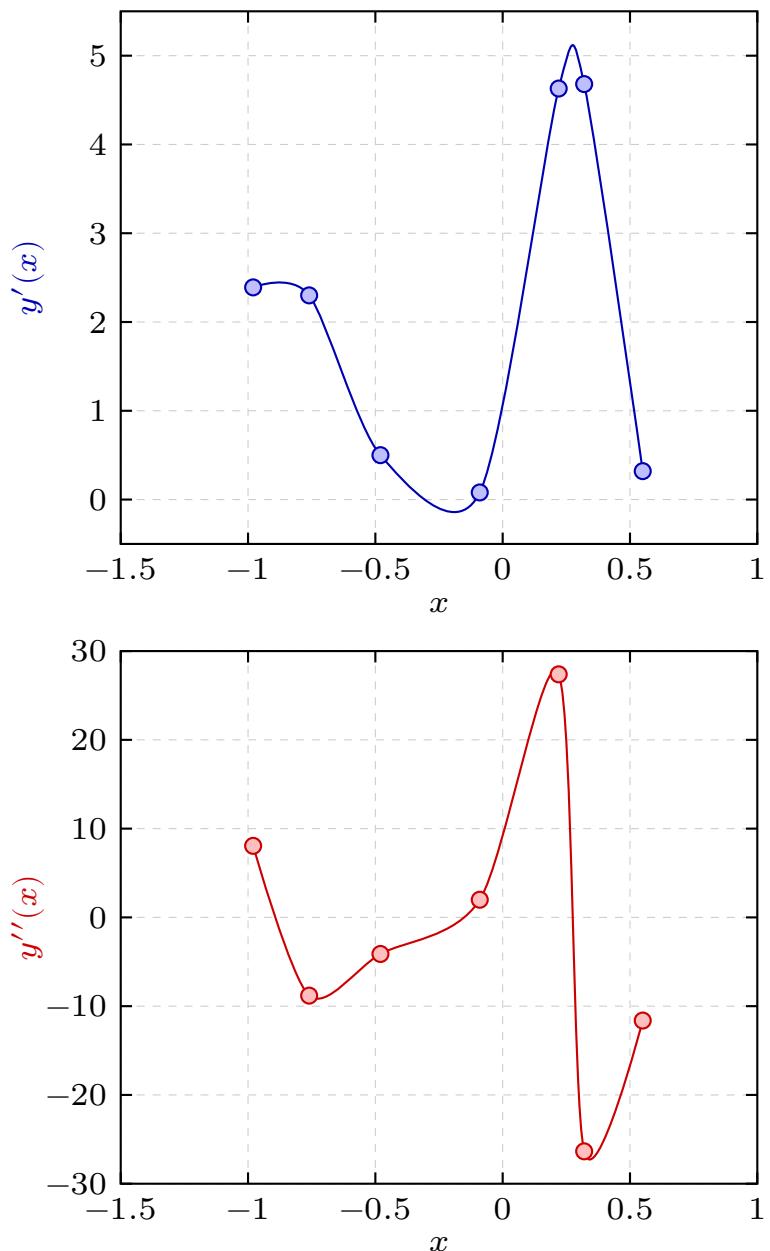


Рисунок 3 – Графики первой  $y'(x)$  и второй  $y''(x)$  производной от функции  $y(x)$ , заданной таблично

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.