

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>ВВЕДЕНИЕ . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1 Численное интегрирование. . . . .</b>	<b>4</b>
1.1 Формула прямоугольников . . . . .	6
1.2 Формула трапеций . . . . .	7
1.3 Формула Симпсона . . . . .	8
1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично . . . . .	9
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ . . . . .</b>	<b>15</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

**Цель** данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

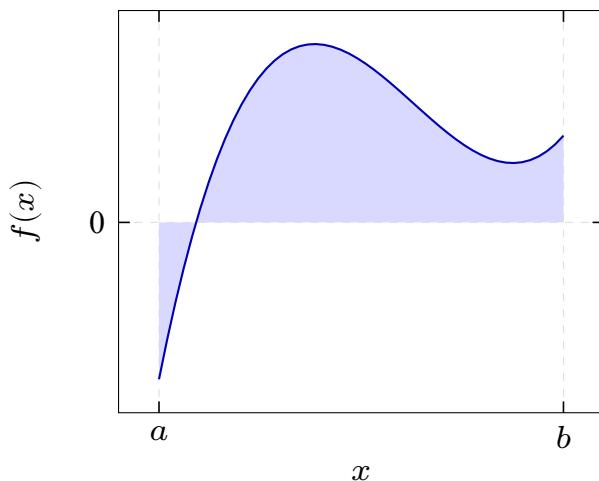
## 1 Численное интегрирование

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $x \in [a, b]$  и известна ее первообразная  $F(x)$ , то определенный интеграл от этой функции в пределах от  $a$  до  $b$  может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где  $F'(x) = f(x)$  – первообразная подынтегральной функции  $f(x)$ .

Численное значение интеграла – это площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями графика функции и осью абсцисс  $Ox$  (выделенная область на графике).



Однако во многих случаях первообразная функция  $F(x)$  не может быть найдена с помощью элементарных средств или является слишком сложной, поэтому вычисление определенного интеграла может быть затруднительным или даже практически невозможным.

Кроме того, на практике подынтегральная функция  $f(x)$  часто задается таблично и тогда само понятие первообразной теряет смысл. Аналогичные вопросы возникают при вычислении кратных интегралов. Поэтому важное значение имеют приближенные и в первую очередь численные методы вычисления определенных интегралов.

*Задача численного интегрирования* функции заключается в вычислении значения определенного интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции  $f(x)$ .

Обычный прием численного вычисления интеграла состоит в том, что данную функцию  $f(x)$  на рассматриваемом отрезке  $x \in [a, b]$  заменяют интерполяющей или аппроксимирующей функцией  $\varphi(x)$  простого вида (например, полиномом), а затем приближенно полагают:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \varphi(x)dx$$

Далее рассматриваются способы приближенного вычисления определенных интегралов вида:

$$I = \int_a^b \varphi(x)dx,$$

основанные на замене интеграла конечной суммой:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i \cdot \varphi(x_i),$$

где  $c_i$  – числовые коэффициенты квадратурной формулы;  $x_i$  – узлы квадратурной формулы, т.е. точки отрезка  $[a, b]$ , ( $i = 0, 1, \dots, n$ ).

На основании свойств определенных интегралов,  $I$  можно представить в виде суммы интегралов по частичным отрезкам:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

Поэтому, для построения формулы численного интегрирования на всем отрезке  $[a, b]$  достаточно построить квадратурную формулу на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  для интеграла:

$$S_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$$

## 1.1 Формула прямоугольников

В методе прямоугольников на частичном отрезке подынтегральная функция заменяется полиномом нулевой степени, то есть константу:

$$f(x) \approx L_0(x) = \text{const}$$

С геометрической точки зрения, в методе прямоугольников площадь криволинейной трапеции (интеграл от функции) на частичном отрезке заменяется площадью прямоугольника, ширина которого будет определяться расстоянием между соответствующими соседними узлами интегрирования, а высота – значением подынтегральной функции в этих узлах.

В зависимости от выбора узла сетки  $\{x_i\}$  для аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  на частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  различают левую и правую формулы прямоугольников: если в качестве значения аппроксимирующего полинома выбирается значение подынтегральной функции на левом конце отрезка  $L_0 \approx f(x_{i-1}) = y_{i-1}$  (рисунок 1), то справедлива левая формула прямоугольников:

$$S_i^- \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_{i-1} \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

а если значение аппроксимирующего полинома соответствует значению подынтегральной функции на правом конце частичного отрезка  $L_0 \approx f(x_i) = y_i$  (рисунок 1), то справедлива правая формула прямоугольников :

$$S_i^+ \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_0(x) dx = y_i \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

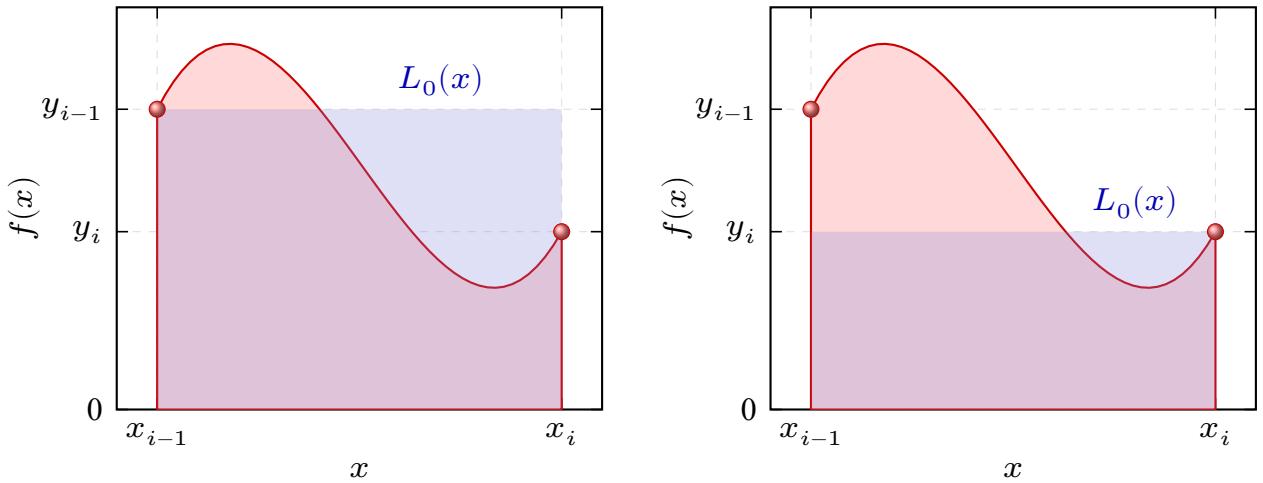


Рисунок 1 – График подынтегральной функции  $f(x)$  и аппроксимирующего полинома  $L_0(x)$  на частичном отрезке для формулы прямоугольников

## 1.2 Формула трапеций

Квадратурная *формула трапеций* является следствием замены на частичном отрезке подынтегральной функции интерполяционным полиномом первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным по множеству узлов сетки  $\{x_{i-1}, x_i\}$ :

$$L_1(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \cdot y_{i-1} + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot y_i.$$

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа на частичном отрезке определяет формулу трапеций:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_1(x) dx = \frac{y_i + y_{i-1}}{2} \cdot (x_i - x_{i-1})$$

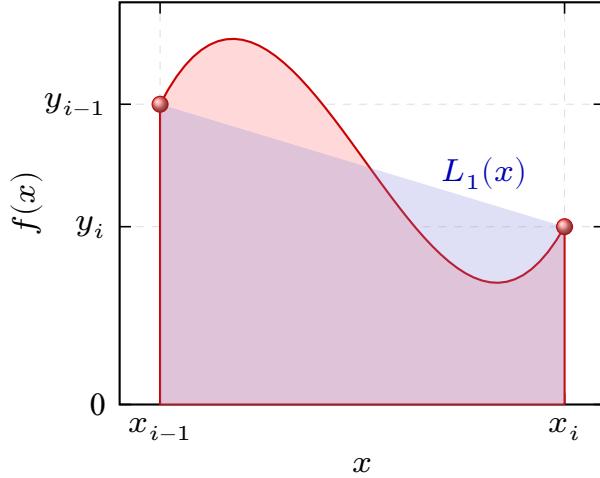


Рисунок 2 – График подынтегральной функции  $f(x)$  и аппроксимирующего полинома  $L_1(x)$  на частичном отрезке для формулы трапеций

### 1.3 Формула Симпсона

На частичном отрезке  $[x_{i-1}, x_i]$  квадратурная *формула Симпсона* является следствием аппроксимации подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени  $f(x) \approx L_2(x)$ , который построен по узлам сетки  $\{x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i\}$ :

$$\begin{aligned}
 L_2(x) = & \frac{(x - x_{i-1/2}) \cdot (x - x_i)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1})} \cdot y_{i-1} + \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x_i - x)}{(x_{i-1/2} - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_{i-1/2} +, \\
 & + \frac{(x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i-1/2})}{(x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i-1/2})} \cdot y_i
 \end{aligned}$$

где  $x_{i-1/2}$  – узел вспомогательной сетки, расположенный между узлами основной сетки  $x_{i-1} < x_{i-1/2} < x_i$

Выражение для полинома Лагранжа в каноническом виде:

$$L_2(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2,$$

где  $c_0, c_1, c_2$  – коэффициенты при соответствующих степенях  $x$  интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  в пределах частичного отрезка  $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ .

Интегрирование интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2(x)$  на частич-

ном отрезке  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$  определяет формулу Симпсона:

$$S_i \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} L_2(x) dx = c_0 \cdot (x_{i+1} - x_{i-1}) + c_1 \cdot \frac{x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2}{2} + c_2 \cdot \frac{x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3}{3}.$$

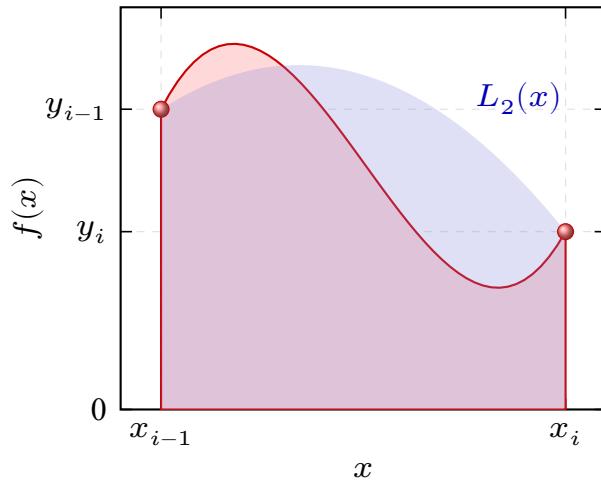


Рисунок 3 – График подынтегральной функции  $f(x)$  и аппроксимирующего полинома  $L_2(x)$  на частичном отрезке для формулы Симпсона

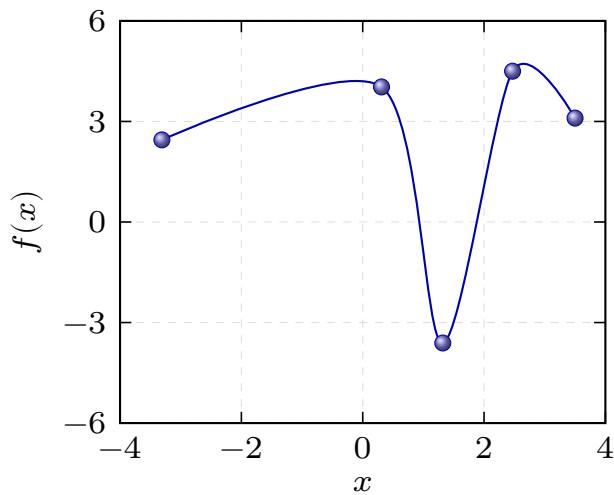
#### 1.4 Численное интегрирования функции заданной таблично

На множестве узлов сетки  $\{x_i\}$  определены значения некоторой функции  $\{y_i\} = f(x_i)$ :

Таблица 1 – Таблично заданная функциональная зависимость

$i$	0	1	2	3	4
$x_i$	-3.31	0.31	1.32	2.47	3.50
$y_i$	2.45	4.03	-3.61	4.50	3.10

- Построим график функции  $f(x)$  заданной таблично.

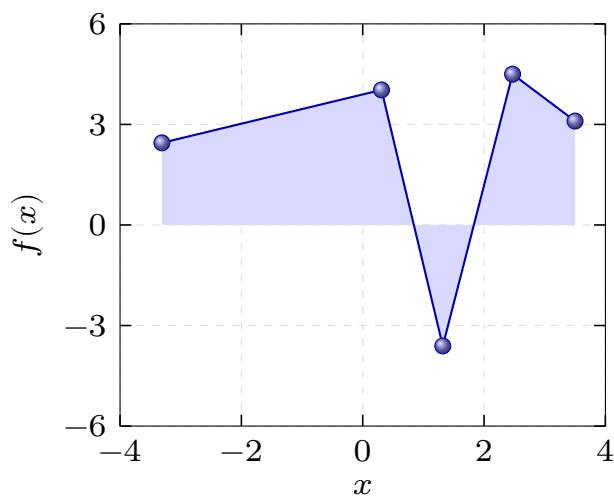


2) Рассмотрим *метод трапеций* для нахождения численного значения интеграла от функции  $f(x)$ , заданной таблично на отрезке  $x \in [-3.31, 3.50]$ .

Разобьем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup [x_3, x_4]$$

На каждом частичном отрезке квадратурная формула является следствием замены подынтегральной функции  $f(x)$  интерполяционным полиномом Лагранжа первой степени  $f(x) \approx L_1(x)$ , построенным на узлах  $\{x_{i-1}, x_i\}$ , т.е. прямой соединяющей два соседних узла.



Определим длину частичных отрезков:

$$h_1 = (x_1 - x_0) = 0.31 - (-3.31) = 3.62$$

$$h_2 = (x_2 - x_1) = 1.32 - 0.31 = 1.01$$

$$h_3 = (x_3 - x_2) = 2.47 - 1.32 = 1.15$$

$$h_4 = (x_4 - x_3) = 3.50 - 2.47 = 1.03$$

По методу трапеций, определим значение интеграла на каждом частичном отрезке:

$$S_1 = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot h_1 = \frac{2.45 + 4.03}{2} \cdot 3.62 = 11.73$$

$$S_2 = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h_2 = \frac{4.03 + 3.61}{2} \cdot 1.01 = 0.21$$

$$S_3 = \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \cdot h_3 = \frac{-3.61 + 4.50}{2} \cdot 1.15 = 0.51$$

$$S_4 = \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \cdot h_4 = \frac{4.50 + 3.10}{2} \cdot 1.03 = 3.91$$

Определим интеграл  $I$  на всем отрезке интегрирования  $[-3.31, 3.50]$ , воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 11.73 + 0.21 + 0.51 + 3.91 = 16.37.$$

- 3) Рассмотрим **метод Симпсона** для нахождения численное значение интеграла функции  $f(x)$  заданной таблично на отрезке  $x \in [-3, 31; 3, 50]$ .

Разобъем весь отрезок интегрирования на частичные отрезки:

$$[x_0, x_4] = [x_0, x_2] \cup [x_2, x_4]$$

На каждом из двух отрезков построим интерполяционный полинома Лагранжа  $L_2(x)$

- 4) В пределах первого частичного отрезка  $[-3, 31; 1, 32]$  построим полином Лагран-

жа  $L_2(x)$  по узлам интерполяции  $x_0 = -3,31; x_1 = 0,31; x_2 = 1,32$ :

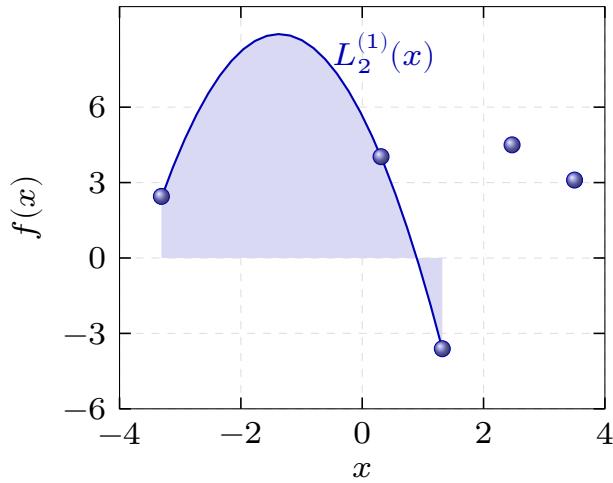
$$\begin{aligned} L_2^{(1)}(x) &= \frac{(x - 0,31)(x - 1,32)}{((-3,31 - 0,31)(-3,31 - 1,32)} \cdot 2,45 + \\ &+ \frac{(x - (-3,31))(x - 1,32)}{(0,31 - (-3,31))(0,31 - 1,32)} \cdot 4,03 + \\ &+ \frac{(x - (-3,31))(x - 0,31)}{(1,32 - (-3,31))(1,32 - 0,31)} \cdot (-3,61) \end{aligned}$$

В результате алгебраических преобразований получим:

$$L_2^{(1)}(x) = -1,73 \cdot x^2 - 4,74 \cdot x + 5,66$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2^{(1)}(x)$  на первом частичном отрезке:

$$I_1 = \int_{-3,31}^{1,32} L_2^{(1)}(x) dx = \int_{-3,31}^{1,32} (-1,73 \cdot x^2 - 4,74 \cdot x + 5,66) dx = 25,88$$



5) В пределах второго частичного отрезка  $[1,32; 3,50]$  построим полином Лагранжа  $L_2(x)$  по узлам интерполяции  $x_2 = 1,32; x_3 = 2,47; x_4 = 3,50$ :

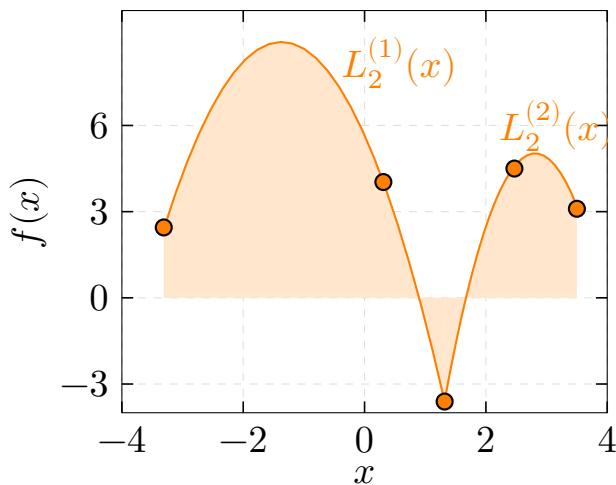
$$\begin{aligned} L_2^{(2)}(x) &= \frac{(x - 2,47)(x - 3,50)}{(1,32 - 2,47)(1,32 - 3,50)} \cdot (-3,61) + \\ &+ \frac{(x - 1,32)(x - 3,50)}{(2,47 - 1,32)(2,47 - 3,50)} \cdot 4,50 + \\ &+ \frac{(x - 1,32)(x - 2,47)}{(3,50 - 1,32)(3,50 - 2,47)} \cdot 3,10 \end{aligned}$$

После тривиальных алгебраических преобразований:

$$L_2^{(2)}(x) = -3,87 \cdot x^2 + 21,76 \cdot x - 25,56$$

Определим интеграл от интерполяционного полинома Лагранжа  $L_2^{(2)}(x)$  на втором частичном отрезке:

$$I_2 = \int_{1,32}^{3,50} L_2^{(2)}(x) dx = \int_{1,32}^{3,50} (-3,87 \cdot x^2 + 21,76 \cdot x - 25,56) dx = 6,13$$



- 6) Определим интеграл всем отрезке  $[-3,31; 3,50]$  воспользовавшись свойством аддитивности интеграла:

$$I = I_1 + I_2 = 25,88 + 6,13 = 32,01$$

- 7) Сравнивая численные значения интегралов рассчитанные по методу трапеций и Симпсона, можно сделать вывод о том, что значение интегралов существенно различаются: определенный интеграл рассчитанный по методу Симпсона в 1,96 больше, чем по методу трапеций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальный уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$ , которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке  $\omega_\tau$ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке  $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ . Построены графики функций  $u_1(t)$  и  $u_2(t)$  на основании вычисленных значений неизвестных функций в различных узлах временной сетки  $\omega_\tau$ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для  $u_1(t)$  составляет  $\epsilon_1 = 5, 1$ , а для функции  $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$ .

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

## **СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.