

## СОДЕРЖАНИЕ

1 Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений . . .	2
1.1 Виды краевых условий . . . . .	3
1.2 Построение разностных схем методом баланса . . . . .	4
1.2.1 Физическая интерпретация краевых задач . . . . .	6
1.2.2 Расчётная сетка . . . . .	8
1.2.3 Разностная схема для дифференциального уравнения . . . .	10
1.2.4 Разностная аппроксимация краевых условий . . . . .	15
1.3 Метод решения систем линейных уравнений с матрицами специ- ального вида . . . . .	16
1.3.1 Метод прогонки для трехточечных уравнений . . . . .	17
1.3.2 Поточковый вариант метода прогонки . . . . .	19
1.4 Численное решение краевой задачи методом прогонки . . . . .	23

## 1 Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Исследование большого круга естественно-научных и инженерных проблем приводит к математическим задачам, относящимся к решению дифференциальных уравнений и граничных проблем для них, интегральных и других функциональных уравнений.

В практике чаще всего встречаются задачи, для которых точное решение не может быть найдено или оно имеет невысокую эффективность. Поэтому приближенные методы решения задач граничных задач, например, задач математической физики, в особенности метод сеток получили широкое распространение.

Основные *достоинства приближенных методов* заключаются в том, что они *являются универсальными и эффективными*, так как позволяют находить приближенное решение для широкого класса задач новейших областей науки, техники и технологий. Как правило, такие задачи формулируются в виде основного дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений) и дополнительных (граничных) условий, которые обеспечивают существование и единственность решения.

Под краевой (граничной) задачей понимают задачу о нахождении решения дифференциального уравнения (системы дифференциальных уравнений), удовлетворяющего краевым условиям на границе рассматриваемой области.

В каждой краевой задаче искомое решение должно удовлетворять дифференциальному в рассматриваемой области  $\Omega$ , а также некоторому дополнительному условию на границе  $\Sigma$  области  $\Omega$ . Например, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} = f \left( x, y, \frac{dy(x)}{dx} \right), \quad (1.1)$$

где  $y(x)$  – искомая неизвестная функция;  $x$  – независимое переменное;  $f$  – функция, определенная в некоторой замкнутой области  $\Omega$  изменения своих аргументов.

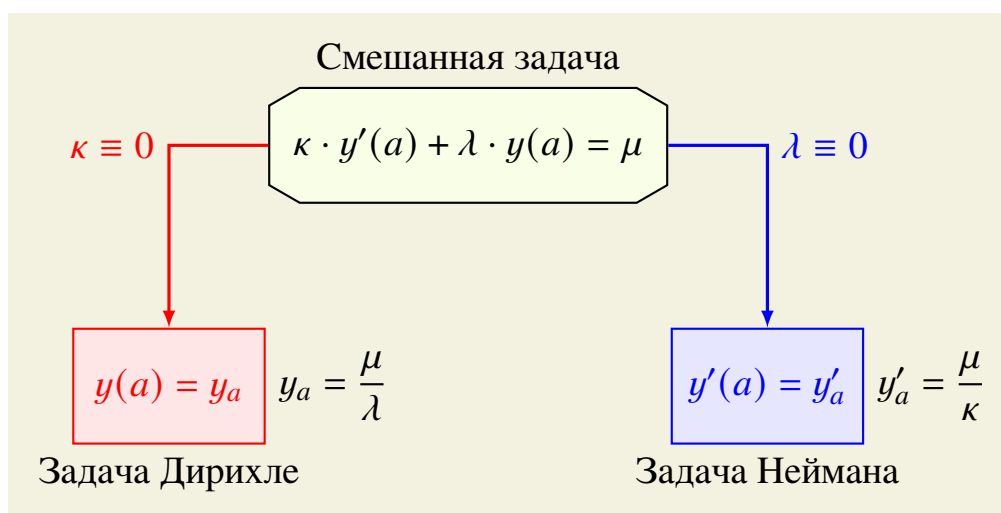


Рисунок 1.1 – Виды краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка

### 1.1 Виды краевых условий

В зависимости от вида краевого условия на границе  $\Sigma = \{a, b\}$  различают три основных типа граничных задач: задачу Дирихле, Неймана и смешанную краевую задачу (таблица 1). Необходимо отметить, что в отличие от задачи Коши, для которой при выполнении определенных условий гарантируется существование и единственность решения, *краевая задача* для того же дифференциального уравнения *может не иметь решения* или иметь несколько решений (в том числе и бесконечное множество решений).

Таблица 1 – Основные виды краевых условий для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1.1)

№	Краевое условие	Граница $x = a$	Граница $x = b$
1	Дирихле	$y(a) = y_a$	$y(b) = y_b$
2	Неймана	$y'(a) = y'_a$	$y'(b) = y'_b$
3	Смешанная	$\kappa_a \cdot y'(a) + \lambda_a \cdot y(a) = \mu_a$	$\kappa_b \cdot y'(b) + \lambda_b \cdot y(b) = \mu_b$

С формальной точки зрения, задача Дирихле и Неймана являются частны-

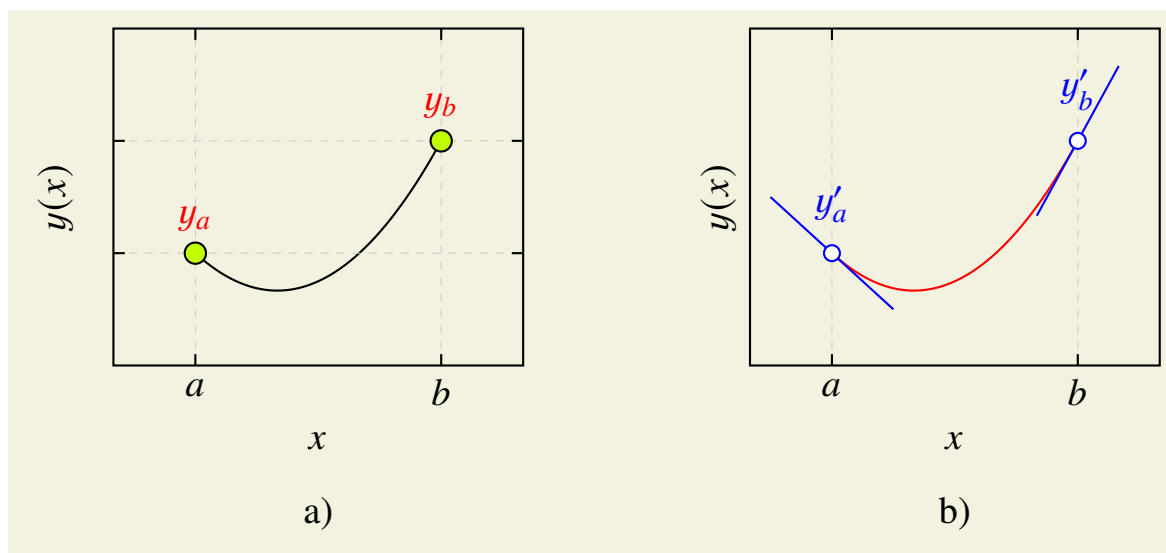


Рисунок 1.2 – Графическая иллюстрация постановки краевых задач  
(a) – Дирихле; (b) – Неймана

ми случаями смешанной краевой задачи (рисунок 1.1): например, если  $\kappa_a \equiv 0$ , то смешанная краевая задача трансформируется в задачу Дирихле:

$$0 \cdot y'(a) + \lambda_a \cdot y(a) = \mu_a, \quad \Rightarrow \quad y(a) = \frac{\mu_a}{\lambda_a} = y_a,$$

а если полагать  $\lambda_a \equiv 0$ , то формулируется задача Неймана:

$$\kappa_a \cdot y'(a) + 0 \cdot y(a) = \mu_a, \quad \Rightarrow \quad y'(a) = \frac{\mu_a}{\kappa_a} = y'_a.$$

Поэтому для общности, далее будем рассматривать только смешанную краевую задачу.

## 1.2 Построение разностных схем методом баланса

Различные физические процессы (теплопроводности или диффузии, колебаний, газодинамики и т. д.) характеризуются некоторыми интегральными законами сохранения (тепла, массы, количества движения, энергии и т. д.). При выводе дифференциальных уравнений различных математических моделей объектов или явлений отталкиваются от некоторого интегрального соотношения (уравнения баланса), выражающего закон сохранения для малого объема. Дифференциальное уравнение получается из уравнения баланса при стягивании рассматриваемого объема к нулю в предположении существования непрерывных производных, входящих в уравнение.

Метод конечных разностей физически означает переход от непрерывной среды к некоторой ее дискретной модели. При таком переходе естественно требовать, чтобы основные свойства физического процесса сохранялись, т.е. выполнялись законы сохранения различных физических субстанций (количества тепла, массы, заряда, импульса и т.д.). Разностные схемы, выражающие на сетке законы сохранения физических субстанций, называют консервативными (или дивергентными). Законы сохранения для всей сеточной области (“интегральные законы сохранения”) для консервативных схем должны быть алгебраическим следствием разностных уравнений.

Для получения консервативных разностных схем естественно исходить из уравнений баланса, записанных для элементарных объемов (ячеек) сеточной области. Входящие в эти уравнения балансы интегралы и производные следует заменить приближенными разностными выражениями. В результате получаем однородную разностную схему. Такой метод получения консервативных однородных разностных схем называется интегро-интерполяционным методом (методом баланса).

Рассмотрим краевую задачу, включающую обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка и дополнительные (граничные) условия на концах отрезка  $[0, \ell]$ :

$$-(k(x) \cdot u'(x))' + r(x) \cdot u(x) = g(x), \quad x \in [0, \ell] \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} -k(0) \cdot u'(0) + \lambda_1 \cdot u(0) = \mu_1 \\ k(\ell) \cdot u'(\ell) + \lambda_2 \cdot u(\ell) = \mu_2 \end{cases}, \quad (1.3)$$

где  $u(x)$  – искомая неизвестная функция;  $k(x), r(x), g(x)$  – известные (заданные) функции, удовлетворяющие условиям  $k(x) > 0, r(x) \geq 0$ ;  $\lambda_1, \mu_1$  и  $\lambda_2, \mu_2$  – заданные (известные) числа;  $\ell$  – размер области (длина отрезка).

Численные методы решения краевых задач основаны на замене дифференциальной задачи (1.2), (1.3) системой линейных алгебраических уравнений, т.е. разностной схемой.

*Разностная схема* – совокупность разностных алгебраических уравнений, аппроксимирующих основное дифференциальное уравнение и дополнительные (граничные) условия исходной дифференциальной задачи.

### 1.2.1 Физическая интерпретация краевых задач

Уравнение (1.2) можно интерпретировать как уравнение установившегося распределения температуры  $u(x)$  в стержне длины  $\ell$ . В такой постановке краевую задачу (1.2), (1.3) можно записать в виде:

$$w'(x) + r(x) \cdot u(x) = g(x) \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} w(0) + \lambda_1 \cdot u(0) = \mu_1 \\ -w(\ell) + \lambda_2 \cdot u(\ell) = \mu_2 \end{cases}, \quad (1.5)$$

где  $w(x)$  – тепловой поток, величина которого в соответствии с [законом теплопроводности Фурье](#) пропорциональна градиенту температуры:

$$w(x) = -k(x) \cdot u'(x); \quad (1.6)$$

$k(x)$  – коэффициент температуропроводности материала стержня;  $r(x) \cdot u(x)$  – мощность распределенных стоков тепла ( $r(x) < 0$  источников тепла) вдоль боковой поверхности стержня;  $r(x)$  – коэффициент конвекционного теплообмена боковой поверхности стержня с окружающей средой;  $g(x) > 0$  – мощность распределенных источников ( $g(x) < 0$  стоков) тепла внутри стержня.

Граничные условия (1.5) определяют процесс теплообмена концов стержня с окружающей средой по закону [конвекционного теплообмена Ньютона](#) – “Тепловой поток тепла  $q$  через поверхность материального тела в окружающую среду прямо пропорционален разнице температур между поверхностью тела и окружающей средой”:

$$q = \mathring{r} \cdot (u - \mathring{u}),$$

где  $\mathring{r}$  – коэффициент конвективного теплообмена;  $u$  – температура поверхности тела;  $\mathring{u}$  – температура окружающей среды.

Процессы выделения или поглощения тепла в твердом теле могут быть связаны с рядом явлений:

- 1) выделение тепла ( $g(x) > 0$ ) при пропускании электрического тока через стержень (закон Джоуля-Ленца), вследствие протекания в объеме стержня каких-либо экзотермических химических реакций;
- 2) поглощение тепла ( $g(x) < 0$ ) за счет термоэлектрических явлений (например, эффект Пельтье), а также вследствие протекания эндотермических химических реакций в объеме материала стержня.

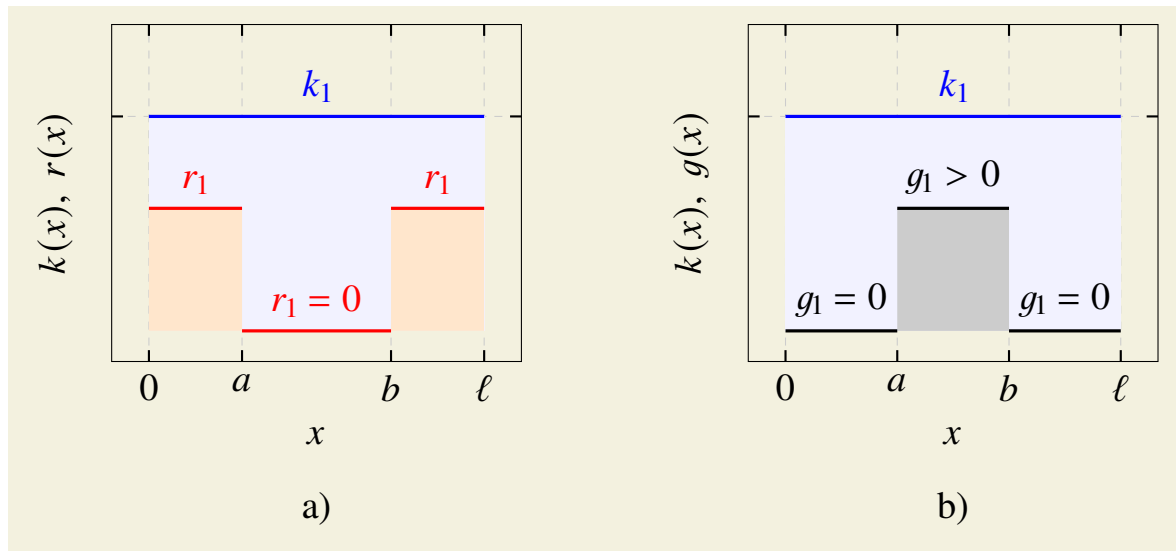


Рисунок 1.3 – Примеры краевых задач с разрывными коэффициентами  $r(x)$  и  $g(x)$  дифференциального уравнения установившегося распределения температуры в однородном стержне длиной  $\ell$ :

- (a) – локальная теплоизоляция боковой поверхности стержня;  
 (b) – локальный нагрев участка стержня

Необходимо отметить, что в зависимости от физического смысла постановки краевых задач коэффициенты дифференциального уравнения задачи могут быть и разрывными функциями (рисунки 1.3 и 1.4), например:

- 1) *Однородный стержень* с локальной теплоизоляцией, т.е. конвекционный теплообмен участка  $[a, b]$  боковой поверхности стержня с окружающей средой отсутствует (рисунок 1.3 а):

$$r(x) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & a < x \leq b \\ r_1, & b < x \leq \ell \end{cases},$$

где  $[a, b]$  – теплоизолированный участок однородного стержня ( $k(x) = k_1 = \text{const}$ ).

- 2) *Однородный стержень* с локальным нагревом, т.е. на участке стержня  $[a, b]$

происходит нагрев стержня за счет внешних источников тепловой энергии:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq a \\ g_1, & a < x \leq b \\ 0, & b < x \leq \ell \end{cases},$$

где  $[a, b]$  – участок локального нагрева стержня внешними источниками тепловой энергии.

- 3) *Неоднородный стержень*, состоящий из двух разнородных материалов, которые отличаются коэффициентами теплопроводности  $k_1 \neq k_2$  и конвекционного теплообмена  $r_1 \neq r_2$  (рисунок 1.4 а):

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq c \\ k_2, & c < x \leq \ell \end{cases}, \quad r(x) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq x \leq c \\ r_2, & c < x \leq \ell \end{cases},$$

где  $c$  – точка контакта двух различных материалов;  $[0, c]$  и  $(c, \ell]$  – участки стержня, состоящие из разных материалов с различными коэффициентами теплопроводности  $k_1 \neq k_2$  и конвекционного теплообмена  $r_1 \neq r_2$ .

- 4) *Неоднородный стержень*, с локальной теплоизоляцией, т.е. конвекционный теплообмен на участке боковой поверхности стержня  $[a, b]$  с окружающей средой отсутствует (рисунок 1.3 б):

$$k(x) = \begin{cases} k_1, & 0 \leq x \leq c \\ k_2, & c < x \leq \ell \end{cases}, \quad r(x) = \begin{cases} r_1, & 0 \leq x \leq a \\ 0, & a < x \leq b \\ r_2, & b < x \leq \ell \end{cases},$$

где  $[a, b]$  – теплоизолированный участок неоднородного стержня ( $r \equiv 0$ ).

### 1.2.2 Расчётная сетка

Для перехода от дифференциальной краевой задачи к системе алгебраических уравнений воспользуемся *разностным методом*. Для этого на отрезке  $[0, \ell]$  введем произвольную неравномерную сетку – конечное упорядоченное множество точек  $\{x_i\}$ , принадлежащих этому отрезку:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_{N-1} < x_N = \ell,$$



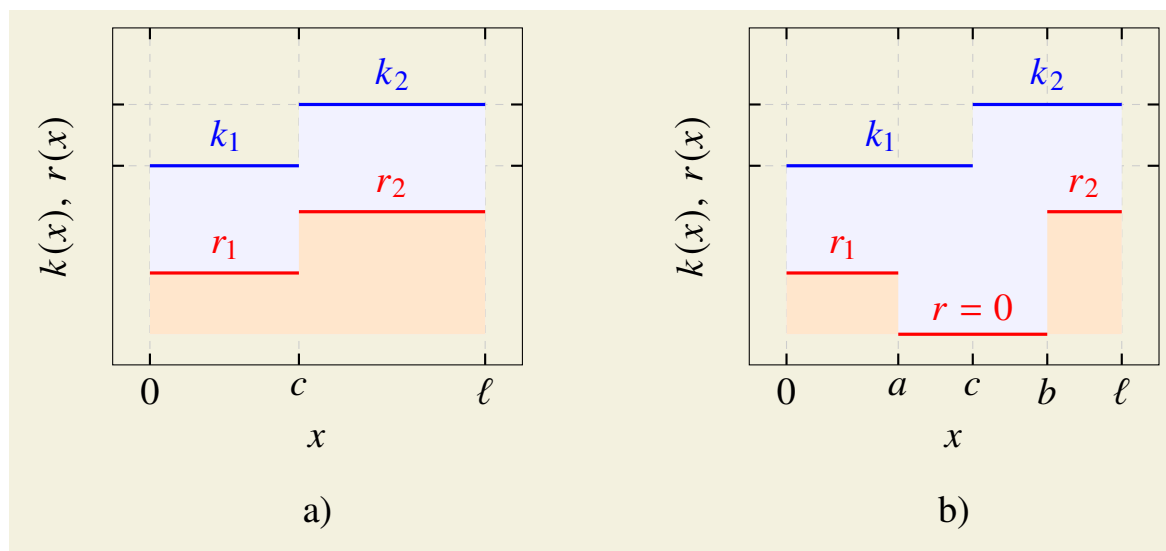


Рисунок 1.4 – Примеры краевых задач с разрывными коэффициентами  $k(x)$  и  $r(x)$  дифференциального уравнения установившегося распределения температуры в неоднородном стержне длиной  $\ell$ :

(а) – свободный теплообмен стержня с окружающей средой;

(б) – теплоизолированный участок боковой поверхности стержня

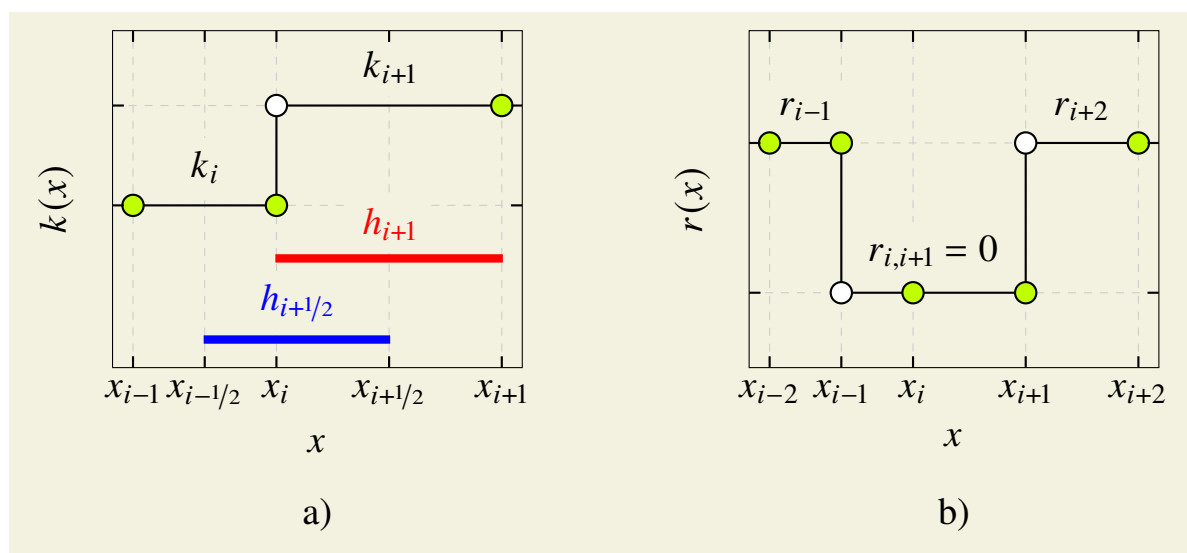


Рисунок 1.5 – Схематическое изображение разрывных коэффициентов (а) теплопроводности  $k(x)$  и (б) конвекционного теплообмена  $r(x)$  в узлах расчётной сетки  $\{x_i\}$  (точки разрыва коэффициентов указаны  $\circ$  – маркером)

где  $x_i \in [0, \ell]$  – узлы сетки;  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  – порядковый номер узла сетки;  $N$  – количество узлов сетки.

Если заданы коэффициенты дифференциального уравнения и *известны их точки разрывов*, то всегда можно выбрать неравномерную сетку так, чтобы точки разрыва коэффициентов  $k(x)$ ,  $r(x)$ ,  $g(x)$  были узлами расчетной сетки (рисунок 1.5).

Выделим на отрезке  $[0, \ell]$  подмножество промежуточных узлов  $\{x_{i\pm 1/2}\}$ :

$$x_{i\pm 1/2} = \frac{x_i + x_{i\pm 1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где  $x_{i\pm 1/2}$  – середины отрезков  $[x_{i-1}, x_i]$  и  $[x_i, x_{i+1}]$ , соответственно.

Расстояние между соседними узлами расчётной сетки  $h_i$  (шаг сетки), как и расстояние между соседними промежуточными узлами,  $\bar{h}_i$  (шаг промежуточной сетки) зависят от номера узла  $i$  сетки (рисунок 1.5):

$$\begin{aligned} h_i &= x_i - x_{i-1}, \\ \bar{h}_i &= x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \frac{h_{i+1} + h_i}{2}. \end{aligned}$$

Значения неизвестной функции  $u(x)$  (температуры) рассмотрим в узлах сетки  $\{x_i\}$  (рисунок 1.6 а), а потоковую величину  $w(x)$  (тепловой поток) – в промежуточных узлах  $\{x_{i\pm 1/2}\}$  (рисунок 1.6 б).

### 1.2.3 Разностная схема для дифференциального уравнения

Для построения разностной схемы для краевой задачи (1.4), (1.5) воспользуемся интегро-интерполяционным методом (или *методом баланса*) построения разностных схем.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение (1.4) в пределах контрольной области  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} w'(x) dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x) \cdot u(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(x) dx$$

Тогда уравнение теплового баланса для контрольной области запишется в виде:

$$w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2}) + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x) \cdot u(x) dx = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(x) dx \quad (1.7)$$

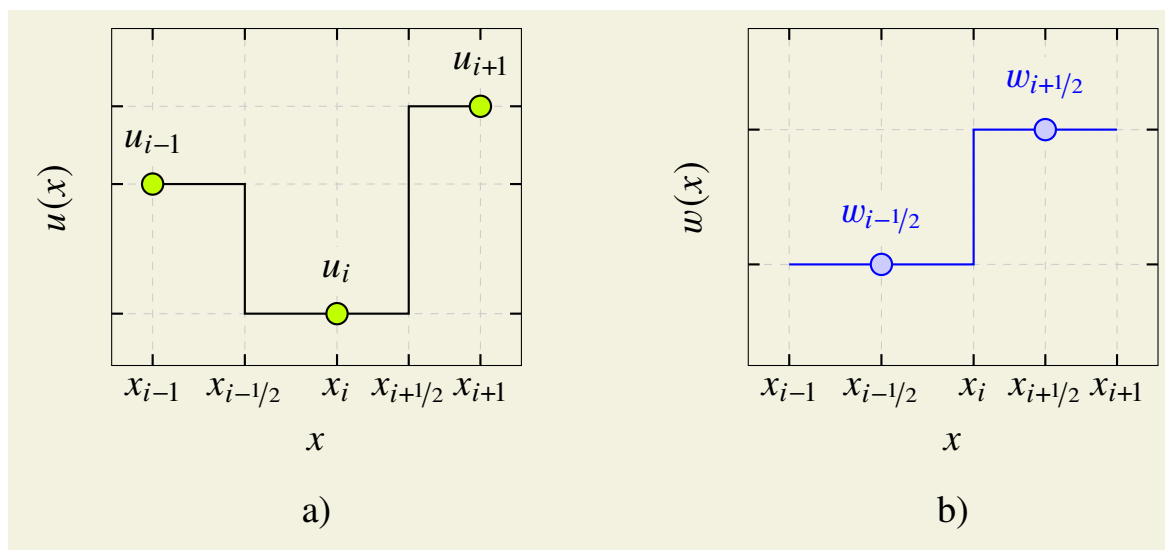


Рисунок 1.6 – Схематическое изображение распределения неизвестной функции  $u(x)$  и потоковой величины  $w(x)$  в пределах контрольной области  $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$

На рисунке 1.7 представлена графическая иллюстрация процессов переноса тепла, теплообмена и тепловыделения (теглопоглощения) для контрольной области  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ . Рассмотрим физический смысл каждого члена уравнения теплового баланса (1.7):

- 1) первое слагаемое  $w(x_{i-1/2})$  определяет количество тепла, “втекающего” через сечение  $x = x_{i-1/2}$ ;
- 2) второе слагаемое  $w(x_{i+1/2})$  это количество “вытекающего” тепла через сечение  $x = x_{i+1/2}$ ;
- 3) третье слагаемое в левой части представляет собой количество тепла, отдаваемое стержнем внешней среде за счет конвекционного теплообмена на его боковой поверхности;
- 4) правая часть (1.7) соответствует количеству тепла, выделяющегося на отрезке  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  за счет распределенных источников тепла с плотностью  $g(x)$ .

Для определения теплового потока в промежуточных узлах сетки  $w(x_{i\pm 1/2})$ ,

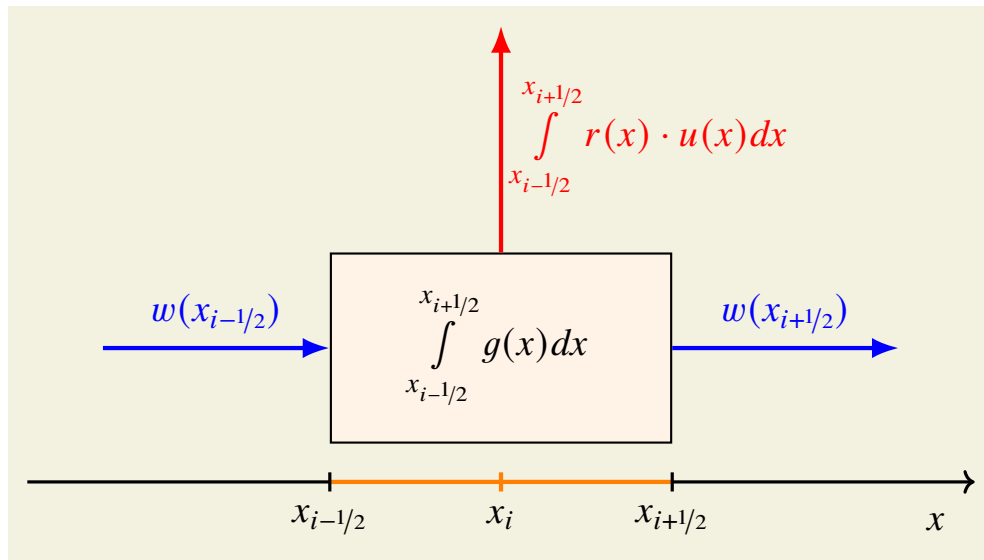


Рисунок 1.7 – Иллюстрация баланса тепла (1.7) на участке стержня  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$

воспользуемся закон теплопроводности Фурье (1.6), из которого следует:

$$u'(x) = -\frac{w(x)}{k(x)} \quad \Rightarrow \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) dx = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{w(x)}{k(x)} dx$$

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{w(x)}{k(x)} dx. \quad (1.8)$$

При построении разностной схемы, в выражениях (1.7) и (1.8) необходимо вычислять определенные интегралы. Однако, во многих практически важных приложениях первообразные подынтегральных функций не могут быть выражены в элементарных функциях. Кроме того, коэффициенты краевой задачи могут быть заданы только в узлах расчетной сетки  $\{k_i\}$ ,  $\{r_i\}$ ,  $\{g_i\}$ . В этом случае для вычислений определенных интегралов необходимо пользоваться численным методом интегрирования.

Для этого воспользуемся простейшими интерполяциями коэффициентов дифференциального уравнения  $k(x)$ ,  $r(x)$ ,  $g(x)$  (рисунок 1.5), неизвестной функции  $u(x)$  (температуры) и ее потока  $w(x)$  (тепловой поток) (рисунок 1.6) в

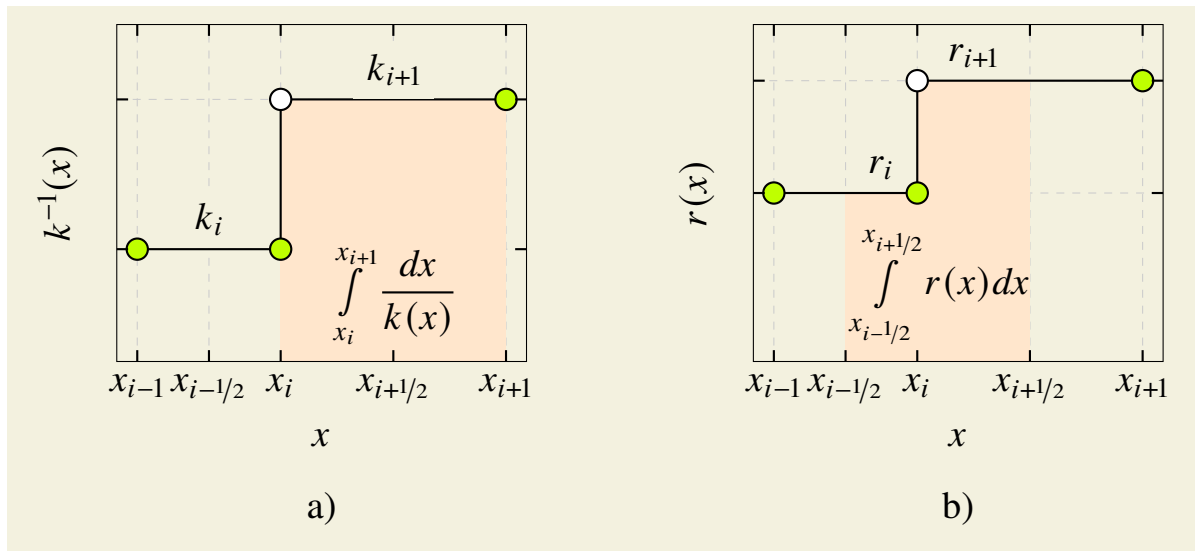


Рисунок 1.8 – Приближенное вычисление значения определенных интегралов в уравнении баланса тепла (1.7)

окрестности узлов  $\{x_i\}$  в виде:

$$\begin{cases} u(x_i) = \text{const}, & x \in (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \\ w(x_{i+1/2}) = \text{const}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \\ k(x_i), r(x_i), g(x_i) = \text{const}, & x \in (x_i, x_{i+1}) \end{cases} \quad (1.9)$$

Тогда левосторонняя формула прямоугольников совпадает с точным значением интегралов (рисунок 1.8):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x) dx \approx y(x_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) = y_i \cdot h_{i+1}, \quad (1.10)$$

где  $y_i = y(x_i)$  – значение функции в левом узле  $x_{i-1}$  расчётной сетки.

Приближенное значение интеграла в (1.8) выразим воспользовавшись кусочной аппроксимацией (1.9) теплового потока  $w(x) \approx w(x_{i+1/2})$  на интервале  $(x_i, x_{i+1})$  и левосторонней формулой прямоугольников (1.10):

$$u(x_{i+1}) - u(x_i) \approx -\frac{w(x_{i+1/2})}{k_{i+1}} \cdot h_{i+1}, \quad (1.11)$$

и найдем поток тепла в промежуточных узлах сетки  $w(x_{i+1/2})$ :

$$w(x_{i+1/2}) \approx -k_{i+1} \cdot \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} \quad (1.12)$$

где  $k_{i+1} = k(x_{i+1})$  – значение коэффициента температуропроводности в узлах расчётной сетки  $\{x_{i+1}\}$ .

Приближенное значение интегрального (суммарного) конвекционного теплового потока через боковую поверхность контрольной области  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ :

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x) \cdot u(x) dx \approx u(x_i) \cdot \bar{r}_i,$$

где  $\bar{r}_i$  – интегральный коэффициент конвекционного теплообмена:

$$\bar{r}_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} r(x) dx.$$

Для определения интегрального коэффициента конвекционного теплообмена  $\bar{r}_i$  используем кусочную аппроксимацию (1.9), а также условие расположения узлов сетки, таких что коэффициент  $r(x)$  имеет *точки разрыва только в узлах расчётной сетки*:

$$\bar{r}_i = \left[ \int_{x_{i-1/2}}^{x_i} r(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1/2}} r(x) dx \right] = \frac{r_i h_i + r_{i+1} h_{i+1}}{2}, \quad (1.13)$$

где  $r_i = r(x_i)$  – коэффициент конвекционного теплообмена стержня с окружающей средой в узлах сетки  $\{x_i\}$ .

Суммарное количество тепла  $\bar{g}_i$ , выделяемого распределенными источниками в пределах контрольной области  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , определяется аналогично:

$$\bar{g}_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} g(x) dx \approx \frac{g_i h_i + g_{i+1} h_{i+1}}{2} \quad (1.14)$$

где  $g_i = g(x_i)$  – плотность распределенных источников тепла в узлах сетки  $\{x_i\}$ .

Таким образом, баланс тепловой энергии на участке стержня  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  с учетом соотношений для переноса тепла за счет теплопроводности материала стержня (1.12), конвекционного теплообмена с окружающей средой (1.13) и распределенных источников (1.14), можно записать в виде системы разностных

уравнений:

$$\begin{cases} w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2}) + \bar{r}_i \cdot u(x_i) = \bar{g}_i \\ w(x_{i+1/2}) = -k_{i+1} \cdot \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} \end{cases} \quad (1.15)$$

Система уравнений (1.15) по своему построению является разностным аналогом основного дифференциального уравнения (1.4). Записывая уравнение (1.15) во всех узлах сетки, в которых оно определено ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ), получим систему из  $2N - 1$  линейных алгебраических уравнений относительно  $2N + 1$  неизвестных  $u(0), u(x_1), \dots, u(x_i), \dots, u(x_{N-1}), u(\ell)$ . Два недостающих уравнения получаются путем *аппроксимации краевых условий* (1.5).

#### 1.2.4 Разностная аппроксимация краевых условий

Воспользуемся *интегро-интерполяционным методом* и проинтегрируем основное уравнение (1.4) вблизи левой границы рассматриваемой области  $x = 0$ :

$$\int_0^{x_{1/2}} w'(x) dx + \int_0^{x_{1/2}} r(x)u(x) dx = \int_0^{x_{1/2}} g(x) dx$$

Тогда уравнение теплового баланса близи границ области  $x = 0$  и  $x = \ell$ :

$$w(x_{1/2}) - w(0) + \bar{r}_0 u(0) = \bar{g}_0, \quad (1.16)$$

где  $w(x_{1/2})$  – тепловой поток в первом промежуточном узле  $x_{1/2}$ ;  $w(0)$  – тепловой поток на левой границе области;  $\bar{r}_0$  и  $\bar{g}_0$  – интегральный коэффициент конвекционного теплообмена стержня с окружающей средой и количество тепла выделяемое распределенными источникам на левой границе  $x = 0$ :

$$\bar{r}_0 = \int_0^{x_{1/2}} r(x) dx = \frac{r_0 h_1}{2}, \quad \bar{g}_0 = \int_0^{x_{1/2}} g(x) dx = \frac{g_0 h_1}{2}. \quad (1.17)$$

Аналогично рассматривая правую границу области  $x = \ell$ , уравнение теплового баланса можно записать в виде:

$$w(\ell) - w(x_{N-1/2}) + \bar{r}_N u(\ell) = \bar{g}_N, \quad (1.18)$$

где  $w(\ell)$  – тепловой поток на правой границе области;  $w(x_{N-1/2})$  – тепловой поток в последнем промежуточном узле  $x_{N-1/2}$ ;  $\bar{r}_N$  и  $\bar{g}_N$  – интегральный коэффициент конвекционного теплообмена стержня с окружающей средой и количество тепла выделяемое распределенными источникам на левой границе  $x = \ell$ :

$$\bar{r}_N = \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} r(x) dx = \frac{r_N h_N}{2}, \quad \bar{g}_N = \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} g(x) dx = \frac{g_N h_N}{2}. \quad (1.19)$$

Объединяя все разностные соотношения для дифференциального уравнения (1.15) и граничных условий (1.5), (1.16), (1.18) получаем следующую разностную схему для граничной задачи (1.4), (1.5):

$$\left\{ \begin{array}{l} w(x_{1/2}) + (\bar{r}_0 + \lambda_1) u(0) = \bar{g}_0 + \mu_1 \\ w(x_{i+1/2}) - w(x_{i-1/2}) + \bar{r}_i \cdot u(x_i) = \bar{g}_i \\ w(x_{i+1/2}) = -k_{i+1} \cdot \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} \\ -w(x_{N-1/2}) + (\bar{r}_N + \lambda_2) u(\ell) = \bar{g}_N + \mu_2 \end{array} \right. \quad (1.20)$$

### 1.3 Метод решения систем линейных уравнений с матрицами специального вида

Если исходной задачей является краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения, то соответствующую разностную схему можно решить с помощью метода прогонки.

В многомерном случае не существует столь же удобного и экономичного способа решения разностных уравнений, как метод прогонки. Поэтому возникает необходимость в развитии методов, специально предназначенных для решения многомерных разностных краевых задач. Мы будем рассматривать здесь лишь двумерные разностные задачи. Как и в общем случае систем линейных уравнений, методы решения разностных задач разделяются на прямые и итерационные. Итерационные методы являются более простыми, чем прямые, и в меньшей степени используют структуру матрицы. По этой причине для решения двумерных разностных уравнений первоначально использовались исключитель-



но итерационные методы. Однако в случае разностных задач сходимость таких, например, методов, как метод простой итерации, Зейделя, верхней релаксации, весьма медленная. В настоящее время интенсивно развиваются и прямые методы решения двумерных разностных уравнений. Они применимы, как правило, к уравнениям с разделяющимися переменными, когда область изменения независимых переменных является прямоугольником.

### 1.3.1 Метод прогонки для трехточечных уравнений

Система уравнений (1.29) представляет собой частный случай систем линейных алгебраических уравнений:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

с трехдиагональной матрицей, т.е. с матрицей, все элементы которой, не лежащие на главной и двух побочных диагоналях, равны нулю.

$$\begin{pmatrix} -c_0 & b_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & -c_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & -c_{N-2} & b_{N-2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_N & -c_N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix}, \quad (1.21)$$

где  $u_i = u(x_i)$  – значение неизвестной функции в узлах сетки.

В общем случае системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей имеют вид:

$$a_i \cdot u_{i-1} - c_i \cdot u_i + b_i \cdot u_{i+1} = -f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.22)$$

Для численного решения систем с трехдиагональными матрицами применяется *метод прогонки*, который представляет собой вариант метода последовательного исключения неизвестных.

Особенно широкое применение метод прогонки получил при решении систем разностных уравнений, возникающих при аппроксимации краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка.

Решение системы линейных уравнений (1.22) будем искать в виде:

$$u_i = \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad (1.23)$$

где  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$  – неизвестные коэффициенты, которые необходимо определить.

Пользуясь уравнением (1.23) и выражая  $u_{i-1}$  получим:

$$u_{i-1} = \alpha_i \cdot u_i + \beta_i = \alpha_i \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + (\alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i). \quad (1.24)$$

Подставляя соотношения для  $u_{i-1}$  (1.24) и  $u_i$  (1.23) в выражение (1.22) получим:

$$a_i \cdot (\alpha_i \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + (\alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i)) - c_i \cdot (\alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \beta_{i+1}) + b_i \cdot u_{i+1} = -f_i$$

Это уравнение будет выполнено для всех  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , если потребовать равенство нулю всех коэффициентов при неизвестных  $u_{i+1}$  и свободных членов:

$$\begin{cases} (a_i \cdot \alpha_i - c_i) \cdot \alpha_{i+1} = -b_i \\ (a_i \cdot \alpha_i - c_i) \cdot \beta_{i+1} = -(a_i \cdot \beta_i + f_i) \end{cases}$$

Из последнего выражения получаем рекуррентные соотношения для определения значений неизвестных коэффициентов  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$ :

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \cdot \beta_i + f_i}{c_i - a_i \cdot \alpha_i} \quad (1.25)$$

Соотношения (1.25) представляют собой нелинейные разностные уравнения первого порядка. Для их решения необходимо задать начальные значения  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ . Эти начальные значения находим из краевого условия на левой границе рассматриваемой области  $x = 0$ :

$$\begin{cases} -c_0 \cdot u_0 + b_0 \cdot u_1 = -f_0 \\ u_0 = \alpha_1 \cdot u_1 + \beta_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u_0 = \frac{b_0}{c_0} \cdot u_1 + \frac{f_0}{c_0} \\ u_0 = \alpha_1 \cdot u_1 + \beta_1 \end{cases}.$$

Сопоставляя выражение для  $u_0$  получим:

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0} \quad (1.26)$$

Нахождение коэффициентов  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$  по рекуррентным соотношениям (1.25) и (1.26) называется *прямой прогонкой*. После того как прогоночные коэффициенты  $\alpha_{i+1}$  и  $\beta_{i+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, N - 1$ ), найдены, решение системы (1.21) находится по рекуррентному соотношению (1.23), если известно значение функции  $u_N$  на правой границе области. Неизвестное значение функции  $u_N$  можно определить из краевого условия на правой границе области  $x = \ell$ :

$$\begin{cases} a_N \cdot u_{N-1} - c_N \cdot u_N = -f_N \\ u_{N-1} = \alpha_N \cdot u_N + \beta_N \end{cases} . \quad (1.27)$$

Из решения системы уравнений (1.27) определяется значение неизвестной функции  $u_N$  на правой границе:

$$u_N = \frac{a_N \cdot \beta_N + f_N}{c_N - a_N \cdot \alpha_N} \quad (1.28)$$

Последовательное нахождение значений неизвестной функции  $u(x)$  в узлах сетки по рекуррентному соотношению (1.23) называется *обратной прогонкой*.

### 1.3.2 Поточковый вариант метода прогонки

Поточковый вариант метода прогонки применяется при решении задач с сильно меняющимися коэффициентами в выражениях для потоков неизвестных величин (электрического заряда, количества тепла, количества жидкости и т.д.). Например, в задачах гидродинамики с теплопроводностью и магнитной гидродинамики, коэффициенты теплопроводности и электропроводности могут сильно зависеть от термодинамических параметров среды. В случае тепловых задач в пределах рассматриваемых областей могут иметь место адиабатические участки, где теплопроводность отсутствует, а также изотермические участки с бесконечно высоким коэффициентом теплопроводности. В задачах магнитной гидродинамики могут рассматриваться области с идеально проводящими и изолирующими участками.

Часто в таких задачах, помимо неизвестной функции (решения задачи), требуется найти еще и ее поток (например, электричества, тепла, жидкости и т.д.). При решении разностных уравнений второго порядка, к которым сводятся разностные схемы для этих задач, с помощью метода обычной прогонки часто

происходит значительная потеря точности. Последующее использование численного дифференцирования для вычисления потока приводит к неудовлетворительному результату. Избавиться от этого недостатка удастся путем перехода к так называемому потоковому варианту метода прогонки.

Предположим наличие между искомой функцией  $u$  и ее потоком  $w$  связи вида:

$$\alpha \cdot u + \beta \cdot w = \gamma$$

Так как коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  определены с точностью до множителя, то на функции  $\alpha$  и  $\beta$  необходимо наложить дополнительное условие, в зависимости от типа краевой задачи, характера коэффициента и т.д. Например, иногда удобно считать  $\alpha = 1$  либо  $\beta = 1$  или полагать:

$$\alpha + \beta \cdot C(x) = 1,$$

где  $C(x) > 0$  – некоторая функция.

Будем искать решение системы уравнений (??) в том же виде, в котором заданы краевые условия:

$$u(x_i) = \alpha_i \cdot w(x_{i+1/2}) + \beta_i, \quad (1.29)$$

где  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  – неизвестные коэффициенты.

Запишем разностную схему в матричной форме:

$$\left\{ \begin{array}{llll} & - c_0 \cdot u(0) & + b_0 \cdot u(x_1) & = -f_0 \\ a_1 \cdot u(0) & - c_1 \cdot u(x_1) & + b_1 \cdot u(x_2) & = -f_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i \cdot u(x_{i-1}) & - c_i \cdot u(x_i) & + b_i \cdot u(x_{i+1}) & = -f_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{N-1} \cdot u(x_{N-2}) & - c_{N-1} \cdot u(x_{N-1}) & + b_{N-1} \cdot u(\ell) & = -f_{N-1} \\ a_N \cdot u(x_{N-1}) & - c_N \cdot u(\ell) & & = -f_N \end{array} \right. , \quad (1.30)$$

где  $a$ ,  $c$ ,  $b$  и  $f$  – коэффициенты при неизвестных  $u(x_i)$  и правая часть системы линейных уравнений, выражения для которых сведены в таблицу (2):

Таблица 2 – Выражения для коэффициентов системы разностных уравнений (1.29) краевой задачи (1.4), (1.5)

$i$	0	$1, 2, 3, \dots, N-1$	$N$
$h_i$		$(x_i - x_{i-1})$	$(x_N - x_{N-1})$
$\bar{k}_i$		$\frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}$	
$\tilde{v}_i$	$v_0 \cdot \frac{h_1}{2}$	$v_i \cdot \bar{h}_i$	
$\tilde{g}_i$	$g_0 \cdot \frac{h_1}{2}$	$g_i \cdot \bar{h}_i$	
$a_i$		$\frac{\bar{k}_i}{h_i}$	0
$b_i$	$a_1$	$a_{i+1}$	
$c_i$	$a_1 + \tilde{v}_0 - \lambda_1$	$(a_i + b_i) + \tilde{v}_i$	1
$f_i$	$\tilde{g}_0 + \mu_1$	$\tilde{g}_i$	$\mu_2$

Алгоритм метода прогонки:

- 1) Составить однородную разностную схему для решения исходной краевой задачи методом баланса (интегро-интерполяционным методом)
- 2) На неравномерной сетке определить шаг  $h_i$  сетки для каждого элементарного отрезка  $[x_{i-1}, x_i]$
- 3) Вычислить все коэффициенты разностной схемы  $\bar{k}_i, \bar{q}_i, \bar{f}_i$  краевой задачи во всех узлах сетки  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ )
- 4) Определить коэффициенты линейной системы уравнений  $a_i, b_i, c_i$  и  $f_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) полученной разностной схемы.
- 5) Найти решение полученной системы линейных алгебраических уравнений  $\{u_i\}$  методом прогонки:
  - (i) Из краевого условия на левой границе области  $x = 0$  вычислить коэффициенты (1.26):

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_0}{c_0}$$

- (ii) Пользуясь рекуррентными соотношениями (1.25), определить значе-

## 1.4 Численное решение краевой задачи методом прогонки

Рассмотрим краевую задачу на отрезке  $x \in [0, 7]$ :

$$\begin{aligned} &((3 + \sin(x)) \cdot u'(x))' - |\cos(x)| \cdot u(x) + 0.5 \cdot (x - 1)^2 = 0 \\ &\begin{cases} u(0) = 2 \\ -k(7) \cdot u'(7) + 0.5 \cdot u(7) = 17, 24 \end{cases} \end{aligned}$$

Из данных краевой задачи можно заключить, что коэффициенты в дифференциальном уравнении являются функциями вида:

$$k(x) = 3 + \sin(x), \quad q(x) = |\cos(x)|, \quad f(x) = 0.5 \cdot (x - 1)^2$$

Для построения разностной схемы для решения краевой задачи, воспользуемся интегро-интерполяционным методом (методом баланса).

- 1) Разностный аналог дифференциального уравнения краевой задачи получаем аналогично (??):

$$-\bar{k}_{i+1} \cdot \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} + \bar{k}_i \cdot \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} + \bar{q}_i \cdot \frac{h_{i+1} + h_i}{2} \cdot u(x_i) = \bar{f}_i \cdot \frac{h_{i+1} + h_i}{2}$$

- 2) На левой границе области  $x = 0$  граничное условие имеет вид:

$$u(0) = 2 \tag{1.31}$$

- 3) Вблизи правой границы на отрезке  $x \in [x_{N-1/2}, \ell]$  воспользуемся *интегро-интерполяционным методом* и проинтегрируем основное уравнение (1.4) задачи:

$$\int_{x_{N-1/2}}^{\ell} w'(x) dx + \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} q(x) \cdot u(x) dx = \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} f(x) dx,$$

где  $w(x) = -k(x) \cdot u'(x)$  – поток неизвестной функции  $u(x)$ .

Предположим, что в пределах отрезка  $[x_{N-1/2}, \ell]$  неизвестная функция  $u(x)$  остается постоянной  $u(x) \approx u(\ell)$  (рисунок 1.9), тогда краевое условие на правой границе запишется в виде:

$$w(\ell) - w(x_{N-1/2}) + u(\ell) \cdot \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} q(x) dx = \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} f(x) dx, \tag{1.32}$$

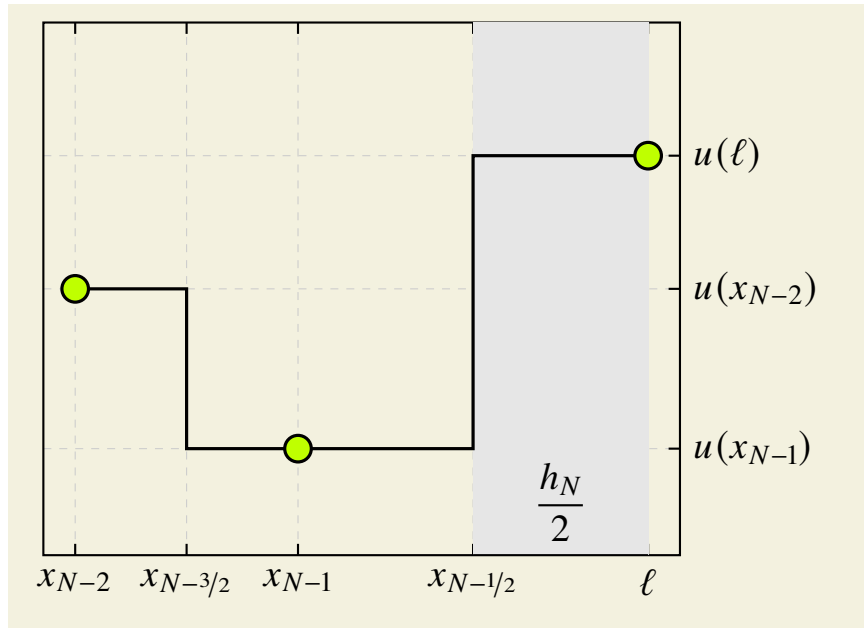


Рисунок 1.9 – Схематическое изображение распределения неизвестной функции  $u(x)$  вблизи правой границы  $x = \ell$

где  $w(x_{N-1/2})$  – потоковая величина в последнем промежуточном узле  $x_{N-1/2}$  определяется из соотношения:

$$u'(x) = -\frac{w(x)}{k(x)} \Rightarrow \int_{x_{N-1}}^{\ell} u'(x) dx = - \int_{x_{N-1}}^{\ell} \frac{w(x)}{k(x)} dx$$

Предполагая, что тепловой поток  $w(x)$  постоянен в пределах области  $[x_{N-1}, \ell]$ , т.е.  $w(x) \approx w(x_{N-1/2})$ , определим изменение неизвестной функции  $u(x)$  в этой области:

$$u(\ell) - u(x_{N-1}) = -w(x_{N-1/2}) \cdot \int_{x_{N-1}}^{\ell} \frac{dx}{k(x)}$$

Для вычисления определенного интеграла в последнем выражении воспользуемся формулой трапеций:

$$\int_{x_{N-1}}^{\ell} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{h_N}{2} \cdot \left( \frac{1}{k_{N-1}} + \frac{1}{k_N} \right)$$

Следовательно, потоковая величина в последнем промежуточном узле опре-

деляется выражением:

$$w(x_{N-1/2}) = -\bar{k}_N \cdot \frac{u(\ell) - u(x_{N-1})}{h_N}, \quad (1.33)$$

где  $\bar{k}_N$  – среднее значение коэффициента  $k(x)$  на отрезке  $[x_{N-1}, \ell]$ :

$$\bar{k}_N = \frac{2k_N k_{N-1}}{k_N + k_{N-1}}$$

Из общего вида второго краевого условия

$$-k(\ell) \cdot u'(\ell) + \lambda_2 \cdot u(\ell) = \mu_2$$

выразим величину потока на границе рассматриваемой области  $w(\ell)$ :

$$w(\ell) = -k(\ell) \cdot u'(\ell) = \mu_2 - \lambda_2 \cdot u(\ell) \quad (1.34)$$

Для вычислений определенных интегралов в (1.31) воспользуемся формулой прямоугольников:

$$\int_{x_{N-1/2}}^{\ell} q(x) dx \approx q_N \cdot \frac{h_N}{2}, \quad \int_{x_{N-1/2}}^{\ell} f(x) dx \approx f_N \cdot \frac{h_N}{2}. \quad (1.35)$$

С учетом соотношений (1.32), (1.33), (1.34) уравнение баланса вблизи правой границе (1.31) запишется в разностном виде:

$$\mu_2 - \lambda_2 \cdot u(\ell) + \bar{k}_N \cdot \frac{u(\ell) - u(x_{N-1})}{h_N} + u(\ell) \cdot \left( q_N \cdot \frac{h_N}{2} \right) = f_N \cdot \frac{h_N}{2}. \quad (1.36)$$

Объединяя все полученные разностные соотношения для дифференциального уравнения и граничных условий (1.30), (1.35) получаем следующую разностную схему:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(0) = \mu_1 \\ -\bar{k}_{i+1} \cdot \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h_{i+1}} + \bar{k}_i \cdot \frac{u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h_i} + \bar{q}_i \cdot h_{i\pm 1/2} \cdot u(x_i) = \bar{f}_i \cdot h_{i\pm 1/2} \\ \mu_2 - \lambda_2 \cdot u(\ell) + \bar{k}_N \cdot \frac{u(\ell) - u(x_{N-1})}{h_N} + u(\ell) \cdot \left( q_N \cdot \frac{h_N}{2} \right) = f_N \cdot \frac{h_N}{2} \end{array} \right.$$



- 4) На отрезке введем произвольную сетку  $\{x_i\}$  и определим шаг сетки  $h_i$ :

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x_i$	0	1	2	3	4	4.75	5	5.5	6	7
$h_i$		1	1	1	1	0.75	0.25	0.5	0.5	1

- 5) Вычислим средние значения коэффициентов разностной схемы краевой задачи во всех узлах сетки  $\{x_i\}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ):

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{k}_i$		3.37	3.88	3.48	2.62	2.12	2.02	2.16	2.49	3.12
$\bar{q}_i$	1.00	0.54	0.42	0.99	0.65	0.04	0.28	0.71	0.96	0.75
$\bar{f}_i$	0.50	0.00	0.50	2.00	4.50	7.03	8.00	10.13	12.50	18.00

- 6) Определим коэффициенты линейной системы уравнений  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  и  $f_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ) полученной разностной схемы: