

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений	4
1.1 Прямой ход метода Гаусса	5
1.2 Обратный ход метода Гаусса	7
1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента	8
1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений ме- тодом Гаусса	8
2 Интерполирование функций	11
2.1 Интерполяция функций полиномами Лагранжа	11
2.2 Пример интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$	13
3 Аппроксимация функция	16
3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций	16
3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$	18
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	22
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	23

ВВЕДЕНИЕ

Особенно острая потребность в развитии численных методов появилась в связи с необходимостью решения новых сложных задач, возникающих в ходе развития современной физики и новейших областей техники и технологий. Кроме того, использование численных методов допускает применения простых и вполне осуществимых вычислений.

— Обыкновенными дифференциальными уравнениями можно описать задачи движения системы взаимодействующих материальных точек, химической кинетики, электрических цепей, сопротивления материалов (например, статический прогиб упругого стержня) и многие другие.

Ряд важных задач для уравнений в частных производных также сводится к задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если многомерная задача допускает разделение пространственных переменных (например, задачи на нахождение собственных колебаний упругих балок и мембран простейшей формы, или определение спектра собственных значений энергии частицы в сферически-симметричном поле), или если ее решение зависит только от некоторой комбинации переменных (автомодельные решения), то задача нахождения решения уравнений в частных производных сводится к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом, решение обыкновенных дифференциальных уравнений занимает важное место среди прикладных задач физики, химии и техники.

Цель данной работы состоит в приобретении практических навыков применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики и многие численные методы основаны на решении систем линейных уравнений вида:

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b},$$

где \mathbf{A} – квадратная матрица $m \times m$, \vec{x} и \vec{b} – искомый вектор неизвестных и заданный вектор размерности $1 \times m$:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что определитель матрицы \mathbf{A} отличен от нуля $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, так что решение \vec{x} существует и единственно. Систему линейных уравнений можно решить по крайней мере двумя способами: либо воспользовавшись *формулами Крамера*, либо методом последовательного исключения неизвестных (*методом Гаусса*). При больших порядка матрицы m способ Крамера, основанный на вычислении определителей, требует порядка $m!$ арифметических действий, в то время как метод Гаусса – $O(m^3)$ действий.

Для большинства вычислительных задач характерным является большой порядок матрицы \mathbf{A} ($m \approx 10^2 \dots 10^5$), поэтому метод Гаусса в различных вариантах широко используется при решении задач линейной алгебры на ЭВМ.

Систему линейных алгебраических уравнений можно записать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots a_{1m} \cdot x_m = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \cdots a_{3m} \cdot x_m = b_3 \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{cases}$$

1.1 Прямой ход метода Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных x_i из системы линейных уравнений. Например, предположим, что $a_{11} \neq 0$, тогда разделим первое уравнение системы на a_{11} , и в результате получим:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2m} \cdot x_m = b_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 + \dots + a_{3m} \cdot x_m = b_3, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mm} \cdot x_m = b_m \end{cases}$$

где c_{1j} и y_1 – нормированные коэффициенты 1-ой строки и правой части 1-го уравнения, соответственно:

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \quad (j = 2, 3, \dots, m), \quad y_1 = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Последовательно умножим первое уравнение системы на a_{i1} и вычтем полученное уравнение из каждого i -го уравнения системы $i = 2, 3, \dots, m$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ (a_{22} - c_{12} \cdot a_{21}) \cdot x_2 + \dots + (a_{2m} - c_{1m} \cdot a_{21}) \cdot x_m = b_2 - y_1 \cdot a_{21} \\ (a_{32} - c_{12} \cdot a_{31}) \cdot x_2 + \dots + (a_{3m} - c_{1m} \cdot a_{31}) \cdot x_m = b_3 - y_1 \cdot a_{31} \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ (a_{m2} - c_{12} \cdot a_{m1}) \cdot x_2 + \dots + (a_{mm} - c_{1m} \cdot a_{m1}) \cdot x_m = b_m - y_1 \cdot a_{m1} \end{cases}$$

Запишем полученную систему уравнений в более компактном виде:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ a_{22}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{2m}^{(1)} \cdot x_m = b_2^{(1)} \\ a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)}$ и $b_i^{(1)}$ – модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно.

$$a_{ij}^{(1)} = (a_{ij} - c_{1j} \cdot a_{i1}), \quad b_i^{(1)} = (b_i - y_1 \cdot a_{i1}), \quad (i, j = 2, 3, \dots, m)$$

Если $a_{22}^{(1)} \neq 0$, то из модифицированной системы аналогично можно исключить неизвестное x_2 . Для этого разделим второе уравнение системы на $a_{22}^{(1)}$, и в результате получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad a_{32}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{3m}^{(1)} \cdot x_m = b_3^{(1)}, \\ \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ \quad a_{m2}^{(1)} \cdot x_2 + \dots + a_{mm}^{(1)} \cdot x_m = b_m^{(1)} \end{array} \right.$$

где c_{2j} и y_2 – нормированные коэффициенты 2-ой строки и правой части 2-го уравнения, соответственно.

$$c_{2j} = \frac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \quad (j = 3, 4, \dots, m), \quad y_2 = \frac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$$

Последовательно умножим второе уравнение системы на $a_{i2}^{(1)}$ и вычтем полученное уравнение из каждого i -го уравнения системы $i = 3, 4, \dots, m$. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \dots \quad (a_{3m}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{32}^{(1)}) \cdot x_m = b_3^{(1)} - y_2 \cdot a_{32}^{(1)}, \\ \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \dots \quad (a_{mm}^{(1)} - c_{2m} \cdot a_{m2}^{(1)}) \cdot x_m = b_m^{(1)} - y_2 \cdot a_{m2}^{(1)} \end{array} \right.$$

или в более компактном виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \quad \dots + a_{3m}^{(2)} \cdot x_m = b_3^{(2)}, \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \dots + a_{mm}^{(2)} \cdot x_m = b_m^{(2)} \end{array} \right.$$

где $a_{ij}^{(2)}$ и $b_i^{(2)}$ – повторно модифицированные коэффициенты при неизвестных и правой части, соответственно:

$$a_{ij}^{(2)} = (a_{ij}^{(1)} - c_{2j} \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad b_i^{(2)} = (b_i^{(1)} - y_2 \cdot a_{i2}^{(1)}), \quad (i, j = 3, 4, \dots, m)$$

Исключая таким же образом неизвестные x_3, x_4, \dots, x_m , исходная система линейных уравнений приводится к эквивалентному виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + c_{12} \cdot x_2 + c_{13} \cdot x_3 + \dots + c_{1m} \cdot x_m = y_1 \\ \quad x_2 + c_{23} \cdot x_3 + \dots + c_{2m} \cdot x_m = y_2 \\ \quad \quad x_3 + \dots + c_{3m} \cdot x_m = y_3 \\ \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots = \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_m = y_m \end{array} \right.$$

1.2 Обратный ход метода Гаусса

Обратный ход заключается в нахождении неизвестных x_1, x_2, \dots, x_m полученной эквивалентной системы в прямом ходе метода Гаусса. Поскольку матрица системы имеет треугольный вид, то можно последовательно, начиная с x_m , найти все неизвестные $x_{m-1}, x_{m-2}, \dots, x_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_m = y_m \\ x_{m-1} = y_{m-1} - c_{m-1,m} \cdot x_m \\ x_{m-2} = y_{m-2} - c_{m-2,m-1} \cdot x_{m-1} - c_{m-2,m} \cdot x_m \\ \dots = \dots \\ x_1 = y_1 - \sum_{j=2}^m c_{1j} \cdot x_j \end{array} \right.$$

Общие формулы обратного хода имеют вид:

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^m c_{ij} \cdot x_j, \quad i = (m-1, m-2, \dots, 1), \quad x_m = y_m$$

1.3 Метод Гаусса с выбором главного элемента

На практике, часто может оказаться, что система имеет единственное решение, хотя какой-либо из угловых миноров матрицы \mathbf{A} равен нулю.

$$\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Кроме того, заранее обычно неизвестно, все ли угловые миноры матрицы \mathbf{A} отличны от нуля. В этих случаях обычный метод Гаусса может оказаться *непригодным*. Избежать указанных трудностей позволяет метод Гаусса с выбором главного элемента.

Основная идея метода состоит в том, чтобы на очередном шаге исключать не следующее по номеру неизвестное, а то неизвестное, коэффициент при котором является *наибольшим по модулю*. Таким образом, в качестве ведущего элемента здесь выбирается *главный*, т.е. наибольший по модулю элемент. Поэтому, если $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, то в процессе вычислений не будет происходить деление на нуль.

На практике чаще всего применяется и метод Гаусса с выбором главного элемента по всей матрице, когда в качестве ведущего выбирается максимальный по модулю элемент *среди всех элементов* матрицы системы.

1.4 Численное решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Пример численного решения системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

Прямой ход метода Гаусса.

1) Разделим 1-ю строку на коэффициент при x_1 (2)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 31 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

2) Умножим 1-ю строку на коэффициент при x_1 (4) во 2-ом уравнении

$$4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 20$$

и вычтем результат умножения из 2-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 22 \end{cases}$$

3) Умножим 1-ю строку на коэффициент при x_1 (3) в 3-ем уравнении

$$3x_1 + \frac{9}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 15$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ -x_2 + 4x_3 = 11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

4) Разделим 2-ю строку на коэффициент при x_2 (-1)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 = 7 \end{cases}$$

5) Умножим 2-ю строку на коэффициент при x_2 $(-\frac{7}{2})$ в 3-ем уравнении

$$-\frac{7}{2}x_2 + 14x_3 = \frac{77}{2}$$

и вычтем результат умножения из 3-й строки

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ -\frac{21}{2}x_3 = -\frac{63}{2} \end{cases}$$

6) Разделим 3-ю строку на коэффициент при x_3 ($-\frac{21}{2}$)

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 5 \\ x_2 - 4x_3 = -11 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

Обратный ход метода Гаусса.

Последовательно определяем неизвестные x_3, x_2, x_1 :

$$x_3 = 3$$

$$x_2 = -11 + 4x_3 = -11 + 4 \cdot 3 = 1$$

$$x_1 = 5 - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 5 - \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 3 = 2$$

Ответ: решение системы линейных уравнений: $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 3$.

Проведём *проверку решения* системы уравнений методом прямой подстановки. Для этого подставим найденный вектор неизвестных $\vec{x} = (2, 1, 3)$ в исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 10 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 = 31 \\ 3 \cdot 2 + 1 + 5 \cdot 3 = 22 \end{cases}$$

Проводим арифметические действия и получаем тождества для каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} 4 + 3 + 3 = 10 \\ 8 + 5 + 18 = 31 \\ 6 + 1 + 15 = 22 \end{cases} \implies \begin{cases} 10 = 10 \\ 31 = 31 \\ 22 = 22 \end{cases}$$

Система уравнений совместна если выполняются условия:

$$c_i(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j = x_i \\ 0, & x_j \neq x_i \end{cases}$$

Коэффициенты $c_i(x)$ можно искать в виде многочленов степени n :

[illegible]

Определим неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ из условия для коэффициентов $c_i(x)$:

[illegible]

Таким образом, коэффициенты $c_i(x)$ интерполяционного многочлена находятся из соотношений:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c_0(x) & = & \frac{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1) \cdot (x_0-x_2) \cdot \dots \cdot (x_0-x_n)} \\ c_1(x) & = & \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_2) \cdot \dots \cdot (x-x_n)}{(x_1-x_0) \cdot (x_1-x_2) \cdot \dots \cdot (x_1-x_n)} \\ \dots & & \dots \\ c_n(x) & = & \frac{(x-x_0) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0) \cdot (x_n-x_1) \cdot \dots \cdot (x_n-x_{n-1})} \end{array} \right.$$

Или в более компактной форме:

$$c_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{i \neq j}^n (x_i - x_j)}$$

Итак, интерполяционный многочлен Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{\prod_{j \neq i}^n (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^n (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

2.2 Пример интерполирование функции полином Лагранжа $L_3(x)$

Известно множество данных (узлов интерполяции) $\{x_i\}$ ($i = 0, 1, 2, 3$), в которых определены значения функции $y_i = f(x_i)$:

x_i	-0.76	-0.09	0.22	0.55
y_i	0.08	1.84	0.40	0.96

Построим интерполяционный полином Лагранжа $L_3(x)$ на основе данных об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и значений функции в этих точках $\{y_i\}$:

$$L_3(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\prod_{j \neq i}^3 (x - x_j)}{\prod_{j \neq i}^3 (x_i - x_j)} \cdot y_i$$

1) Представим полином Лагранжа в развернутом виде:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} \cdot y_0 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \cdot y_1 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} \cdot y_2 + \\ & + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \cdot y_3 \end{aligned}$$

2) Воспользуемся численными данными об узлах интерполяции $\{x_i\}$ и извест-

ными значениями интерпретируемой функции в этих узлах $\{y_i\}$:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x - (-0.09))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.76 - (-0.09))(-0.76 - 0.22)(-0.76 - 0.55)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.09 - (-0.76))(-0.09 - 0.22)(-0.09 - 0.55)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.55)}{(0.22 - (-0.76))(0.22 - (-0.09))(0.22 - 0.55)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x - (-0.76))(x - (-0.09))(x - 0.22)}{(0.55 - (-0.76))(0.55 - (-0.09))(0.55 - 0.22)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

3) Проведем необходимые арифметические действия:

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(-0.67)(-0.98)(-1.31)} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{(0.67)(-0.31)(-0.64)} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{(0.98)(0.31)(-0.33)} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{(1.31)(0.64)(0.33)} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
 L_3(x) = & \frac{(x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55)}{-0.86} \cdot 0.08 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55)}{0.13} \cdot 1.84 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55)}{-0.10} \cdot 0.40 + \\
 & + \frac{(x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22)}{0.28} \cdot 0.96
 \end{aligned}$$

Продолжая делать упрощения окончательно получим:

$$\begin{aligned} L_3(x) = & (x + 0.09)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot (-0.09) + \\ & + (x + 0.76)(x - 0.22)(x - 0.55) \cdot 13.84 + \\ & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.55) \cdot (-3.99) + \\ & + (x + 0.76)(x + 0.09)(x - 0.22) \cdot 3.47 \end{aligned}$$

- 4) Запишем выражение для интерполяционный полином Лагранжа в каноническом виде:

$$L_3(x) = 1.36963 - 5.24831 \cdot x + 0.9119 \cdot x^2 + 13.23 \cdot x^3$$

- 5) На одном графике представим диаграмму рассеяния (разброса) данных функции заданной таблично $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и результаты вычислений интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (*сплошная линия*).

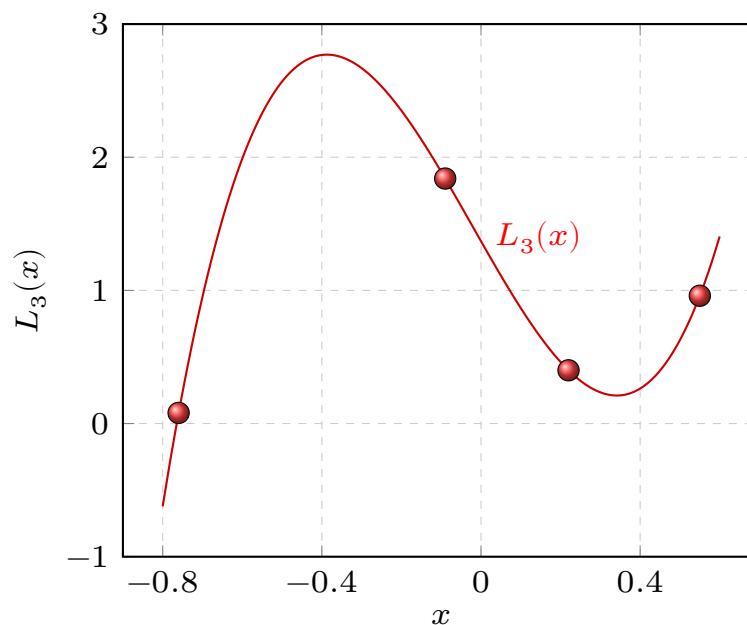


Рисунок 1 – График таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ (маркеры) и интерполяционного полинома Лагранжа $L_3(x)$ (сплошная линия)

3 Аппроксимация функция

Задача о приближении функции ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ необходимо заменить обобщенным полиномом $p_m(x)$ заданного порядка m так, чтобы отклонение (в известном смысле) функции $f(x)$ от обобщенного полинома $p_m(x)$ на указанном множестве $\vec{x} = \{x\}$ было наименьшим. При этом полином $p_m(x)$ в общем случае называется аппроксимирующим.

Если множество \vec{x} состоит из отдельных точек $x \in \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (узлов), то приближение называется *точечным*. Если \vec{x} есть отрезок $x_a < x < x_b$, то приближение называется *интегральным*. Для практики важным является приближение функций алгебраическими и тригонометрическими полиномами.

3.1 Точечное квадратичное аппроксимирование функций

На практике часто бывает, что заданный порядок m приближающего полинома $p_m(x)$ меньше числа узлов аппроксимации $m < n$, в которых известно значение функции $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). В этом случае обычно используют точечный метод наименьших квадратов и рассматривается полином степени m вида:

$$p_m(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_m \cdot x^m = \sum_{j=0}^m c_j \cdot x^j.$$

В качестве меры отклонения S полинома $p_m(x)$ от известной функции $y(x)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$, как правило, принимается сумма квадратов отклонений полинома от этой функции на заданной системе точек:

$$S = \sum_{i=0}^n (p_m(x_i) - y_i)^2$$

Следует отметить, что мера отклонения полинома от известной функции есть функция многих переменных $S = S(c_0, c_1, \dots, c_m)$, т.е. коэффициентов полинома c_i ($i = 0, 1, \dots, m$), которые необходимо подобрать так, чтобы величина меры отклонения полинома была наименьшей $S \rightarrow \min$. Полученный полином называется аппроксимирующим для данной функции, а процесс построения этого полинома – точечной квадратичной аппроксимацией или точечным квадратичным аппроксимированием функции.

Для решения задачи точечного квадратичного аппроксимирования, т.е. определения числовых значений всех коэффициентов полинома $p_m(x)$, необ-

Определим частные производные от величины суммы квадратов отклонений и воспользовавшись условием экстремума функции многих переменных, составим систему уравнений вида:

$$\frac{\partial S}{\partial c_0} = \frac{\partial S}{\partial c_1} = \frac{\partial S}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial S}{\partial c_m} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial a_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^2 = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 2 \cdot \sum_{i=0}^n (a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + a_3 \cdot x_i^3 + \cdots + a_m \cdot x_i^m - y_i) \cdot x_i^m = 0 \end{array} \right.$$
$$\mathbf{C} \cdot \vec{a} = \vec{b} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0m} \\ c_{10} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m0} & c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Если среди точек $\{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ нет совпадающих, а также степень полинома меньше чем число узлов аппроксимации $m < n$, то определитель системы не равен нулю. Следовательно, эта система имеет единственное решение $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_m\}$, а полином $p_m(x)$ с такими коэффициентами a_i будет обладать минимальным квадратичным отклонением $S = S_{min}$.

3.2 Аппроксимирования функций полиномом второй степени $p_2(x)$

Известна таблица данных некоторой функциональной зависимости $y(x)$.

i	0	1	2	3	4
x_i	-0.76	-0.48	-0.09	0.22	0.55
y_i	5.15	4.39	4.10	5.71	5.30

Необходимо аппроксимировать функцию заданную таблично y_i алгебраическим полиномом второй степени $p_2(x)$:

$$p_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$$

- 1) Построим меру отклонения полинома $p_2(x)$ от таблично заданной функции $y_i = f(x_i)$ на множестве точек $\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$:

$$S = \sum_{i=0}^4 (c_0 + c_1 \cdot x_i + c_2 \cdot x_i^2 - y_i)^2,$$

где $y_i = f(x_i)$ – значение функции в точке x_i .

- 2) Запишем меру отклонения S в явном виде на основе данных из условия задачи:

$$\begin{aligned} S = & (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71)^2 + \\ & + (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30)^2 \end{aligned}$$

- 3) Определим частную производную от меры отклонений S по аргументу a_0 и

приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a_0} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot 1 + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты первой строки матрицы **C**:

$$\begin{aligned}c_{00} &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \\ c_{01} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{02} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18\end{aligned}$$

Первый элемент вектора правой части \vec{b} :

$$b_0 = 5.15 + 4.39 + 4.10 + 5.71 + 5.30 = 24.65$$

- 4) Определим частную производную от меры отклонений S по аргументу a_1 и приравняем её нулю:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial a_1} = & 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22) + \\ & + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55) = 0\end{aligned}$$

Коэффициенты второй строки матрицы **C**:

$$\begin{aligned}c_{10} &= (-0.76) + (-0.48) + (-0.09) + (0.22) + (0.55) = -0.56 \\ c_{11} &= (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18 \\ c_{12} &= (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38\end{aligned}$$

Второй элемент вектора правой части \vec{b} :

$$b_1 = 5.15 \cdot (-0.76) + 4.39 \cdot (-0.48) + 4.10 \cdot (-0.09) + \\ + 5.71 \cdot (0.22) + 5.30 \cdot (0.55) = -2.24$$

- 5) Определим частную производную от меры отклонений S по аргументу a_2 и приравняем её нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.76) + a_2 \cdot (-0.76)^2 - 5.15) \cdot (-0.76)^2 + \\ + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.48) + a_2 \cdot (-0.48)^2 - 4.39) \cdot (-0.48)^2 + \\ + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (-0.09) + a_2 \cdot (-0.09)^2 - 4.10) \cdot (-0.09)^2 + \\ + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.22) + a_2 \cdot (0.22)^2 - 5.71) \cdot (0.22)^2 + \\ + 2 \cdot (a_0 + a_1 \cdot (0.55) + a_2 \cdot (0.55)^2 - 5.30) \cdot (0.55)^2 = 0$$

Коэффициенты третьей строки матрицы C :

$$c_{20} = (-0.76)^2 + (-0.48)^2 + (-0.09)^2 + (0.22)^2 + (0.55)^2 = 1.18$$

$$c_{21} = (-0.76)^3 + (-0.48)^3 + (-0.09)^3 + (0.22)^3 + (0.55)^3 = -0.38$$

$$c_{22} = (-0.76)^4 + (-0.48)^4 + (-0.09)^4 + (0.22)^4 + (0.55)^4 = 0.49$$

Третий элемент вектора правой части \vec{b} :

$$b_2 = 5.15 \cdot (-0.76)^2 + 4.39 \cdot (-0.48)^2 + 4.10 \cdot (-0.09)^2 + \\ + 5.71 \cdot (0.22)^2 + 5.30 \cdot (0.55)^2 = 5.94$$

- 6) Таким образом, для определения неизвестных коэффициентов аппроксимирующего полинома необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений:

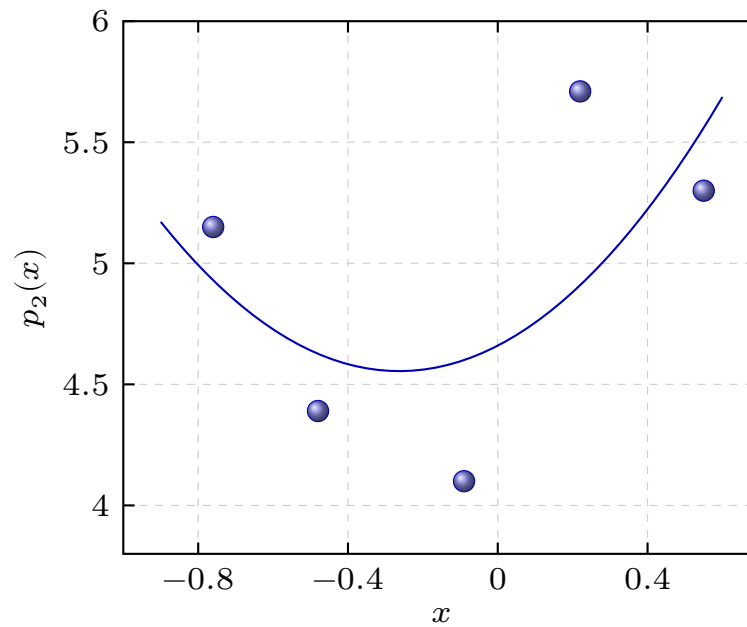
$$\begin{cases} 5 \cdot a_0 - 0.56 \cdot a_1 + 1.18 \cdot a_2 = 24.65 \\ -0.56 \cdot a_0 + 1.18 \cdot a_1 - 0.38 \cdot a_2 = -2.24 \\ 1.18 \cdot a_0 - 0.38 \cdot a_1 + 0.49 \cdot a_2 = 5.94 \end{cases}$$

- 7) Решение системы линейных алгебраических уравнений находится с помощью метода Гаусса. $a_0 = 4.66$, $a_1 = 0.80$, $a_2 = 1.52$. Таким образом. ап-

проксимирующий полином имеет вид:

$$p_2(x) = 4.66 + 0.80 \cdot x + 1.52 \cdot x^2$$

- 8) Построение графиков таблично заданной функции $y(x)$ и аппроксимирующего полинома второго порядка $p_2(x)$:



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен метод Эйлера численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для заданной системы дифференциальных уравнений первого порядка построены рекуррентные соотношения для неизвестных функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$, которые позволяют последовательно определить их значения в узлах временной сетке ω_τ .

На основе построенных рекуррентных соотношений найдено численное решение задачи Коши в узлах равномерной сетке $\omega_\tau = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. Построены графики функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ на основании вычисленных значений значениях неизвестных функций в различных узлах временной сетки ω_τ .

Определена предельная абсолютная погрешность приближенного решения задачи Коши в пределах всего заданного временного интервала. Установлено, что максимальная предельная абсолютная погрешность для $u_1(t)$ составляет $\epsilon_1 = 5, 1$, а для функции $u_2(t) - \epsilon_2 = 2, 4$.

Приобретен практический навык применения численных методов решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Самарский А. А. Введение в численные методы. – Лань, 2009. –288 с.
- 2 Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы: учебное пособие для вузов // М.: Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1989. –432 с.
- 3 Самарский А. А. и др. Задачи и упражнения по численным методам: Учебное пособие // М.: Эдиториал УРСС, 2000. –208 с.
- 4 Калиткин Н. Н. Численные методы. 2 изд. –СПб.: БХВ-Петербург, 2011. –592 с.
- 5 Калиткин Н. Н. Численные методы: Учебное пособие. – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. –511 с.
- 6 Демидович, Б.П. Численные методы анализа: приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения / Б.П. Демидович, И.А. Марон, Э.З. Шувалова ; под ред. Б.П. Демидович. – Изд. 3-е, перераб. – Москва : Главная редакция физико-математической литературы, 1967. –368 с.