



Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ Информатики и систем управления

КАФЕДРА Теоретической информатики и компьютерных технологий

Лабораторная работа № 1

«Приближение функции кубическими сплайнами»

по курсу «Численные методы»

Выполнил:

студент группы ИУ9-61Б

Локшин Вячеслав

Проверила:

Домрачева А. Б.

Москва, 2024

1. Цель

Целью данной работы является изучение приближения заданной функции путем сплайн-интерполяции, построение сплайна третьего порядка на основе заданных точек (узлов интерполяции) и вычисление значения сплайна третьего порядка в серединах частичных отрезков между узлами интерполяции.

2. Постановка задачи

Дано: функция $y = f(x)$ задана конечным набором точек

$y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ на отрезке $[a, b]$, $a = x_0$, $b = x_n$, $x_i = a + ih$, $h = \frac{(b-a)}{n}$

x_i	x_0	x_1	...	x_{n-1}	x_n
y_i	y_0	y_1	...	y_{n-1}	y_n

Найти: интерполяционную функцию $y = g(x)$: $g(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ (т.е. функцию, совпадающую со значениями $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$ в узлах интерполяции x_i , $i = \overline{0, n}$):

1. Для заданных узлов (x_i, y_i) построить кубический сплайн.
2. Вычислить значения $f(x)$ в серединах частичных отрезков между узлами интерполяции, т.е. в точках $x_i^* = a + \left(i - \frac{1}{2}\right)h$, $h = \frac{(b-a)}{n}$.

Индивидуальный вариант: $y = f(x)$ задана функцией $f(x) = \frac{\ln(x)^2}{x}$.

$$a = \frac{1}{e}, \quad b = e.$$

3. Основные теоретические сведения

Интерполяционной функцией называется функция $y = g(x)$, проходящая через заданные точки, называемые узлами интерполяции:

$g(x_i) = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. При этом в промежуточных точках равенство выполняется с некоторой погрешностью $g(x_i^*) \approx f(x_i^*)$. Задача интерполяции заключается в поиске такой функции $y = g(x)$.

Приближение функции кубическим сплайном — пример задачи интерполяции.

Сплайн k -го порядка — функция, проходящая через все узлы (x_i, y_i) , $i = \overline{0, n}$, являющаяся многочленом на каждом частичном отрезке разбиения $[x_i, x_{i+1}]$, $x_i = a + ih$, $h = \frac{(b-a)}{n}$, $x_i \in [a, b]$ и имеющая первые p непрерывных на $[a, b]$ производных.

$d = k - p$ — дефект сплайна. Чем выше дефект, тем грубее сплайн.

На каждом частичном отрезке разбиения кубический сплайн описывается

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = \overline{0, n-1}$$

На частные многочлены накладываются условия:

1. Сплайн проходит через все узлы

$$S_i(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n-1}; \quad S_{n-1}(x_n) = y_n$$

2. Условие гладкости на краях

$$S_0''(x_0) = 0; \quad S_{n-1}''(x_i) = 0$$

3. Непрерывность сплайна и его первых двух производных в промежуточных узлах

$$S_{i-1}'(x_i) = S_i'(x_i);$$

$$S_{i-1}''(x_i) = S_i''(x_i);$$

$$i = \overline{0, n-1}$$

Эти условия позволяют выразить коэффициенты a_i, b_i, d_i и приводят к трехдиагональной СЛАУ относительно коэффициента c_i :

$$a_i = y_i, \quad i = \overline{0, n-1};$$

$$b_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{h}{3} (c_{i+1} + 2c_i), \quad i = \overline{0, n-2};$$

$$b_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} - \frac{2h}{3} c_{n-1};$$

$$d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h}, \quad i = \overline{0, n-2};$$

$$d_{n-1} = -\frac{c_{n-1}}{3h}$$

СЛАУ с трехдиагональной матрицей относительно коэффициента c_i :

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = \frac{3(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}))}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$c_0 = c_n = 0,$$

где $h = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$.

4. Реализация

Листинг 1. Сплайн-интерполяция

```
package main

import (
    "fmt"
    "math"
)

//const (
//    N      = 10
//    Left   = 0.0
//    Right  = 1.0
//)

// Вариант 17

const (
    Left   = 1.0 / math.E
    Right  = math.E
    N      = 32
)

func testFunc(x float64) float64 {
    return x*x*x + 2*x*x - 3*x + 4
}

func varFunc(x float64) float64 {
    return math.Pow(math.Log(x), 2) / x
}

func getXY(h float64, f func(x float64) float64) ([]float64, []float64) {
    xArr := make([]float64, N+1)
    for i := 0; i <= N; i++ {
        xArr[i] = Left + float64(i)*h
    }

    yArr := make([]float64, N+1)
    for i := 0; i <= N; i++ {
        yArr[i] = f(xArr[i])
    }
}
```

```

        return xArr, yArr
    }

func printTableForFunc(x, y []float64) {
    fmt.Println("table for f(x):")
    for i := 0; i <= N; i++ {
        fmt.Printf("%.1f; %.16f\n", x[i], y[i])
    }
}

func getMatrixCoffs(y []float64, h float64) ([]float64, []float64,
[]float64, []float64) {

    a := make([]float64, 0)
    for i := 1; i < N-1; i++ {
        a = append(a, 1)
    }

    b := make([]float64, 0)
    for i := 1; i < N; i++ {
        b = append(b, 4)
    }

    c := make([]float64, 0)
    for i := 1; i < N-1; i++ {
        c = append(c, 1)
    }

    d := make([]float64, 0)
    for i := 1; i < N; i++ {
        d = append(d, 3*(y[i+1]-2*y[i]+y[i-1]))/(h*h))
    }

    return a, b, c, d
}

func getA(y []float64) []float64 {
    A := make([]float64, 0)
    for i := 1; i <= N; i++ {
        A = append(A, y[i-1])
    }
    return A
}

func getB(y, C []float64, h float64) []float64 {
    B := make([]float64, 0)
    for i := 1; i <= N; i++ {
        B = append(B, (y[i]-y[i-1])/h-(h/3)*(C[i]+2*C[i-1])))
    }
    return B
}

func getAlphaBeta(a, b, c, d []float64, size int) (alpha, beta []float64) {
    alpha = append(alpha, -c[0]/b[0])
    beta = append(beta, d[0]/b[0])

    var y float64

    for i := 1; i < size-1; i++ {
        y = a[i-1]*alpha[i-1] + b[i]
        alpha = append(alpha, -c[i]/y)
        beta = append(beta, (d[i]-a[i-1]*beta[i-1])/y)
    }
}

```

```

    }

    y = a[size-2]*alpha[size-2] + b[size-1]

    beta = append(beta, (d[size-1]-a[size-2]*beta[size-2])/y)

    return alpha, beta
}

func getC(y []float64, h float64) []float64 {
    a, b, c, d := getMatrixCoffs(y, h)
    alpha, beta := getAlphaBeta(a, b, c, d, N-1)

    C := make([]float64, N-1)
    C[N-2] = beta[N-2]

    for i := N - 3; i >= 0; i-- {
        C[i] = alpha[i]*C[i+1] + beta[i]
    }

    C = append(C, 0)
    C = append([]float64{0}, C...)

    return C
}

func getD(C []float64, h float64) []float64 {
    D := make([]float64, 0)
    for i := 1; i <= N; i++ {
        D = append(D, (C[i]-C[i-1])/(3*h))
    }
    return D
}

func PrintInterpolationNodes(A, B, C, D []float64, h float64, xArr
[]float64, f func(x float64) float64) {
    fmt.Println("interpolation nodes:")
    for i := 0; i < N; i++ {
        varX := Left + float64(i)*h
        varY := f(varX)
        s := A[i] + B[i]*(varX-xArr[i]) + C[i]*math.Pow(varX-xArr[i], 2) +
D[i]*math.Pow(varX-xArr[i], 3)
        fmt.Printf("i: %d, x: %.2f, f(x): %.16f, y: %.16f, |f(x)-y2|:
%.16f\n",
            i+1, varX, s, varY, math.Abs(s-varY))
    }
}

func PrintMiddleInterpolationNodes(A, B, C, D []float64, h float64, xArr
[]float64, f func(x float64) float64) {
    fmt.Println("middles interpolation nodes:")
    for i := 0; i < N; i++ {
        varX := Left + (float64(i+1)-0.5)*h
        varY := f(varX)
        s := A[i] + B[i]*(varX-xArr[i]) + C[i]*math.Pow(varX-xArr[i], 2) +
D[i]*math.Pow(varX-xArr[i], 3)
        fmt.Printf("i: %d, x: %.2f, f(x): %.16f, y: %.16f, |f(x)-y|:
%.16f\n",
            i+1, varX, s, varY, math.Abs(s-varY))
    }
}

```

```

func main() {

    // INFO: Для смены варианта надо поменять константы Left, Right, N и
    функцию вычисления

    var h = (Right - Left) / N

    xArr, yArr := getXy(h, varFunc)

    printTableForFunc(xArr, yArr)

    A := getA(yArr)
    C := getC(yArr, h)
    B := getB(yArr, C, h)
    D := getD(C, h)

    PrintInterpolationNodes(A, B, C, D, h, xArr, varFunc)
    PrintMiddleInterpolationNodes(A, B, C, D, h, xArr, varFunc)

}

```

5. Результаты

Для заданных узлов интерполяции (x_i, y_i) построен кубический сплайн с коэффициентами для $N = 32$:

Рисунок 1 – Результаты программы для коэффициентов a, b, c, d

```

A: [2.718281828459845 1.5168197375053386 0.8565177287889152 0.478684625172735 0.2577488749847273 0.12879945912607685 0.05583364556440568 0.01786514475095174 0.002178657
3532688862 0.0007984948712216105 0.008618371782115622 0.022312523118186336 0.039651917547157654 0.05914358874643943 0.07977663209856337 0.1008644785299458 0.12194165661
153164 0.14269515649576098 0.16291788580938885 0.18247686828782886 0.20129116034937744 0.21931639282264476 0.23653385451707362 0.25294272932025164 0.2685545454619871 0.
28338919077737545 0.2974720454607005 0.3108319178338083 0.3234995605975024 0.33550660878338295 0.3468848252582465 0.3576655711678112]
B: [-18.10865092397725 -12.887975340242027 -6.381471214949331 -3.9551279028236235 -2.254174245455225 -1.3189093837295547 -0.7172280155315147 -0.34318747313289527 -0.101
83694718567071 0.05313706430749551 0.15263959843005335 0.21535180557970066 0.2534895076520508 0.2750207922338273 0.28528397951914235 0.28789391220385496 0.2853315909809
4146 0.2793151961122983 0.2710436846344778 0.26135741269039303 0.25084746201102426 0.23992886386033116 0.22889215560142184 0.21793896071426463 0.20720734892274684 0.196
7890513358576 0.18674484440258074 0.17710424020465626 0.1679078489993424 0.15907917200737162 0.15092485337924372 0.142283628678049]
C: [0 71.07787993370731 17.506157053100456 15.527755100819597 7.63020173677634 5.103139471985502 3.088565865991303 2.003880185583957 1.2820324190334536 0.82789071353461
23 0.5268053389980457 0.32700203272802675 0.19223096027602274 0.10091080572259226 0.03881930811111824 -0.003285883552890398 -0.031599325710300614 -0.0503120256569156 -
0.062303128550186285 -0.06957137255105217 -0.07351834840856436 -0.0751349812135971 -0.07512638092391653 -0.07399797254200845 -0.07210959575606142 -0.06973229675715437 -
0.06701646745584358 -0.06423737061126154 -0.06096864524445378 -0.059231055568943876 -0.051787465136874225 -0.06586013083810173 0]
D: [322.5677682795171 -243.120800853982 -8.978443126079188 -35.84091373974318 -11.468389825600218 -9.142598410735596 -4.922553114134473 -3.27591120206341 -2.06099951999
1932 -1.3663946844847485 -0.9067533620656664 -0.6116221264622147 -0.4144318665766967 -0.2817854982780361 -0.1910830446927793 -0.1284929130911776 -0.0849225365964593 -0.
054418383096045665 -0.03298496309761854 -0.017912284314027017 -0.0073366515227133045 3.903009278562916e-05 0.005120976790521547 0.008569888213912694 0.01078872967688188
6 0.012325058057007347 0.012612180721000281 0.01483422757787975 0.007885581623108569 0.033780725535129764 -0.06386499390840644 0.2988884227112232]

```

Значения функции в узлах интерполяции и в серединах частичных отрезков между узлами интерполяции представлены на Рисунках 2 и 3.

Рисунок 2 – Значения функции в узлах интерполяции

```
interpolation nodes:
i: 1, x: 0.37, f(x): 2.7182818284590451, y: 2.7182818284590451, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 2, x: 0.44, f(x): 1.5160197375053306, y: 1.5160197375053306, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 3, x: 0.51, f(x): 0.8565177287889152, y: 0.8565177287889152, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 4, x: 0.59, f(x): 0.4786846251727350, y: 0.4786846251727350, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 5, x: 0.66, f(x): 0.2577488749847273, y: 0.2577488749847273, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 6, x: 0.74, f(x): 0.1287994591260768, y: 0.1287994591260768, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 7, x: 0.81, f(x): 0.0558336455644057, y: 0.0558336455644057, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 8, x: 0.88, f(x): 0.0178651447509517, y: 0.0178651447509517, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 9, x: 0.96, f(x): 0.0021706573532689, y: 0.0021706573532689, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 10, x: 1.03, f(x): 0.0007904948712216, y: 0.0007904948712216, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 11, x: 1.10, f(x): 0.0086183717821156, y: 0.0086183717821156, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 12, x: 1.18, f(x): 0.0223125231181863, y: 0.0223125231181863, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 13, x: 1.25, f(x): 0.0396519175471577, y: 0.0396519175471577, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 14, x: 1.32, f(x): 0.0591435887464394, y: 0.0591435887464394, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 15, x: 1.40, f(x): 0.0797766320985634, y: 0.0797766320985634, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 16, x: 1.47, f(x): 0.1008644705299458, y: 0.1008644705299458, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 17, x: 1.54, f(x): 0.1219416566115316, y: 0.1219416566115316, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 18, x: 1.62, f(x): 0.1426951564957610, y: 0.1426951564957610, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 19, x: 1.69, f(x): 0.1629178858093888, y: 0.1629178858093888, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 20, x: 1.76, f(x): 0.1824768682878289, y: 0.1824768682878289, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 21, x: 1.84, f(x): 0.2012911603493774, y: 0.2012911603493774, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 22, x: 1.91, f(x): 0.2193163928226448, y: 0.2193163928226448, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 23, x: 1.98, f(x): 0.2365338545170736, y: 0.2365338545170736, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 24, x: 2.06, f(x): 0.2529427293202516, y: 0.2529427293202516, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 25, x: 2.13, f(x): 0.2685545454619871, y: 0.2685545454619871, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 26, x: 2.20, f(x): 0.2833891907773755, y: 0.2833891907773755, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 27, x: 2.28, f(x): 0.2974720454607005, y: 0.2974720454607005, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 28, x: 2.35, f(x): 0.3108319178338083, y: 0.3108319178338083, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 29, x: 2.42, f(x): 0.3234995605975024, y: 0.3234995605975024, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 30, x: 2.50, f(x): 0.3355066087833830, y: 0.3355066087833830, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 31, x: 2.57, f(x): 0.3468848252582465, y: 0.3468848252582465, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
i: 32, x: 2.64, f(x): 0.3576655711678112, y: 0.3576655711678112, |f(x)-y2|: 0.0000000000000000
```


Рисунок 3 – Значения функции в серединах частичных отрезков между узлами интерполяции

```
i: 1, x: 0.40, f(x): 2.0692184065944330, y: 2.0235687791620460, |f(x)-y|: 0.0456496274323870
i: 2, x: 0.48, f(x): 1.1265308314714015, y: 1.1393865094692908, |f(x)-y|: 0.0128556779978892
i: 3, x: 0.55, f(x): 0.6453242898198889, y: 0.6421523988499930, |f(x)-y|: 0.0031718909698959
i: 4, x: 0.62, f(x): 0.3525998534500427, y: 0.3535801022301516, |f(x)-y|: 0.0009802487801089
i: 5, x: 0.70, f(x): 0.1846872578220184, y: 0.1844914672643880, |f(x)-y|: 0.0001957905576304
i: 6, x: 0.77, f(x): 0.0867923596725884, y: 0.0868811548239339, |f(x)-y|: 0.0000887951513455
i: 7, x: 0.85, f(x): 0.0334152319397253, y: 0.0334121363501317, |f(x)-y|: 0.0000030955895936
i: 8, x: 0.92, f(x): 0.0078019992850811, y: 0.0078150903621203, |f(x)-y|: 0.0000130910770392
i: 9, x: 0.99, f(x): 0.0000577195240379, y: 0.0000617189806055, |f(x)-y|: 0.0000039994565676
i: 10, x: 1.07, f(x): 0.0037908748308108, y: 0.0037945290175262, |f(x)-y|: 0.0000036541867155
i: 11, x: 1.14, f(x): 0.0148896703399954, y: 0.0148917371341401, |f(x)-y|: 0.0000020667941447
i: 12, x: 1.21, f(x): 0.0306320681998731, y: 0.0306335173076183, |f(x)-y|: 0.0000014491077452
i: 13, x: 1.29, f(x): 0.0492000688394455, y: 0.0492010201399404, |f(x)-y|: 0.0000009513004949
i: 14, x: 1.36, f(x): 0.0693658814385302, y: 0.0693665353647428, |f(x)-y|: 0.0000006539262127
i: 15, x: 1.43, f(x): 0.0902965888454547, y: 0.0902970375401717, |f(x)-y|: 0.0000004486947170
i: 16, x: 1.51, f(x): 0.1114265889063611, y: 0.1114269010960102, |f(x)-y|: 0.0000003121896491
i: 17, x: 1.58, f(x): 0.1323736446351390, y: 0.1323738628692341, |f(x)-y|: 0.0000002182340951
i: 18, x: 1.65, f(x): 0.1528824647789661, y: 0.1528826181148578, |f(x)-y|: 0.0000001533358917
i: 19, x: 1.73, f(x): 0.1727863084887225, y: 0.1727864163934880, |f(x)-y|: 0.0000001079047655
i: 20, x: 1.80, f(x): 0.1919805089012870, y: 0.1919805847713362, |f(x)-y|: 0.0000000758700492
i: 21, x: 1.87, f(x): 0.2104040230671019, y: 0.2104040761517184, |f(x)-y|: 0.0000000530846165
i: 22, x: 1.95, f(x): 0.2280264545504824, y: 0.2280264914215855, |f(x)-y|: 0.0000000368711032
i: 23, x: 2.02, f(x): 0.2448388560413626, y: 0.2448388810094081, |f(x)-y|: 0.0000000249680455
i: 24, x: 2.09, f(x): 0.2608471671019562, y: 0.2608471844897037, |f(x)-y|: 0.0000000173877475
i: 25, x: 2.17, f(x): 0.2760675212115552, y: 0.2760675294506147, |f(x)-y|: 0.0000000082390595
i: 26, x: 2.24, f(x): 0.2905228365876097, y: 0.2905228519963970, |f(x)-y|: 0.0000000154087873
i: 27, x: 2.31, f(x): 0.3042404945344485, y: 0.3042404637768515, |f(x)-y|: 0.0000000307575970
i: 28, x: 2.39, f(x): 0.3172501736681687, y: 0.3172503012932666, |f(x)-y|: 0.0000001276250979
i: 29, x: 2.46, f(x): 0.3295841430634057, y: 0.3295836696924803, |f(x)-y|: 0.0000004733709254
i: 30, x: 2.53, f(x): 0.3412705839347611, y: 0.3412723465404564, |f(x)-y|: 0.0000017626056953
i: 31, x: 2.61, f(x): 0.3523545355378991, y: 0.3523479485434474, |f(x)-y|: 0.0000065869944517
i: 32, x: 2.68, f(x): 0.3628169198829118, y: 0.3628414907746085, |f(x)-y|: 0.0000245708916967
```

6. Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы был изучен метод приближения функции с помощью интерполяции кубическим сплайном, был построен сплайн третьего порядка на основе заданных узлов интерполяции и найдены значения функции в серединах частичных отрезков между узлами интерполяции. В результате тестирования сделан вывод о точности данного метода приближения функции: значения функции и значения кубического сплайна совпадают в узлах интерполяции, а в серединах между узлами интерполяции присутствует погрешность из-за

погрешности арифметических операций на ЦВМ. В начале погрешность выше из-за использования начальных условий в вычислениях.