

# MAC0210 - EP1

Vinicius Agostini - 4367487

30/04/2020

## 1 Parte 1: Método de Ponto Fixo

Temos que se  $g$  e  $g'$  são contínuas no intervalo  $[a, b]$  e seja  $x \in [a, b]$  uma raiz de  $f$  e se  $|g'(x)| < 1$  no mesmo intervalo então a sequência  $x_{n+1} = g(x_n)$  converge para  $x$  para todo  $x_0 \in [a, b]$ .

Testei três funções diferentes que foram obtidas a partir de manipulações algébricas e também uma sugestão do próprio livro.

1.  $g(x) = \frac{e^x}{2x}, \quad x \neq 0$

$$g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{2x^2}$$
$$|g'(x)| < 1 \iff 0.602 < x < 2.081$$

A única raiz que temos garantia de convergência com esta escolha de  $g(x)$  é  $x = 1.48$  para todo  $0.602 < x_0 < 2.081$ .

```
Enter initial guess: 0.2
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = exp(x) / (2 * x):

Method did not converge after 1000 steps.
```

```
Enter initial guess: 1.5
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = exp(x) / (2 * x):

Method converged to 1.487962 in 22 steps.
```

```
Enter initial guess: -0.5
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = exp(x) / (2 * x):

Method did not converge after 1000 steps.
```

```
Enter initial guess: 2.8
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = exp(x) / (2 * x):

Method did not converge after 1000 steps.
```

2.  $g(x) = \ln(2) + 2\ln(x), \quad x > 0$

$$g'(x) = \frac{2}{x}, \quad x \neq 0$$

$$|g'(x)| < 1 \iff \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq -2 \end{cases}$$

A única raiz que temos garantia de convergência com esta escolha de  $g(x)$  é  $x = 2.61$  para todo  $x_0 \geq 2$ . Para  $x_0 = 200$  o método levou apenas 3 iterações a mais do que para  $x_0 = 4$ , convergindo em 76 passos. Porém não convergiu para nada menor do que 2.

```
Enter initial guess: 4
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 100

Fixed Point Method for g(x) = ln(2) + 2 * ln(x):

Method converged to 2.617867 in 73 steps.
```

```
Enter initial guess: 200
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = ln(2) + 2ln(x):

Method converged to 2.617867 in 76 steps.
```

```
Enter initial guess: 1
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = ln(2) + 2 * ln(x):

Method did not converge after 1000 steps.
```

```
Enter initial guess: -2
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = ln(2) + 2 * ln(x):

Method did not converge after 1000 steps.
```

3.  $g(x) = x - \frac{f(x)}{df(x)} = x - \frac{e^x - 2x}{e^x - 4x}$

$$g'(x) = \frac{(4 - e^x)(2x^2 - e^x)}{(4x - e^x)^2}$$

$$|g'(x)| < 1 \iff \begin{cases} x < -0.18 \\ 0.889 < x < 1.84 \\ x > 2.44 \end{cases}$$

Nesse caso cada raiz de  $f$  está contida em um dos intervalos da solução, então conseguimos garantir a convergência para todas elas a depender de  $x_0$ . Além disso essa função acaba sendo equivalente ao Método de Newton e converge muito mais rapidamente do que as outras, além de convergir até mesmo fora dos intervalos da solução de  $|g'(x)| < 1$  nos meus testes.

```
Enter initial guess: 1
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for g(x) = x - f(x)/df(x):

Method converged to 1.487962 in 5 steps.
```

```
Enter initial guess: -1
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for  $g(x) = x - f(x)/df(x)$ :

Method converged to -0.539835 in 5 steps.
```

```
Enter initial guess: 3
Enter tolerable error: 1e-8
Enter maximum iteration: 1000

Fixed Point Method for  $g(x) = x - f(x)/df(x)$ :

Method converged to 2.617867 in 6 steps.
```

## 2 Parte 2: Método de Newton

Neste EP, para cada função testada foram gerados 1 milhão de pontos para servir como chutes iniciais para o método de Newton, cujo critério de parada foi  $|f(x)| < 10^{-8}$  ou 400 iterações. Quando

As funções escolhidas para gerar as imagens aplicando o método de Newton foram:

1.  $f(x) = x^4 - 1$
2.  $f(x) = x^{10} - 1$
3.  $f(x) = x^8 - 17x^4 - 16$
4.  $f(x) = \sin(x)$

Foram escolhidas funções que pudessem mostrar o efeito de aumentar o número de raízes existentes mas também algumas que não fossem da forma  $x^n - 1$ .

Podemos observar que para as 3 primeiras funções a imagem é dividida em  $n$  partes, onde  $n$  é o número de raízes diferentes, por fractais de formatos parecidos entre si a menos de alguns detalhes de acordo com sua ordem.

Para a função  $\sin(x)$  quanto mais raízes forem consideradas mais detalhado ficam as cores da imagem e podemos observar que são encontradas até mesmo raízes que estão longe do intervalo onde os chutes iniciais estão definidos.

Neste EP todas as imagens foram criadas a partir de 1 milhão de pontos e o método de newton convergiu rapidamente mesmo com uma precisão de  $10^{-8}$  e com um número baixo de pontos iniciais que não convergiram a nenhuma raiz.

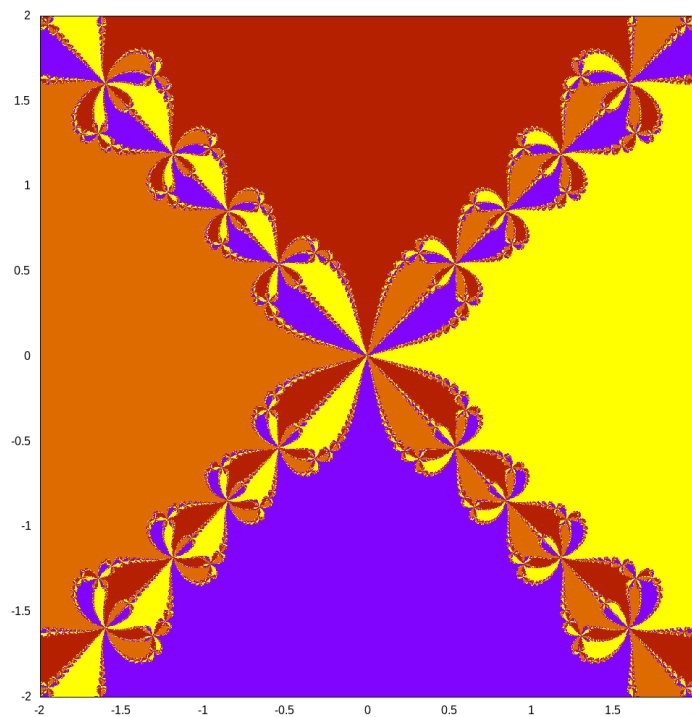


Figure 1: Bacias de convergência do polinômio  $x^4 - 1$ . O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ . As raízes são  $\{-1, 1, -i, i\}$ .

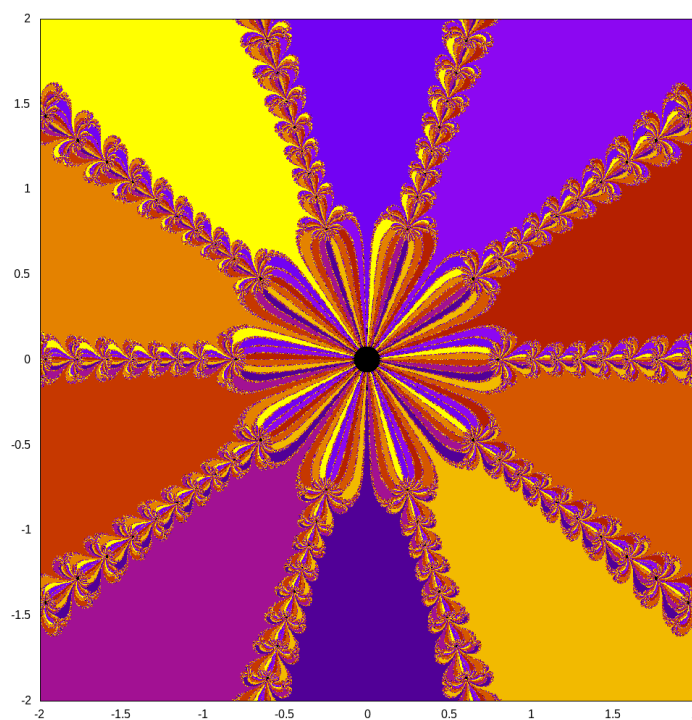


Figure 2: Bacias de convergência do polinômio  $x^{10} - 1$ . O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ . As raízes são  $\{-1, 1, -\sqrt[5]{-1}, \sqrt[5]{-1}, -(-1)^{2/5}, (-1)^{2/5}, -(-1)^{3/5}, (-1)^{3/5}, -(-1)^{4/5}, (-1)^{4/5}\}$ .

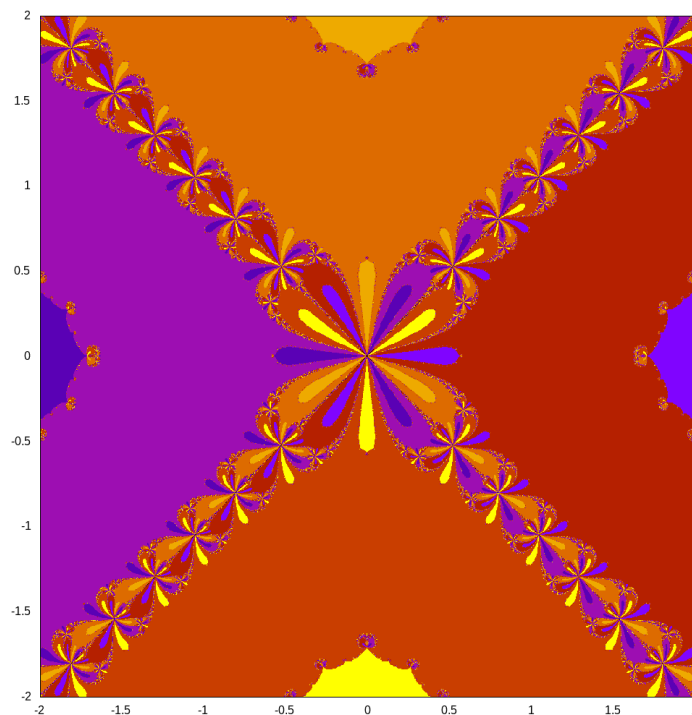


Figure 3: Bacias de convergência do polinômio  $x^8 - 17x^4 + 16$ . O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ . As raízes são  $\{-2, 2, -1, 1, -i, i, -2i, 2i\}$ .

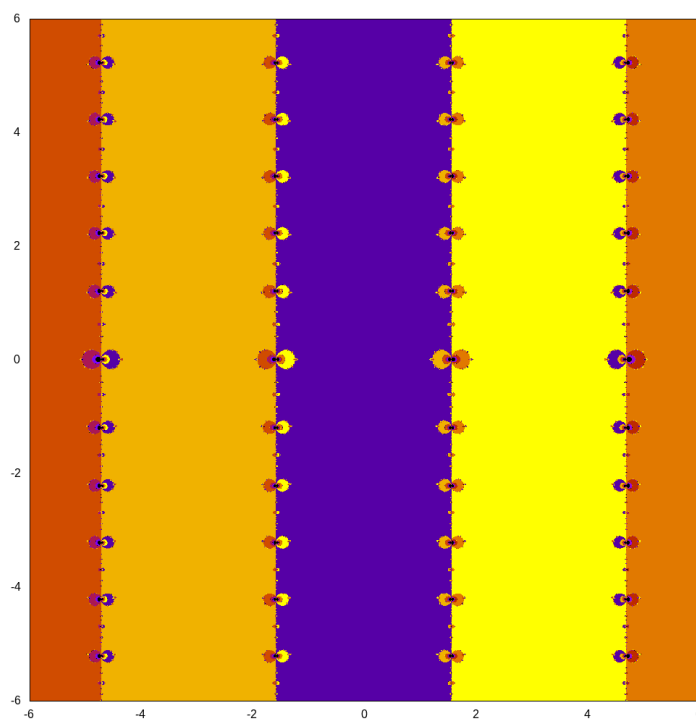


Figure 4: Bacias de convergência do polinômio  $\sin(x)$ . O plano visto varia de -6 a 6 no eixo  $x$  e de  $-6i$  a  $6i$  no eixo  $y$ . As raízes consideradas são  $\{n\pi, n \in \mathbb{Z}, -5 \leq n \leq 5\}$ .

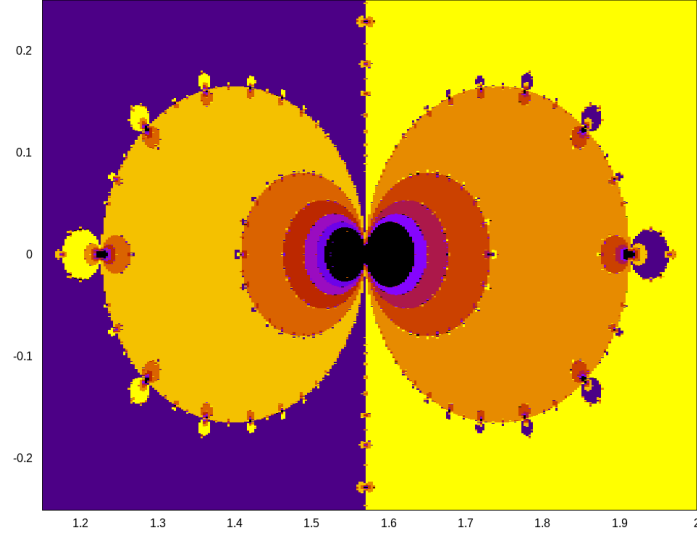


Figure 5: Bacias de convergência do polinômio  $\sin(x)$ . O plano visto desta vez é um recorte da imagem anterior, variando de 1.15 a 2 no eixo  $x$  e de  $-0.25i$  a  $0.25i$  no eixo  $y$ . As raízes consideradas são  $\{n\pi, n \in \mathbb{Z}, -5 \leq n \leq 5\}$ .

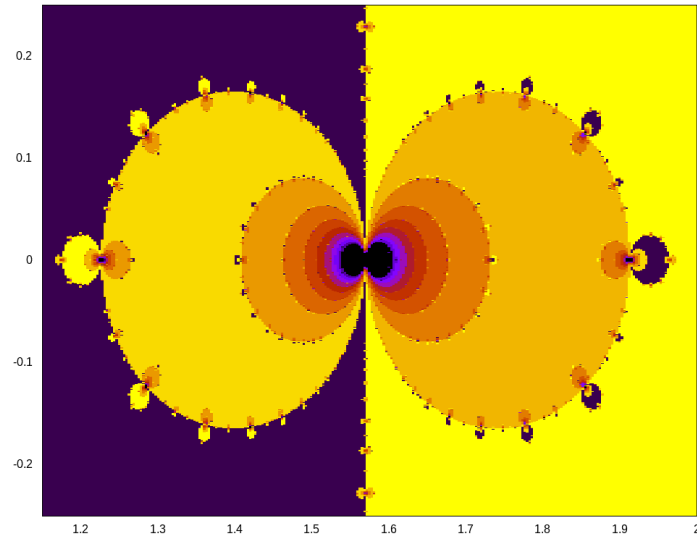


Figure 6: Bacias de convergência do polinômio  $\sin(x)$ . O plano visto desta vez é o mesmo da imagem anterior, variando de 1.15 a 2 no eixo  $x$  e de  $-0.25i$  a  $0.25i$  no eixo  $y$ . As raízes consideradas, no entanto, são  $\{n\pi, n \in \mathbb{Z}, -9 \leq n \leq 9\}$ .

## Cor em função do número de iterações

Aqui, ao invés de colorir os pontos da imagem com o índice da raiz correspondente foi realizada a transformação

$$r = id - 0.99 \cdot \log(\text{iters}/\text{max\_iters})$$

levando em conta a quantidade de iterações necessárias para a convergência ao começar naquele ponto do plano. **(A barra de cores do lado se refere a  $r$  e não diretamente ao número de iterações).**

Com isso, é possível notar a variação de iterações necessárias dentro de cada área do plano, porém, também é interessante notar que o método não precisou de muitas iterações para convergir.

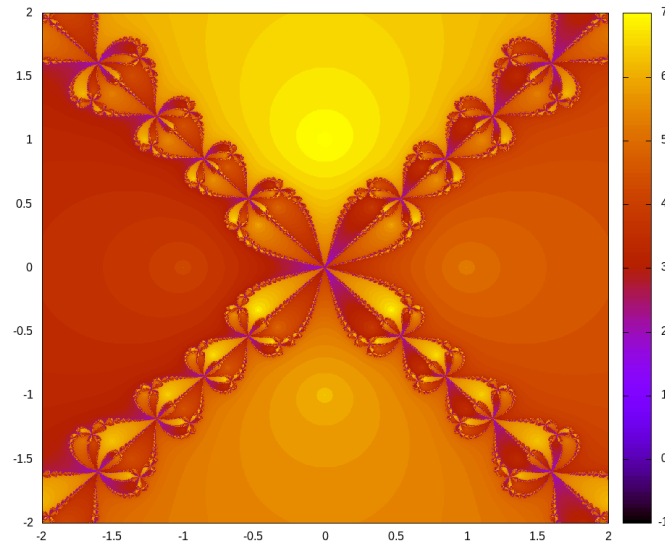


Figure 7: Bacias de convergência do polinômio  $x^4 - 1$ . O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ . As raízes são  $\{-1, 1, -i, i\}$ .

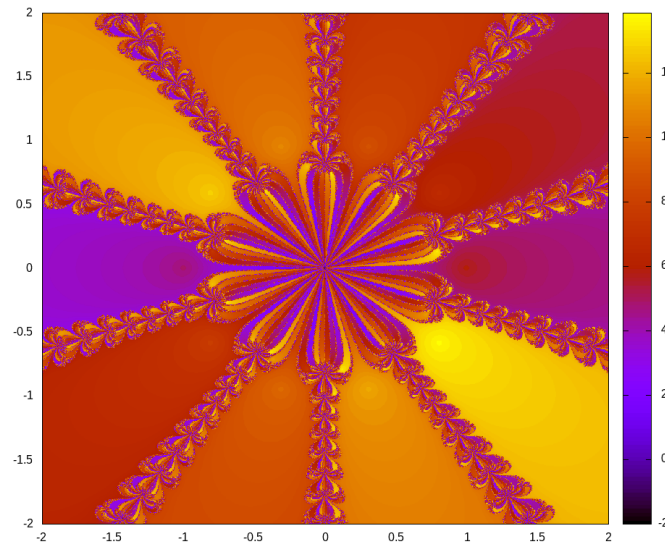


Figure 8: Bacias de convergência do polinômio  $x^{10} - 1$ . O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ . As raízes são  $\{-1, 1, -\sqrt[5]{-1}, \sqrt[5]{-1}, -(-1)^{2/5}, (-1)^{2/5}, -(-1)^{3/5}, (-1)^{3/5}, -(-1)^{4/5}, (-1)^{4/5}\}$ .

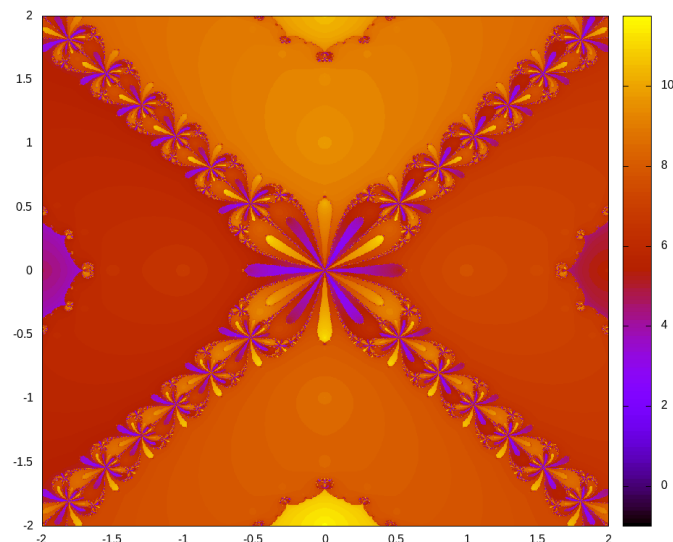


Figure 9: Bacias de convergência do polinômio  $x^8 - 17x^4 + 16$ . O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ . As raízes são  $\{-2, 2, -1, 1, -i, i, -2i, 2i\}$ .

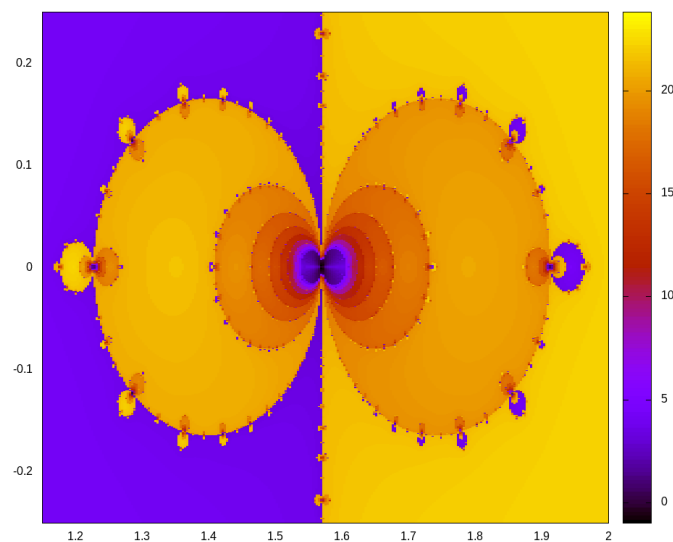


Figure 10: Bacias de convergência do polinômio  $\sin(x)$ . O plano visto varia de 1.15 a 2 no eixo  $x$  e de  $-0.25i$  a  $0.25i$  no eixo  $y$ . As raízes consideradas são  $\{n\pi, n \in \mathbb{Z}, -9 \leq n \leq 9\}$ .

### Bônus: cores apenas por número de iterações

Aqui os pontos são coloridos diretamente pela quantidade de iterações necessárias para convergência a partir daquele chute inicial, sem relação com qual raiz foi encontrada. Assim, é possível ver que as bacias têm formatos interessantes não apenas em questão as raízes mas também em relação à taxa de convergência.

Nesse caso o intervalo de cores agrega os pontos que levaram 50 ou mais iterações num tom de cor apenas, porém, para esta imagem apenas 0.79% pontos precisaram de mais do que isso.



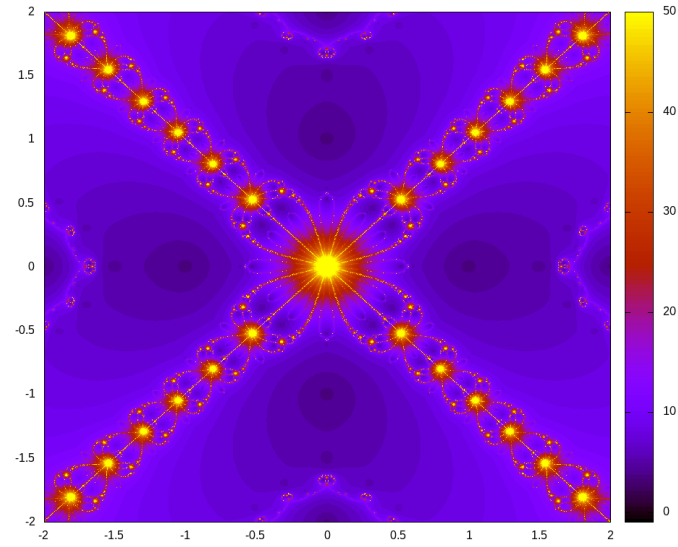


Figure 11: Bacias de convergência do polinômio  $x^8 - 17x^4 + 16$  em função do número de iterações necessárias. O plano visto varia de -2 a 2 no eixo  $x$  e de  $-2i$  a  $2i$  no eixo  $y$ .