MAC0210 - Capítulo 11

Vinicius Agostini - 4367487

31/05/2020

Exercício 3

Dados pontos (x_i, y_i) tal que $x_i = a + ih$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, queremos encontrar um polinônio interpolador quadrático tal que

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x_0 \leq x \leq x_1, \\ S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}, \qquad S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i.$$

Ao determinar os $3n$ coeficientes a_i, b_i, c_i teremos tudo que é necessário para formar os polinômios. Vamos começar colocando algumas condições que devemos cumprir:

$$\begin{aligned} &S_i(x_i) = y_i, && i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} && i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ &S_i'(x_i) = S_{i+1}'(x_i), && i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Isso nos dá um total de $3n - 1$ equações, então precisamos de mais uma para poder resolver o sistema de coeficientes. Como o enunciado nos dá o valor de $f'(x_0)$ podemos usar a equação $S_0'(x_0) = f'(x_0)$ para completar nosso sistema.

Construção de $S_i(x)$:

Como $S(x)$ é uma spline quadrática, $S'(x)$ é linear. Seja $z_i = S'(x_i)$, temos:

$$S_i(x_i) = y_i \tag{1}$$

$$S_i(x_{i+1}) = y_{i+1} \tag{2}$$

$$S_i'(x_i) = z_i \tag{3}$$

$$S_i'(x_{i+1}) = z_{i+1} \tag{4}$$

Usando (1), (3) e (4) para cada i obtemos a seguinte expressão:

$$S_i(x) = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}(x - x_i)^2 + z_i(x - x_i) + y_i \qquad 0 \leq i \leq n-1 \tag{5}$$

Finalmente, para encontrar os valores de z_i podemos usar (2) para obter uma definição recursiva que pode ser facilmente implementada:

$$z_{i+1} = -z_i + 2\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right) \qquad 0 \leq i \leq n-1 \tag{6}$$

Como $x_{i+1} - x_i = h$ pois os pontos são equidistantes:

$$z_{i+1} = -z_i + 2\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right) \qquad 0 \leq i \leq n-1$$

Com essa relação, dado $z_0 = S_0'(x_0) = f'(x_0)$ podemos calcular z_1 com $i = 0$, então usar z_1 para calcular z_2, e assim por diante até z_n.

Algoritmo para determinar os coeficientes a_i, b_i, c_i:

- Dado $z_0 = f'(a)$, calcular todos os z_i pela equação (6):

$$z_{i+1} = -z_i + 2\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\right).$$

- Considere

$$a_i = \frac{z_{i+1} - z_i}{2(x_{i+1} - x_i)}, \quad b_i = z_i, \quad c_i = y_i$$

Exercício 5

Dado $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, definimos uma *spline cúbica* por:

$$S(x) = S_i(x), \quad t_i \leq x \leq t_{i+1}$$

onde

$$S_i(x) = a_i x^3 + b_i x^2 + c_i x + d_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Isso nos dá um total de $4n$ incógnitas que devemos descobrir para então definir nossa $S(x)$.

Como $S(x)$ deve interpolar os pontos t_i, sabemos que devemos ter $S_i(x) = y_i$ e, além disso, uma *spline cúbica* deve ser duplamente diferenciável, resultando nas seguintes equações:

$$S_i(t_i) = y_i \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{7}$$
$$S_i(t_{i+1}) = y_{i+1} \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{8}$$
$$S_i'(t_{i+1}) = S_{i+1}'(t_{i+1}) \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2 \tag{9}$$
$$S_i''(t_{i+1}) = S_{i+1}''(t_{i+1}) \qquad i = 0, 1, \ldots, n-2 \tag{10}$$

Essas condições nos dão um total de $4n - 2$ equações que nos garantem que $S(x)$ é interpoladora e que $S'(x)$ e $S''(x)$ são contínuas. Porém, são necessárias mais duas equações para que possamos resolver o sistema e encontrar os coeficientes para $S(x)$.

Aqui, as duas últimas equações são uma escolha livre e, para este exercício, vamos escolher as condições de *not-a-knot*, ou seja:

$$S_0'''(t_1) = S_1'''(t_1) \tag{11}$$
$$S_{n-2}'''(t_{n-1}) = S_{n-1}'''(t_{n-1}) \tag{12}$$

Construção de $S(t)$:

Definindo $z_i = S''(t_i)$, temos pelas condições acima que, nos pontos interiores:

$$S_i''(t_i) = S_{i+1}''(t_i) = z_i \qquad i = 1, \ldots, n-1.$$

como $S_i(x)$ é um polinômio cúbico, $S_i''(x)$ é uma função linear tal que podemos escrever, na forma de Lagrange:

$$S_i''(x) = \frac{z_{i+1}}{h_i}(x - t_i) - \frac{z_i}{h_i}(x - t_{i+1})$$

onde $h_i = t_{i+1} - t_i$. Então podemos integrar para obtermos:

$$\begin{aligned} S_i'(x) &= \frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(x - t_{i+1})^2 + C_i + D_i \\ S_i(x) &= \frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 - \frac{z_i}{6h_i}(x - t_{i+1})^3 + C_i(x - t_i) + D_i(x - t_{i+1}). \end{aligned}$$

Pela propriedade de interpolação $S_i(t_i) = y_i$, podemos então escrever:

$$y_i = -\frac{z_i}{6h_i}(-h_i)^3 - D_i(-h_i) = \frac{1}{6}z_i h_i^2 + D_i h_i \implies D_i = \frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i.$$

Pela propriedade de interpolação $S_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$, temos:

$$y_{i+1} = \frac{z_{i+1}}{6h_i}h_i^3 + C_i h_i \implies C_i = \frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1}.$$

Logo, assim que pudermos determinar todos os z_i teremos todos S_i e S_i' já que podemos escrevê-los como:

$$\begin{aligned} S_i(x) = &\frac{z_{i+1}}{6h_i}(x - t_i)^3 - \frac{z_i}{6h_i}(x - t_{i+1})^3 \\ &+ \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_{i+1}\right)(x - t_i) - \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{h_i}{6}z_i\right)(x - t_{i+1}). \\ S_i'(x) = &\frac{z_{i+1}}{2h_i}(x - t_i)^2 - \frac{z_i}{2h_i}(x - t_{i+1})^2 + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{z_{i+1} - z_i}{6}h_i. \end{aligned}$$

As condições de continuidade de $S'(x)$ necessitam que:

$$\begin{aligned} S_{i-1}'(t_i) &= S_i'(t_i) & i = 1, 2, \ldots, n-1 \\ S_i'(t_i) &= -\frac{z_i}{2h_i}(-h_i)^2 + \underbrace{\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}}_{b_i} - \frac{z_{i+1} - z_i}{6}h_i \\ &= -\frac{1}{6}h_i z_{i+1} - \frac{1}{3}h_i z_i + b_i \\ S_{i-1}'(t_i) &= \frac{1}{6}z_{i-1}h_{i-1} + \frac{1}{3}z_i h_{i-1} + b_{i-1} \end{aligned}$$

Igualando as equações e manipulando algebricamente:

$$h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = 6(b_i - b_{i-1}) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Pelas condições not-a-knot temos que $S_0 \equiv S_1$ e $S_{n-2} \equiv S_{n-1}$ já que são iguais até a terceira derivada.

Então temos o sistema:

$$\begin{cases} h_{i-1}z_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)z_i + h_i z_{i+1} = 6(b_i - b_{i-1}) & \qquad i = 1, 2, \ldots, n-2 \\ z_0 = z_1 \\ z_{n-2} = z_{n-1} \end{cases}$$

que vamos escrever na forma $H \cdot \vec{z} = \vec{b}$:

$$\begin{pmatrix} 3h_0 + 2h_1 & h_1 & & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & h_{n-4} & 2(h_{n-4} + h_{n-3}) & h_{n-3} & \\ & & & h_{n-3} & 2(h_{n-3} + h_{n-2}) & h_{n-2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-3} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6(b_1 - b_0) \\ 6(b_2 - b_1) \\ \vdots \\ 6(b_{n-3} - b_{n-4}) \\ 6(b_{n-2} - b_{n-3}) \end{pmatrix}$$

Podemos ver que a matriz H é tridiagonal e também estritamente diagonal dominante já que $\begin{cases} 3h_0 + 2h_1 > |h_0 + h_1| > |h_1| \\ 2|h_{i-1} + h_i| > |h_{i-1}| + |h_i| \end{cases}$.

Uma vez que este sistema for resolvido, obtemos z_0 e z_{n-1} a partir das condições not-a-knot que estabelecemos anteriormente.