MAC0210 - Capítulo 10

Vinicius Agostini - 4367487

30/04/2020

1 Exercício 6

Fórmula geral para os polinômios:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \phi_j(x)$$

1.1 Monomial basis

Para encontrar o polinômio interpolador com a base monomial usamos a base $\phi_j(x) = x^j$.

Para os pontos do exercício $\{(x_i, y_i)\} = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 2), (2, 0)\},\ n = 3$ temos:

$$\{\phi_j(x)\} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j x^j = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

Para encontrar os coeficientes do polinômio resolvemos então o seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_0 = 1 \\ c_1 = \frac{7}{6} \\ c_2 = \frac{1}{2} \\ c_3 = -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Assim, temos que o polinômio interpolador é

$$p(x) = -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{6} + 1.$$

1.2 Lagrange basis

Aqui a base é formada pelos polinômios de Lagrange, onde temos:

$$L_j(x_i) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}, \quad c_j = y_j$$

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)\dots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\dots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\dots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\dots(x_j - x_n)} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)}$$

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x).$$

Para os pontos do exercício $\{(x_i, y_i)\} = \{(-1, 1), (0, 1), (1, 2), (2, 0)\},\ n = 3$ temos:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(-0-2)} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} = -\frac{x(x+1)(x-2)}{2}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = \frac{x(x+1)(x-1)}{6}$$

Agora podemos então construir o polinômio interpolador:

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j L_j(x) = -\frac{1\cdot x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{1\cdot(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - \frac{2\cdot x(x+1)(x-2)}{2} + \frac{0\cdot x(x+1)(x-1)}{6}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= -\frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} - x(x+1)(x-2) + 0 \\
&= \frac{-x(x-1)(x-2) + 3x(x+1)(x-1)(x-2) - 6x(x+1)(x-2)}{6} \\
&= \frac{-4x^3 + 3x^2 + 7x + 6}{6} \\
&= -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{6} + 1
\end{aligned}$$

1.3 Newton basis

Para as bases de Newton a ideia é escrever o polinômio tal que:

$$p(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$

E seguindo a definição, os coeficientes são dados pela j-ésima diferença dividida $f[x_0, x_1 \ldots x_j]$ de forma que:

$$f[x_0] = c_0, f[x_0,x_1] = c_1, \ldots, f[x_0, x_1, \ldots x_n] = c_n$$

Para determinar os coeficientes do polinômio montamos uma tabela de diferenças divididas seguindo a seguinte fórmula recursiva:

$$f[x_i, \ldots, x_j] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_j] - f[x_i, \ldots, x_{j-1}]}{x_j - x_i}$$

i	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	-1	1			
1	0	1	0		
2	1	2	1	1/2	
3	2	0	-2	-3/2	-2/3

Os coeficientes são dados pela diagonal da tabela e polinômio interpolador pode ser construído da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
p(x) &= f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 1 + 0 \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} \cdot (x - x_0)(x - x_1) - \frac{2}{3} \cdot (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \cdot (x + 1)(x - 0) - \frac{2}{3} \cdot (x + 1)(x - 0)(x - 1)
\end{aligned}$$

$$p(x) = -\frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{7x}{6} + 1$$