MAC0210 - Capítulo 15

Vinicius Agostini - 4367487

Junho 2020

Exercício 3

Seja $\int_a^b f(x)\ dx \approx I_M = (b-a)f(m)$, onde $m = \frac{a+b}{2}$.

Usando Taylor vamos escrever

$$f(x) = f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-m)^2, \quad \xi \in [a,b]$$

Agora, vamos calcular o erro da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
E_M = \left|\int_a^b f(x)\ dx - I_M\right| &= \left|\int_a^b \left[f(m) + f'(m)(x-m) + \frac{f''(\xi)}{2}(x-m)^2\right] dx - f(m)(b-a)\right| \\
&= \left|-f(m)(b-a) + \int_a^b f(m)\ dx + \int_a^b f'(m)(x-m)\ dx + \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-m)^2\ dx\right| \\
&= \left|\cancel{-f(m)(b-a)} + \cancel{f(m)(b-a)} + f'(m)\int_a^b (x-m)\ dx + \frac{f''(\xi)}{2}\int_a^b (x-m)^2\ dx\right|
\end{aligned}$$

Como m é constante, temos que $f'(m) = 0$, logo:

$$E_M = \left|\frac{f''(\xi)}{2} \cdot \int_a^b (x-m)^2 dx\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left[\frac{-(m+b)^3}{3} - \frac{-(m+a)^3}{3}\right]\right|$$

Substituindo novamente $m = \frac{a+b}{2}$, temos:

$$\begin{aligned}
E_M &= \left|\frac{f''(\xi)}{2} \cdot \left[\frac{(-\frac{a+b}{2}+b)^3}{3} - \frac{(-\frac{a+b}{2}+a)^3}{3}\right]\right| = \left|\frac{f''(\xi)}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{12}\right| \\
&= \left|\frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3\right|, \quad \xi \in [a,b].
\end{aligned}$$

Exercício 4

a)

b) 1. $\int_0^1 e^x dx = 1.7183$

$$I_{f_0^1} = \frac{1}{2}(e^0 + e^1) + \frac{1}{12}(e^0 - e^1)$$

$$\left|I_{f_0^1} - \int_0^1 e^x dx\right| = \frac{1}{2}(e^0+e^1) + \frac{1}{12}(e^0 - e^1) - e^1 + e^0 = 2.33 \cdot 10^{-3}$$

2. $\int_{0.9}^{1} e^x dx = 0.258679$

$$I_{f_{0.9}^1} = \frac{0.1}{2}(e^{0.9} + e^1) + \frac{0.1}{12}(e^{0.9} - e^1)$$

$$\left| I_{f_{0.9}^1} - \int_{0.9}^{1} e^x dx \right| = \frac{0.1}{2}(e^{0.9} + e^1) + \frac{0.1^2}{12}(e^{0.9} - e^1) - e^1 + e^{0.9} = 3.5919 \cdot 10^{-8}$$

Comparando com os erros apresentados no Exemplo 15.2, a versão corrigida da aproximação ficou bem melhor do que a versão simples, só perdendo para a aproximação pelo método de Simpson.