Maths

Algèbre

Vocabulaire d'ensemble structuré

Algèbre Linéaire

Algorithme du pivot de Gauss
Base duale, antéduale
Condition de liberté d'une forme linéaire à une famille
Développement du déterminant par ligne ou par colonne
Endomorphismes nilpotents
Espaces supplémentaires
Intersection d'hyperplans
Lemme de factorisation
Liberté d'une famille de l'espace dual
Notations de matrices
Somme directe de sous espaces vectoriels
Théorème de la base téléscopique
Vandermonde, interpolation de Lagrange

Algèbres

Algèbre engendrée
Algèbres
Algèbres commutatives intègres de dimension finie
Algèbres et extensions de corps
Clôture algébrique des rationnels
Condition d'intégrité d'une sous-algèbre engendrée
Morphisme d'algèbre
Nombres algébriques
Sous algèbres
inversibilité des éléments d'une sous-algèbre engendrée

Anneaux et Corps

Irréductibles d'un anneau

Anneaux et corps

Axiomes d'un anneau
Axiomes d'un corps
Axiomes d'un sous-corps
Corps des fractions
Corps gauche, anneau à division
Diviseur de zéro
Groupe des inversibles
Idéal d'un anneau
Idéaux maximaux, anneaux quotientés
Intégrité d'un anneau
Primalité de la caracèristique d'un corps

Arithmétique

Fonctions arithmétiques : Möbius et indicatrice d'Euler
Formule du nombre de diviseurs
Indicatrice d'Euler
Lemme d'Euclide
Nombres de Fermat
Petit théorème de Fermat
Propriétés diviseurs communs
Théorème de Bézout
Théorème de Gauss
Théorème de Wilson
Théorème des restes chinois
Équations diophantiennes

Ensembles

Formule du crible

Espaces Vectoriels

Axiomes d'un espace vectoriel
Formes lineaires et hyperplans
Théorème de caractérisation du rang

Groupes

Actions de groupe
Axiomes d'un groupe
Axiomes d'un sous-groupe
Démonstration du Théorème de Lagrange
Dévissage de groupes
Exercice : Les p-groupes
Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p
Formule des classes
Groupe Diédral
Groupes quotientés
Relation de cardinal pour un morphisme de groupe
Signature d'une permutation
Théorème de Burnside
Théorème de Lagrange
Éxistence et unicité des sous groupes de groupe cyclique

Matrices

Matrices sembables
Théorème de caractérisation des matrices inversibles

Polynômes

Contenus d'un polynôme à coéfficients entiers
Critère d'Eisenstein
Décomposition en éléments simples
Entiers algébriques
Fonctions symétriques des racines
Formule de Taylor-Langrange formelle
Multiplicité d'une racine
Polynômes associés
Polynômes cyclotomiques
Polynômes de Tchebycheff
Polynômes en caractèristique strictement positive
Polynômes irréductibles
Polynômes scindés
Propriétés des fractions rationelles
Propriétés des racines d'un polynôme

Relations

Majorant, borne supérieure, élément maximale

Réduction

Autre critère de diagonalisabilité
Caractèrisation des endomorphismes nilpotents
Codiagonalisabilité
Commutant d'un endomorphisme diagonalisable
Critère de Diagonalisabilité
Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal
Diagonalisabilité
Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit
Décomposition de Dunford
Décomposition en sous espaces caractèristiques
Démonstration annexe du théorème des noyaux
Endomorphisme commutateur de matrices
Endomorphisme différence de produits de matrices
Endomorphismes cycliques
Endomorphismes de produit de matrices
Endomorphismes nilpotents cycliques
Endomorphismes semi-simples
Endomorphismes simples
Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel
Matrice compagnon
Multiplicités d'une valeur propre
Polynôme caractèristique d'un endomorphisme
Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractèristique
Produit de Kronecker et diagonalisabilité
Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable
Propriétés diverses du polynôme caractèristique
Somme directe des sous-espaces propres
Sous-espaces caractèristiques et polynôme minimal
Sous-espaces cycliques
Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable
Théorème de Cayley-Hamilton
Théorème des noyaux
Trigonalisabilité
Valeurs propres, espaces propres
Vision matricielle de la cyclicité

Analyse

Recherche d'équivalent d'une suite

Complexes

Formule de Moivre
Formules d'addition trigonometrique
Formules de duplication trigonométrique
Formules de factorisation trigonométrique
Formules de linéarisation trigonométrique
Formules de parité et périodicité trigonométriques
Formules en tangente de theta sur deux
Inégalitée Triangulaire

Continuité

Fonctions K-Lipschitziennes
Théorème de Heine
Théorème des bornes atteintes

Convexité

Propriétés de convexité

Dérivation

Fonctions trigonometriques réciproques
Inégalité des acroissements finis et de Taylor-Lagrange
Propriété des extrémum locaux
Taylor-Langrange
Théorème de Rolle, théorème des acroissements finis

Développements Limités

Développements limités
Étude local et asymptotique de fonctions

EDL

EDL d'ordre 1
EDL d'ordre 2
Méthode de séparation des variables
Méthode de variation de la constante

Intégration

Comparaison série intégrale
Critère de convergence d'intégrales usuelles
Fonction gamma
Hölder
Intégrales de Wallis
Intégration de l'inverse d'un trinôme
Lemme de Riemann-Lebesgue
Taylor reste intégrale

Réels

Adhérence
Corps totalement ordonné
Densité
Inégalitée Triangulaire
Partie convexe de R
Propriété de la borne supérieure
Propriété fondamentale des réels
Voisinage

Suites Réelles

Caractèrisation séquentielle de l'adhérence
Comparaison asymptotiques usuelles
Manipulations asymptotiques
Moyennes de Cesàro
Suites adjacentes, emboitées
Suites arithmético-géometriques
Suites récurentes d'ordre 2
Suites récurrentes
Théorème de Bolzano-Weiestrass

Séries

Absolue convergence
Comparaison série intégrale
Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle
Familles sommables
Propriétés élémentaires sur les séries
Règle de Raabe-Duhamel
Séries de Bertrand
Théorème de comparaison des séries positives
Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries
Théorème de sommation par paquets
Théorème des séries alternées
Transformation d'Abel
Équivalents de référence : séries de Riemann

Taylor

Taylor reste intégrale
Taylor-Langrange

Calculs

Formule de newton
Formules de somme d'entiers consécutifs
Formules sur les coéfficients binomiaux

Exercice

Algèbre Générale

Dévissage de groupes
Exercice : Cyclicité des sous-groupes finis des inversibles d'un corps
Exercice : Dénombrement de morphismes
Exercice : Groupe d'éléments d'ordre inférieur à deux
Exercice : Les carrés de Fp
Exercice : Les p-groupes
Exercice : existence d'un élément d'ordre du ppcm de deux autres
Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p

Algèbre Linéaire

Exercice : Noyaux et images itérées
Exercice : Union de sous espaces vectoriels
Exercice : endomorphisme qui stabilise toutes les droites
Exercice : rang d'une comatrice

Polynômes

Exercice : Gauss-Lucas
Exercice : Irréductibilité dans les rationels
Exercice : Polynômes à coéfficients entiers
Exercice : Produit de polynômes de rationels unitaire entier
Exercice : rationalité d'une racine de haute multiplicité

Réduction

Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables
Exercice : le bicommutant
Exercice : polynôme caractèristique divisant une puissance du polynôme minimal
Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques
Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.
Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

Séries

Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle

Trigonométrie

Euclidienne

Formules d'addition trigonometrique
Formules de duplication trigonométrique
Formules de factorisation trigonométrique
Formules de linéarisation trigonométrique
Formules de parité et périodicité trigonométriques
Formules en tangente de theta sur deux

203 cartes.

Taylor-Langrange

Théorème de Taylor-Lagrange, et conditions d'application.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, C^n sur $[a,b]$ et D^{n+1} sur $]a,b[$

Il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Maths ‣ Analyse ‣ Intégration
Maths ‣ Analyse ‣ Taylor

Taylor reste intégrale

Théorème de Taylor reste intégrale, et conditions d'application.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, C^{n+1}

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t$$

Inégalitée Triangulaire

Inégalitée triangulaire première et deuxième forme.

Soit a, b in $\mathbb{C}$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$
$$||a| - |b|| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

Formule de Moivre

Formule de Moivre.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Maths ‣ Analyse ‣ Complexes
Maths ‣ Trigonométrie ‣ Euclidienne

Formules d'addition trigonometrique

Formules d'additions trigonométriques.

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi$$
$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$$

Formules de duplication trigonométrique

Formules de duplication trigonométriques.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Maths ▸ Analyse ▸ Complexes
Maths ▸ Trigonométrie ▸ Euclidienne

Formules de linéarisation trigonométrique

Formules de linéarisation trigonométriques.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Formules de factorisation trigonométrique

Formules de factorisation trigonométriques.

Soient $p, q \in \mathbb{R}$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Formules en tangente de theta sur deux

Formules en $\tan\frac{\theta}{2}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Maths ‣ Analyse ‣ Complexes
Maths ‣ Trigonométrie ‣ Euclidienne

Formules de parité et périodicité trigonométriques

Formules de parité et périodicité trigonométriques.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

Formules de somme d'entiers consécutifs

Forme explicites des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Formule de newton

Soit $n \in \mathbb{N}, x, a, b \in \mathbb{C}$

$$x^n - 1 = ?$$
$$a^n - b^n = ?$$

$$x^n - 1 = (x - 1)\sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$a^n - b^n = (a - b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Formules sur les coéfficients binomiaux

Soit $k, n, p \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = ? \qquad \binom{n}{n} = ?$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = ? \qquad k\binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{n}{n-k} = ? \qquad \binom{k}{p}\binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = ?$$

Soit $k, n, p \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{k}{p}\binom{n}{k} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Formule du crible

Formule du crible : soit $A_1, \dots, A_n \subseteq E$

$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = ?$$

Soit $A_1, \dots, A_n \subseteq E$

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| &= |A_1|+|A_2|+\dots+|A_n| \\ &- |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\vdots \\ &+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$$

Majorant, borne supérieure, élément maximale

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$, définitions de

- Majorant
- Maximum
- Borne supérieure
- Élément maximale

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

Majorant $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$

Maximum M est le maximum de A si M est un majorant de A et $M \in A$. S'il existe il est unique.

Borne supérieure B est la borne supérieure de A si B est le plus petit majorant de A : $\forall M \in E, (\forall x \in A, x \leq M) \Rightarrow B \leq M$. Si elle existe elle est unique.

Élément maximale M est un élément maximale de A si M n'est plus petit que personne : $\nexists x \in A, M \leq x$. Dans le cas d'un ensemble totalement ordonné, seul un maximum est élément maximale, dans le cas d'un ensemble non totalement ordonné, il peut en exister plusieurs.

EDL d'ordre 1

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $c(x)$ et $C(x)$ tel que $C'(x) = c(x)$.

$$(E_1) : \quad y' = ay + b$$
$$(E_2) : \quad y' = a(x)y$$

Les solutions S_1 et S_2 de (E_1) et (E_2) sont

$$S_1 = \left\{x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$
$$S_2 = \left\{x \mapsto \lambda e^{A(x)}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Méthode de séparation des variables

Soit $a(x) \in D^1$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y$$
$$y(x) = ?$$

Soient $a(x) \in D^1$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = a(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{x_0}^{x} a(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\ln y - \ln y_0 = A(x) - A(x_0)$$
$$y = \underbrace{y_0 e^{-A(x_0)}}_{\lambda} e^{A(x)}$$

Méthode de variation de la constante

Soient $a(x), b(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$y' = a(x)y + b(x)$$
$$f_h : \quad y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

Trouver f_p solution particulière par la variation de la constante.

Soient $a(x), b(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$y' = a(x)y + b(x)$$
$$f_h : \quad y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

On fait varier la constante : $\lambda \to \lambda(x)$:

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \lambda(x)e^{A(x)} \\ f_{p'}(x) &= a(x)f_{p(x)} + b(x) \\ &= \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} \\ &= \lambda(x)a(x)e^{A(x)} + b(x) \\ \lambda'(x) &= b(x)e^{-A(x)} \\ \lambda(x) &= \int b(x)e^{-A(x)} \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

EDL d'ordre 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, résolution de l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On appèlle équation caractèristique

$$(EC) : \quad az^2 + bz + c = 0$$

- Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les racines (réelles) de (EC)

$$f_{h(x)} = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, soit r la racine double de (EC)

$$f_{h(x)} = (\lambda + \mu x)e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, soit $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les racines complexes de (EC)

$$f_{h(x)} = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

Axiomes d'un groupe

Soit G un ensemble muni d'une opération interne $*$, quels axiomes pour que $(G, *)$ ait une structure de groupe ?

Soit G un ensemble et $*$ une opération interne, $(G, *)$ forme un groupe si

i) Associativité :

$$\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$$

ii) Existence d'un neutre :

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$$

iii) Existence d'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e$$

Vocabulaire d'ensemble structuré

Définitions du vocabulaire suivant

- Magma
- Semi-groupe
- Monoïde
- Groupe

Ensemble	Loi interne	Associative	Neutre	Inverse	Nom
×	×				Magma
×	×	×			Semi-groupe
×	×	×	×		Monoïde
×	×	×	×	×	Groupe

Axiomes d'un sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, quels axiome pour que $H \subseteq G$ soit un sous-groupe ?

Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subseteq G$, H est un sous-groupe de G si

i) Présence du neutre :

$$e \in H$$

ii) Stable par $*$:

$$\forall x, y \in H, x * y \in H$$

iii) Stable par inverse :

$$\forall x \in H, x^{-1} \in H$$

Théorème de Lagrange

Énoncer le théorème de Lagrange sur les groupes.

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Démonstration du Théorème de Lagrange

Démonstration du théorème de Lagrange

Soit $(G, \cdot)$ un groupe fini et H un sous-groupe.

- Relation quotienté par H : $x \mathcal{R} y$ si $yx^{-1} \in H$ (relation d'équivalence). On note G/H l'ensemble des classes d'équivalences.
- Soit $x \in G$, $\bar{x}$ sa classe d'équivalence pour $\mathcal{R}$. $\bar{x} = Hx = \{hx, h \in H\}$.

  Par double inclusion :
  - $Hx \subseteq \bar{x}$: Soit $y \in Hx$, $y = hx$ avec $h \in H$, donc $yx^{-1} = h \in H$ d'où $y \mathcal{R} x$ et $y \in \bar{x}$.
  - $\bar{x} \subseteq Hx$: Soit $y \in \bar{x}$, $yx^{-1} = h \in H$, donc $y = hx \in Hx$.
- Donc $\forall x \in G, \bar{x} = Hx \simeq H$ d'où $|\bar{x}| = |H|$.
- Enfin par le lemme du berger : $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$ et donc $|H| \mid |G|$.

Relation de cardinal pour un morphisme de groupe

Soient $(G_1, +), (G_2, \cdot)$ des groupes et $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme, avec G_1 fini. Que peut on dire de $|G_1|$?

Soient $(G_1, +), (G_2, \cdot)$ des groupes et $\varphi : G_1 \to G_2$ un morphisme, avec G_1 fini.

$$|G_1| = |\ker \varphi| \cdot |\operatorname{im} \varphi|$$

Axiomes d'un anneau

Soit A muni de deux opérations internes $+$ et $\cdot$, quels axiomes pour que $(A, +, \cdot)$ soit un anneau ?

$(A, +, \cdot)$ est un anneau si :

i) $(A, +)$ est un groupe abélien
   a) Associativité de $+$
   b) Existence d'un neutre additif (0_A)
   c) Existence d'opposés ($-x$)
   d) Commutativité de $+$

ii) Associativité de $\cdot$

iii) Existence d'un neutre multiplicatif (1_A)

iv) Distributivité de $\cdot$ sur $+$

$$x(y+z) = xy + xz$$

$$(x+y)z = xz + yz$$

Diviseur de zéro

Définition de diviseur de 0 dans un anneau.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, $x \in A$ est dit diviseur de 0 (à gauche) si $x \neq 0$ et $\exists y \neq 0, \quad xy = 0$

Intégrité d'un anneau

Définition d'un anneau intègre.

Un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit intègre si

- A est commutatif
- A n'admet aucun diviseur de 0

Groupe des inversibles

Définition de groupe des inversibles d'un anneau.

Le groupe des inversibles d'un anneau $(A, +, \cdot)$, est le groupe $(A^\times, \cdot)$.

Idéal d'un anneau

Définition d'un idéal d'un anneau, propriétés élémentaires.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et $I \subseteq A$, I est un idéal de A si

- I est un sous-groupe additif de A
- I est stable par produit externe : $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$

Propriétés :

- Si $1 \in I$ idéal de A, alors $I = A$.
- Plus généralement s'il existe $x \in I$ inversible, $I = A$.
- Une intersection quelconque d'idéaux est un idéal.
- Une somme finie d'idéaux est un idéal.
- Si $\varphi : A_1 \to A_2$ un morphisme d'anneau avec A_1 commutatif, $\ker \varphi$ est un idéal de A_1.
- Pour tout $b \in A$, bA est un idéal de A.
- Un idéal engendré par un ensemble est le plus petit idéal le contenant, dans le cas d'un singleton $\{a\} \subset A$, il s'agit de aA.

Axiomes d'un corps

Soit K muni de deux opérations internes $+$ et $\cdot$, quels axiomes pour que $(K, +, \cdot)$ soit un corps ?

$(K, +, \cdot)$ est un corps si :

i) $(K, +)$ est un groupe abélien
   a) Associativité de $+$
   b) Existence d'un neutre additif (0)
   c) Existence d'opposés $(-x)$
   d) Commutativité de $+$

ii) Associativité de $\cdot$

iii) Commutativité de $\cdot$

iv) Existence d'un neutre multiplicatif (1)

v) Distributivité de $\cdot$ sur $+$

vi) Existence d'inverses (sauf pour 0)

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in K$$
$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

Corps gauche, anneau à division

Qu'est-ce qu'un “corps gauche” ou “anneau à division” ?

Un corps gauche ou anneau a division et un anneau non commutatif dont tous les éléments sont inversible sauf 0. C'est un corps dont le produit n'est pas commutatif.

Axiomes d'un sous-corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps, axiomes pour que $L \subseteq K$ soit un sous-corps ?

$(K, +, \times)$ un corps, $L \subseteq K$ est un sous-corps si :

i) $0 \in L$
ii) $1 \in L$
iii) Stable par $+$
iv) Stable par $-$ ou stable par opposé
v) Stable par $\times$
vi) Stable par $\nabla \cdot$ ou stable par inverse

Primalité de la caracèristique d'un corps

Si $(K, +, \cdot)$ est un corps de caractèristique non nulle, que peut-on dire sur celle ci ?

$(K, +, \cdot)$ un corps, notons p sa caractèristique, si $p \neq 0$ alors p est premier

Démonstration:

Notons $p = ab$ avec $a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{a} 1\right)\left(\sum_{k=1}^{b} 1\right) &= \sum_{k=1}^{a} \sum_{k=1}^{b} 1 \\ &= \sum_{k=1}^{ab=p} 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or un corps n'admet pas de diviseurs de 0, donc $\sum_{k=1}^{a} 1 = 0$ ou $\sum_{k=1}^{b} 1 = 0$, d'où

$$\text{ou} \begin{array}{l} a = p, b = 1 \\ p = b, a = 1 \end{array}$$

Donc p est premier.

Corps des fractions

Définition du corps des fractions d'un anneau intègre.

$(A, +', \cdot)$ un anneau intègre.

- Soit $(a, b), (c, d) \in A \times A \setminus \{0\}$, on définit la relation d'équivalence suivante :

$$(a, b) \mathcal{R} (d, c) \text{ si } ad = bc$$

- On note $\frac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a, b).
- On définit les opérations $+, \times$ sur les fractions

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad +' cb}{bd}$$
$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Le corps des fractions de A est le corps

$$(A \times A \setminus \{0\}, +, \times)$$

Théorème de Gauss

Théorème de Gauss.

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$, si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$

Équations diophantiennes

Résolutions d'une équation de la forme $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(E): \quad ax + by = c$$

- Solution homogène : On cherche un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ (Bézout) tel que

$$au + bv = c$$

- Solution particulière : il en existe si

$$a \wedge b \mid c$$

- Les solutions sont

$$S = \begin{cases} x = x_p - kb' \\ y = y_p + ka' \end{cases}$$

avec (x_p, y_p) solution particulière

$$\text{et } a' = \frac{a}{a \wedge b}, \quad b' = \frac{b}{a \wedge b}$$

Nombres de Fermat

Que sont les nombres de Fermat, et quelques propriétés.

Le n-ème nombre de Fermat est

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Ils sont impaires et premier entre eux :

Soit $n < m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left(2^{2^n} - 1\right) \cdot F_n &&\cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1} \\
&\left(2^{2^n} - 1\right) \cdot \left(2^{2^n} + 1\right) &&\cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1} \\
&\left(2^{2^{n+1}} - 1\right) &&\cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1} \\
&\vdots \\
&2^{2^m} - 1 = F_m - 2
\end{aligned}$$

Donc $F_n \mid F_m - 2$, d'où $F_m \wedge F_n \mid F_m - 2$, donc $F_m \wedge F_n \mid 2$, mais ils sont impaire donc premier entre eux.

Lemme d'Euclide

Théorème du lemme d'Euclide.

Soit $p \in \mathbb{P}, a, b \in \mathbb{Z}$,

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

Plus algébriquement :

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ est un anneaux intègre :}$$
$$ab \equiv 0\ [p] \Rightarrow a \equiv 0\ [p] \text{ ou } b \equiv 0\ [p]$$

Formule du nombre de diviseurs

Formule du nombre de diviseurs d’un entier.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\text{nombre de diviseurs} = \prod_{i=1}^{k} (\alpha_k + 1)$$

Théorème des restes chinois

Théorème des restes chinois.

Soit $n, m \in \mathbb{N}^\star$ premiers entre eux

- Formulation arithmétique :

$$\forall a \in [\![0, m-1]\!], \forall b \in [\![0, n-1]\!],$$
$$\exists! x \in [\![0, nm-1]\!],$$
$$x \equiv a\ [m] \text{ et } x \equiv b\ [n]$$

- Formulation algébrique :

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} x\ [m] \\ x\ [n] \end{pmatrix} \end{array}$$

  est un isomorphisme d'anneaux.
- Structure de preuve : injectivité par $\ker \varphi$ + argument de cardinal.

Petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat.

- Première formulation :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z},$$
$$a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

- Deuxième formulation (moins forte) :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z},$$
$$a^p \equiv a\ [p]$$

- Démo : On étudie $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$:

$$\forall a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$
$$\mathrm{ord}(a) \mid p - 1 \text{ (Lagrange)}$$
$$\text{donc } a^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

Indicatrice d’Euler

Définition de l’indicatrice d’Euler, et propriétés.

La fonction indicatrice d’Euler est

$$\varphi \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^\star & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \left|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right| \end{array}$$

Quelques propriétés :

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

$$m \wedge n = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

$$\varphi\left(n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}\right) = \prod_{i=1}^{k} \left(p_i^{\alpha} - p_i^{\alpha-1}\right)$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\sum_{d \in \mathrm{Div}(n)} \varphi(d) = n$$

Pour se convaincre de la dernière :

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}$$

Sous formes irréductibles ($p_i \wedge q_i = 1$)

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}$$

Il y a n fractions, les $q_i \in \mathrm{Div}(n)$, et pour chaque q_i, on a tous les $p_i \leq q_i$, qui sont premiers avec eux :

$$\underbrace{\sum_{d \in \mathrm{Div}(n)}}_{\text{somme sur tous les dénominateur}} \underbrace{\varphi(d)}_{\text{nombre de fractions pour le dénominateur } d} = \underbrace{n}_{\text{nombre de fractions}}$$

Enfin, une généralisation du petit théorème de Fermat :

$$a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ [n]$$

Théorème de Bézout

Énoncé et preuve du théorème de Bézout.

- Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et $d = a \wedge b$ alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = d$.
- Preuve : Soit $I = \{au + bv, (u, v) \in \mathbb{Z}\}$

  I est un idéal de $\mathbb{Z}$, donc $\exists d \in \mathbb{Z}, I = d\mathbb{Z}$ (principalité de $\mathbb{Z}$). Donc $d \mid a$ et $d \mid b$.

  Soit ∂ tel que $\partial \mid a$ et $\partial \mid b$. $\forall x \in I, \partial \mid x$, en particulier $\partial \mid d$ d'où $\partial \leq d$.

  $a \wedge b = d \in I$ d'où $\exists u, v \in \mathbb{Z}, d = au + bv$

Propriétés diviseurs communs

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$

$$x \mid a \text{ et } x \mid b \text{ ssi } \; ?$$
$$a \mid y \text{ et } b \mid y \text{ ssi } \; ?$$
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \; ?$$
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \; ?$$

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$

$$x \mid a \text{ et } x \mid b \text{ ssi } \; x \mid (a \wedge b)$$
$$a \mid y \text{ et } b \mid y \text{ ssi } \; m \mid (a \vee b)$$
$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$$
$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$$

Corps totalement ordonné

Définition d'un corps totalement ordonné.

Soit $(K, +, \cdot)$ un corps et un ordre $\leq$.

1. $\forall x, y, z \in K, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
2. $\forall x, y \in K, x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont ordonnés, $\mathbb{C}$ ne l'est pas. Mais il existe un seul corps totalement ordonné (à isomorphisme près) : $\mathbb{R}$.

Propriété fondamentale des réels

Propriété fondamentale des réels.

Toute partie non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne sup. De même pour minoré.

On en déduit (car $\mathbb{R}$ est totalement ordonné) que

- $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
- Loi du signe de produit
- $x^2 \geq 0$
- $1 > 0$
- $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
- $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

Propriété de la borne supérieure

Propriété de la borne supérieure.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide majoré, $S = \sup A$ ssi

1. $\forall x \in A, x \leq S$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, s - \varepsilon < y$

Partie convexe de R

Définition de partie convexe.

Une partie convexe de $\mathbb{R}$ est un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \leq y \in C, [x, y] \subseteq C$$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

Densité

Définition de densité.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, D est dense dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall a < b \in \mathbb{R},]a, b[\cap D \neq \varnothing$$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, preuve : saut de grenouille.

Voisinage

Définition de voisinage.

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ est un voisinage de x si

$$\exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq V$$

On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Adhérence

Définition et propriétés de l'adhérence d'un ensemble.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \varnothing$$

L'adhérence de A est alors

$$\begin{aligned} \mathrm{adh}(A) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ adhérent à } A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

Propriétés :

- $A \subseteq \mathrm{adh}(A)$
- Si A non vide borné : $\{\inf A, \sup A\} \subseteq A$
- $\mathrm{adh}(]a, b[) = [a, b]$
- D est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\mathrm{adh}(D) = \mathbb{R}$
- $\mathrm{adh}(\mathrm{adh}(A)) = \mathrm{adh}(A)$

Suites arithmético-géometriques

Formule explicite d'une suite arithmético-géometrique.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On note $f(x) = ax + b$, on trouve le point fixe $w = \frac{b}{1-a}$. Soit $v_n = u_n - w$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= au_n + b - \underbrace{(aw + b)}_{-w} \\ &= a(u_n - w) = av_n \\ v_n &= a^n v_0 \\ u_n &= a^n(v_0 - w) + w \end{aligned}$$

Suites récurentes d'ordre 2

Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, (u_n) une suite tel que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On résout l'équation caractèristique

$$x^2 = ax + b$$

- Deux racines r_1, r_2

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Racine double r

$$u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$

Avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ déterminés par u_0 et u_1.

Caractèrisation séquentielle de l'adhérence

Caractèrisation séquentielle de l'adhérence et la borne supérieure.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Si (u_n) une suite à valeure dans A et $u_n \to l$, alors $l \in \mathrm{adh}_{\mathbb{R}}(A)$.
- Si $x \in \mathrm{adh}_{\mathbb{R}}$, alors il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to x$.

Ainsi

$$\mathrm{adh}(A) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \to x\right\}$$

Et $S = \sup A$ existe si A non vide majoré par S et il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to S$.

Suites adjacentes, emboitées

Définition et théorème des suites adjacentes et emboitées.

- Adjacentes :

  Deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

  $$(a_n) \nearrow, \quad (b_n) \searrow$$
  $$\text{et } \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$$

  Théorème : (a_n) et (b_n) et $\lim a_n = \lim b_n$.

  Preuve : Théorème de la limite croissante pour la convergence.
- Emboitées :

  La même chose avec des segments.

  Théorème :

  $$\bigcap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{x\}$$
  $$\text{avec } x = \lim a_n = \lim b_n$$

Théorème de Bolzano-Weiestrass

Théorème de Bolzano-Weiestrass et démonstration.

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente. Dans $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}$), il suffit d'être borné en norme ou module.

Preuve :

Soit (u_n) une suite bornée par a_0 et b_0, notons $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par récurrence :

- Ini : $|[a_0, b_0] \cap A| = \infty$
- Héré : On suppose $|[a_n, b_n] \cap A| = \infty$, et on coupe en $m = \frac{a_n+b_n}{2}$:
  - Si $|[a_n, m] \cap A| = \infty$, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = m \end{cases}$
  - Si $|[m, b_n] \cap A| = \infty$, $\begin{cases} a_{n+1} = m \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

Par le théorème des suites emboitées :

$$\exists l \in [a_0, b_0], \ \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\}$$

Soit φ une extractrice, par récurrence :

- Ini : $\varphi(0) = 0$
- Héré : $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est infini, donc il existe $m > \varphi(n)$ tel que $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. On prend $\varphi(n+1) = m$.

Donc $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ d'où $\lim u_{\varphi(n)} = l$.

Moyennes de Cesàro

Définition, propriétés des moyennes de Cesàro.

Soit (u_n) une suite. La suite des moyennes de Cesàro de u_n est

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Si $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\sigma_n \to l$.

Preuve :

- l fini : Découpage pour $n < N$ et $n \geq N$ et inégalité triangulaire.
- l infini : majoration.

Manipulations asymptotiques

Manipulations asymptotiques élémentaires.

- $\sim$: relation d'équivalence
  - produit, quotient, exposant
  - **pas** de somme, de composition, …
- $o(1) \Leftrightarrow$ tend vers 0, $O(1) \Leftrightarrow$ borné
- O et o transitifs
- O et o mangent les constantes
- $u_n \sim v_n$ ssi $u_n = v_n + o(v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ (ou O, o), alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$ (ou O, o)
- o et $\sim$ sont des cas particuliers de O.

Comparaison asymptotiques usuelles

Comparaison asymptotiques usuelles, stirling

Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star$, $q > 1$, au voisinage de l'infini :

$$\begin{aligned} n^k &= o(q^n) \\ q^n &= o(n!) \\ n! &\sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n} \\ \ln(n!) &\sim n \ln n \\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} &= \ln n + \gamma + o(1) \end{aligned}$$

Fonctions K-Lipschitziennes

Qu'est qu'une fonction K-lipschitzienne

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Lipschitz sur un segment implique uniformement continue.

Théorème des bornes atteintes

Théorème des bornes atteintes et démonstration.

Si f est $C^0([a,b])$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve :

Notons $M = \sup f$, quitte à avoir $M \in \overline{\mathbb{R}}$. $M \in \mathrm{adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(f([a,b]))$, donc il existe une suite (x_n) à valeur dans $[a,b]$ tel que $f(x_n) \to M$.

Par Bolzano-Weiestrass, il existe φ tel que $x_{\varphi(n)} \to l$ avec $l \in [a,b]$ et donc nécéssairement $M \in \mathbb{R}$.

Théorème de Heine

Énoncé et démonstration du théorème de Heine.

Toute fonction continue sur un segment est uniformement continue.

Preuve :

Soit $f \in C^0([a,b])$. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformement continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a,b]$$
$$|x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

On prend $(x_n), (y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$
$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Ces suites sont bornées donc par Bolzano-Weiestrass, il existe une extractrice φ tel que $x_{\varphi(n)} \to l \in [a,b]$.

Or $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \to 0$ donc $y_{\varphi(n)} \to l$.

Mais par continuité de f,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) &= \lim_{n\to\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right) \\ &= f(l)\end{aligned}$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)| < \varepsilon$$

Qui est absurde.

Fonctions trigonometriques réciproques

Domaine de définition et dérivées des fonctions trigonometrique réciproques.

$$\begin{array}{rcccc} \arccos & : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ \arccos' & : &]-1,1[& \to & [-1,-\infty[\\ & & x & \mapsto & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \arcsin & : & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin' & : &]-1,1[& \to & [1,+\infty[\\ & & x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \arctan & : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ \arctan' & : & \mathbb{R} & \to &]0,1] \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Propriété des extrémum locaux

Que peut on dire si $f : I \to \mathbb{R}$ et dérivable et admet un extrémum local en $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable qui admet un extrémum local en a, un point intérieur à I, alors $f'(a) = 0$.

Preuve : par hypothèse, pour un maximum (un minimum se traite de même)

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

Étudions

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si $x < a$:

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{<0}} \geq 0$$

Si $x > a$:

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{>0}} \leq 0$$

Donc $f'(a) = 0$ (les deux limites sont égales par la dérivabilité de f en a).

Théorème de Rolle, théorème des acroissements finis

Énoncé et preuve des théorèmes de Rolle et des acroissements finis.

Soit $f \in C^0([a,b])$ dérivable sur $]a,b[$

Rolle Si $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = 0$$

TAF

$$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve :

- Rolle : théorème des bornes atteintes, propriétés des extrémum locaux avec une disjonction de cas si les extrémums sont aux bornes.
- TAF : Rolle en pente, on corrige par la pente pour se ramener à Rolle.

Inégalité des acroissements finis et de Taylor-Lagrange

Inégalité des acroissements finis et de Taylor-Lagrange.

Inégalité des acroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$, pour tout $x \in I$

$$|f(x) - f(a)| \leq \sup_{[a,x]} |f'| \cdot |x - a|$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qui est D^{n+1} et $a \in I$, pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right| \leq \sup_{[a,x]} \left| f^{(n+1)} \right| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

On prend les théorème et on majore le paramètre.

Intégration de l'inverse d'un trinôme

Méthode d'intégration pour l'inverse d'un trinôme du second degré.

On prend $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, on vas intégrer $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.

- $\Delta > 0$: décomposition en éléments simples
- $\Delta = 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{\mathrm{d}x}{a(x-r)^2}$$
$$= -\frac{1}{a(x-r)}$$

- $\Delta < 0$: on passe à la forme cannonique

$$ax^2 + bx + c$$
$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]$$

  Et on se ramène à $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u$.

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)$$

Développements limités

$$\frac{1}{1-x} = ? \qquad \mathrm{ch}(x) = ?$$

$$\frac{1}{1+x} = ? \qquad \mathrm{sh}(x) = ?$$

$$\ln(1+x) = ? \qquad (1+x)^{\alpha} = ?$$

$$e^{x} = ? \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$

$$e^{-x} = ? \qquad \arcsin(x) = ?$$

$$\cos(x) = ? \qquad \arccos(x) = ?$$

$$\sin(x) = ? \qquad \arctan(x) = ?$$

$$\tan(x) = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + o(x^n)$$

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \prod_{p=0}^{k-1} (\alpha - p) + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2k})$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + o(x^5) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)} + o(x^{2n+1})$$

$$\arccos(x) = -x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + o(x^5) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

Étude local et asymptotique de fonctions

Méthode pour étudié le comportement local et asymptotique d'une fonction.

Local au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

- Équivalent en a : premier terme
- Tangente en a : $DL_1(a)$
- Signe de f en a : premier terme non nul.
- Position relative par rapport à la tangente : signe du premier terme non nul après l'ordre 1.

Asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

- Asymptote oblique : $DL_1(\pm\infty)$
- Position relative : signe du terme suivant.

Rappelle :

f admet une asymptote oblique d'équation $ax + b$ si

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

Suites récurrentes

Méthode pour les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit f une fonction et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Intervalle stable : on cherche I tel que $f(I) \subseteq I$.
2. Variations de (u_n)
   - Signe de $f(x) - x$ sur I
     - $+$: (u_n) est croissante
     - $-$: (u_n) est décroissante
     - Sinon affiner I
   - Monotonie de f
     - Si f est croissante sur I, (u_n) est monotone
     - Si f est décroissante sur I, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotone.
3. On montre l'éxistence de la limite (limite croissante)
4. On la détermine : il s'agit de l'un des points fixes de I (idéalement il n'y en a qu'un).

   Dans le cas des fonctions décroissantes, on cherche les limites des deux sous-suites, points fixes de $f \circ f$.

Propriétés de convexité

Définition et propriétés de convexité.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y)$$
$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Propriétés :

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $\forall x_1, \ldots, x_n \in I$

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1], \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \Rightarrow$$
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

- Soit Φ convexe, $\forall f \in C^0([a,b])$

$$\Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$
$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, on note

$$\begin{array}{rccc} \tau_a & : I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

  les taux d'acroissements en a de f.

  f est convexe ssi $\forall a \in I, \tau_a$ est croissante.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on appelle droite d'appuis en x_0 de f une droite $y = ax + b$ tel que
  - $\forall x \in I, ax + b \leq f(x)$
  - $f(x_0) = ax_0 + b$

  Si f convexe, f admet des droites d'appuis en tout points.

Théorème de caractérisation des matrices inversibles

Énoncé du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est inversible.
- $A \overset{L}{\sim} I_n$.
- $\text{rg } A = n$.
- Le système homogène $AX = 0$ admet une seule solution.
- $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ le système homogène $AX = Y$ admet au plus une solution.
- $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ le système homogène $AX = Y$ admet au moins une solution.

Polynômes associés

Définition et propriétés des polynômes associés.

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, P et Q sont dit associé si $P \mid Q$ et $Q \mid P$.

P, Q sont associés ssi $\exists \lambda \in \mathbb{K}^\star, A = \lambda B$. Toute class de polynômes associés contient un unique polynôme unitaire (à l'exception de $\{0\}$).

Propriétés des racines d'un polynôme

Propriétés des racines d'un polynôme.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n = \deg P$

En général

1. Si $P \neq 0$, P à au plus n racines (comptées avec multiplicités).
2. L'unique polynôme qui à une infinité de racines est $P = 0$.
3. Si $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\exists a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que $\forall k \in [\![1, n+1]\!], P(a_k) = Q(a_k)$, alors $P = Q$.

En caractèristique nulle

4. $a \in \mathbb{K}$ est racine de P avec multiplicité m ssi

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$$
$$\text{et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

1. Si $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$ sont des racines distinctes de P, et $m_1, \ldots, m_N \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités.

   Pour tout $k \in [\![1, N]\!], (X - a_k)^{m_k} \mid P$

   Or pour $i < j \in [\![1, n]\!]$

   $$(X - a_i) - (X - a_j) = a_j - a_i$$

   Relation de Bézout ($a_j - a_i$ associé à 1) donc premiers entre eux deux à deux.

   D'où $\prod_{k \in 1}^{N} (X - a_k)^{m_k} \mid P$ et $n \geq \sum_{k=1}^{N} m_k$.

2. Par la propriétés précedente, si P à une infinité de racine distincte il ne peut être de degré positif (ou il serait infini) donc il est nul.

4. Par Taylor-Langrange formel, pour tout $j \in [\![1, m-1]\!]$

$$P = \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}}_{R_j(X)\ (\deg < j)}$$
$$+ \underbrace{\sum_{k=j}^{n} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}}_{(X-a)^j Q(X)}$$

   D'où R_j le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^j$. Or a est une racine de multiplicité m ssi

$$\begin{cases} R_m = 0 \\ R_{m+1} \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![0, m-1]\!], \frac{P^{(k)}(a)}{k!} = 0 \\ \exists k \in [\![0, m]\!], \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in [\![0, m-1]\!], (P^{(k)}(a)) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Multiplicité d'une racine

Définition de multiplicité d'une racine.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ une racine et $n \in \mathbb{N}^\star$. On dit que a est de multiplicité n si (l'un ou l'autre) :

- $(X - a)^n \mid P$ mais $(X - a)^{n+1} \nmid P$.
- $\forall k \in [\![0, n-1]\!], P^{(k)}(a) = 0$

Polynômes scindés

Définition et propriétés des polynôme scindés.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a_1, \ldots, a_k$ ses racines et $m_1, \ldots, m_k$ leur multiplicités.

- P est scindé si $\deg P = \sum_{i=1}^{k} m_k$.
- P est scindé racines simples si P scindé et $\forall i \in [\![1, k]\!], m_i = 1$.

Propriétés :

- Si P est scindé racines simples sur $\mathbb{R}$, P' aussi.
- Si P est scindé sur $\mathbb{R}$, P' aussi.
- Tout polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$: théorème de Gauss-d'Alembert.

Polynômes irréductibles

Définition et propriétés des polynômes irréductibles.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, P est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont P, 1 et leurs associés.

1. Dans $\mathbb{C}$, les polynômes irréductibles sont les monômes (théorème de Gauss-d'Alembert).
2. Dans $\mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont les monômes et les polŷnomes de degré 2 avec $\Delta < 0$.
3. En général, un polynôme de degré 1 est toujours irréductible.
4. Dans $\mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible ssi il n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$.
5. Dans $\mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré ≥ 2 ne peut être irréductible s'il admet une racine dans $\mathbb{K}$.
6. ($\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X]$ irréductible ($\mathbb{L}$ extension de corps de $\mathbb{K}$) n'admet que des racines simples dans $\mathbb{L}$ (et à fortiori dans $\mathbb{K}$).

Démonstration

2. Par les propriétés 3 et 4, on sait que ces polynômes sont irréductibles, montrons que ce sont les seuls.

   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible de degré ≥ 2.

   $P \in \mathbb{C}[X]$ donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ racine de P.

   $$P\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{P}\left(\overline{\lambda}\right) = \overline{P(\lambda)} = 0$$

   D'où (car $(X - \lambda) \wedge \left(X - \overline{\lambda}\right) = 1$)

   $$Q = \underbrace{X^2 - 2\,\mathrm{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2}_{\in \mathbb{R}[X]} \mid P$$

   Comme P est irréductible, P et Q sont associés et $\deg P = 2$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X] \setminus \mathbb{K}_1[X]$
   - S'il est irréductible il n'admet pas de racine.
   - S'il n'est pas irréductible,

     $$P = QR$$

     - Soit $\deg Q = 1$, $Q = X - \alpha$ et α racine de P.
     - Soit $\deg R = 1$, $R = X - \beta$ et β racine de P.

6. $0 \leq \deg P' \leq \deg P - 1$ et par irréductibilité de P dans $\mathbb{K}[X]$

   $$P \wedge P' = 1$$

   Or le PGCD se conserve sur les extensions de corps, ils n'ont donc pas de racine communes (dans $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$).

Fonctions symétriques des racines

Définition des fonctions symétriques des racines et formules de Viete.

Soit $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, la k-ème fonction symétrique des élémentaire de $a_1, \ldots, a_n$ est

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^{k} a_{i_j}$$

On remarque que $\sigma_0 = 1$.

Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ scindé, on note $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses racines (non distinctes).

Formule de Viete :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Polynômes de Tchebycheff

Définition et propriétés des polynômes de Tchebycheff.

Le n-ème polynôme de Tchebycheff est le polynôme tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$

Propriétés :

1. Formule de récurrence :
$$T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$$
2. $\deg T_n = n$, coéfficient dominant : 2^{n-1}, sauf pour $n = 0$, $T_0 = 1$.
3. T_n est scindé racines simples sur $\mathbb{R}$:
$$T_n(X) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - \cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$
4. Orthogonalité : si $n \neq p$
$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_p(x)\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$
5. Minimalité en norme :
$$\|P\| = \max_{t\in[-1,1]}|P(t)|$$
Si P unitaire de degré n, alors $\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Avec cas d'égalité si $P(X) = \frac{T_n(X)}{2^{n-1}}$

Preuves :

1. Formules de trigonométrie :
$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos\theta\cos(n\theta)$$
$$T_{n+1}(\cos\theta) + T_{n-1}(\cos\theta) = 2(\cos\theta)T_n(\cos\theta)$$
Donc ils coincident en une infinité de valeurs $[-1, 1]$, et sont donc égaux.
2. Par récurrence avec la relation de récurrence.
3. On résout $\cos(n\theta) = 0$, on fait attention à distingué les racines.
4. Changement de variable $x = \cos\theta$, puis formules de trigonométrie.
5. Par contraposé : On prend P unitare de degré n tel que $\|P\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
   - $P = \frac{1}{2^{n-1}}T_n + Q, \quad \deg Q \leq n-1$.
   - On regarde les y_k quand $T_n(y_k) = \pm 1$.
   - On en déduis le signe de Q
   - Par le TVI Q à n racines donc $Q = 0$.
   - Donc $P(X) = \frac{T_n(X)}{2^{n-1}}$.

Propriétés des fractions rationelles

Propriétés des fractions rationelles

- Si on dit que $\frac{P}{Q}$ est scindé, c'est que Q est scindé.
- Si F admet une infinité de racines alors $F = 0$.
- Si F et G coincident en une infinité de points alors $F = G$.

Décomposition en éléments simples

Formules, propriétés de la décomposition en éléments simples.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, F se décompose de façon uniqe sous la forme

$$F = E + G \text{ avec } E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg G < 0$$

On appelle E la partie entière de F et G la partie pôlaire.

- Si $F = \frac{P}{Q}$ sindé racines simples : soit $a_1, \ldots, a_n$ les pôles et $Q(X) = (X - a_k)R_k(X)$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

  $$F = E + \frac{\lambda_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - a_n}$$

  Avec

  $$\lambda_k = \frac{P(a)}{R_k(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

- Si F est scindé pôles multiples, on fait la même chose en retranchant les décompositions à chaques fois.

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$:

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{m_1} \ldots \cdots (X - a_k)^{m_k}$$
$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{m_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{m_k}{X - a_k}$$

Axiomes d'un espace vectoriel

Axiomes d'un espace vectoriel.

Sois $\mathbb{K}$ un corps, E muni de la somme interne $+$ et du produit externe $\cdot$ est un $\mathbb{K}$-ev si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien.
2. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$.
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Théorème de caractérisation du rang

Énoncé du théorème de caractérisation du rang.

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes

- A équivalente par ligne à une matrice échelonné avec r lignes non nulles.
- $\operatorname{rg} \varphi_A = r$
- $\operatorname{rg}\left(C_1, \dots, C_p\right) = r$ (avec C_i la i-ème colonne de A)
- $\operatorname{rg}\left(L_1, \dots, L_n\right) = r$ (avec L_i la i-ème ligne de A)
- $A \overset{L,C}{\sim} J_r$

On dit alors que $\operatorname{rg} A = r$.

On a aussi

$$A \overset{L,C}{\sim} B \text{ ssi } \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(\varphi \circ \psi) &= \operatorname{rg} \psi - \dim(\ker \varphi \cap \operatorname{im} \varphi) \\ &\leq \min(\operatorname{rg} \varphi, \operatorname{rg} \psi) \end{aligned}$$

Formes lineaires et hyperplans

Formes lineaires et hyperplans.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev

Un hyperplan de E est un sev de codimension 1, c'est à dire qui admet un supplémentaire de dimension 1.

- Si $a \in E^\star \setminus \{0\}$, alors $\ker a$ est un hyperplan.
- Si H est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire a unique à constante multiplicative prés tel que $H = \ker a$.

Deux hyperplans on toujours un supplémentaire commun.

Démonstration

- Si H_1 et H_2 sont des hyperplans, $H_1 \cup H_2 \neq E$
  - Par l'absurde : supposons $H_1 \cup H_2 = E$ sev de E

    Or $H_1 \cup H_2 = (H_1$ ou $H_2) = E$ (cf unions de sev) qui est absurde.

  Donc on dispose de $x_0 \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$

  Ainsi $\mathrm{Vect}(x_0)$ est un supplémentaire de H_1 et H_2

Matrices sembables

Définition de matrices sembables.

Soit $A, B \in M_{n(\mathbb{K})}$, A est dite sembable à B si

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ B = P^{-1}AP$$

Invariants :

- $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B$
- $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$
- $\det A = \det B$
- $\chi_A = \chi_B$
- $\mu_A = \mu_B$

Propriétés élémentaires sur les séries

Propriétés élémentaires sur les séries.

- Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, on dit que $\sum u_n$ converge si (S_n) converge.
- Si $\sum u_n$ converge alors
$$(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
- La suite (u_n) converge ssi la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des séries convergentes est un sev de l'espace des suites, et l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{S} & \to & \mathbb{K} \\ & (u_n) & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$$
est linéaire.
- Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ alors $\sum u_n$ converge ssi (S_n) est majoré (théorème de la limite monotone).

Théorème de comparaison des séries positives

Énoncé et démonstration du théorème de comparaison des séries positives.

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ alors

1. Si $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{n \to +\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge.

Démonstration :

1. (S_n) est majoré par $(\tilde{S}_n)$ qui est fini.
2. (S_n) est majoré par $M \cdot \tilde{S}_n$ qui est fini.
3. $u_n \sim v_n$ implique $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Comparaison série intégrale

Propriétés et methode de comparaison série intégrale.

Pour $f \in C^0_{\text{pm}}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$, décroissante, $\forall n \geq \lceil a \rceil + 1 = N_0$

$$\begin{aligned} f(n) &\geq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_0}^{N} f(n) &\geq \int_{N_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_{N_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ainsi $\sum f(n)$ converge ssi $\int_{N_0}^{+\infty} f$ converge.

Et de plus (à redémontrer) :

$$\sum\left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)\right)$$
$$\sum\left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

sont à terme général positif et convergent car

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f \leq f(n+1)$$
$$0 \leq \int_{n-1}^{n} f - f(n) \leq f(n+1) - f(n)$$

Et $\sum f(n+1) - f(n)$ est positive et converge (série téléscopique) car f converge (positive et décroissante).

Dans le cas f non monotone :

Si $f \in C^1$ et $\int_n^{+\infty} |f'|$ converge

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f &= \underbrace{[(t-k-1)f(t)]_k^{k+1}}_{f(k)} \\ &\quad - \int_k^{k+1} (t-k-1) f'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^{N+1} f &= \sum_{k=1}^{N} f(k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} (k+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or pour tout $k \geq 1$

$$\left| \int_k^{k+1} (k+1-t) f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_k^{k+1} |f'|$$

Qui est le terme général d'une série convergente d'où

$$\begin{aligned} &\sum f(n) && \text{converge} \\ \text{ssi } &\left(\int_1^N f\right)_N && \text{converge} \\ \text{ssi } &\int_1^{+\infty} f && \text{converge} \end{aligned}$$

Séries de Bertrand

Définitions et propriétés des séries de Bertrand.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}(\ln n)^{\beta}}$ est appelée série de Bertrand.

Cette série converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration :

- Cas $\alpha > 1$ comparaison avec les series de Riemann, en prenant $\gamma \in]1, \alpha[$.
- Cas $\alpha < 1$ même chose avec $\gamma \in]\alpha, 1]$.
- Cas $\alpha = 1$, comparaison série intégrale avec $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^{\beta}}$.

Recherche d'équivalent d'une suite

Méthodes de recherche d'équivalents.

Si on cherche un équivalent d'une suite (u_n)

- Étudier la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ou $\sum(u_n - u_{n+1})$, sommes partielles ou restes (voir théorème de sommation des relations de comparaison).
- Chercher $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}^*$, pour avoir

$$u_n^\alpha - u_0^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} nl$$

Absolue convergence

Définitions et démonstration du théorème de l'absolue convergence d'une série.

Une série $\sum u_n$ (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration : on étudie $\left((u_n)_+\right)$ et $\left((u_n)_-\right)$ pour le cas réel, puis $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ pour le cas imaginaire, à chaque fois on majore par le module et on applique les thorème de comparaison des séries positives.

Théorème des séries alternées

Énoncer et démonstration du théorème des séries alternées.

Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante tel que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = S - S_n$ est du signe du premier terme et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration : on montre que les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes et on étudie R_{2n} et R_{2n+1}.

Transformation d'Abel

Définition et applications de la transformation d'Abel.

Il s'agit d'une sorte d'IPP sur les séries. Soit (a_n) et (b_n) deux suites, la transformation d'Abel est utile si on a des hypothèses sur $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On pose $S_{-1} = 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} b_k \\ &= S_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k)\end{aligned}$$

Applications :

$$\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

Remarque : on peut aussi écrire $a_k = R_{k-1} - R_k$, qui peut être intérressant si $\sum a_n$ converge.

Règle de Raabe-Duhamel

Énoncé et démonstration de la règle de Raab-Duchamel.

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right), \quad h > 0$$

On considère $n^\alpha a_n = u_n$, on veut montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+^*$, c'est dire que $(\ln(u_n))$ a une limite réelle. On étudie $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)\right) + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{\min(2,1+h)}}\right)$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à terme positifs (en valeur absolue) $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge, d'où (u_n) converge.

Ainsi $n^\alpha a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^l$, donc $a_n \sim \frac{e^l}{n^\alpha}$, $\sum a_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries

Énoncés des théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries.

Pour les restes de séries convergentes :

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n$ converge.

1. Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\right)$$
2. Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\right)$$
3. Si $u_n \sim a_n$, alors
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$$

Démonstration : on repasse par les définitions de o et O : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N}, |u_n| \leq K a_n$, avec $K > 0$ fixé pour O et $K = \varepsilon > 0$ pour o. Pour $\sim$, on a $u_n - a_n = o(a_n)$.

Pour les sommes partielles de séries divergentes :

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n$ diverge.

1. Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right)$$
2. Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right)$$
3. Si $u_n \sim a_n$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} a_n$$

Démonstration : même que pour l'autre, on à juste a découper la somme entre avant et après un certain rang (pour o et O).

Équivalents de référence : séries de Riemann

Équivalent des restes ou sommes partielles des séries de Riemann (à redemontrer).

Par comparaison série intégrale :

- Pour $1 \geq a > 0$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \leq \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$$

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^a} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}$$

- Pour $a > 0$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^a}$$

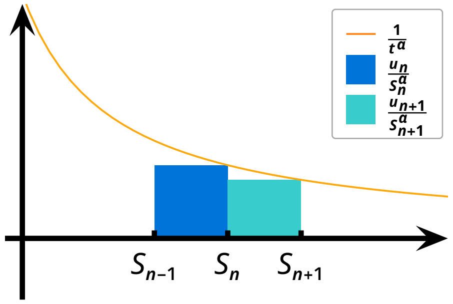
$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{n^{a-1}}$$

Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle

Démonstration de la CNS sur α de la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ (avec $\sum u_n$ divergente).

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n$ diverge, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_n$.

- Si $\alpha > 1$:



Donc pour $t \in [S_{n-1}, S_n]$

$$\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{S_n^\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_0}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$$

Or $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{S_0^\alpha}$$

- Si $\alpha = 1$:

Si $\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série diverge grossièrement, et sinon

$$\frac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$$
$$\sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$$

Qui est le terme général d'une série téléscopique divergergente.

- Si $\alpha \leq 1$, on compare avec $\alpha = 1$, car à partir d'un certain rang $S_n \geq 1$.

Familles sommables

Définition et propriétés élémentaires des familles sommables.

Soit I un ensemble non vide.

Pour $(u_i) \in \mathbb{R}_+^I$, on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup\left\{\sum_{j \in J} u_j,\ J \subseteq I \text{ fini}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Pour une famille $(u_i) \in \mathbb{K}^I$, on dit qu'elle est sommable si

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors elle contient un nombre au plus dénombrable d'éléments non nuls (Démonstration : on étudie $J_n = \left\{i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n}\right\}$)

Théorème de sommation par paquets

Énoncer et éléments de démonstration du théorème de sommation par paquets.

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$, et $I = \biguplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$ une partition. La famille (u_i) est sommable ssi

$$(*) : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i \in I_n} \text{ sommable} \\ \sum \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right) \text{ converge vers } S \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Démonstration :

- Cas positif :
  - On suppose $(*)$, on prend une sous famille fini J de I, on a donc une famille $(J_n = I_n \cap J)_n$, on note $N = \max(n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset)$ qui existe car J fini.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} u_j &= \sum_{n=0}^{N} \left(\sum_{j \in J_n} u_j \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = S \end{aligned}$$

  - Caractèrisation de la borne supérieure, majoration et sous ensembles finis.
- Cas général : D'abord en valeurs absolues, puis parties positives, négatives, réelles et imaginaires.

Maths ‣ Analyse ‣ Intégration

Critère de convergence d'intégrales usuelles

Critère de convergence d'intégrales usuelles :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{\alpha-1}$ ssi $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{1-\alpha}$ ssi $\alpha < 1$.
- $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Fonction gamma

Définition, convergence et démonstration de la fonction Γ.

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$$

- Qui converge pour $x > 0$.
- Pour $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

- $\Gamma(1) = 1$

$t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est C^0_{pm} sur $]0, +\infty[$.

- Sur $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{x-1} &= o_{t \to +\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) \\ &= o_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}$$

  Or $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}}\, \mathrm{d}t$ converge, donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t$ converge.
- Sur $]0, 1]$

$$e^{-t} t^{x-1} \underset{t \to 0_+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

  Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ converge ssi $1 - x < 1$ d'où $x > 0$, et on conclut par le même théorème.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x}\, \mathrm{d}t \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0 e^{-t} t^{x-1}\, \mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

Fonctions arithmétiques : Möbius et indicatrice d'Euler

Définition, contexte et démonstration de la fonction de Möbius et la formule d'inversion.

Pour $A = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ on définit $(*)$, pour $f, g \in A$

$$f * g = \begin{cases} \mathbb{N}^* & \to & \mathbb{C} \\ n & \mapsto & \displaystyle\sum_{d \mid n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \end{cases}$$

Qui est une loi de composition interne sur A. On montre que

- $\mathbb{1}_{\{1\}}$ est l'élément neutre.
- $(*)$ est commutatif
- $(*)$ est associatif

On définit la fonction de Möbius, on note $\pi(n) = |\{p \in \mathbb{P}, p \mid n\}|$

$$\mu : \begin{matrix} 1 & \mapsto & 1 \\ n \mid \nexists p \in \mathbb{P}, p^2 \mid n & \mapsto & (-1)^{\pi(n)} \\ n \mid \exists p \in \mathbb{P}, p^2 \mid n & \mapsto & 0 \end{matrix}$$

On montre de plus

$$\mu * \mathbb{1}_{\mathbb{N}} = \mathbb{1}_{\{1\}}$$

Pour $n \geq 2$ on écrit $n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}$. Un diviseur d s'écrit $\prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta_j}$ avec $\beta_j \leq \alpha_j$. Donc

$$\mu(d) \neq 0 \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, k]\!], \beta_j \in \{0, 1\}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{d \mid n} \mu(d) &= \sum_{\beta_1, \ldots, \beta_k \in \{0,0\}} \mu\left(\prod_{j=1}^{k} p_j^{\beta_j}\right) \\ &= \sum_{q=0}^{k} \sum_{I \subset [\![1, q]\!]} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{q=0}^{k} (-1)^q \binom{k}{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit la formule d'inversion de Möbius : soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$, on pose $g : n \mapsto \sum_{n \mid d} f(d)$ ($g = f * \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$), on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

C'est à dire $f = g * \mu = f * \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{N}} * \mu}_{\mathbb{1}_{\{1\}}}$.

De plus μ est multiplicative.

Intégrales de Wallis

Définition, propriétés et démonstration des intégrales de Wallis.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^n \, \mathrm{d}\theta \quad {\scriptstyle (\theta = \frac{\pi}{2} - t)} \end{aligned}$$

Relation de récurrence

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} \, \mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} \\ &+(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \underbrace{(\cos t)^2}_{1-(\sin t)^2} \mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+2} W_n \end{aligned}$$

Formules explicites

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= 1 \\ W_{2n} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ W_{2n+1} &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Équivalents

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \leq (\sin t)^{n+2} \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$$
$$0 \leq W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$$
$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

D'où

$$\begin{aligned} W_{n+1} &\underset{n\to+\infty}{\sim} W_n \\ W_{2n}^2 &\underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n+1}^2 \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} W_{2n}W_{2n+1} = \frac{\pi}{4n+2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$W_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$
$$W_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Énoncé et démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue.

Si I est un Intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in C^0_{\text{pm}}(I, \mathbb{K})$ intégrable sur I, alors

$$\int_I f(t)e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_I f(t)\cos(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_I f(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \underset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Démonstration

- Si f est C^1 sur un ségment : par IPP, on dérive f, f' étant continue sur un ségment elle est uniformement continue sur ce ségment (théorème de Heine), et est donc bornée (théorème des bornes atteintes).
- On montre d'abord pour I ségment.
  - On traite le cas f constante.
  - On généralise à f en escalier.
  - Par densité des fonctions en escalier on étend aux fonctions continues.
- On étend finalement aux intervalles quelconques.

Éxistence et unicité des sous groupes de groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique d'ordre n, et $d \mid n$, montrer l'éxistence et l'unicité d'un sous groupe d'ordre d.

Soit G cyclique d'ordre n.

Par isomorphisme à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, on se ramène à l'étude de $(\mathbb{U}_n, \cdot)$.

Soit H sous groupe de $\mathbb{U}_n$, $|H| = d$.

Pour tout $x \in H$, $x^d = 1$ donc $H \subset \mathbb{U}_d$, par égalité des cardinaux, $H = \mathbb{U}_d$.

Polynômes cyclotomiques

Définitions et propriétés des polynômes cyclotomiques.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\mathbb{V}_n = \{z \in \mathbb{U}_n \mid \mathrm{ord}(z) = n\} = \left\{e^{\frac{2ki\pi}{n}}, k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right\}$$

On définit de n-ème polynôme cyclotomique

$$\Phi_n(X) = \prod_{\xi \in \mathbb{V}_n} (X - \xi)$$

$$\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$$

On montre

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

$$\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$$

$$\Phi_p \text{ irréductible}$$

Démonstration

- Pour $d \mid n$, on a

  $$\mathbb{V}_d = \{z \in \mathbb{U}_n \mid \mathrm{ord}(n) = d\}$$

  Car si $z \in \mathbb{U}_n$ d'ordre d, $z \in$ <z> sous groupe de $\mathbb{U}_n$ de cardinal d, qui est unique car $\mathbb{U}_n$ est cyclique. D'où $z \in \mathbb{U}_d$ et à fortiori $z \in \mathbb{V}_d$.

- On a donc

  $$\mathbb{U}_n = \biguplus_{d \mid n} \mathbb{V}_d$$

  $$X^n - 1 = \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \xi) = \prod_{d \mid n} \left(\prod_{\xi \in \mathbb{V}_n} (X - \xi) \right) = \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

- On montre que la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ par un polynôme unitaire donnent un polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$. On refait la démonstration de la division euclidienne (récurrence).

- Récurrence forte sur n pour montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

  $$X^n - 1 = \Phi_n \cdot \left(\prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} \Phi_d \right)$$

- Soit $p \in \mathbb{P}$

  $$\Phi_p = \prod_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_p \\ \mathrm{ord}(\omega) = p}} (X - \omega) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$$

  Remarquons que

  $$\tau : \begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \to & \mathbb{Q}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{cases}$$

  est un automorphisme d'anneau.

  D'où $\Phi_p(X)$ irréductible ssi $\Phi_p(X+1)$ irréductible.

  $$\Phi_p(X+1) = \frac{(X+1)^p - 1}{X} = X^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\text{divisible par } p} X^{k-1}$$

  et le coéfficient constant est $\binom{p}{1}$ qui n'est pas divisible par p^2, d'où par le critère d'Eisenstein, Φ_p irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration de $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$:

$$n = |\mathbb{U}_n| = \sum_{d \mid n} |\mathbb{V}_d| = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Groupes quotientés

Définitions et propriétés des groupes quotientés.

Soit G un groupe, H sous-groupe.

On définit la relation d'équivalence

$$\forall (x, y) \in G^2,\ x \sim y \text{ ssi } y \in xH$$

On obtient ainsi les classes à gauche gH pour tout $g \in G$, dont l'ensemble est noté G/H.

H est dit distingué si

$$\forall g \in G,\ gHg^{-1} = H$$

Et dans ce cas G/H à une structure de groupe muni de la multiplication sur les classes

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

Et on pose

$$f : \begin{array}{ccc} G & \to & G/H \\ g & \mapsto & gH \end{array}$$

qui est un morphisme de groupe surjectif appelé projection cannonique de G sur G/H dont le noyau est H.

Cas particuliers

- Tous noyau de morphisme est un sous groupe distingué.
- Tous sous-groupe d'indice 2 ($\frac{|G|}{|H|} = 2$) est distingué.

Idéaux maximaux, anneaux quotientés

Définitions d'idéal maximale, anneau quotienté, propriétés.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et I idéal de A.

Idéal maximale

Un idéal I de A est dit maximale si pour tout J idéal de A

$$I \subsetneq J \Rightarrow J = A$$

Anneau quotienté

On définit sur A la relation d'équivalence

$$\forall (x, y) \in A^2,\ x \sim y \text{ ssi } x - y \in I$$

On note A/I l'ensemble des classes d'équivalences par cette relation qu'on muni d'une structure de groupe en définissant les loi suivantes

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$
$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

Qui ne dépend pas du représentant choisis.

Propriétés

- I est maximale ssi tous les éléments non nuls de A/I sont inversibles.
- Si A commutatif, I maximale, alors I est premier (A/I est intègre).

Démonstration :

- On suppose I maximale. Soit $x \in A \setminus I$ c'est à dire $x \notin \overline{0}_A$, montrons que $\overline{x}$ est inversible.

  $I \subseteq xA + I = J$ est un idéal, or I maximale d'où $1_A \in A = J$, d'où l'éxistence de $y \in A$ et $z \in I$ tel que

  $$xy + z = 1_A$$
  $$\overline{xy} = \overline{1_A}$$

- On suppose les éléments non nuls de I/A inversibles.

  Soit $J \supsetneq I$ idéal de A, donc il existe $x \in J$ tel que $x \notin I$.

  $\overline{x} \neq \overline{0}$ donc $\overline{x}^{-1} = \overline{y}$ existe.

  $$\overline{x}\overline{y} = \overline{xy} = \overline{1}_A$$
  $$\exists z \in I,\ \underbrace{xy + z}_{\in J} = 1_A$$

  $1_A \in J$ donc $J = A$, I est maximale.

- Soit $x, y \in A$ tels que $xy \in I$, supposons que $x \notin I$. Donc $\overline{x}$ inversible : on dispose de $x' \in A$ et $z \in I$ tels que

  $$xx' + z = 1_A$$
  $$\overbrace{\underbrace{xy}_{\in I}x' + zy}^{\in I} = y \in I$$

Signature d'une permutation

Définitions et propriétés de la signature dans $\mathfrak{S}_n$.

Plusieurs définitions alternatives.

- $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \to (\mathbb{Z}^\times, \cdot)$ est l'unique morphisme non triviale.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \\ &= (-1)^{N_\sigma} \\ &= (-1)^{n - |\mathrm{Orb}(\sigma)|}\end{aligned}$$

Où $N_\sigma = |\{(i, j) \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

Hölder

Inégalité de Hölder et démonstration.

Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$

  $$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

  Le cas nul se traite facilement, puis on utilise la concavité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

  $$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) &\geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q) \\ &= \ln(xy) \end{aligned}$$

  $$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy$$

- On traite d'abord le cas où l'un des vecteurs (X ou Y) est nul.
- On traite ensuite le cas où

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j^q = 1$$

  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

  $$x_i y_i \leq \frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q$$

  $$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &\leq \frac{1}{p}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}_{1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}_{1} \\ &\leq 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

- Enfin dans le cas général, on pose pour $i \in [\![1, n]\!]$

  $$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

  Et ça marche.

Actions de groupe

Définitions et exemples usuels, propriétés des actions de groupes.

Soit G un groupe, X un ensemble. Une action de groupe est la donnée d'un morphisme de groupe

$$\varphi : \begin{cases} G \to & \mathfrak{S}(X) \\ g \mapsto & \rho_g : \begin{cases} X \to & X \\ x \mapsto & \rho_g(X) = g.x \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi tout groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$.

Démonstration

Grâce à l'action de groupe φ

$$\varphi : \begin{cases} G \to & \mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n \\ a \mapsto & \rho : \begin{cases} G \to & G \\ g \mapsto & ag \end{cases} \end{cases}$$

Qui est un morphisme de groupe (car $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{a,b}$), injectif (car $\ker \varphi = e_G$), d'où $\varphi|_{\varphi(G)}$ isomorphisme de $G \to \varphi(G)$, avec $\varphi(G)$ sous groupe de $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$.

Autre action classique

On peut aussi considérer l'action de conjugaison

$$\theta : \begin{cases} G \to & \mathfrak{S}(G) \\ g \mapsto & \rho_g : \begin{cases} G \to & G \\ x \mapsto & gxg^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{g \in G \mid \theta(g) = \mathrm{id}\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\} \\ &= Z(G) \end{aligned}$$

Formule des classes

Énoncé, démonstration et définitions de la formule des classes.

Soit G un groupe et φ une action de G sur un ensemble X. On définit pour tout $x \in X$

$$\mathrm{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

C'est un sous groupe de G :
- $e.x = x$ d'où $e \in \mathrm{Stab}(x)$
- $\forall g \in \mathrm{Stab}(x), g^{-1}.x = g^{-1}.g.x = x$
- $\forall g, h \in \mathrm{Stab}(x), (gh).x = g.h.x = x$

On définit également

$$\mathrm{Orb}(x) = \{g.x, g \in G\}$$

Qui est la classe d'équivalence de x pour la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si } \exists g \in G, y = g.x$$

Donc les orbites forment une partition de X.

Formule des classes

Pour tout $x \in X$ fini et G fini

$$|\mathrm{Orb}(x)| \cdot |\mathrm{Stab}(x)| = |G|$$

Démonstration

Soit $x \in X$, pour $y \in \mathrm{Orb}(x)$, on dispose de $g_0 \in G$ tel que $g_0.x = y$.

Étudions $\{g \in G \mid g.x = y\}$:

$$\begin{aligned} g.x = y &\Leftrightarrow g.x = g_0.x \\ &\Leftrightarrow (g_0^{-1}g).x = x \\ &\Leftrightarrow g_0^{-1}g \in \mathrm{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g \in g_0 \,\mathrm{Stab}\,(x) \end{aligned}$$

D'où

$$G = \biguplus_{y \in \mathrm{Orb}(x)} \{g \in G \mid g.x = y\}$$

$$\begin{aligned} |G| &= \sum_{y \in \mathrm{Orb}(x)} |g_0 \,\mathrm{Stab}\,(x)| \\ &= \sum_{y \in \mathrm{Orb}(x)} |\mathrm{Stab}\,(x)| \\ &= |\mathrm{Orb}(x)| \cdot |\mathrm{Stab}\,(x)| \end{aligned}$$

Exercice : Les p-groupes

Définitions d'un p-groupe, et démonstration de

1. Pour G p-groupe, $|Z(G)| = p^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
2. Tout groupe G d'ordre p^2 est abélien

Un p-groupe est un groupe dont tout les éléments sont d'odre p^γ avec $p \in \mathbb{P}$. A fortiori, il s'agit d'un groupe de cardinal p^α.

1. On étudie l'action de groupe

$$\varphi : \begin{cases} G & \to & \mathfrak{S}(G) \\ g & \mapsto & \rho_g : \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & gxg^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On montre que

$$x \in Z(G) \text{ ssi } \mathrm{Orb}(x) = \{e_G\}$$

Et par la formule des classes on a pour tout $x \in G$:

$$p^\alpha = |G| = |\mathrm{Orb}(x)| \cdot |\mathrm{Stab}(x)|$$

Donc $|\mathrm{Orb}(x)| \mid p^\alpha$ d'où si $|\mathrm{Orb}(x)| > 0$, $p \mid |\mathrm{Orb}(x)|$.

Or les $\mathrm{Orb}(x)$ forment une partition de G donc

$$\begin{aligned} p^\alpha = |G| &= \sum_{x \in G} |\mathrm{Orb}(x)| \\ &= |Z(G)| + \underbrace{\sum_{\substack{x \in G/\sim \\ |\mathrm{Orb}(x)|>1}} |\mathrm{Orb}(x)|}_{\text{divisible par } p} \end{aligned}$$

Donc $p \mid |Z(G)|$ mais $e_G \in Z(G)$ donc $|Z(G)| > 0$ d'où $|Z(G)| \geq p$.

2. Par l'exercice ci dessus

$$Z(G) \in \{p, p^2\}$$

Supposons qu'il existe $x \in G \setminus Z(G)$, alors

$$Z(G) \subset \mathrm{Stab}(x) \text{ et } x \in \mathrm{Stab}(x)$$

Donc $|\mathrm{Stab}(x)| \geq p+1$ sous-groupe de G donc

$$\mathrm{Stab}(x) = G$$

D'où $x \in Z(G)$, absurde.

Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p

Soit G un groupe d'ordre pq avec $p \in \mathbb{P}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, démonstration de l'éxistence d'un élément d'ordre p.

Soit G d'odre $n = pq$ avec $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$.

On pose

$$\Gamma = \left\{\left(x_1, ..., x_p\right) \in G^p \mid x_1 \cdots x_n = e_G\right\}$$
$$\sigma = (1\ 2 \cdots p) \in \mathfrak{S}_p$$

On considère $H = <\sigma>$ qui agit sur Γ via

$$\varphi : \begin{cases} H & \to & \mathfrak{S}(\Gamma) \\ \sigma^k & \mapsto & \rho_{\sigma^k} \end{cases}$$

Où

$$\rho_{\sigma^k} : \begin{cases} \Gamma & \to & \Gamma \\ \left(x_1, ..., x_p\right) & \mapsto & \left(x_{\sigma^k(1)}, ..., x_{\sigma^k(p)}\right) \end{cases}$$

(On montre par récurrence sur k que ρ_{σ^k} à bien valeur dans Γ).

On remarque que $|H| = p$ et

$$\forall X = \left(x_1, ..., x_p\right) \in G^p,$$
$$X \in \Gamma \Leftrightarrow x_p^{-1} = x_1 \cdots x_{p-1}$$
$$\Gamma \simeq G^{p-1} \text{ donc } |\Gamma| = n^{p-1}$$

Pour tout $x \in \Gamma$ (par la formule des classes)

$$p = |H| = |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)|$$
$$\text{donc } |\text{Orb}(x)| \in \{1, p\}$$

$$\begin{aligned} \text{Orb}(x) = \{x\} &\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p \\ &\Leftrightarrow x_1^p = e_G \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} n^{p-1} = |\Gamma| &= \sum_{x \in \Gamma/\sim} |\text{Orb}(x)| \\ &= \sum_{\substack{x \in \Gamma/\sim \\ |\text{Orb}(x)| = 1}} 1 + \sum_{\substack{x \in \Gamma/\sim \\ |\text{Orb}(x)| > 1}} p \\ &= |\{x \in G \mid x^p = e_G\}| + kp \end{aligned}$$

Avec $k \in \mathbb{N}$. Or $p \mid n$ donc

$$p \mid |\{x \in G \mid x^p = e_G\}| \geq 1$$

Donc il existe au moins $p - 1$ éléments d'ordre p.

Cas $n = 2$:

On regroupe les éléments avec leurs inverse, ce qui montre par la parité du cardinale l'éxistence d'un élément d'ordre 2.

Théorème de Burnside

Énoncer et démonstration du théorème de Burnside.

Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X fini par φ.

On définit pour $g \in G$

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X, g.x = x\}$$

Notons N le nombre d'orbites :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Démonstration

On étudie

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \{(g,x) \in G \times X \mid g.x = x\} \\
&= \biguplus_{x \in X} \{(g,x), g \in \mathrm{Stab}(x)\} \\
&= \biguplus_{g \in G} \{(g,x), x \in \mathrm{Fix}(g)\}
\end{aligned}$$

Or par la formule des classes

$$|\mathrm{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}(x)|}$$

D'où (en notant x_i représentant du i-ème orbite)

$$\begin{aligned}
|\Gamma| &= \sum_{x \in X} |\mathrm{Stab}(x)| \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{x \in \overline{x_j}} |\mathrm{Stab}(x)| \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{x \in \overline{x_j}} \frac{|G|}{|\mathrm{Orb}(x_j)|} \\
&= N\ |G|
\end{aligned}$$

Or

$$|\Gamma| = \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

D'où

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

Exercice : Groupe d'éléments d'ordre inférieur à deux

Propriétés du groupe G tel que $\forall x \in G, x^2 = 1$

On a immédiatement

$$\forall x \in G, x = x^{-1}$$

- G est abélien, soit $x, y \in G$:

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

- Si G fini, $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et $|G| = 2^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

  Passons en notation additive pour plus de caireté :

  Faison de G un $\mathbb{F}_2$-ev :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 \times G & \to & G \\ \left(\overline{k}, g\right) & \mapsto & kg \end{array}$$

  Qui ne dépend pas du représentant car $2G = \{0\}$.

G un $\mathbb{F}_2$-ev de dimension finie, donc isomorphe à $\mathbb{F}_2^n$ en tant qu'éspace vectoriel, et à fortiori en tant que groupe.

Irréductibles d'un anneau

Définition, propriétés élémentaires sur les irréductibles dans un anneau principal.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau principal.

- Dans un anneau principal on a un PGCD

  Pour tout $a, b \in A$, il existe $d \in A$ tel que $aA + bA = dA$, unique (à associés près), qu'on appelle PGCD de a et b ($a \wedge b = d$).

  On a aussi Bézout car $d \in dA = aA + bA$ d'où $\exists (u, v) \in A^2, d = au + bv$.
- Un élément de A est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont ses associés et les inversibles.
- Pour tout $a \in A$, il existe une unique (à permutation et multiplication par des inversibles près) décomposition de a en irréductibles.

Démonstration de la décomposition

- Toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite d'idéaux de A croissante au sens de l'inclusion.

  $$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

  Est encore un idéal car union croissante d'idéaux

  Par principalité de A, $K = zA$ avec $z \in K$ donc on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $z \in I_k$ d'où

  $$K = zA \subseteq I_k \subseteq K$$
- Tout élément de A admet au moins un diviseur irréductible dans A.

  Soit $x \in A$, on construit la suite (x_n) par récurrence : $x_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$
  - Si x_n irréductible, $x_{n+1} = x_n$
  - Sinon on prend x_{n+1} diviseur de x_n non associés et non inversible.

  Par définition de la divisibilité, $(x_n A)_n$ est une suite croissante d'idéaux, et est donc stationnaire.

  Soit k le rang à partir du quel c'est le cas, x_k est donc un diviseur irréductible de x.
- Éxistence de la décomposition : récurrence avec la propriété ci dessus.
- Unicité de la décomposition : on prend deux décomposition on montre que chaque irréductible est présent à la même puissance dans les deux.

Polynômes en caractèristique strictement positive

Remarques et mises en gardes à propos de $\mathbb{K}[X]$ quand $\mathrm{car}(\mathbb{K}) > 0$

Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) > 0$

- Le morphisme d'évaluation θ : $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ n'est pas forcément injectif.

  Dans $\mathbb{F}_p$, $\theta(X^p - X) = \theta(0) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)}$ or $X^p - 1 \neq 0$.

- Il n'y a pas équivalence entre multiplicité d'une racine et les valeurs des dérivées succéssives.

  Pour $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P}$

  Pour $k \in [\![1, p-1]\!]$

  $$\binom{k}{p} = \frac{\overbrace{p(p-1)\cdot \dots \cdot (p-k+1)}^{p \text{ divise}}}{\underbrace{k!}_{p \text{ ne divise pas}}}$$

  D'où $\binom{k}{p}$ nul dans $\mathbb{K}$.

  Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{K}$

  $$\begin{aligned}(a+b)^p &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{k}{p} a^k b^{p-k} \\ &= a^p + b^p\end{aligned}$$

  Et on peut définir le morphisme de corps de Frobenius

  $$\sigma : \begin{cases} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x^p \end{cases}$$

  Donc dans $\mathbb{F}_p[X]$

  $$Q = (X-1)^p = X^p - 1$$

  1 est racine de multiplicité p de Q or $Q' = 0$ d'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{(k)}(1) = 0$.

Théorème de Wilson

Énoncer et démonstration du théorème de Wilson.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, p est premier ssi $(p-1)! \equiv -1[p]$.

Démonstration

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ non premier.
  - Si $3 \leq n = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. $2m \cdot m \mid (n-1)!$ d'où $(n-1)! \equiv 0[n]$
  - Sinon on dispose de $1 \leq p, q < n$ tels que $n = pq$ d'où $n = pq \mid (n-1)!$ et $(n-1)! \equiv 0[n]$.
- Soit $p \in \mathbb{P}$, étudions $(p-1)!$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

  Soit $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tel que $x^2 = 1$

  $$(x+1)(x-1) = 0$$

  Donc $x = \{1, -1\}$.

  On peut donc regrouper les éléments du produit $(p-1)!$ avec leurs inverses (qui sont dans le produit), à l'éxception de 1 et -1 d'où

  $$\begin{aligned}(p-1)! &= (p-1)(p-2) \cdot \dots \cdot 1 \\ &= -1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

  Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Autre démonstration horrible pour le deuxième sens

Soit $p \in \mathbb{P}$, on étudie $R = X^p - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, $R(x) = 0$ donc $(X - x) \mid R$ et premiers entre eux deu x à deux d'où

$$\prod_{x \in \mathbb{F}_p} (X - x) \mid R$$

Et par égalité des degrés on a égalité des polynômes.

Considèrons maintenant le morphisme d'anneau suivant :

$$\pi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^n a_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k \end{array} \right.$$

$$Q = \prod_{k=0}^{p-1} (X - k) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

$$\pi(Q) = \prod_{k=0}^{p-1} \left(X - \overline{k}\right) = R$$

$$\begin{aligned}a_1 &= (-1)^{p-1} \sum_{\substack{I \subset [\![0, p-1]\!] \\ |I| = p-1}} \prod_{i \in I} i \\ &= (p-1)! \\ \overline{a}_1 &= \overline{(p-1)!} = -1\end{aligned}$$

Formule de Taylor-Langrange formelle

Formule de Taylor-Langrange formelle sur $\mathbb{K}[X]$, démonstration.

Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $N \geq \deg P$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{N} P^{(k)}(a)\frac{(X-a)^k}{k!}$$

Démonstration

Notons $E = \mathbb{K}_N[X]$ qui est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $N+1$.

La famille $\left((X-a)^k\right)_{k\in[\![0,N]\!]}$ est libre car échelonné en degré, c'est donc une base de E, et comme $P \in E$, et comme $P \in E$

$$P = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k (X-a)^k$$

Pour $j \in [\![0,N]\!]$

$$\begin{aligned} P^{(j)}(a) &= \sum_{k=j}^{N} \frac{\lambda_k k!}{(k-j)!}(a-a)^{k-j} \\ &= \lambda_j j! \end{aligned}$$

$$\lambda_j = \frac{P^{(j)}(a)}{j!}$$

Contenus d'un polynôme à coéfficients entiers

Définitions, propriétés, et démonstrations à propos du contenu dans $\mathbb{Z}[X]$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on définit le contenu de P comme

$$c(P) = \bigwedge_{k=0}^{d} a_k$$

Et on dit qu'un polynôme P est primitif si $c(P) = 1$.

- Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $c(P) = c(Q) = 1$, alors $c(PQ) = 1$.A
- Pour tout $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Démonstration

- Soit $p \in \mathbb{P}$, posons le morphisme d'anneau

  $$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^{d} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

  $c(P) = 1$ donc P admet au moins un coéfficient non divisible par p et de même pour Q.

  $$\pi(P) \neq 0 \text{ et } \pi(Q) \neq 0$$
  $$\pi(PQ) = \pi(P)\pi(Q) \neq 0$$

  Donc p ne divise pas tous les coéfficients de PQ pour tout $p \in \mathbb{P}$, d'où $c(PQ) = 1$.
- On remarque que pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$, $c(kP) = kc(P)$ et on étudie $\tilde{P} = \frac{P}{c(P)}$ et $\tilde{Q} = \frac{Q}{c(Q)}$.

Exercice : Produit de polynômes de rationels unitaire entier

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires, montrer que si $PQ \in \mathbb{Z}[X]$ alors $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.

$P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires, $PQ \in \mathbb{Z}[X]$.

Comme PQ unitaire $c(PQ) = 1$. On trouve $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aP, bQ \in \mathbb{Z}[X]$.

$$c(aP)c(bQ) = abc(PQ) = ab$$

Or P et Q étant unitaires

$$\begin{cases} c(aP) \mid a \\ c(bQ) \mid b \end{cases} \text{donc} \begin{cases} a = k_a c(aP) \\ b = k_b c(bQ) \end{cases}$$

$$c(aP)c(bQ) = ab = k_a k_b c(aP)c(bQ)$$

$$\text{d'où } k_a = k_b = 1 \text{ et } \begin{cases} a = c(aP) \\ b = c(bQ) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} P = a\frac{P}{a} \in \mathbb{Z}[X] \\ Q = b\frac{Q}{b} \in \mathbb{Z}[X] \end{cases}$$

Exercice : Irréductibilité dans les rationels

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{Z}[X]$ sont de degré 0 ou $\deg P$, montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

On suppose par contraposé que P n'est pas irréductible dans $\mathbb{Q}$.

$$P = QR$$
$$1 \leq \deg Q, \deg R \leq \deg P - 1$$

On introduit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aQ, bR \in \mathbb{Z}[X]$.

$$\begin{aligned} abc(P) &= c(aQbR) \\ &= c(aQ)c(bR) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{aQbR}{ab} \\ &= \frac{(aQ)(bR)}{\frac{c(aQ)c(bR)}{c(P)}} \\ &= c(P) \cdot \underbrace{\frac{aQ}{c(aQ)}}_{Q_0} \cdot \underbrace{\frac{bR}{c(bR)}}_{R_0} \in \mathbb{Z}[X] \end{aligned}$$

Avec Q_0 et R_0 diviseurs de P dans $\mathbb{Z}[X]$ de degrés compris dans $[\![1, \deg P - 1]\!]$.

Entiers algébriques

Définition d'entier algébrique.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, on dit que α est un entier algébrique s'il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $Q(\alpha) = 0$.

1. α est donc aussi algébrique dans $\mathbb{Q}$, et son polynôme minimal est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$.

Entiers algébrique de degré 2

2. $\alpha \in \mathbb{C}$ entier algébrique de degré 2 : on dispose de $\pi_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré 2 qui annule α. $\mathbb{Z}[\alpha] = \operatorname{im} \theta_\alpha$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$ (et donc de $\mathbb{C}$).
3. $\mathbb{Z}[\alpha] = \{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et tout élément s'écrite de manière unique sous cette forme.
4. On peut écrire
$$\pi_\alpha = (X - \alpha)(X - \beta)$$
On remarque que $\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$ car $\alpha + \beta = a \in \mathbb{Z}$ d'où $\beta = a - \alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$.

   On définit
$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z}[\alpha] & \rightarrow & \mathbb{Z}[\alpha] \\ x + \alpha y & \mapsto & x + \beta y \end{cases}$$
On a alors
$$\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\alpha], \ \tau(zz') = \tau(z)\tau(z')$$
5. Et on peut alors définir
$$N : \begin{cases} \mathbb{Z}[\alpha] & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ z = x + \alpha y & \mapsto & z\tau(z) \end{cases}$$
Qui est aussi multiplicatif.
6. $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ est inversible ssi $N(z) = |1|$.

Démonstration

1. Notons P_α ce polynôme, comme $Q(\alpha) = 0, P_\alpha \mid Q$ dans $\mathbb{Q}[X]$, d'où
$$\mathbb{Z}[X] \ni Q = P_\alpha R \in \mathbb{Q}[X]$$
Et donc $P_\alpha, R \in \mathbb{Z}[X]$ car Q unitaire (cf. exercices sur le contenu).

3. α de degré 2 donc
$$\pi_\alpha(X) = X^2 + aX + b$$
   - On a déjà $\{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} \subseteq \mathbb{Z}[\alpha]$.
   - Soit $x = P(\alpha) \in \mathbb{Z}[\alpha]$, $P = Q\pi_\alpha + R$ avec $Q \in \mathbb{K}[X], R \in \mathbb{K}_1[X]$.

     Donc
$$R = yX + x \in \mathbb{Z}[X]$$
$$P(\alpha) = \underbrace{Q(\alpha)\pi_{\alpha(\alpha)}}_{0} + y\alpha + x$$
   - Soit $x_1 + \alpha y_1 = x_2 + \alpha y_2$ avec $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$.
$$x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)\alpha$$
     Par l'absurde, si $y_1 \neq y_2$:
$$\alpha = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbb{Q}[X]$$
     Qui est absurde car π_α serait de degré 1.

4. Soit $z = x + \alpha y, z' = x' + \alpha y'$

   On a $\alpha^2 = a\alpha - b$ et $\beta^2 = a\beta - b$ donc
$$\begin{aligned} \tau(zz') &= \tau\big(xx' + \alpha(xy' + x'y) + \alpha^2 yy'\big) \\ &= \tau(xx' - byy' + \alpha(xy' + xy' + ayy \\ &= xx' - byy' + \beta(xy' + x'y + ayy') \\ &= (x + \beta y)(x' + \beta y) \\ &= \tau(z)\tau(z') \end{aligned}$$
5. Soit $z = x + \alpha y \in \mathbb{Z}[\alpha]$
$$\begin{aligned} N(z) = z\tau(z) &= (x + \alpha y)(x + \beta y) \\ &= x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2 \\ &= x^2 = axy + by^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$
6. - Soit $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ inversible, on dispose de $z' \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $zz' = 1$.
$$N(zz') = N(1) = 1 = N(z)N(z')$$
     Donc $|N(z)| = 1$
   - Soit $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $N(z) = \varepsilon \in \{1, -1\}$
$$(x + \alpha y)(x + \beta y) = \varepsilon$$
$$z(\varepsilon x + \varepsilon \beta y) = 1 = \varepsilon^2$$
$$z^{-1} = \varepsilon(x + \beta y)$$

Exercice : Polynômes à coéfficients entiers

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, montrer que si P admet une racine rationelle $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, alors $q \mid a_d$ et $p \mid a_0$.

1.

$$0 = P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^{d} a_k p^k q^{d-k}$$

$$\underbrace{-\sum_{k=0}^{d-1} a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } q} = a_d p^d$$

$$\underbrace{-\sum_{k=1}^{d} a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } p} = a_0 q^d$$

D'où $\begin{cases} q \mid a_d p^d \\ p \mid a_0 q^d \end{cases}$ or $q \wedge p = 1$ donc par le théorème de Gauss, $\begin{cases} q \mid a_d \\ p \mid a_0 \end{cases}$.

On en déduis que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire et admet une racine rationelle, alors elle est entière.

Critère d'Eisenstein

Énoncé et démonstration du critère d'Eisenstein.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{P}$ et

$$\begin{cases} \forall k \in [\![0, d-1]\!], p \mid a_k \\ p \nmid a_d \\ p^2 \nmid a_0 \end{cases}$$

Alors P n'a pas de diviseurs dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré compris dans $[\![1, d-1]\!]$, et est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (cf. exercices sur le contenu).

Démonstration

On considère le morphisme d'anneau suivant

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \to & \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^{d} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{d} \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$

$$\overline{0} \neq \overline{a_d} X^d = \pi(P) = \pi(Q)\pi(R)$$

Par unicité de la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$

$$\pi(Q) = \alpha X^k \quad \pi(R) = \beta X^l$$

$$k + l = d \quad \deg Q \geq k \quad \deg R \geq l$$

Or $\deg Q + \deg R = d$ d'où

$$Q = \sum_{i=0}^{k} b_i X^i \text{ avec } \begin{cases} \overline{b_k} = \alpha \neq 0 \\ \overline{b_0} = 0 \end{cases}$$

$$R = \sum_{i=0}^{l} c_i X^i \text{ avec } \begin{cases} \overline{c_l} = \beta \neq 0 \\ \overline{c_0} = 0 \end{cases}$$

D'où $a_0 = b_0 c_0$ est divisible par p^2, absurde.

Exercice : rationalité d'une racine de haute multiplicité

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré n et a racine de P de multiplicité $m_a > \frac{n}{2}$, montrer que $a \in \mathbb{Q}$.

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré n et a racine de P de multiplicité $m_a > \frac{n}{2}$.

$$P = \prod_{k=0}^{N} Q_k^{p_k}$$

Décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{Q}[X]$. Pour tout $i \neq j, P_i \wedge P_j = 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc dans $\mathbb{C}[X]$.

Ainsi a n'est racine que d'un des P_i, notons $P_1(a) = 0$.

C'est une racine simple car P_1 irréductible, d'où

$$p_1 \geq m_a > \frac{n}{2}$$
$$2p_1 > n \geq p_1 \deg(P_1)$$
$$2 > \deg(P_1) = 1$$

Donc $P_1 = \lambda(X - a) \in \mathbb{Q}[X]$ d'où $a \in \mathbb{Q}$.

Algèbres

Définition d'une $\mathbb{K}$-Algèbre avec $\mathbb{K}$ un corps.

Une $\mathbb{K}$-Algèbre est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $(+)$, $(\times)$ et d'une loi de composition externe $(\cdot)$ tel que

- $(A, +, \times)$ est un anneau
- $(A, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-ev
- $\forall (a, x, y) \in \mathbb{K} \times A^2$

$$a(x \times y) = (ax) \times y = x \times (ay)$$

Exemples

- $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-Algèbre
- $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-Algèbre
- Pour E un $\mathbb{K}$-ev, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-Algèbre.

Exercice : existence d'un élément d'ordre du ppcm de deux autres

1. Soit G un groupe abélien fini, montrer que pour tout $x, y \in G$, il existe un élément $z \in G$ tel que $\operatorname{ord}(z) = \operatorname{ord}(x) \vee \operatorname{ord}(y)$.
2. En déduire que

$$\max_{g \in G} \operatorname{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \operatorname{ord}(g)$$

---

1. Soit G un groupe abélien, $x, y \in G$ qui admettent un ordre.

$$\operatorname{ord}(x) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$$
$$\operatorname{ord}(y) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i}$$

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$

$$\operatorname{ord}\left(x^{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}}\right) = p_k^{\alpha_k}$$
$$\operatorname{ord}\left(y^{\prod_{i \neq k} p_i^{\beta_i}}\right) = p_k^{\beta_k}$$

On pose alors

$$z_k = \begin{cases} x^{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}} & \text{si } \alpha_k \geq \beta_k \\ y^{\prod_{i \neq k} p_i^{\beta_i}} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $\operatorname{ord}(z_k) = p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$

Ainsi en posant $z = \prod_{k=1}^{N} z_k$:

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(z) &= \prod_{k=1}^{N} p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)} \\ &= \operatorname{ord}(x) \vee \operatorname{ord}(y) \end{aligned}$$

(Car G est abélien).

2. Par récurrence (car G fini) on dispose de $h \in G$ tel que

$$\operatorname{ord}(h) = \bigvee_{g \in G} \operatorname{ord}(g) = m$$

Posons $g_0 \in G$ d'ordre $\max_{g \in G} \operatorname{ord}(g)$.

On a donc

$$m \leq \operatorname{ord}(g_0) \mid m$$
$$m = \operatorname{ord}(g_0)$$

Exercice : Cyclicité des sous-groupes finis des inversibles d'un corps

Soit $\mathbb{K}$ un corps, et $G \le \mathbb{K}^\times$ fini. Montrer que G est cyclique.

Première méthode

On utilise la propriété suivante (à redémontrer) : si G abélien fini

$$\max_{g \in G} \operatorname{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \operatorname{ord}(g)$$

Or pour tout $g \in G, g^m = 1$ d'où

$$G \subset \{\text{racines de } X^m - 1 \text{ dans } \mathbb{K}[X]\}$$

D'où $|G| \le m$ car $\mathbb{K}$ est un corps et ainsi l'élément d'ordre maximale est d'ordre supérieure ou égal au cardinal de G, d'où G cyclique.

Deuxième méthode

Pour $d \mid n = |G|$ on pose

$$\Gamma_d = \{g \in G \mid \operatorname{ord}(g) = d\}$$

$$G = \biguplus_{d \mid n} \Gamma_d$$

$$n = \sum_{d \mid n} |\Gamma_d|$$

On pose aussi

$$\begin{aligned} A_d &= \{g \in G \mid g^d = 1\} \\ &= \{\text{racines de } X^d - 1\} \cap G \end{aligned}$$

$$|A_d| \le d$$

Pour $d \mid n$ on a

- $\Gamma_d = \varnothing$ et $|\Gamma_d| = 0$
- Ou il existe $x \in \Gamma_d$, d'où $<x> \subset A_d$ et $d \le |A_d| \le d$.

  Ainsi

  $$\Gamma_d = \{g \in A_d = <x> \mid \operatorname{ord}(g) = d\}$$

  $$|\Gamma_d| = \varphi(d)$$

Finalement

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n = \sum_{d \mid n} \underbrace{|\Gamma_d|}_{\in \{0, \varphi(d)\}}$$

D'où nécéssairement $|\Gamma_d| = \varphi(d)$ pour tout $d \mid n$, en particulier pour $|\Gamma_n| = \varphi(n) > 0$: il existe $\varphi(n)$ éléments d'ordre n.

Exercice : Les carrés de Fp

Notons $\mathbb{F}_p^2 = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p\}$ et $\mathbb{F}_p^{*2} = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p^*\}$.

1. Montrer que $\left|\mathbb{F}_p^2\right| = \frac{p+1}{2}$ et $\left|\mathbb{F}_p^{*2}\right| = \frac{p-1}{2}$.
2. Montrer que pour $x \in \mathbb{F}_p^*$, $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$ ssi $x^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$.
3. En déduire que pour $p \geq 3$, -1 est un carré ssi $p \equiv 1[4]$.
4. On suppose $p \equiv 3[4]$, pour $x \in \mathbb{F}_p^*$ montrer que x est un carré ssi $-x$ n'en est pas un.
5. Soit $p \in \mathbb{P} \mid p \equiv -1[4]$, pour tout $r \in \mathbb{F}_p^*$ montrer que $\Gamma_r = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{F}_p^*\right)^2 \mid x^2 - y^2 = r\right\}$ est de cardinal $p-3$.

---

1. On étudie le morphisme de groupe
$$\theta : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p^* & \to & \mathbb{F}_p^{*2} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}\right.$$
$$\begin{aligned}\ker\theta &= \{x \in \mathbb{F}_p^*, x^2 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{F}_p^*, (x-1)(x+1) = 0\} \\ &= \{-1, 1\}\end{aligned}$$
$$\underbrace{|\ker\theta|}_{2} \cdot \underbrace{(\operatorname{im}\theta)}_{|\mathbb{F}_p^{*2}|} = p - 1$$
D'où $\left|\mathbb{F}_p^{*2}\right| = \frac{p-1}{2}$.
Et $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p^* \cup \{0\}$ d'où
$$\left|\mathbb{F}_p^2\right| = \left|\mathbb{F}_p^{*2}\right| + 1 = \frac{p+1}{2}$$
2. Soit $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$, on écrit $x = y^2$ avec $y \in \mathbb{F}_p^*$.
$$x^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1} = \overline{1}$$
D'où
$$\underbrace{\mathbb{F}_p^{*2}}_{\frac{p-1}{2}} \subset \underbrace{\left\{\text{racines de } X^{\frac{p-1}{2}} - 1\right\}}_{\leq \frac{p-1}{2}}$$
D'où l'égalité des ensembles.
3. $$\begin{aligned}\overline{-1} \in \mathbb{F}_p^{*2} &\Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1} \\ &\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow p \equiv 1[4]\end{aligned}$$
4. On suppose $p \equiv 3[4]$
$$(-1) \notin \mathbb{F}_p^{*2} \quad \text{car } (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$$
$$\begin{aligned}x \in \mathbb{F}_p^{*2} &\Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow (-x)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \\ &\Leftrightarrow -x \notin \mathbb{F}_p^{*2}\end{aligned}$$
5.
   - Si r est un carré, $r = a^2$ avec $a \in \mathbb{F}_p$
   $$\begin{aligned}(x,y) \in \Gamma_r &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow \left(xa^{-1}\right)^2 - \left(ya^{-1}\right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \left(xa^{-1}, ya^{-1}\right) \in \Gamma_1\end{aligned}$$
   D'où $|\Gamma_r| = |\Gamma_1|$
   - Si r n'est pas un carré, $-r$ en est un.
   $$(x,y) \in \Gamma_r \Leftrightarrow y^2 - x^2 = -r$$
   Et on se ramène au cas précédent.
   $$|\Gamma_r| = |\Gamma_1|$$

   Dénombrons Γ_1.
   $$\begin{aligned}(x,y) \in \Gamma_1 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 1\end{aligned}$$
   Posons $a = x + y, b = x - y$ (p impair d'où $2 \in \mathbb{F}_p^*$)
   $$x = a + \frac{b}{2}$$
   $$y = a - \frac{b}{2}$$
   $$(x,y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$$
   On a $(p-1)$ choix pour a, et b déterminé par a, d'où au plus $(p-1)$ couples.

   Il faut exclure les cas où notre choix de a permet $x, y \notin \mathbb{F}_p^*$:
   $$\begin{aligned}x = \overline{0} &\Leftrightarrow a = -a^{-1} \\ &\Leftrightarrow a^2 = -1\end{aligned}$$
   $$\begin{aligned}y = \overline{0} &\Leftrightarrow a = a^{-1} \\ &\Leftrightarrow a^2 = 1\end{aligned}$$
   Ainsi $|\Gamma_r| = |\Gamma_1| = p - 3$.

Sous algèbres

Définition, propriétés des sous-algèbres.

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $B \subset A$ est une sous-algèbre de A si c'est un sous-anneau et un sev de A.

De plus si B est de dimension finie

$$B^\times = B \cap A^\times$$

Démonstration

On a évidement $B^\times \subset B \cap A^\times$.

On suppose $b \in B \cap A^\times$, on dispose de $a \in A$, $ab = ba = 1$.

On pose

$$\varphi_b = \begin{cases} B & \rightarrow & B \\ x & \mapsto & bx \end{cases} \in \mathcal{L}(B)$$

Soit $x \in \ker \varphi_b$, on a $bx = 0$ donc $(ab)x = x = 0$.

Donc φ_b bijectif (argument dimensionnel), et $\varphi_b^{-1}(1) = a$ existe et $a \in B$.

Algèbres commutatives intègres de dimension finie

Que peut-on dire d'une algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ commutative et intègre de dimension finie ?

Si $(A, +, \times, \cdot)$ est commutative, intègre et de dimension finie, alors c'est un corps.

Démonstration

Soit $a \in A \setminus \{0\}$, étudions

$$\varphi_a : \begin{cases} A & \to & A \\ x & \mapsto & ax \end{cases} \in \mathcal{L}(A)$$

$$\begin{aligned} \ker \varphi_a &= \{x \in A \mid ax = 0\} \\ &= \{x \in A \mid x = 0\} \quad \text{(par integrité)} \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Et par argument dimensionnel, φ_a bijectif, d'où $\varphi_a^{-1}(a) = a^{-1}$ existe.

Morphisme d’algèbre

Définition, propriétés des morphismes d’algèbres.

Pour A, B deux $\mathbb{K}$-algèbre, une application $\varphi : A \to B$ est un morphisme d’algèbre si c’est un morphisme d’anneau linéaire.

Et dans ce cas $\operatorname{im} \varphi$ est une sous-algèbre de B et $\ker \varphi$ est un idéal et un sev de A.

Dévissage de groupes

Propriétés, outils du dévissage de groupes.

---

1. Soient G et H deux groupes cycliques de cardinaux n et p, $G \times H$ est cyclique ssi $n \wedge p = 1$.
2.

Démonstration

1. - Par contraposé, supposons que $n \wedge p = d > 1$, ainsi $m = n \vee p < np$.

     Pour tout $(x, y) \in G \times H$,

     $$(x, y)^m = (x^m, y^m) = (e_G, e_H)$$

     donc $\mathrm{ord}((x, y)) \mid m < |G \times H|$ qui ne peut être cyclique.

   - Soit $x \in G$ d'ordre n et $y \in H$ d'ordre p. Pour $k \in \mathbb{N}^*$

     $$\begin{aligned} (x, y)^k &\Leftrightarrow (x^k, y^k) = (e_G, e_H) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n \mid k \\ p \mid k \end{cases} \Leftrightarrow np \mid k \\ &\Leftrightarrow G \times H \text{ cyclique} \end{aligned}$$

   - Autre méthode :

     $$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
     $$H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

     $$\begin{aligned} G \times H &\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ &\simeq \mathbb{Z}/(np)\mathbb{Z} \quad \text{cyclique} \end{aligned}$$

2. Soient H, K sous-groupes de G et φ (qui n'est pas forcément un morphisme) tel que

   $$\varphi : \begin{cases} H \times K & \rightarrow & G \\ (h, k) & \mapsto & hk \end{cases}$$

   On note $HK = \varphi(H \times K)$. Soient $(h, k), (h_0, k_0) \in H \times K$

   $$\begin{aligned} & \varphi(h, k) = \varphi(h_0, k_0) \\ \Leftrightarrow\ & hk = h_0 k_0 \\ \Leftrightarrow\ & h_0^{-1} h = k_0 k^{-1} = t \in H \cap K \\ \Leftrightarrow\ & \exists t \in H \cap K, \begin{cases} h = k_0 t \\ k = t^{-1} h_0 \end{cases} \end{aligned}$$

   φ est injectif ssi $H \cap K = \{e_G\}$, c'est automatique si $|H| \wedge |K| = 1$ (en étudiant les ordres et les divisibilités de ceux-ci).

   Dans ce cas $|HK| = |\mathrm{im}\, \varphi| = |H| \cdot |K|$

   Dans le cas général

   $$\left|\varphi^{-1}\{\varphi(h_0, k_0)\}\right| = |H \cap K|$$

Groupe Diédral

Construction et propriétés du groupe diédral.

Construction

Soient $n \geq 2$ et $A_0, \ldots, A_{n-1}$ des points de $\mathbb{R}^2$ d'afixes

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!], A_i : e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

On considère Γ l'ensemble des isométries qui préservent le polygone $A_0, \ldots, A_{n-1}$.

Comme une transformation affine préserve les barycentres, tout élément de Γ préserve l'isobarycentre (l'origine).

On a alors

$$\Gamma \in O\left(\mathbb{R}^2\right)$$

Et donc tout $\gamma \in \Gamma$, est soit une rotation ou une réflexion.

- Si γ est une rotation : $\gamma(A_0) \in \{A_0, \ldots, A_{n-1}\}$ d'où $\gamma = \mathrm{rot}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ pour un $k \in [\![0, n-1]\!]$.

  On note r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$

  $$\gamma = r^k$$

- Si γ est une réflexion

  Soit s la réflexion à l'axe des abscices, $s \in \Gamma$.

  $s \circ \gamma \in \Gamma$ est une rotation car

  $$\det(s \circ \gamma) = (-1)^2 = 1$$

  Ainsi $\exists k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que

  $$s \circ \gamma = r^k \Leftrightarrow \gamma = s \circ r^k$$

Donc

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left\{r^k, sr^k\right\}$$

Groupe

Γ est un sous-groupe de $O\left(\mathbb{R}^2\right)$.

- $|\Gamma| = 2n$
- $\Gamma = <s, r>$

Algèbre engendrée

Pour $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$, définition et propriétés de $\mathbb{K}[a]$.

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$. Si on pose le morphisme d'algèbre

$$\theta_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & A \\ P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k & \mapsto & \sum_{k=0}^{d} a_k a^k \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[a] = \operatorname{im} \theta_a$ qui est la plus petite sous-algèbre de A contenant a.

De plus $\ker \theta_a$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

- Si θ_a est injectif et $\mathbb{K}[a] \simeq \mathbb{K}[X]$ qui est donc de dimension infinie.
- Sinon on dispose d'un unique polynôme π_a unitaire tel que $\ker \theta_a = \pi_a \mathbb{K}[X]$ (par principalité).

  π_a est appelé polynôme minimal de a, $\mathbb{K}[a]$ est de dimension $d = \deg \pi_a$ et $(1, a, \dots, a^{d-1})$ en est une base.

Démonstration

- Soit $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $d = \deg B$, par l'éxistence et l'unicité de la division euclidienne on a

  $$\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et G un supplémentaire de $\ker u$, montrons que $u|_G$ est un isomorphisme de $G \to \operatorname{im} u$.

  $\ker u|_G = \ker u \cap G = \{0\}$ par supplémentarité.

  Soit $y \in \operatorname{im} u$, $y = u(x)$, $x = a + b$ avec $(a, b) \in \ker u \times G$.

  $$u(x) = \underbrace{(a)}_{0} + u(b)$$

  $$y = u|_G(b)$$

  Soit $y \in \operatorname{im} u|_G$, $y = u|_G(x) = u(x)$.

  D'où $\operatorname{im} u = \operatorname{im} u|_G$.

- Si θ_a est injectif, c'est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\operatorname{im} \theta_a = \mathbb{K}[a]$.
- Sinon on a π_a de degré d et

  $$\mathbb{K}[X] = \pi_a \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

  $\mathbb{K}_{d-1}$ est un supplémentaire de $\ker \theta_a$, ainsi $\theta_a|_{\mathbb{K}_{d-1}[X]}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X] \to \mathbb{K}[a]$, d'où

  $$\dim \mathbb{K}[a] = d$$

  Et l'image de la base cannonique de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ par $\theta|_{\mathbb{K}_{d-1}[X]}$ est

  $$(1, a, \dots, a^{d-1})$$

  Qui est donc une base de $\mathbb{K}[a]$.

Condition d'intégrité d'une sous-algèbre engendrée

Pour A une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$ tel que θ_a n'est pas injectif, sous quelle condition $\mathbb{K}[a]$ est elle intègre ?

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre et $a \in A$ tel que θ_a n'est pas injectif.

$\mathbb{K}[a]$ est intègre ssi π_a est irréductible.

Démonstration

- Si π_a irréductible, soit $x = P(a)$, $y = Q(a) \in \mathbb{K}[a]$ tels que $xy = 0$.

$$PQ(a) = 0$$
$$\pi_a \mid PQ$$

  Donc par le lemme d'Euclide,

$$\text{ou} \begin{array}{l} \pi_a \mid P \Leftrightarrow x = 0 \\ \pi_a \mid Q \Leftrightarrow y = 0 \end{array}$$

- Par contraposé, si π_a non irréductible, $\pi_a = PQ$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non inversible ou associé à π_a.

$$\underbrace{P(a)}_{\neq 0}\underbrace{Q(a)}_{\neq 0} = \pi_a(a) = 0$$

  D'où $\mathbb{K}[a]$ non intègre.

inversibilité des éléments d'une sous-algèbre engendrée

Soit $\mathbb{K}[a]$ une sous-algèbre de A de dimension finie pour $a \in A$, sous quelle condition $x \in \mathbb{K}[a]$ est il inversible ?

Soit $\mathbb{K}[a]$ une sous-algèbre de A de dimension finie pour $a \in A$. Soit $x = P(a) \in \mathbb{K}[a]$.

$$x \in \mathbb{K}[a]^\times \text{ ssi } P \wedge \pi_a = 1$$

On en déduit que $\mathbb{K}[a]$ est un corps ssi π_a est irréductible.

Démonstration

Par propriété de sous-algèbre

$$\mathbb{K}[a]^\times = A^\times \cap \mathbb{K}[a]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{K}[a]^\times &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{K}[a], xy = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], PQ(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], \pi_a \mid (PQ - 1) \\ &\Leftrightarrow \exists Q, V \in \mathbb{K}[X], PQ - 1 = \pi_a V \\ &\Leftrightarrow \exists Q, V \in \mathbb{K}[X], PQ - \pi_a V = 1 \\ &\Leftrightarrow P \wedge \pi_a = 1 \end{aligned}$$

Ainsi si π_a irréductible, pour tout $x = P(a) \in \mathbb{K}[a] \setminus \{0\}, P \wedge \pi_a = 1$ d'où x inversible et $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

Et si $\mathbb{K}[a]$ est un corps, alors il est intègre et π_a irréductible.

Algèbres et extensions de corps

Propriétés des algèbres en lien avec les extensions de corps.

Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps. On remarque que $\mathbb{L}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

1. Soit $a \in \mathbb{L}$ qui admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{K}[X]$ et π_a son polynôme minimal.

   π_a est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

Démonstration

1. $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\pi_a = PQ$.

   Dans $\mathbb{L}$

   $$P(a)Q(a) = \pi_a(a) = 0$$

   Donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_a \mid P$ ou $Q(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_a \mid Q$ donc π_a irréductible.

   Ainsi $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

Nombres algébriques

Définitions et propriétés des nombres algébriques sur un corps $\mathbb{K}$.

Soit $a \in A$ une $\mathbb{K}$-algèbre, on dit que a est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{K}[X]$.

Par défaut a algébrique veut dire algébrique sur $\mathbb{Q}$., quitte à les échangers prenons $P(a) = 0$, $P \in \ker \theta_a = \pi_a \mathbb{K}[X]$.

Propriété

1. Soit $a \in \mathbb{L}$ une extension de corps de $\mathbb{K}$, a algébrique sur $\mathbb{K}$.

   Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, $P = \pi_a$ ssi $P(a) = 0$ et P irréductible sur $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

1. Sens directe connus. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, irréductible et annulateur de a.

   On a $\pi_a \mid P$, or P irréductible donc P et π_a sont associé, or tout deux unitaires donc $P = \pi_a$.

Théorème de la base téléscopique

Énoncer et démonstration du théorème de la base téléscopique.

Soit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps tel que $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Soient

- E un $\mathbb{L}$-ev, (et donc un $\mathbb{K}$-ev).
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E sur $\mathbb{L}$.
- $z = (z_1, \dots, z_p)$ base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$.

Alors $F = (z_i e_j)_{\substack{i \in [\![1,p]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}}$ est une base de E sur $\mathbb{K}$

Ainsi $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{L}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.

Démonstration

- Soit $\omega \in E$, on dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$ tels que

  $$\omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$$

  On dispose de $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{[\![1,p]\!]^{[\![1,n]\!]}}$

  $$\forall j \in [\![1,n]\!], \lambda_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} z_i$$

  Ainsi

  $$\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ij} z_i e_j$$

- Soit $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{[\![1,p]\!]^{[\![1,n]\!]}}$ tel que

  $$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_{ij} z_i}_{\lambda_j \in \mathbb{L}} e_j = 0$$

  $$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$$

  Donc pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_j = 0$.

  $$\lambda_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} z_i = 0$$

  Donc par liberté de z, $a_{ij} = 0$ pour tout i, j.

Clôture algébrique des rationnels

Propriétés de la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$.

Notons $\mathbb{K}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{C}$ algébriques sur $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{K}$ est un corps algébriquement clos.

Démonstration : corps

- Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $\alpha\beta, \alpha + \beta \in \mathbb{K}$.

  On utilise le fait que z algébrique dans $\mathbb{L}$ ssi $\mathbb{L}[z]$ de dimension finie sur $\mathbb{L}$ (car z admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{L}[X]$).

  - Donc $\mathbb{Q}[\alpha]$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}$,
  - β algébrique sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\alpha]$ donc algébrique sur $\mathbb{Q}[\alpha]$.
  - Donc $\mathbb{Q}[\alpha][\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}[\alpha]$, et donc par le théorème de la base téléscopique, sur $\mathbb{Q}$.
  - Or $\mathbb{Q}[\alpha + \beta], \mathbb{Q}[\alpha\beta] \subseteq \mathbb{Q}[\alpha][\beta]$, donc $\mathbb{Q}[\alpha + \beta]$ et $\mathbb{Q}[\alpha\beta]$ sont de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.
- Soit $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, soit π_α son polynôme minimal et $d = \deg \pi_\alpha$.

  $$\underbrace{X^d \pi_\alpha\left(\frac{1}{X}\right)}_{\in \mathbb{Q}[X]} \text{ annule } \frac{1}{\alpha}$$

  Donc $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}$
- $1 \in \mathbb{K}$ car $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$.

Démonstration : clôture

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ racine de $\mathbb{K}$, montrons que $\alpha \in \mathbb{K}$.

Pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$ donc $\mathbb{Q}[a_k]$ de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Par récurrence on a

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}[a_0][a_1]\cdots[a_d]$$

De dimension finie sur $\mathbb{Q}$.

Comme $P \in \mathbb{L}[X]$ annule α, $\mathbb{L}[\alpha]$ est de dimension finie sur $\mathbb{L}$ et donc sur $\mathbb{Q}$, id est $\alpha \in \mathbb{K}$.

Exercice : Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P.

On écris

$$P = c\prod_{k=1}^{N}(X - a_k)^{m_k}$$

Soit b une racine de P'.

Si $b \in \{a_1, \ldots, a_N\}$, b est nécéssairement dans leur enveloppe convexe.

Sinon

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{X - a_k}$$

$$0 = \frac{P'}{P}(b) = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{b - a_k} = \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{\overline{b - a_k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{|b - a_k|^2}(b - a_k)$$

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{N} \frac{a_k m_k}{|b-a_k|^2}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{m_k}{|b-a_k|^2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \lambda_k a_k$$

Où $\lambda_k = \frac{\frac{a_k m_k}{|b-a_k|^2}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{|b-a_i|^2}}$ (on a alors $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$).

b est donc un barycentre à coéfficients positifs des $a_1, \ldots, a_n$ et est donc dans leur enveloppe convexe.

Exercice : Dénombrement de morphismes

1. Dénombrer les morphismes de G_1 vers G_2, avec $|G_1| \wedge |G_2| = 1$.
2. Dénombrer les morphismes de G_1 vers G_2 où G_1 et G_2 sont cyclique.
3. Même chose avec les injections et les surjections.

Remarque générale

Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ morphisme de groupe, $x \in G_1$

$$\varphi(x)^{\mathrm{ord}(x)} = e_{G_2}$$
$$\text{donc } \mathrm{ord}(\varphi(x)) \mid |G_2|$$
$$\text{et } \mathrm{ord}(\varphi(x)) \mid |G_1|$$

Ainsi $\mathrm{ord}(\varphi(x)) \mid |G_1| \wedge |G_2|$.

Exercices

1. Soit $\varphi : G_1 \to G_2$ morphisme, $x \in G_1$. Par la remarque ci dessus $\mathrm{ord}(\varphi(x)) \mid p \wedge q = 1$ donc $\varphi(x) = 0$, il n'y a donc que morphisme le morphisme triviale.
2. Notons $G_1 = <a>$, posons
$$\theta : \begin{cases} \hom(G_1, G_2) & \to & G_2 \\ \varphi & \mapsto & \varphi(a) \end{cases}$$
Qui est injectif car tout morphisme est uniquement déterminé par son image du générateur a.

   Pour tout $\varphi \in \hom(G_1, G_2)$ on a
$$\varphi(a)^{|G_1|} = \varphi\left(a^{|G_1|}\right) = \varphi\left(e_{G_1}\right) = e_{G_2}$$
D'où
$$\mathrm{im}\, \theta \subset \left\{y \in G_2 \mid y^{|G_1|} = e_{G_2}\right\}$$
Soit $y \in \mathrm{im}\, \theta$ posons
$$\varphi : \begin{cases} G_1 & \to & G_2 \\ x = a^k & \mapsto & y^k \end{cases}$$
Qui ne dépend pas du k choisi, soit $x = a^k = a^l$:
$$a^{k-l} = e_{G_1}$$
$$\text{donc } |G_1| \mid k - l$$
$$\text{et } y^{k-l} = e_{G_2}$$
$$\text{d'où } y^k = y^l$$
Donc $\theta(\varphi) = y$.
$$\begin{aligned} &|\hom(G_1, G_2)| \\ &= |\mathrm{im}\, \theta| \\ &= \left|\left\{y \in G_2 \mid y^{|G_1|} = e_{G_2}\right\}\right| \\ &= |\{y \in G_2 \mid \mathrm{ord}(y) \mid |G_1|\}| \\ &= \biguplus_{d \mid |G_1|} \{y \in G_2 \mid \mathrm{ord}(y) = d\} \\ &= \sum_{d \mid |G_1| \wedge |G_2|} \varphi(d) \\ &= |G_1| \wedge |G_2| \end{aligned}$$
3. • Pour les injections on veut $\varphi \in \hom(G_1, G_2)$ tels que $\ker \varphi = \{e_{G_1}\}$.

   Pour $k \in [\![1, |G_1| - 1]\!]$,
$$\varphi(a)^k = \varphi\left(a^k\right) \neq 0$$
$$\mathrm{ord}\, \varphi(a) = |G_1|$$
Si $|G_1| \nmid |G_2|$, G_2 ne contient pas éléments d'ordre $|G_1|$ donc auncune injection.

   Si $|G_1| \mid |G_2|$, il y a $\varphi(|G_1|)$ éléments d'ordre $|G_1|$, donc autant d'injections.

   • Pour les surjections on veut $\mathrm{ord}\, \varphi(a) = |G_2|$, donc
$$\begin{cases} 0 & \text{si } |G_2| \nmid |G_1| \\ \varphi(|G_2|) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice : Union de sous espaces vectoriels

E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1. Soit F, G deux sev de E, montrer que $F \cup G$ sev ssi $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
2. Supposons $\mathbb{K}$ infini, soit $F_1, \dots, F_n$ n sevs, montrer que si $\bigcup_{k=1}^n F_k$ est un sev, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que
$$\bigcup_{k=1}^n F_k = F_i$$

---

1. Soit F, G sevs de E un $\mathbb{K}$-ev tel que $F \cup G$ est un sev.

   Si $F \not\subseteq G$, on pose $z \in F \setminus G$, soit $x \in G$.
$$x + z \in F \cup G$$
   $x + z \notin G$ car sinon
$$F \setminus G \ni z = \underbrace{(x+z)}_{\in G} - \underbrace{x}_{\in G} \in G$$
   Donc $x + z \in F$ d'où
$$x = (x+z) - z \in F$$
   Et $G \subseteq F$.
2. Soient $F_1, \dots, F_n$ sevs de E tels que $\bigcup_{k=1}^n F_k$ est un sev.

   Notons $U_m = \bigcup_{k=1}^m F_k$ pour $m \in \mathbb{N}$.

   On à déjà fait le cas $n = 2$ et le cas $n = 1$ est trivial.

   Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

   Si $U_n \subseteq F_{n+1}$ alors on a fini.

   Si $F_{n+1} \subseteq U_n$ alors par hypothèse de récurrence, on dispose de $i \in [\![1, n]\!]$
$$U_{n+1} = U_n = F_i$$
   Sinon, on dispose de
$$x \in F_{n+1} \setminus U_n \subseteq U_{n+1}$$
$$y \in U_n \setminus F_{n+1} \subseteq U_{n+1}$$
   Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
$$z_k = x + \lambda_k y$$
   Par le lemme des tiroirs, on dispose de $k \neq l$ et j tel que $z_k, z_l \in F_j$

   Si $j = n + 1$
$$z_k - z_l = \underbrace{(\lambda_k - \lambda_l)}_{\neq 0} y \in F_{n+1}$$
   Et $y \in F_{n+1}$ impossible.

   Si $j \in [\![1, n]\!]$
$$\lambda_l z_k - \lambda_k z_l = \underbrace{(\lambda_l - \lambda_k)}_{\neq 0} x \in F_j$$
   Et $x \in F_j$ impossible.

Somme directe de sous espaces vectoriels

Définition et propriétés de somme directe de sev.

Soient $F_1, \dots, F_n$ sev de E un $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'ils sont en somme directe si pour tout $x \in \sum_{k=1}^{n} F_k$

$$\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} F_k,\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Il y a équivalence entre $F_1, \dots, F_n$ en somme directe et

1. $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^{n} F_k,\ \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in [\![1, n]\!],\ x_k = 0.$
2. $\forall i \in [\![1, n]\!],\ F_i \cap \left(\sum_{i \neq k}^{n} F_k\right) = \{0\}$
3. $F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k = \{0\}$

En dimension finie

4. $\dim \sum_{k=1}^{n} F_n \leq \sum_{k=1}^{n} \dim F_n$ avec égalité ssi les $F_1, \dots, F_n$ sont en somme directe.

Démonstration

1. $\Rightarrow$ il s'agit d'un cas particulier pour $x = 0$.

   $\Leftarrow$ Supposons $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k'$

   Alors $\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_k') = 0$ donc $x_k = x_k'$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

3. $\Rightarrow$ Soit $x \in F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n-1} 0 + x \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 0 \quad \text{car } x \in \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k \end{aligned}$$

   Donc par unicité de la décomposition $x = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

   $\Leftarrow$ Soit $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \in F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k$$

   Donc $x_n = 0$ et $\sum_{k=1}^{n-1} x_k = 0$ donc $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Espaces supplémentaires

Définition, propriétés des espaces supplémentaires.

Soient $F_1, \ldots, F_n$ sevs de E un $\mathbb{K}$-ev. On dit qu'ils sont supplémentaires si

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$$

Et on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \sum_{k=1}^{n} F_k \\ \dim(E) = \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_k = \bigoplus_{k=1}^{n} F_k \\ \dim(E) = \sum_{k=1}^{n} \dim(F_k) \end{cases}$$

Notations de matrices

Notations de matrices : changements de bases, matrices d'un endomorphisme, …

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$, $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ bases de E et $f = (f_1, \dots, f_p)$ base de F.

Applications linéaires

$$\mathcal{M}_{e,f}(u) = \mathcal{M}_{e \leftarrow f}(u) = \mathcal{M}_e^f(u) \in M_{pn}(\mathbb{K})$$

Et la matrice est alors

$$\mathcal{M}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Où pour $j \in [\![1, n]\!]$

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} f_k$$

Endomorphismes

$$\mathcal{M}_e(u) = \mathcal{M}_{e \leftarrow e}(u) = \mathcal{M}_e^e(u)$$

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} f_k$$

Changement de base

$$P_{e \to e'} = \mathcal{M}_e(e') = \mathcal{M}_{e \leftarrow e'}(\mathrm{id})$$

Exercice : Noyaux et images itérées

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev. Que peut on dire des suites $(\ker u^k)_k$ et $(\operatorname{im} u^k)_k$?

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev.

Dimension quelconque

- Si $\ker u^k = \ker u^{k+1}$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors pour tout $n \geq k$, $\ker u^k = \ker u^n$.
- De même pour les images.

Dimension finie

En notant $n = \dim E$ on a

$$d_k = \dim \ker u^k \in [\![0, n]\!] \nearrow$$
$$r_k = \operatorname{rg} u^k \in [\![0, n]\!] \searrow$$

Ces deux suites sont donc stationnaires, on peut poser

$$m_K = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$
$$m_I = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{im} u^k = \operatorname{im} u^{k+1}\}$$

On a de plus $m_K = m_I = m$.

Et en notant

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k = \ker u^m$$
$$I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{im} u^k = \operatorname{im} u^m$$

Qui sont les valeurs auquelles les suites stationnent, on a

- $K \oplus I = E$
- K, I stables par u
- $u|_K^K$ est nilpotent
- $u|_I^I$ est inversible.
- Si $E = K' \oplus I'$ avec K', I' stables par u, $u|_{K'}^{K'}$ nilpotent et $u|_{I'}^{I'}$ inversible, alors $K' = K$ et $I' = I$.

Démonstration

- Soit $l \geq k$, on a évidement $\ker u^l \subseteq \ker u^{l+1}$.

  Soit $x \in \ker u^{l+1}$:

  $$u^{k+1}(u^{l-k}(x)) = 0$$
  $$u^{l-k}(x) \in \ker u^{k+1} = \ker u^k$$
  $$u^k(u^{l-k}(x)) = 0$$
  $$x \in \ker u^l$$

- Soit $l \geq k$, on a évidement $\operatorname{im} u^{l+1} \subseteq \operatorname{im} u^l$.

  Soit $u^l(x) = y \in \operatorname{im} u^l$:

  $$u^{l-k}(u^k(x)) = y$$
  $$u^k(x) \in \operatorname{im} u^k = \operatorname{im} u^{k+1}$$
  $$u^k(x) = u^{k+1}(x')$$
  $$u^{l-k}(u^{k+1}(x')) = y$$
  $$y \in \operatorname{im} u^{l+1}$$

Dimension finie

- Par le théorème de rang on a $d_k = n - r_k$, donc si r_k est constante à partire du rang m_I, alors d_k est aussi constante a partire de ce rang, donc $m_K = m_I$.
- Soit $y \in K \cap I$, on dispose de $x \in E$ tel que

  $$u^m(x) = y$$
  $$u^m(y) = 0$$
  $$u^{2m}(x) = 0$$
  $$x \in \ker u^{2m} = \ker u^m$$
  $$u^m(x) = y = 0$$

  donc $K \oplus I = E$.

- Soit $x \in K = \ker u^m$

  $$u^m(u(x)) = u^{m+1}(x) = 0$$

  donc $u(x) \in K$.

- Soit $y \in I = \operatorname{im} u^m$, on dispose de $x \in E$ tel que

  $$u^m(x) = y$$
  $$u^{m+1}(x) = u(y) \in \operatorname{im} u^m$$
  $$u(y) = u^m(x')$$

  et $u(y) \in I$.

- Notons $\tilde{u} = u|_K^K$ l'endomorphisme induit par u sur K.

  $$\tilde{u}^m(K) = u^m(K) = \{0\}$$

  Donc $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice m.

- Notons $\tilde{u} = u\,|_I^I$ l'endomorphisme induit par u sur I.

  $$\begin{aligned}\tilde{u}(I) &= u(\operatorname{im} u^m) = \operatorname{im} u^{m+1} \\ &= \operatorname{im} u^m = I\end{aligned}$$

  Donc $\tilde{u}$ est inversible.

- Soit $K' \oplus I' = E$ qui respectent les hypothèses.

  On dispose de $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

  $$u^d(K') = \{0\}$$
  $$K' \subseteq \ker u^d \subset K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k$$

  Et on a

  $$u(I') = I'$$
  $$u^m(I') = I'$$
  $$I' \subseteq \operatorname{im} u^m = I$$

  Donc

  $$\dim K' \leq \dim K$$
  $$\dim I' \leq \dim I$$

  Et on obtient l'égalité par supplémentarité, d'où $K' = K$ et $I' = I$.

Développement du déterminant par ligne ou par colonne

Formules et définitions du développement du déterminant par ligne ou par colonne.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

- pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

- pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

Où $\tilde{A}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice A privée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

On appelle $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ cofacteur.

On appelle $\mathrm{com}(A)$ la matrice des cofacteurs.

Et on a

$$A \cdot \mathrm{com}(A)^T = \det(A) I_n$$

Exercice : rang d'une comatrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 3$), calculer $\operatorname{rg} \operatorname{com}(A)$ en fonction de $\operatorname{rg} A$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 3$.

- Si $\operatorname{rg} A = n$, $A \in GL_n(\mathbb{K})$ donc $\operatorname{com} A \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\operatorname{rg} \operatorname{com}(A) = n$.
- Si $\operatorname{rg} A \leq n - 2$, pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$ la matrice $\tilde{A}_{ij}$ extraite de A privée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est de rang inférieur à $n - 2$ et n'est donc pas inversible, $\operatorname{com} A = 0$ et $\operatorname{rg} \operatorname{com}(A) = 0$.
- Si $\operatorname{rg} A = n - 1$, on dispose d'une matrice éxtraite de taille $n - 1$ inversible, donc au moins un des cofacteur est non nul d'où $\operatorname{rg} \operatorname{com}(A) \geq 1$.

  De plus

  $$A_T \operatorname{com}(A) = \det(A) I_n = 0$$

  Donc $\operatorname{im} \operatorname{com}(A) \subseteq \ker A^T$ et $\dim \ker A^T = 1$ d'où $\operatorname{rg} \operatorname{com}(A) \leq 1$.

Algorithme du pivot de Gauss

Déscription de l'algorithme du pivot de Gauss, et propriétés qui en découlent.

Opérations, représentation matricielle

Notons $(E_{ij})_{ij}$ la base cannonique de $M_n(\mathbb{K})$. On a

$$E_{ik}E_{lj} = \delta_{kl}E_{ij}$$

Pour $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

$$E_{kl}^{(n)}A = \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ & \vdots \\ L_l & k \\ & \vdots \\ & n \end{array}\right)$$

$$AE_{kl}^{(p)} = \left(\frac{C_k}{1 \ \cdots \ l \ \cdots \ n}\right)$$

Ainsi on peut définir

- $T_{kl}(\lambda) = I_n + \lambda E_{kl}^{(n)}$ la transvection sur les lignes ($L_k \leftarrow L_k + \lambda L_l$)
- $T'_{kl}(\lambda) = I_p + \lambda E_{kl}^{(p)}$ la transvection sur les colonnes ($C_l \leftarrow C_l + \lambda C_k$)
- $P_{kl} = I_n - E_{kk}^{(n)} - E_{ll}^{(n)} + E_{kl}^{(n)} + E_{lk}^{(n)}$ la transposition de lignes ($L_l \leftrightarrow L_k$)
- $P_{kl} = I_p - E_{kk}^{(p)} - E_{ll}^{(p)} + E_{kl}^{(p)} + E_{lk}^{(p)}$ la transposition de colonnes ($C_l \leftrightarrow C_k$)

Algorithme

Prenons $A = (c_1 \ \cdots \ c_n) \in M_n(\mathbb{K})$

- Si $A = 0$ fini.
- Soit $j = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid C_k \neq 0\}$

$$A^{(1)} : \quad C_j \leftrightarrow C_1$$

- Soit $i = \min\{k \in [\![1, n]\!] \mid a_{i1} \neq 0\}$
  - Si $i = 1$ on effectue $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et on prend $i = 2$.

$$A^{(2)} : \quad L_1 \leftarrow L_1 + \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{i1}}\right)L_i$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & * & \\ * & & & \end{array}\right)$$

- Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$ on effectue

$$A^{(i+1)} : \quad L_i \leftarrow L_i - a_{i1}L_1$$

  Ainsi

$$A^{(n+1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

On repète l'algorithme sur $\tilde{A}$, on obtient alors

$$\tilde{\tilde{A}} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & & (*) & * & & & \\ & \ddots & & \vdots & & (*) & \\ & & 1 & * & & & \\ \hline & & & \mu & * & \cdots & * \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Avec $\mu \neq 1$ ssi le blocs de zéros à la fin est de taille nulles (on ne dispose pas des lignes nécéssaires pour se ramener à $\mu = 1$).

On peut alors finalement effectuer pour tout $i \in [\![1, \operatorname{rg} A]\!]$, puis pour $j \in [\![i+1, n]\!]$

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} : \quad C_j \leftarrow C_j - \frac{\tilde{\tilde{A}}_{ij}}{\tilde{\tilde{A}}_{ii}}C_i$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que si A est inversible, les transpositions sont inutiles car il n'éxiste pas de colonnes nulles.

Propriétés

- Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$.
- Les transvections et une dilatation (pour atteindre n'importe quel déterminant) suffisent à engendrer $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Intersection d'hyperplans

Propriétés sur les intersections d'hyperplans.

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^p$

$$\begin{aligned}\dim \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k &= n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \\ &\geq n - p\end{aligned}$$

Démonstration

On montre l'inégalité par récurrence sur p.

Montrons l'égalité.

Quitte à extraire et renuméroter, $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre.

Or pour tout $k \in [\![r+1, p]\!]$,

$$\varphi_k \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

$$\text{Donc } \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi_k$$

$$\text{D'où } \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^{r} \ker \varphi_k$$

Donc (cf. lemme sur la liberté d'une famille de formes linéaires)

$$\theta : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^r \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix}\end{array}\right. \quad \text{surjective}$$

$$\ker \theta = \bigcap_{k=1}^{r} \ker \varphi_k$$

Donc par le théorème du rang

$$\dim\left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k\right) = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

Liberté d'une famille de l'espace dual

Démonstration d'une CNS pour la liberté d'une famille de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ où E est un $\mathbb{K}$-ev.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre ssi

$$\theta : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{K}^p \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{surjective}$$

Démonstration

- Supposons θ surjective, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

  $$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k = 0$$

  Soit $i \in [\![1, p]\!]$, on dispose de $x \in E$ tel que

  $$\theta(x) = \left(1 \left| \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ p \end{matrix} \right. \right) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_i(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix}$$

  Ainsi

  $$\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k \right)(x) = 0 = \lambda_i$$

- Par contraposé supposons θ non surjective : $\operatorname{rg} \theta \leq p - 1$.

  On dispose de H hyperplan tel que $\operatorname{im} \theta \subseteq H$. Donc on dispose de $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}$ tels que

  $$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \,\middle|\, \sum_{k=1}^{p} a_k x_k = 0 \right\}$$

  Donc pour tout $x \in E$,

  $$\theta(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \in \operatorname{im} \theta \subseteq H$$

  $$\sum_{k=1}^{p} a_k \varphi_k(x) = 0$$

  Donc $\sum_{k=1}^{p} a_k \varphi_k = 0$ et la famille est liée

Condition de liberté d'une forme linéaire à une famille

Soit $\varphi_1, ..., \varphi_p, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Démonstration d'une CNS pour que $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

Soit $\varphi_1, ..., \varphi_p, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Pour tout $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$$\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$$

$$\text{ssi } \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$$

Démonstration

- Si $\varphi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$, on dispose de $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

  $$\psi = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k$$

  D'où

  $$\psi\left(\bigcap_{k=1}^{p} \ker \psi_p\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \varphi_k\left(\bigcap_{i=1}^{p} \ker \varphi_p\right)$$
  $$= \{0\}$$

  Et donc $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_p \subseteq \ker \psi$.

- Supposons $\bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_p \subseteq \ker \psi$.

  Quitte à extraire et renuméroter, $(\varphi_1, ..., \varphi_r)$ est libre.

  Or pour tout $k \in [\![r+1, p]\!]$,

  $$\varphi_k \in \mathrm{Vect}\,(\varphi_1, ..., \varphi_r)$$

  $$\text{Donc } \bigcap_{i=1}^{r} \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi_k$$

  $$\text{D'où } \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^{r} \ker \varphi_k$$

  Donc

  $$\theta : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K}^r \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{surjective}$$

  Posons alors

  $$\theta' : \begin{cases} E & \to & \mathbb{K}^{r+1} \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

  Or

  $$\bigcap_{k=1}^{r} \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^{p} \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$$

  $$\text{Donc } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{im}\,\theta'$$

  La famille $(\varphi_1, ..., \varphi_r, \psi)$ est liée d'où $\psi \in \mathrm{Vect}(\varphi_1, ..., \varphi_p)$.

Base duale, antéduale

Définitions, propriétés, démonstrations autours des bases duals.

Base duale

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de e.

Il existe une unique famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$ tel que

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Cette famille est appelée base duale de e et est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Dans ce cas

$$\forall x \in E,\ x = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) e_k$$

$$\forall \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}),\ \psi = \sum_{k=1}^{n} \psi(e_k) \varphi_k$$

Base antéduale

Pour toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ en est la base duale.

Démonstration

- Existence / Unicité : car les formes linéaire sont uniquement déterminés par leurs image d'une base.
- Génératrice : Soit $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

  pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

  $$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} \psi(e_k) \varphi_k\right)(e_i) &= \sum_{k=1}^{n} \psi(e_k) \varphi_k(e_i) \\ &= \psi(e_k)\end{aligned}$$

  $$\text{Donc}\ \ \psi = \sum_{k=1}^{n} \psi(e_k) \varphi_k$$

  Donc $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base.
- Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in E, i \in [\![1, n]\!]$

  $$\begin{aligned}\varphi_i(x) &= \varphi_i\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k \delta_{ik} = x_i\end{aligned}$$
- Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

  $$\theta : \left\{\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix}\varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x)\end{pmatrix}\end{array}\right. \quad \text{surjective}$$

  Par liberté de la famille, donc bijective par argument dimensionnel.

  Notons $(b_1, \dots, b_n)$ la base cannonique de $\mathbb{K}^n$.

  La famille $\left(e_k = \theta^{-1}(b_k)\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$ est l'unique base de E tel que

  $$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Lemme de factorisation

Énoncé et démonstration du lemme de factorisation en algèbre linéaire.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(E, G)$, dans ce cas

$$\ker u \subseteq \ker v$$
$$\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, G),\ v = w \circ u$$

   (Si u est inversible $w = v \circ u^{-1}$).

2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(G, F)$, dans ce cas

$$\operatorname{im} v \subseteq \operatorname{im} u$$
$$\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E), v = u \circ w$$

Démonstration

1. • Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $v = w \circ u$.

$$\begin{aligned} v(\ker u) &= w(u(\ker u)) \\ &= w(\{0\}) = 0 \end{aligned}$$

   D'où $\ker u \subseteq \ker v$.

   • Supposons que $\ker u \subseteq \ker v$.

   Soient H, K tels que

$$\ker u \oplus H = E$$
$$\operatorname{im} u \oplus K = F$$

   Posons

$$\tilde{u} : \begin{cases} H & \rightarrow & \operatorname{im} u \\ x & \mapsto & u(x) \end{cases}$$
$$\ker \tilde{u} = \ker u \cap H = \{0\}$$
$$\dim H = \operatorname{rg} u$$

   Donc $\tilde{u}$ inversible.

   On peut donc écrire

$$w : \begin{cases} F = \operatorname{im} u \oplus K & \rightarrow & G \\ x = y \quad\quad + z & \mapsto & v \circ \tilde{u}^{-1}(y) \end{cases}$$

   Soit $x = y + z \in E = \ker u \oplus H$.

$$\begin{aligned} w \circ u(x) &= v\big(\tilde{u}^{-1}(u(z))\big) \\ &= v(z) \\ v(x) &= \underbrace{v(y)}_{0} + v(z) \end{aligned}$$

2. • Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{L}(G, E)$ tel que $v = u \circ w$

$$v(E) = u \circ w(E) \subseteq u(E)$$

   D'où $\operatorname{im} v \subseteq \operatorname{im} u$.

   • Supposons que $\operatorname{im} v \subseteq \operatorname{im} u$.

   Soit H tel que $\ker u \oplus H = E$.

$$\tilde{u} : \begin{cases} H & \rightarrow & \operatorname{im} u \\ x & \mapsto & u(x) \end{cases}$$
$$w : \begin{cases} G & \rightarrow & E \\ x & \mapsto & \tilde{u}^{-1} \circ v(x) \end{cases}$$

   On a bien pour $x \in E$

$$u \circ w(x) = \tilde{u}\big(\tilde{u}^{-1}(v(x))\big) = v(x)$$

Vandermonde, interpolation de Lagrange

Définitions, propriétés et démonstrations de l'interpolation de Lagrange et des matrices des Vandermonde.

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \end{array} \right. \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1})$$

Pour tout $P \in \ker \theta$,

$$P(a_0) = P(a_1) = \cdots = P(a_n) = 0$$

Donc P est de degré n avec $n+1$ racines distinctes, d'où $P = 0$.

Donc θ est un isomorphisme.

Notons

$$e = (e_0, \dots, e_n)$$
$$c = (1, X, \dots, X^n)$$

Les bases cannoniques de $\mathbb{K}^{n+1}$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \theta^{-1}(e_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - a_i}{a_k - a_i} = L_k(X)$$

La matrice de θ dans les bases cannoniques est appelée matrice de Vandermonde de $a_0, \dots, a_n$.

$$\mathcal{M}_{e \leftarrow c}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Sont déterminant vaut

$$\begin{aligned} V(a_0, \dots, a_n) &= \det(\mathcal{M}_{e \leftarrow c}(\theta)) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

Démonstration

Par récurrence sur n, initialisée aisément pour $n = 1$.

On suppose la formule pour un $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} P(X) &= V(a_0, \dots, a_n, X) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n+1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+j} X^j V_j \end{aligned}$$

Où V_j est le déterminant mineur en $(n+2, j+1)$. De plus

$$\deg P \leq n + 1$$
$$\operatorname{cd} P = V(a_0, \dots, a_n) \neq 0$$

De plus pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P(a_k) = 0$ donc

$$\begin{aligned} P &= V(a_0, \dots, a_n) \prod_{k=0}^{n} (X - a_k) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{k=0}^{n} (X - a_k) \end{aligned}$$

Ainsi on peut calculer

$$\begin{aligned} P(a_{n+1}) &= V(a_0, \dots, a_{n+1}) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{k=0}^{n} (a_{n+1} - a_k) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

Exercice : endomorphisme qui stabilise toutes les droites

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise toute les droites, qui dire de u ?

Par définition pour tout $x \in E,\ u(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$.

Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

- Si (x, y) est liée, $y = ax$

$$\lambda_y ax = u(y) = au(x) = \lambda_x ax$$
$$\lambda_y = \lambda_x$$

- Sinon (x, y) est libre

$$\lambda_{x+y}(x + y) = u(x + y) = u(x) + u(y)$$
$$\lambda_{x+y} x + \lambda_{x+y} y = \lambda_x x + \lambda_y y$$
$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

Donc pour tout $x \in E, \lambda_x = \lambda$ et $u = \lambda\, \mathrm{id}$.

Valeurs propres, espaces propres

Définitions, caractérisation, démonstration autour des valeurs propres et des espaces propres.

Soit $u \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$, il y a équivalence entre

1. $\exists x_0 \in E \setminus \{0\},\ u(x_0) = \lambda x_0$
2. $\ker(u - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0\}$
3. $u - \lambda \operatorname{id} \notin \mathrm{GL}(E)$

On dit alors que λ est une valeur propre de u, on appelle sous-espace propre de u pour la valeur propre λ

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} &\exists x_0 \in E \setminus \{0\},\ u(x_0) = \lambda x_0 \\ \Leftrightarrow\ &\exists x_0 \in \ker(u - \lambda \operatorname{id}) \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow\ &u - \lambda \operatorname{id} \notin \mathrm{GL}(E) \quad \left(\substack{\text{dimension}\\\text{finie}}\right) \end{aligned}$$

Somme directe des sous-espaces propres

Démonstration du fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

Soit $\left(x_1, \ldots, x_p\right) \in \prod_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u)$ tels que $\sum_{k=1}^{p} x_k = 0$.

Par recurrence on montre que pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

$$0 = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) x_k$$

En particulier avec $P = L_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a

$$0 = \sum_{k=1}^{p} L_i(\lambda_k) x_k = x_i$$

On appelle spèctre de u

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre}\}$$

Qui est finit ($|\mathrm{Sp}(u)| \leq n = \dim E$).

Polynôme caractèristique d'un endomorphisme

Définitions, propriétés élémentaires et démonstrations autours du polynôme caractèristique d'un endomorphisme.

Matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit le polynôme caractèristique de A comme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Et on a

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 \qquad\qquad (\chi_A \text{ unitaire}) \\ a_{n-1} &= -\operatorname{tr}(A) \\ a_0 &= (-1)^n \det(A) \end{aligned}$$

Endomorphismes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, e base de E, $A = \mathcal{M}_e(u)$. On définit

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

Ceci ne dépend pas de la base e choisie.

De plus

$$\operatorname{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_u)$$

Démonstration

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (X\delta_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)j})}_{P_\sigma(X)}$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus

$$\deg(P_\sigma) = |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(k) = k\}|$$
$$\deg(P_\sigma) = n \iff \sigma = \mathrm{id}$$

Donc $\deg \chi_A = n$ et cd $\chi_A = 1$.

Si $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\deg(P_\sigma) \leq n - 2$, donc a_{n-1} est le terme en X^{n-1} de P_{id}.

$$P_{\mathrm{id}} = \prod_{j=1}^{n} (X - A_{jj})$$

$$a_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n} A_{jj} = -\operatorname{tr}(A)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \chi_A(0) = \det(0 - A) \\ &= (-1)^n \det(A) \end{aligned}$$

Soient e, e' deux bases de E, $A = \mathcal{M}_e(u)$, $A' = \mathcal{M}_{e'}(u)$, $P = P_{e' \to e}$.

$$A' = PAP^{-1}$$

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(X) &= \det(XI_n - A') \\ &= \det\left(XPI_nP^{-1} - PAP^{-1}\right) \\ &= \det(P)\det(XI_n - A)\det\left(P^{-1}\right) \\ &= \chi_A(X) \end{aligned}$$

Multiplicités d'une valeur propre

Définitions des multiplicités d'une valeur propre.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme u.

- On appelle multiplicité algébrique (m_λ), ou juste multiplicité de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u.
- On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension de son espace propre.

On a toujours

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

Démonstration

Soit $(e_1, \ldots, e_d)$ base de E_λ complété en $e = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E.

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \chi_u &= \chi_{\mathcal{M}_e(u)} \\ &= \left|\begin{array}{c|c} (X-\lambda)I_d & -B \\ \hline 0 & XI_{n-d} - C \end{array}\right| \\ &= (X-\lambda)^d \chi_C(X) \end{aligned}$$

Propriétés diverses du polynôme caractèristique

Cas particuliers de calculs du polynôme caractèristique, et lien avec les endomorphisme induit.

- Pour tout $T \in T_n(\mathbb{K})$

$$\chi_T = \prod_{k=1}^{n} T_{kk}$$

- Pour tout $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{K})$, $A \in M_r(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$

$$\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$$

- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev stable par u, $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F, on a toujours

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

Démonstration

- L'écrire.
- L'écrire.
- Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de F complété en base de E.

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

  Avec $A = \mathcal{M}_{\tilde{e}}(\tilde{u})$.

Diagonalisabilité

Définition et premier critère de diagonalisabilité.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base e de E tel que $\mathcal{M}_e(u)$ est diagonale.

Une tel base est par définition formée de vecteurs propres de u.

De plus

$$\begin{aligned} & u \text{ diagonalisable} \\ \Leftrightarrow\ & E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \\ \Leftrightarrow\ & \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E \end{aligned}$$

En particulier

- Les homothéties sont diagonales dans toutes les bases
- Les projecteurs sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(p - \mathrm{id})}_{E_1(p)} \oplus \underbrace{\ker p}_{E_0(p)} = E$$

- Les symétries sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(s - \mathrm{id})}_{E_1(s)} \oplus \underbrace{\ker s + \mathrm{id}}_{E_{-1}(s)} = E$$

Autre critère de diagonalisabilité

Énoncer du critère de diagonalisabilité sur χ_u et les multiplicités.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$$\begin{aligned} &u \text{ diagonalisable} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Où m_λ est la multiplicité (algébrique) de λ.

Ainsi car $\dim E_\lambda(u) \geq 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,

$$\chi_u \text{ SARS} \Rightarrow u \text{ diagonalisable}$$

Démonstration

- Supposons u diagonalisable, notons e la base qui le diagonalise.

  $$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

  Donc χ_u est scindé

  $$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \\ &= \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} \end{aligned}$$

  Ainsi

  $$\deg \chi_u = n = \sum_{k=1}^{p} m_{\lambda_k}$$

  $$n = \sum_{k=1}^{p} m_{\lambda_k} \geq \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$$

- Supposons χ_u scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

  $$\chi_u = \underbrace{\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}_{\deg = n}$$

  $$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

  Donc u est diagonalisable.

Trigonalisabilité

Définition et premier critères de la trigonalisabilité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E tel que $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^+(\mathbb{K})$

Dans ce cas

- $u(e_1) = t_{11}e_1$, donc e_1 est un vecteur propre de u.
- Notons $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ le drapeau.

$$\forall k \in [\![1, n]\!], u(F_k) \subset F_k$$

- $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - t_{kk})$ scindé.

La réciproque est aussi vraie : χ_u scindé $\Rightarrow u$ trigonalisable.

Si $F \neq \{0\}$ est un sev stable par u et u trigonalisable, alors $\tilde{u}$ (induit par u sur F) est trigonalisable (car $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ scindé).

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Toute matrice de taille 1 est supérieure.

Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),$$
$$\chi_A \text{ scindé} \Rightarrow A \text{ trigonalisable}$$

Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que χ_A scindé.

χ_A a au moins une racine, donc A admet une valeur propre λ.

On dispose de $X_0 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$AX_0 = \lambda X_0$$

Ainsi on peut construire la base $e' = (X_0, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. Notons $P = P_{\mathrm{can} \to e'}$.

$$A = P \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) P^{-1}$$

Avec $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ et $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}(X - \lambda)$ d'où $\chi_{\tilde{A}}$ scindé.

Par hypothèse de récurrence $\tilde{A}$ est trigonalisable et on peut donc construire $P_0 \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{n+1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Endomorphismes nilpotents

Définition d'un endomorphisme nilpotent et inégalité sur son indice.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est dit nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$.

On appelle indice de nilpotence la valeur

$$d = \min\{q \in \mathbb{N}^* \mid u^q = 0\}$$

On a toujours $d \leq \dim E$.

Démonstration

Comme $u^{d-1} \neq 0$ on dispose de $x \in E$ tel que $u^{d-1} \neq 0$.

Considèrons la famille $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$, soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

$$\begin{aligned} u^{d-1}\left(\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x)\right) &= \lambda_0 u^{d-1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_0 = 0 \\ u^{d-2}\left(\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k u^k(x)\right) &= \lambda_1 u^{d-1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0 \\ &\vdots \\ \lambda_0 = \lambda_1 = \cdots &= \lambda_{d-1} = 0 \end{aligned}$$

D'où $d \leq n$.

Caractèrisation des endomorphismes nilpotents

Caractèrisation des endomorphisme nilpotents.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. u nilpotent
2. u trigonalisable en une matrice strictement supérieure.
3. u trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$
4. $\chi_u = X^n$

Démonstration

- $(4 \Rightarrow 3)$ $\chi_u = X^n$ est scindé donc u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = Z(X^n) = \{0\}$.
- $(3 \Leftrightarrow 2)$ Évident.
- $(3 \Rightarrow 4)$ On dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \chi_u = X^n$$

- $(2 \Rightarrow 1)$ On dispose de e base de E tel que $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^{++}(\mathbb{K})$, notons $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

$$u(F_k) \subseteq u(F_{k-1})$$
$$u^n(F_n = E) \subseteq F_0 = \{0\}$$
$$u^n = 0$$

- $(1 \Rightarrow 2)$ u est nilpotent d'indice d.

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^d = E$$

Construisons une base adaptée

$$\left(\overbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_{i_1}}_{\text{base de } \ker u}, \dots, e_{i_2}}^{\text{base de } \ker u^2}, \dots, e_{i_d} \right)$$

Pour tout $x \in \ker u^k$:

$$u(x) \in \ker u^{k-1}$$

Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ si $i_j + 1 \leq k \leq i_{j+1}$

$$e_k \in \ker u^j$$
$$u(e_k) \in \ker u^{j-1}$$
$$u(e_k) \in \mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_{i_{j-1}}\right)$$

Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractèristique

Lien entre racines du polynôme minimal et celles du polynôme caractèristique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u.

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$$
$$Z(\chi_u) = \mathrm{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$$

Démonstration

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0\}$:

  $$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

  $$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} \lambda^k x$$
  $$= P(\lambda)x = 0$$

  Or $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$.
- Π_u annule u d'où $\mathrm{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ racine de Π_u

  $$\Pi_u = (X - \lambda)Q(X)$$
  $$0 = (u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ Q(u)$$

  Donc $\mathrm{im}\, Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$.

  Mais $Q(u) \neq 0$ car Π_u minimal, donc

  $$\dim(\mathrm{im}\, Q(u)) \geq 1$$
  $$\mathrm{im}\, Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) = E_\lambda(u)$$
  $$\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$$

Théorème des noyaux

Énoncé et démonstrations du théorème des noyaux.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ($\mathbb{K}$-ev de dimension finie), $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si $P = \prod_{k=1}^{N} P_k$ avec $P_1, \dots, P_N$ deux à deux premiers entre eux, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

Si de plus P annule u alors

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Où e est la base construite par concaténation de bases des $\ker P_k(u)$.

Démonstration

Par récurrence sur N.

Pour $P = P_1 P_2$ avec $P_1 \wedge P_2 = 1$:

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = 1$$

$$P_1(u) \circ V_1(u) + P_2(u) \circ V_2(u) = \mathrm{id} \quad (*)$$

En évaluant on trouve

$$\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$$

De plus

$$P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u) = P(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \ker P_1(u) \subseteq \ker P(u) \\ \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u) \end{cases}$$

$$\ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u)$$

Soit $x \in \ker P(u)$, par $(*)$ on a

$$x = \underbrace{V_1(u) \circ P_1(u)(x)}_{x_2} + \underbrace{V_2(u) \circ P_2(u)(x)}_{x_1}$$

$$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= (P_1 V_2 P_2)(u)(x) \\ &= (V_1 P)(u)(x) \\ &= 0 \\ P_2(u)(x_2) &= (P_2 V_1 P_1)(u)(x) \\ &= (V_2 P)(u)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \underbrace{x_1}_{\in \ker P_1(u)} + \underbrace{x_2}_{\in \ker P_2(u)}$$

D'où $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

Supposons maintenant le résultat pour tout $P_1, \dots, P_N$ respectant les conditions.

Soient $P = P_1 \cdots P_{N+1} \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1, \dots, P_{N+1}$ deux à deux premiers entre eux.

Donc $Q = P_1 P_2 \cdots P_N$ et P_{N+1} sont premiers entre eux.

Ainsi

$$\begin{aligned} \ker P(u) &= \ker(P_{N+1} Q)(u) \\ &= \underbrace{\ker Q(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{cas } N=2} \\ &= \underbrace{\bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{H.R.}} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N+1} \ker P_k(u) \end{aligned}$$

Démonstration annexe du théorème des noyaux

Démonstration secondaire du théorème des noyaux dans le cas d'un polynôme annulateur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose $P = \prod_{k=1}^{N} P_k$ annulateur de u, $P_1, \dots, P_N$ premiers entre eux deux à deux. On pose

$$Q_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} P_i$$

Qui sont premiers dans leur ensemble.

$$\sum_{k=1}^{N} V_k Q_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{N} \underbrace{V_k(u) \circ Q_k(u)}_{\Pi_k} = \mathrm{id} \quad (1)$$

On remarque que

$$P_k(u) \circ \Pi_k = (V_k P_k Q_k)(u) = (V_k P)(u) = 0$$

$$\text{Donc} \quad \mathrm{im}\, \Pi_k \subseteq \ker P_k(u)$$

Et pour $k \neq i$, $P \mid Q_i Q_k$ d'où

$$P \mid (V_k P_k)(V_i P_i)$$

$$\Pi_i \circ \Pi_k = 0$$

Donc par (1)

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_k \circ \Pi_i = \Pi_k \circ \Pi_k = \Pi_k$$

Donc les Π_k sont des projecteurs.

Soit $x \in \ker P_k(u)$, pour tout $i \neq k$, $\Pi_i(x) = 0$. Par (1)

$$x = \Pi_k(x)$$

$$x \in \mathrm{im}\, \Pi_k$$

Ainsi

$$\ker P_k(u) = \mathrm{im}\, \Pi_k$$

$$\ker P_i(u) \subseteq \ker \Pi_k$$

Les Π_k projettent sur $\ker P_k$.

Théorème des noyaux

Soient $(x_1, \dots, x_N) \in \prod_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$ tels que $\sum_{k=1}^{N} x_k = 0$.

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$

$$\Pi_i\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) = x_i = 0$$

Donc les $\ker P_k(u) = \mathrm{im}\, \Pi_k$ sont en somme directe.

Soit $x \in \ker P(u) = E$, par (1)

$$x = \sum_{k=1}^{N} \Pi_k(x) \in \sum_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

D'où

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

Et de plus

$$\mathrm{im}\, \Pi_k = \ker P_k(u)$$

$$\ker \Pi_k = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \ker P_i(u)$$

$$\Pi_k \in \mathbb{K}[u]$$

Critère de Diagonalisabilité

Démonstration d'une CNS de diagonalisabilité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. u diagonalisable.
2. u annule un polynôme SARS.
3. Π_u est SARS

Démonstration

- $(2 \Leftrightarrow 3)$

$$\begin{aligned} &\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P \text{ SARS et } P(u) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P \text{ SARS et } \Pi_u \mid P \\ \Leftrightarrow\ &\Pi_u \text{ SARS} \end{aligned}$$

- $(3 \Rightarrow 1)$ Π_u SARS donc

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{N} (X - \lambda)$$

Par le TDN

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Donc u diagonalisable.

- $(1 \Rightarrow 3)$ u diagonalisable

$$\mathcal{M}_e(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_n & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{M}$$

$$P(X) = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k) \ \text{ SARS}$$

$$\begin{aligned} P(M) &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & P(\lambda_1) & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & P(\lambda_n) & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\Pi_u \mid P$ SARS.

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev stable par u.

Notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F.

- $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$
- Si u diagonalisable, alors $\tilde{u}$ aussi.

Démonstration

- $\Pi_u(\tilde{u}) = 0$ donc $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$.
- Si u diagonalisable, Π_u est SARS, donc $\Pi_{\tilde{u}}$ aussi (car divise) donc $\tilde{u}$ est diagonalisable.

Sous-espaces cycliques

Définition de sous-espace cyclique et base associé.

Pour un $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$ on appelle sous-espace cyclique engendré par x_0 (pour u)

$$F_{x_0} = \mathrm{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

Cet espace admet comme base

$$\left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{d-1}(x_0)\right)$$

Où $d = \deg \Pi_{u,x_0}$ le polynôme minimal ponctuel, l'unique polynôme unitaire minimal tel que

$$\text{Pour } \theta_{x_0} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & E \\ P & \mapsto & P(u)(x_0) \end{cases}$$

$$\ker \theta_{x_0} = \Pi_{u,x_0}\mathbb{K}[X]$$

Démonstration

$\theta_{x_0} \in \mathcal{L}(E)$, donc $\ker \theta_{x_0}$ est un sev, donc un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Soit $P \in \ker \theta_{x_0}$, $Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{aligned} \theta_{x_0}(QP) &= Q(u)(P(u)(x_0)) \\ &= Q(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ker \theta_{x_0}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui est principal d'où Π_{u,x_0} existe. Notons $d_{x_0} = \deg \Pi_{u,x_0}$.

Par existance et unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \oplus \ker \theta_{x_0}$$

Donc $\theta_{x_0}\big|_{\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X]}$ isomorphisme de $\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \to \mathrm{im}\, \theta_{x_0} = F_{x_0}$.

Donc F_{x_0} a pour base

$$\begin{aligned} &\left(\theta_{x_0}(1), \theta_{x_0}(X), \ldots, \theta_{x_0}\left(X^{d_{x_0}-1}\right)\right) \\ &= \left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{d-1}(x_0)\right) \end{aligned}$$

Endomorphismes cycliques

Définition, propriétés, démonstration autour des endomorphismes cycliques.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est cyclique si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1. $\exists x_0 \in E,\ \operatorname{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k\in\mathbb{N}} = E$.
2. $\exists x_0 \in E,\ \big(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\big)$ base de E.

Propriétés en vrac (sans démonstration)

- Si u cyclique, tout endomorphisme induit l'est aussi.
- Si u cyclique, u admet un nombre fini de sev stables.
- Si $\mathbb{K}$ est infini et u admet un nombre fini de sev stables, alors u est cyclique.

Démonstration équivalence

- (2 ⇒ 1) Évident.
- (1 ⇒ 2) $F_{x_0} = \operatorname{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est les sous-espace engendré par x_0 pour u, donc

  $$\big(x_0, u(x_0), \ldots, u^{d-1}(x_0)\big)$$

  Où $d = \deg \Pi_{u,x_0}$ en est une base.

  Or $F_{x_0} = E$ par hypothèse, donc $\dim F_{x_0} = n$ et $d = n$.

Vision matricielle de la cyclicité

Lien entre endomorphisme cyclique et matrices de compagnon.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est cyclique ss'il existe une base e de E et P unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_e(u) = C_P$.

Dans ce cas $\Pi_u = P$.

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique pour $x_0 \in E$. Notons $e = \left(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\right)$ la base associé.

On dispose alors de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$u^n(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$$

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Et alors

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{array}{c} \\ x_0 \\ u(x_0) \\ \vdots \\ u^{n-1}(x_0) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(x_0) & \cdots & u^n(x_0) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= C_P$$

Réciproquement :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array}\right)$$

Alors pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$u(e_k) = u(e_{k+1})$$

$$\text{Donc } e = \left(e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1)\right)$$

Donc u est cyclique.

Ainsi :

$$P(u)(x_0) = u^n(x_0) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)}_{u^n(x_0)} = 0$$

Donc pour tout $m \in [\![0, n-1]\!]$

$$P(u)(u^m(x_0)) = u^m(P(u)(x_0)) = 0$$

Ainsi $P(u)$ annule une base, d'où $\Pi_u \mid P$.

Or $\deg \Pi_{u,x_0} = n$ car u cyclique et $\Pi_{u,x_0} \mid \Pi_u$, donc

$$n \leq \deg \Pi_u \leq \deg P = n$$

Et comme Π_u et P sont unitaires

$$\Pi_u = P$$

Matrice compagnon

Définition de matrice compagnon.

Soit $P = X^d \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle matrice compagnon de P la matrice

$$C_P = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{array}\right)$$

Ainsi (en développant selon la dernière colonne)

$$\chi_{C_P}(X) = P(X)$$

Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{u,x} = \Pi_u$.

En déduire que u cyclique ssi $\deg \Pi_u = n$.

Soit $u \in \mathcal{L}(e)$.

On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k}$$

Avec $P_1, \dots, P_N$ irréductibles deux à deux distincts.

Démonstration $\mathbb{K}$ quelconque

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker P_k^{d_k}(u)}_{F_k}$$

$$\ker P_k^{d_k - 1}(u) \subseteq \ker P_k^{d_k}(u) = F_k$$

Supposons par l'absurde qu'on ai égalité pour un k.

$$E = \bigoplus_{j \neq k} \ker P_j^{d_j}(u) \oplus \ker P_k^{d_k - 1}(u)$$

$$= \underbrace{\ker\left(P_k^{d_k-1} \prod_{j \neq k} P_j^{d_j}\right)(u)}_{\text{ne peut annuler } u \text{ car } \Pi_u \text{ minimal}}$$

Donc $\ker P_k^{d_k - 1}(u) \subsetneq \ker P_k^{d_k}(u)$.

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ on dispose de

$$x_k \in F_k \setminus \ker P_k^{d_k - 1}(u)$$

$$\text{Donc} \begin{cases} P_k^{d_k}(u)(x_k) = 0 \\ P_k^{d_k-1}(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} \Pi_{u,x_k} \mid P_k^{d_k} \\ \Pi_{u,x_k} \nmid P_k^{d_k - 1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x_k} = P_k^{d_k}}_{\text{car } P_k \text{ irréductible}}$$

On pose $x = \sum_{k=1}^{N} x_k$, alors pour tout $P \in \Pi_{u,x}\mathbb{K}[X]$

$$P(u)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} P(u)(x_k) = 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, N]\!],\ P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, N]\!],\ P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$.

Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout $x \in E$, $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ donc

$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$

$$|D| = \prod_{k=1}^{N} (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$ d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \underbrace{\bigcup_{P \in D'} \ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

Donc on dipose de $Q = \Pi_{u,y} \in D'$ tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

Par minimalité de Π_u, $\Pi_{u,y} = \Pi_u$.

CNS de cyclicité

On sait que si u cyclique, alors on dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = C_{\Pi_u}$$

Avec $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n.

Supposons maintenant que $\deg \Pi_u = n$.

On dispose de $x_0 \in E$ tel que $\Pi_{u,x_0} = \Pi_u$, d'où

$$\deg \Pi_{u,x_0} = n = \dim \underbrace{\mathrm{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}}_{F_{x_0}}$$

D'où $F_{x_0} = E$ et u cyclique.

Théorème de Cayley-Hamilton

Énoncé et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0$ c'est à dire $\Pi_u \mid \chi_u$.

Démonstration

Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$, on veut montrer $\chi_u(u)(x_0) = 0$.

On pose $F_{x_0} = \mathrm{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sev de E stable par u.

Soit $\tilde{u}$ endomorphisme induit par u sur F_{x_0}, qui est donc cyclique.

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$e_0 = \left(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0)\right)$$

Soit une base de F_{x_0}.

$$\mathcal{M}_{e_0}(\tilde{u}) = C_P = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & 0 & & a_{n-2} \\ & & 1 & & a_{n-1} \end{array}\right)$$

Où

$$\tilde{u}^d(x_0) = u^d(x_0) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x_0)$$

$$P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Or $P = \chi_{C_P} = \chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ donc

$$\chi_u(u)(x_0) = Q(u)(P(u)(x_0)) = 0$$

Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, CNS pour u cyclique.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, CNS pour u cyclique.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = 1$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, montrer que $\mathrm{Com}\, u = \mathbb{K}[u]$.

---

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)$$

   Où les $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont deux à deux distincts (Π_u SARS).

   u cyclique ssi $N = n = \dim E$.

   - Si u cyclique, $\deg \Pi_u = n = N$.
   - Si $\deg \Pi_u = n$

     Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de vecteurs propres associés aux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

     Posons $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

$$\mathcal{M}_e(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

     Matrice de Vandermonde inversible, d'où $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q.

$$\Pi_u = X^q$$

   - Si u cyclique, alors $\deg \Pi_u = q = n$.
   - Si $q = n$, $u^{n-1} \neq 0$, donc on dispose de $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.

     Et $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre et donc une base.

     (En évaluant $u^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0)\right)$).

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, donc on dispose de e base de E tel que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

$$\mathcal{M}_e(u - \lambda\, \mathrm{id}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -\lambda & & & & a_0 \\ \hline 1 & -\lambda & & & a_2 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{array}\right)$$

   Dont le quadrant inférieur gauche est une sous-matrice inversible de taille $n - 1$.

$$\mathrm{rg}\,(u - \lambda\, \mathrm{id}) \geq n - 1$$

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) = \dim \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}) \leq 1$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. On dispose de $x_0 \in E$ tel que

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

   Est une base.

   On a déjà $\mathbb{K}[u] \subseteq \mathrm{Com}(u)$.

   Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$. On dispose de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

   Soit $m \in [\![0, n-1]\!]$

$$\begin{aligned} v(u^m(x_0)) &= u^m(v(x_0)) \\ &= u^m\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(u^m(x_0)) \end{aligned}$$

   Donc v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coincident sur une base, d'où $v \in \mathbb{K}[u]$.

Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, CNS de trigonalisabilité sur Π_u.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable ssi Π_u scindé.

Démonstration

- Supposons u trigonalisable, donc χ_u est scindé or $\Pi_u \mid \chi_u$ donc Π_u est scindé.
- Supposons Π_u scindé.

  $$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{d_k}$$

  Avec $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

  Par le TDN

  $$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}}_{F_k}$$

  Pour k fixé, F_k est stable par u et $u - \lambda \operatorname{id}$, posons u_k induit par u sur F_k.

  $u_k - \lambda_k \operatorname{id}$ est nilpotent, donc on dispose de e_k base de F_k tel que

  $$\mathcal{M}_{e_k}(u_k - \lambda_k \operatorname{id}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

  $$\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

  Notons e la base concatenant les bases $e_1, \dots, e_N$.

  $$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

  Où les $A_1, \dots A_N$ sont triangulaires.

- (Autre méthode) Par récurrence sur n.

  Cas $n = 1$ évident.

  Supposons le résultat pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E = n + 1$ et Π_u scindé.

  Π_u admet au moins une racine λ, on dispose donc de $x \in E$ vecteur propre associé.

  On forme la base $(\lambda, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E.

  $$\mathcal{M}_e(u) = A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  Or

  $$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \Pi_u(A)$$
  $$= \left(\begin{array}{c|ccc} \Pi_u(\lambda) & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Pi_u(A_1) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  D'où $\Pi_u(A_1) = 0$ donc $\Pi_{A_1} \mid \Pi_u$ et Π_{A_1} scindé, donc par hypothèse de récurrence A_1 est trigonalisable.

Exercice : polynôme caractèristique divisant une puissance du polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E$. Montrer que $\chi_u \mid \Pi_u^n$

Par récurrence forte sur n.

Cas $n = 1$ évident.

Supposons le résultat pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$.

Si u est cyclique, $\Pi_u = \chi_u$ d'où $\chi_u \mid \Pi_u^n$.

Sinon on prend $x_0 \in E \setminus \{0\}$, $k = \deg \Pi_{u,x_0} < n$ donc $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ est libre, on la complète en une base e de E.

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} C_{\Pi_{u,x_0}} & * \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

Donc

$$\chi_u = \underbrace{\chi_{C_{\Pi_{u,x_0}}}}_{\Pi_{u,x_0}} \chi_A$$

$$\chi_u \mid \Pi_u \chi_A$$

Or par hypothèse de récurrence $\chi_A \mid \Pi_A^{n-k}$ et

$$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_u\left(C_{\Pi_{u,x_0}}\right) & * \\ \hline 0 & \Pi_u(A) \end{array}\right)$$

Donc $\Pi_A \mid \Pi_u$

Ainsi

$$\chi_u \mid \Pi_u \Pi_A^{n-k} \mid \Pi_u^{n-k+1} \mid \Pi_u^n$$

Décomposition en sous espaces caractèristiques

Définition et démonstration de la décomposition en sous-espaces caractèristiques.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé, l'espace E se décompose en somme directe de sev stables par u :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} F_k$$

Où pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, u_k induit par u sur F_k vérifie

$$u_k = \lambda_k \operatorname{id} + n_k$$

Où n_k est nilpotent et $\lambda_k \in \operatorname{Sp}(u)$.

Dé plus $\dim F_k = m_k$ et $F_k = \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k}$.

Cas diagonalisable

Si u est diagonalisable

$$\dim F_k = m_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda_k}(u) &= \ker(u - \lambda_k \operatorname{id}) \\ &\subseteq \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k} = F_k \end{aligned}$$

$$E_{\lambda_k}(u) = F_k$$

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Où $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

Par le TDN on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k}}_{F_k}$$

Les F_k sont stables par u, on peut donc poser u_k induit par u sur F_k.

On note $n_k = u_k - \lambda_k \operatorname{id} \in \mathcal{L}(F_k)$ qui est nilpotent d'ordre inférieur à m_k.

Soit e_k base de F_k tel que $\mathcal{M}_{e_k}(n_k) = N_k \in T^{++}_{\dim F_k}(\mathbb{K})$.

Ainsi $\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = \lambda_k I_{\dim F_k} + N_k$.

En concatenant les bases $(e_k)_k$ en une base e de E on trouve

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

D'où

$$\prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$$

$$m_k = \dim F_k$$

Sous-espaces caractèristiques et polynôme minimal

Lien entre la décomposition en sous-espaces caractèristiques et le polynôme minimal.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé, à fortiori, Π_u est scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{d_k}$$
$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

On peut décomposer par le TDN sur Π_u et en les espaces caractèristiques

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^{N} \overbrace{\ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k}}^{F_k} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}}_{G_k} \end{aligned}$$

Or $d_k \leq m_k$ (car $\Pi_u \mid \chi_u$), d'où

$$\begin{aligned} G_k &= \ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k} \\ &\subseteq \ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k} = F_k \end{aligned}$$

Mais $\bigoplus_{k=1}^{N} G_k = \bigoplus_{k=1}^{N} F_k$ donc $G_k = F_k$.

Soit $q_k \leq d_k$ l'indice de nilpotence de $n_k = (u - \lambda_k \operatorname{id})|_{F_k}^{F_k}$.

$$\begin{aligned} F_k &\subseteq \ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{q_k} \\ &\subseteq \ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k} = F_k \end{aligned}$$

Posons $Q = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{q_k}$

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker(u - \lambda_k)^{d_k} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker(u - \lambda_k)^{q_k} \end{aligned}$$

Donc par le TDN $\ker Q(u) = E$, $\Pi_u \mid Q$ donc $d_k \leq q_k \leq d_k$.

Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi_u = X^d Q$ avec $X \nmid Q$.

1. Montrer que
$$d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\right\}$$
2. Montrer que
$$E = \ker u^d \oplus \operatorname{im} u^d$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi_u = X^d Q$ avec $X \nmid Q$.

1. Notons
$$q = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\right\}$$
Soit $\tilde{u}$ l'induit par u sur $\ker u^q$.
$$\begin{cases} \tilde{u}^q = 0 \\ \tilde{u}^{q-1} \neq 0 \end{cases} \text{Donc } \Pi_{\tilde{u}} = X^q$$
$$X^q \mid \Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u = X^d Q$$
$$q \leq d$$
Donc $\ker u^q = \ker u^d$
$$\ker u^d \circ Q(u) = E$$
$$\operatorname{im} Q(u) \subseteq \ker u^d = \ker u^q$$
$$\ker u^q \circ Q(u) = E$$
$$X^d Q \mid X^q Q$$
$$q \geq d$$
2. On a (TDN)
$$E = \ker u^d \oplus \ker Q(u)$$
Soit $y \in \operatorname{im} u^d$, on dispose donc de $x \in E$ tel que $y = u^d(x)$.
$$y = u^d(x)$$
$$Q(u)(y) = \left(X^d Q\right)(u)(x) = 0$$
$$\operatorname{im} u^d \subseteq \ker Q(u)$$
Or par le théorème du rang
$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} u^d &= \dim E - \dim \ker u^d \\ &= \dim \ker Q(u) \end{aligned}$$
D'où $\operatorname{im} u^d = \ker Q(u)$.

Décomposition de Dunford

Définition et démonstration de la décomposition de Dunford.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé.

On dispose de $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que
- $u = d + n$
- d diagonalisable
- n nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$

De plus cette décomposition est unique.

Démonstration

On reprend la décomposition en sous-espaces caractèristiques

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker (u - \lambda_k \operatorname{id})_k^m}_{F_k}$$

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ F_k = \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}$$

On note u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k.

$$F_k = \ker (u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{D'où } \left(u_k - \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}\right)^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$$

Posons

$$n_k = u_k - \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}$$

$$\text{Donc } u_k = \lambda_k \operatorname{id}_{F_k} + n_k$$

Où n_k est nilpotent d'ordre d_k (cf démonstration sous-espaces caractèristiques).

On pose alors $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],$$

$$d|_{F_k}^{F_k} = \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}$$

$$n|_{F_k}^{F_k} = n_k$$

Donc d diagonalisable et n nilpotent d'odre $\max_{k \in [\![1;n]\!]}(d_k)$.

Matriciellement

$$\mathcal{M}_e(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_k} \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{M}_e(n) = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_N \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{K})$$

$$DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N N_N \end{pmatrix} = ND$$

Unicité

On prend $p_1, \dots, p_N$ les projecteurs associés à la décomposition (cf. démonstration du TDN)

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} F_k = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}$$

On avait montrer que $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{K}[u]$.

On a

$$d = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k \in \mathbb{K}[u]$$

$$n = u - d \in \mathbb{K}[u]$$

Soient $d', n' \in \mathcal{L}(E)$ respectent les conditions.

Comme $u = d' + n'$, d' commute avec u et n' aussi, donc d' commute avec $d \in \mathbb{K}[u]$ et n' avec $n \in \mathbb{K}[u]$.

Ainsi d' et d sont codiagonalisables, d'où $d' - d$ est diagonalisable.

Et $n - n'$ est nilpotent (binôme de Newton).

Or $d' + n' = d + n$ d'où

$$\underbrace{d' - d}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{n - n'}_{\text{nilpotent}}$$

D'où $d' - d = 0$ et $n' - n = 0$.

Codiagonalisabilité

Définition et critère de codiagonalisabilité.

Soient $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes.

On dit que les $(u_i)_i$ sont codiagonalisables s'il existe une base e de E tels que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_e(u_i) \in D_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : deux endomorphismes

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} E_{\lambda_k}(u) \text{ où } \operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Comme $u \circ v = v \circ u$, les $E_{\lambda_k}(u)$ sont stables par v.

Soit v_k l'induit de v sur $E_{\lambda_k}(u)$, qui est diagonalisable car v l'est.

Pour chaque $k \in [\![1, N]\!]$ on dispose de e_k base de vecteurs propres de v_k (donc de v et u).

En concatenant on obtient une base qui convient.

Démonstration famille quelconque

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Cas $n = 1$ évident.

Supposons la propriété pour tout $\mathbb{K}$-ev de dimension inférieur à n.

Soit $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ diagonalisables commutant avec $\dim E = n + 1$.

Si tout les u_i sont des homothéties n'importe quelle base convient.

Sinon on dispose de $j \in I$ tel que u_j n'est pas une homothétie.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} E_{\lambda_k}(u_j) \text{ où } \operatorname{Sp}(u_j) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Pour tout $i \in I$, les $E_{\lambda_k}(u_j)$ sont stables par u_i car $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

Notons $u_{i,k}$ l'induit de u_i sur $E_{\lambda_k}(u_j)$ qui est de dimension inférieur à n car u_j n'est pas une homothétie.

Les $(u_{i,k})_i$ sont donc diagonalisables et commutent entre eux, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On dispose donc de e_k base de $E_{\lambda_k}(u_j)$ formée de vecteurs propres commmun aux $(u_i)_i$. Il suffit alors de les concatener.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur le commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

- Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathrm{Com}\,(u)$ ssi les espaces propres de u sont stables par v.
- $\dim \mathrm{Com}\,(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$

Démonstration

- L'implication directe est évidente.

  Supposons $v \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise les espaces propres de u.

  Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ soit $x \in E_\lambda(u)$, d'où $v(x) \in E_\lambda(u)$.

  $$v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$
  $$u(v(x)) = \lambda v(x)$$

  Or u diagonalisable, donc on dispose d'une base de vecteurs propres de u.

  Ainsi $u \circ v$ et $v \circ u$ coincident sur une base d'où l'égalité.

- On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

  On considère

  $$\theta : \begin{cases} \mathrm{Com}(u) & \to & \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u)) \\ v & \mapsto & \left(v|_{E_{\lambda_1}(u)}, \dots, v|_{E_{\lambda_N}(u)}\right) \end{cases}$$

  Qui est linéaire.

  Soit $v \in \ker\theta$: pour tout $k \in [\![1, N]\!]$

  $$v\left(E_{\lambda_k}(u)\right) = 0$$
  $$\text{Or } \ E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u)$$
  $$\text{Donc } \ v = 0$$

  Soit $(v_1, \dots, v_k) \in \prod_{k=1}^N \mathcal{L}\left(E_{\lambda_k}(u)\right)$.

  Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note e_k base de $E_{\lambda_k}(u)$.

  On définit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui coincide avec v_k sur tout les vecteurs de e_k.

  Ainsi $\theta(v) = (v_1, \dots, v_k)$, et θ isomorphisme.

  $$\begin{aligned}\dim \mathrm{Com}(u) &= \sum_{k=1}^N \dim \mathcal{L}\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\dim E_{\lambda_k}(u)\right)^2\end{aligned}$$

Exercice : le bicommutant

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On définit le bicommutant de u

$$B(u) = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; \begin{matrix} \forall v \in \mathrm{Com}(u) \\ v \circ w = w \circ v \end{matrix} \right\}$$

Montrer que $B(u) = \mathbb{K}[u]$.

Comme $u \in \mathrm{Com}\,(u)$ on remarque

$$\mathbb{K}[u] \subseteq B(u) \subseteq \mathrm{Com}(u)$$

On construit e concatenation de bases des $E_{\lambda_k}(u)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

Soit $w \in B(u) \subseteq \mathrm{Com}(u)$ donc les $\left(E_{\lambda_k}\right)_k$ sont stables par w.

$$M = \mathcal{M}_e(w) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_N \end{pmatrix}$$

Pour tout $v \in \mathrm{Com}(u), w \circ v = v \circ w$.

$$A = \mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Or $AM = MA$ donc

$$\forall k \in [\![1, N]\!], A_k M_k = M_k A_k$$

Ainsi M_k est une matrice qui commute avec toutes les autres.

On montre facilement grâce à E_{ij} que $M_k = a_k I_{m_k}$.

Par interpolation de Lagrange on dispose de $P \in \mathbb{K}_{N+1}(X)$ tel que $P(\lambda_k) = a_k$. Or

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{vmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_N} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_e(P(u)) &= \begin{vmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N I_{m_N} \end{vmatrix} \\ &= \mathcal{M}_e(w) \end{aligned}$$

D'où $w \in \mathbb{K}[u]$.

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition et propriétés des projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)$$

Soient $p_1, \ldots, p_N$ les projecteurs associés à la décomposition

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker(u - \lambda_k \operatorname{id})}_{E_{\lambda_k}(u)}$$

On a alors pour tout $i, j \in [\![1, N]\!]$

$$p_i|_{E_{\lambda_j}(u)} = \delta_{ij} \lambda_i \operatorname{id}$$

Dans la base e diagonalisant u et pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a

$$\mathcal{M}_e(P(u)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(p_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{m_k} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $p_k = L_k(u) \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$ avec L_k polynôme de Lagrange associés aux $(\lambda_i)_i$.

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$u = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k$$

$$u^p = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^q p_k \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$$

Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur les sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_N\}$.

1. Si G sev stable par u alors

$$G = \bigoplus_{k=1}^{N} G \cap E_{\lambda_k}(u)$$

2. Réciproquement si $G_1, \ldots, G_N$ sont des sevs de $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_N}(u)$ respectivements alors

$$G = \bigoplus_{k=1} G_k$$

Est un sev stable par u.

Démonstration

1. Soit $\tilde{u}$ induit par u sur G donc diagonalisable.

$$\begin{aligned} G &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\tilde{u})} E_\lambda(\tilde{u}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker(\tilde{u} - \lambda_k \,\mathrm{id}_G) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} G \cap \underbrace{\ker(u - \lambda_k \,\mathrm{id})}_{E_{\lambda_k}(u)} \end{aligned}$$

2. L'écrire.

Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel

Démonstration de l'existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet une droite ou un plan stable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k^{m_k}$$

Avec $P_1, \ldots, P_N$ irréductibles deux à deux distincts.

- Si l'un des P_k est de degré 1.

  $$P_k = X - \lambda$$

  Et λ est racine de Π_u et est donc une valeur propre de u d'où l'existence d'une droite stable.

- Si l'un des P_k est de degré 2.

  $$P_k = X^2 - aX - b$$

  Supposons par l'absurde que $\ker P_k(u) = \{0\}$.

  $$\Pi_u(u) = P_k(u) \circ Q(u) = 0$$

  D'où $Q(u) = 0$ qui est absurde car Π_u est minimal.

  On dispose donc de $x \in \ker P_k(u) \setminus \{0\}$.

  $$u^2(x) = au(x) + bx$$

  D'où $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ stable par u.

  Si $u(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $$\alpha^2 x = (a\alpha + b)x$$
  $$\alpha \mid X^2 - aX - b$$

  Absurde donc F est un plan.

Endomorphismes simples

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. Les seuls sev stables de u sont E et $\{0\}$.
2. χ_u irréductible.
3. u est dit simple.

---

1. $(2 \Rightarrow 1)$ Par contraposé

   Soit F sev stable par u de dimension dans $[\![1, n-1]\!]$, et $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit.

   $$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

   Avec $\chi_{\tilde{u}} = \dim F \neq \deg \chi_u$ d'où χ_u non irréductible.

2. $(1 \Rightarrow 2)$ Par contraposé : Soit $x \in E \setminus \{0\}$ on note

   $$F_x = \mathrm{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}}$$

   Qui est stable par u.

   Si $\deg \Pi_{u,x} = \dim F_x \leq n - 1$, alors u possède un sev stable non trivial.

   Sinon $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u \mid \chi_u$ tous unitaires de degré n, donc égaux. Ainsi

   $$\Pi_{u,x} = \chi_u = PQ$$
   $$y = Q(u)(x)$$
   $$\Pi_{u,y} = P$$

   D'où F_y stable non trivial.

Endomorphismes semi-simples

Définition et propriétés des endomorphismes semi-simples.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. Tout sev stable par u admet un supplémentaire stable.
2. Π_u est sans carrés
   $$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k$$
   Avec $P_1, \dots, P_N$ irréductibles deux à deux distincts.
3. u est semi-simple.

Démonstration

1. (1 ⇒ 2) On pose
   $$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k}$$
   Pour $i \in [\![1, N]\!]$, $F = \ker P_k(u)$ admet un supplémentaire stable G.

   Soient u_F, u_G induient par u sur F et G.
   $$\Pi_{u_F} = P_i$$
   Car annule et irréductible.

   De plus
   $$\begin{gathered} P(u) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in F,\ P(u)(x) = 0 \\ \forall x \in G,\ P(u)(x) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \Pi_{u_F} \mid P \text{ et } \Pi_{u_G} \mid P \\ \Leftrightarrow \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G} \mid P \\ \text{Donc } \Pi_u = \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G} \end{gathered}$$
   Ainsi
   $$\begin{gathered} \Pi_{u_G} \mid \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k} \\ \Pi_u = \Pi_{u_G} \vee P_i \end{gathered}$$
   Mais
   $$\begin{gathered} G \cap F = \{0\} \\ G \cap \ker P_1(u) = \{0\} \\ 0 \neq P_i(u_G) \in \mathrm{GL}(E) \\ P_i \nmid \Pi_{u_G} \end{gathered}$$
   Ainsi comme $\Pi_u = P_i \vee \Pi_{u_G}$
   $$d_i = 1$$
2. (2 ⇒ 1) Cas Π_u irréductible.

   On suppose Π_u irréductible de degré d.

   Donc pour tout $x \in E \setminus \{0\}$
   $$\begin{gathered} \Pi_{u,x} \mid \Pi_u \ \text{ d'où } \ \Pi_u = \Pi_{u,x} \\ \text{et} \dim F_x = d \end{gathered}$$
   Soit F sev stable par u, si $F = E$, $G = 0$ convient.

   On dispose alors de $x_1 \in E \setminus F$.

   Comme F et F_{x_1} sont stables par u, $F \cap F_{x_1}$ l'est.

   Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in F \cap F_{x_1} \setminus \{0\}$.
   $$\begin{gathered} \underbrace{F_x}_{\dim d} \subseteq \underbrace{\overbrace{F_{x_1}}^{\dim d} \cap F}_{\dim \leq d} \\ F_{x_1} \subseteq F \\ x_1 \in F \end{gathered}$$
   Qui est absurde : $F \oplus F_{x_1} \subseteq E$.

   Supposons construits $x_1, \dots, x_k$ tels que
   $$\underbrace{F \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_{x_i} \right)}_{F_k \text{ stable}} \subseteq E$$
   Si $F_k = E$ on a fini.

   Sinon on choisit $x_{k+1} \in E \setminus F_k$ et on répéte.
   $$\begin{gathered} F_{x_{k+1}} \cap F_k = \{0\} \\ F_k \oplus F_{x_{k+1}} \subseteq E \\ F \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k+1} F_{x_i} \right) \subseteq E \end{gathered}$$
   Qui se termine en au plus $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ étapes.
3. (2 ⇒ 1) Cas général.
   $$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k$$
   Par le TDN
   $$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$
   Soit F sev stable par u, $\tilde{u}$ induit par u sur F. Par TDN
   $$\begin{aligned} F &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(\tilde{u}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{(\ker P_k(\tilde{u})) \cap F}_{F_k} \end{aligned}$$
   F_k sev de $E_k = \ker P_k(u)$ stable par u_k induit par u sur E_k.

   De plus $\Pi_{u_k} = P_k$ (annule et irréductible).

   Donc par le premier cas on trouve G_k sev de E_k stable par u tel que
   $$E_k = G_k \oplus F_k$$
   Enfin
   $$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^{N} E_k \\ &= \underbrace{\left(\bigoplus_{k=1}^{N} (F_k) \right)}_{F \text{ stable par } u} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{k=1}^{N} G_k \right)}_{G \text{ stable par } u} \end{aligned}$$

Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé. Montrer que u est diagonalisable ssi tout sev stable par u admet un supplémentaire stable.

- Supposons u diagonalisable, soit F un sev stable par u.

  On dispose donc de $f = (f_1, \ldots, f_d)$ base de F et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ base de vecteurs propres de E.

  On peut donc complétée la base f par des vecteurs de e:

  $$\left(f_1, \ldots, f_d, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-d}}\right) \text{ base de } E$$

  Ainsi $G = \mathrm{Vect}\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-d}}\right)$ est un supplémentaire de F stable par u.

- Supposons que tout sev stable par u admettent un supplémentaire stable.

  $$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

  Est un sev stable, et admet donc G comme supplémentaire stable. Notons $\tilde{u}$ l'induit sur G de u.

  $$\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u \text{ scindé}$$

  Donc $\tilde{u}$ admet une valeur propre λ et un vecteur propre $x \in F \cap G = \{0\}$ qui est absurde. Donc $G = \{0\}$ et $F = E$: u est diagonalisable.

Endomorphismes de produit de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ de $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Posons

$$L_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \text{ ou } MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$

$$P(L_A)(M) = \begin{cases} P(A)M \\ MP(A) \end{cases} = L_{P(A)}(M)$$

De plus $L_B = 0 \Rightarrow L_B(I_n) = B = 0$ d'où

$$P(L_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

C'est à dire $\Pi_{L_A} = \Pi_A$

On en déduit

- L_A est nilpotent ssi A l'est et est de même ordre.
- L_A est diagonalisable ssi A l'est.
- $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(L_A)$

De plus pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

$$\dim E_\lambda(L_A) = n \dim E_\lambda(A)$$

Démonstration

- Pour $L_A(M) = AM$

  Soit $M = (C_1, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$

  $$\begin{aligned} M \in E_\lambda(L_A) &\Leftrightarrow AM = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ AC_j = \lambda C_j \\ &\Leftrightarrow \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{aligned}$$

  Ainsi $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$.

- Pour $L_A(M) = MA$

  Soit $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

  $$\begin{aligned} M \in E_\lambda(L_A) &\Leftrightarrow MA = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ AL_i = \lambda L_i \\ &\Leftrightarrow \{L_1, \dots, L_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{aligned}$$

  Ainsi $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$.

Endomorphisme différence de produits de matrices

Propriétés sur l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MB$ in $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, tel que χ_A scindé et B admet au moins une valeur propre. ($\mathbb{K}$ algébriquement clos suffit).

Posons

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MB \end{array} \right. \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Il y a équivalence entre

1. $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.
2. $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. φ injectif.
4. φ est un automorphisme.

De plus on a

- $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}$

Démonstration

- ($3 \iff 4$) Argument dimensionnel.
- ($1 \implies 2$) Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

$$\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$$
$$\ker(B - \lambda I_n) = E_\lambda(B) = \{0\}$$
$$B - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

  Ainsi

$$\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

- ($2 \implies 3$) Soit $M \in \ker \varphi$

$$AM = MB$$
$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k M = MB^k$$
$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} M$$
$$M = 0$$

- ($3 \implies 1$) Par contraposé, supposons qu'on dispose de $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$.

  On sait que $\chi_B = \chi_{B^\top}$ donc toute valeur propre de B est valeur propre de $B^\top$.

  Soit X, Y vecteurs propres non nuls de A et $B^\top$.

$$\begin{aligned} \varphi\left(XY^\top\right) &= AXY^\top - XY^\top B \\ &= AXY^\top - X\left(B^\top Y\right)^\top \\ &= \lambda XY^\top - \lambda XY^\top \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Or $XY^\top \neq 0$ d'où φ non injective.

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)$. X, Y vecteurs propres non nuls de A et $B^\top$.

$$\begin{aligned} \varphi\left(XY^\top\right) &= AXY^\top - XY^\top B \\ &= \lambda XY^\top - \mu XY^\top \\ &= (\lambda - \mu) XY^\top \end{aligned}$$

  D'où $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(\varphi)$

- Soit $\alpha \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, M vecteur propre non nul associé.

$$\varphi(M) = AM - MB = \alpha M$$
$$\underbrace{(A - \alpha I_n)}_{\tilde{A}} M - MB = 0$$

  Avec $\chi_{\tilde{A}}$ scindé (pour toute valeur propre λ de A, $\lambda - \alpha$ est valeur propre de $\tilde{A}$)

  Posons $\varphi' : N \mapsto \tilde{A}N - NB$

$$\varphi'(M) = 0$$

  Donc φ' non injectif d'où

$$\{\mu\} \subseteq \mathrm{Sp}(\tilde{A}) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing$$

  Ainsi $\alpha + \mu \in \mathrm{Sp}(A)$.

Endomorphisme commutateur de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme $M \mapsto AM - MA \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A scindé.

$$\varphi_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

On a les propriétés de $M \mapsto AM - MB$, et de plus

- Si A est nilpotent alors φ_A l'est.
- Si A est diagonalisable alors φ_A aussi.

Démonstration

- Supposons A nilpotent d'ordre q. Posons

  $$\begin{array}{cccc} & M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ L_A : & M & \mapsto & AM \\ R_A : & M & \mapsto & MA \end{array}$$

  On sait que L_A et R_A sont nilpotents d'ordre q car A l'est.

  De plus $L_A \circ R_A = AMA = R_A \circ L_A$ d'où

  $$\varphi_A = L_A - R_A$$

  $$\varphi_A^{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \binom{2q}{k} (-1)^k R_A^k \circ L_A^{2q-k} = 0$$

- Supposons A diagonalisable.

  On sait que L_A et R_A commutent et sont diagonalisables, donc ils sont codiagonalisables :

  $$\varphi_A = L_A - R_A$$

  Est diagonalisable.

Endomorphismes nilpotents cycliques

Caractèrisation des sev stables par un endomorphisme nilpotent cyclique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent cyclique.

Les seuls sev de E stables par u sont les $\left(\ker u^k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$.

Démonstration

Ils sont stables comme ker d'un endomorphisme commutant avec u.

Soit F sev stable par u. Soit $\tilde{u}$ induit par u sur F qui est nilpotent car car $\tilde{u}^n = 0$.

Or l'ordre de nilpotence de $\tilde{u}$ est majoré par $d = \dim F$: $\tilde{u}^d = 0$.

Donc $F \subseteq \ker u^d$.

De plus par les noyaux itérées

$$\underbrace{\ker u}_{\dim 1} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\ker u^d}_{\dim d} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\ker u^n}_{\dim n}$$

D'où $F = \ker u^d$.

Produit de Kronecker et diagonalisabilité

Diagonalisabilité du produit de Kronecker de matrices (dimension $2n$).

Soit $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On pose le produit de Kronecker

$$M = L \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$$

Alors

- Si L est diagonalisable, M est diagonalisable ssi A l'est.
- Si $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, M est diagonalisable ssi $A = 0$.

Démonstration

- On suppose L diagonalisable :

$$L = P\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}P^{-1} \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

  On remarque

$$Q = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$

$$Q' = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix}$$

$$QQ' = \begin{pmatrix} I_n & \\ & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$Q'MQ = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda A & \\ & \mu A \end{pmatrix}$$

  Donc M est diagonalisable ssi A l'est.

- Pour $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad \text{(récurrence)}$$

  Donc pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

  Si M est diagonalisable, Π_M est SARS.

$$\Pi_M(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_M(A) = 0 \\ A\Pi_M(A) = 0 \end{cases}$$

  Comme $\Pi_M(A) = 0$, A est diagonalisable.

  Or Π_M est SARS : $\Pi_M \wedge \Pi_{M'} = 1$ donc $P' \wedge \Pi_A = 1$ car $\Pi_A \mid \Pi_M$.

  Donc $\Pi_{M'}(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A\Pi_{M'}(A) = 0$ d'où $A = 0$.