Maths

Algèbre

Réduction

- Autre critère de diagonalisabilité
- Calcul de puissance de matrice : cas diagonalisable
- Calcul de puissance de matrice : polynôme annulateur
- Caractèrisation des endomorphismes nilpotents
- Codiagonalisabilité
- Commutant d'un endomorphisme diagonalisable
- Cotrigonalisation
- Critère de Diagonalisabilité
- Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal
- Diagonalisabilité
- Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit
- Décomposition de Dunford
- Décomposition en sous espaces caractèristiques
- Démonstration annexe du théorème des noyaux
- Endomorphisme commutateur de matrices
- Endomorphisme différence de produits de matrices
- Endomorphismes cycliques
- Endomorphismes de produit de matrices
- Endomorphismes nilpotents cycliques
- Endomorphismes semi-simples
- Endomorphismes simples
- Exercice : critère de nilpotence sur la trace des puissances
- Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel
- Matrice compagnon
- Multiplicités d'une valeur propre
- Polynôme caractèristique d'un endomorphisme
- Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractèristique
- Produit de Kronecker et diagonalisabilité
- Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable
- Propriétés diverses du polynôme caractèristique
- Somme directe des sous-espaces propres
- Sous-espaces caractèristiques et polynôme minimal
- Sous-espaces cycliques
- Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable
- Théorème de Cayley-Hamilton
- Théorème des noyaux
- Trigonalisabilité
- Valeurs propres, espaces propres
- Vision matricielle de la cyclicité

Exercice

Réduction

- Exercice : commutateur qui vaut l'un des opérande
- Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables
- Exercice : le bicommutant
- Exercice : polynôme caractèristique d'une somme d'endomorphismes
- Exercice : polynôme caractèristique divisant une puissance du polynôme minimal
- Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques
- Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.
- Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

47 cartes.

Valeurs propres, espaces propres

Définitions, caractérisation, démonstration autour des valeurs propres et des espaces propres.

Soit $u \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{K}$, il y a équivalence entre

1. $\exists x_0 \in E \setminus \{0\},\ u(x_0) = \lambda x_0$
2. $\ker(u - \lambda \operatorname{id}) \neq \{0\}$
3. $u - \lambda \operatorname{id} \notin \mathrm{GL}(E)$

On dit alors que λ est une valeur propre de u, on appelle sous-espace propre de u pour la valeur propre λ

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} &\exists x_0 \in E \setminus \{0\},\ u(x_0) = \lambda x_0 \\ \Leftrightarrow\ &\exists x_0 \in \ker(u - \lambda \operatorname{id}) \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow\ &u - \lambda \operatorname{id} \notin \mathrm{GL}(E) \quad \left(\substack{\text{dimension} \\ \text{finie}}\right) \end{aligned}$$

Somme directe des sous-espaces propres

Démonstration du fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

Soit $\left(x_1, \ldots, x_p\right) \in \prod_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$ tels que $\sum_{k=1}^p x_k = 0$.

Par recurrence on montre que pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

$$0 = \sum_{k=1}^{p} P(\lambda_k) x_k$$

En particulier avec $P = L_i$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a

$$0 = \sum_{k=1}^{p} L_i(\lambda_k) x_k = x_i$$

On appelle spèctre de u

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre}\}$$

Qui est finit ($|\mathrm{Sp}(u)| \leq n = \dim E$).

Polynôme caractèristique d'un endomorphisme

Définitions, propriétés élémentaires et démonstrations autours du polynôme caractèristique d'un endomorphisme.

Matrices

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit le polynôme caractèristique de A comme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Et on a

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 && (\chi_A \text{ unitaire}) \\ a_{n-1} &= -\operatorname{tr}(A) \\ a_0 &= (-1)^n \det(A) \end{aligned}$$

Endomorphismes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, e base de E, $A = \mathcal{M}_e(u)$. On définit

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

Ceci ne dépend pas de la base e choisie.

De plus

$$\operatorname{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_u)$$

Démonstration

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^{n} (X\delta_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)j})}_{P_\sigma(X)}$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus

$$\deg(P_\sigma) = |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(k) = k\}|$$
$$\deg(P_\sigma) = n \iff \sigma = \mathrm{id}$$

Donc $\deg \chi_A = n$ et cd $\chi_A = 1$.

Si $\sigma \neq \mathrm{id}$, $\deg(P_\sigma) \leq n - 2$, donc a_{n-1} est le terme en X^{n-1} de P_{id}.

$$P_{\mathrm{id}} = \prod_{j=1}^{n} (X - A_{jj})$$

$$a_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n} A_{jj} = -\operatorname{tr}(A)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \chi_A(0) = \det(0 - A) \\ &= (-1)^n \det(A) \end{aligned}$$

Soient e, e' deux bases de E, $A = \mathcal{M}_e(u)$, $A' = \mathcal{M}_{e'}(u)$, $P = P_{e' \to e}$.

$$A' = PAP^{-1}$$

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(X) &= \det(XI_n - A') \\ &= \det\left(XPI_nP^{-1} - PAP^{-1}\right) \\ &= \det(P) \det(XI_n - A) \det\left(P^{-1}\right) \\ &= \chi_A(X) \end{aligned}$$

Multiplicités d'une valeur propre

Définitions des multiplicités d'une valeur propre.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme u.

- On appelle multiplicité algébrique (m_λ), ou juste multiplicité de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u.
- On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension de son espace propre.

On a toujours

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

Démonstration

Soit $(e_1, \dots, e_d)$ base de E_λ complété en $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned} \chi_u &= \chi_{\mathcal{M}_e(u)} \\ &= \left|\begin{array}{c|c} (X-\lambda)I_d & -B \\ \hline 0 & XI_{n-d} - C \end{array}\right| \\ &= (X-\lambda)^d \chi_C(X) \end{aligned}$$

Propriétés diverses du polynôme caractèristique

Cas particuliers de calculs du polynôme caractèristique, et lien avec les endomorphisme induit.

- Pour tout $T \in T_n(\mathbb{K})$

$$\chi_T = \prod_{k=1}^{n} T_{kk}$$

- Pour tout $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ 0 & C \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{K})$, $A \in M_r(\mathbb{K})$, $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$, $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$

$$\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$$

- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F sev stable par u, $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F, on a toujours

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

Démonstration

- L'écrire.
- L'écrire.
- Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de F complété en base de E.

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ 0 & C \end{array}\right)$$

Avec $A = \mathcal{M}_{\tilde{e}}(\tilde{u})$.

Diagonalisabilité

Définition et premier critère de diagonalisabilité.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base e de E tel que $\mathcal{M}_e(u)$ est diagonale.

Une tel base est par définition formée de vecteurs propres de u.

De plus

$$\begin{aligned} &u \text{ diagonalisable} \\ &\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \\ &\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E \end{aligned}$$

En particulier

- Les homothéties sont diagonales dans toutes les bases
- Les projecteurs sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(p - \mathrm{id})}_{E_1(p)} \oplus \underbrace{\ker p}_{E_0(p)} = E$$

- Les symétries sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(s - \mathrm{id})}_{E_1(s)} \oplus \underbrace{\ker s + \mathrm{id}}_{E_{-1}(s)} = E$$

Autre critère de diagonalisabilité

Énoncer du critère de diagonalisabilité sur χ_u et les multiplicités.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

$$u \text{ diagonalisable}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda \end{cases}$$

Où m_λ est la multiplicité (algébrique) de λ.

Ainsi car $\dim E_\lambda(u) \geq 1$ pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,

$$\chi_u \text{ SARS} \Rightarrow u \text{ diagonalisable}$$

Démonstration

- Supposons u diagonalisable, notons e la base qui le diagonalise.

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

Donc χ_u est scindé

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \\ &= \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\deg \chi_u = n = \sum_{k=1}^{p} m_{\lambda_k}$$

$$n = \sum_{k=1}^{p} m_{\lambda_k} \geq \sum_{k=1}^{p} \dim E_{\lambda_k} = n$$

- Supposons χ_u scindé et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

$$\chi_u = \underbrace{\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}_{\deg = n}$$

$$n = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} m_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Donc u est diagonalisable.

Trigonalisabilité

Définition et premier critères de la trigonalisabilité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^+(\mathbb{K})$

Dans ce cas

- $u(e_1) = t_{11}e_1$, donc e_1 est un vecteur propre de u.
- Notons $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ le drapeau.

$$\forall k \in [\![1, n]\!], u(F_k) \subset F_k$$

- $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - t_{kk})$ scindé.

La réciproque est aussi vraie : χ_u scindé $\Rightarrow u$ trigonalisable.

Si $F \neq \{0\}$ est un sev stable par u et u trigonalisable, alors $\tilde{u}$ (induit par u sur F) est trigonalisable (car $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ scindé).

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

Démonstration

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Toute matrice de taille 1 est supérieure.

Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),$$
$$\chi_A \text{ scindé} \Rightarrow A \text{ trigonalisable}$$

Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que χ_A scindé.

χ_A a au moins une racine, donc A admet une valeur propre λ.

On dispose de $X_0 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$AX_0 = \lambda X_0$$

Ainsi on peut construire la base $e' = (X_0, \dots, X_n)$ de $\mathbb{K}^{n+1}$. Notons $P = P_{\text{can} \to e'}$.

$$A = P \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array}\right) P^{-1}$$

Avec $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$ et $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}(X - \lambda)$ d'où $\chi_{\tilde{A}}$ scindé.

Par hypothèse de récurrence $\tilde{A}$ est trigonalisable et on peut donc construire $P_0 \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Caractèrisation des endomorphismes nilpotents

Caractèrisation des endomorphisme nilpotents.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. u nilpotent
2. u trigonalisable en une matrice strictement supérieure.
3. u trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$
4. $\chi_u = X^n$

Démonstration

- ($4 \Rightarrow 3$) $\chi_u = X^n$ est scindé donc u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = Z(X^n) = \{0\}$.
- ($3 \Leftrightarrow 2$) Évident.
- ($3 \Rightarrow 4$) On dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \chi_u = X^n$$

- ($2 \Rightarrow 1$) On dispose de e base de E tel que $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^{++}(\mathbb{K})$, notons $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

$$u(F_k) \subseteq u(F_{k-1})$$
$$u^n(F_n = E) \subseteq F_0 = \{0\}$$
$$u^n = 0$$

- ($1 \Rightarrow 2$) u est nilpotent d'indice d.

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^d = E$$

Construisons une base adaptée

$$\left(\overbrace{\underbrace{e_1, \dots, e_{i_1}}_{\text{base de } \ker u}, \dots, e_{i_2}}^{\text{base de } \ker u^2}, \dots, e_{i_d} \right)$$

Pour tout $x \in \ker u^k$:

$$u(x) \in \ker u^{k-1}$$

Ainsi pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ si $i_j + 1 \leq k \leq i_{j+1}$

$$e_k \in \ker u^j$$
$$u(e_k) \in \ker u^{j-1}$$
$$u(e_k) \in \mathrm{Vect}\left(e_1, \dots, e_{i_{j-1}}\right)$$

Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractèristique

Lien entre racines du polynôme minimal et celles du polynôme caractèristique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u.

$$\mathrm{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$$
$$Z(\chi_u) = \mathrm{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$$

Démonstration

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et $x \in E_\lambda(u) \setminus \{0\}$:

  $$P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

  $$P(u)(x) = \sum_{k=0}^{d} u^k(x) = \sum_{k=0}^{d} \lambda^k x$$
  $$= P(\lambda)x = 0$$

  Or $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$.

- Π_u annule u d'où $\mathrm{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ racine de Π_u

  $$\Pi_u = (X - \lambda)Q(X)$$
  $$0 = (u - \lambda\,\mathrm{id}) \circ Q(u)$$

  Donc $\mathrm{im}\, Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda\,\mathrm{id})$.

  Mais $Q(u) \neq 0$ car Π_u minimal, donc

  $$\dim(\mathrm{im}\, Q(u)) \geq 1$$
  $$\mathrm{im}\, Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) = E_\lambda(u)$$
  $$\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$$

Théorème des noyaux

Énoncé et démonstrations du théorème des noyaux.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ($\mathbb{K}$-ev de dimension finie), $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si $P = \prod_{k=1}^{N} P_k$ avec $P_1, \dots, P_N$ deux à deux premiers entre eux, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

Si de plus P annule u alors

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Où e est la base construite par concaténation de bases des $\ker P_k(u)$.

Démonstration

Par récurrence sur N.

Pour $P = P_1 P_2$ avec $P_1 \wedge P_2 = 1$:

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = 1$$

$$P_1(u) \circ V_1(u) + P_2(u) \circ V_2(u) = \mathrm{id} \quad (*)$$

En évaluant on trouve

$$\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$$

De plus

$$P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u) = P(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \ker P_1(u) \subseteq \ker P(u) \\ \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u) \end{cases}$$

$$\ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u)$$

Soit $x \in \ker P(u)$, par $(*)$ on a

$$x = \underbrace{V_1(u) \circ P_1(u)(x)}_{x_2} + \underbrace{V_2(u) \circ P_2(u)(x)}_{x_1}$$

$$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= (P_1 V_2 P_2)(u)(x) \\ &= (V_1 P)(u)(x) \\ &= 0 \\ P_2(u)(x_2) &= (P_2 V_1 P_1)(u)(x) \\ &= (V_2 P)(u)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \underbrace{x_1}_{\in \ker P_1(u)} + \underbrace{x_2}_{\in \ker P_2(u)}$$

D'où $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

Supposons maintenant le résultat pour tout $P_1, \dots, P_N$ respectant les conditions.

Soient $P = P_1 \cdots P_{N+1} \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1, \dots, P_{N+1}$ deux à deux premiers entre eux.

Donc $Q = P_1 P_2 \cdots P_N$ et P_{N+1} sont premiers entre eux.

Ainsi

$$\begin{aligned} \ker P(u) &= \ker (P_{N+1} Q)(u) \\ &= \underbrace{\ker Q(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{cas } N=2} \\ &= \underbrace{\bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{H.R.}} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N+1} \ker P_k(u) \end{aligned}$$

Démonstration annexe du théorème des noyaux

Démonstration secondaire du théorème des noyaux dans le cas d'un polynôme annulateur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose $P = \prod_{k=1}^{N} P_k$ annulateur de u, $P_1, \dots, P_N$ premiers entre eux deux à deux. On pose

$$Q_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} P_i$$

Qui sont premiers dans leur ensemble.

$$\sum_{k=1}^{N} V_k Q_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^{N} \underbrace{V_k(u) \circ Q_k(u)}_{\Pi_k} = \mathrm{id} \quad (1)$$

On remarque que

$$P_k(u) \circ \Pi_k = (V_k P_k Q_k)(u) = (V_k P)(u) = 0$$
$$\text{Donc} \quad \operatorname{im} \Pi_k \subseteq \ker P_k(u)$$

Et pour $k \neq i$, $P \mid Q_i Q_k$ d'où

$$P \mid (V_k P_k)(V_i P_i)$$
$$\Pi_i \circ \Pi_k = 0$$

Donc par (1)

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_k \circ \Pi_i = \Pi_k \circ \Pi_k = \Pi_k$$

Donc les Π_k sont des projecteurs.

Soit $x \in \ker P_k(u)$, pour tout $i \neq k$, $\Pi_i(x) = 0$. Par (1)

$$x = \Pi_k(x)$$
$$x \in \operatorname{im} \Pi_k$$

Ainsi

$$\ker P_k(u) = \operatorname{im} \Pi_k$$
$$\ker P_i(u) \subseteq \ker \Pi_k$$

Les Π_k projettent sur $\ker P_k$.

Théorème des noyaux

Soient $(x_1, \dots, x_N) \in \prod_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$ tels que $\sum_{k=1}^{N} x_k = 0$.

Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$

$$\Pi_i\left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right) = x_i = 0$$

Donc les $\ker P_k(u) = \operatorname{im} \Pi_k$ sont en somme directe.

Soit $x \in \ker P(u) = E$, par (1)

$$x = \sum_{k=1}^{N} \Pi_k(x) \in \sum_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

D'où

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$

Et de plus

$$\operatorname{im} \Pi_k = \ker P_k(u)$$
$$\ker \Pi_k = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \ker P_i(u)$$
$$\Pi_k \in \mathbb{K}[u]$$

Critère de Diagonalisabilité

Démonstration d'une CNS de diagonalisabilité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. u diagonalisable.
2. u annule un polynôme SARS.
3. Π_u est SARS

Démonstration

- $(2 \Leftrightarrow 3)$

$$\begin{aligned} &\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P \text{ SARS et } P(u) = 0 \\ \Leftrightarrow\ &\exists P \in \mathbb{K}[X],\ P \text{ SARS et } \Pi_u \mid P \\ \Leftrightarrow\ &\Pi_u \text{ SARS} \end{aligned}$$

- $(3 \Rightarrow 1)$ Π_u SARS donc

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}^{N} (X - \lambda)$$

Par le TDN

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Donc u diagonalisable.

- $(1 \Rightarrow 3)$ u diagonalisable

$$\mathcal{M}_e(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \lambda_n & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{M}$$

$$P(X) = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k) \ \text{ SARS}$$

$$\begin{aligned} P(M) &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & P(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & P(\lambda_n) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\Pi_u \mid P$ SARS.

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev stable par u.

Notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit par u sur F.

- $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$
- Si u diagonalisable, alors $\tilde{u}$ aussi.

Démonstration

- $\Pi_u(\tilde{u}) = 0$ donc $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$.
- Si u diagonalisable, Π_u est SARS, donc $\Pi_{\tilde{u}}$ aussi (car divise) donc $\tilde{u}$ est diagonalisable.

Sous-espaces cycliques

Définition de sous-espace cyclique et base associé.

Pour un $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$ on appelle sous-espace cyclique engendré par x_0 (pour u)

$$F_{x_0} = \mathrm{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

Cet espace admet comme base

$$\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0)\big)$$

Où $d = \deg \Pi_{u,x_0}$ le polynôme minimal ponctuel, l'unique polynôme unitaire minimal tel que

$$\text{Pour } \theta_{x_0} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \to & E \\ P & \mapsto & P(u)(x_0) \end{cases}$$

$$\ker \theta_{x_0} = \Pi_{u,x_0}\mathbb{K}[X]$$

Démonstration

$\theta_{x_0} \in \mathcal{L}(E)$, donc $\ker \theta_{x_0}$ est un sev, donc un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Soit $P \in \ker \theta_{x_0}$, $Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{aligned} \theta_{x_0}(QP) &= Q(u)(P(u)(x_0)) \\ &= Q(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ker \theta_{x_0}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui est principal d'où Π_{u,x_0} existe. Notons $d_{x_0} = \deg \Pi_{u,x_0}$.

Par existance et unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \oplus \ker \theta_{x_0}$$

Donc $\theta_{x_0}\big|_{\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X]}$ isomorphisme de $\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \to \mathrm{im}\, \theta_{x_0} = F_{x_0}$.

Donc F_{x_0} a pour base

$$\begin{aligned} &\big(\theta_{x_0}(1), \theta_{x_0}(X), \dots, \theta_{x_0}(X^{d_{x_0}-1})\big) \\ &= \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0)\big) \end{aligned}$$

Endomorphismes cycliques

Définition, propriétés, démonstration autour des endomorphismes cycliques.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est cyclique si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1. $\exists x_0 \in E,\ \operatorname{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}} = E$.
2. $\exists x_0 \in E,\ \big(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)\big)$ base de E.

Propriétés en vrac (sans démonstration)

- Si u cyclique, tout endomorphisme induit l'est aussi.
- Si u cyclique, u admet un nombre fini de sev stables.
- Si $\mathbb{K}$ est infini et u admet un nombre fini de sev stables, alors u est cyclique.

Démonstration équivalence

- $(2 \Rightarrow 1)$ Évident.
- $(1 \Rightarrow 2)$ $F_{x_0} = \operatorname{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est les sous-espace engendré par x_0 pour u, donc

  $$\big(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0)\big)$$

  Où $d = \deg \Pi_{u,x_0}$ en est une base.

  Or $F_{x_0} = E$ par hypothèse, donc $\dim F_{x_0} = n$ et $d = n$.

Vision matricielle de la cyclicité

Lien entre endomorphisme cyclique et matrices de compagnon.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est cyclique ss'il existe une base e de E et P unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_e(u) = C_P$.

Dans ce cas $\Pi_u = P$.

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique pour $x_0 \in E$. Notons $e = \left(x_0, u(x_0), \ldots, u^{n-1}(x_0)\right)$ la base associé.

On dispose alors de $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$u^n(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$$

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Et alors

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} u(x_0) & \cdots & & u^n(x_0) \end{array} \\ \begin{array}{c} x_0 \\ u(x_0) \\ \vdots \\ u^{n-1}(x_0) \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$= C_P$$

Réciproquement :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1, \ldots, e_n)$ base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array}\right)$$

Alors pour $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$u(e_k) = u(e_{k+1})$$

$$\text{Donc } e = \left(e_1, u(e_1), \ldots, u^{n-1}(e_1)\right)$$

Donc u est cyclique.

Ainsi :

$$P(u)(x_0) = u^n(x_0) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)}_{u^n(x_0)} = 0$$

Donc pour tout $m \in [\![0, n-1]\!]$

$$P(u)(u^m(x_0)) = u^m(P(u)(x_0)) = 0$$

Ainsi $P(u)$ annule une base, d'où $\Pi_u \mid P$.

Or $\deg \Pi_{u,x_0} = n$ car u cyclique et $\Pi_{u,x_0} \mid \Pi_u$, donc

$$n \leq \deg \Pi_u \leq \deg P = n$$

Et comme Π_u et P sont unitaires

$$\Pi_u = P$$

Matrice compagnon

Définition de matrice compagnon.

Soit $P = X^d \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle matrice compagnon de P la matrice

$$C_P = \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & & -a_1 \\ & \ddots & & 0 & \vdots \\ & & & 1 & -a_{d-1} \end{array}\right)$$

Ainsi (en développant selon la dernière colonne)

$$\chi_{C_P}(X) = P(X)$$

Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{u,x} = \Pi_u$.

En déduire que u cyclique ssi $\deg \Pi_u = n$.

Soit $u \in \mathcal{L}(e)$.

On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k}$$

Avec $P_1, \dots, P_N$ irréductibles deux à deux distincts.

Démonstration $\mathbb{K}$ quelconque

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker P_k^{d_k}(u)}_{F_k}$$

$$\ker P_k^{d_k-1}(u) \subseteq \ker P_k^{d_k}(u) = F_k$$

Supposons par l'absurde qu'on ai égalité pour un k.

$$E = \bigoplus_{j \neq k} \ker P_j^{d_j}(u) \oplus \ker P_k^{d_k-1}(u)$$

$$= \underbrace{\ker\left(P_k^{d_k-1} \prod_{j \neq k} P_j^{d_j}\right)(u)}_{\substack{\text{ne peut annuler } u \\ \text{car } \Pi_u \text{ minimal}}}$$

Donc $\ker P_k^{d_k-1}(u) \subsetneq \ker P_k^{d_k}(u)$.

Pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ on dispose de

$$x_k \in F_k \setminus \ker P_k^{d_k-1}(u)$$

$$\text{Donc} \begin{cases} P_k^{d_k}(u)(x_k) = 0 \\ P_k^{d_k-1}(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} \Pi_{u,x_k} \mid P_k^{d_k} \\ \Pi_{u,x_k} \nmid P_k^{d_k-1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x_k} = P_k^{d_k}}_{\text{car } P_k \text{ irréductible}}$$

On pose $x = \sum_{k=1}^{N} x_k$, alors pour tout $P \in \Pi_{u,x}\mathbb{K}[X]$

$$P(u)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{N} P(u)(x_k) = 0$$

$$\underbrace{\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, N]\!],\ P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, N]\!],\ P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$.

Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout $x \in E$, $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ donc

$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$

$$|D| = \prod_{k=1}^{N} (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$ d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \underbrace{\bigcup_{P \in D'} \ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

Donc on dipose de $Q = \Pi_{u,y} \in D'$ tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

Par minimalité de Π_u, $\Pi_{u,y} = \Pi_u$.

CNS de cyclicité

On sait que si u cyclique, alors on dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = C_{\Pi_u}$$

Avec $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n.

Supposons maintenant que $\deg \Pi_u = n$.

On dispose de $x_0 \in E$ tel que $\Pi_{u,x_0} = \Pi_u$, d'où

$$\deg \Pi_{u,x_0} = n = \dim \underbrace{\mathrm{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}}_{F_{x_0}}$$

D'où $F_{x_0} = E$ et u cyclique.

Théorème de Cayley-Hamilton

Énoncé et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0$ c'est à dire $\Pi_u \mid \chi_u$.

Démonstration

Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$, on veut montrer $\chi_u(u)(x_0) = 0$.

On pose $F_{x_0} = \mathrm{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ sev de E stable par u.

Soit $\tilde{u}$ endomorphisme induit par u sur F_{x_0}, qui est donc cyclique.

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$e_0 = \left(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0)\right)$$

Soit une base de F_{x_0}.

$$\mathcal{M}_{e_0}(\tilde{u}) = C_P = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Où

$$\tilde{u}^d(x_0) = u^d(x_0) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x_0)$$

$$P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Or $P = \chi_{C_P} = \chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ donc

$$\chi_u(u)(x_0) = Q(u)(P(u)(x_0)) = 0$$

Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, CNS pour u cyclique.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, CNS pour u cyclique.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = 1$.
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, montrer que $\mathrm{Com}\, u = \mathbb{K}[u]$.

---

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)$$

Où les $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont deux à deux distincts (Π_u SARS).

u cyclique ssi $N = n = \dim E$.

- Si u cyclique, $\deg \Pi_u = n = N$.
- Si $\deg \Pi_u = n$

  Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de vecteurs propres associés aux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

  Posons $x = \sum_{k=1}^{n} e_k$.

$$\mathcal{M}_e(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0)) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

  Matrice de Vandermonde inversible, d'où $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base.

2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q.

$$\Pi_u = X^q$$

- Si u cyclique, alors $\deg \Pi_u = q = n$.
- Si $q = n$, $u^{n-1} \neq 0$, donc on dispose de $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.

  Et $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre et donc une base.

  (En évaluant $u^i\left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0)\right)$).

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, donc on dispose de e base de E tel que pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$

$$\mathcal{M}_e(u - \lambda\,\mathrm{id}) = \left(\begin{array}{cccc|c} -\lambda & & & & a_0 \\ \hline 1 & -\lambda & & & a_2 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{array}\right)$$

Dont le quadrant inférieur gauche est une sous-matrice inversible de taille $n - 1$.

$$\mathrm{rg}\,(u - \lambda\,\mathrm{id}) \geq n - 1$$

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) = \dim \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}) \leq 1$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. On dispose de $x_0 \in E$ tel que

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

Est une base.

On a déjà $\mathbb{K}[u] \subseteq \mathrm{Com}(u)$.

Soit $v \in \mathrm{Com}(u)$. On dispose de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

Soit $m \in [\![0, n-1]\!]$

$$\begin{aligned} v(u^m(x_0)) &= u^m(v(x_0)) \\ &= u^m\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(u^m(x_0)) \end{aligned}$$

Donc v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coincident sur une base, d'où $v \in \mathbb{K}[u]$.

Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, CNS de trigonalisabilité sur Π_u.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable ssi Π_u scindé.

Démonstration

- Supposons u trigonalisable, donc χ_u est scindé or $\Pi_u \mid \chi_u$ donc Π_u est scindé.
- Supposons Π_u scindé.

  $$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{d_k}$$

  Avec $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

  Par le TDN

  $$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker (u - \lambda_k \,\mathrm{id})^{d_k}}_{F_k}$$

  Pour k fixé, F_k est stable par u et $u - \lambda \,\mathrm{id}$, posons u_k induit par u sur F_k.

  $u_k - \lambda_k \,\mathrm{id}$ est nilpotent, donc on dispose de e_k base de F_k tel que

  $$\mathcal{M}_{e_k}(u_k - \lambda_k \,\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

  $$\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

  Notons e la base concatenant les bases $e_1, \dots, e_N$.

  $$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

  Où les $A_1, \dots A_N$ sont triangulaires.

- (Autre méthode) Par récurrence sur n.

  Cas $n = 1$ évident.

  Supposons le résultat pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E = n + 1$ et Π_u scindé.

  Π_u admet au moins une racine λ, on dispose donc de $x \in E$ vecteur propre associé.

  On forme la base $(\lambda, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E.

  $$\mathcal{M}_e(u) = A = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

  Or

  $$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \Pi_u(A) \\ &= \left(\begin{array}{c|ccc} \Pi_u(\lambda) & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Pi_u(A_1) & \\ 0 & & & \end{array}\right) \end{aligned}$$

  D'où $\Pi_u(A_1) = 0$ donc $\Pi_{A_1} \mid \Pi_u$ et Π_{A_1} scindé, donc par hypothèse de récurrence A_1 est trigonalisable.

Exercice : polynôme caractèristique divisant une puissance du polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E$. Montrer que $\chi_u \mid \Pi_u^n$

Par récurrence forte sur n.

Cas $n = 1$ évident.

Supposons le résultat pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$.

Si u est cyclique, $\Pi_u = \chi_u$ d'où $\chi_u \mid \Pi_u^n$.

Sinon on prend $x_0 \in E \setminus \{0\}$, $k = \deg \Pi_{u,x_0} < n$ donc $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ est libre, on la complète en une base e de E.

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} C_{\Pi_{u,x_0}} & * \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

Donc

$$\chi_u = \underbrace{\chi_{C_{\Pi_{u,x_0}}}}_{\Pi_{u,x_0}} \chi_A$$

$$\chi_u \mid \Pi_u \chi_A$$

Or par hypothèse de récurrence $\chi_A \mid \Pi_A^{n-k}$ et

$$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_u\left(C_{\Pi_{u,x_0}}\right) & * \\ \hline 0 & \Pi_u(A) \end{array}\right)$$

Donc $\Pi_A \mid \Pi_u$

Ainsi

$$\chi_u \mid \Pi_u \Pi_A^{n-k} \mid \Pi_u^{n-k+1} \mid \Pi_u^n$$

Décomposition en sous espaces caractèristiques

Définition et démonstration de la décomposition en sous-espaces caractèristiques.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé, l'espace E se décompose en somme directe de sev stables par u :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} F_k$$

Où pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, u_k induit par u sur F_k vérifie

$$u_k = \lambda_k \operatorname{id} + n_k$$

Où n_k est nilpotent et $\lambda_k \in \operatorname{Sp}(u)$.

Dé plus $\dim F_k = m_k$ et $F_k = \ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k}$.

Cas diagonalisable

Si u est diagonalisable

$$\dim F_k = m_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$$

$$\begin{aligned} E_{\lambda_k}(u) &= \ker(u - \lambda_k \operatorname{id}) \\ &\subseteq \ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k} = F_k \end{aligned}$$

$$E_{\lambda_k}(u) = F_k$$

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Où $\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

Par le TDN on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker(u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k}}_{F_k}$$

Les F_k sont stables par u, on peut donc poser u_k induit par u sur F_k.

On note $n_k = u_k - \lambda_k \operatorname{id} \in \mathcal{L}(F_k)$ qui est nilpotent d'ordre inférieur à m_k.

Soit e_k base de F_k tel que $\mathcal{M}_{e_k}(n_k) = N_k \in T^{++}_{\dim F_k}(\mathbb{K})$.

Ainsi $\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = \lambda_k I_{\dim F_k} + N_k$.

En concatenant les bases $(e_k)_k$ en une base e de E on trouve

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in [\![1, N]\!],\ A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

D'où

$$\prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$$

$$m_k = \dim F_k$$

Sous-espaces caractèristiques et polynôme minimal

Lien entre la décomposition en sous-espaces caractèristiques et le polynôme minimal.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé, à fortiori, Π_u est scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{d_k}$$
$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

On peut décomposer par le TDN sur Π_u et en les espaces caractèristiques

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^{N} \overbrace{\ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k}}^{F_k} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}}_{G_k} \end{aligned}$$

Or $d_k \leq m_k$ (car $\Pi_u \mid \chi_u$), d'où

$$\begin{aligned} G_k &= \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k} \\ &\subseteq \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{m_k} = F_k \end{aligned}$$

Mais $\bigoplus_{k=1}^{N} G_k = \bigoplus_{k=1}^{N} F_k$ donc $G_k = F_k$.

Soit $q_k \leq d_k$ l'indice de nilpotence de $n_k = (u - \lambda_k \operatorname{id})|_{F_k}^{F_k}$.

$$\begin{aligned} F_k &\subseteq \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{q_k} \\ &\subseteq \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k} = F_k \end{aligned}$$

Posons $Q = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{q_k}$

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker (u - \lambda_k)^{d_k} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker (u - \lambda_k)^{q_k} \end{aligned}$$

Donc par le TDN $\ker Q(u) = E$, $\Pi_u \mid Q$ donc $d_k \leq q_k \leq d_k$.

Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi_u = X^d Q$ avec $X \nmid Q$.

1. Montrer que

$$d = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\right\}$$

2. Montrer que

$$E = \ker u^d \oplus \operatorname{im} u^d$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi_u = X^d Q$ avec $X \nmid Q$.

1. Notons

$$q = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\right\}$$

Soit $\tilde{u}$ l'induit par u sur $\ker u^q$.

$$\begin{cases} \tilde{u}^q = 0 \\ \tilde{u}^{q-1} \neq 0 \end{cases} \text{ Donc } \Pi_{\tilde{u}} = X^q$$

$$X^q \mid \Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u = X^d Q$$

$$q \leq d$$

Donc $\ker u^q = \ker u^d$

$$\ker u^d \circ Q(u) = E$$

$$\operatorname{im} Q(u) \subseteq \ker u^d = \ker u^q$$

$$\ker u^q \circ Q(u) = E$$

$$X^d Q \mid X^q Q$$

$$q \geq d$$

2. On a (TDN)

$$E = \ker u^d \oplus \ker Q(u)$$

Soit $y \in \operatorname{im} u^d$, on dispose donc de $x \in E$ tel que $y = u^d(x)$.

$$y = u^d(x)$$

$$Q(u)(y) = \left(X^d Q\right)(u)(x) = 0$$

$$\operatorname{im} u^d \subseteq \ker Q(u)$$

Or par le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} u^d &= \dim E - \dim \ker u^d \\ &= \dim \ker Q(u) \end{aligned}$$

D'où $\operatorname{im} u^d = \ker Q(u)$.

Décomposition de Dunford

Définition et démonstration de la décomposition de Dunford.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé.

On dispose de $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que
- $u = d + n$
- d diagonalisable
- n nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$

De plus cette décomposition est unique.

Elle peut entre autre servire pour les puissances de matrices :

$$A^k = P \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{m_1} + N_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n I_{m_n} + N_n)^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Démonstration

On reprend la décomposition en sous-espaces caractèristiques

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker (u - \lambda_k \operatorname{id})_k^m}_{F_k}$$

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ F_k = \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}$$

On note u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k.

$$F_k = \ker (u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{D'où } \left(u_k - \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}\right)^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$$

Posons

$$n_k = u_k - \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}$$

$$\text{Donc } u_k = \lambda_k \operatorname{id}_{F_k} + n_k$$

Où n_k est nilpotent d'ordre d_k (cf démonstration sous-espaces caractèristiques).

On pose alors $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall k \in [\![1, n]\!],$$

$$d|_{F_k}^{F_k} = \lambda_k \operatorname{id}_{F_k}$$

$$n|_{F_k}^{F_k} = n_k$$

Donc d diagonalisable et n nilpotent d'odre $\max_{k \in [\![1;n]\!]}(d_k)$.

Matriciellement

$$\mathcal{M}_e(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_k} \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{M}_e(n) = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_N \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{K})$$

$$DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N N_N \end{pmatrix} = ND$$

Unicité

On prend $p_1, \ldots, p_N$ les projecteurs associés à la décomposition (cf. démonstration du TDN)

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} F_k = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker (u - \lambda_k \operatorname{id})^{d_k}$$

On avait montrer que $p_1, \ldots, p_N \in \mathbb{K}[u]$.

On a

$$d = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k \in \mathbb{K}[u]$$

$$n = u - d \in \mathbb{K}[u]$$

Soient $d', n' \in \mathcal{L}(E)$ respectent les conditions.

Comme $u = d' + n'$, d' commute avec u et n' aussi, donc d' commute avec $d \in \mathbb{K}[u]$ et n' avec $n \in \mathbb{K}[u]$.

Ainsi d' et d sont codiagonalisables, d'où $d' - d$ est diagonalisable.

Et $n - n'$ est nilpotent (binôme de Newton).

Or $d' + n' = d + n$ d'où

$$\underbrace{d' - d}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{n - n'}_{\text{nilpotent}}$$

D'où $d' - d = 0$ et $n' - n = 0$.

Codiagonalisabilité

Définition et critère de codiagonalisabilité.

Soient $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes.

On dit que les $(u_i)_i$ sont codiagonalisables s'il existe une base e de E tels que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_e(u_i) \in D_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : deux endomorphismes

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} E_{\lambda_k}(u) \text{ où } \mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Comme $u \circ v = v \circ u$, les $E_{\lambda_k}(u)$ sont stables par v.

Soit v_k l'induit de v sur $E_{\lambda_k}(u)$, qui est diagonalisable car v l'est.

Pour chaque $k \in [\![1, N]\!]$ on dispose de e_k base de vecteurs propres de v_k (donc de v et u).

En concatenant on obtient une base qui convient.

Démonstration famille quelconque

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Cas $n = 1$ évident.

Supposons la propriété pour tout $\mathbb{K}$-ev de dimension inférieur à n.

Soit $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ diagonalisables commutant avec $\dim E = n + 1$.

Si tout les u_i sont des homothéties n'importe quelle base convient.

Sinon on dispose de $j \in I$ tel que u_j n'est pas une homothétie.

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} E_{\lambda_k}(u_j) \text{ où } \mathrm{Sp}(u_j) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Pour tout $i \in I$, les $E_{\lambda_k}(u_j)$ sont stables par u_i car $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

Notons $u_{i,k}$ l'induit de u_i sur $E_{\lambda_k}(u_j)$ qui est de dimension inférieur à n car u_j n'est pas une homothétie.

Les $(u_{i,k})_i$ sont donc diagonalisables et commutent entre eux, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On dispose donc de e_k base de $E_{\lambda_k}(u_j)$ formée de vecteurs propres commmun aux $(u_i)_i$. Il suffit alors de les concatener.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur le commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

- Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \mathrm{Com}\,(u)$ ssi les espaces propres de u sont stables par v.
- $\dim \mathrm{Com}\,(u) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$

Démonstration

- L'implication directe est évidente.

  Supposons $v \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise les espaces propres de u.

  Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ soit $x \in E_\lambda(u)$, d'où $v(x) \in E_\lambda(u)$.

  $$v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$$
  $$u(v(x)) = \lambda v(x)$$

  Or u diagonalisable, donc on dispose d'une base de vecteurs propres de u.

  Ainsi $u \circ v$ et $v \circ u$ coincident sur une base d'où l'égalité.

- On note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

  On considère

  $$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Com}(u) & \to & \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u)) \\ v & \mapsto & \left(v|_{E_{\lambda_1}(u)}, \dots, v|_{E_{\lambda_N}(u)}\right) \end{array} \right.$$

  Qui est linéaire.

  Soit $v \in \ker \theta$: pour tout $k \in [\![1, N]\!]$

  $$v\left(E_{\lambda_k}(u)\right) = 0$$
  $$\text{Or } \ E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u)$$
  $$\text{Donc } \ v = 0$$

  Soit $(v_1, \dots, v_k) \in \prod_{k=1}^N \mathcal{L}\left(E_{\lambda_k}(u)\right)$.

  Pour $k \in [\![1, N]\!]$, on note e_k base de $E_{\lambda_k}(u)$.

  On définit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui coincide avec v_k sur tout les vecteurs de e_k.

  Ainsi $\theta(v) = (v_1, \dots, v_k)$, et θ isomorphisme.

  $$\begin{aligned} \dim \mathrm{Com}(u) &= \sum_{k=1}^N \dim \mathcal{L}\left(E_{\lambda_k}(u)\right) \\ &= \sum_{k=1}^N \left(\dim E_{\lambda_k}(u)\right)^2 \end{aligned}$$

Exercice : le bicommutant

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On définit le bicommutant de u

$$B(u) = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall v \in \mathrm{Com}(u) \\ v \circ w = w \circ v \end{array} \right\}$$

Montrer que $B(u) = \mathbb{K}[u]$.

Comme $u \in \mathrm{Com}\,(u)$ on remarque

$$\mathbb{K}[u] \subseteq B(u) \subseteq \mathrm{Com}(u)$$

On construit e concatenation de bases des $E_{\lambda_k}(u)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$ et $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

Soit $w \in B(u) \subseteq \mathrm{Com}(u)$ donc les $\left(E_{\lambda_k}\right)_k$ sont stables par w.

$$M = \mathcal{M}_e(w) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_N \end{pmatrix}$$

Pour tout $v \in \mathrm{Com}(u), w \circ v = v \circ w$.

$$A = \mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Or $AM = MA$ donc

$$\forall k \in [\![1, N]\!], A_k M_k = M_k A_k$$

Ainsi M_k est une matrice qui commute avec toutes les autres.

On montre facilement grâce à E_{ij} que $M_k = a_k I_{m_k}$.

Par interpolation de Lagrange on dispose de $P \in \mathbb{K}_{N+1}(X)$ tel que $P(\lambda_k) = a_k$. Or

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_e(P(u)) &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N I_{m_N} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}_e(w) \end{aligned}$$

D'où $w \in \mathbb{K}[u]$.

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition et propriétés des projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} (X - \lambda_k)$$

Soient $p_1, \dots, p_N$ les projecteurs associés à la décomposition

$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{\ker(u - \lambda_k \operatorname{id})}_{E_{\lambda_k}(u)}$$

On a alors pour tout $i, j \in [\![1, N]\!]$

$$p_i|_{E_{\lambda_j}(u)} = \delta_{ij} \lambda_i \operatorname{id}$$

Dans la base e diagonalisant u et pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ on a

$$\mathcal{M}_e(P(u)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(p_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & I_{m_k} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $p_k = L_k(u) \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$ avec L_k polynôme de Lagrange associés aux $(\lambda_i)_i$.

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$u = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k p_k$$

$$u^p = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^q p_k \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$$

Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur les sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

1. Si G sev stable par u alors
$$G = \bigoplus_{k=1}^{N} G \cap E_{\lambda_k}(u)$$
2. Réciproquement si $G_1, \dots, G_N$ sont des sevs de $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_N}(u)$ respectivements alors
$$G = \bigoplus_{k=1} G_k$$
Est un sev stable par u.

Démonstration

1. Soit $\tilde{u}$ induit par u sur G donc diagonalisable.
$$\begin{aligned} G &= \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\tilde{u})} E_\lambda(\tilde{u}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker(\tilde{u} - \lambda_k \mathrm{id}_G) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} G \cap \underbrace{\ker(u - \lambda_k \mathrm{id})}_{E_{\lambda_k}(u)} \end{aligned}$$
2. L'écrire.

Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel

Démonstration de l'existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel.

Soit E un $\mathbb{R}$-ev et $u \in \mathcal{L}(E)$, u admet une droite ou un plan stable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k^{m_k}$$

Avec $P_1, \ldots, P_N$ irréductibles deux à deux distincts.

- Si l'un des P_k est de degré 1.

  $$P_k = X - \lambda$$

  Et λ est racine de Π_u et est donc une valeur propre de u d'où l'existence d'une droite stable.

- Si l'un des P_k est de degré 2.

  $$P_k = X^2 - aX - b$$

  Supposons par l'absurde que $\ker P_k(u) = \{0\}$.

  $$\Pi_u(u) = P_k(u) \circ Q(u) = 0$$

  D'où $Q(u) = 0$ qui est absurde car Π_u est minimal.

  On dispose donc de $x \in \ker P_k(u) \setminus \{0\}$.

  $$u^2(x) = au(x) + bx$$

  D'où $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ stable par u.

  Si $u(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

  $$\alpha^2 x = (a\alpha + b)x$$
  $$\alpha \mid X^2 - aX - b$$

  Absurde donc F est un plan.

Endomorphismes simples

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. Les seuls sev stables de u sont E et $\{0\}$.
2. χ_u irréductible.
3. u est dit simple.

---

1. $(2 \Rightarrow 1)$ Par contraposé

   Soit F sev stable par u de dimension dans $[\![1, n-1]\!]$, et $\tilde{u}$ l'endomorphisme induit.

   $$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

   Avec $\chi_{\tilde{u}} = \dim F \neq \deg \chi_u$ d'où χ_u non irréductible.

2. $(1 \Rightarrow 2)$ Par contraposé : Soit $x \in E \setminus \{0\}$ on note

   $$F_x = \mathrm{Vect}\big(u^k(x_0)\big)_{k\in\mathbb{N}}$$

   Qui est stable par u.

   Si $\deg \Pi_{u,x} = \dim F_x \leq n-1$, alors u possède un sev stable non trivial.

   Sinon $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u \mid \chi_u$ tous unitaires de degré n, donc égaux. Ainsi

   $$\Pi_{u,x} = \chi_u = PQ$$
   $$y = Q(u)(x)$$
   $$\Pi_{u,y} = P$$

   D'où F_y stable non trivial.

Endomorphismes semi-simples

Définition et propriétés des endomorphismes semi-simples.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. Tout sev stable par u admet un supplémentaire stable.
2. Π_u est sans carrés
$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k$$
Avec $P_1, ..., P_N$ irréductibles deux à deux distincts.
3. u est semi-simple.

Démonstration

1. ($1 \Rightarrow 2$) On pose
$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k}$$
Pour $i \in [\![1, N]\!]$, $F = \ker P_k(u)$ admet un supplémentaire stable G.

   Soient u_F, u_G induient par u sur F et G.
$$\Pi_{u_F} = P_i$$
Car annule et irréductible.

   De plus
$$\begin{gathered} P(u) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in F,\ P(u)(x) = 0 \\ \forall x \in G,\ P(u)(x) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \Pi_{u_F} \mid P \text{ et } \Pi_{u_G} \mid P \\ \Leftrightarrow \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G} \mid P \\ \text{Donc } \Pi_u = \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G} \end{gathered}$$
Ainsi
$$\begin{gathered} \Pi_{u_G} \mid \prod_{k=1}^{N} P_k^{d_k} \\ \Pi_u = \Pi_{u_G} \vee P_i \end{gathered}$$
Mais
$$\begin{gathered} G \cap F = \{0\} \\ G \cap \ker P_1(u) = \{0\} \\ 0 \neq P_i(u_G) \in \mathrm{GL}(E) \\ P_i \nmid \Pi_{u_G} \end{gathered}$$
Ainsi comme $\Pi_u = P_i \vee \Pi_{u_G}$
$$d_i = 1$$

2. ($2 \Rightarrow 1$) Cas Π_u irréductible.

   On suppose Π_u irréductible de degré d.

   Donc pour tout $x \in E \setminus \{0\}$
$$\begin{gathered} \Pi_{u,x} \mid \Pi_u \text{ d'où } \Pi_u = \Pi_{u,x} \\ \text{et } \dim F_x = d \end{gathered}$$
Soit F sev stable par u, si $F = E$, $G = 0$ convient.

   On dispose alors de $x_1 \in E \setminus F$.

   Comme F et F_{x_1} sont stables par u, $F \cap F_{x_1}$ l'est.

   Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in F \cap F_{x_1} \setminus \{0\}$.
$$\begin{gathered} \underbrace{F_x}_{\dim d} \subseteq \underbrace{\overbrace{F_{x_1}}^{\dim d} \cap F}_{\dim \leq d} \\ F_{x_1} \subseteq F \\ x_1 \in F \end{gathered}$$
Qui est absurde : $F \oplus F_{x_1} \subseteq E$.

   Supposons construits $x_1, ..., x_k$ tels que
$$\underbrace{F \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k} F_{x_i} \right)}_{F_k \text{ stable}} \subseteq E$$
Si $F_k = E$ on a fini.

   Sinon on choisit $x_{k+1} \in E \setminus F_k$ et on répéte.
$$\begin{gathered} F_{x_{k+1}} \cap F_k = \{0\} \\ F_k \oplus F_{x_{k+1}} \subseteq E \\ F \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{k+1} F_{x_i} \right) \subseteq E \end{gathered}$$
Qui se termine en au plus $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$ étapes.

3. ($2 \Rightarrow 1$) Cas général.
$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{N} P_k$$
Par le TDN
$$E = \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(u)$$
Soit F sev stable par u, $\tilde{u}$ induit par u sur F. Par TDN
$$\begin{aligned} F &= \bigoplus_{k=1}^{N} \ker P_k(\tilde{u}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N} \underbrace{(\ker P_k(\tilde{u})) \cap F}_{F_k} \end{aligned}$$
F_k sev de $E_k = \ker P_k(u)$ stable par u_k induit par u sur E_k.

   De plus $\Pi_{u_k} = P_k$ (annule et irréductible).

   Donc par le premier cas on trouve G_k sev de E_k stable par u tel que
$$E_k = G_k \oplus F_k$$
Enfin
$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^{N} E_k \\ &= \underbrace{\left(\bigoplus_{k=1}^{N} (F_k) \right)}_{F \text{ stable par } u} \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{k=1}^{N} G_k \right)}_{G \text{ stable par } u} \end{aligned}$$

Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé. Montrer que u est diagonalisable ssi tout sev stable par u admet un supplémentaire stable.

- Supposons u diagonalisable, soit F un sev stable par u.

  On dispose donc de $f = (f_1, \dots, f_d)$ base de F et $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de vecteurs propres de E.

  On peut donc complétée la base f par des vecteurs de e:

  $$\left(f_1, \dots, f_d, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-d}}\right) \text{ base de } E$$

  Ainsi $G = \mathrm{Vect}\left(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-d}}\right)$ est un supplémentaire de F stable par u.

- Supposons que tout sev stable par u admettent un supplémentaire stable.

  $$F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

  Est un sev stable, et admet donc G comme supplémentaire stable. Notons $\tilde{u}$ l'induit sur G de u.

  $$\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u \text{ scindé}$$

  Donc $\tilde{u}$ admet une valeur propre λ et un vecteur propre $x \in F \cap G = \{0\}$ qui est absurde. Donc $G = \{0\}$ et $F = E$: u est diagonalisable.

Endomorphismes de produit de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ de $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Posons

$$L_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \text{ ou } MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$

$$P(L_A)(M) = \begin{cases} P(A)M \\ MP(A) \end{cases} = L_{P(A)}(M)$$

De plus $L_B = 0 \Rightarrow L_B(I_n) = B = 0$ d'où

$$P(L_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

C'est à dire $\Pi_{L_A} = \Pi_A$

On en déduit

- L_A est nilpotent ssi A l'est et est de même ordre.
- L_A est diagonalisable ssi A l'est.
- $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(L_A)$

De plus pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

$$\dim E_\lambda(L_A) = n \dim E_\lambda(A)$$

Démonstration

- Pour $L_A(M) = AM$

  Soit $M = (C_1, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$

  $$\begin{gathered} M \in E_\lambda(L_A) \Leftrightarrow AM = \lambda M \\ \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!],\ AC_j = \lambda C_j \\ \Leftrightarrow \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{gathered}$$

  Ainsi $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$.

- Pour $L_A(M) = MA$

  Soit $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

  $$\begin{gathered} M \in E_\lambda(L_A) \Leftrightarrow MA = \lambda M \\ \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ AL_i = \lambda L_i \\ \Leftrightarrow \{L_1, \dots, L_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{gathered}$$

  Ainsi $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$.

Endomorphisme différence de produits de matrices

Propriétés sur l'endomorphisme $\varphi : M \mapsto AM - MB$ in $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, tel que χ_A scindé et B admet au moins une valeur propre. ($\mathbb{K}$ algébriquement clos suffit).

Posons

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MB \end{array} \right. \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Il y a équivalence entre

1. $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.
2. $\chi_A(B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. φ injectif.
4. φ est un automorphisme.

De plus on a

- $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B)\}$

Démonstration

- ($3 \Leftrightarrow 4$) Argument dimensionnel.
- ($1 \Rightarrow 2$) Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

  $$\lambda \notin \mathrm{Sp}(B)$$
  $$\ker(B - \lambda I_n) = E_\lambda(B) = \{0\}$$
  $$B - \lambda I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

  Ainsi

  $$\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

- ($2 \Rightarrow 3$) Soit $M \in \ker \varphi$

  $$AM = MB$$
  $$\forall k \in \mathbb{N},\ A^k M = MB^k$$
  $$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)}_{\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})} M$$
  $$M = 0$$

- ($3 \Rightarrow 1$) Par contraposé, supposons qu'on dispose de $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$.

  On sait que $\chi_B = \chi_{B^\top}$ donc toute valeur propre de B est valeur propre de $B^\top$.

  Soit X, Y vecteurs propres non nuls de A et $B^\top$.

  $$\begin{aligned} \varphi\left(XY^\top\right) &= AXY^\top - XY^\top B \\ &= AXY^\top - X\left(B^\top Y\right)^\top \\ &= \lambda XY^\top - \lambda XY^\top \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Or $XY^\top \neq 0$ d'où φ non injective.

- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)$. X, Y vecteurs propres non nuls de A et $B^\top$.

  $$\begin{aligned} \varphi\left(XY^\top\right) &= AXY^\top - XY^\top B \\ &= \lambda XY^\top - \mu XY^\top \\ &= (\lambda - \mu)XY^\top \end{aligned}$$

  D'où $\lambda - \mu \in \mathrm{Sp}(\varphi)$

- Soit $\alpha \in \mathrm{Sp}(\varphi)$, M vecteur propre non nul associé.

  $$\varphi(M) = AM - MB = \alpha M$$
  $$\underbrace{(A - \alpha I_n)}_{\tilde{A}} M - MB = 0$$

  Avec $\chi_{\tilde{A}}$ scindé (pour toute valeur propre λ de A, $\lambda - \alpha$ est valeur propre de $\tilde{A}$)

  Posons $\varphi' : N \mapsto \tilde{A}N - NB$

  $$\varphi'(M) = 0$$

  Donc φ' non injectif d'où

  $$\{\mu\} \subseteq \mathrm{Sp}(\tilde{A}) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing$$

  Ainsi $\alpha + \mu \in \mathrm{Sp}(A)$.

Endomorphisme commutateur de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme $M \mapsto AM - MA \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A scindé.

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array} \right. \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

On a les propriétés de $M \mapsto AM - MB$, et de plus

- Si A est nilpotent alors φ_A l'est.
- Si A est diagonalisable alors φ_A aussi.

Démonstration

- Supposons A nilpotent d'ordre q. Posons

  $$\begin{array}{cccc} & M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ L_A : & M & \mapsto & AM \\ R_A : & M & \mapsto & MA \end{array}$$

  On sait que L_A et R_A sont nilpotents d'ordre q car A l'est.

  De plus $L_A \circ R_A = AMA = R_A \circ L_A$ d'où

  $$\varphi_A = L_A - R_A$$
  $$\varphi_A^{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \binom{2q}{k} (-1)^k R_A^k \circ L_A^{2q-k} = 0$$

- Supposons A diagonalisable.

  On sait que L_A et R_A commutent et sont diagonalisables, donc ils sont codiagonalisables :

  $$\varphi_A = L_A - R_A$$

  Est diagonalisable.

Endomorphismes nilpotents cycliques

Caractèrisation des sev stables par un endomorphisme nilpotent cyclique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent cyclique.

Les seuls sev de E stables par u sont les $\left(\ker u^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Démonstration

Ils sont stables comme ker d'un endomorphisme commutant avec u.

Soit F sev stable par u. Soit $\tilde{u}$ induit par u sur F qui est nilpotent car car $\tilde{u}^n = 0$.

Or l'ordre de nilpotence de $\tilde{u}$ est majoré par $d = \dim F$: $\tilde{u}^d = 0$.

Donc $F \subseteq \ker u^d$.

De plus par les noyaux itérées

$$\underbrace{\ker u}_{\dim 1} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\ker u^d}_{\dim d} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\ker u^n}_{\dim n}$$

D'où $F = \ker u^d$.

Produit de Kronecker et diagonalisabilité

Diagonalisabilité du produit de Kronecker de matrices (dimension $2n$).

Soit $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On pose le produit de Kronecker

$$M = L \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$$

Alors

- Si L est diagonalisable, M est diagonalisable ssi A l'est.
- Si $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, M est diagonalisable ssi $A = 0$.

Démonstration

- On suppose L diagonalisable :

$$L = P\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}P^{-1} \qquad \begin{matrix} P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K}) \\ P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \end{matrix}$$

  On remarque

$$Q = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$

$$Q' = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix}$$

$$QQ' = \begin{pmatrix} I_n & \\ & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$Q'MQ = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \lambda A & \\ & \mu A \end{pmatrix}$$

  Donc M est diagonalisable ssi A l'est.

- Pour $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad \text{(récurrence)}$$

  Donc pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

  Si M est diagonalisable, Π_M est SARS.

$$\Pi_M(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_M(A) = 0 \\ A\Pi_M(A) = 0 \end{cases}$$

  Comme $\Pi_M(A) = 0$, A est diagonalisable.

  Or Π_M est SARS : $\Pi_M \wedge \Pi_{M'} = 1$ donc $P' \wedge \Pi_A = 1$ car $\Pi_A \mid \Pi_M$.

  Donc $\Pi_{M'}(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A\Pi_{M'}(A) = 0$ d'où $A = 0$.

Cotrigonalisation

Critère de Cotrigonalisabilité d'une famille d'endomorphismes.

Soit $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent.

Il existe une base e de E tel que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_e(u_i)$ soit triangulaire supérieure.

Démonstration : structure

On voudra toujours

1. Trouver un vecteur propre commun
2. Faire une récurrence sur la dimension.

Faisons d'abord la 2e étape dans le cas général :

Supposons que toute famille $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ d'endomorphismes trigonalisables qui commutent admete un vecteur propre commun.

Cas $n = 1$ évident.

Supposons la propriété sur tout $\mathbb{K}$-ev de dimension strictement inférieur à n.

Soit e_1 vecteur propre commun aux éléments de $(u_i)_i$ associé aux valeurs propres $(\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^I$.

On complète e_1 en la base $(e_1, ..., e_n)$. Pour tout $i \in I$

$$\mathcal{M}_e(u_i) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_i & * \\ \hline 0 & A_i \end{array}\right) \quad \chi_{u_i} = \chi_{A_i}(X - \lambda)$$

Or χ_{u_i} scindé donc χ_A scindé : χ_A est trigonalisable.

De plus les $(A_i)_i$ commutent car mes $(u_i)_i$ aussi.

Par hypothèse de récurrence on conclut.

Démonstration : deux endomorphismes

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables qui commutent.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ est stable par v.

Notons $\tilde{v}$ induit par v sur $E_\lambda(u)$, qui est encore trigonalisable, et admet donc un vecteur propre e_1.

Puis récurrence.

Démonstration : famille finie

Par récurrence sur d cardinal de la famille.

Cas 1 et 2 endomorphismes traités.

On suppose que toute famille de cardinal inférieur à d admet un vecteur propre commun.

Soit $u_1, ..., u_{d+1} \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables qui comuttent.

Soit x vecteur propre commun aux $u_1, ..., u_d$ associé aux valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_d \in \mathbb{K}$.

$$\{x\} \in F = \bigcap_{k=1}^{d} \underbrace{E_{\lambda_k}(u_k)}_{\text{stable par } v} \neq \varnothing$$

Donc F est stable par v, on peut donc y induire $\tilde{v}$ qui est trigonalisable et admet donc e_1 vecteur propre commun aux $u_1, ..., u_{d+1}$.

Démonstration : famille infinie

Soit $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille quelconqe d'endomorphismes trigonalisables qui commutent.

$\mathrm{Vect}(u_i)_{i \in I}$ est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et admet donc une base $u_{i_1}, ..., u_{i_d}$.

C'est une famille finie, donc cotrigonalisable dans une base e.

Et pour tout $i \in I$, $u_i \in \mathrm{Vect}(u_{i_1}, ..., u_{i_d})$ donc $\mathcal{M}_e(u_i)$ est triangulaire supérieur (comme combinaison linéaire de matrices qui le sont).

Exercice : polynôme caractèristique d'une somme d'endomorphismes

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, $u, v \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent, tel que v est nilpotent.

Montrer que $\chi_{u+v} = \chi_u$ (Exercice 106).

Deux perspectives

1. Comme E est un $\mathbb{C}$-ev, u et v sont trigonalisables, et commutent, donc sont cotrigonalisable.

   Ainsi on dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(u+v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\chi_{u+v} = \chi_u$$

Exercice : commutateur qui vaut l'un des opérande

Soit E un $\mathbb{K}$-ev (car $\mathbb{K} = 0$) et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $uv - vu = u$.

1. Montrer que u est nilpotent.
2. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u et v sont cotrigonalisable.

---

1. Deux méthodes :
   - On considère
   $$\varphi_v : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ w & \mapsto & wv - vw \end{cases}$$
   $$\varphi_v(u^k) = ku^k$$
   Donc si $u^k \neq 0$, $k \in \mathrm{Sp}(\varphi_v)$ qui est fini, donc on dispose de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$.
   - On remarque
   $$P(u)v - vP(u) = uP'(u)$$
   En particulier pour $P = \Pi_u$
   $$0 = u\Pi_u'(u)$$
   $$\underbrace{\Pi_u}_{\deg d} \mid \underbrace{X\Pi_u'}_{\deg d}$$
   $$X\Pi_u' = c\Pi_u$$
   Donc
   $$dX^d + \sum_{k=0}^{d-1} ka_kX^k = cX^d + \sum_{k=0}^{d-1} ca_kX^k$$
   $$c = d$$
   $$\forall k \in [\![0, d-1]\!],\ da_k = ka_k$$
   $$\forall k \in [\![0, d-1]\!], a_k = 0$$
   $$\Pi_u = X^d$$
2. Comme u est nilpotent, $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
   $$(uv - vu)(\ker u) = u(\ker u)$$
   $$u(v(\ker u)) = 0$$
   $$v(\ker u) \subseteq \ker u$$
   Donc $\ker u$ est stable par v, posons $\tilde{v}$ induit sur $\ker u$. Or $\tilde{v}$ admet un vecteur propre commun $x \in \ker u = E_0(u)$.

   Ainsi par récurrence sur la dimension de E :

   Supposons la propriété pour tout $\mathbb{C}$-ev de dimension inférieur strictement à n.

   Soit e_1 vecteur propre commun à u et v associé aux valeurs propres 0 et λ.

   Soit $e' = (e_1, e_2', \dots, e_n')$ base de E.
   $$\mathcal{M}_{e'}(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$
   $$\mathcal{M}_{e'}(v) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$$
   Et $AB - BA = A$ car $uv - vu = u$ donc on dispose de $(e_2, \dots, e_n)$ qui cotrigonalisent A et B.

Exercice : critère de nilpotence sur la trace des puissances

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n ($\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$).

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer que u est nilpotent ssi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tr}(u^k) = 0$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

   $$\operatorname{tr} u^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

   Montrer que

   $$\chi_u = \prod_{k=1}^{n} (X - \lambda_k)$$

Dans les deux cas, $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, donc u est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = D$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \operatorname{tr} u^k = \operatorname{tr} D^k = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^k$$

Posons $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{a_1, \dots, a_d\}$ deux à deux distincts.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{d} (X - a_k)^{m_k}$$

$$\operatorname{tr} u^k = \sum_{i=1}^{d} m_i a_i^k \quad (*)$$

1. Par l'absurde : on suppose $d \geq 2$ et $a_1 = 0$ (éventuellement $m_1 = 0$).

   Par $(*)$:

   $$\forall P \in X\mathbb{K}[X], \ \sum_{k=1}^{d} m_k P(a_k) = 0$$

   Ainsi par interpolation de lagrange : pour $i \in [\![2, d]\!]$,

   $$P(a_i) = 1$$

   $$\forall j \neq i, \ P(a_j) = 0$$

   $$P(a_i) = P(0) = 0 \text{ d'où } X \mid P$$

   $$\sum_{k=1}^{d} m_k P(a_k) = m_i = 0$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

   $$\sum_{i=1}^{n} \mu_i^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$$

   On considère $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{\mu_1, \dots \mu_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$ deux à deux distincts.

   Pour $i \in [\![1, n]\!]$

   $$n_i = |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \mu_k = \beta_i\}|$$

   $$m_i = |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \lambda_k = \beta_i\}|$$

   Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{i=1}^{N} n_i \beta_i^k = \sum_{k=1}^{N} m_i \beta_i^k$$

   $$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{i=1}^{N} (n_i - m_i) \beta_i^k = 0$$

   Or $V(\beta_1, \dots, \beta_N) \neq 0$ d'où $m_i = n_i$.

Calcul de puissance de matrice : cas diagonalisable

Méthodes de calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisable.

1. Matrice diagonale :

   On dispose de $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ (à calculer) tel que

$$A = P\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$A^k = P\begin{pmatrix} a_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^k \end{pmatrix}P^{-1}$$

2. Lagrange : notons $d = \deg \Pi_A$

$$A^k \in \mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}\big(I_n, A, \ldots, A^{d-1}\big)$$

   Donc on dispose de $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ tel que $A^k = P(A)$.

   Explicitons le :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{N} E_{\lambda_i}$$

   Soit $X \in \mathbb{K}^n$

$$X = \underbrace{X_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{X_d}_{\in E_{\lambda_d}}$$

$$AX = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d$$

$$A^k X = \lambda_1^k X_1 + \cdots + \lambda_d^k X_d$$

$$P(A)X = P(\lambda_1)X_1 + \cdots + P(\lambda_d)X_d$$

   Ainsi avec P construit par interpolation de Lagrange afin de vérifier

$$\forall i \in [\![1, d]\!],\ P(\lambda_i) = \lambda_i^k$$

$$P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

   On a alors $P(A)X = A^k X$ pour tout X, d'où $P(A) = A^k$.

Calcul de puissance de matrice : polynôme annulateur

Méthodes de calcul des puissances d'une matrice grâce à un polynôme annulateur.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de degré d.

$$X^k = QP + R$$

$$A^k = \underbrace{QP(A)}_{0} + R(A)$$

Avec $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

Si $P = (X-\lambda)^m$ on trouve le reste de la division euclidienne grâce à la formule de Taylor :

$$Q = \overbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^k}^{\text{reste}}$$

$$+(X-\lambda)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{\deg Q} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!}(X-\lambda)^{k-m}}_{\text{quotient}}$$

$$A^p = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k}(A-\lambda I_n)^k$$