Maths

Topologie

Boules et sphères
Comparaison de normes
Distance
Limites de suites
Norme
Norme euclidienne
Norme produit
Points extrémaux d'un convexe
Topologie sur un espace métrique
Topologie, espace topologique
Valeurs d'adhérance d'une suite

11 cartes.

Norme

Définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-ev E.

Une norme sur un $\mathbb{K}$-ev E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ tel que

1. Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$
$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
2. Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$
$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$
3. Séparation : $\forall x \in E$
$$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Norme euclidienne

Définition et propriétés des normes euclidiennes.

Pour E un $\mathbb{R}$-ev un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on a l'Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall x, y \in E$$
$$\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle$$

Avec cas d'égalité si (x, y) liée.

D'un produit scalaire dérive une norme (euclidienne)

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x|x \rangle} \end{cases}$$

Démonstration

- Si $x = 0$ ou $y = 0$: évident. Sinon pour $x, y \in E \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{aligned} &\langle x + ty | x + ty \rangle \\ &= t^2 \langle y|y \rangle + 2t \langle x|y \rangle + \langle x|x \rangle \\ &= P(t) \end{aligned}$$

  Comme $\langle y|y \rangle > 0, \deg P = 2$. De plus par positivité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

  $$\Delta = 4 \langle x|y \rangle^2 - 4 \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle \leq 0$$
  $$\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle$$

  Avec cas d'égalité si $\Delta = 0$, c'est à dire $x + ty = 0$.

- Vérifions les axiomes

  1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$

     $$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x|x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

  2. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$

     $$\begin{aligned} \sqrt{\langle x|x \rangle} &= 0 \\ \langle x|x \rangle &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

  3. Soit $x, y \in E$

     $$\begin{aligned} &\|x + y\|^2 \\ &= \langle x + y | x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{|\langle x|y \rangle|}_{\text{C-S}} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

     Avec égalité ssi $\langle x|y \rangle \geq 0$ et égalité dans C-S : ssi x, y positivement liés.

Norme produit

Définition de la norme produit.

Soit $(E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_d, \|\cdot\|_d)$ des $\mathbb{K}$-evn.

On définit la norme produit sur $\prod_{k=1}^{d} E_k$ comme

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} \displaystyle\prod_{k=1}^{d} E_k & \to & \mathbb{R}_+ \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \displaystyle\max_{k \in [\![1,n]\!]} \|x_k\|_k \end{array} \right.$$

Distance

Définition de distance.

Soit X un ensemble non vide. On appelle distance une application $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ tel que

1. Symétrie : $\forall x, y \in X$
$$d(x,y) = d(y,x)$$
2. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in X$
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$
3. Séparation : $\forall x, y \in X$
$$d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$ on peut définir la distance sur E associé à la norme $\|\cdot\|$:

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$$

Boules et sphères

Définition, propriétés des boules et sphères.

Soit E un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On définit les ensembles suivants

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$$
$$B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leq r\}$$
$$\mathbb{S}(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$$

Si E est un $\mathbb{K}$-evn alors on a de plus la convexité de $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$.

Points extrémaux d'un convexe

Définition des points extrémaux d'un convexe et points extrémaux d'une boule.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $K \subseteq E$ convexe. On dit que $x \in K$ est extrémal si

$$\forall y, z \in K, \forall t \in]0,1[,$$
$$x = (1-t)y + tz \Rightarrow x = y = z$$

Si $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire, alors pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des points extrémaux de $B_f(a,r)$ est $\mathbb{S}(a,r)$.

Démonstration

Pour $r = 1$ et $a = 0$: (auxquels on peut se ramener)

- Soit $x \in B(0,1)$
$$x = (1 - \|x\|)0 + \|x\|\frac{x}{\|x\|}$$
D'où x pas extrémal (on traite le cas $x = 0$ séparément).
- Soit $x \in \mathbb{S}(0,1)$, $y, z \in B_f(0,1), t \in]0,1[$ tel que
$$x = (1-t)y + tz$$
$$\|x\| = 1 \leq (1-t)\underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + t\underbrace{\|z\|}_{\leq 1}$$
On a égalité dans l'inégalité triangulaire : y et z positivement liés (car produit scalaire) et $\|y\| = \|z\|$ d'où $y = z = x$.

Topologie, espace topologique

Définition d'une topologie.

Soit X un ensemble, $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X si

1. $\{\emptyset, X\} \subseteq T$
2. Pour toute famille $(\Omega_i)_i \in T^I$
$$\bigcup_{i \in I} \Omega_I \in T$$
3. Pour tout $\Omega_1, ..., \Omega_n \in T$
$$\bigcap_{k=1}^{n} \Omega_k \in T$$

Les éléments de T sont appelés ouverts de X.

X muni de T est appelé espace topologique.

Topologie sur un espace métrique

Définitions des ouverts / fermés d'un espace métrique.

Soit (E, d) un espace métrique.

On dit que $\Omega \subseteq E$ est un ouvert de E si

$$\forall x \in \Omega, \exists \delta > 0, B(x, r) \subseteq \Omega$$

De manière équivalente

$$\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}(x)$$

L'ensemble T des ouverts de E forme une topologie :

1. $\emptyset$ et E sont ouverts.
2. T est stable par union quelconque.
3. T est stable par intersection finie.

On définit de plus les fermés : le complémentaire d'un ouvert.

Démonstration

1. Évident.
2. Soit $(\Omega_i)_i \in T^I$ une famille d'ouverts. Soit $x \in W = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

   On dispose de $i \in I$ tel que $x \in \Omega_i$, ainsi on dispose de plus de $\delta > 0$ tel que

   $$B(x, \delta) \subseteq \Omega_i \subseteq W$$

   Donc $W \in T$: c'est un ouvert.
3. Soit $F_1, ..., F_n \in T$, soit $x \in W = \bigcap_{k=1}^n F_k$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on dispose de $\delta_k > 0$ tel que

   $$B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$
   $$\delta = \min_{k \in [\![1;n]\!]} \delta_k$$

   Ainsi on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$B(x, \delta) \subseteq B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$

   Donc

   $$B(x, \delta) \subseteq W$$

Limites de suites

Définitions équivalentes de limites d'une suite.

Soit (E, d) un espace métrique, $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $l \in E$ est limite de la suite u si l'une des définitions suivantes équivalentes s'applique :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon)$.
3. $(d(u_n, l))_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$.
4. $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$.

Si la limite existe, alors elle est unique.

Démonstration

- Équivalence : l'écrire.
- Si $l = \lim_{n \to \infty} u_n$, prendre $l' \neq l$ et montrer que $(d(l', u_n))_n \underset{n \to \infty}{\not\to} 0$.

Valeurs d’adhérance d’une suite

Définitions et propriétés sur les valeurs d’adhérance d’une suite.

Soit (E, d) un espace métrique, $u = \left(u_n\right)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $l \in E$ est une valeur d’adhérance de u s’il existe φ extractrice tel que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$.

Une suite qui à deux valeurs d’adhérance diverge.

Comparaison de normes

Définitions de comparaison de normes, propriétés.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E.

On dit que $\|\cdot\|_2$ est plus fine de $\|\cdot\|_1$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$$

Dans ce cas :

1. Pour tout $a \in E$ et $r > 0$

$$B_2(a, r) \subseteq B_1(a, \alpha r)$$

2. Si $\Omega \subseteq E$ est ouvert pour $\|\cdot\|_1$ est ouvert pour $\|\cdot\|_2$
3. Toute suite bornée pour $\|\cdot\|_1$ l'est pour $\|\cdot\|_2$.
4. Toute suite convergente pour $\|\cdot\|_1$ l'est pour $\|\cdot\|_2$.

On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si chacune est plus fine que l'autre. C'est une relation d'équivalence.