

## Maths

### Algèbre

#### Réduction

Autre critère de diagonalisabilité

Calcul de puissance de matrice : cas diagonalisable

Calcul de puissance de matrice : polynôme annulateur

Caractérisation des endomorphismes nilpotents

Codiagonalisabilité

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Cotrigonalisation

Critère de Diagonalisabilité

Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal

Diagonalisabilité

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Décomposition de Dunford

Décomposition en sous espaces caractéristiques

Démonstration annexe du théorème des noyaux

Endomorphisme commutateur de matrices

Endomorphisme différence de produits de matrices

Endomorphismes cycliques

Endomorphismes de produit de matrices

Endomorphismes nilpotents cycliques

Endomorphismes semi-simples

Endomorphismes simples

Exercice : critère de nilpotence sur la trace des puissances

Exercice : lien entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et son carré

Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel

Matrice compagnon

Multiplicités d'une valeur propre

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique

Produit de Kronecker et diagonalisabilité

Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés diverses du polynôme caractéristique

Pseudo-commutativité du polynôme caractéristique

Racine k-ème de matrices

Recherche d'hyperplans stables

Réduction de matrice dans rang 1

Somme directe des sous-espaces propres

Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal

Sous-espaces cycliques

Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable

Suites récurrentes linéaires

Théorème de Cayley-Hamilton

Théorème des noyaux

Trigonalisabilité

Valeurs propres, espaces propres

Vision matricielle de la cyclicité

Équations matricielles

### Analyse

#### Suites

Suites récurrentes linéaires

### Exercice

#### Réduction

Exercice : commutateur qui vaut l'un des opérande

Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables

Exercice : le bicommutant

Exercice : polynôme caractéristique d'une somme d'endomorphismes

Exercice : polynôme caractéristique divisant une puissance du polynôme minimal

Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques

Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.

Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

# Valeurs propres, espaces propres

Définitions, caractérisation, démonstration autour des valeurs propres et des espaces propres.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , il y a équivalence entre

1.  $\exists x_0 \in E \setminus \{0\}, u(x_0) = \lambda x_0$
2.  $\ker(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$
3.  $u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E)$

On dit alors que  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , on appelle sous-espace propre de  $u$  pour la valeur propre  $\lambda$

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

## Démonstration

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in E \setminus \{0\}, u(x_0) = \lambda x_0 \\ \Leftrightarrow & \exists x_0 \in \ker(u - \lambda \text{id}) \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow & u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E) \quad \left( \begin{smallmatrix} \text{dimension} \\ \text{finie} \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$

# Somme directe des sous-espaces propres

Démonstration du fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

---

**Soit**  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  ses valeurs propres deux à deux distinctes.

**Soit**  $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$  tels que  $\sum_{k=1}^p x_k = 0$ .

Par récurrence on montre que pour tout  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ .

$$0 = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k)x_k$$

En particulier avec  $P = L_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a

$$0 = \sum_{k=1}^p L_i(\lambda_k)x_k = x_i$$

On appelle spectre de  $u$

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre}\}$$

Qui est finit ( $|\text{Sp}(u)| \leq n = \dim E$ ).

# Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définitions, propriétés élémentaires et démonstrations autour du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

## Matrices

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on définit le polynôme caractéristique de  $A$  comme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Et on a

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$a_n = 1 \quad (\chi_A \text{ unitaire})$$

$$a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$$

$$a_0 = (-1)^n \det(A)$$

## Endomorphismes

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $e$  base de  $E$ ,  $A = \mathcal{M}_e(u)$ . On définit

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

Ceci ne dépend pas de la base  $e$  choisie.

De plus

$$\operatorname{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_u)$$

## Démonstration

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^n (X \delta_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)j})}_{P_\sigma(X)}$$

Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $P_\sigma \in \mathbb{K}_n[X]$  donc  $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$ . De plus

$$\deg(P_\sigma) = |\{k \in [1, n] \mid \sigma(k) = k\}|$$

$$\deg(P_\sigma) = n \Leftrightarrow \sigma = \operatorname{id}$$

Donc  $\deg \chi_A = n$  et  $\chi_A = 1$ .

Si  $\sigma \neq \operatorname{id}$ ,  $\deg(P_\sigma) \leq n - 2$ , donc  $a_{n-1}$  est le terme en  $X^{n-1}$  de  $P_{\operatorname{id}}$ .

$$P_{\operatorname{id}} = \prod_{j=1}^n (X - A_{jj})$$

$$a_{n-1} = - \sum_{j=1}^n A_{jj} = -\operatorname{tr}(A)$$

$$a_0 = \chi_A(0) = \det(0 - A)$$

$$= (-1)^n \det(A)$$

Soient  $e, e'$  deux bases de  $E$ ,  $A = \mathcal{M}_e(u)$ ,  $A' = \mathcal{M}_{e'}(u)$ ,  $P = P_{e' \rightarrow e}$ .

$$A' = PAP^{-1}$$

$$\chi_{A'}(X) = \det(XI_n - A')$$

$$= \det(XPI_n P^{-1} - PAP^{-1})$$

$$= \det(P) \det(XI_n - A) \det(P^{-1})$$

$$= \chi_A(X)$$

# Multiplicités d'une valeur propre

Définitions des multiplicités d'une valeur propre.

---

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de l'endomorphisme  $u$ .

- On appelle multiplicité algébrique ( $m_\lambda$ ), ou juste multiplicité de  $\lambda$  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_u$ .
- On appelle multiplicité géométrique de  $\lambda$  la dimension de son espace propre.

On a toujours

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

## Démonstration

Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  base de  $E_\lambda$  complété en  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

$$\chi_u = \chi_{\mathcal{M}_e(u)}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} (X - \lambda)I_d & -B \\ 0 & XI_{n-d} - C \end{vmatrix} \\ &= (X - \lambda)^d \chi_C(X) \end{aligned}$$

# Propriétés diverses du polynôme caractéristique

Cas particuliers de calculs du polynôme caractéristique, et lien avec les endomorphismes induits.

- Pour tout  $T \in T_n(\mathbb{K})$

$$\chi_T = \prod_{k=1}^n T_{kk}$$

- Pour tout  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $A \in M_r(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$

$$\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$$

- Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  stable par  $u$ ,  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ , on a toujours

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

## Démonstration

- L'écrire.
- L'écrire.
- Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $F$  complété en base de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Avec  $A = \mathcal{M}_{\tilde{e}}(\tilde{u})$ .

# Diagonalisabilité

Définition et premier critère de diagonalisabilité.

On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable s'il existe une base  $e$  de  $E$  tel que  $\mathcal{M}_e(u)$  est diagonale.

Une telle base est par définition formée de vecteurs propres de  $u$ .

De plus

$u$  diagonalisable

$$\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$$

En particulier

- Les homothéties sont diagonales dans toutes les bases
- Les projecteurs sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(p - \text{id})}_{E_1(p)} \oplus \underbrace{\ker p}_{E_0(p)} = E$$

- Les symétries sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(s - \text{id})}_{E_1(s)} \oplus \underbrace{\ker s + \text{id}}_{E_{-1}(s)} = E$$

# Autre critère de diagonalisabilité

Énoncer du critère de diagonalisabilité sur  $\chi_u$  et les multiplicités.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$

$u$  diagonalisable

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda \end{cases}$$

Où  $m_\lambda$  est la multiplicité (algébrique) de  $\lambda$ .

Ainsi car  $\dim E_\lambda(u) \geq 1$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,

$\chi_u$  SARS  $\Rightarrow u$  diagonalisable

## Démonstration

- Supposons  $u$  diagonalisable, notons  $e$  la base qui le diagonalise.

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Donc  $\chi_u$  est scindé

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k)$$

$$= \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$$

Ainsi

$$\deg \chi_u = n = \sum_{k=1}^p m_{\lambda_k}$$

$$n = \sum_{k=1}^p m_{\lambda_k} \geq \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k} = n$$

Supposons  $\chi_u$  scindé et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda$ .

$$\chi_u = \underbrace{\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}_{\deg = n}$$

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$$

Donc  $u$  est diagonalisable.

# Trigonalisabilité

Définition et premier critères de la trigonalisabilité.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est trigonalisable s'il existe une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  tel que  $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^+(\mathbb{K})$

Dans ce cas

- $u(e_1) = t_{11}e_1$ , donc  $e_1$  est un vecteur propre de  $u$ .
- Notons  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  le drapeau.

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(F_k) \subset F_k$$

- $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - t_{kk})$  scindé.

La réciproque est aussi vraie :  $\chi_u$  scindé  $\Rightarrow u$  trigonalisable.

Si  $F \neq \{0\}$  est un sev stable par  $u$  et  $u$  trigonalisable, alors  $\tilde{u}$  (induit par  $u$  sur  $F$ ) est trigonalisable (car  $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$  scindé).

Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

## Démonstration

Par récurrence sur  $n = \dim E$ .

Toute matrice de taille 1 est supérieure.

Supposons pour un  $n \in \mathbb{N}$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \quad \chi_A \text{ scindé} \Rightarrow A \text{ trigonalisable}$$

Soit  $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$  tel que  $\chi_A$  scindé.

$\chi_A$  a au moins une racine, donc  $A$  admet une valeur propre  $\lambda$ .

On dispose de  $X_0 \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que

$$AX_0 = \lambda X_0$$

Ainsi on peut construire la base  $e' = (X_0, \dots, X_n)$  de  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Notons  $P = P_{\text{can}} \rightarrow e'$ .

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_{n+1} & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

Avec  $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}(X - \lambda)$  d'où  $\chi_{\tilde{A}}$  scindé.

Par hypothèse de récurrence  $\tilde{A}$  est trigonalisable et on peut donc construire  $P_0 \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$  tel que

$$\tilde{A} = P_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_{n+1} & & \end{pmatrix} P_0^{-1}$$

Ainsi  $A = P P_0 \begin{pmatrix} \alpha_1 & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha_{n+1} & & \end{pmatrix} P_0^{-1} P^{-1}$  est trigonalisable.

Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

Si  $\mathbb{K}$  n'est pas algébriquement clos, il existe des matrices non trigonalisables.

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'a pas de valeur propre.

Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

Si  $\mathbb{K}$  n'est pas algébriquement clos, il existe des matrices non trigonalisables.

Exemple :  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  n'a pas de valeur propre.

Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

Si  $\mathbb{K}$  n'est pas algébriquement clos, il existe des matrices non trigonalisables.

# Caractérisation des endomorphismes nilpotents

Caractérisation des endomorphismes nilpotents.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1.  $u$  nilpotent
2.  $u$  trigonalisable en une matrice strictement supérieure.
3.  $u$  trigonalisable et  $\text{Sp}(u) = \{0\}$
4.  $\chi_u = X^n$

## Démonstration

- (4  $\Rightarrow$  3)  $\chi_u = X^n$  est scindé donc  $u$  est trigonalisable et  $\text{Sp}(u) = Z(X^n) = \{0\}$ .
- (3  $\Leftrightarrow$  2) Évident.
- (3  $\Rightarrow$  4) On dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \chi_u = X^n$$

- (2  $\Rightarrow$  1) On dispose de  $e$  base de  $E$  tel que  $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^{++}(\mathbb{K})$ , notons  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

$$u(F_k) \subseteq u(F_{k-1})$$

$$u^n(F_n = E) \subseteq F_0 = \{0\}$$

$$u^n = 0$$

- (1  $\Rightarrow$  2)  $u$  est nilpotent d'indice  $d$ .

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \dots \subsetneq \ker u^d = E$$

Construisons une base adaptée

$$\left( \underbrace{\overbrace{e_1, \dots, e_{i_1}, \dots, e_{i_2}, \dots, e_{i_d}}_{\text{base de } \ker u}}^{\text{base de } \ker u^2} \right)$$

Pour tout  $x \in \ker u^k$  :

$$u(x) \in \ker u^{k-1}$$

Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  si  $i_j + 1 \leq k \leq i_{j+1}$

$$e_k \in \ker u^j$$

$$u(e_k) \in \ker u^{j-1}$$

$$u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_{j-1}})$$

# Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique

Lien entre racines du polynôme minimal et celles du polynôme caractéristique.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$  annulateur de  $u$ .

$$\text{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$$

$$Z(\chi_u) = \text{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$$

## Démonstration

- Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x \in E_{\lambda}(u) \setminus \{0\}$  :

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \sum_{k=0}^d u^k(x) = \sum_{k=0}^d \lambda^k x \\ &= P(\lambda)x = 0 \end{aligned}$$

Or  $x \neq 0$ , donc  $P(\lambda) = 0$ .

- $\Pi_u$  annule  $u$  d'où  $\text{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$
- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  racine de  $\Pi_u$

$$\Pi_u = (X - \lambda)Q(X)$$

$$0 = (u - \lambda \text{id}) \circ Q(u)$$

Donc  $\text{im } Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda \text{id})$ .

Mais  $Q(u) \neq 0$  car  $\Pi_u$  minimal, donc

$$\dim(\text{im } Q(u)) \geq 1$$

$$\text{im } Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda \text{id}) = E_{\lambda}(u)$$

$$\lambda \in \text{Sp}(u)$$

# Théorème des noyaux

Énoncé et démonstrations du théorème des noyaux.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  ( $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie),  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Si  $P = \prod_{k=1}^N P_k$  avec  $P_1, \dots, P_N$  deux à deux premiers entre eux, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Si de plus  $P$  annule  $u$  alors

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Où  $e$  est la base construite par concaténation de bases des  $\ker P_k(u)$ .

## Démonstration

Par récurrence sur  $N$ .

Pour  $P = P_1 P_2$  avec  $P_1 \wedge P_2 = 1$  :

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = 1$$

$$P_1(u) \circ V_1(u) + P_2(u) \circ V_2(u) = \text{id} \quad (*)$$

En évaluant on trouve

$$\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$$

De plus

$$P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u) = P(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \ker P_1(u) \subseteq \ker P(u) \\ \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u) \end{cases}$$

$$\ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u)$$

Soit  $x \in \ker P(u)$ , par  $(*)$  on a

$$x = \underbrace{V_1(u) \circ P_1(u)(x)}_{x_2} + \underbrace{V_2(u) \circ P_2(u)(x)}_{x_1}$$

$$P_1(u)(x_1) = (P_1 V_2 P_2)(u)(x)$$

$$= (V_1 P)(u)(x)$$

$$= 0$$

$$P_2(u)(x_2) = (P_2 V_1 P_1)(u)(x)$$

$$= (V_2 P)(u)(x)$$

$$= 0$$

$$x = \underbrace{x_1}_{\in \ker P_1(u)} + \underbrace{x_2}_{\in \ker P_2(u)}$$

$$= \underbrace{\bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)}_{\text{H.R.}} \oplus \ker P_{N+1}(u)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N+1} \ker P_k(u)$$

# Démonstration annexe du théorème des noyaux

Démonstration secondaire du théorème des noyaux dans le cas d'un polynôme annulateur.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose  $P = \prod_{k=1}^N P_k$  annulateur de  $u$ ,  $P_1, \dots, P_N$  premiers entre eux deux à deux.  
On pose

$$Q_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N P_i$$

Qui sont premiers dans leur ensemble.

$$\sum_{k=1}^N V_k Q_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^N \underbrace{V_k(u) \circ Q_k(u)}_{\Pi_k} = \text{id} \quad (1)$$

On remarque que

$$P_k(u) \circ \Pi_k = (V_k P_k Q_k)(u) = (V_k P)(u) = 0$$

$$\text{Donc } \text{im } \Pi_k \subseteq \ker P_k(u)$$

Et pour  $k \neq i$ ,  $P \mid Q_i Q_k$  d'où

$$P \mid (V_k P_k)(V_i P_i)$$

$$\Pi_i \circ \Pi_k = 0$$

Donc par (1)

$$\sum_{i=1}^N \Pi_k \circ \Pi_i = \Pi_k \circ \Pi_k = \Pi_k$$

Donc les  $\Pi_k$  sont des projecteurs.

Soit  $x \in \ker P_k(u)$ , pour tout  $i \neq k$ ,  $\Pi_i(x) = 0$ . Par (1)

$$x = \Pi_k(x)$$

$$x \in \text{im } \Pi_k$$

Ainsi

$$\ker P_k(u) = \text{im } \Pi_k$$

$$\ker P_i(u) \subseteq \ker \Pi_k$$

Les  $\Pi_k$  projettent sur  $\ker P_k$ .

## Théorème des noyaux

Soient  $(x_1, \dots, x_N) \in \prod_{k=1}^N \ker P_k(u)$  tels que  $\sum_{k=1}^N x_k = 0$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\Pi_i \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) = x_i = 0$$

Donc les  $\ker P_k(u) = \text{im } \Pi_k$  sont en somme directe.

Soit  $x \in \ker P(u) = E$ , par (1)

$$x = \sum_{k=1}^N \Pi_k(x) \in \sum_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

D'où

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Et de plus

$$\text{im } \Pi_k = \ker P_k(u)$$

$$\ker \Pi_k = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \ker P_i(u)$$

$$\Pi_k \in \mathbb{K}[u]$$

# Critère de Diagonalisabilité

Démonstration d'une CNS de diagonalisabilité.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1.  $u$  diagonalisable.
2.  $u$  annule un polynôme SARS.
3.  $\Pi_u$  est SARS

## Démonstration

- (2  $\Leftrightarrow$  3)

$$\begin{aligned} & \exists P \in \mathbb{K}[X], \text{ } P \text{ SARS et } P(u) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists P \in \mathbb{K}[X], \text{ } P \text{ SARS et } \Pi_u \mid P \\ \Leftrightarrow & \Pi_u \text{ SARS} \end{aligned}$$

- (3  $\Rightarrow$  1)  $\Pi_u$  SARS donc

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^N (X - \lambda)$$

Par le TDN

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{id}) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Donc  $u$  diagonalisable.

- (1  $\Rightarrow$  3)  $u$  diagonalisable

$$\mathcal{M}_e(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_M$$

$$\begin{aligned} P(X) &= \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k) \text{ SARS} \\ P(M) &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & P(\lambda_1) & \\ & & & \ddots \\ & & & & P(\lambda_n) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $\Pi_u \mid P$  SARS.

# Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  un sev stable par  $u$ .

Notons  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

- $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$
- Si  $u$  diagonalisable, alors  $\tilde{u}$  aussi.

## Démonstration

- $\Pi_u(\tilde{u}) = 0$  donc  $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$ .
- Si  $u$  diagonalisable,  $\Pi_u$  est SARS, donc  $\Pi_{\tilde{u}}$  aussi (car divise) donc  $\tilde{u}$  est diagonalisable.

# Sous-espaces cycliques

Définition de sous-espace cyclique et base associé.

Pour un  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $x_0 \in E$  on appelle sous-espace cyclique engendré par  $x_0$  (pour  $u$ )

$$F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$$

Cet espace admet comme base

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Où  $d = \deg \Pi_{u, x_0}$  le polynôme minimal ponctuel, l'unique polynôme unitaire minimal tel que

$$\text{Pour } \theta_{x_0} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow E \\ P \mapsto P(u)(x_0) \end{cases}$$

$$\ker \theta_{x_0} = \Pi_{u, x_0} \mathbb{K}[X]$$

## Démonstration

$\theta_{x_0} \in \mathcal{L}(E)$ , donc  $\ker \theta_{x_0}$  est un sev, donc un sous-groupe de  $(\mathbb{K}[X], +)$ .

Soit  $P \in \ker \theta_{x_0}, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\theta_{x_0}(QP) = Q(u)(P(u)(x_0))$$

$$= Q(u)(0) = 0$$

Donc  $\ker \theta_{x_0}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , qui est principal d'où  $\Pi_{u, x_0}$  existe.

Notons  $d_{x_0} = \deg \Pi_{u, x_0}$ .

Par existance et unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \oplus \ker \theta_{x_0}$$

Donc  $\theta_{x_0}|_{\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X]}$  isomorphisme

de  $\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \rightarrow \text{im } \theta_{x_0} = F_{x_0}$ .

Donc  $F_{x_0}$  a pour base

$$(\theta_{x_0}(1), \theta_{x_0}(X), \dots, \theta_{x_0}(X^{d_{x_0}-1}))$$

$$= (x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

# Endomorphismes cycliques

Définition, propriétés, démonstration autour des endomorphismes cycliques.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $u$  est cyclique si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1.  $\exists x_0 \in E, \text{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N}} = E$ .
2.  $\exists x_0 \in E, (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  base de  $E$ .

## Propriétés en vrac (sans démonstration)

- Si  $u$  cyclique, tout endomorphisme induit l'est aussi.
- Si  $u$  cyclique,  $u$  admet un nombre fini de sev stables.
- Si  $\mathbb{K}$  est infini et  $u$  admet un nombre fini de sev stables, alors  $u$  est cyclique.

## Démonstration équivalence

- (2  $\Rightarrow$  1) Évident.
- (1  $\Rightarrow$  2)  $F_{x_0} = \text{Vect}\left(u^k(x_0)\right)_{k \in \mathbb{N}}$  est les sous-espace engendré par  $x_0$  pour  $u$ , donc  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$

Où  $d = \deg \Pi_{u, x_0}$  en est une base.

Or  $F_{x_0} = E$  par hypothèse, donc  $\dim F_{x_0} = n$  et  $d = n$ .

# Vision matricielle de la cyclicité

Lien entre endomorphisme cyclique et matrices de compagnon.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est cyclique si il existe une base  $e$  de  $E$  et  $P$  unitaire de degré  $n$  tel que  $\mathcal{M}_e(u) = C_P$ .

Dans ce cas  $\Pi_u = P$ .

## Démonstration

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique pour  $x_0 \in E$ . Notons  $e = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  la base associée.

On dispose alors de  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  tels que

$$u^n(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$$

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Et alors

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} u(x_0) & \cdots & u^n(x_0) \\ 0 & & a_0 \\ 1 & & a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \\ u^{n-1}(x_0) & & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= C_P$$

Réiproquement :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array} \right)$$

Alors pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$u(e_k) = u(e_{k+1})$$

$$\text{Donc } e = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

Donc  $u$  est cyclique.

Ainsi :

$$P(u)(x_0) = u^n(x_0) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)}_{u^n(x_0)} = 0$$

Et comme  $\Pi_u$  et  $P$  sont unitaires

$$\Pi_u = P$$

# Matrice compagnon

Définition de matrice compagnon.

---

Soit  $P = X^d \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme unitaire. On appelle matrice compagnon de  $P$  la matrice

$$C_P = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & \vdots \\ & 0 & -a_{d-1} \end{array} \right)$$

Ainsi (en développant selon la dernière colonne)

$$\chi_{C_P}(X) = P(X)$$

## Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\Pi_{u,x} = \Pi_u$ .

En déduire que  $u$  cyclique ssi  $\deg \Pi_u = n$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(e)$ .

On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

Avec  $P_1, \dots, P_N$  irréductibles deux à deux distincts.

### Démonstration $\mathbb{K}$ quelconque

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker \underbrace{P_k^{d_k}(u)}_{F_k}$$

$$\ker P_k^{d_k-1}(u) \subseteq \ker P_k^{d_k}(u) = F_k$$

Supposons par l'absurde qu'on ait égalité pour un  $k$ .

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{j \neq k} \ker P_j^{d_j}(u) \oplus \ker P_k^{d_k-1}(u) \\ &= \ker \left( \underbrace{P_k^{d_k-1} \prod_{j \neq k} P_j^{d_j}}_{\substack{\text{ne peut annuler } u \\ \text{car } \Pi_u \text{ minimal}}}(u) \right) \end{aligned}$$

Donc  $\ker P_k^{d_k-1}(u) \subsetneq \ker P_k^{d_k}(u)$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  on dispose de

$$x_k \in F_k \setminus \ker P_k^{d_k-1}(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} P_k^{d_k}(u)(x_k) = 0 \\ P_k^{d_k-1}(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x_k}}_{\substack{\text{car } P_k \text{ irréductible}}} = P_k^{d_k}$$

On pose  $x = \sum_{k=1}^N x_k$ , alors pour tout  $P \in \Pi_{u,x} \mathbb{K}[X]$

$$P(u)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

### Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et  $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$  d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \bigcup_{P \in D'} \underbrace{\ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x}}_{\substack{\text{car } P \text{ irréductible}}} = P^{d_k}$$

$$\text{car } P \text{ irréductible}$$

Donc on dispose de  $Q = \Pi_{u,y} \in D'$  tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

### Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et  $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$  d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \bigcup_{P \in D'} \underbrace{\ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x}}_{\substack{\text{car } P \text{ irréductible}}} = P^{d_k}$$

$$\text{car } P \text{ irréductible}$$

Donc on dispose de  $Q = \Pi_{u,y} \in D'$  tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

### Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et  $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$  d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \bigcup_{P \in D'} \underbrace{\ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x}}_{\substack{\text{car } P \text{ irréductible}}} = P^{d_k}$$

$$\text{car } P \text{ irréductible}$$

Donc on dispose de  $Q = \Pi_{u,y} \in D'$  tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

### Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et  $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$  d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \bigcup_{P \in D'} \underbrace{\ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x}}_{\substack{\text{car } P \text{ irréductible}}} = P^{d_k}$$

$$\text{car } P \text{ irréductible}$$

Donc on dispose de  $Q = \Pi_{u,y} \in D'$  tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

### Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et  $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$  d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \bigcup_{P \in D'} \underbrace{\ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x}}_{\substack{\text{car } P \text{ irréductible}}} = P^{d_k}$$

$$\text{car } P \text{ irréductible}$$

Donc on dispose de  $Q = \Pi_{u,y} \in D'$  tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

### Démonstration $\mathbb{K}$ infini

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

# Théorème de Cayley-Hamilton

Énoncé et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

**Soit**  $u \in \mathcal{L}(E)$ , **on a**  $\chi_u(u) = 0$  c'est à dire  $\Pi_u \mid \chi_u$ .

## Démonstration

**Soit**  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ , **on veut montrer**  $\chi_u(u)(x_0) = 0$ .

**On pose**  $F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$  **seulement** de  $E$  stable par  $u$ .

**Soit**  $\tilde{u}$  **endomorphisme induit** par  $u$  sur  $F_{x_0}$ , qui est donc cyclique.

**Soit**  $d \in \mathbb{N}$  **tel que**

$$e_0 = (x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

**Soit une base de**  $F_{x_0}$ .

$$\mathcal{M}_{e_0}(\tilde{u}) = C_P = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array} \right)$$

Où

$$\tilde{u}^d(x_0) = u^d(x_0) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x_0)$$

$$P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

**Or**  $P = \chi_{C_P} = \chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$  **donc**

$$\chi_u(u)(x_0) = Q(u)(P(u)(x_0)) = 0$$

# Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable, CNS pour  $u$  cyclique.
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent, CNS pour  $u$  cyclique.
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique, montrer que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = 1$ .
- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique, montrer que  $\text{Com } u = \mathbb{K}[u]$ .

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$$

Où les  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sont deux à deux distincts ( $\Pi_u$  SARS).

$u$  cyclique ssi  $N = n = \dim E$ .

- Si  $u$  cyclique,  $\deg \Pi_u = n = N$ .
  - Si  $\deg \Pi_u = n$
- Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de vecteurs propres associés aux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Posons  $x = \sum_{k=1}^n e_k$ .

$$\mathcal{M}_e(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Matrice de Vandermonde inversible, d'où

$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  base.

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice  $q$ .

$$\Pi_u = X^q$$

- Si  $u$  cyclique, alors  $\deg \Pi_u = q = n$ .
  - Si  $q = n$ ,  $u^{n-1} \neq 0$ , donc on dispose de  $x_0 \in E$  tel que  $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ .
- Et  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est libre et donc une base.

(En évaluant

$$u^i \left( \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) \right)$$

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique, donc on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$$\mathcal{M}_e(u - \lambda \text{id}) = \left( \begin{array}{cc|c} -\lambda & & a_0 \\ 1 & -\lambda & a_2 \\ & 1 & \ddots \\ & & \ddots & -\lambda \\ & & & 1 & a_{n-1} \end{array} \right)$$

Dont le quadrant inférieur gauche est une sous-matrice inversible de taille  $n - 1$ .

$$\text{rg } (u - \lambda \text{id}) \geq n - 1$$

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) = \dim \ker(u - \lambda \text{id}) \leq 1$$

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique. On dispose de  $x_0 \in E$  tel que

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

$$= u^{n-1} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0) \right)$$

Soit  $m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$

$$v(u^m(x_0)) = u^m(v(x_0))$$

$$= u^m \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(u^m(x_0))$$

Donc  $v$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k$  coincident sur une base, d'où  $v \in \mathbb{K}[u]$ .

# Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , CNS de trigonalisabilité sur  $\Pi_u$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est trigonalisable si  $\Pi_u$  scindé.

## Démonstration

- Supposons  $u$  trigonalisable, donc  $\chi_u$  est scindé or  $\Pi_u \mid \chi_u$  donc  $\Pi_u$  est scindé.
- Supposons  $\Pi_u$  scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

Avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}}_{F_k}$$

Pour  $k$  fixé,  $F_k$  est stable par  $u$  et  $u - \lambda_k \text{id}$ , posons  $u_k$  induit par  $u$  sur  $F_k$ .

$u_k - \lambda_k \text{id}$  est nilpotent, donc on dispose de  $e_k$  base de  $F_k$  tel que

$$\mathcal{M}_{e_k}(u_k - \lambda_k \text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & * \\ & \ddots \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Notons  $e$  la base concaténant les bases  $e_1, \dots, e_N$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_N & \end{pmatrix}$$

Où les  $A_1, \dots, A_N$  sont triangulaires.

- (Autre méthode) Par récurrence sur  $n$ .

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons le résultat pour  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $\dim E = n + 1$  et  $\Pi_u$  scindé.

$\Pi_u$  admet au moins une racine  $\lambda$ , on dispose donc de  $x \in E$  vecteur propre associé.

On forme la base  $(\lambda, e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = A = \left( \begin{array}{c|cccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$$

D'où  $\Pi_u(A_1) = 0$  donc  $\Pi_{A_1} \mid \Pi_u$  et  $\Pi_{A_1}$  scindé, donc par hypothèse de récurrence  $A_1$  est trigonalisable.

# Exercice : polynôme caractéristique divisant une puissance du polynôme minimal

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $n = \dim E$ . Montrer que  $\chi_u \mid \Pi_u^n$

---

Par récurrence forte sur  $n$ .

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons le résultat pour tout  $m \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ .

Si  $u$  est cyclique,  $\Pi_u = \chi_u$  d'où  $\chi_u \mid \Pi_u^n$ .

Sinon on prend  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ ,  $k = \deg \Pi_{u,x_0} < n$  donc  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$  est libre, on la complète en une base  $e$  de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \left( \begin{array}{c|c} C_{\Pi_{u,x_0}} & * \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$

Donc

$$\chi_u = \underbrace{\chi_{C_{\Pi_{u,x_0}}}}_{\Pi_{u,x_0}} \chi_A$$

$$\chi_u \mid \Pi_u \chi_A$$

Or par hypothèse de récurrence  $\chi_A \mid \Pi_A^{n-k}$  et

$$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \left( \begin{array}{c|c} \Pi_u(C_{\Pi_{u,x_0}}) & * \\ \hline 0 & \Pi_u(A) \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } \Pi_A \mid \Pi_u$$

Ainsi

$$\chi_u \mid \Pi_u \Pi_A^{n-k} \mid \Pi_u^{n-k+1} \mid \Pi_u^n$$

# Décomposition en sous espaces caractéristiques

Définition et démonstration de la décomposition en sous-espaces caractéristiques.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé, l'espace  $E$  se décompose en somme directe de ses stables par  $u$  :

$$E = \bigoplus_{k=1}^N F_k$$

Où pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $u_k$  induit par  $u$  sur  $F_k$  vérifie

$$u_k = \lambda_k \text{id} + n_k$$

Où  $n_k$  est nilpotent et  $\lambda_k \in \text{Sp}(u)$ .

Dé plus  $\dim F_k = m_k$  et  $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}$ .

## Cas diagonalisable

Si  $u$  est diagonalisable

$$\dim F_k = m_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$$

$$E_{\lambda_k}(u) = \ker(u - \lambda_k \text{id})$$

$$\subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k} = F_k$$

$$E_{\lambda_k}(u) = F_k$$

## Démonstration

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Où  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

Par le TDN on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}}_{F_k}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & * \\ & \ddots \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

D'où

$$\prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$$

$$m_k = \dim F_k$$

# Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal

Lien entre la décomposition en sous-espaces caractéristiques et le polynôme minimal.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé, à fortiori,  $\Pi_u$  est scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

On peut décomposer par le TDN sur  $\Pi_u$  et en les espaces caractéristiques

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \overbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}}^{F_k}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^N \overbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}}^{G_k}$$

Or  $d_k \leq m_k$  (car  $\Pi_u \mid \chi_u$ ), d'où

$$G_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k} \subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k} = F_k$$

Mais  $\bigoplus_{k=1}^N G_k = \bigoplus_{k=1}^N F_k$  donc  $G_k = F_k$ .

Soit  $q_k \leq d_k$  l'indice de nilpotence de  $n_k = (u - \lambda_k \text{id})|_{F_k}^{F_k}$ .

$$F_k \subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{q_k} \subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k} = F_k$$

Posons  $Q = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{q_k}$

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k)^{d_k}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k)^{q_k}$$

Donc par le TDN  $\ker Q(u) = E$ ,  $\Pi_u \mid Q$  donc  $d_k \leq q_k \leq d_k$ .

# Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.

**Soit**  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\Pi_u = X^d Q$  **avec**  $X \nmid Q$ .

## 1. Montrer que

$$d = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

## 2. Montrer que

$$E = \ker u^d \oplus \text{im } u^d$$


---

**Soit**  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\Pi_u = X^d Q$  **avec**  $X \nmid Q$ .

## 1. Notons

$$q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

Soit  $\tilde{u}$  l'induit par  $u$  sur  $\ker u^q$ .

$$\begin{cases} \tilde{u}^q = 0 \\ \tilde{u}^{q-1} \neq 0 \end{cases} \text{ Donc } \Pi_{\tilde{u}} = X^q$$

$$X^q \mid \Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u = X^d Q$$

$$q \leq d$$

Donc  $\ker u^q = \ker u^d$

$$\ker u^d \circ Q(u) = E$$

$$\text{im } Q(u) \subseteq \ker u^d = \ker u^q$$

$$\ker u^q \circ Q(u) = E$$

$$X^d Q \mid X^q Q$$

$$q \geq d$$

## 2. On a (TDN)

$$E = \ker u^d \oplus \ker Q(u)$$

Soit  $y \in \text{im } u^d$ , on dispose donc de  $x \in E$  tel que  $y = u^d(x)$ .

$$y = u^d(x)$$

$$Q(u)(y) = (X^d Q)(u)(x) = 0$$

$$\text{im } u^d \subseteq \ker Q(u)$$

Or par le théorème du rang

$$\dim \text{im } u^d = \dim E - \dim \ker u^d$$

$$= \dim \ker Q(u)$$

D'où  $\text{im } u^d = \ker Q(u)$ .

# Décomposition de Dunford

Définition et démonstration de la décomposition de Dunford.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé.

On dispose de  $d, n \in \mathcal{L}(E)$  tel que

- $u = d + n$
- $d$  diagonalisable
- $n$  nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$

De plus cette décomposition est unique.

Elle peut entre autre servir pour les puissances de matrices :

$$= P \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{m_1} + N_1)^k & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\lambda_n I_{m_n} + N_n)^k & \end{pmatrix}$$

## Démonstration

On reprend la décomposition en sous-espaces caractéristiques

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^m}_{F_k}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}$$

On note  $u_k$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_k$ .

$$F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{D'où } (u_k - \lambda_k \text{id}_{F_k})^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$$

Posons

$$n_k = u_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$\text{Donc } u_k = \lambda_k \text{id}_{F_k} + n_k$$

Où  $n_k$  est nilpotent d'ordre  $d_k$  (cf démonstration sous-espaces caractéristiques).

On pose alors  $d, n \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$d|_{F_k}^{F_k} = \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$n|_{F_k}^{F_k} = n_k$$

Donc  $d$  diagonalisable et  $n$  nilpotent d'ordre  $\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (d_k)$ .

## Matriciellement

$$\mathcal{M}_e(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_N I_{m_N} & \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{M}_e(n) = \begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & N_N & \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{K})$$

$$DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_N N_N & \end{pmatrix} = ND$$

Ainsi  $d'$  et  $d$  sont codiagonalisables, d'où  $d' - d$  est diagonalisable.

Et  $n - n'$  est nilpotent (binôme de Newton).

Or  $d' + n' = d + n$  d'où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$d|_{F_k}^{F_k} = \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$n|_{F_k}^{F_k} = n_k$$

Soient  $d', n' \in \mathcal{L}(E)$  respectent les conditions.

Comme  $u = d' + n'$ ,  $d'$  commute avec  $u$  et  $n'$  aussi, donc  $d'$  commute avec  $d \in \mathbb{K}[u]$  et  $n'$  avec  $n \in \mathbb{K}[u]$ .

Ainsi  $d'$  et  $d$  sont codiagonalisables, d'où  $d' - d$  est diagonalisable.

Et  $n - n'$  est nilpotent (binôme de Newton).

Or  $d' + n' = d + n$  d'où

$$\underbrace{d' - d}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{n - n'}_{\text{nilpotent}}$$

D'où  $d' - d = 0$  et  $n' - n = 0$ .

## Codiagonalisabilité

Définition et critère de codiagonalisabilité.

Soient  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  une famille d'endomorphismes.

On dit que les  $(u_i)_i$  sont codiagonalisables s'il existe une base  $e$  de  $E$  tels que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_e(u_i) \in D_n(\mathbb{K})$ .

### Démonstration : deux endomorphismes

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisables tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u) \quad \text{où } \text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Comme  $u \circ v = v \circ u$ , les  $E_{\lambda_k}(u)$  sont stables par  $v$ .

Soit  $v_k$  l'induit de  $v$  sur  $E_{\lambda_k}(u)$ , qui est diagonalisable car  $v$  l'est.

Pour chaque  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  on dispose de  $e_k$  base de vecteurs propres de  $v_k$  (donc de  $v$  et  $u$ ).

En concaténant on obtient une base qui convient.

**Démonstration famille quelconque**

Par récurrence sur  $n = \dim E$ .

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons la propriété pour tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension inférieure à  $n$ .

Soit  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  diagonalisables commutant avec  $\dim E = n + 1$ .

Si tout les  $u_i$  sont des homothéties n'importe quelle base convient.

Sinon on dispose de  $j \in I$  tel que  $u_j$  n'est pas une homothétie.

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u_j) \quad \text{où } \text{Sp}(u_j) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Pour tout  $i \in I$ , les  $E_{\lambda_k}(u_j)$  sont stables par  $u_i$  car  $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ .

Notons  $u_{i,k}$  l'induit de  $u_i$  sur  $E_{\lambda_k}(u_j)$  qui est de dimension inférieure à  $n$  car  $u_j$  n'est pas une homothétie.

Les  $(u_{i,k})_i$  sont donc diagonalisables et commutent entre eux, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On dispose donc de  $e_k$  base de  $E_{\lambda_k}(u_j)$  formée de vecteurs propres commun aux  $(u_i)_i$ . Il suffit alors de les concatener.

# Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur le commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

- Pour tout  $v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $v \in \text{Com } (u)$  si et seulement si les espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .
- $\dim \text{Com } (u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\dim E_{\lambda}(u))^2$

## Démonstration

- L'implication directe est évidente.

Supposons  $v \in \mathcal{L}(E)$  qui stabilise les espaces propres de  $u$ .

Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  soit  $x \in E_{\lambda}(u)$ , d'où  $v(x) \in E_{\lambda}(u)$ .

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= v(\lambda x) = \lambda v(x) \\ u(v(x)) &= \lambda v(x) \end{aligned}$$

Or  $u$  diagonalisable, donc on dispose d'une base de vecteurs propres de  $u$ .

Ainsi  $u \circ v$  et  $v \circ u$  coïncident sur une base d'où l'égalité.

- On note  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

On considère

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \text{Com}(u) & \rightarrow & \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u)) \\ v & \mapsto & (v|_{E_{\lambda_1}(u)}, \dots, v|_{E_{\lambda_N}(u)}) \end{array} \right.$$

Qui est linéaire.

Soit  $v \in \ker \theta$  : pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$v(E_{\lambda_k}(u)) = 0$$

$$\text{Or } E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u)$$

$$\text{Donc } v = 0$$

Soit  $(v_1, \dots, v_k) \in \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u))$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note  $e_k$  base de  $E_{\lambda_k}(u)$ .

On définit  $v \in \mathcal{L}(E)$  qui coïncide avec  $v_k$  sur tout les vecteurs de  $e_k$ .

Ainsi  $\theta(v) = (v_1, \dots, v_k)$ , et  $\theta$  isomorphisme.

$$\dim \text{Com}(u) = \sum_{k=1}^N \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u))$$

$$= \sum_{k=1}^N (\dim E_{\lambda_k}(u))^2$$

## Exercice : le bicommutant

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On définit le bicommutant de  $u$

$$B(u) = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \mid \begin{array}{l} \forall v \in \text{Com}(u) \\ v \circ w = w \circ v \end{array} \right\}$$

Montrer que  $B(u) = \mathbb{K}[u]$ .

---

Comme  $u \in \text{Com}(u)$  on remarque

$$\mathbb{K}[u] \subseteq B(u) \subseteq \text{Com}(u)$$

On construit  $e$  concaténation de bases des  $E_{\lambda_k}(u)$  pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

Soit  $w \in B(u) \subseteq \text{Com}(u)$  donc les  $(E_{\lambda_k})_k$  sont stables par  $w$ .

$$M = \mathcal{M}_e(w) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_N \end{pmatrix}$$

Pour tout  $v \in \text{Com}(u)$ ,  $w \circ v = v \circ w$ .

$$A = \mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Or  $AM = MA$  donc

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_k M_k = M_k A_k$$

Ainsi  $M_k$  est une matrice qui commute avec toutes les autres.

On montre facilement grâce à  $E_{ij}$  que  $M_k = \alpha_k I_{m_k}$ .

Par interpolation de Lagrange on dispose de  $P \in \mathbb{K}_{N+1}(X)$  tel que  $P(\lambda_k) = \alpha_k$ . Or

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(P(u)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}_e(w)$$

D'où  $w \in \mathbb{K}[u]$ .

# Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition et propriétés des projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$$

Soient  $p_1, \dots, p_N$  les projecteurs associés à la décomposition

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})}_{E_{\lambda_k}(u)}$$

On a alors pour tout  $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$p_i|_{E_{\lambda_j}(u)} = \delta_{ij} \lambda_i \text{id}$$

Dans la base  $e$  diagonalisant  $u$  et pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  on a

$$\mathcal{M}_e(P(u)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1)I_{m_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & P(\lambda_N)I_{m_N} & \\ & & & \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(p_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{m_k} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $p_k = L_k(u) \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$  avec  $L_k$  polynôme de Lagrange associés aux  $(\lambda_i)_i$ .

Ainsi pour tout  $q \in \mathbb{N}$

$$u = \sum_{k=1}^N \lambda_k p_k$$

$$u^p = \sum_{k=1}^N \lambda_k^q p_k \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$$

# Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur les sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable,  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

1. Si  $G$  sev stable par  $u$  alors

$$G = \bigoplus_{k=1}^N G \cap E_{\lambda_k}(u)$$

2. Réciproquement si  $G_1, \dots, G_N$  sont des sevs de  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_N}(u)$  respectivement alors

$$G = \bigoplus_{k=1}^N G_k$$

Est un sev stable par  $u$ .

## Démonstration

1. Soit  $\tilde{u}$  induit par  $u$  sur  $G$  donc diagonalisable.

$$\begin{aligned} G &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\tilde{u})} E_\lambda(\tilde{u}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^N \ker(\tilde{u} - \lambda_k \text{id}_G) \\ &= \bigoplus_{k=1}^N G \cap \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})}_{E_{\lambda_k}(u)} \end{aligned}$$

2. L'écrire.

# Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel

Démonstration de l'existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  admet une droite ou un plan stable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{m_k}$$

Avec  $P_1, \dots, P_N$  irréductibles deux à deux distincts.

- Si l'un des  $P_k$  est de degré 1.

$$P_k = X - \lambda$$

Et  $\lambda$  est racine de  $\Pi_u$  et est donc une valeur propre de  $u$  d'où l'existence d'une droite stable.

- Si l'un des  $P_k$  est de degré 2.

$$P_k = X^2 - aX - b$$

Supposons par l'absurde que  $\ker P_k(u) = \{0\}$ .

$$\Pi_u(u) = P_k(u) \circ Q(u) = 0$$

D'où  $Q(u) = 0$  qui est absurde car  $\Pi_u$  est minimal.

On dispose donc de  $x \in \ker P_k(u) \setminus \{0\}$ .

$$u^2(x) = au(x) + bx$$

D'où  $F = \text{Vect}(x, u(x))$  stable par  $u$ .

Si  $u(x) = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha^2 x = (a\alpha + b)x$$

$$\alpha \mid X^2 - aX - b$$

Absurde donc  $F$  est un plan.

# Endomorphismes simples

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1. Les seuls sev stables de  $u$  sont  $E$  et  $\{0\}$ .
  2.  $\chi_u$  irréductible.
  3.  $u$  est dit simple.
- 

1. (2  $\Rightarrow$  1) Par contraposé

Soit  $F$  sev stable par  $u$  de dimension dans  $\llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ , et  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit.

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

Avec  $\chi_{\tilde{u}} = \dim F \neq \deg \chi_u$  d'où  $\chi_u$  non irréductible.

2. (1  $\Rightarrow$  2) Par contraposé : Soit  $x \in E \setminus \{0\}$  on note

$$F_x = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$$

Qui est stable par  $u$ .

Si  $\deg \Pi_{u,x} = \dim F_x \leq n - 1$ , alors  $u$  possède un sev stable non trivial.

Sinon  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u \mid \chi_u$  tous unitaires de degré  $n$ , donc égaux. Ainsi

$$\Pi_{u,x} = \chi_u = PQ$$

$$y = Q(u)(x)$$

$$\Pi_{u,y} = P$$

D'où  $F_y$  stable non trivial.

# Endomorphismes semi-simples

Définition et propriétés des endomorphismes semi-simples.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1. Tout sev stable par  $u$  admet un supplémentaire stable.
2.  $\Pi_u$  est sans carrés

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k$$

Avec  $P_1, \dots, P_N$  irréductibles deux à deux distincts.

3.  $u$  est semi-simple.

## Démonstration

1. ( $1 \Rightarrow 2$ ) On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

Pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $F = \ker P_k(u)$  admet un supplémentaire stable  $G$ .

Soient  $u_F, u_G$  induent par  $u$  sur  $F$  et  $G$ .

$$\Pi_{u_F} = P_i$$

Car annule et irréductible.

De plus

$$P(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in F, P(u)(x) = 0 \\ \forall x \in G, P(u)(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{u_F} \mid P \text{ et } \Pi_{u_G} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G} \mid P$$

$$\text{Donc } \Pi_u = \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G}$$

Ainsi

$$\Pi_{u_G} \mid \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

$$\Pi_u = \Pi_{u_G} \vee P_i$$

Mais

$$G \cap F = \{0\}$$

$$G \cap \ker P_1(u) = \{0\}$$

$$0 \neq P_i(u_G) \in \mathrm{GL}(E)$$

$$P_i \nmid \Pi_{u_G}$$

Ainsi comme  $\Pi_u = P_i \vee \Pi_{u_G}$

$$d_i = 1$$

2. ( $2 \Rightarrow 1$ ) Cas  $\Pi_u$  irréductible.

On suppose  $\Pi_u$  irréductible de degré  $d$ .

Donc pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$

$$\Pi_{u,x} \mid \Pi_u \text{ d'où } \Pi_u = \Pi_{u,x}$$

$$\text{et } \dim F_x = d$$

Soit  $F$  sev stable par  $u$ , si  $F = E, G = 0$  convient.

On dispose alors de  $x_1 \in E \setminus F$ .

Comme  $F$  et  $F_{x_1}$  sont stables par  $u$ ,  $F \cap F_{x_1}$  l'est.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in F \cap F_{x_1} \setminus \{0\}$ .

$$\underbrace{\underbrace{F_x}_{\dim d} \subseteq \underbrace{F_{x_1}}_{\dim \leq d} \cap F}_{\dim d}$$

$$F_{x_1} \subseteq F$$

$$x_1 \in F$$

Qui est absurde :  $F \oplus F_{x_1} \subseteq E$ .

Supposons construits  $x_1, \dots, x_k$  tels que

$$\underbrace{F \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^k F_{x_i} \right)}_{F_k \text{ stable}} \subseteq E$$

Si  $F_k = E$  on a fini.

Sinon on choisit  $x_{k+1} \in E \setminus F_k$  et on répète.

$$F_{x_{k+1}} \cap F_k = \{0\}$$

$$F_k \oplus F_{x_{k+1}} \subseteq E$$

$$F \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{k+1} F_{x_i} \right) \subseteq E$$

Qui se termine en au plus  $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$  étapes.

3. ( $2 \Rightarrow 1$ ) Cas général.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k$$

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

$$F = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{(\ker P_k(u)) \cap F}_{F_k}$$

$F_k$  sev de  $E_k = \ker P_k(u)$  stable par  $u_k$  induit par  $u$  sur  $E_k$ .

De plus  $\Pi_{u_k} = P_k$  (annule et irréductible).

Donc par le premier cas on trouve  $G_k$  sev de  $E_k$  stable par  $u$  tel que

$$E_k = G_k \oplus F_k$$

Enfin

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{k=1}^N E_k \\ &= \underbrace{\left( \bigoplus_{k=1}^N F_k \right)}_{F \text{ stable par } u} \oplus \underbrace{\left( \bigoplus_{k=1}^N G_k \right)}_{G \text{ stable par } u} \end{aligned}$$

# Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé. Montrer que  $u$  est diagonalisable si tout sev stable par  $u$  admet un supplémentaire stable.

- Supposons  $u$  diagonalisable, soit  $F$  un sev stable par  $u$ .

On dispose donc de  $f = (f_1, \dots, f_d)$  base de  $F$  et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de vecteurs propres de  $E$ .

On peut donc complétée la base  $f$  par des vecteurs de  $e$ :

$(f_1, \dots, f_d, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-d}})$  base de  $E$

Ainsi  $G = \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-d}})$  est un supplémentaire de  $F$  stable par  $u$ .

- Supposons que tout sev stable par  $u$  admettent un supplémentaire stable.

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Est un sev stable, et admet donc  $G$  comme supplémentaire stable. Notons  $\tilde{u}$  l'induit sur  $G$  de  $u$ .

$$\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u \text{ scindé}$$

Donc  $\tilde{u}$  admet une valeur propre  $\lambda$  et un vecteur propre  $x \in F \cap G = \{0\}$  qui est absurde.

Donc  $G = \{0\}$  et  $F = E$  :  $u$  est diagonalisable.

# Endomorphismes de produit de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MA$  de  $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ .

---

**Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Posons**

$${}_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM \text{ ou } MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $M \in M_n(\mathbb{K})$

$$P(L_A)(M) = \begin{cases} P(A)M \\ MP(A) \end{cases} = L_{P(A)}(M)$$

De plus  $L_B = 0 \Rightarrow L_B(I_n) = B = 0$   
d'où

$$P(L_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

C'est à dire  $\Pi_{L_A} = \Pi_A$

On en déduit

- $L_A$  est nilpotent ssi  $A$  l'est et est de même ordre.
- $L_A$  est diagonalisable ssi  $A$  l'est.
- $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(L_A)$

De plus pour  $\lambda \in \text{Sp}(A)$

$$\dim E_\lambda(L_A) = n \dim E_\lambda(A)$$

## Démonstration

- Pour  $L_A(M) = AM$

Soit  $M = (C_1, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(L_A) &\Leftrightarrow AM = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, AC_j = \lambda C_j \\ &\Leftrightarrow \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$ .

- Pour  $L_A(M) = MA$

Soit  $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(L_A) &\Leftrightarrow MA = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, AL_i = \lambda L_i \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \{L_1, \dots, L_n\} \subseteq E_\lambda(A)$$

Ainsi  $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$ .

# Endomorphisme différence de produits de matrices

**Propriétés sur l'endomorphisme**  
 $\varphi : M \mapsto AM - MB$  in  $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , tel que  $\chi_A$  scindé et  $B$  admet au moins une valeur propre. ( $\mathbb{K}$  algébriquement clos suffit).

Posons

$$\varphi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM - MB \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Il y a équivalence entre

1.  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ .
2.  $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ .
3.  $\varphi$  injectif.
4.  $\varphi$  est un automorphisme.

De plus on a

- $\text{Sp}(\varphi) = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\}$

## Démonstration

- (3  $\Leftrightarrow$  4) Argument dimensionnel.
- (1  $\Rightarrow$  2) Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$

$$\lambda \notin \text{Sp}(B)$$

$$\ker(B - \lambda I_n) = E_\lambda(B) = \{0\}$$

$$B - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Ainsi

$$\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

- (2  $\Rightarrow$  3) Soit  $M \in \ker \varphi$

$$AM = MB$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\varphi(XY^\top) = AXY^\top - XY^\top B$$

$$= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)M}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})}$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et <math

# Endomorphisme commutateur de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme  $M \mapsto AM - MA \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  tel que  $\chi_A$  scindé.

$$\varphi_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M \mapsto AM - MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

On a les propriétés de  $M \mapsto AM - MB$ , et de plus

- Si  $A$  est nilpotent alors  $\varphi_A$  l'est.
- Si  $A$  est diagonalisable alors  $\varphi_A$  aussi.

## Démonstration

- Supposons  $A$  nilpotent d'ordre  $q$ . Posons

$$\begin{aligned} L_A &: M_n(\mathbb{K}) \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ L_A &: M \mapsto AM \\ R_A &: M \mapsto MA \end{aligned}$$

On sait que  $L_A$  et  $R_A$  sont nilpotents d'ordre  $q$  car  $A$  l'est.

De plus  $L_A \circ R_A = AMA = R_A \circ L_A$  d'où

$$\varphi_A = L_A - R_A$$

$$\varphi_A^{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \binom{2q}{k} (-1)^k R_A^k \circ L_A^{2q-k} = 0$$

- Supposons  $A$  diagonalisable.

On sait que  $L_A$  et  $R_A$  commutent et sont diagonalisables, donc ils sont codiagonalisables :

$$\varphi_A = L_A - R_A$$

Est diagonalisable.

# Endomorphismes nilpotents cycliques

Caractérisation des sev stables par un endomorphisme nilpotent cyclique.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent cyclique.

Les seuls sev de  $E$  stables par  $u$  sont les  $(\ker u^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

## Démonstration

Ils sont stables comme  $\ker$  d'un endomorphisme commutant avec  $u$ .

Soit  $F$  sev stable par  $u$ . Soit  $\tilde{u}$  induit par  $u$  sur  $F$  qui est nilpotent car  $\tilde{u}^n = 0$ .

Or l'ordre de nilpotence de  $\tilde{u}$  est majoré par  $d = \dim F : \tilde{u}^d = 0$ .

Donc  $F \subseteq \ker u^d$ .

De plus par les noyaux itérées

$$\underbrace{\ker u}_{\dim 1} \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{\ker u^d}_{\dim d} \subsetneq \dots \subsetneq \underbrace{\ker u^n}_{\dim n}$$

D'où  $F = \ker u^d$ .

# Produit de Kronecker et diagonalisabilité

Diagonalisabilité du produit de Kronecker de matrices (dimension  $2n$ ).

Soit  $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On pose le produit de Kronecker

$$M = L \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$$

Alors

- Si  $L$  est diagonalisable,  $M$  est diagonalisable ssi  $A$  l'est.
- Si  $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $M$  est diagonalisable ssi  $A = 0$ .

## Démonstration

- On suppose  $L$  diagonalisable :

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

On remarque

$$Q = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$

$$Q' = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix}$$

$$QQ' = \begin{pmatrix} I_n & \\ & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$Q'MQ = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda A & \\ & \mu A \end{pmatrix}$$

Donc  $M$  est diagonalisable ssi  $A$  l'est.

- Pour  $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad (\text{réurrence})$$

Donc pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

Si  $M$  est diagonalisable,  $\Pi_M$  est SARS.

$$\Pi_M(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_M(A) = 0 \\ A\Pi_M(A) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\Pi_M(A) = 0$ ,  $A$  est diagonalisable.

Or  $\Pi_M$  est SARS :  $\Pi_M \wedge \Pi_{M'} = 1$  donc  $P' \wedge \Pi_A = 1$  car  $\Pi_A \mid \Pi_M$ .

Donc  $\Pi_{M'}(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  et

$A\Pi_{M'}(A) = 0$  d'où  $A = 0$ .

# Cotrigonalisation

**Critère de Cotrigonalisabilité d'une famille d'endomorphismes.**

Soit  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  une famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent.

Il existe une base  $e$  de  $E$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_e(u_i)$  soit triangulaire supérieure.

## Démonstration : structure

On voudra toujours

1. Trouver un vecteur propre commun
2. Faire une récurrence sur la dimension.

Faisons d'abord la 2<sup>e</sup> étape dans le cas général :

Supposons que toute famille  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  d'endomorphismes trigonalisables qui commutent admette un vecteur propre commun.

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons la propriété sur tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension strictement inférieur à  $n$ .

Soit  $e_1$  vecteur propre commun aux éléments de  $(u_i)_i$  associé aux valeurs propres  $(\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^I$ .

On complète  $e_1$  en la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout  $i \in I$

$$\mathcal{M}_e(u_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & A_i \end{pmatrix} \quad \chi_{u_i} = \chi_{A_i}(X - \lambda)$$

Or  $\chi_{u_i}$  scindé donc  $\chi_A$  scindé :  $\chi_A$  est trigonalisable.

De plus les  $(A_i)_i$  commutent car mes  $(u_i)_i$  aussi.

Par hypothèse de récurrence on conclut.

## Démonstration : famille finie

Par récurrence sur  $d$  cardinal de la famille.

Cas 1 et 2 endomorphismes traités.

On suppose que toute famille de cardinal inférieur à  $d$  admet un vecteur propre commun.

Soit  $u_1, \dots, u_{d+1} \in \mathcal{L}(E)$  trigonalisables qui commutent.

Notons  $\tilde{v}$  induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$ , qui est encore trigonalisable, et admet donc un vecteur propre  $e_1$  vecteur propre commun aux  $u_1, \dots, u_{d+1}$ .

Par hypothèse de récurrence on conclut.

## Démonstration : deux endomorphismes

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  trigonalisables qui commutent.

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $E_\lambda(u) \neq \{0\}$  est stable par  $v$ .

Notons  $\tilde{v}$  induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$ , qui est encore trigonalisable, et admet donc un vecteur propre  $e_1$  vecteur propre commun aux  $u, v$ .

Donc  $F$  est stable par  $v$ , on peut donc y induire  $\tilde{v}$  qui est trigonalisable et admet donc  $e_1$  vecteur propre commun aux  $u, v$ .

De plus les  $(A_i)_i$  commutent car mes  $(u_i)_i$  aussi.

Par hypothèse de récurrence on conclut.

## Démonstration : famille infinie

Soit  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  une famille quelconque d'endomorphismes trigonalisables qui commutent.

$\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$  et admet donc une base  $u_{i_1}, \dots, u_{i_d}$ .

C'est une famille finie, donc cotrigonalisable dans une base  $e$ .

Et pour tout  $i \in I$ ,  $u_i \in \text{Vect}(u_{i_1}, \dots, u_{i_d})$  donc  $\mathcal{M}_e(u_i)$  est triangulaire supérieure (comme combinaison linéaire de matrices qui le sont).

# Exercice : polynôme caractéristique d'une somme d'endomorphismes

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie,  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  qui commutent, tel que  $v$  est nilpotent.

Montrer que  $\chi_{u+v} = \chi_u$  (Exercice 106).

---

## Deux perspectives

1. Comme  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev,  $u$  et  $v$  sont trigonalisables, et commutent, donc sont cotrigonalisable.

Ainsi on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(u + v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\chi_{u+v} = \chi_u$$

# Exercice :

## commutateur qui vaut l'un des opérande

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev (car  $\mathbb{K} = 0$ ) et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $uv - vu = u$ .

1. Montrer que  $u$  est nilpotent.
  2. Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $u$  et  $v$  sont cotrigonalisable.
- 

### 1. Deux méthodes :

- On considère

$$\varphi_v : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ w \mapsto wv - vw \end{cases}$$

$$\varphi_v(u^k) = ku^k$$

Donc si  $u^k \neq 0$ ,  $k \in \text{Sp}(\varphi_v)$  qui est fini, donc on dispose de  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0$ .

- On remarque

$$P(u)v - vP(u) = uP'(u)$$

En particulier pour  $P = \Pi_u$

$$0 = u\Pi'_u(u)$$

$$\underbrace{\Pi_u}_{\deg d} \mid \underbrace{X\Pi'_u}_{\deg d}$$

$$X\Pi'_u = c\Pi_u$$

Donc

$$dX^d + \sum_{k=0}^{d-1} ka_k X^k = cX^d + \sum_{k=0}^{d-1} ca_k X^k$$

$$c = d$$

$$\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, da_k = ka_k$$

$$\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, a_k = 0$$

$$\Pi_u = X^d$$

### 2. Comme $u$ est nilpotent,

$\text{Sp}(u) = \{0\}$ .

$$(uv - vu)(\ker u) = u(\ker u)$$

$$u(v(\ker u)) = 0$$

$$v(\ker u) \subseteq \ker u$$

Donc  $\ker u$  est stable par  $v$ , posons  $\tilde{v}$  induit sur  $\ker u$ . Or  $\tilde{v}$  admet un vecteur propre commun  $x \in \ker u = E_0(u)$ . Ainsi par récurrence sur la dimension de  $E$  :

Supposons la propriété pour tout  $\mathbb{C}$ -ev de dimension inférieur strictement à  $n$ .

Soit  $e_1$  vecteur propre commun à  $u$  et  $v$  associé aux valeurs propres 0 et  $\lambda$ .

Soit  $e' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$  base de  $E$ .

$$\mathcal{M}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{e'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Et  $AB - BA = A$  car  $uv - vu = u$  donc on dispose de

$(e_2, \dots, e_n)$  qui cotrigonalisent  $A$  et  $B$ .

# Exercice : critère de nilpotence sur la trace des puissances

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ ).

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , montrer que  $u$  est nilpotentssi pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(u^k) = 0$ .
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{tr } u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

Montrer que

$$\chi_u = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

Dans les deux cas,  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ , donc  $u$  est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \mu_1 & * \\ & \ddots \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = D$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{tr } u^k = \text{tr } D^k = \sum_{i=1}^n \mu_i^k$$

Posons  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  deux à deux distincts.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^d (X - \alpha_k)^{m_k}$$

$$\text{tr } u^k = \sum_{i=1}^d m_i \alpha_i^k \quad (*)$$

1. Par l'absurde : on suppose  $d \geq 2$  et  $\alpha_1 = 0$  (éventuellement  $m_1 = 0$ ).

Par  $(*)$  :

$$\forall P \in X\mathbb{K}[X], \quad \sum_{k=1}^d m_k P(\alpha_k) = 0$$

Ainsi par interpolation de Lagrange : pour  $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$ ,

$$P(\alpha_i) = 1$$

$$\forall j \neq i, \quad P(\alpha_j) = 0$$

$$P(\alpha_i) = P(0) = 0 \text{ d'où } X \mid P$$

$$\sum_{k=1}^d m_k P(\alpha_k) = m_i = 0$$

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

On considère  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$  deux à deux distincts.

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$n_i = |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \mu_k = \beta_i\}|$$

$$m_i = |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_k = \beta_i\}|$$

Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^N n_i \beta_i^k = \sum_{k=1}^N m_i \beta_i^k$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^N (n_i - m_i) \beta_i^k = 0$$

Or  $V(\beta_1, \dots, \beta_N) \neq 0$  d'où  $m_i = n_i$ .

# Calcul de puissance de matrice : cas diagonalisable

Méthodes de calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  diagonalisable.

1. Matrice diagonale :

On dispose de  $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$  (à calculer) tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

2. Lagrange : notons  $d = \deg \Pi_A$

$A^k \in \mathbb{K}[u] = \mathrm{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$

Donc on dispose de  $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$  tel que  $A^k = P(A)$ .

Explicitons le :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^N E_{\lambda_i}$$

Soit  $X \in \mathbb{K}^n$

$$X = \underbrace{X_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \cdots + \underbrace{X_d}_{\in E_{\lambda_d}}$$

$$AX = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_d X_d$$

$$A^k X = \lambda_1^k X_1 + \cdots + \lambda_d^k X_d$$

$$P(A)X = P(\lambda_1)X_1 + \cdots + P(\lambda_d)X_d$$

Ainsi avec  $P$  construit par interpolation de Lagrange afin de vérifier

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, P(\lambda_i) = \lambda_i^k$$

$$P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

On a alors  $P(A)X = A^k X$  pour tout  $X$ , d'où  $P(A) = A^k$ .

# Calcul de puissance de matrice : polynôme annulateur

Méthodes de calcul des puissances d'une matrice grâce à un polynôme annulateur.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$  annulateur de degré  $d$ .

$$X^k = QP + R$$

$$A^k = \underbrace{QP(A)}_0 + R(A)$$

Avec  $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ .

Si  $P = (X - \lambda)^m$  on trouve le reste de la division euclidienne grâce à la formule de Taylor :

$$Q = \sum_{k=0}^{m-1} \overbrace{\frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k}^{\text{reste}}$$

$$+ (X - \lambda)^m \underbrace{\sum_{k=m}^{\deg Q} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^{k-m}}_{\text{quotient}}$$

$$A^p = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} (A - \lambda I_n)^k$$

# Équations matricielles

Méthodes de résolutions d'équations matricielles.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

On cherche à résoudre les équations de la forme

$$P(M) = A$$

## Idées

- $MA = AM$  car  $A \in \mathbb{K}[M]$ .
- Ainsi  $M$  laisse stable
  - Les sous-espaces propres de  $A$
  - Les sous-espaces caractéristiques de  $A$
  - Tout les  $\ker Q(A)$
- Pour  $Q$  annulateur de  $A$ ,  $Q \circ P$  est annulateur de  $M$  : si  $Q \circ P$  est SARS,  $M$  est diagonalisable.

## Résolutions cas simple

Si  $\chi_A$  SARS :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k) \\ A &= R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} R^{-1} \\ R &= (C_1 \ \dots \ C_n) \end{aligned}$$

Avec  $C_1, \dots, C_n$  vecteurs propres associés aux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Si  $M$  est solution,  $M$  laisse stable tout les  $E_{\lambda_k} = \text{Vect}(C_k)$

$$MC_k = \mu_k C_k$$

$$M = R \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} R^{-1}$$

Or

$$P(M) = R \begin{pmatrix} P(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\mu_n) \end{pmatrix} R^{-1}$$

$$= A$$

D'où  $P(\mu_k) = \lambda_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

# Racine k-ème de matrices

Méthodes général de résolution de l'équation  $M^p = A$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

- Si  $A$  est nilpotent : il peut ne pas exister de solutions, par exemple :

Si  $A$  nilpotent d'ordre  $n$  et  $p \geq 2$

$$A^n = (M^p)^n = 0$$

D'où  $M$  nilpotent

$$M^n = A^{\lceil \frac{n}{p} \rceil} = 0$$

Absurde.

- Cas  $A = I_n + N$  avec  $N$  nilpotent.

Idée : DL de  $(1+x)^{\frac{1}{k}}$

$$(1+x)^{\frac{1}{k}} = P_k(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1})$$

$$P_k(X) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - i \right) \frac{x^j}{j!} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

$$1 + x = (P_k(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1}))^k$$

$$= Q_k(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1})$$

Par unicité de la partie principale du DL :

$$1 + X = Q_k(X)$$

Où  $Q_k$  est  $P_k^k$  tronqué à  $n-1$  termes

$$1 + X = P_k^k(X) - X^n R_k(X)$$

$$A = I_n + N = P_k^k(N) - \underbrace{N^n R_k(N)}_0$$

D'où  $P_k(N)$  est solution.

- Cas  $A \in M_n(\mathbb{C})$  tel que  $0 \notin \text{Sp}(A)$  : Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q I_{m_q} + N_q \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , on dispose de  $\tilde{M}_j$  et  $\mu_j$  tels que

$$\mu_j^k = \lambda_j$$

$$\tilde{M}_j^k = I_{m_j} + \frac{1}{\lambda_j} N_j$$

$$= \lambda_j I_{m_j} + N_j$$

Ainsi

$$M = P \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_q \end{pmatrix} P^{-1}$$

Est solution :

$$M^k = P \begin{pmatrix} M_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & M_q^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$= A$$

# Exercice : lien entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et son carré

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev, montrer que

$$\begin{aligned} u &\text{ diagonalisable} \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} u^2 \text{ diagonalisable} \\ \ker u = \ker u^2 \end{array} \right. \end{aligned}$$

- Supposons  $u$  diagonalisable, on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(u^2) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

D'où  $u^2$  diagonalisable, et de plus  $\ker u \subseteq \ker u^2$ .

Posons  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

$$\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \neq 0$$

On a bien  $\ker u^2 = \ker u$  (Vision matricielle).

- Supposons  $0 \notin \text{Sp}(u)$ ,  $u^2$  diagonalisable et  $\ker u^2 = \ker u$ .

$$\Pi_{u^2} = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)$$

$$\Pi_{u^2}(u^2) = \prod_{k=1}^q (X - \delta_k)(X + \delta_k)(u) = 0$$

Avec  $\delta_k^2 = \lambda_k$ . Ainsi  $u$  est annuler par un polynôme SARS, donc diagonalisable.

- Supposons  $0 = \lambda_1 \in \text{Sp}(u)$ ,  $u^2$  diagonalisable et  $\ker u^2 = \ker u$ .

$$E = \bigoplus_{k=1}^q \ker(u^2 - \lambda_k \text{id})$$

$$= \bigoplus_{k=2}^q \ker(u^2 - \lambda_k \text{id}) \oplus \ker u^2$$

$$= \bigoplus_{k=2}^q \ker(u - \delta_k \text{id})(u + \delta_k \text{id})$$

$$\oplus \underbrace{\ker u^2}_{\ker u}$$

D'où  $u$  diagonalisable.

# Recherche d'hyperplans stables

Méthodes de recherche  
d'hyperplans stables.

---

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $H$  hyperplan de  $\mathbb{K}^n$ .

On dispose de  $L \in M_{1n}(\mathbb{K})$  tel que

$$H = \{X \in \mathbb{K}^n \mid LX = 0\} = \ker L$$

$H$  est stable par  $A$  ssi

$L^T$  vecteur propre de  $A^T$

## Démonstration

$$AH \subseteq H \Leftrightarrow \ker L \subseteq \ker LA$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, LA = \lambda L$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, A^T L^T = \lambda L^T$$

# Pseudo-commutativité du polynôme caractéristique

Pour  $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ ,  
lien entre  $\chi_{AB}$  et  $\chi_{BA}$ .

Soient  $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ .

$$AB \in M_p(\mathbb{K}) \quad BA \in M_n(\mathbb{K})$$

$$X^n \chi_{AB} = X^p \chi_{BA}$$

$$\text{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \text{Sp}(BA) \setminus \{0\}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

$$\dim E_\lambda(AB) = \dim E_\lambda(BA)$$

Si  $p = n$  ( $A$  et  $B$  sont carrés) alors

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

## Démonstration

- Cas  $A = J_r$  :

$$A = \begin{pmatrix} I_r & | & 0 \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & | & B_2 \\ B_3 & | & B_4 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} B_1 & | & B_2 \\ 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad BA = \begin{pmatrix} B_1 & | & 0 \\ B_3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{AB} = \chi_{B_1} X^{p-r}$$

$$\chi_{BA} = \chi_{B_1} X^{n-r}$$

- Cas général :  $A = PJ_rQ$

$$AB = PJ_rQB$$

$$= P(J_rQBP)P^{-1}$$

$$BA = BPJ_rQ$$

$$= Q^{-1}(QBPJ_r)Q$$

Donc

$$X^n \chi_{AB} = X^n \chi_{J_rQBP}$$

$$= X^p \chi_{QBPJ_r} = X^p \chi_{BA}$$

- Pour tout  $X \in E_\lambda(AB)$

$$ABX = \lambda X$$

$$BABX = \lambda BX$$

$$BX \in E_\lambda(BA)$$

Ainsi

$$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} E_\lambda(AB) & \rightarrow & E_\lambda(BA) \\ X & \mapsto & BX \end{array} \right.$$

Est linéaire injectif, donc

$$\dim E_\lambda(BA) \geq \dim E_\lambda(AB)$$

Avec égalité par symétrie.

# Réduction de matrice dans rang 1

Propriétés de réduction de matrices de rang 1.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  tel que  $\text{rg } A = 1$ .

1. On dispose de  $L \in M_{1n}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n1}(\mathbb{K})$  tels que  $A = CL$ .
2.  $A^2 = (\text{tr } A)A$ .
3.  $X(X - \text{tr } A)$  annule  $A$ .
4. Si  $\text{tr } A \neq 0$ ,  $A$  est diagonalisable.
5. Si  $\text{tr } A = 0$ ,  $A$  est nilpotente.

## Démonstration

1. Comme  $\text{rg } A = \text{rg } (C_1 \ \cdots \ C_n) = 1$ , on dispose de  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \text{Vect}(C_k)$  :
$$A = (C_1 \ \cdots \ C_n) = C_k (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_C \underbrace{(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)}_L$$
2.  $A^2 = \underbrace{CLCL}_{\text{tr } A} = (\text{tr } A)A$
3. Évident.
4. Si  $\text{tr } A \neq 0$ ,  $A$  est annuler par  $X(X - \text{tr } A)$  SARS donc  $A$  est diagonalisable.
5. Si  $\text{tr } A = 0$ ,  $X^2$  annule  $A$ , donc  $A$  est nilpotente.

# Suites récurrentes linéaires

Propriétés, méthodes d'étude de suites récurrentes linéaires.

Pour tout  $(x_0, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit la suite  $(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$x_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_{n+k} \quad (*)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (*) \right\}$$

$$\dim \mathcal{S} = p$$

Où  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} = C_P^T$$

$$P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

Ainsi si  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{pmatrix}$

$$AX_n = X_{n+1}$$

$$X_n = A^n X_0$$

Si  $\chi_A$  est SARS

$$\chi_A = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$$

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left( (\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in [1, p]}$$

## Démonstration

- Si  $P = \chi_{C_P} = \chi_A$  est SARS

$$X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$$

$A$  est diagonalisable comme  $\chi_A$  est SARS

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_p & \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$A^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n \Pi_k$$

$$x_n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n \gamma_k$$

$$(x_n)_n = \sum_{k=1}^p \gamma_k (\lambda_k^n)_n$$

$$\in \text{Vect} \left( (\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in [1, p]}$$

Soit  $k \in [1, p]$

$$\chi_A(\lambda_k) = 0$$

$$\text{Donc } \lambda_k^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \lambda_k^i$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_k^{p+n} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \lambda_k^{n+i}$$

$$(\lambda_k^n)_n \in \mathcal{S}$$

- Sinon

$$P = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Posons

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \rightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (y_n)_n & \mapsto (y_{n+1})_n \end{cases}$$

Ainsi on a

$$\mathcal{S} = \ker P(\delta)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^q \ker (\delta - \lambda_k)^{m_k}$$

Montrons que  $(n^d \lambda_k^n)_n \in \ker (\delta - \lambda_k)^{m_k} \subseteq \ker P(\delta) = \mathcal{S}$  :

Définissons d'abord

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

On remarque que

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k [(X+1)^k - X^k]$$

$$= \sum_{k=0}^d a_k \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{X^{k-1-i} X^i}_{\deg \leq k-1} \right]$$

$$\deg \Delta(P) \leq \deg P - 1$$

Ainsi  $\Delta^{d+1} P = 0$ .

Alors pour tout  $k \in [1, q]$ ,  $P \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]$

$$(\delta - \lambda_k)^{m_k} (P(n) \lambda_k^n)_n = 0$$

$$= ([P(n+1) - P(n)] \lambda_k^{n+1})_n$$

$$= (\Delta(P)(n) \lambda_k^{n+1})_n$$

Donc

$$(\delta - \lambda_k)^{m_k} (P(n) \lambda_k^n)_n = 0$$

$$= (\Delta^{m_k}(P)(n) \lambda_k^{n+1})_n = 0$$

Ainsi pour  $P(X) = X^d$  avec

$$d \in [0, m_k - 1],$$

$$(n^d \lambda_k^n)_n \in \ker (\delta - \lambda_k)^{m_k}$$

Montrons que la famille  $((n^d \lambda_k^n)_n)_{d \in [0, m_k - 1]}$  est libre.

Notons  $u_d = (n^d \lambda_k^n)_n$ .

Supposons

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} \gamma_i u_i = 0$$

$$\left( \sum_{i=0}^{m_k-1} \gamma_i n^i \right) \underbrace{\lambda_k^n}_{\neq 0} = 0$$

Et  $P_k$  est un polynôme qui s'annule sur  $\mathbb{N}$  entier, et est donc nul.

Donc on dispose de bases des

$$\ker (\delta - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left( (n^d \lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{d \in [0, m_k - 1], k \in [1, q]}$$