

Maths

Exercice

Topologie

Exercice : jauge d'un convexe

Topologie

Adhérence

Boules et sphères

Comparaison de normes

Continuité d'une fonction

Continuité d'une fonction en un point

Continuité des applications linéaires

Continuité des formes linéaires

Densité

Distance

Fonctions K-Lipschitziennes

Interieur

Limite d'une fonction

Limites de suites

Nature topologique d'un hyperplan

Norme

Norme euclidienne

Norme opérateur

Norme produit

Points extrémaux d'un convexe

Topologie sur un espace métrique

Topologie, espace topologique

Valeurs d'adhérence d'une suite

Voisinage

Norme

Définition d'une norme sur un \mathbb{K} -ev E .

Une norme sur un \mathbb{K} -ev E est une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

1. Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

2. Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

3. Séparation : $\forall x \in E$

$$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Norme euclidienne

Définition et propriétés des normes euclidiennes.

Pour E un \mathbb{R} -ev un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ on a l'Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall x, y \in E$$

$$\langle x|y \rangle^2 \leq \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle$$

Avec cas d'égalité si (x, y) liée.

D'un produit scalaire dérive une norme (euclidienne)

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\langle x|x \rangle} \end{cases}$$

Démonstration

- Si $x = 0$ ou $y = 0$: évident.
Sinon pour $x, y \in E \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} & \langle x + ty | x + ty \rangle \\ &= t^2 \langle y|y \rangle + 2t \langle x|y \rangle + \langle x|x \rangle \\ &= P(t) \end{aligned}$$

Comme $\langle y|y \rangle > 0$, $\deg P = 2$. De plus par positivité de $\langle \cdot | \cdot \rangle$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \langle x|y \rangle^2 - 4 \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle \leq 0 \\ \langle x|y \rangle^2 &\leq \langle x|x \rangle \cdot \langle y|y \rangle \end{aligned}$$

Avec cas d'égalité si $\Delta = 0$, c'est à dire $x + ty = 0$.

- Vérifions les axiomes

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x|x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

2. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x|x \rangle} &= 0 \\ \langle x|x \rangle &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. Soit $x, y \in E$

$$\begin{aligned} & \|x + y\|^2 \\ &= \langle x + y | x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{|\langle x|y \rangle|}_{\text{C-S}} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Avec égalité ssi $\langle x|y \rangle \geq 0$ et égalité dans C-S : ssi x, y positivement liés.

Norme produit

Définition de la norme produit.

Soit $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_d, \|\cdot\|_d)$ des \mathbb{K} -evn.

On définit la norme produit sur $\prod_{k=1}^d E_k$ comme

$$N : \begin{cases} \prod_{k=1}^d E_k \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k\|_k \end{cases}$$

Distance

Définition de distance.

Soit X un ensemble non vide. On appelle distance une application $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ tel que

1. Symétrie : $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

2. Inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in X$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

3. Séparation : $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$ on peut définir la distance sur E associé à la norme $\|\cdot\|$:

$$d : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

Boules et sphères

Définition, propriétés des boules et sphères.

Soit E un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On définit les ensembles suivants

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$$

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$$

$$\mathbb{S}(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$$

Si E est un \mathbb{K} -evn alors on a de plus la convexité de $B(a, r)$ et $B_f(a, r)$.

Points extrémaux d'un convexe

Définition des points extrémaux d'un convexe et points extrémaux d'une boule.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $K \subseteq E$ convexe. On dit que $x \in K$ est extrémal si

$$\forall y, z \in K, \forall t \in]0, 1[, \\ x = (1 - t)y + tz \Rightarrow x = y = z$$

Si $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire, alors pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des points extrémaux de $B_f(a, r)$ est $\mathbb{S}(a, r)$.

Démonstration

Pour $r = 1$ et $a = 0$: (auxquels on peut se ramener)

- Soit $x \in B(0, 1)$

$$x = (1 - \|x\|)0 + \|x\| \frac{x}{\|x\|}$$

D'où x pas extrémal (on traite le cas $x = 0$ séparément).

- Soit $x \in \mathbb{S}(0, 1)$, $y, z \in B_f(0, 1)$, $t \in]0, 1[$ tel que

$$x = (1 - t)y + tz \\ \|x\| = 1 \leq (1 - t) \underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + t \underbrace{\|z\|}_{\leq 1}$$

On a égalité dans l'inégalité triangulaire : y et z positivement liés (car produit scalaire) et $\|y\| = \|z\|$ d'où $y = z = x$.

Topologie, espace topologique

Définition d'une topologie.

Soit X un ensemble, $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X si

1. $\{\emptyset, X\} \subseteq T$
2. Pour toute famille $(\Omega_i)_i \in T^I$

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in T$$

3. Pour tout $\Omega_1, \dots, \Omega_n \in T$

$$\bigcap_{k=1}^n \Omega_k \in T$$

Les éléments de T sont appelés ouverts de X .

X muni de T est appelé espace topologique.

Topologie sur un espace métrique

Définitions des ouverts / fermés d'un espace métrique.

Soit (E, d) un espace métrique.

On dit que $\Omega \subseteq E$ est un ouvert de E si

$$\forall x \in \Omega, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq \Omega$$

De manière équivalente

$$\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}(x)$$

L'ensemble T des ouverts de E forme une topologie :

1. \emptyset et E sont ouverts.
2. T est stable par union quelconque.
3. T est stable par intersection finie.

On définit de plus les fermés : le complémentaire d'un ouvert.

Démonstration

1. Évident.
2. Soit $(\Omega_i)_i \in T^I$ une famille d'ouverts. Soit $x \in W = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

On dispose de $i \in I$ tel que $x \in \Omega_i$, ainsi on dispose de plus de $\delta > 0$ tel que

$$B(x, \delta) \subseteq \Omega_i \subseteq W$$

Donc $W \in T$: c'est un ouvert.

3. Soit $F_1, \dots, F_n \in T$, soit $x \in W = \bigcap_{k=1}^n F_k$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on dispose de $\delta_k > 0$ tel que

$$B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$

$$\delta = \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \delta_k$$

Ainsi on a pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$B(x, \delta) \subseteq B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$

Donc

$$B(x, \delta) \subseteq W$$

Limites de suites

Définitions équivalentes de limites d'une suite.

Soit (E, d) un espace métrique, $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $l \in E$ est limite de la suite u si l'une des définitions suivantes équivalentes s'applique :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \varepsilon.$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon).$
3. $(d(u_n, l))_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
4. $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V.$

Si la limite existe, alors elle est unique.

Démonstration

- Équivalence : l'écrire.
- Si $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, prendre $l' \neq l$ et montrer que $(d(l', u_n))_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$

Valeurs d'adhérence d'une suite

Définitions et propriétés sur les valeurs d'adhérence d'une suite.

Soit (E, d) un espace métrique, $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $l \in E$ est une valeur d'adhérence de u s'il existe φ extractrice tel que $(u_{\varphi(n)})_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$.

Une suite qui à deux valeurs d'adhérence diverge.

Comparaison de normes

Définitions de comparaison de normes, propriétés.

Soit E un \mathbb{K} -ev, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E .

On dit que $\|\cdot\|_2$ est plus fine de $\|\cdot\|_1$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$$

Dans ce cas :

1. Pour tout $a \in E$ et $r > 0$

$$B_2(a, r) \subseteq B_1(a, \alpha r)$$

2. Si $\Omega \subseteq E$ est ouvert pour $\|\cdot\|_1$ est ouvert pour $\|\cdot\|_2$
3. Toute suite bornée pour $\|\cdot\|_1$ l'est pour $\|\cdot\|_2$.
4. Toute suite convergente pour $\|\cdot\|_1$ l'est pour $\|\cdot\|_2$.

On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si chacune est plus fine que l'autre. C'est une relation d'équivalence.

Adh rance

Définition de l'adh rance,
caractérisation séquentielle.

Soit (E, d) un espace métrique,
 $A \subseteq E$ une partie. Un point $x \in E$
est dit adhérant à A s'il vérifie
une des conditions équivalentes
suivantes :

1. $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$
2. $\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$
3. $d(x, A) = 0$

On définit alors l'adh rance d'un
ensemble (noté \overline{A}) comme
l'ensemble de ses points
d'adh rance.

- $A \subseteq \overline{A}$.
- A est fermée ssi $A = \overline{A}$.
- \overline{A} est le plus petit (au sens de
l'inclusion) fermé contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq B \subseteq E \\ B \text{ fermé}}} B$$

- $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$

Démonstration

- **(1 \Rightarrow 2)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
 x_n tel que $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$, qui
existe par hypothèse.

Ainsi $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$ d'où
 $(d(x_n, x))_n \rightarrow 0$ donc $(x_n)_n \rightarrow x$.

- **(2 \Rightarrow 1)** Par hypothèse on
dispose de $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \rightarrow x$. Soit
 $r > 0$.

On dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que
 $d(x_N, x) < r$, donc

$$x_N \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

- **(2 \Leftrightarrow 3)**

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow x \\ &\Leftrightarrow \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, d(x, a_n) \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) = 0 \end{aligned}$$

- Supposons que $F \neq \overline{F}$, on
dispose donc de $x \in \overline{F} \setminus F$.

Soit $\varepsilon > 0$, comme $x \in \overline{F}$

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon) \cap F &\neq \emptyset \\ B(x, \varepsilon) &\not\subseteq E \setminus F \end{aligned}$$

Donc $E \setminus F$ n'est pas un ouvert :
 F n'est pas fermée.

- Supposons que F n'est pas
fermée, on dispose donc de $x \in$
 $E \setminus F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \not\subseteq E \setminus F$$

Donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$$

D'où $x \in \overline{F}$, mais $x \notin F : F \neq \overline{F}$.

Voisinage

Définition de voisinage.

Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$.

On dit que $V \subseteq E$ est un voisinage de x dans E s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq V$.

On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans E .

Densité

Définition de densité.

Soit (E, d) un espace métrique, on dit que $A \subseteq E$ est dense dans E si

$$\overline{A} = E$$

Interieur

Définition de l'interieur d'une partie.

Soit (E, d) un espace métrique,
 $A \subseteq E$ et $x \in E$.

On dit que x est un point
interieur de A s'il existe $r > 0$ tel
que

$$B(x, r) \subseteq A$$

C'est à dire $A \in \mathcal{V}(x)$.

On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points
interieurs de A .

- $\overset{\circ}{A} \subseteq A$
- A est ouvert ssi $\overset{\circ}{A} = A$
- $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert
inclus dans A
- $\overset{\circ}{E \setminus A} = E \setminus \overline{A}$

On définit aussi la frontière
d'une partie $\partial A = \text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$
qui est un fermé.

Limite d'une fonction

Définition de la limite d'une fonction.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques et $X \subseteq E$.

Soit $f \in \mathcal{F}(X, F)$, $a \in \overline{X}$, on dit que f admet $l \in F$ comme limite en a si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq B(l, \varepsilon)$
2. $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap X) \subseteq V$.
3. $\forall (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} \rightarrow a, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$.

Démonstration

- **(1 \Rightarrow 2)** Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, on dispose donc de $B(l, \varepsilon) \subseteq V$, et donc de $\delta > 0$ tel que

$$f\left(\underbrace{B(a, \delta) \cap X}_{W \in \mathcal{V}(a)}\right) \subseteq B(l, \varepsilon) \subseteq V$$

- **(2 \Rightarrow 1)** Soit $\varepsilon > 0$, comme $V = B(\varepsilon, l) \in \mathcal{V}(l)$, on dispose de $W \in \mathcal{V}(a)$, et donc de $\delta > 0$ tel que

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq f(W \cap X) \subseteq V$$

- L'écrire.

Continuité d'une fonction en un point

Définition de continuité en un point.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques, $X \subseteq E$ et $f \in \mathcal{F}(X, F)$.

On dit que f est continue en $a \in X$ si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ce qui équivaut à

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$$

Il suffit d'ailleurs que f admette une limite en a , car dans ce cas cette limite est forcément $f(a)$.

Démonstration

- Supposons f continue en a :
comme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, pour tout $V \in \mathcal{V}(f(a))$ on dispose de $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que

$$f(W \cap X) \subseteq V$$

$$\mathcal{V}(a) \ni W \cap X \supseteq f^{-1}(V)$$

- Soit $V \in \mathcal{V}(f(a))$:

$$W = f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$$

$$f(W \cap X) \subseteq V$$

Continuité d'une fonction

Définition de continuité (sur un ensemble) d'une fonction.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques, $X \subseteq E$ et $f \in \mathcal{F}(X, F)$.

On dit que f est continue sur X ($f \in C^0(X, F)$) si pour tout $a \in X$, f est continue en a .

Ce qui est équivalent à

$\forall \Omega$ ouvert de F , $f^{-1}(\Omega)$ ouvert de X

On en déduit que

$\forall F$ fermé de F , $f^{-1}(F)$ fermé de X

Démonstration

- Supposons $f \in C^0(X, F)$, soit $\Omega \subseteq F$ ouvert et $a \in f^{-1}(\Omega)$.

Comme $f(a) \in \Omega$, $\Omega \in \mathcal{V}(f(a))$, et par continuité en $a \in X$:
 $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}(a)$.

- Soit $a \in X, \varepsilon > 0$, comme $B(f(a), \varepsilon)$ est ouvert, $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert contenant a : on dispose de $\delta > 0$ tel que

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

Fonctions K-Lipschitziennes

Définition des fonctions K -lipschitziennes.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques et $X \subseteq E$.

Une fonction $f \in \mathcal{F}(X, F)$ est dite k -lipschitzienne pour un $k > 0$ si

$$\forall x, y \in X, \\ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$$

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue.

Exemples (notons $d = d_E$) :

- Pour tout $a \in E$, $x \mapsto d(x, a)$ est 1-lipschitzienne.
- Pour tout $A \subseteq E$, $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Si $E = \mathbb{K}^n$ un \mathbb{K} -ev de dimension finie muni de $\|\cdot\|_\infty$ et d qui en dérive.

- Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto x_k \end{cases}$$

Est 1-lipschitzienne.

- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto P(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Est continue (par somme et produit de fonctions qui le sont).

Démonstration

- Soit $a \in E, x, y \in X$

$$\begin{aligned} & |d(x, a) - d(y, a)| \\ & \leq |d(x, y) + d(y, a) - d(y, a)| \\ & \leq d(x, y) \end{aligned}$$

- Soit $A \subseteq E, x, y \in X$. Soit $a \in A$

$$\begin{aligned} d(x, A) & \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \\ d(x, A) - d(x, y) & \leq d(y, a) \end{aligned}$$

Ceci pour tout a d'où

$$\begin{aligned} d(x, A) - d(x, y) & \leq d(y, A) \\ d(x, A) - d(y, A) & \leq d(x, y) \end{aligned}$$

Et par symétrie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} |x_k - y_k| & \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i - y_i| \\ & = \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

Continuité des applications linéaires

Conditions de continuité d'une application linéaire.

Soit E, F deux \mathbb{K} -evn, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a équivalence entre

1. f continue sur E .
2. f continue en 0.
3. $\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$
4. f est lipschitzienne.

Inversement on a équivalence entre

1. f n'est pas continue sur E
2. Il existe $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1$$

$$(\|f(x_n)\|)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

3. Il existe $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que

$$(x_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n)\| = 1$$

Enfin en dimension finie toute application linéaire est continue.

Démonstration

Continuité :

- $(1 \Rightarrow 2)$ Par définition.
- $(2 \Rightarrow 3)$ Par continuité de f en 0 on dispose de $\delta > 0$ tel que

$$f(B_E(0, \delta)) \subseteq B_F(0, \varepsilon)$$

Donc pour tout $x \in E$

$$\left\| f\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| \leq \varepsilon$$

$$\|f(x)\| \leq \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\|$$

- $(3 \Rightarrow 4)$ Soit $x, y \in E$

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x - y)\|$$

$$\leq k\|x - y\|$$

- $(4 \Rightarrow 1)$ Immédiat.

Non continuité :

- $(1 \Rightarrow 2)$ Comme f n'est pas continue on a

$$\forall k > 0, \exists x \in E, \|f(x)\| > k\|x\|$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose de $\tilde{x}_n \in E$ tel que

$$\|f(\tilde{x}_n)\| > n\|\tilde{x}_n\|$$

$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|} \quad \|x_n\| = 1$$

$$\|f(x_n)\| > n \quad \text{donc} \quad \|f(x_n)\| \rightarrow \infty$$

- $(2 \Rightarrow 3)$ Soit $(\tilde{x}_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une telle suite.

$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|f(\tilde{x}_n)\|} \quad \|f(x_n)\| = 1$$

$$\|x_n\| = \frac{1}{\|f(\tilde{x}_n)\|} \rightarrow 0$$

- $(3 \Rightarrow 1)$ f n'est pas continue en 0.

En dimension finie, on prend une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ et la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, et pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$ on a

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right\|$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \|x\|_{\infty} \|f(e_k)\|$$

$$= \left(\sum_{k=1}^n \|f(e_k)\| \right) \|x\|_{\infty}$$

Nature topologique d'un hyperplan

Nature topologique d'un hyperplan.

Soit E un \mathbb{K} -evn, H un hyperplan de E .

H est soit fermé soit dense dans E .

Démonstration

Supposons que H n'est pas fermé. On dispose de

$$(h_n)_n \in H^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \notin H$$

Comme H est un hyperplan,

$$H \oplus \text{Vect}(z) = E$$

Ainsi pour tout $x \in E$

$$x = h + \alpha z \quad (h, \alpha) \in H \times \mathbb{K}$$

$$(h + \alpha h_n)_n \in H^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

Continuité des formes linéaires

Condition de continuité d'une forme linéaire, lien avec les hyperplans.

Soit E un \mathbb{K} -evn.

Si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une forme linéaire alors f est continue ssi $\ker f$ est fermé.

Démonstration

- Si f est continue, $\ker f = f^{-1}\{0\}$ est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
- Si f n'est pas continue, on dispose de $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n)| = 1$$

$$(x_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Quitte à poser $(x'_n)_n$ on peut supposer $f(x_n) = 1 = f(x_0)$.

$$h_n = x_n - x_0 \in \ker f$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = -x_0 \notin \ker f$$

Donc $\ker f$ n'est pas fermé.

Norme opérateur

Définition de la norme opérateur.

Soit E, F, G trois \mathbb{K} -evn, on définit

$$\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap C^0(E, F)$$

Qui est une \mathbb{K} -algèbre.

Pour $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ on définit

$$\begin{aligned}\|f\|_{\text{op}} = \|f\| &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|f(x)\|\end{aligned}$$

Qui est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_C(E, F)$, elle est donc sous-multiplicative :

$$\begin{aligned}\forall f, g \in \mathcal{L}_C(E, F), \\ \|f \circ g\|_{\text{op}} \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|g\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

Démonstration

- Comme f est linéaire et continue on dispose de $k > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

Ainsi

$$\Gamma = \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

Est non vide majoré, donc le sup existe.

- De plus

$$\begin{aligned}\lambda \in \Gamma \\ \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \\ \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}(0,1), \lambda = \|f(x)\|\end{aligned}$$

Ainsi $\Gamma = \{\|f(x)\|, x \in \mathbb{S}(0,1)\}$.

- C'est bien une norme :

- Soit $\lambda \in \mathbb{K}, f \in \mathcal{L}_C(E, F)$

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{\text{op}} &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|\lambda f(x)\| \\ &= |\lambda| \|f\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

- Soit $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$ tel que

$$\begin{aligned}\|f\|_{\text{op}} = 0, \text{ soit } x \in E \setminus \{0\} \\ \|f(x)\| \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|x\| = 0 \\ f(x) = 0 \text{ donc } f = 0\end{aligned}$$

- Soit $f, g \in \mathcal{L}_C(E, F)$

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{\text{op}} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \frac{\|f(x) + g(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \left[\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \right] \\ &\leq \|f\|_{\text{op}} + \|g\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

- Soit $f \in \mathcal{L}_C(E, F), g \in \mathcal{L}_C(F, G)$ et $x \in E$:

$$\begin{aligned}\|g(f(x))\| &\leq \|g\|_{\text{op}} \|f(x)\| \\ &\leq \|g\|_{\text{op}} \|f\|_{\text{op}} \|x\|\end{aligned}$$

D'où $\|g \circ f\|_{\text{op}} \leq \|g\|_{\text{op}} \cdot \|f\|_{\text{op}}$.

Exercice : jauge d'un convexe

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -evn et $K \subseteq E$ convexe, symétrique par rapport à l'origine (c'est à dire stable par $-$), d'intérieur non vide et borné.

On pose

$$N : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \inf \{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in K \} \end{cases}$$

1. Montrer que N est bien définit.
2. Montrer que N est une norme
3. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|$.
4. Montrer que $\overline{B_N}(0, 1) = \overline{K}$

Montrons d'abord qu'on dispose

de $\delta > 0$ tel que $B(0, \delta) \subseteq K$.

Soit $a \in \overset{\circ}{K}$, on dispose donc de

$\delta > 0$ tel que

$$B(a, \delta) \subseteq K$$

Par symétrie, on a alors

$$B(-a, \delta) \subseteq K$$

Soit $x \in B(0, \delta)$

$$x + a \in B(a, \delta) \subseteq K$$

$$x - a \in B(-a, \delta) \subseteq K$$

$$\frac{1}{2}(x + a) + \frac{1}{2}(x - a) = x \in K$$

Par convexité.

1. Soit $x \in E$

$$\frac{\delta}{2\|x\|}x < \delta$$

$$\frac{\delta x}{2\|x\|} \in B(0, \delta) \subseteq K$$

D'où $\{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in K \}$ non vide minoré par $0 : N(x)$ qui en est l'inf existe et est positif.

2. 1. Comme K est borné, on dispose de $R > 0$ tel que

$$K \subseteq B(0, R)$$

Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$.

Par caractérisation de la borne inférieure, on dispose de

$$(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x}{\lambda_n} \in K \subseteq B(0, R)$$

$$\frac{\|x\|}{\lambda_n} \leq R$$

$$\frac{\|x\|}{R} \leq \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

Donc $x = 0$

2. Soit $\mu \in \mathbb{R}, x \in E$.

• Si $\mu = 0, N(\mu x) = N(0) = 0$.

• Si $\mu > 0$

$$N(\mu x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{\mu x}{\lambda} \in K \right\}$$

$$= \mu N(x)$$

• Si $\mu < 0$, par symétrie

$$N(\mu x) = N(-\mu x) = -\mu N(x)$$

3. Soit $x, y \in E, \lambda, \mu > 0$ tels

que $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in K$ on a alors

$$\frac{x + y}{\lambda + \mu} = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda + \mu}}_{1-t} \underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in K} + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda + \mu}}_t \underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in K}$$

$$\in K$$

Ainsi

$$N(x + y) \leq \lambda + \mu$$

Et avec $\lambda \rightarrow N(x), \mu \rightarrow N(y)$

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

3. Soit $x \in E, \lambda > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in K$.

$$\frac{\|x\|}{\lambda} < R$$

$$\|x\| \leq R \cdot N(x)$$

Et

$$\frac{\delta x}{2\|x\|} \in K$$

$$N(x) \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$$

4. Soit $x \in K, \frac{x}{1} \in K$ donc $x \in \overline{B_N}(0, 1)$.

Soit $x \in \overline{B_N}(0, 1)$.

• Si $N(x) = 1$, on dispose de

$$(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x}{\lambda_n} \in K$$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\lambda_n} \in \overline{K}$$

• Si $N(x) < 1$, on dispose par propriété de la borne inférieure de $\lambda \in [N(x), 1[$ tel que

$$\frac{x}{\lambda} \in K$$

$$x = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \left(\frac{x}{\lambda} \right) \in K$$