Maths

Analyse

Recherche d'équivalent d'une suite

Complexes

Formule de Moivre
Formules d'addition trigonometrique
Formules de duplication trigonométrique
Formules de factorisation trigonométrique
Formules de linéarisation trigonométrique
Formules de parité et périodicité trigonométriques
Formules en tangente de theta sur deux
Inégalitée Triangulaire

Continuité

Fonctions K-Lipschitziennes
Théorème de Heine
Théorème des bornes atteintes

Convexité

Propriétés de convexité

Dérivation

Fonctions trigonometriques réciproques
Inégalité des acroissements finis et de Taylor-Lagrange
Propriété des extrémum locaux
Taylor-Langrange
Théorème de Rolle, théorème des acroissements finis

Développements Limités

Développements limités
Étude local et asymptotique de fonctions

EDL

EDL d'ordre 1
EDL d'ordre 2
Méthode de séparation des variables
Méthode de variation de la constante

Intégration

Comparaison série intégrale
Critère de convergence d'intégrales usuelles
Fonction gamma
Hölder
Intégrales de Wallis
Intégration de l'inverse d'un trinôme
Lemme de Riemann-Lebesgue
Taylor reste intégrale

Réels

Adhérence
Corps totalement ordonné
Densité
Inégalitée Triangulaire
Partie convexe de R
Propriété de la borne supérieure
Propriété fondamentale des réels
Voisinage

Suites Réelles

Caractèrisation séquentielle de l'adhérence
Comparaison asymptotiques usuelles
Manipulations asymptotiques
Moyennes de Cesàro
Suites adjacentes, emboitées
Suites arithmético-géometriques
Suites récurentes d'ordre 2
Suites récurrentes
Théorème de Bolzano-Weiestrass

Séries

Absolue convergence
Comparaison série intégrale
Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle
Familles sommables
Propriétés élémentaires sur les séries
Règle de Raabe-Duhamel
Séries de Bertrand
Théorème de comparaison des séries positives
Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries
Théorème de sommation par paquets
Théorème des séries alternées
Transformation d'Abel
Équivalents de référence : séries de Riemann

Taylor

Taylor reste intégrale
Taylor-Langrange

Calculs

Formules de somme d'entiers consécutifs

Exercice

Séries

Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle

Trigonométrie

Euclidienne

Formules d'addition trigonometrique
Formules de duplication trigonométrique
Formules de factorisation trigonométrique
Formules de linéarisation trigonométrique
Formules de parité et périodicité trigonométriques
Formules en tangente de theta sur deux

61 cartes.

Taylor-Langrange

Théorème de Taylor-Lagrange, et conditions d'application.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, C^n sur $[a, b]$ et D^{n+1} sur $]a, b[$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Taylor reste intégrale

Théorème de Taylor reste intégrale, et conditions d'application.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, C^{n+1}

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

Inégalitée Triangulaire

Inégalitée triangulaire première et deuxième forme.

Soit a, b in $\mathbb{C}$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$$\||a| - |b|\| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

Formule de Moivre

Formule de Moivre.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Formules d'addition trigonometrique

Formules d’additions trigonométriques.

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$$
$$\sin(\theta + \varphi) = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi$$
$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan\theta + \tan\varphi}{1 - \tan\theta\tan\varphi}$$

Formules de duplication trigonométrique

Formules de duplication trigonométriques.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$$
$$\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Formules de linéarisation trigonométrique

Formules de linéarisation trigonométriques.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

Maths ▸ Analyse ▸ Complexes
Maths ▸ Trigonométrie ▸ Euclidienne

Formules de factorisation trigonométrique

Formules de factorisation trigonométriques.

Soient $p, q \in \mathbb{R}$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Formules en tangente de theta sur deux

Formules en $\tan\frac{\theta}{2}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

$$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$$

Maths ▸ Analyse ▸ Complexes
Maths ▸ Trigonométrie ▸ Euclidienne

Formules de parité et périodicité trigonométriques

Formules de parité et périodicité trigonométriques.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$$

Formules de somme d'entiers consécutifs

Forme explicites des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = ?$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

EDL d'ordre 1

Soit $a, b \in \mathbb{C}, c(x)$ et $C(x)$ tel que $C'(x) = c(x)$.

$$(E_1) : \quad y' = ay + b$$
$$(E_2) : \quad y' = a(x)y$$

Les solutions S_1 et S_2 de (E_1) et (E_2) sont

$$S_1 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
$$S_2 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{A(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Méthode de séparation des variables

Soit $a(x) \in D^1$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y$$
$$y(x) = ?$$

Soient $a(x) \in D^1$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = a(x)y$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = a(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{x_0}^{x} a(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\ln y - \ln y_0 = A(x) - A(x_0)$$
$$y = \underbrace{y_0 e^{-A(x_0)}}_{\lambda} e^{A(x)}$$

Méthode de variation de la constante

Soient $a(x), b(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$y' = a(x)y + b(x)$$
$$f_h : \quad y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

Trouver f_p solution particulière par la variation de la constante.

Soient $a(x), b(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$y' = a(x)y + b(x)$$
$$f_h : \quad y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

On fait varier la constante : $\lambda \to \lambda(x)$:

$$\begin{aligned}
f_p(x) &= \lambda(x)e^{A(x)} \\
f_{p'}(x) &= a(x)f_{p(x)} + b(x) \\
&= \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} \\
&= \lambda(x)a(x)e^{A(x)} + b(x) \\
\lambda'(x) &= b(x)e^{-A(x)} \\
\lambda(x) &= \int b(x)e^{-A(x)} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

EDL d'ordre 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, résolution de l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On appèlle équation caractèristique

$$(EC): \quad az^2 + bz + c = 0$$

- Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les racines (réelles) de (EC)

$$f_{h(x)} = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, soit r la racine double de (EC)

$$f_{h(x)} = (\lambda + \mu x)e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, soit $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ les racines complexes de (EC)

$$f_{h(x)} = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

Corps totalement ordonné

Définition d'un corps totalement ordonné.

Soit $(K, +, \cdot)$ un corps et un ordre $\leq$.

1. $\forall x, y, z \in K, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
2. $\forall x, y \in K, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont ordonnés, $\mathbb{C}$ ne l'est pas. Mais il existe un seul corps totalement ordonné (à isomorphisme près) : $\mathbb{R}$.

Propriété fondamentale des réels

Propriété fondamentale des réels.

Toute partie non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne sup. De même pour minoré.

On en déduit (car $\mathbb{R}$ est totalement ordonné) que

- $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
- Loi du signe de produit
- $x^2 \geq 0$
- $1 > 0$
- $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
- $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

Propriété de la borne supérieure

Propriété de la borne supérieure.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide majoré, $S = \sup A$ ssi

1. $\forall x \in A, x \leq S$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, s - \varepsilon < y$

Partie convexe de R

Définition de partie convexe.

Une partie convexe de $\mathbb{R}$ est un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \leq y \in C, [x, y] \subseteq C$$

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont des intervalles.

Densité

Définition de densité.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, D est dense dans $\mathbb{R}$ si

$$\forall a < b \in \mathbb{R},]a, b[\cap D \neq \emptyset$$

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, preuve : saut de grenouille.

Voisinage

Définition de voisinage.

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ est un voisinage de x si

$$\exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq V$$

On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.

Adhérence

Définition et propriétés de l'adhérence d'un ensemble.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$$

L'adhérence de A est alors

$$\begin{aligned}\operatorname{adh}(A) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ adhérent à } A\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \mid {\scriptstyle \forall \varepsilon>0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset}\right\}\end{aligned}$$

Propriétés :

- $A \subseteq \operatorname{adh}(A)$
- Si A non vide borné : $\{\inf A, \sup A\} \subseteq A$
- $\operatorname{adh}(]a, b[) = [a, b]$
- D est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\operatorname{adh}(D) = \mathbb{R}$
- $\operatorname{adh}(\operatorname{adh}(A)) = \operatorname{adh}(A)$

Suites arithmético-géometriques

Formule explicite d'une suite arithmético-géometrique.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On note $f(x) = ax + b$, on trouve le point fixe $w = \frac{b}{1-a}$. Soit $v_n = u_n - w$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= au_n + b - \underbrace{(aw + b)}_{-w} \\ &= a(u_n - w) = av_n \\ v_n &= a^n v_0 \\ u_n &= a^n(v_0 - w) + w \end{aligned}$$

Suites récurentes d'ordre 2

Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, (u_n) une suite tel que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On résout l'équation caractèristique

$$x^2 = ax + b$$

- Deux racines r_1, r_2

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Racine double r

$$u_n = (\lambda + \mu n) r^n$$

Avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ déterminés par u_0 et u_1.

Caractèrisation séquentielle de l'adhérence

Caractèrisation séquentielle de l'adhérence et la borne supérieure.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Si (u_n) une suite à valeure dans A et $u_n \to l$, alors $l \in \mathrm{adh}_{\mathbb{R}}(A)$.
- Si $x \in \mathrm{adh}_{\mathbb{R}}$, alors il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to x$.

Ainsi

$$\mathrm{adh}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \to x\}$$

Et $S = \sup A$ existe si A non vide majoré par S et il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \to S$.

Suites adjacentes, emboitées

Définition et théorème des suites adjacentes et emboitées.

- Adjacentes :

  Deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

  $$(a_n) \nearrow, \quad (b_n) \searrow$$
  $$\text{et } \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

  Théorème : (a_n) et (b_n) et $\lim a_n = \lim b_n$.

  Preuve : Théorème de la limite croissante pour la convergence.
- Emboitées :

  La même chose avec des segments.

  Théorème :

  $$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}$$
  $$\text{avec } x = \lim a_n = \lim b_n$$

Théorème de Bolzano-Weiestrass

Théorème de Bolzano-Weiestrass et démonstration.

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente. Dans $\mathbb{R}^n$ (et $\mathbb{C}$), il suffit d'être borné en norme ou module.

Preuve :

Soit (u_n) une suite bornée par a_0 et b_0, notons $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par récurrence :

- Ini : $|[a_0, b_0] \cap A| = \infty$
- Héré : On suppose $|[a_n, b_n] \cap A| = \infty$, et on coupe en $m = \frac{a_n+b_n}{2}$:
  - Si $|[a_n, m] \cap A| = \infty$, $\begin{cases} a_{n+1}=a_n \\ b_{n+1}=m \end{cases}$
  - Si $|[m, b_n] \cap A| = \infty$, $\begin{cases} a_{n+1}=m \\ b_{n+1}=b_n \end{cases}$

Par le théorème des suites emboitées :

$$\exists l \in [a_0, b_0], \quad \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\}$$

Soit φ une extractrice, par récurrence :

- Ini : $\varphi(0) = 0$
- Héré : $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est infini, donc il existe $m > \varphi(n)$ tel que $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. On prend $\varphi(n+1) = m$.

Donc $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ d'où $\lim u_{\varphi(n)} = l$.

Moyennes de Cesàro

Définition, propriétés des moyennes de Cesàro.

Soit (u_n) une suite. La suite des moyennes de Cesàro de u_n est

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Si $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\sigma_n \to l$.

Preuve :

- l fini : Découpage pour $n < N$ et $n \geq N$ et inégalité triangulaire.
- l infini : majoration.

Manipulations asymptotiques

Manipulations asymptotiques élémentaires.

- $\sim$: relation d'équivalence
  - produit, quotient, exposant
  - **pas** de somme, de composition, …
- $o(1) \Leftrightarrow \text{tend vers } 0, O(1) \Leftrightarrow \text{borné}$
- O et o transitifs
- O et o mangent les constantes
- $u_n \sim v_n \text{ ssi } u_n = v_n + o(v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ (ou O, o), alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$ (ou O, o)
- o et $\sim$ sont des cas particuliers de O.

Comparaison asymptotiques usuelles

Comparaison asymptotiques usuelles, stirling

Soit $k \in \mathbb{R}_+^\star, q > 1$, au voisinage de l'infini :

$$n^k = o(q^n)$$

$$q^n = o(n!)$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\frac{n^n}{e^n}$$

$$\ln(n!) \sim n \ln n$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Fonctions K-Lipschitziennes

Qu'est qu'une fonction K-lipschitzienne

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Lipschitz sur un segment implique uniformement continue.

Théorème des bornes atteintes

Théorème des bornes atteintes et démonstration.

Si f est $C^0([a,b])$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve :

Notons $M = \sup f$, quitte à avoir $M \in \overline{\mathbb{R}}$. $M \in \mathrm{adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(f([a,b]))$, donc il existe une suite (x_n) à valeur dans $[a,b]$ tel que $f(x_n) \to M$.

Par Bolzano-Weiestrass, il existe φ tel que $x_{\varphi(n)} \to l$ avec $l \in [a,b]$ et donc nécéssairement $M \in \mathbb{R}$.

Théorème de Heine

Énoncé et démonstration du théorème de Heine.

Toute fonction continue sur un segment est uniformement continue.

Preuve :

Soit $f \in C^0([a,b])$. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformement continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a,b]$$
$$|x-y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

On prend $(x_n), (y_n) \in [a,b]^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$
$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Ces suites sont bornées donc par Bolzano-Weiestrass, il existe une extractrice φ tel que $x_{\varphi(n)} \to l \in [a,b]$.

Or $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \to 0$ donc $y_{\varphi(n)} \to l$.

Mais par continuité de f,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f\left(x_{\varphi(n)}\right) &= \lim_{n\to\infty} f\left(y_{\varphi(n)}\right) \\ &= f(l)\end{aligned}$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f\left(x_{\varphi(n)}\right) - f\left(y_{\varphi(n)}\right)| < \varepsilon$$

Qui est absurde.

Fonctions trigonometriques réciproques

Domaine de définition et dérivées des fonctions trigonometrique réciproques.

$$\begin{array}{rcccc} \arccos & : & [-1,1] & \to & [0,\pi] \\ \arccos' & : &]-1,1[& \to & [-1,-\infty[\\ & & x & \mapsto & -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \arcsin & : & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin' & : &]-1,1[& \to & [1,+\infty[\\ & & x & \mapsto & \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc} \arctan & : & \mathbb{R} & \to & \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ \arctan' & : & \mathbb{R} & \to &]0,1] \\ & & x & \mapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Propriété des extrémum locaux

Que peut on dire si $f : I \to \mathbb{R}$ et dérivable et admet un extrémum local en $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable qui admet un extrémum local en a, un point intérieur à I, alors $f'(a) = 0$.

Preuve : par hypothèse, pour un maximum (un minimum se traite de même)

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

Étudions

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si $x < a$:

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{<0}} \geq 0$$

Si $x > a$:

$$\frac{\overbrace{f(x) - f(a)}^{\leq 0}}{\underbrace{x - a}_{>0}} \leq 0$$

Donc $f'(a) = 0$ (les deux limites sont égales par la dérivabilité de f en a).

Théorème de Rolle, théorème des acroissements finis

Énoncé et preuve des théorèmes de Rolle et des acroissements finis.

Soit $f \in C^0([a,b])$ dérivable sur $]a,b[$

Rolle Si $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in \,]a,b[, \;\; f'(c) = 0$$

TAF

$$\exists c \in \,]a,b[, \;\; f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve :

- Rolle : théorème des bornes atteintes, propriétés des extrémum locaux avec une disjonction de cas si les extrémums sont aux bornes.
- TAF : Rolle en pente, on corrige par la pente pour se ramener à Rolle.

Inégalité des acroissements finis et de Taylor-Lagrange

Inégalité des acroissements finis et de Taylor-Lagrange.

Inégalité des acroissements finis
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$, pour tout $x \in I$

$$|f(x) - f(a)| \leq \sup_{[a,x]}|f'| \cdot |x - a|$$

Inégalité de Taylor-Lagrange
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ qui est D^{n+1} et $a \in I$, pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!} \right| \leq \sup_{[a,x]}\left| f^{(n+1)} \right| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

On prend les théorème et on majore le paramètre.

Intégration de l'inverse d'un trinôme

Méthode d'intégration pour l'inverse d'un trinôme du second degré.

On prend $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, on vas intégrer $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.

- $\Delta > 0$: décomposition en éléments simples
- $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{a(x-r)^2} \\ &= -\frac{1}{a(x-r)}\end{aligned}$$

- $\Delta < 0$: on passe à la forme cannonique

$$\begin{aligned}&ax^2 + bx + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2}\right]\end{aligned}$$

Et on se ramène à $\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u$.

$$\begin{aligned}&\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \\ &= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan\left(\frac{2ax + b}{\sqrt{|\Delta|}}\right)\end{aligned}$$

Développements limités

$$\frac{1}{1-x} = \ ? \qquad \mathrm{ch}(x) = \ ?$$
$$\frac{1}{1+x} = \ ? \qquad \mathrm{sh}(x) = \ ?$$
$$\ln(1+x) = \ ? \qquad (1+x)^\alpha = \ ?$$
$$e^x = \ ? \qquad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \ ?$$
$$e^{-x} = \ ? \qquad \arcsin(x) = \ ?$$
$$\cos(x) = \ ? \qquad \arccos(x) = \ ?$$
$$\sin(x) = \ ? \qquad \arctan(x) = \ ?$$
$$\tan(x) = \ ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2) = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \prod_{p=0}^{k-1} (\alpha - p) + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2k})$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + o(x^5) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)} + o(x^{2n+1})$$

$$\arccos(x) = -x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + o(x^5) = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

Étude local et asymptotique de fonctions

Méthode pour étudié le comportement local et asymptotique d'une fonction.

Local au voisinage de $a \in \mathbb{R}$
- Équivalent en a : premier terme
- Tangente en a : $\mathrm{DL}_1(a)$
- Signe de f en a : premier terme non nul.
- Position relative par rapport à la tangente : signe du premier terme non nul après l'ordre 1.

Asymptotique au voisinage de $\pm\infty$
- Asymptote oblique : $\mathrm{DL}_1(\pm\infty)$
- Position relative : signe du terme suivant.

Rappelle :

f admet une asymptote oblique d'équation $ax + b$ si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

Suites récurrentes

Méthode pour les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit f une fonction et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Intervalle stable : on cherche I tel que $f(I) \subseteq I$.
2. Variations de (u_n)
   - Signe de $f(x) - x$ sur I
     - $+$: (u_n) est croissante
     - $-$: (u_n) est décroissante
     - Sinon affiner I
   - Monotonie de f
     - Si f est croissante sur I, (u_n) est monotone
     - Si f est décroissante sur I, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotone.
3. On montre l'éxistence de la limite (limite croissante)
4. On la détermine : il s'agit de l'un des points fixes de I (idéalement il n'y en a qu'un).

   Dans le cas des fonctions décroissantes, on cherche les limites des deux sous-suites, points fixes de $f \circ f$.

Propriétés de convexité

Définition et propriétés de convexité.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, f est dite convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0,1]$$
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y)$$
$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Propriétés :

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe, $\forall x_1, ..., x_n \in I$

$$\forall \lambda_1, ..., \lambda_n \in [0,1], \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow$$
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

- Soit Φ convexe, $\forall f \in C^0([a,b])$

$$\Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x\right)$$
$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(f(x)) \,\mathrm{d}x$$

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, on note

$$\begin{array}{cccc} \tau_a & : I \setminus \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

  les taux d'acroissements en a de f.

  f est convexe ssi $\forall a \in I, \tau_a$ est croissante.

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, on appelle droite d'appuis en x_0 de f une droite $y = ax + b$ tel que
  - $\forall x \in I, ax + b \leq f(x)$
  - $f(x_0) = ax_0 + b$

  Si f convexe, f admet des droites d'appuis en tout points.

Propriétés élémentaires sur les séries

Propriétés élémentaires sur les séries.

- Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$, on dit que $\sum u_n$ converge si (S_n) converge.
- Si $\sum u_n$ converge alors
$$(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
- La suite (u_n) converge ssi la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- L'ensemble $\mathcal{S}$ des séries convergentes est un sev de l'espace des suites, et l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{S} & \to & \mathbb{K} \\ & (u_n) & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$$
est linéaire.
- Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ alors $\sum u_n$ converge ssi (S_n) est majoré (théorème de la limite monotone).

Théorème de comparaison des séries positives

Énoncé et démonstration du théorème de comparaison des séries positives.

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ alors

1. Si $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{n\to+\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge.

Démonstration :

1. (S_n) est majoré par $\left(\tilde{S}_n\right)$ qui est fini.
2. (S_n) est majoré par $M \cdot \tilde{S}_n$ qui est fini.
3. $u_n \sim v_n$ implique $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Comparaison série intégrale

Propriétés et methode de comparaison série intégrale.

Pour $f \in C^0_{\text{pm}}([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$, décroissante, $\forall n \geq \lceil a \rceil + 1 = N_0$

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

D'où

$$\sum_{n=N_0}^{N} f(n) \geq \int_{N_0}^{N+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_{N_0-1}^{N} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Ainsi $\sum f(n)$ converge ssi $\int_{N_0}^{+\infty} f$ converge.

Et de plus (à redémontrer) :

$$\sum \left(\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) \right)$$

$$\sum \left(f(n) - \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \right)$$

sont à terme général positif et convergent car

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f \leq f(n+1)$$

$$0 \leq \int_{n-1}^{n} f - f(n) \leq f(n+1) - f(n)$$

Et $\sum f(n+1) - f(n)$ est positive et converge (série téléscopique) car f converge (positive et décroissante).

Dans le cas f non monotone :

Si $f \in C^1$ et $\int_n^{+\infty} |f'|$ converge

$$\int_k^{k+1} f = \underbrace{[(t-k-1)f(t)]_k^{k+1}}_{f(k)} - \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_1^{N+1} f = \sum_{k=1}^{N} f(k) + \sum_{k=1}^{N} \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

Or pour tout $k \geq 1$

$$\left| \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_k^{k+1} |f'|$$

Qui est le terme général d'une série convergente d'où

$$\begin{array}{rll} & \sum f(n) & \text{converge} \\ \text{ssi} & \left(\int_1^N f \right)_N & \text{converge} \\ \text{ssi} & \int_1^{+\infty} f & \text{converge} \end{array}$$

Séries de Bertrand

Définitions et propriétés des séries de Bertrand.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est appelée série de Bertrand.

Cette série converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration :

- Cas $\alpha > 1$ comparaison avec les series de Riemann, en prenant $\gamma \in \left]1, \alpha\right[$.
- Cas $\alpha < 1$ même chose avec $\gamma \in \left]\alpha, 1\right]$.
- Cas $\alpha = 1$, comparaison série intégrale avec $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

Recherche d'équivalent d'une suite

Méthodes de recherche d'équivalents.

Si on cherche un équivalent d'une suite (u_n)

- Étudier la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ou $\sum(u_n - u_{n+1})$, sommes partielles ou restes (voir théorème de sommation des relations de comparaison).
- Chercher $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$, pour avoir

$$u_n^\alpha - u_0^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} nl$$

Absolue convergence

Définitions et démonstration du théorème de l'absolue convergence d'une série.

Une série $\sum u_n$ (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration : on étudie $\left((u_n)_+\right)$ et $\left((u_n)_-\right)$ pour le cas réel, puis $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ pour le cas imaginaire, à chaque fois on majore par le module et on applique les thorème de comparaison des séries positives.

Théorème des séries alternées

Énoncer et démonstration du théorème des séries alternées.

Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante tel que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = S - S_n$ est du signe du premier terme et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration : on montre que les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes et on étudie R_{2n} et R_{2n+1}.

Transformation d'Abel

Définition et applications de la transformation d'Abel.

Il s'agit d'une sorte d'IPP sur les séries. Soit (a_n) et (b_n) deux suites, la transformation d'Abel est utile si on a des hypothèses sur $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. On pose $S_{-1} = 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} (S_k - S_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} S_k b_k - \sum_{k=0}^{n} S_{k-1} b_k \\ &= S_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k)\end{aligned}$$

Applications :

$$\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

Remarque : on peut aussi écrire $a_k = R_{k-1} - R_k$, qui peut être intérressant si $\sum a_n$ converge.

Règle de Raabe-Duhamel

Énoncé et démonstration de la règle de Raab-Duchamel.

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right), \quad h > 0$$

On considère $n^\alpha a_n = u_n$, on veut montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+^*$, c'est dire que $(\ln(u_n))$ a une limite réelle. On étudie $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)\right) + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^{\min(2,1+h)}}\right)
\end{aligned}$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à terme positifs (en valeur absolue) $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge, d'où (u_n) converge.

Ainsi $n^\alpha a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^l$, donc $a_n \sim \frac{e^l}{n^\alpha}$, $\sum a_n$ converge ssi $\alpha > 1$.

Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries

Énoncés des théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries.

Pour les restes de séries convergentes :

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n$ converge.

1. Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\right)$$
2. Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\right)$$
3. Si $u_n \sim a_n$, alors
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$$

Démonstration : on repasse par les définitions de o et O : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq \mathbb{N}, |u_n| \leq K a_n$, avec $K > 0$ fixé pour O et $K = \varepsilon > 0$ pour o. Pour $\sim$, on a $u_n - a_n = o(a_n)$.

Pour les sommes partielles de séries divergentes :

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, (a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n$ diverge.

1. Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right)$$
2. Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} a_n\right)$$
3. Si $u_n \sim a_n$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} a_n$$

Démonstration : même que pour l'autre, on à juste a découper la somme entre avant et après un certain rang (pour o et O).

Équivalents de référence : séries de Riemann

Équivalent des restes ou sommes partielles des séries de Riemann (à redemontrer).

Par comparaison série intégrale :

- Pour $1 \geq \alpha > 0$

$$\int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_2^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

- Pour $\alpha > 0$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

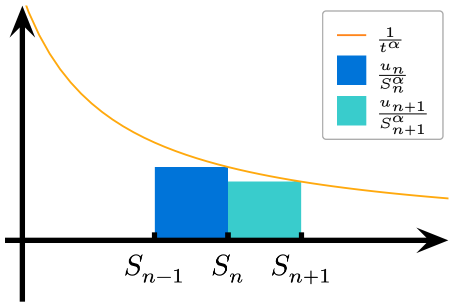
$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha - 1}}$$

Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle

Démonstration de la CNS sur α de la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$ (avec $\sum u_n$ divergente).

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$, $\sum u_n$ diverge, et $\alpha \in \mathbb{R}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_n$.

- Si $\alpha > 1$:



Donc pour $t \in [S_{n-1}, S_n]$

$$\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{S_n^\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_0}^{S_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{S_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$$

Or $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{S_0^\alpha}$$

- Si $\alpha = 1$:

Si $\frac{u_n}{S_n} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, la série diverge grossièrement, et sinon

$$\frac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$$
$$\sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$$

Qui est le terme général d'une série téléscopique divergergente.

- Si $\alpha \leq 1$, on compare avec $\alpha = 1$, car à partir d'un certain rang $S_n \geq 1$.

Familles sommables

Définition et propriétés élémentaires des familles sommables.

Soit I un ensemble non vide.

Pour $(u_i) \in \mathbb{R}_+^I$, on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup\left\{\sum_{j \in J} u_j,\, J \subseteq I \text{ fini}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Pour une famille $(u_i) \in \mathbb{K}^I$, on dit qu'elle est sommable si

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors elle contient un nombre au plus dénombrable d'éléments non nuls (Démonstration : on étudie $J_n = \left\{i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n}\right\}$)

Théorème de sommation par paquets

Énoncer et éléments de démonstration du théorème de sommation par paquets.

Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$, et $I = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} I_n$ une partition. La famille (u_i) est sommable ssi

$$(*) : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i\in I_n} \text{ sommable} \\ \sum\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) \text{ converge vers } S \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

Démonstration :

- Cas positif :
  - On suppose $(*)$, on prend une sous famille fini J de I, on a donc une famille $(J_n = I_n \cap J)_n$, on note $N = \max(n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset)$ qui existe car J fini.

$$\begin{aligned} \sum_{j\in J} u_j &= \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{j\in J_n} u_j\right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) = S \end{aligned}$$

  - Caractèrisation de la borne supérieure, majoration et sous ensembles finis.
- Cas général : D'abord en valeurs absolues, puis parties positives, négatives, réelles et imaginaires.

Critère de convergence d'intégrales usuelles

Critère de convergence d'intégrales usuelles :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{\alpha - 1}$ ssi $\alpha > 1$.
- $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge vers $\frac{1}{1 - \alpha}$ ssi $\alpha < 1$.
- $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ converge ssi $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$

Fonction gamma

Définition, convergence et démonstration de la fonction Γ.

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$$

- Qui converge pour $x > 0$.
- Pour $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

- $\Gamma(1) = 1$

$t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est C^0_{pm} sur $]0, +\infty[$.

- Sur $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{x-1} &= o_{t \to +\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right) \\ &= o_{t \to +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right) \end{aligned}$$

  Or $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} \, \mathrm{d}t$ converge, donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t$ converge.
- Sur $]0, 1]$

$$e^{-t} t^{x-1} \underset{t \to 0_+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

  Or $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-x}}$ converge ssi $1 - x < 1$ d'où $x > 0$, et on conclut par le même théorème.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, \mathrm{d}t \\ &= \left[-e^{-t} t^x\right]_0^{+\infty} + x \int_0 e^{-t} t^{x-1} \, \mathrm{d}t \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

Intégrales de Wallis

Définition, propriétés et démonstration des intégrales de Wallis.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^n \,\mathrm{d}\theta \quad {\scriptstyle (\theta = \frac{\pi}{2} - t)} \end{aligned}$$

Relation de récurrence

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} \,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[-\cos(t)\sin(t)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} \\ &+(n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \underbrace{(\cos t)^2}_{1-(\sin t)^2} \,\mathrm{d}t \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+2} W_n \end{aligned}$$

Formules explicites

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{\pi}{2} \\ W_1 &= 1 \\ W_{2n} &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \\ W_{2n+1} &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Équivalents

Pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \leq (\sin t)^{n+2} \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$$

$$0 \leq W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$$

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

D'où

$$\begin{aligned} W_{n+1} &\underset{n \to +\infty}{\sim} W_n \\ W_{2n}^2 &\underset{n \to +\infty}{\sim} W_{2n+1}^2 \\ &\underset{n \to +\infty}{\sim} W_{2n} W_{2n+1} = \frac{\pi}{4n+2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$W_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

$$W_{2n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Énoncé et démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue.

Si I est un Intervalle de $\mathbb{R}$, et $f \in C^0_{\mathrm{pm}}(I, \mathbb{K})$ intégrable sur I, alors

$$\int_I f(t) e^{i\lambda t} \,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

$$\int_I f(t) \cos(\lambda t) \,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

$$\int_I f(t) \sin(\lambda t) \,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

Démonstration

- Si f est C^1 sur un ségment : par IPP, on dérive f, f' étant continue sur un ségment elle est uniformement continue sur ce ségment (théorème de Heine), et est donc bornée (théorème des bornes atteintes).
- On montre d'abord pour I ségment.
  - On traite le cas f constante.
  - On généralise à f en escalier.
  - Par densité des fonctions en éscalier on étend aux fonctions continues.
- On étend finalement aux intervalles quelconques.

Hölder

Inégalité de Hölder et démonstration.

Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

  Le cas nul se traite facilement, puis on utilise la concavité de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)$$
$$= \ln(xy)$$
$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy$$

- On traite d'abord le cas où l'un des vecteurs (X ou Y) est nul.
- On traite ensuite le cas où

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} y_j^q = 1$$

  Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{p}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}_{1} + \frac{1}{q}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} y_i^q}_{1}$$

$$\leq 1 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

- Enfin dans le cas général, on pose pour $i \in [\![1, n]\!]$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^{n} y_i}$$

  Et ça marche.