Physique
Produit vectoriel

> **Analyse Vectorielle**
> Champ scalaire, champ vectoriel
> Champ à circulation conservative
> Champ à flux conservatif
> Circulation dans un champ de vecteur
> Divergence d'un champ vectoriel
> Flux au travers d'une surface
> Gradient d'un champ scalaire
> Laplacien
> Notation nabla
> Rotationnel d'un champ de vecteur
> Systèmes de coordonées orthogonales
> Théorème de Green-Ostrogradski

> **Électricité**
> Amplificateurs Opérationels

14 cartes.

Amplificateurs Opérationels

Systèmes de coordonées orthogonales

Définitions élémentaires de système de coordonées orthogonales en analyse vectorielle.

On peut décrire l'espace dans un système de coordonées (q_1, q_2, q_3) associé au trièdre local $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ s'éxprime

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{d}M} = & \, h_1(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_1\vec{e}_1 \\ & + h_2(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_2\vec{e}_2 \\ & + h_3(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

- En cartésiennes (x, y, z) :

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

- En cylindriques (r, θ, z) :

$$h_1 = h_3 = 1 \quad h_2 = r$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

- En sphériques (r, θ, φ) :

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\sin\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$$

Champ scalaire, champ vectoriel

Définitions d'un champ scalaire, champ vectoriel.

Un champ est une une grandeur dans un domaine D de l'espace à un instant t, noté $\vec{G}(\vec{r}, t)$.

Un champ peut être vectoriel ou scalaire selon si la grandeur qu'il représente l'est.

Un champ est dit

Uniforme s'il est indépendant de $\vec{r}$.

Stationnaire ou permanant s'il est indépendant de t.

Constant S'il est les deux

- On appelle ligne de champ une courbe de l'espace qui est en tout points tengente au champ.
- Pour un champ $f(\vec{r}, t)$, on appelle surface équi-f une surface où f est uniforme.

Gradient d'un champ scalaire

Définition du gradient d'un champ scalaire.

Pour un champ scalaire $f(\vec{r},t)$. On définit le gradient de f, noté $\overrightarrow{grad} f$ ou ∇f afin que

$$\mathrm{d}f = \nabla f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

En coordonées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Car

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\ &= \nabla f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M} \end{aligned}$$

En général

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{e}_3$$

Cas particulier

- En sphérique : $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$
- En sphérique : $\nabla r^2 = 2r\vec{u}_r$

Flux au travers d'une surface

Définition du flux au travers d'une surface.

On considère une fonction vectorielle $\vec{F}(q_1, q_2, q_3)$

Pour une surface

- Fermée : on l'oriente de l'intérieur vers l'extérieur par convention.
- Ouverte : on oriente le coutour sur lequel elle s'appuis et on applique la règle de la main droite.

Le flux Φ au travers de la surface S est

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

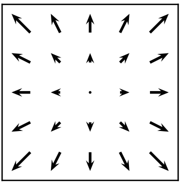
$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Divergence d'un champ vectoriel

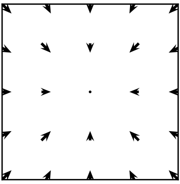
Définition de la divergence d'un champ vectoriel.

La divergence d'un champ de vecteur représente à quelle point le champ diverge ou converge en ce points. On écrit div $\vec{F}$ ou $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}$.

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$



$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$



Son expression est

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 F_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 F_{q_3})\right]$$

En cartésiennes

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Cas particuliers

- En cylindrique : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\vec{u_r}}{r} = 0$ (sauf en 0)
- En sphérique : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\vec{u_r}}{r^2} = 0$ (sauf en 0)
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{r} = \dim E$

Théorème de Green-Ostrogradski

Énoncé du théorème de Green-Ostrogradski.

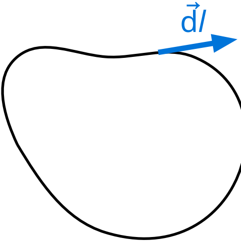
Pour un champ vectoriel $\vec{F}$ et une surface fermée S qui délimite un volume V, on a

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \nabla \cdot F \, \mathrm{d}\tau$$

Circulation dans un champ de vecteur

Définition de la circulation dans un champ de vecteurs.

Pour C un coutour orienté



On définit la circulation du champ $\vec{F}$ sur C comme

$$\mathrm{d}C = \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}l$$

$$C = \int_C \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}l$$

Rotationnel d'un champ de vecteur

Définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 F_{q_3})}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 F_{q_2})}{\partial q_3}\right] \\ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(h_1 F_{q_1})}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 F_{q_3})}{\partial q_1}\right] \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 F_{q_2})}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 F_{q_1})}{\partial q_2}\right] \end{pmatrix}$$

En cartésienne

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Physique

Produit vectoriel

Expression du produit vectoriel.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_y - b_z a_y \\ a_x b_z - b_y a_z \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

$$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$$

Notation nabla

Notation nabla.

En coordonées cartésiennes, on "définit"

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ainsi on retrouve les formules des opérateurs (toujours en cartésiennes)

$$\overrightarrow{grad}\ f = \boldsymbol{\nabla} f$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}$$

En général

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

Champ à circulation conservative

Définition de champ à circulation conservative.

Un champ $\vec{F}$ est dit à circulation conservative ssi pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$ on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\vec{\mathrm{d}l} = 0$$

Ainsi la circulation de toute courbe passant par A et B deux points est la même, elle ne dépend pas du chemin choisis.

On peut alors définir le potentiel V, un champ scalaire tel que

$$V(A) = V_A$$

$$V(B) = V_A + \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l}$$

Entre $\vec{M}$ et $\vec{M} + \overrightarrow{\mathrm{d}M}$

$$V(M) - V(M + \mathrm{d}M) = \mathrm{d}V(M) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

Ainsi

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} V$$

De plus

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = \iint_S \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{\mathrm{d}S} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \quad (\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} V) = 0)$$

Champ à flux conservatif

Définition d'un champ à flux conservatif.

Un champ $\vec{F}$ est dit à flux conservatif si pour toute surface S fermée qui délimite un volume V.

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$$

Ainsi

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}\tau = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}\right) = 0\right)$$

De plus on dispose de $\vec{A}$ (champ potentiel vecteur, H.P.) tel que

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{A}$$

Laplacien

Définition du laplacien d'un champ.

Scalaire

On appelle laplacien scalaire d'un champ scalaire V le champ scalaire

$$\Delta V = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} V)$$

En cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

En général :

$$\begin{aligned}\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\Bigg[&\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)\\ &+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial V}{\partial q_3}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

Vectoriel

On appelle laplacien vectoriel d'un champ vectoriel $\vec{F}$ le champ vectoriel

$$\Delta \vec{F} = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}\right) - \boldsymbol{\nabla} \wedge \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}\right)$$

En cartésiennes :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix}\end{aligned}$$