

Physique	
Produit vectoriel	
Analyse Vectorielle	
Champ scalaire, champ vectoriel	
Champ à circulation conservative	
Champ à flux conservatif	
Circulation dans un champ de vecteur	
Divergence d'un champ vectoriel	
Flux au travers d'une surface	
Gradient d'un champ scalaire	
Laplacien	
Notation nabla	
Rotationnel d'un champ de vecteur	
Systèmes de coordonnées orthogonales	
Théorème de Green-Ostrogradski	
Électricité	
Amplificateurs Opérationels	
Maths	
Algèbre	
Vocabulaire d'ensemble structuré	
Algèbre Linéaire	
Algorithme du pivot de Gauss	
Base duale, antéduale	
Condition de liberté d'une forme linéaire à une famille	
Développement du déterminant par ligne ou par colonne	
Endomorphismes nilpotents	
Espaces supplémentaires	
Intersection d'hyperplans	
Lemme de factorisation	
Liberté d'une famille de l'espace dual	
Notations de matrices	
Somme directe de sous espaces vectoriels	
Théorème de la base télescopique	
Vandermonde, interpolation de Lagrange	
Algèbres	
Algèbre engendrée	
Algèbres	
Algèbres commutatives intègres de dimension finie	
Algèbres et extensions de corps	
Clôture algébrique des rationnels	
Condition d'intégrité d'une sous-algèbre engendrée	
Morphisme d'algèbre	
Nombres algébriques	
Sous algèbres	
invertibilité des éléments d'une sous-algèbre engendrée	
Anneaux et Corps	
Irréductibles d'un anneau	
Anneaux et corps	
Axiomes d'un anneau	
Axiomes d'un corps	
Axiomes d'un sous-corps	
Corps des fractions	
Corps gauche, anneau à division	
Diviseur de zéro	
Groupe des inversibles	
Idéal d'un anneau	
Idéaux maximaux, anneaux quotientés	
Intégrité d'un anneau	
Primalité de la caractéristique d'un corps	
Arithmétique	
Fonctions arithmétiques : Möbius et indicatrice d'Euler	
Formule du nombre de diviseurs	
Indicatrice d'Euler	
Lemme d'Euclide	
Nombres de Fermat	
Petit théorème de Fermat	
Propriétés diviseurs communs	
Théorème de Bézout	
Théorème de Gauss	
Théorème de Wilson	
Théorème des restes chinois	
Équations diophantiennes	
Ensembles	
Formule du crible	
Espaces Vectoriels	
Axiomes d'un espace vectoriel	
Formes linéaires et hyperplans	
Théorème de caractérisation du rang	
Groupes	
Actions de groupe	
Axiomes d'un groupe	
Axiomes d'un sous-groupe	
Démonstration du Théorème de Lagrange	
Dévissage de groupes	
Exercice : Les p-groupes	
Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p	
Formule des classes	
Groupe Diédral	
Groupes quotientés	
Relation de cardinal pour un morphisme de groupe	
Signature d'une permutation	
Théorème de Burnside	
Théorème de Lagrange	
Existence et unicité des sous groupes de groupe cyclique	
Matrices	
Matrices semblables	
Théorème de caractérisation des matrices inversibles	
Polynômes	
Contenus d'un polynôme à coefficients entiers	
Critère d'Eisenstein	
Décomposition en éléments simples	
Entiers algébriques	
Fonctions symétriques des racines	
Formule de Taylor-Lagrange formelle	
Multiplicité d'une racine	
Polynômes associés	
Polynômes cyclotomiques	
Polynômes de Tchebycheff	
Polynômes en caractéristique strictement positive	
Polynômes irréductibles	
Polynômes scindés	
Propriétés des fractions rationnelles	
Propriétés des racines d'un polynôme	
Relations	
Majorant, borne supérieure, élément maximale	
Réduction	
Autre critère de diagonalisabilité	
Calcul de puissance de matrice : cas diagonalisable	
Calcul de puissance de matrice : polynôme annulateur	
Caractérisation des endomorphismes nilpotents	
Codiagonalisabilité	
Commutant d'un endomorphisme diagonalisable	
Cotrigonalisation	
Critère de Diagonalisabilité	
Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal	
Diagonalisabilité	
Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit	
Décomposition de Dunford	
Décomposition en sous espaces caractéristiques	
Démonstration annexe du théorème des noyaux	
Endomorphisme commutateur de matrices	
Endomorphisme différence de produits de matrices	
Endomorphismes cycliques	
Endomorphismes de produit de matrices	
Endomorphismes nilpotents cycliques	
Endomorphismes semi-simples	
Endomorphismes simples	
Exercice : critère de nilpotence sur la trace des puissances	
Exercice : lien entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et son carré	
Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel	
Matrice compagnon	
Multiplicités d'une valeur propre	
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	
Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique	
Produit de Kronecker et diagonalisabilité	
Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable	
Propriétés diverses du polynôme caractéristique	
Pseudo-commutativité du polynôme caractéristique	
Racine k-ème de matrices	
Recherche d'hyperplans stables	
Réduction de matrice dans rang 1	
Somme directe des sous-espaces propres	
Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal	
Sous-espaces cycliques	
Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable	
Suites récurrentes linéaires	
Théorème de Cayley-Hamilton	
Théorème des noyaux	
Trigonalisabilité	
Valeurs propres, espaces propres	
Vision matricielle de la cyclicité	
Équations matricielles	
Analyse	
Recherche d'équivalent d'une suite	
Complexes	
Formule de Moivre	
Formules d'addition trigonometrique	
Formules de duplication trigonométrique	
Formules de factorisation trigonométrique	
Formules de linéarisation trigonométrique	
Formules de parité et périodicité trigonométriques	
Formules en tangente de theta sur deux	
Inégalité Triangulaire	
Continuité	
Théorème de Heine réel	
Théorème des bornes atteintes réel	
Convexité	
Propriétés de convexité	
Dérivation	
Fonctions trigonometriques réciproques	
Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange	
Propriété des extrémum locaux	
Taylor-Langrange	
Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis	
Développements Limités	
Développements limités	
Étude local et asymptotique de fonctions	
EDL	
EDL d'ordre 1	
EDL d'ordre 2	
Méthode de séparation des variables	
Méthode de variation de la constante	
Intégration	
Comparaison série intégrale	
Critère de convergence d'intégrales usuelles	
Fonction gamma	
Hölder	
Intégrales de Wallis	
Intégration de l'inverse d'un trinôme	
Lemme de Riemann-Lebesgue	
Taylor reste intégrale	
Réels	
Corps totalement ordonné	
Inégalité Triangulaire	
Partie convexe de R	
Propriété de la borne supérieure	
Propriété fondamentale des réels	
Suites	
Suites récurrentes linéaires	
Suites Réelles	
Comparaison asymptotiques usuelles	
Manipulations asymptotiques	
Moyennes de Césàro	
Suites adjacentes, emboîtées	
Suites arithmético-géométriques	
Suites récurrentes d'ordre 2	
Suites récurrentes	
Théorème de Bolzano-Weiestrass	
Séries	
Absolue convergence	
Comparaison série intégrale	
Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle	
Familles sommables	
Propriétés élémentaires sur les séries	
Règle de Raabe-Duhamel	
Séries de Bertrand	
Théorème de comparaison des séries positives	
Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries	
Théorème de sommation par paquets	
Théorème des séries alternées	
Transformation d'Abel	
Équivalents de référence : séries de Riemann	
Taylor	
Taylor reste intégrale	
Taylor-Langrange	
Calculs	
Formule de newton	
Formules de somme d'entiers consécutifs	
Formules sur les coefficients binomiaux	
Exercice	
Algèbre Générale	
Dévissage de groupes	
Exercice : Cyclicité des sous-groupes finis des inversibles d'un corps	
Exercice : Dénombrement de morphismes	
Exercice : Groupe d'éléments d'ordre inférieur à deux	
Exercice : Les carrés de Fp	
Exercice : Les p-groupes	
Exercice : existence d'un élément d'ordre du ppcm de deux autres	
Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p	
Algèbre Linéaire	
Exercice : Noyaux et images itérées	
Exercice : Union de sous espaces vectoriels	
Exercice : endomorphisme qui stabilise toutes les droites	
Exercice : rang d'une comatrice	
Polynômes	
Exercice : Gauss-Lucas	
Exercice : Irréductibilité dans les rationels	
Exercice : Polynômes à coefficients entiers	
Exercice : Produit de polynômes de rationels unitaire entier	
Exercice : rationalité d'une racine de haute multiplicité	
Réduction	
Exercice : commutateur qui vaut l'un des opérande	
Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables	
Exercice : le bicommutant	
Exercice : polynôme caractéristique d'une somme d'endomorphismes	
Exercice : polynôme caractéristique divisant une puissance du polynôme minimal	
Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques	
Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.	
Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal	
Séries	
Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle	
Topologie	
Exercice : jauge d'un convexe	
Exercice : liens entre spectre norme subordonnée	
Topologie	
Adhérence	
Barycentres	
Borel Lebesgue sur un segment	
Borel-Lebesgue	
Boules et sphères	
Compacité	
Compacité en dimension finie	
Comparaison de normes	
Connexité	
Connexité par arcs	
Connexité par arcs du groupe linéaire complexe	
Continuité d'une fonction	
Continuité d'une fonction en un point	
Continuité des applications linéaires	
Continuité des formes linéaires	
Densité	
Distance	
Fonctions K-Lipschitziennes	
Intérieur	
Limite d'une fonction	
Limites de suites	
Nature topologique d'un hyperplan	
Non-continuité d'une application linéaire	
Norme	
Norme euclidienne	
Norme opérateur	
Norme produit	
Points d'adhérence d'une suite	
Projection sur un convexe fermé	
Précompacité	
Suites de Cauchy	
Séries dans un espace vectoriel normé	
Théorème de Baire	
Théorème de Heine	
Théorème des bornes atteintes	
Théorèmes du point fixe	
Topologie sur un espace métrique	
Topologie, espace topologique	
Valeurs d'adhérence d'une suite	
Voisinage	
Équivalence des normes en dimension finie	
Connexité	
Points extrémaux d'un convexe	
Réduction	
Nature topologique de l'ensemble des matrices cycycliques	
Nature topologique des matrices diagonales	
Propriétés topologiques du groupe linéaire	
Étude de la classe de similitude d'une matrice	
Trigonométrie	
Euclidienne	
Formules d'addition trigonometrique	
Formules de duplication trigonométrique	
Formules de factorisation trigonométrique	
Formules de linéarisation trigonométrique	
Formules de parité et périodicité trigonométriques	
Formules en tangente de theta sur deux	
273 cartes.	

Physique ► Électricité

# **Amplificateurs Opérationnels**

---

# Systèmes de coordonnées orthogonales

Définitions élémentaires de système de coordonnées orthogonales en analyse vectorielle.

---

On peut décrire l'espace dans un système de coordonnées  $(q_1, q_2, q_3)$  associé au trièdre local  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ .

Un déplacement élémentaire  $\overrightarrow{dM}$  s'exprime

$$\begin{aligned}\overrightarrow{dM} &= h_1(q_1, q_2, q_3) dq_1 \vec{e}_1 \\ &\quad + h_2(q_1, q_2, q_3) dq_2 \vec{e}_2 \\ &\quad + h_3(q_1, q_2, q_3) dq_3 \vec{e}_3\end{aligned}$$

- En cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

$$\overrightarrow{dM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

- En cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$h_1 = h_3 = 1 \quad h_2 = r$$

$$\overrightarrow{dM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

- En sphériques  $(r, \theta, \varphi)$  :

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r \sin \theta$$

$$\overrightarrow{dM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

## Champ scalaire, champ vectoriel

Définitions d'un champ scalaire,  
champ vectoriel.

---

Un champ est une grandeur dans un domaine  $D$  de l'espace à un instant  $t$ , noté  $\vec{G}(\vec{r}, t)$ .

Un champ peut être vectoriel ou scalaire selon si la grandeur qu'il représente l'est.

Un champ est dit

**Uniforme** s'il est indépendant de  $\vec{r}$ .

**Stationnaire ou permanent** s'il est indépendant de  $t$ .

**Constant** S'il est les deux

- On appelle ligne de champ une courbe de l'espace qui est en tout points tangente au champ.
- Pour un champ  $f(\vec{r}, t)$ , on appelle surface équi- $f$  une surface où  $f$  est uniforme.

# Gradient d'un champ scalaire

Définition du gradient d'un champ scalaire.

Pour un champ scalaire  $f(\vec{r}, t)$ . On définit le gradient de  $f$ , noté  $\overrightarrow{\text{grad}} f$  ou  $\nabla f$  afin que

$$df = \nabla f \cdot d\vec{M}$$

## En coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

Car

$$d\vec{M} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \\ &= \nabla f \cdot d\vec{M} \end{aligned}$$

## En général

$$\nabla f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial q_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial q_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial q_3} \vec{e}_3$$

## Cas particulier

- En sphérique :  $\nabla \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \vec{u}_r$
- En sphérique :  $\nabla r^2 = 2r \vec{u}_r$

## Flux au travers d'une surface

Définition du flux au travers d'une surface.

---

On considère une fonction vectorielle  $\vec{F}(q_1, q_2, q_3)$

Pour une surface

- Fermée : on l'oriente de l'intérieur vers l'extérieur par convention.
- Ouverte : on oriente le contour sur lequel elle s'appuie et on applique la règle de la main droite.

Le flux  $\Phi$  au travers de la surface  $S$  est

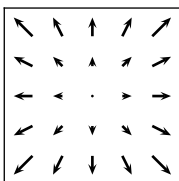
$$d\Phi = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$
$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

# Divergence d'un champ vectoriel

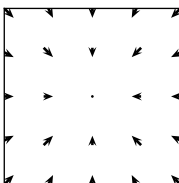
Définition de la divergence d'un champ vectoriel.

La divergence d'un champ de vecteur représente à quelle point le champ diverge ou converge en ce points. On écrit  $\text{div } \vec{F}$  ou  $\nabla \cdot \vec{F}$ .

$$\nabla \cdot \vec{F} > 0$$



$$\nabla \cdot \vec{F} < 0$$



Son expression est

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 F_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 h_3 F_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 F_{q_3}) \right]$$

En cartésiennes

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Cas particuliers

- En cylindrique :  $\nabla \cdot \frac{\vec{u}_r}{r} = 0$  (sauf en 0)
- En sphérique :  $\nabla \cdot \frac{\vec{u}_r}{r^2} = 0$  (sauf en 0)
- $\nabla \cdot \vec{r} = \dim E$

# Théorème de Green-Ostrogradski

Énoncé du théorème de Green-Ostrogradski.

---

Pour un champ vectoriel  $\vec{F}$  et une surface fermée  $S$  qui délimite un volume  $V$ , on a

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, d\tau$$

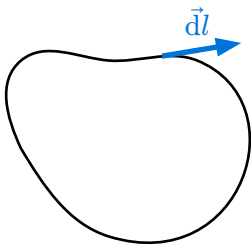


## Circulation dans un champ de vecteur

Définition de la circulation dans un champ de vecteurs.

---

Pour  $C$  un contour orienté



On définit la circulation du champ  $\vec{F}$  sur  $C$  comme

$$d\mathcal{C} = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$
$$\mathcal{C} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

# Rotationnel d'un champ de vecteur

Définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 F_{q_3})}{\partial q_2} - \frac{\partial (h_2 F_{q_2})}{\partial q_3} \right] \\ \frac{1}{h_3 h_1} \left[ \frac{\partial (h_1 F_{q_1})}{\partial q_3} - \frac{\partial (h_3 F_{q_3})}{\partial q_1} \right] \\ \frac{1}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 F_{q_2})}{\partial q_1} - \frac{\partial (h_1 F_{q_1})}{\partial q_2} \right] \end{pmatrix}$$

En cartésienne

$$\nabla \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

# Produit vectoriel

Expression du produit vectoriel.

---

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_y - b_z a_y \\ a_x b_z - b_y a_z \end{pmatrix}$$

## Propriétés

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

$$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$$

# Notation nabla

Notation nabla.

---

En coordonnées cartésiennes, on “définit”

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ainsi on retrouve les formules des opérateurs (toujours en cartésiennes)

$$\overrightarrow{grad} f = \nabla f$$

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

$$\overrightarrow{rot} \vec{F} = \nabla \wedge \vec{F}$$

En général

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

# Champ à circulation conservative

Définition de champ à circulation conservative.

Un champ  $\vec{F}$  est dit à circulation conservative ssi pour toute courbe fermée  $\mathcal{C}$  on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ainsi la circulation de toute courbe passant par  $A$  et  $B$  deux points est la même, elle ne dépend pas du chemin choisis.

On peut alors définir le potentiel  $V$ , un champ scalaire tel que

$$V(A) = V_A$$

$$V(B) = V_A + \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Entre  $\vec{M}$  et  $\vec{M} + d\vec{M}$

$$V(M) - V(M + dM) = dV(M) = \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

Ainsi

$$\vec{F} = \nabla V$$

De plus

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \wedge \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla \wedge \vec{F} = 0 \quad (\nabla \wedge (\nabla V) = 0)$$

## Champ à flux conservatif

Définition d'un champ à flux conservatif.

---

Un champ  $\vec{F}$  est dit à flux conservatif si pour toute surface  $S$  fermée qui délimite un volume  $V$ .

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = 0$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} &= \iiint_V \nabla \cdot \vec{F} \, d\tau = 0 \\ \Rightarrow \nabla \cdot \vec{F} &= 0 \quad \left( \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{F}) = 0 \right) \end{aligned}$$

De plus on dispose de  $\vec{A}$  (champ potentiel vecteur, H.P.) tel que

$$\vec{F} = \nabla \wedge \vec{A}$$

# Laplacien

Définition du laplacien d'un champ.

## Scalaire

On appelle laplacien scalaire d'un champ scalaire  $V$  le champ scalaire

$$\Delta V = \nabla \cdot (\nabla V)$$

En cartésiennes :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

En général :

$$\Delta V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial V}{\partial q_3} \right) \right]$$

## Vectoriel

On appelle laplacien vectoriel d'un champ vectoriel  $\vec{F}$  le champ vectoriel

$$\Delta \vec{F} = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla \wedge (\nabla \wedge \vec{F})$$

En cartésiennes :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Taylor-Lagrange

Théorème de Taylor-Lagrange, et conditions d'application.

---

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^n$  sur  $[a, b]$  et  $D^{n+1}$  sur  $]a, b[$

Il existe  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$



## Taylor reste intégrale

Théorème de Taylor reste  
intégrale, et conditions  
d'application.

---

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C^{n+1}$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

# Inégalité Triangulaire

Inégalité triangulaire première  
et deuxième forme.

---

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

# Formule de Moivre

Formule de Moivre.

---

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

## Formules d'addition trigonometrique

Formules d'additions  
trigonométriques.

---

Soient  $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi$$

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi}$$

## Formules de duplication trigonométrique

Formules de duplication  
trigonométriques.

---

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

## Formules de linéarisation trigonométrique

Formules de linéarisation  
trigonométriques.

---

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

## Formules de factorisation trigonométrique

Formules de factorisation  
trigonométriques.

---

Soient  $p, q \in \mathbb{R}$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

## Formules en tangente de theta sur deux

Formules en  $\tan \frac{\theta}{2}$ .

---

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$



## Formules de parité et périodicité trigonométriques

Formules de parité et périodicité  
trigonométriques.

---

Soit  $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

# Formules de somme d'entiers consécutifs

Forme explicites des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = ?$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = ?$$

---

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

## EDL d'ordre 1

Soit  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $c(x)$  et  $C(x)$  tel que  $C'(x) = c(x)$ .

$$(E_1) : y' = ay + b$$

$$(E_2) : y' = a(x)y$$

---

Les solutions  $S_1$  et  $S_2$  de  $(E_1)$  et  $(E_2)$  sont

$$S_1 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \{ x \mapsto \lambda e^{A(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \}$$

# Méthode de séparation des variables

Soit  $a(x) \in D^1$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

$$y(x) = ?$$

---

Soient  $a(x) \in D^1$  et  $A(x)$  une primitive de  $a(x)$ .

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x a(x) dx$$

$$\ln y - \ln y_0 = A(x) - A(x_0)$$

$$y = \underbrace{y_0 e^{-A(x_0)}}_{\lambda} e^{A(x)}$$

## Méthode de variation de la constante

Soient  $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A(x)$  une primitive de  $a(x)$ .

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$f_h : y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

Trouver  $f_p$  solution particulière par la variation de la constante.

---

Soient  $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $A(x)$  une primitive de  $a(x)$ .

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$f_h : y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

On fait varier la constante :  $\lambda \rightarrow \lambda(x)$  :

$$f_p(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$$

$$\begin{aligned} f_{p'}(x) &= a(x)f_p(x) + b(x) \\ &= \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)} \\ &= \lambda(x)a(x)e^{A(x)} + b(x) \end{aligned}$$

$$\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

$$\lambda(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx$$

## EDL d'ordre 2

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$ , résolution de l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

---

Soient  $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle équation caractéristique

$$(EC) : az^2 + bz + c = 0$$

- Si  $\Delta > 0$ , soit  $r_1, r_2$  les racines (réelles) de  $(EC)$

$$f_{h(x)} = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si  $\Delta = 0$ , soit  $r$  la racine double de  $(EC)$

$$f_{h(x)} = (\lambda + \mu x)e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si  $\Delta < 0$ , soit  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  les racines complexes de  $(EC)$

$$f_{h(x)} = e^{\alpha x} (\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

## Corps totalement ordonné

Définition d'un corps totalement ordonné.

---

Soit  $(K, +, \cdot)$  un corps et un ordre  $\leq$ .

1.  $\forall x, y, z \in K, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
2.  $\forall x, y \in K, x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

$\mathbb{R}$  et  $\mathbb{Q}$  sont ordonnés,  $\mathbb{C}$  ne l'est pas. Mais il existe un seul corps totalement ordonné (à isomorphisme près) :  $\mathbb{R}$ .

## Propriété fondamentale des réels

Propriété fondamentale des réels.

---

Toute partie non vide majoré de  $\mathbb{R}$  admet une borne sup. De même pour minoré.

On en déduit (car  $\mathbb{R}$  est totalement ordonné) que

- $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
- Loi du signe de produit
- $x^2 \geq 0$
- $1 > 0$
- $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
- $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$



# Propriété de la borne supérieure

Propriété de la borne supérieure.

---

Soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  non vide majoré,  $S = \sup A$  ssi

1.  $\forall x \in A, x \leq S$
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, S - \varepsilon < y$

## Partie convexe de $\mathbb{R}$

Définition de partie convexe.

---

Une partie convexe de  $\mathbb{R}$  est un ensemble  $C \subseteq \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \leq y \in C, [x, y] \subseteq C$$

Les parties convexes de  $\mathbb{R}$  sont des intervalles.

## Suites arithmético-géométriques

Formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.

---

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  une suite tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On note  $f(x) = ax + b$ , on trouve le point fixe  $w = \frac{b}{1-a}$ . Soit  $v_n = u_n - w$ .

$$v_{n+1} = au_n + b - \underbrace{(aw + b)}_{-w}$$

$$= a(u_n - w) = av_n$$

$$v_n = a^n v_0$$

$$u_n = a^n(v_0 - w) + w$$

## Suites récurrentes d'ordre 2

Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2.

---

Soit  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $(u_n)$  une suite tel que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On résout l'équation caractéristique

$$x^2 = ax + b$$

- Deux racines  $r_1, r_2$

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Racine double  $r$

$$u_n = (\lambda + \mu n)r^n$$

Avec  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  déterminés par  $u_0$  et  $u_1$ .

## Suites adjacentes, emboîtées

Définition et théorème des suites adjacentes et emboîtées.

---

- Adjacentes :

Deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont adjacentes si

$$(a_n) \nearrow, \quad (b_n) \searrow \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

**Théorème :**  $(a_n)$  et  $(b_n)$  et  $\lim a_n = \lim b_n$ .

**Preuve :** Théorème de la limite croissante pour la convergence.

- Emboîtées :

La même chose avec des segments.

**Théorème :**

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\} \\ \text{avec } x = \lim a_n = \lim b_n$$

# Théorème de Bolzano-Weiestrass

Théorème de Bolzano-Weiestrass et démonstration.

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.

Dans  $\mathbb{R}^n$  (et  $\mathbb{C}$ ), il suffit d'être borné en norme ou module.

Preuve :

Soit  $(u_n)$  une suite bornée par  $a_0$  et  $b_0$ , notons  $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ . Par récurrence :

- **Ini** :  $|[a_0, b_0] \cap A| = \infty$
- **Héré** : On suppose  $|[a_n, b_n] \cap A| = \infty$ , et on coupe en  $m = \frac{a_n + b_n}{2}$  :
  - Si  $|[a_n, m] \cap A| = \infty$ ,  $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = m \end{cases}$
  - Si  $|[m, b_n] \cap A| = \infty$ ,  $\begin{cases} a_{n+1} = m \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

Par le théorème des suites emboîtées :

$$\exists l \in [a_0, b_0], \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\}$$

Soit  $\varphi$  une extractrice, par récurrence :

- **Ini** :  $\varphi(0) = 0$
- **Héré** :  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  est infini, donc il existe  $m > \varphi(n)$  tel que  $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$ . On prend  $\varphi(n+1) = m$ .

Donc  $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$  d'où  $\lim u_{\varphi(n)} = l$ .

## Moyennes de Cesàro

Définition, propriétés des moyennes de Cesàro.

---

Soit  $(u_n)$  une suite. La suite des moyennes de Cesàro de  $u_n$  est

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Si  $u_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$ , alors  $\sigma_n \rightarrow l$ .

Preuve :

- $l$  fini : Découpage pour  $n < N$  et  $n \geq N$  et inégalité triangulaire.
- $l$  infini : majoration.

# Manipulations asymptotiques

## Manipulations asymptotiques élémentaires.

---

- $\sim$  : relation d'équivalence
  - ▶ produit, quotient, exposant
  - ▶ **pas** de somme, de composition, ...
- $o(1) \Leftrightarrow$  tend vers 0,  $O(1) \Leftrightarrow$  borné
- $O$  et  $o$  transitifs
- $O$  et  $o$  mangent les constantes
- $u_n \sim v_n$  ssi  $u_n = v_n + o(v_n)$
- Si  $u_n \sim v_n$  (ou  $O, o$ ), alors  $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$  (ou  $O, o$ )
- $o$  et  $\sim$  sont des cas particuliers de  $O$ .



# Comparaison asymptotiques usuelles

## Comparaison asymptotiques usuelles, stirling

---

Soit  $k \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $q > 1$ , au voisinage de l'infini :

$$n^k = o(q^n)$$

$$q^n = o(n!)$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

$$\ln(n!) \sim n \ln n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

## **Théorème des bornes atteintes réel**

**Théorème des bornes atteintes et démonstration (Dans  $\mathbb{R}$ ).**

---

Si  $f$  est  $C^0([a, b])$ , alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

**Preuve :**

Notons  $M = \sup f$ , quitte à avoir  $M \in \overline{\mathbb{R}}$ .  $M \in \text{adh}_{\mathbb{R}}(f([a, b]))$ , donc il existe une suite  $(x_n)$  à valeur dans  $[a, b]$  tel que  $f(x_n) \rightarrow M$ .

Par Bolzano-Weiestrass, il existe  $\varphi$  tel que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow l$  avec  $l \in [a, b]$  et donc nécessairement  $M \in \mathbb{R}$ .

# Théorème de Heine réel

Énoncé et démonstration du théorème de Heine (dans  $\mathbb{R}$ ).

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Preuve :

Soit  $f \in C^0([a, b])$ . Supposons par l'absurde que  $f$  n'est pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b] \\ |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

On prend  $(x_n), (y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \\ |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Ces suites sont bornées donc par Bolzano-Weiestrass, il existe une extractrice  $\varphi$  tel que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow l \in [a, b]$ .

Or  $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \rightarrow 0$  donc  $y_{\varphi(n)} \rightarrow l$ .

Mais par continuité de  $f$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\varphi(n)}) \\ = f(l)$$

Donc il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| < \varepsilon$$

Qui est absurde.

# Fonctions trigonometriques réciproques

Domaine de définition et  
dérivées des fonctions  
trigonometrique réciproques.

---

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ \arccos' &: ]-1, 1[ \rightarrow [-1, -\infty[ \\ x &\mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \arcsin' &: ]-1, 1[ \rightarrow [1, +\infty[ \\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctan &: \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \\ \arctan' &: \mathbb{R} \rightarrow ]0, 1] \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

## Propriété des extrémum locaux

Que peut on dire si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  et dérivable et admet un extrémum local en  $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$ .

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable qui admet un extrémum local en  $a$ , un point intérieur à  $I$ , alors  $f'(a) = 0$ .

Preuve : par hypothèse, pour un maximum (un minimum se traite de même)

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

Étutions

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si  $x < a$  :

Si  $x > a$  :

$$\overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \geq 0 \quad \overbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}^{\leq 0} \leq 0$$

$\underbrace{x - a}_{< 0}$ 
 $\underbrace{x - a}_{> 0}$

Donc  $f'(a) = 0$  (les deux limites sont égales par la dérivabilité de  $f$  en  $a$ ).

# Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

Énoncé et preuve des théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

---

Soit  $f \in C^0([a, b])$  dérivable sur  $]a, b[$

**Rolle** Si  $f(a) = f(b)$ , alors

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = 0$$

**TAF**

$$\exists c \in ]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve :

- Rolle : théorème des bornes atteintes, propriétés des extrémum locaux avec une disjonction de cas si les extrémums sont aux bornes.
- TAF : Rolle en pente, on corrige par la pente pour se ramener à Rolle.

# Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange

Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange.

---

## Inégalité des accroissements finis

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable et  $a \in I$ , pour tout  $x \in I$

$$|f(x) - f(a)| \leq \sup_{[a,x]} |f'| \cdot |x - a|$$

## Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  qui est  $D^{n+1}$  et  $a \in I$ , pour tout  $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right| \leq \sup_{[a,x]} |f^{(n+1)}| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

On prend les théorème et on majore le paramètre.

# Intégration de l'inverse d'un trinôme

Méthode d'intégration pour l'inverse d'un trinôme du second degré.

On prend  $ax^2 + bx + c$  un trinôme du second degré, on vas intégrer  $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ .

- $\Delta > 0$  : décomposition en éléments simples
- $\Delta = 0$  :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} &= \int \frac{dx}{a(x - r)^2} \\ &= -\frac{1}{a(x - r)}\end{aligned}$$

- $\Delta < 0$  : on passe à la forme canonique

$$\begin{aligned}ax^2 + bx + c \\ = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} \right]\end{aligned}$$

Et on se ramène à  $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \\ = \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan \left( \frac{2ax + b}{\sqrt{|\Delta|}} \right)\end{aligned}$$



# Développements limités

$$\frac{1}{1-x} = ?$$

$$\operatorname{ch}(x) = ?$$

$$\operatorname{sh}(x) = ?$$

$$\frac{1}{1+x} = ?$$

$$(1+x)^\alpha = ?$$

$$\ln(1+x) = ?$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$

$$e^x = ?$$

$$\arcsin(x) = ?$$

$$e^{-x} = ?$$

$$\arccos(x) = ?$$

$$\cos(x) = ?$$

$$\arctan(x) = ?$$

$$\sin(x) = ?$$

$$\tan(x) = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-x)^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + o(x^n)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$\operatorname{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\operatorname{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \prod_{p=0}^{k-1} (\alpha - p) + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + o(x^4)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2k})$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k} (2k+1)} + o(x^{2n+1})$$

$$\arccos(x) = -x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=1}^n -\frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k} (2k+1)} + o(x^{2n+1})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$$

## Étude local et asymptotique de fonctions

Méthode pour étudié le  
comportement local et  
asymptotique d'une fonction.

---

**Local** au voisinage de  $a \in \mathbb{R}$

- Équivalent en  $a$  : premier terme
- Tangente en  $a$  :  $DL_1(a)$
- Signe de  $f$  en  $a$  : premier terme non nul.
- Position relative par rapport à la tangente : signe du premier terme non nul après l'ordre 1.

**Asymptotique** au voisinage de  $\pm\infty$

- Asymptote oblique :  $DL_1(\pm\infty)$
- Position relative : signe du terme suivant.

Rappelle :

$f$  admet une asymptote oblique  
d'équation  $ax + b$  si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

# Suites récurrentes

Méthode pour les suites récurrentes de la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

---

Soit  $f$  une fonction et  $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  tel que  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Intervalle stable : on cherche  $I$  tel que  $f(I) \subseteq I$ .
2. Variations de  $(u_n)$ 
  - Signe de  $f(x) - x$  sur  $I$ 
    - $+$  :  $(u_n)$  est croissante
    - $-$  :  $(u_n)$  est décroissante
    - Sinon affiner  $I$
  - Monotonie de  $f$ 
    - Si  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $(u_n)$  est monotone
    - Si  $f$  est décroissante sur  $I$ ,  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$  sont monotone.
3. On montre l'existence de la limite (limite croissante)
4. On la détermine : il s'agit de l'un des points fixes de  $I$  (idéalement il n'y en a qu'un).

Dans le cas des fonctions décroissantes, on cherche les limites des deux sous-suites, points fixes de  $f \circ f$ .

# Propriétés de convexité

Définition et propriétés de convexité.

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f$  est dite convexe si

$$\begin{aligned} \forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1] \\ f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{aligned}$$

Propriétés :

- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  convexe,

$$\forall x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

- Soit  $\Phi$  convexe,  $\forall f \in C^0([a, b])$

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right) \\ \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(f(x)) dx \end{aligned}$$

- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in I$ , on note

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

les taux d'accroissements en  $a$  de  $f$ .

$f$  est convexe ssi  $\forall a \in I, \tau_a$  est croissante.

- Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on appelle droite d'appuis en  $x_0$  de  $f$  une droite  $y = ax + b$  tel que

- $\forall x \in I, ax + b \leq f(x)$
- $f(x_0) = ax_0 + b$

Si  $f$  convexe,  $f$  admet des droites d'appuis en tout points.

# Propriétés élémentaires sur les séries

Propriétés élémentaires sur les séries.

- Soit  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , on dit que  $\sum u_n$  converge si  $(S_n)$  converge.
- Si  $\sum u_n$  converge alors

$$(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- La suite  $(u_n)$  converge ssi la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.
- L'ensemble  $\mathcal{S}$  des séries convergentes est un sev de l'espace des suites, et l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{S} &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u_n) &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{aligned}$$

est linéaire.

- Si  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  alors  $\sum u_n$  converge ssi  $(S_n)$  est majoré (théorème de la limite monotone).

# Théorème de comparaison des séries positives

Énoncé et démonstration du théorème de comparaison des séries positives.

---

Soient  $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  alors

1. Si  $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
2. Si  $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$  et  $\sum v_n$  converge alors  $\sum u_n$  converge.
3. Si  $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$  alors  $\sum u_n$  converge ssi  $\sum v_n$  converge.

Démonstration :

1.  $(S_n)$  est majoré par  $(\tilde{S}_n)$  qui est fini.
2.  $(S_n)$  est majoré par  $M \cdot \tilde{S}_n$  qui est fini.
3.  $u_n \sim v_n$  implique  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ .

# Comparaison série intégrale

Propriétés et methode de comparaison série intégrale.

Pour  $f \in C_{\text{pm}}^0([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$ ,  
décroissante,  $\forall n \geq [a] + 1 = N_0$

$$\begin{aligned} f(n) &\geq \int_n^{n+1} f(t) dt \\ &\leq \int_{n-1}^n f(t) dt \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{n=N_0}^N f(n) &\geq \int_{N_0}^{N+1} f(t) dt \\ &\leq \int_{N_0-1}^N f(t) dt \end{aligned}$$

Ainsi  $\sum f(n)$  converge ssi  $\int_{N_0}^{+\infty} f$  converge.

Et de plus (à redémontrer) :

$$\begin{aligned} \sum \left( \int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right) \\ \sum \left( f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right) \end{aligned}$$

sont à terme général positif et convergent car

$$\begin{aligned} f(n) &\leq \int_{n-1}^n f \leq f(n+1) \\ 0 &\leq \int_{n-1}^n f - f(n) \leq f(n+1) - f(n) \end{aligned}$$

Et  $\sum f(n+1) - f(n)$  est positive et converge (série télescopique) car  $f$  converge (positive et décroissante).

**Dans le cas  $f$  non monotone :**

Si  $f \in C^1$  et  $\int_n^{+\infty} |f'|$  converge

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f &= \underbrace{[(t-k-1)f(t)]_k^{k+1}}_{f(k)} \\ &\quad - \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t) dt \\ \int_1^{N+1} f &= \sum_{k=1}^N f(k) \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt \end{aligned}$$

Or pour tout  $k \geq 1$

$$\left| \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt \right| \leq \int_k^{k+1} |f'|$$

Qui est le terme général d'une série convergente d'où

$$\begin{aligned} \sum f(n) &\text{ converge} \\ \text{ssi } \left( \int_1^N f \right)_N &\text{ converge} \\ \text{ssi } \int_1^{+\infty} f &\text{ converge} \end{aligned}$$

## Séries de Bertrand

Définitions et propriétés des séries de Bertrand.

---

Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  est appelée série de Bertrand.

Cette série converge ssi  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

Démonstration :

- Cas  $\alpha > 1$  comparaison avec les séries de Riemann, en prenant  $\gamma \in ]1, \alpha[$ .
- Cas  $\alpha < 1$  même chose avec  $\gamma \in ]\alpha, 1]$ .
- Cas  $\alpha = 1$ , comparaison série intégrale avec  $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$ .



# Recherche d'équivalent d'une suite

Méthodes de recherche  
d'équivalents.

---

Si on cherche un équivalent  
d'une suite  $(u_n)$

- Étudier la série  $\sum(u_{n+1} - u_n)$   
ou  $\sum(u_n - u_{n+1})$ , sommes  
partielles ou restes (voir  
théorème de sommation des  
relations de comparaison).
- Chercher  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tel que  $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}^*$ , pour avoir

$$u_n^\alpha - u_0^\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^\alpha - u_k^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nl$$

## Absolute convergence

Définitions et démonstration du théorème de l'absolue convergence d'une série.

---

Une série  $\sum u_n$  (dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) est dite absolument convergente si  $\sum |u_n|$  converge. Si  $\sum u_n$  est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration : on étudie  $((u_n)_+)$  et  $((u_n)_-)$  pour le cas réel, puis  $(\operatorname{Re}(u_n))$  et  $(\operatorname{Im}(u_n))$  pour le cas imaginaire, à chaque fois on majore par le module et on applique les théorèmes de comparaison des séries positives.

# Théorème des séries alternées

Énoncer et démonstration du théorème des séries alternées.

---

Si  $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  décroissante tel que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , alors  $\sum u_n$  converge et  $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n$  est du signe du premier terme et  $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ .

Démonstration : on montre que les suites  $S_{2n}$  et  $S_{2n+1}$  sont adjacentes et on étudie  $R_{2n}$  et  $R_{2n+1}$ .

# Transformation d'Abel

Définition et applications de la transformation d'Abel.

Il s'agit d'une sorte d'IPP sur les séries. Soit  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites, la transformation d'Abel est utile si on a des hypothèses sur  $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ . On pose  $S_{-1} = 0$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n (S_k - S_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=0}^n S_k b_k - \sum_{k=0}^n S_{k-1} b_k \\ &= S_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k) \end{aligned}$$

Applications :

$$\begin{aligned} \sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha} \\ \sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha} \\ \sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha} \end{aligned}$$

Remarque : on peut aussi écrire  $a_k = R_{k-1} - R_k$ , qui peut être intéressant si  $\sum a_n$  converge.

# Règle de Raabe-Duhamel

Énoncé et démonstration de la règle de Raab-Duchamel.

Soit  $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^{1+h}} \right), \quad h > 0$$

On considère  $n^\alpha a_n = u_n$ , on veut montrer que  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \in \mathbb{R}_+^*$ , c'est dire que  $(\ln(u_n))$  a une limite réelle. On étudie  $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ .

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)\right) + \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\min(2, 1+h)}}\right) \end{aligned}$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à terme positifs (en valeur absolue)

$\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$  converge, d'où  $(u_n)$  converge.

Ainsi  $n^\alpha a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^l$ , donc  $a_n \sim \frac{e^l}{n^\alpha}$ ,

$\sum a_n$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

# Théorème de sommutation des relations de comparaison pour les séries

Énoncés des théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries.

## Pour les restes de séries convergentes :

Si  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  et  $\sum a_n$  converge.

1. Si  $u_n = O(a_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$$

2. Si  $u_n = o(a_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\right)$$

3. Si  $u_n \sim a_n$ , alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

Démonstration : on repasse par les définitions de  $o$  et  $O$  :  $\exists N \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n \geq N$ ,  $|u_n| \leq K a_n$ , avec  $K > 0$  fixé pour  $O$  et  $K = \varepsilon > 0$  pour  $o$ . Pour  $\sim$ , on a  $u_n - a_n = o(a_n)$ .

## Pour les sommes partielles de séries divergentes :

Si  $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$  et  $\sum a_n$  diverge.

1. Si  $u_n = O(a_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument et

$$\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$$

2. Si  $u_n = o(a_n)$ , alors  $\sum u_n$  converge absolument et

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)$$

3. Si  $u_n \sim a_n$ , alors

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n a_k$$

Démonstration : même que pour l'autre, on à juste à découper la somme entre avant et après un certain rang (pour  $o$  et  $O$ ).

## Équivalents de référence : séries de Riemann

Équivalent des restes ou sommes partielles des séries de Riemann (à redémontrer).

---

Par comparaison série intégrale :

- Pour  $1 \geq \alpha > 0$

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_2^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$S_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

- Pour  $\alpha > 0$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

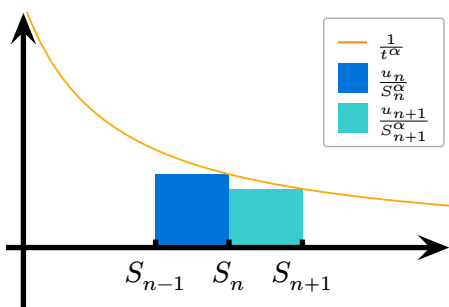
$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

## Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle

Démonstration de la CNS sur  $\alpha$  de la convergence de la série  $\sum \frac{u_n}{S_n^\alpha}$  (avec  $\sum u_n$  divergente).

Soit  $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ ,  $\sum u_n$  diverge, et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . On note  $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$ .

- Si  $\alpha > 1$  :



Donc pour  $t \in [S_{n-1}, S_n]$

$$\frac{1}{t^\alpha} \geq \frac{1}{S_n^\alpha}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_k^\alpha} \leq \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{S_0^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}} \right)$$

Or  $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{S_0^\alpha}$$

- Si  $\alpha = 1$  :

Si  $\frac{u_n}{S_n} \not\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , la série diverge grossièrement, et sinon

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{S_n} &\sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right) \\ &\sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1}) \end{aligned}$$

Qui est le terme général d'une série télescopique divergente.

- Si  $\alpha \leq 1$ , on compare avec  $\alpha = 1$ , car à partir d'un certain rang  $S_n \geq 1$ .



# Familles sommables

Définition et propriétés élémentaires des familles sommables.

---

Soit  $I$  un ensemble non vide.

Pour  $(u_i) \in \mathbb{R}_+^I$ , on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{j \in J} u_j, J \subseteq I \text{ fini} \right\} \\ \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Pour une famille  $(u_i) \in \mathbb{K}^I$ , on dit qu'elle est sommable si

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Si  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, alors elle contient un nombre au plus dénombrable d'éléments non nuls (Démonstration : on étudie  $J_n = \{i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n}\}$ )

# Théorème de sommation par paquets

Énoncer et éléments de démonstration du théorème de sommation par paquets.

Soit  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ , et  $I = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$  une partition. La famille  $(u_i)$  est sommable ssi

$$(*) : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i \in I_n} \text{ sommable} \\ \sum \left( \sum_{i \in I_n} |u_i| \right) \text{ converge vers } S \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Démonstration :

- Cas positif :
  - ▶ On suppose  $(*)$ , on prend une sous famille fini  $J$  de  $I$ , on a donc une famille  $(J_n = I_n \cap J)_n$ , on note  $N = \max(n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset)$  qui existe car  $J$  fini.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} u_j &= \sum_{n=0}^N \left( \sum_{j \in J_n} u_j \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{i \in I_n} u_i \right) = S \end{aligned}$$

- ▶ Caractérisation de la borne supérieure, majoration et sous ensembles finis.
- Cas général : D'abord en valeurs absolues, puis parties positives, négatives, réelles et imaginaires.

# Critère de convergence d'intégrales usuelles

Critère de convergence d'intégrales usuelles :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

- 
- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$  converge vers  $\frac{1}{\alpha-1}$  ssi  $\alpha > 1$ .
  - $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$  converge vers  $\frac{1}{1-\alpha}$  ssi  $\alpha < 1$ .
  - $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  converge ssi  $\alpha > 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$
  - $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$  converge ssi  $\alpha < 1$  ou  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$

# Fonction gamma

Définition, convergence et démonstration de la fonction  $\Gamma$ .

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- Qui converge pour  $x > 0$ .
- Pour  $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

- $\Gamma(1) = 1$

$t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$  est  $C_{\text{pm}}^0$  sur  $]0, +\infty[$ .

- Sur  $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} e^{-t} t^{x-1} &= o_{t \rightarrow +\infty} \left( e^{-\frac{t}{2}} \right) \\ &= o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{t^2} \right) \end{aligned}$$

Or  $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt$  converge, donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives,

$\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  converge.

- Sur  $]0, 1]$

$$e^{-t} t^{x-1} \underset{t \rightarrow 0_+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Or  $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$  converge ssi  $1-x < 1$  d'où  $x > 0$ , et on conclut par le même théorème.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

# Intégrales de Wallis

Définition, propriétés et démonstration des intégrales de Wallis.

On pose pour  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^n d\theta \quad (\theta = \frac{\pi}{2} - t) \end{aligned}$$

## Relation de récurrence

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} dt \\ &= \underbrace{\left[ -\cos(t) \sin(t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_0 \\ &\quad + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \underbrace{(\cos t)^2}_{1 - (\sin t)^2} dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+2} W_n \end{aligned}$$

## Formules explicites

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = 1$$

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

## Équivalents

Pour  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$0 \leq (\sin t)^{n+2} \leq (\sin t)^{n+1} \leq (\sin t)^n$$

$$0 \leq W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$$

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

D'où

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$$

$$W_{2n}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n+1}^2$$

$$\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n} W_{2n+1} = \frac{\pi}{4n+2}$$

Ainsi

$$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

$$W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

# Lemme de Riemann-Lebesgue

Énoncé et démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue.

Si  $I$  est un Intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $f \in C_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{K})$  intégrable sur  $I$ , alors

$$\begin{aligned}\int_I f(t) e^{i\lambda t} dt &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \\ \int_I f(t) \cos(\lambda t) dt &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0 \\ \int_I f(t) \sin(\lambda t) dt &\xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

## Démonstration

- Si  $f$  est  $C^1$  sur un segment : par IPP, on dérive  $f$ ,  $f'$  étant continue sur un segment elle est uniformément continue sur ce segment (théorème de Heine), et est donc bornée (théorème des bornes atteintes).
- On montre d'abord pour  $I$  segment.
  - ▶ On traite le cas  $f$  constante.
  - ▶ On généralise à  $f$  en escalier.
  - ▶ Par densité des fonctions en escalier on étend aux fonctions continues.
- On étend finalement aux intervalles quelconques.

# Hölder

## Inégalité de Hölder et démonstration.

Soit  $p, q \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Pour  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

### Démonstration

- Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$$

Le cas nul se traite facilement, puis on utilise la concavité de  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \right) &\geq \frac{1}{p} \ln(x^p) + \frac{1}{q} \ln(y^q) \\ &= \ln(xy) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \geq xy$$

- On traite d'abord le cas où l'un des vecteurs ( $X$  ou  $Y$ ) est nul.
- On traite ensuite le cas où

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n y_j^q = 1$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{q} y_i^q$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i y_i &\leq \frac{1}{p} \underbrace{\sum_{i=1}^n x_i^p}_1 + \frac{1}{q} \underbrace{\sum_{i=1}^n y_i^q}_1 \\ &\leq 1 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

- Enfin dans le cas général, on pose pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

Et ça marche.

# Norme

Définition d'une norme sur un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ .

---

Une norme sur un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  tel que

1. Homogénéité :  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$

$$N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$$

2. Inégalité triangulaire :  $\forall x, y \in E$

$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$

3. Séparation :  $\forall x \in E$

$$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$



# Norme euclidienne

Définition et propriétés des normes euclidiennes.

Pour  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  on a l'Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall x, y \in E$$

$$\langle x | y \rangle^2 \leq \langle x | x \rangle \cdot \langle y | y \rangle$$

Avec cas d'égalité si  $(x, y)$  liée.

D'un produit scalaire dérive une norme (euclidienne)

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{cases}$$

## Démonstration

- Si  $x = 0$  ou  $y = 0$  : évident.  
Sinon pour  $x, y \in E \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} & \langle x + ty | x + ty \rangle \\ &= t^2 \langle y | y \rangle + 2t \langle x | y \rangle + \langle x | x \rangle \\ &= P(t) \end{aligned}$$

Comme  $\langle y | y \rangle > 0$ ,  $\deg P = 2$ . De plus par positivité de  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4 \langle x | y \rangle^2 - 4 \langle x | x \rangle \cdot \langle y | y \rangle \leq 0 \\ \langle x | y \rangle^2 &\leq \langle x | x \rangle \cdot \langle y | y \rangle \end{aligned}$$

Avec cas d'égalité si  $\Delta = 0$ , c'est à dire  $x + ty = 0$ .

- Vérifions les axiomes

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$

$$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle x | x \rangle} \\ &= |\lambda| \|x\| \end{aligned}$$

2. Soit  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle x | x \rangle} &= 0 \\ \langle x | x \rangle &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

3. Soit  $x, y \in E$

$$\begin{aligned} & \|x + y\|^2 \\ &= \langle x + y | x + y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x | y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \underbrace{|\langle x | y \rangle|}_{\text{C-S}} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \|x\| \|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Avec égalité ssi  $\langle x | y \rangle \geq 0$  et égalité dans C-S : ssi  $x, y$  positivement liés.

# Norme produit

Définition de la norme produit.

---

Soit  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_d, \|\cdot\|_d)$  des  $\mathbb{K}$ -evn.

On définit la norme produit sur  $\prod_{k=1}^d E_k$  comme

$$N : \begin{cases} \prod_{k=1}^d E_k \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \|x_k\|_k \end{cases}$$

# Distance

Définition de distance.

---

Soit  $X$  un ensemble non vide. On appelle distance une application  $d : X^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  tel que

1. Symétrie :  $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

2. Inégalité triangulaire :

$$\forall x, y, z \in X$$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

3. Séparation :  $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Dans un evn  $(E, \|\cdot\|)$  on peut définir la distance sur  $E$  associé à la norme  $\|\cdot\|$  :

$$d : \begin{cases} E^2 & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto \|x - y\| \end{cases}$$

## Boules et sphères

Définition, propriétés des boules et sphères.

---

Soit  $E$  un espace métrique,  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ . On définit les ensembles suivants

$$B(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) < r\}$$

$$B_f(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) \leq r\}$$

$$\mathbb{S}(a, r) = \{x \in E \mid d(a, x) = r\}$$

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -evn alors on a de plus la convexité de  $B(a, r)$  et  $B_f(a, r)$ .

## Points extrémaux d'un convexe

Définition des points extrémaux d'un convexe et points extrémaux d'une boule.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un evn,  $K \subseteq E$  convexe. On dit que  $x \in K$  est extrémal si

$$\forall y, z \in K, \forall t \in ]0, 1[, \\ x = (1 - t)y + tz \Rightarrow x = y = z$$

Si  $\|\cdot\|$  dérive d'un produit scalaire, alors pour tout  $a \in E$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ , l'ensemble des points extrémaux de  $B_f(a, r)$  est  $\mathbb{S}(a, r)$ .

### Démonstration

Pour  $r = 1$  et  $a = 0$  : (auxquels on peut se ramener)

- Soit  $x \in B(0, 1)$

$$x = (1 - \|x\|)0 + \|x\| \frac{x}{\|x\|}$$

D'où  $x$  pas extrémal (on traite le cas  $x = 0$  séparément).

- Soit  $x \in \mathbb{S}(0, 1)$ ,  $y, z \in B_f(0, 1)$ ,  $t \in ]0, 1[$  tel que

$$x = (1 - t)y + tz \\ \|x\| = 1 \leq (1 - t) \underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + t \underbrace{\|z\|}_{\leq 1}$$

On a égalité dans l'inégalité triangulaire :  $y$  et  $z$  positivement liés (car produit scalaire) et  $\|y\| = \|z\|$  d'où  $y = z = x$ .

# Topologie, espace topologique

Définition d'une topologie.

---

Soit  $X$  un ensemble,  $T \subseteq \mathcal{P}(X)$  est une topologie sur  $X$  si

1.  $\{\emptyset, X\} \subseteq T$
2. Pour toute famille  $(\Omega_i)_i \in T^I$

$$\bigcup_{i \in I} \Omega_i \in T$$

3. Pour tout  $\Omega_1, \dots, \Omega_n \in T$

$$\bigcap_{k=1}^n \Omega_k \in T$$

Les éléments de  $T$  sont appelés ouverts de  $X$ .

$X$  muni de  $T$  est appelé espace topologique.

# Topologie sur un espace métrique

Définitions des ouverts / fermés d'un espace métrique.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique.

On dit que  $\Omega \subseteq E$  est un ouvert de  $E$  si

$$\forall x \in \Omega, \exists \delta > 0, B(x, \delta) \subseteq \Omega$$

De manière équivalente

$$\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}(x)$$

L'ensemble  $T$  des ouverts de  $E$  forme une topologie :

1.  $\emptyset$  et  $E$  sont ouverts.
2.  $T$  est stable par union quelconque.
3.  $T$  est stable par intersection finie.

On définit de plus les fermés : le complémentaire d'un ouvert.

## Démonstration

1. Évident.
2. Soit  $(\Omega_i)_{i \in I} \in T^I$  une famille d'ouverts. Soit  $x \in W = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ .

On dispose de  $i \in I$  tel que  $x \in \Omega_i$ , ainsi on dispose de plus de  $\delta > 0$  tel que

$$B(x, \delta) \subseteq \Omega_i \subseteq W$$

Donc  $W \in T$  : c'est un ouvert.

3. Soit  $F_1, \dots, F_n \in T$ , soit  $x \in W = \bigcap_{k=1}^n F_k$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on dispose de  $\delta_k > 0$  tel que

$$B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$

$$\delta = \min_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \delta_k$$

Ainsi on a pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$B(x, \delta) \subseteq B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$

Donc

$$B(x, \delta) \subseteq W$$

# Limites de suites

Définitions équivalentes de limites d'une suite.

---

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ . On dit que  $l \in E$  est limite de la suite  $u$  si l'une des définitions suivantes équivalentes s'applique :

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \varepsilon.$
2.  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon).$
3.  $(d(u_n, l))_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$
4.  $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V.$

Si la limite existe, alors elle est unique.

## Démonstration

- Équivalence : l'écrire.
- Si  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ , prendre  $l' \neq l$  et montrer que  $(d(l', u_n))_n \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$



## Valeurs d'adhérence d'une suite

Définitions et propriétés sur les valeurs d'adhérence d'une suite.

---

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  une suite.

On dit que  $l \in E$  est une valeur d'adhérence de  $u$  s'il existe  $\varphi$  extractrice tel que  $(u_{\varphi(n)})_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$ .

Une suite qui a deux valeurs d'adhérence diverge.

## Comparaison de normes

Définitions de comparaison de normes, propriétés.

---

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  deux normes sur  $E$ .

On dit que  $\|\cdot\|_2$  est plus fine de  $\|\cdot\|_1$  s'il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in E, \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$$

Dans ce cas :

1. Pour tout  $a \in E$  et  $r > 0$

$$B_2(a, r) \subseteq B_1(a, \alpha r)$$

2. Si  $\Omega \subseteq E$  est ouvert pour  $\|\cdot\|_1$  est ouvert pour  $\|\cdot\|_2$
3. Toute suite bornée pour  $\|\cdot\|_1$  l'est pour  $\|\cdot\|_2$ .
4. Toute suite convergente pour  $\|\cdot\|_1$  l'est pour  $\|\cdot\|_2$ .

On dit que  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont équivalentes si chacune est plus fine que l'autre. C'est une relation d'équivalence.

# Adh rance

Définition de l'adh rance,  
caractérisation séquentielle.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  
 $A \subseteq E$  une partie. Un point  $x \in E$   
est dit adhérant à  $A$  s'il vérifie  
une des conditions équivalentes  
suivantes :

1.  $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$
2.  $\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = x$
3.  $d(x, A) = 0$

On définit alors l'adh rance d'un  
ensemble (noté  $\overline{A}$ ) comme  
l'ensemble de ses points  
d'adh rance.

- $A \subseteq \overline{A}$ .
- $A$  est fermée ssi  $A = \overline{A}$ .
- $\overline{A}$  est le plus petit (au sens de  
l'inclusion) fermé contenant  $A$  :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq B \subseteq E \\ B \text{ fermé}}} B$$

- $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$

## Démonstration

- **(1  $\Rightarrow$  2)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  
 $x_n$  tel que  $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$ , qui  
existe par hypothèse.

Ainsi  $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$  d'où  
 $(d(x_n, x))_n \rightarrow 0$  donc  $(x_n)_n \rightarrow x$ .

- **(2  $\Rightarrow$  1)** Par hypothèse on  
dispose de  $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \rightarrow x$ . Soit  
 $r > 0$ .

On dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que  
 $d(x_N, x) < r$ , donc

$$x_N \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

- **(2  $\Leftrightarrow$  3)**

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow x \\ &\Leftrightarrow \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, d(x, a_n) \rightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) = 0 \end{aligned}$$

- Supposons que  $F \neq \overline{F}$ , on  
dispose donc de  $x \in \overline{F} \setminus F$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , comme  $x \in \overline{F}$

$$\begin{aligned} B(x, \varepsilon) \cap F &\neq \emptyset \\ B(x, \varepsilon) &\not\subseteq E \setminus F \end{aligned}$$

Donc  $E \setminus F$  n'est pas un ouvert :  
 $F$  n'est pas fermée.

- Supposons que  $F$  n'est pas  
fermée, on dispose donc de  $x \in$   
 $E \setminus F$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \not\subseteq E \setminus F$$

Donc pour tout  $\varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$$

D'où  $x \in \overline{F}$ , mais  $x \notin F : F \neq \overline{F}$ .

## Voisinage

Définition de voisinage.

---

Soit  $(E, d)$  un espace métrique et  $x \in E$ .

On dit que  $V \subseteq E$  est un voisinage de  $x$  dans  $E$  s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subseteq V$ .

On note  $\mathcal{V}(x)$  l'ensemble des voisinages de  $x$  dans  $E$ .

## Densité

Définition de densité.

---

Soit  $(E, d)$  un espace métrique, on dit que  $A \subseteq E$  est dense dans  $E$  si

$$\overline{A} = E$$

# Interieur

Définition de l'interieur d'une partie.

---

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $A \subseteq E$  et  $x \in E$ .

On dit que  $x$  est un point interieur de  $A$  s'il existe  $r > 0$  tel que

$$B(x, r) \subseteq A$$

C'est à dire  $A \in \mathcal{V}(x)$ .

On note  $\overset{\circ}{A}$  l'ensemble des points interieurs de  $A$ .

- $\overset{\circ}{A} \subseteq A$
- $A$  est ouvert ssi  $\overset{\circ}{A} = A$
- $\overset{\circ}{A}$  est le plus grand ouvert inclus dans  $A$
- $\overset{\circ}{E \setminus A} = E \setminus \overline{A}$

On définit aussi la frontière d'une partie  $\partial A = \text{Fr } A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$  qui est un fermé.

# Limite d'une fonction

Définition de la limite d'une fonction.

Soit  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques et  $X \subseteq E$ .

Soit  $f \in \mathcal{F}(X, F)$ ,  $a \in \overline{X}$ , on dit que  $f$  admet  $l \in F$  comme limite en  $a$  si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1.  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq B(l, \varepsilon)$
2.  $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap X) \subseteq V$ .
3.  $\forall (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} \rightarrow a, \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l$ .

## Démonstration

- (1  $\Rightarrow$  2) Soit  $V \in \mathcal{V}(l)$ , on dispose donc de  $B(l, \varepsilon) \subseteq V$ , et donc de  $\delta > 0$  tel que

$$f\left(\underbrace{B(a, \delta) \cap X}_{W \in \mathcal{V}(a)}\right) \subseteq B(l, \varepsilon) \subseteq V$$

- (2  $\Rightarrow$  1) Soit  $\varepsilon > 0$ , comme  $V = B(\varepsilon, l) \in \mathcal{V}(l)$ , on dispose de  $W \in \mathcal{V}(a)$ , et donc de  $\delta > 0$  tel que

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq f(W \cap X) \subseteq V$$

- L'écrire.

# Continuité d'une fonction en un point

Définition de continuité en un point.

Soit  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques,  $X \subseteq E$  et  $f \in \mathcal{F}(X, F)$ .

On dit que  $f$  est continue en  $a \in X$  si:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Ce qui équivaut à

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$$

Il suffit d'ailleurs que  $f$  admette une limite en  $a$ , car dans ce cas cette limite est forcément  $f(a)$ .

## Démonstration

- Supposons  $f$  continue en  $a$  :  
comme  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , pour tout  $V \in \mathcal{V}(f(a))$  on dispose de  $W \in \mathcal{V}(a)$  tel que

$$f(W \cap X) \subseteq V$$

$$\mathcal{V}(a) \ni W \cap X \supseteq f^{-1}(V)$$

- Soit  $V \in \mathcal{V}(f(a))$  :

$$W = f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$$

$$f(W \cap X) \subseteq V$$



# Continuité d'une fonction

Définition de continuité (sur un ensemble) d'une fonction.

---

Soit  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques,  $X \subseteq E$  et  $f \in \mathcal{F}(X, F)$ .

On dit que  $f$  est continue sur  $X$  ( $f \in C^0(X, F)$ ) si pour tout  $a \in X$ ,  $f$  est continue en  $a$ .

Ce qui est équivalent à

$\forall \Omega$  ouvert de  $F$ ,  $f^{-1}(\Omega)$  ouvert de  $X$

On en déduit que

$\forall F$  fermé de  $F$ ,  $f^{-1}(F)$  fermé de  $X$

## Démonstration

- Supposons  $f \in C^0(X, F)$ , soit  $\Omega \subseteq F$  ouvert et  $a \in f^{-1}(\Omega)$ .

Comme  $f(a) \in \Omega$ ,  $\Omega \in \mathcal{V}(f(a))$ , et par continuité en  $a \in X$  :  
 $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}(a)$ .

- Soit  $a \in X, \varepsilon > 0$ , comme  $B(f(a), \varepsilon)$  est ouvert,  $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$  est un ouvert contenant  $a$  : on dispose de  $\delta > 0$  tel que

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

# Fonctions K-Lipschitziennes

Définition des fonctions  $K$ -lipschitziennes.

Soit  $(E, d_E), (F, d_F)$  deux espaces métriques et  $X \subseteq E$ .

Une fonction  $f \in \mathcal{F}(X, F)$  est dite  $k$ -lipschitzienne pour un  $k > 0$  si

$$\forall x, y \in X, \\ d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$$

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue, donc continue.

Exemples (notons  $d = d_E$ ) :

- Pour tout  $a \in E$ ,  $x \mapsto d(x, a)$  est 1-lipschitzienne.
- Pour tout  $A \subseteq E$ ,  $x \mapsto d(x, A)$  est 1-lipschitzienne.

Si  $E = \mathbb{K}^n$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie muni de  $\|\cdot\|_\infty$  et  $d$  qui en dérive.

- Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto x_k \end{cases}$$

Est 1-lipschitzienne.

- Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \rightarrow \mathbb{K} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto P(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Est continue (par somme et produit de fonctions qui le sont).

## Démonstration

- Soit  $a \in E, x, y \in X$

$$\begin{aligned} & |d(x, a) - d(y, a)| \\ & \leq |d(x, y) + d(y, a) - d(y, a)| \\ & \leq d(x, y) \end{aligned}$$

- Soit  $A \subseteq E, x, y \in X$ . Soit  $a \in A$

$$\begin{aligned} d(x, A) & \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \\ d(x, A) - d(x, y) & \leq d(y, a) \end{aligned}$$

Ceci pour tout  $a$  d'où

$$\begin{aligned} d(x, A) - d(x, y) & \leq d(y, A) \\ d(x, A) - d(y, A) & \leq d(x, y) \end{aligned}$$

Et par symétrie

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

- Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $x, y \in \mathbb{K}^n$

$$\begin{aligned} |x_k - y_k| & \leq \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_i - y_i| \\ & = \|x - y\|_\infty \end{aligned}$$

# Continuité des applications linéaires

Conditions de continuité d'une application linéaire.

Soit  $E, F$  deux  $\mathbb{K}$ -evn,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On a équivalence entre

1.  $f$  continue sur  $E$ .
2.  $f$  continue en 0.
3.  $\exists k > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$
4.  $f$  est lipschitzienne.

Enfin en dimension finie toute application linéaire est continue.

## Applications multi-linéaires

Similairement (démonstrations calculatoires), pour

$$f : \begin{cases} \prod_{k=1}^d (E_k, \|\cdot\|_k) & \rightarrow (F, \|\cdot\|_F) \\ (x_1, \dots, x_d) & \mapsto f(x_1, \dots, x_d) \end{cases}$$

on a équivalence entre

1.  $f$  est  $C^0$  sur  $\prod_{k=1}^d E_k$  (muni de la norme produit).
2.  $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^d E_k$   
 $\|f(x_1, \dots, x_d)\| \leq k\|(x_1, \dots, x_d)\|$

## Démonstration

- (1  $\Rightarrow$  2) Par définition.
- (2  $\Rightarrow$  3) Par continuité de  $f$  en 0 on dispose de  $\delta > 0$  tel que

$$f(B_E(0, \delta)) \subseteq B_F(0, \varepsilon)$$

Donc pour tout  $x \in E$

$$\left\| f\left(\frac{\delta}{2\|x\|}x\right) \right\| \leq 1$$

$$\|f(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$$

- (3  $\Rightarrow$  4) Soit  $x, y \in E$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x - y)\| \\ &\leq k\|x - y\| \end{aligned}$$

- (4  $\Rightarrow$  1) Immédiat.

En dimension finie, on prend une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  et la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , et pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$  on a

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \|x\|_\infty \|f(e_k)\| \\ &= \left( \sum_{k=1}^n \|f(e_k)\| \right) \|x\|_\infty \end{aligned}$$

# Non continuité d'une application linéaire

Critères de non continuité d'une application linéaire.

1.  $f$  n'est pas continue sur  $E$
2. Il existe  $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1$$

$$(\|f(x_n)\|)_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} +\infty$$

3. Il existe  $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  tel que

$$(x_n)_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n)\| = 1$$

## Démonstration

- (1  $\Rightarrow$  2) Comme  $f$  n'est pas continue on a

$$\forall k > 0, \exists x \in E, \|f(x)\| > k\|x\|$$

Donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on dispose de  $\tilde{x}_n \in E$  tel que

$$\|f(\tilde{x}_n)\| > n\|\tilde{x}_n\|$$

$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|} \quad \|x_n\| = 1$$

$$\|f(x_n)\| > n \quad \text{donc} \quad \|f(x_n)\| \rightarrow \infty$$

- (2  $\Rightarrow$  3) Soit  $(\tilde{x}_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  une telle suite.

$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|f(\tilde{x}_n)\|} \quad \|f(x_n)\| = 1$$

$$\|x_n\| = \frac{1}{\|f(\tilde{x}_n)\|} \rightarrow 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1)  $f$  n'est pas continue en 0.

# Nature topologique d'un hyperplan

Nature topologique d'un hyperplan.

---

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evn,  $H$  un hyperplan de  $E$ .

$H$  est soit fermé soit dense dans  $E$ .

## Démonstration

Supposons que  $H$  n'est pas fermé. On dispose de

$$(h_n)_n \in H^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \notin H$$

Comme  $H$  est un hyperplan,

$$H \oplus \text{Vect}(z) = E$$

Ainsi pour tout  $x \in E$

$$x = h + \alpha z \quad (h, \alpha) \in H \times \mathbb{K}$$

$$(h + \alpha h_n)_n \in H^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$$

# Continuité des formes linéaires

Condition de continuité d'une forme linéaire, lien avec les hyperplans.

---

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -evn.

Si  $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est une forme linéaire alors  $f$  est continue ssi  $\ker f$  est fermé.

## Démonstration

- Si  $f$  est continue,  $\ker f = f^{-1}\{0\}$  est fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue.
- Si  $f$  n'est pas continue, on dispose de  $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n)| = 1$$

$$(x_n)_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Quitte à poser  $(x'_n)_n$  on peut supposer  $f(x_n) = 1 = f(x_0)$ .

$$h_n = x_n - x_0 \in \ker f$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = -x_0 \notin \ker f$$

Donc  $\ker f$  n'est pas fermé.

# Norme opérateur

Définition de la norme opérateur.

Soit  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -evn, on définit

$$\mathcal{L}_C(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap C^0(E, F)$$

Qui est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

Pour  $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$  on définit

$$\begin{aligned}\|f\|_{\text{op}} = \|f\| &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|f(x)\|\end{aligned}$$

Qui est une norme d'algèbre sur  $\mathcal{L}_C(E, F)$ , elle est donc sous-multiplicative :

$$\begin{aligned}\forall f, g \in \mathcal{L}_C(E, F), \\ \|f \circ g\|_{\text{op}} \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|g\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

## Démonstration

- Comme  $f$  est linéaire et continue on dispose de  $k > 0$  tel que

$$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

Ainsi

$$\Gamma = \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

Est non vide majoré, donc le sup existe.

- De plus

$$\begin{aligned}\lambda \in \Gamma \\ \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ \Leftrightarrow \exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \\ \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{S}(0,1), \lambda = \|f(x)\|\end{aligned}$$

Ainsi  $\Gamma = \{\|f(x)\|, x \in \mathbb{S}(0,1)\}$ .

- C'est bien une norme :

1. Soit  $\lambda \in \mathbb{K}, f \in \mathcal{L}_C(E, F)$

$$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{\text{op}} &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|\lambda f(x)\| \\ &= |\lambda| \|f\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

2. Soit  $f \in \mathcal{L}_C(E, F)$  tel que

$$\begin{aligned}\|f\|_{\text{op}} = 0, \text{ soit } x \in E \setminus \{0\} \\ \|f(x)\| \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|x\| = 0 \\ f(x) = 0 \text{ donc } f = 0\end{aligned}$$

3. Soit  $f, g \in \mathcal{L}_C(E, F)$

$$\begin{aligned}\|f + g\|_{\text{op}} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \frac{\|f(x) + g(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \left[ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \right] \\ &\leq \|f\|_{\text{op}} + \|g\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

- Soit  $f \in \mathcal{L}_C(E, F), g \in \mathcal{L}_C(F, G)$  et  $x \in E$  :

$$\begin{aligned}\|g(f(x))\| &\leq \|g\|_{\text{op}} \|f(x)\| \\ &\leq \|g\|_{\text{op}} \|f\|_{\text{op}} \|x\|\end{aligned}$$

D'où  $\|g \circ f\|_{\text{op}} \leq \|g\|_{\text{op}} \cdot \|f\|_{\text{op}}$ .

# Exercice : jauge d'un convexe

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{R}$ -evn et  $K \subseteq E$  convexe, symétrique par rapport à l'origine (c'est à dire stable par  $-$ ), d'intérieur non vide et borné.

On pose

$$N : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \inf \{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in K \} \end{cases}$$

1. Montrer que  $N$  est bien définit.
2. Montrer que  $N$  est une norme
3. Montrer que  $N$  est équivalente à  $\|\cdot\|$ .
4. Montrer que  $\overline{B_N}(0, 1) = \overline{K}$

Montrons d'abord qu'on dispose de  $\delta > 0$  tel que  $B(0, \delta) \subseteq K$ .

Soit  $a \in \overset{\circ}{K}$ , on dispose donc de  $\delta > 0$  tel que

$$B(a, \delta) \subseteq K$$

Par symétrie, on a alors

$$B(-a, \delta) \subseteq K$$

Soit  $x \in B(0, \delta)$

$$x + a \in B(a, \delta) \subseteq K$$

$$x - a \in B(-a, \delta) \subseteq K$$

$$\frac{1}{2}(x + a) + \frac{1}{2}(x - a) = x \in K$$

Par convexité.

1. Soit  $x \in E$

$$\frac{\delta}{2\|x\|}x < \delta$$

$$\frac{\delta x}{2\|x\|} \in B(0, \delta) \subseteq K$$

D'où  $\{ \lambda > 0 \mid \frac{x}{\lambda} \in K \}$  non vide minoré par  $0 : N(x)$  qui en est l'inf existe et est positif.

2. 1. Comme  $K$  est borné, on dispose de  $R > 0$  tel que

$$K \subseteq B(0, R)$$

Soit  $x \in E$  tel que  $N(x) = 0$ .

Par caractérisation de la borne inférieure, on dispose de

$$(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{x}{\lambda_n} \in K \subseteq B(0, R)$$

$$\frac{\|x\|}{\lambda_n} \leq R$$

$$\frac{\|x\|}{R} \leq \lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc  $x = 0$

2. Soit  $\mu \in \mathbb{R}, x \in E$ .

• Si  $\mu = 0, N(\mu x) = N(0) = 0$ .

• Si  $\mu > 0$

$$N(\mu x) = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \frac{\mu x}{\lambda} \in K \right\}$$

$$= \mu N(x)$$

• Si  $\mu < 0$ , par symétrie

$$N(\mu x) = N(-\mu x) = -\mu N(x)$$

3. Soit  $x, y \in E, \lambda, \mu > 0$  tels que  $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in K$  on a alors

$$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{1-t} \underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in K} + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_t \underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in K}$$

$$\in K$$

Ainsi

$$N(x+y) \leq \lambda + \mu$$

Et avec  $\lambda \rightarrow N(x), \mu \rightarrow N(y)$

$$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

3. Soit  $x \in E, \lambda > 0$  tel que  $\frac{x}{\lambda} \in K$ .

$$\frac{\|x\|}{\lambda} < R$$

$$\|x\| \leq R \cdot N(x)$$

Et

$$\frac{\delta x}{2\|x\|} \in K$$

$$N(x) \leq \frac{2}{\delta} \|x\|$$

4. Soit  $x \in K, \frac{x}{1} \in K$  donc  $x \in \overline{B_N}(0, 1)$ .

Soit  $x \in \overline{B_N}(0, 1)$ .

• Si  $N(x) = 1$ , on dispose de

$$(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x}{\lambda_n} \in K$$

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{\lambda_n} \in \overline{K}$$

• Si  $N(x) < 1$ , on dispose par propriété de la borne

inférieure de  $\lambda \in [N(x), 1[$  tel que

$$\frac{x}{\lambda} \in K$$

$$x = (1 - \lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \left( \frac{x}{\lambda} \right) \in K$$



# Points d'adhérence d'une suite

Définition et propriétés sur les points d'adhérence d'une suite.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  une suite.

On dit que  $l \in E$  est un point d'adhérence de  $u$  s'il existe  $\varphi$  extractrice tel que

$$(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow l$$

Notons  $\mathcal{V}(u)$  l'ensemble de ces points. On a

$$\mathcal{V}(u) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$$

Qui est donc fermé.

De plus si  $(u_n)$  converge vers  $l \in E$ .

$$K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$$

Est compact.

## Démonstration

- Soit  $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{\varphi(n)}$ ,  $p \in \mathbb{N}$

$$(u_{\varphi(n)})_{n \geq p} \rightarrow l \in \overline{\{u_n, n \geq p\}}$$

Donc

$$l \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$$

- Soit  $l \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$ , on pose  $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ .

Comme  $l \in \overline{\{u_n, n \in \mathbb{N}\}}$ , on dispose de  $\varphi(0)$  tel que  $d(u_{\varphi(0)}, l) \leq \delta_0$ .

Supposons construits

$\varphi(0), \dots, \varphi(k)$ , comme  $l \in \overline{\{u_n, n \geq \varphi(k) + 1\}}$ , on dispose de  $\varphi(k+1)$  tel que

$$d(u_{\varphi(k+1)}, l) < \delta_{k+1}$$

Ainsi  $\varphi$  extractrice et

$$(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow l.$$

- Soit  $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ , on pose

$$\Gamma = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, x_k = u_n\}$$

Si  $\Gamma$  est fini, alors  $x_n$  prend une valeur une infinité de fois qui est valeur d'adhérence de  $(x_n)$ .

Sinon on construit : on prend  $\psi(0) \in \Gamma$  et  $\varphi(0)$  tel que  $u_{\psi(0)} = x_{\varphi(0)}$ .

Supposons construits

$\psi(0), \dots, \psi(k)$  et  $\varphi(0), \dots, \varphi(k)$ , on considère

$$\Gamma_{k+1} = \{n > \psi(k) \mid \exists q > \varphi(k), x_q = u_n\}$$

Qui est infini, donc on prend  $\psi(k+1) \in \Gamma_{k+1}$  et  $\varphi(k+1)$  tel que

$$u_{\psi(k+1)} = x_{\varphi(k+1)}$$

D'où  $l$  est valeur d'adhérence de  $(x_n)$ .

# Compacité

Définition de compacité.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $K \subseteq E$  est dit compacte si de toute suite

$$(u_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$$

On peut extraire une sous suite convergente

$$(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow l \in K$$

La compacité ne dépend pas de l'espace  $(E)$ , mais dépend de  $d$ .

Si  $K$  est compacte :

- $K$  est bornée dans  $E$ .
- Si  $K \subseteq X$ ,  $K$  est fermé dans  $X$ .
- Si  $F \subseteq K$  est fermé, alors  $F$  est compact.
- Si  $(u_n)$  est une suite à valeur dans  $K$ , alors elle converge ssi elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence.
- Si  $f \in C^0(K, F)$  avec  $F$  un espace métrique, alors  $f(K)$  est compact.
- Un produit fini de compacts est compact.
- Toute intersection décroissante de compacts non vide est non vide.

## Démonstration

- Supposons  $K$  non bornée, soit  $a \in K$ , posons  $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$d(a, x_n) \geq n$$

Donc  $(x_n)$  ne peut converger, et  $K$  n'est pas compacte.

- Soit  $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \rightarrow l \in \overline{K}$ , par compacité on peut extraire

$$(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow z \in K$$

Et  $z = l$  par unicité de la limite, donc  $K$  est fermé.

- Soit  $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ , par compacité de  $K \supseteq F$ , on a

$$(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow l \in K$$

Or comme  $F$  est fermé et  $(u_{\varphi(n)})_n \in F^{\mathbb{N}}$ ,  $l \in F$  d'où  $F$  compact.

- Par contraposée, soit  $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$  qui diverge, par compacité, elle admet une valeur d'adhérence  $l$ , mais  $(x_n) \not\rightarrow l$  c'est à dire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x_n, l) \geq \varepsilon$$

On fixe  $\varepsilon$ , on dispose d'une suite  $(x_{\varphi(n)})$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_{\varphi(n)}, l) \geq \varepsilon$$

Or cette suite admet une valeur d'adhérence  $l_2 \neq l_1$ .

- Soit  $(y_n)_n \in f(K)^{\mathbb{N}}$ , on dispose de  $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = y_n$$

Et par compacité on peut extraire

$$(x_{\varphi(n)})_n \rightarrow l \in K$$

$$(f(x_{\varphi(n)}))_n = (y_{\varphi(n)})_n \rightarrow f(l) \in f(K)$$

- Soit  $(K_n)_n$  une suite décroissante de compacts non vides.

On construit une suite  $(u_n)$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in K_n \subseteq K_0$ , on peut donc en extraire une sous-suite convergente  $(x_{\varphi(n)})_n \rightarrow z$ .

Ainsi pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\forall k \geq n, x_{\varphi(k)} \in K_{\varphi(k)} \subseteq K_n$$

$$z = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\varphi(k)} \in K_n$$

Car  $K_n$  est fermé, donc  $z \in$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n.$$

## Théorème des bornes atteintes

Théorème des bornes atteintes  
en sur un espace métrique.

---

Soit  $K$  compact et  $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ .

Comme  $f(K)$  est compact,  $f$  est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi pour tout  $x \in E \supseteq K$

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$$

Admet un min : la distance est atteinte.

### Démonstration

$f(K)$  est bornée et fermé car compact, ainsi il existe un inf et un sup, et ce sont un min et un max.

# Théorèmes du point fixe

Énoncés et démonstrations des différents théorèmes du points fixe.

1. Soit  $K$  compact,  $f : K \rightarrow K$ , si pour tout  $x \neq y \in K$

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

Alors  $f$  admet un unique point fixe.

2. Soit  $A \subseteq E$  complet, fermé, avec  $E$  evn) et  $f : A \rightarrow A$ .

Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ , alors  $f$  admet un unique point fixe.

3. Soit  $K$  compact, convexe non vide, si  $f : K \rightarrow K$  1-lipschitzienne, alors  $f$  admet un point fixe.

## Démonstration

1. On pose

$$\varphi : \begin{cases} K \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto d(f(x), x) \end{cases}$$

Par compacité de  $K$ ,  $\varphi$  admet un min atteint en  $x_0 \in K$

Supposons par l'absurde que  $f(x_0) \neq x_0$  :

$$\begin{aligned} \varphi(f(x_0)) &= d(f(f(x_0)), f(x_0)) \\ &< d(f(x_0), x_0) \\ &< \min \varphi \end{aligned}$$

Absurde.

Soit  $x \neq x_0$

$$d(f(x), x_0) < d(x, x_0)$$

Donc  $f(x) \neq x$ .

2. On pose  $x_n = f^n(x_0)$  avec  $x_0 \in A$  quelconque. Ainsi

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\|$$

D'où  $\sum (x_{n+1} - x_n)$  absolument convergente, donc convergente.

Donc par continuité de  $f$  et unicité de la limite  $f(x_\infty) = x_\infty$ .

Soient  $z, z'$  deux points fixes

$$\begin{aligned} \|f(z) - f(z')\| &= \|z - z'\| \\ &\leq \underbrace{k}_{<1} \|z - z'\| \end{aligned}$$

D'où  $\|z - z'\| = 0$ .

3. Soit  $x_0 \in K$ , pour  $\lambda \in ]0, 1[$  on considère

$$g_\lambda : \begin{cases} K \rightarrow K \\ x \mapsto f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) \end{cases}$$

Soit  $x, y \in K$

$$\begin{aligned} &\|g_\lambda(x) - g_\lambda(y)\| \\ &= \|f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) - f(\lambda y + (1 - \lambda)x_0)\| \\ &\leq \|\lambda x - \lambda y\| = \lambda \|x - y\| \end{aligned}$$

Donc  $g_\lambda$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, avec  $\lambda < 1$ , donc  $g_\lambda$  admet un point fixe  $x_\lambda$ .

On considère  $\lambda_n = 1 - \frac{1}{n}$ , comme  $(x_{\lambda_n})_n \in K^\mathbb{N}$ , on dispose de  $x_1$  valeur d'adhérence :

$$(x_{\lambda_{\varphi(n)}})_n \rightarrow x_1 \in K$$

Or pour tout  $\lambda \in ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} \|f(x_\lambda) - x_\lambda\| &= \|f(x_\lambda) - g_\lambda(x_\lambda)\| \\ &= \|f(x_\lambda) - f(\lambda x_\lambda + (1 - \lambda)x_0)\| \\ &\leq (1 - \lambda) \underbrace{\|x_\lambda - x_0\|}_{\text{borné}} \end{aligned}$$

D'où

$$\left\| f\left(x_{\lambda_{\varphi(n)}}\right) - x_{\lambda_{\varphi(n)}} \right\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Et donc  $f(x_1) = x_1$ .

# Compacité en dimension finie

Propriétés de compacité en dimension finie.

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie muni de  $\|\cdot\|_{\infty,e}$  pour la base  $e$ .

$$\|\cdot\|_{\infty,e} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x = \sum_{k=1}^d x_k e_k & \mapsto \max_{k \in \llbracket 1, d \rrbracket} |x_k| \end{cases}$$

- Pour tout  $R > 0$ ,  $\overline{B_{\|\cdot\|_{\infty,e}}(0, R)}$  est compact.
- $K \subseteq E$  est compact ssi  $K$  est fermé borné.

## Démonstration

- On considère

$$\theta : \begin{cases} (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_{\infty}) & \rightarrow (E, \|\cdot\|_{\infty,e}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} & \mapsto \sum_{k=1}^d x_k e_k \end{cases}$$

Qui est 1-lipschitzienne et

$$\overline{B_{\|\cdot\|_{\infty,e}}(0, R)} = \theta([-R, R]^d)$$

Or  $[-R, R]$  est compact (Bolzano-Weierstrass), d'où le résultat.

- Soit  $K \subseteq E$  fermé borné, on dispose donc de  $R > 0$  tel que

$$K \subseteq \underbrace{\overline{B_{\|\cdot\|_{\infty,e}}(0, R)}}_{\text{compacte}}$$

Donc  $K$  est fermé dans un compact d'où le résultat.

# Théorème de Heine

Théorème de Heine sur un espace métrique.

Soit  $K$  compact et  $F$  un espace métrique.

Si  $f \in C^0(K, F)$  alors  $f$  est uniformément continue.

## Démonstration

Supposons par l'absurde que  $f$  ne le soit pas.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in K,$$

$$\begin{cases} d(x, y) < \delta \\ d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \end{cases}$$

On fixe un tel  $\varepsilon$ , on pose  $\delta_n = \frac{1}{n+1}$ , et on construit  $(x_n)_n, (y_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} d(x_n, y_n) < \delta_n \\ d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \end{cases}$$

Par compacité, on peut extraire

$$(x_{\varphi(n)})_n \rightarrow l \in K$$

$$\text{Or } d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ donc}$$

$$(y_{\varphi(n)})_n \rightarrow l$$

Or comme  $f$  continue

$$d(f(x_n), f(y_n)) \rightarrow d(f(l), f(l)) = 0 \geq \varepsilon$$

Absurde.

# Équivalence des normes en dimension finie

Démonstration de l'équivalence des normes en dimension finie.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie.

On prend  $e = (e_1, \dots, e_d)$  base de  $E$ . On montre que toute norme  $N$  sur  $E$  est équivalente à  $\|\cdot\|_{e,\infty}$ .

Comme  $N$  est une application linéaire,  $N$  est continue donc lipschitzienne sur  $E$  :

$$\forall x = \sum_{k=1}^d x_k e_k \in E,$$

$$N(x) \leq \sum_{k=1}^d |x_k| N(e_k) \leq \beta \|x\|_{e,\infty}$$

$$\text{Où } \beta = \sum_{k=1}^d N(e_k)$$

De plus comme  $\mathbb{S}_{e,\infty}(0,1)$  est fermée et bornée, elle est donc compacte comme  $E$  est de dimension finie. Ainsi

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{S}_{e,\infty}(0,1)} N(x) = N(x_0) > 0$$

avec  $x_0 \in \mathbb{S}_{e,\infty}(0,1)$

Ainsi pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$

$$\alpha \leq N\left(\frac{x}{\|x\|_{e,\infty}}\right)$$

$$\alpha \|x\|_{e,\infty} \leq N(x) \leq \beta \|x\|_{e(\infty)}$$

## Conséquences

En dimension finie, pour toute norme :

- Toute application linéaire est continue.
- Les compacts sont les fermés bornés.
- Toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, et converge ssi elle n'en a qu'une.
- Tout espace de dimension finie est fermé (caractère séquentielle).
- La distance à un fermé est atteinte.

# Propriétés topologiques du groupe linéaire

Propriétés topologiques du  
groupe linéaire.

---

$GL_n(\mathbb{K})$  est un ouvert dense de  
 $M_n(\mathbb{K})$

Et plus généralement pour tout  
 $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg } M \geq p\}$   
est un ouvert.

## Démonstration

- $GL_n$  est ouvert comme image  
reciproque de  $\mathbb{K} \setminus \{0\}$  par  $\det$   
(qui est continue).
- Soit  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $\delta > 0$ , Soit  $\lambda =$   
 $\min \text{Sp } (P)$ , afin que  $\frac{\lambda}{2}$  ne soit  
pas valeur propre, c'est à dire  
 $P - \frac{\lambda}{2}I_n \in GL_n(\mathbb{K})$ .
- Soit  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , pour  $\|\cdot\| : M \mapsto$   
 $\text{tr } (M^T M)$ . Soit  $M \in M_n(\mathbb{K})$  tel  
que  $\text{rg } M \geq p$ , on dispose d'une  
sous matrice inversible extraite  
de taille  $p$ , or  $GL_p(\mathbb{K})$  est un  
ouvert, donc on dispose d'une  
boule bien choisie qui marche.



# Nature topologique des matrices diagonales

Nature topologique des matrices diagonales.

Notons  $DZ_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ diagonalisable}\}$  et  $TZ_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid A \text{ trigonalisable}\}$ .

On a

- $DZ_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ .
- $DZ_n(\mathbb{R})$  est dense dans  $TZ_n(\mathbb{R})$ .

## Démonstration

Montrons que  $\{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \chi_A \text{ SARS}\}$  est dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$

$$A = P \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} \end{pmatrix}}_T P^{-1}$$

$$A_k = P \begin{pmatrix} t_{11} + \frac{1}{k} & & (*) \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} + \frac{n}{k} \end{pmatrix}$$

À partir d'un rang assez grand on a  $\chi_{A_k}$  SARS.

Même démonstration pour  $DZ_n(\mathbb{R})$  dans  $TZ_n(\mathbb{R})$ .

# Nature topologique de l'ensemble des matrices cycycliques

Nature topologique de l'ensemble des matrices cycycliques.

$\Omega = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A \text{ cyclique}\}$  est un ouvert dense de  $M_n(\mathbb{C})$ .

Et de plus

$$\Pi : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{C}_n[X] \\ A & \mapsto \Pi_A \end{cases}$$

N'est continue que sur  $\Omega$ .

## Démonstration

- $\Omega$  est un ouvert :

$$A \in \Omega$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{C}^n, \text{Vect}(x_0, \dots, A^{n-1}x_0) = \mathbb{C}^n$$

$$\Leftrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{C}^n, \det(x_0, \dots, A^{n-1}x_0) \neq 0$$

Ainsi

$$\varphi_{x_0} : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{C} \\ A & \mapsto \det(x_0, \dots, A^{n-1}x_0) \end{cases}$$

$$\Omega = \bigcup_{x_0 \in \mathbb{C}^n} \varphi_{x_0}^{-1}(\mathbb{C}^*)$$

- De plus  $\mathcal{S} = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid \chi_A \text{ SARS}\} \subseteq \Omega$  est dense dans  $M_n(\mathbb{C})$ , donc  $\Omega$  aussi.
- Soit  $A \in \Omega$ , on dispose donc de  $V = B(A, \delta) \subseteq \Omega$ , or  $\Pi|_V = \chi|_V$  (par cyclicité :  $\Pi_M = \chi_M$ ), et  $\chi$  est continue, donc  $\Pi$  aussi (en  $A$ ).
- Soit  $A \notin \Omega$ , alors  $\deg \Pi_A < n$ , or on dispose de  $(A_k)_k \in \Omega^{\mathbb{N}} \rightarrow A$ , mais pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\Pi_{A_k} = \chi_{A_k}$  (unitaire de degré  $n$ ), d'où  $\Pi_{A_k} \not\rightarrow \Pi_A$ .

# Étude de la classe de similitude d'une matrice

Étude de la classe de similitude d'une matrice.

Pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , notons  $\mathcal{C}(A) = \{PAP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{C})\}$ . On a alors

- $A$  est diagonalisable ssi  $\mathcal{C}$  est fermé.
- $A$  est nilpotente ssi  $0 \in \overline{\mathcal{C}(A)}$ .

## Démonstration

- On utilise le résultat suivant, si  $M \in T_n^+(\mathbb{C})$  on peut poser

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k^{n-1} \end{pmatrix}}_{Q_k} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}}_{P_\varepsilon}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & & & (*) \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}}_M \quad \underbrace{\begin{pmatrix} t_{11} & & & \\ & t_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix}}_D$$

On a alors

$$Q_k M Q_k^{-1} = \begin{pmatrix} t_{11} & & A_{ij} k^{i-j} \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} D$$

$$P_\varepsilon^{-1} M P_\varepsilon = \begin{pmatrix} t_{11} & & A_{ij} \varepsilon^{j-i} \\ & \ddots & \\ & & t_{nn} \end{pmatrix} \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} D$$

- Supposons  $\mathcal{C}(A)$  fermé. Comme  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on dispose de  $T \in \mathcal{C}(A) \cap T_n^+(\mathbb{C})$ , et on peut donc poser

$$A_k = Q_k T Q_k^{-1} \in \mathcal{C}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = D \in \mathcal{C}$$

D'où  $A$  est diagonalisable.

- Soit  $A \in M_n(\mathbb{C})$  diagonalisable. Soit  $(R_k)_k \in GL_n(\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$  tel que  $A_k = R_k A R_k^{-1} \rightarrow B \in M_n(\mathbb{C})$ .

Comme  $\chi$  est un invariant de similitude et une application continue, on a  $\chi_A = \chi_B$ .

De plus  $\Pi_A(A_k) = R_k \Pi_A(A) R_k^{-1} = 0$  et  $M \mapsto \Pi_A(M)$  est continue, d'où  $\Pi_A(B) = 0$  (qui est SARS), ainsi  $B$  est diagonalisable.

Donc  $B \in \mathcal{C}(A)$ .

- Supposons que  $0 \in \overline{\mathcal{C}(A)}$ , on dispose de  $(A_k)_k \in \mathcal{C}(A)^{\mathbb{N}} \rightarrow 0$ , or  $\chi_{A_k} = \chi_A$  et par continuité de  $\chi$ ,  $\chi_A = \chi_0$ , d'où  $A$  nilpotente.
- Supposons  $A$  nilpotente, donc on dispose de  $T \in \mathcal{C}(A) \cap T_n^{++}(\mathbb{C})$

$$Q_k T Q_k^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

D'où  $0 \in \overline{\mathcal{C}(A)}$ .

## Exercice : liens entre spectre norme subordonnée

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{C}^n$ . On note

$$\|\cdot\|_{\text{op}} : \begin{cases} M_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ A & \mapsto \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \end{cases}$$

Pour  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , on note  $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda|$ .

1. Montrer que pour toute matrice  $A$ ,  $\rho(A) \leq \|A\|_{\text{op}}$ .
2. Montrer que  $\rho(A^k) = \rho(A)^k$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\rho(A) \leq \|A^k\|_{\text{op}}^{\frac{1}{k}}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .
3. Montrer que  $\|\cdot\|_{\text{op}}$  est sous-multiplicative.
4. Donner un exemple de norme sur  $M_n(\mathbb{C})$  qui ne soit pas une norme d'opérateur.
5. Soit  $\|\cdot\|_{\infty, \text{op}}$  la norme d'opérateur associé à la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  sur  $\mathbb{C}^n$ . Montrer que  $\|A\|_{\infty, \text{op}} = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ .
6. Soit  $T \in T_n^+(\mathbb{C})$ . Pour  $\mu > 0$  on pose  $Q_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu^{n-1} \end{pmatrix}$ , calculer  $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \|Q_{\mu} T Q_{\mu}^{-1}\|_{\infty, \text{op}}$ .
7. Soient  $A \in M_n(\mathbb{C})$  et  $\varepsilon > 0$ . Montrer qu'il existe une norme d'opérateur  $N$  sur  $M_n(\mathbb{C})$  telle que  $N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$ .
8. Montrer que  $\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|_{\text{op}}^{\frac{1}{k}}$ .
9. En déduire l'équivalence entre
  - $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ .
  - $\forall X \in M_{n,l}(\mathbb{C}), \lim_{k \rightarrow \infty} A^k X = 0$ .
  - $\rho(A) < 1$
  - Il existe sur  $\mathbb{C}^n$  une norme  $\|\cdot\|$  tel que  $\|A\|_{\text{op}} < 1$ .
  - Il existe  $M$  semblable à  $A$  telle que  $\|M\|_{\infty, \text{op}} < 1$ .

# Précompacité

Définition de précompacité.

---

On dit que  $A \subseteq E$  est précompacte si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \exists (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \\ A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

Toute partie compacte est précompacte.

## Démonstration

- Par contraposée. Soit  $A$  non précompacte :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \\ A \not\subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

Fixons un tel  $\varepsilon$ , et construisons une suite par récurrence :  $u_0 \in A$  quelconque, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in A \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} B(u_k, \varepsilon)$$

Ainsi  $(u_n)_n$  ne peut admettre de valeur d'adhérence, donc  $A$  n'est pas compacte.

## Borel Lebesgue sur un segment

Énoncé et démonstration de Borel-Lebesgue sur un segment.

Pour  $K = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  tel que  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ , où  $(\Omega_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque d'ouverts de  $\mathbb{R}$ .

On dispose de  $J \subseteq I$  fini tel que  $K \subseteq \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ .

### Démonstration

Posons

$$= \left\{ c \in [a, b] \mid \exists J \subseteq I, \begin{cases} J \text{ fini} \\ [a, c] \subseteq \bigcup_{j \in J} \Omega_j \end{cases} \right.$$

Qui est non vide ( $a \in \Gamma$ ) et majoré, posons  $\beta = \sup \Gamma$ .

Or  $\beta \in [a, b]$ , donc on dispose de  $i_0 \in I$  tel que  $\beta \in \Omega_{i_0}$ , donc il existe  $\delta_0$  tel que

$$[\beta - \delta_0, \beta + \delta_0] \subseteq \Omega_{i_0}$$

Par propriété de la borne sup, on dispose aussi de  $c \in \Gamma \cap ]\beta - \delta_0, \beta]$ .

Ainsi on a  $J \subseteq I$  fini tel que  $[a, c] \subseteq \bigcup_{j \in J} \Omega_j$ .

Supposons par l'absurde que  $\beta < b$ .

Posons  $\beta' = \min(b, \beta + \delta_0)$  et  $J' = J \cup \{i_0\}$ . Ainsi  $[a, \beta'] \subseteq \bigcup_{j \in J'} \Omega_j$ , or  $\beta' \in ]\beta, b]$ , qui est absurde.

Donc  $\beta = b$ .

# Borel-Lebesgue

## Énoncé et démonstration de Borel-Lebesgue.

On définit un compact au sens de Borel-Lebesgue comme une partie  $K$  tel que si  $(\Omega_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque d'ouverts de  $E$  tel que  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$ , alors

$$\exists J \subseteq I, J \text{ finie et } K \subseteq \bigcup_{j \in J} \Omega_j$$

De manière équivalente (Borel-Lebesgue version fermé) : si

$(G_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de fermés de  $K$  tels que  $\bigcap_{i \in I} G_i = \emptyset$  alors

$$\exists J \subseteq I, J \text{ finie et } \bigcap_{j \in J} G_j = \emptyset$$

## Équivalence

Soit  $(E, d)$  un espace métrique. Toute partie compacte au sens de Bolzano-Weierstrass, est compacte au sens de Borel-Lebesgue (et vis-versa).

## Démonstration

Soit  $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$  compacte (au sens de Bolzano-Weierstrass).

- Montrons que

$$(\exists \varepsilon > 0, \forall x \in K, \exists i \in I, B(x, \varepsilon) \subseteq \Omega_i) \\ \equiv \neg(\forall \varepsilon > 0, \exists x \in K, \forall i \in I, B(x, \varepsilon) \not\subseteq \Omega_i)$$

Par l'absurde, posons  $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$ , on dispose donc de  $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$  tel que

$$\forall i \in I, B\left(x_k, \frac{1}{k+1}\right) \not\subseteq \Omega_i$$

Qu'on peut extraire  $(x_{\varphi(n)})_n \rightarrow z \in K$ .

Soit  $j \in I, \delta > 0$  tels que  $B(z, \delta) \subseteq \Omega_j$ . Pour  $N$  assez grand on a pour tout  $n \geq N$  :

$$d(x_{\varphi(n)}, z) < \frac{\delta}{2} \quad \frac{1}{N+1} \leq \frac{\delta}{2}$$

$$B\left(x_{\varphi(n)}, \frac{1}{\varphi(n)+1}\right) \subseteq B(z, \delta) \subseteq \Omega_j$$

Qui est absurde.

- Donc on dispose bien d'un tel  $\varepsilon$ . Par précompacité de  $K$  on dispose de  $x_1, \dots, x_n \in K$  tels que  $K \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$ .

Or pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on dispose de  $i_k \in I$  tel que  $B(x_k, \varepsilon) \subseteq \Omega_{i_k}$  d'où

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^n \Omega_{i_k}$$

- La version fermé s'obtient en prenant  $G_i = K \setminus \Omega_i$ .
- La réciproque découle de la version fermée :

Soit  $K$  compact au sens de Borel-Lebesgue,  $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$  une suite.

On a montrer que  $S = \{\text{valeurs d'adhérence de } (x_n)\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{x_k, k \geq n\}}$ .

On note  $F_n = \overline{\{x_k, k \geq n\}}$  fermé dans  $\mathbb{K}$ .

Pour tout  $n_1 < \dots < n_d \in \mathbb{N}$

$$x_{n_d} \in \bigcap_{k=1}^d F_{n_k}$$

Donc comme  $K$  compact  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ , donc  $(x_n)$  admet au moins une valeur d'adhérence dans  $K$ .

# Suites de Cauchy

Définition, propriétés des suites de Cauchy.

Soit  $(E, d)$  un espace métrique,  $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$  une suite.

On dit que  $(u_n)_n$  est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \\ \forall p, q \geq N, d(u_p, u_q) < \varepsilon$$

Propriétés :

- Toute suite convergente est de Cauchy.
- Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.
- Toute suite de Cauchy est bornée.
- Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -evn de dimension finie, toute suite de cauchy converge.

On appelle espace complet un espace métrique où les suites de Cauchy converge, et espace de Banach un evn complet.

## Démonstration

- L'écrire.
- Supposons  $(u_n)_n$  de Cauchy et  $(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow l \in E$ . Soit  $\varepsilon > 0$ .

On dispose de  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $d(u_{\varphi(k)} - l) < \frac{\varepsilon}{2}$ .

On dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$d(u_n, u_{\varphi(k)}) < \varepsilon$$

Ainsi

$$d(u_n, l) \leq d(u_n, u_{\varphi(k)}) + d(u_{\varphi(k)}, l) < \varepsilon$$

- Supposons  $(u_n)_n$  de Cauchy. Pour  $\varepsilon = 1$  on dispose de  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$

$$|u_n| \leq d(u_n, u_0) + |u_0| < 1 + |u_0|$$

- Supposons  $(u_n)_n$  de Cauchy et  $(E, \|\cdot\|)$  un evn de dimension finie. Comme  $(u_n)_n$  est de Cauchy, elle est bornée :  $(u_n)_n \in B(0, M)^{\mathbb{N}}$ , qui est compacte,  $(u_n)_n$  admet donc une valeur d'adhérence, et converge.



# Séries dans un espace vectoriel normé

Propriétés des séries dans un espace vectoriel normé.

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un  $\mathbb{K}$ -evn.

Toute série absolument convergente est convergente ssi  $E$  est un espace de Banach.

## Démonstration

- En dimension finie (sans les suites de Cauchy) :

Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$  tel que  $\sum \|u_n\|$  converge.

$$\|S_n\| = \left\| \sum_{k=0}^n u_k \right\| \leq S = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|$$

Donc  $(S_n)_n$  est bornée et admet au moins une valeur d'adhérence.

Soit  $\varphi, \psi$  tels que  $(u_{\varphi(n)})_n \rightarrow l_1$ ,  $(u_{\psi(n)})_n \rightarrow l_2$ .

$$\begin{aligned} \|S_{\psi(n)} - S_{\varphi(n)}\| &\leq \sum_{k \in [\psi(n), \varphi(n)]} \|u_k\| \\ &\leq \sum_{k=\min(\psi(n), \varphi(n))}^{+\infty} \|u_k\| \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

D'où  $l_1 = l_2$ .

- Soit  $u \in E^{\mathbb{N}}$ ,  $E$  un espace de Banach, tel que  $\sum \|u_n\|$  converge.

Pour tout  $p \geq q$

$$\begin{aligned} \|S_p - S_q\| &\leq \sum_{k=q+1}^p \|u_k\| \\ &\leq \sum_{k=q+1}^{+\infty} \|u_k\| \\ &\xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Donc  $(S_n)$  est de Cauchy, et converge.

- Soit  $(u_n)$  une suite de Cauchy. On construit  $\varphi$  extractrice tel que  $\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{n^2}$  (qui est possible car  $(u_n)$  est de Cauchy).

Ainsi  $\sum (u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)})$  est absolument convergente donc convergente et  $(u_{\varphi(n)})_n$  converge, donc  $(u_n)$  admet une valeur d'adhérence et converge.

# Théorème de Baire

Énoncé, démonstrations du théorème de Baire.

---

Dans  $(E, \|\cdot\|)$  espace de Banach, soit  $A \subseteq E$  complet, et  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite dénombrable d'ouverts denses dans  $A$ . Alors

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$$

Est dense dans  $A$ .

## Éléments de démonstration

Suite de boules emboîtées, en alternant caractère ouvert et densité dans une récurrence bien construite pour trouver un point dans l'intersection à toute distance.

## Connexité par arcs

Définition, propriétés de connexité par arcs.

---

Pour  $X \subseteq E$  ( $E$  espace métrique) et  $a, b \in X$ , on appelle chemin continue reliant  $a$  et  $b$  une fonction

$$\gamma : \begin{cases} [0, 1] \rightarrow E \\ 0 \mapsto a \\ 1 \mapsto b \\ t \mapsto \gamma(t) \in X \end{cases}$$

L'existence d'un chemin continue forme une relation d'équivalence.

- On appelle composantes connexes par arcs les classes d'équivalence pour cette relation.
- On dit que  $X$  est connexe par arcs s'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence pour cette relation.
- Si  $f \in C^0(X, F)$  et  $X$  est connexe par arcs, alors  $f(X)$  aussi.

### Démonstration

- Soit  $f(x) = a, f(y) = b \in f(X)$ , comme  $X$  est connexe par arcs on dispose de  $\gamma$  chemin continue de  $x$  à  $y$ .

Posons  $\gamma' = f \circ \gamma$ , continue par composition de fonctions qui le sont, et forme un chemin continue de  $a$  à  $b$ .

Donc  $f(X)$  est connexe par arcs.

# Connexité par arcs du groupe linéaire complexe

Démonstrations de la connexité par arcs de  $GL_n(\mathbb{C})$ .

1. Soit  $A \in GL_n(\mathbb{C})$ , pour tout  $t \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}(1-t)I_n + tA &\notin GL_n(\mathbb{C}) \\ \Leftrightarrow A - \frac{t-1}{t} &\notin GL_n(\mathbb{C}) \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{t} &\in \text{Sp}(A)\end{aligned}$$

Notons  $D = \left\{ \frac{1}{\lambda} - 1, \lambda \in \text{Sp}(A) \right\}$  qui est fini, donc  $\mathbb{C}^* \setminus D$  est connexe par arcs, et on dispose de  $\gamma$  chemin continue de 0 à 1 dans  $\mathbb{C}^* \setminus D$ .

$$\tilde{\gamma} : t \mapsto (1 - \gamma(t))I_n + \gamma(t)A$$

Convient.

2. En trigonalisant :

$$\gamma : s \rightarrow P \begin{pmatrix} \gamma_1(s) & & (st_{ij}) \\ & \ddots & \\ & & \gamma_n(s) \end{pmatrix} P^{-1}$$

Avec  $\gamma_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$  chemin continue de 1 à  $\gamma_i$ .

3. On écrit  $A$  comme produit de transvections et d'une dilatation, et on relie les termes. (Marche pour montrer la connexité par arcs de  $GL_n^+(\mathbb{R})$  et  $GL_n^-(\mathbb{R})$ ).

# Connexité

Définition et propriétés de la connexité.

Une partie  $X \subseteq E$  d'un espace métrique est dite connexe si les seules parties ouvertes et fermés de  $X$  sont  $\emptyset$  et  $X$ .

- Si  $X$  connexe par arcs, alors  $X$  est connexe.
- $X$  est connexe ssi toute fonction  $C^0(X, \mathbb{Z})$  est constante.
- Si  $X$  est connexe,  $\overline{X}$  aussi.

Contre exemple de la reciproque de connexe par arcs implique connexe :

$$X = \left\{ \left( x, \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), x \in ]0, 1] \right\}$$

$$\overline{X} = X \cup \{0\} \times [-1, 1]$$

- $X$  est connexe par arcs, donc connexe.
- $\overline{X}$  est connexe car  $X$  l'est.
- $\overline{X}$  n'est pas connexe par arcs.

## Démonstration

- 1. Supposons  $X$  connexe par arcs, soit  $A \subseteq X$  non vide ouverte et fermé.

On dispose donc de  $a \in A$ , supposons par l'absurde qu'on dispose de  $b \in X \setminus A$ .

Comme  $X$  est connexe par arcs, on dispose de  $\gamma$  chemin continue de  $a$  à  $b$ .

$$t_0 = \sup \underbrace{[0, 1] \cap \gamma^{-1}(A)}_{\Gamma}$$

Qui existe car  $\Gamma$  est non vide et majoré.

On dispose donc de  $(t_n)_n \in \Gamma^{\mathbb{N}} \rightarrow t_0$

$$\gamma(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\gamma(t_n)}_{\in A} \in \overline{A} = A$$

Or  $A$  est ouvert, donc on dispose de  $B_X(\gamma(t_0), \delta) \subseteq A$ .

Par continuité de  $\gamma$  on a  $\eta > 0$  tel que

$$\gamma(B(t_0, \eta)) \subseteq B(\gamma(t_0), \delta) \subseteq A$$

Absurde.

- 2. Montrons que  $\mathbb{1}_A$  est continue.

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}$  ouvert

$$\mathbb{1}_A^{-1}(\Omega) = \begin{cases} A & \text{si } 1 \in \Omega \text{ et } 0 \notin \Omega \\ X \setminus A & \text{si } 1 \notin \Omega \text{ et } 0 \in \Omega \\ \emptyset & \text{si } 1 \notin \Omega \text{ et } 0 \notin \Omega \\ X & \text{si } 1 \in \Omega \text{ et } 0 \in \Omega \end{cases}$$

Qui sont tous ouverts. Donc  $\mathbb{1}_A$  est continue,  $\mathbb{1}_A(X) \subseteq \{0, 1\}$  est connexe par arcs.

Donc  $\mathbb{1}_A(X) = \{0\}$  ou  $\mathbb{1}_A(X) = \{1\}$

- ( $\Leftarrow$ ) Soit  $A \subseteq X$  ouvert et fermé,  $\mathbb{1}_A$  est continue (voir ci dessus) donc constante.

( $\Rightarrow$ ) Soit  $f \in C^0(X, \mathbb{Z})$ , soit  $k = f(x) \in \mathbb{Z}$ ,

$$f^{-1}\{k\} = f^{-1}\left]k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right[$$

Qui est ouvert et fermé.

- Supposons  $X$  connexe, soit  $f \in C^0(\overline{X}, \mathbb{Z})$ , et  $\tilde{f} = f|_X$ .

Par connexité de  $X$ ,  $\tilde{f}$  est constante et donc  $f$  aussi sur  $X$ , et par continuité elle l'est sur  $\overline{X}$ .

# Barycentres

Barycentres - revoir le cours / écrire la fiche.

Barycentres - revoir le cours / écrire la fiche.

Rapidement :

- À  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{E}^n$  (avec  $E$  espace affine) et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^n$  on associe  $G \in \mathcal{E}$  l'unique point tel que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \overrightarrow{GA_k} = \vec{0}$$

$$\text{i.e } \sum_{k=1}^n \lambda_k (a_k - g) = 0$$

Qu'on appelle barycentre :

$$G = \text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [1, n]\}$$

- Les pondérations sont unique à facteur multiplicatif près, il en existe une unique tel que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$$

- Associativité du barycentre :

Soit  $(A_k)_k \in \mathcal{E}^{n+m}$  et  $(\lambda_k)_k \in \mathbb{R}^{n+m}$  tel que

$$\alpha = \sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0 \neq \sum_{k=n+1}^{n+m} \lambda_k$$

Alors en posant

$$G_1 = \text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [1, n]\}$$

$$G_2 = \text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [n+1, n+m]\}$$

On a

$$G = \text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [1, n+m]\}$$

$$= \text{Bar} \{(G_1, \alpha), (G_2, \beta)\}$$

- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}$  est un sea ssi il est stable par barycentre.
- On dit que  $d+1$  points sont en position général (dans un espace de dimension  $d$ ) si  $(\overrightarrow{A_0 A_k})_{k \in [1, d]}$  est libre.
- $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$  est convexe ssi pour tout  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$  tels que  $\sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0$

$$\text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [1, n]\} \in \mathcal{C}$$

- Pour  $X \subseteq \mathcal{E}$ , il existe un plus petit convexe contenant  $X$ . On l'appelle enveloppe convexe de  $X$  et

$$\text{Conv} (X)$$

$$= \left\{ \text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [1, n]\}, n \in \mathbb{N}, \right.$$

$$(A_1, \dots, A_n) \in X^n, (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

$$\left. \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \neq 0 \right\} = \mathcal{C}$$

- (Carathéodory) Soit  $d = \dim \mathcal{E}$ ,  $X \subseteq \mathcal{E}$

$$\text{Conv} (X)$$

$$= \left\{ \text{Bar} \{(A_k, \lambda_k), k \in [1, d+1]\}, \right.$$

$$(A_1, \dots, A_{d+1}) \in X^{d+1},$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{R}_+^{d+1}$$

$$\left| \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right\}$$

- Donc si  $X$  est compact,  $\text{Conv} X$  aussi.

# Projection sur un convexe fermé

Propriétés de projection sur un convexe fermé.

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace euclidien,  $C \subseteq E$  un convexe fermé.

$$\forall x \in E, \exists ! p(x) \in C, \\ d(x, C) = d(x, p(x))$$

Et de plus pour tout  $x \in E$ , et  $z \in C$ , on a équivalence entre

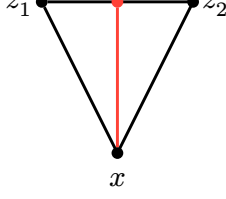
1.  $z = p(x)$
2.  $\forall y \in C, \langle y - z | x - z \rangle \leq 0$

On a alors que  $x \mapsto p(x)$  est 1-lipschitzienne.

## Démonstration

- Existence : la distance à un fermé est atteinte en dimension finie (ou dans un espace de Banach).

- Unicité :

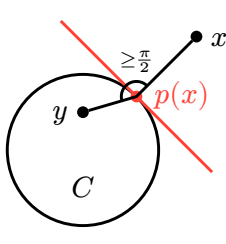


Soit  $z_1, z_2 \in C$  tels que  $d(x, C) = d(x, z_1) = d(x, z_2)$ .

$$\begin{aligned} d(x, C) &\leq d\left(x, \frac{z_1 + z_2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \|(x - z_1) + (x - z_2)\| \\ &\leq d(x, C) \end{aligned}$$

On a égalité dans l'inégalité triangulaire pour une norme issue d'un produit scalaire :  $(x - z_1)$  et  $(x - z_2)$  sont positivement liés et de même norme (par hypothèse), d'où  $z_1 = z_2$ .

- Tangente :



(i  $\Rightarrow$  ii) Soit  $y \in C$ , on considère pour  $t \in [0, 1]$  :

$$y_t = (1 - t)z + ty$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \|x - y_t\|^2 \\ &= \|(x - z) - t(y - z)\|^2 \\ &= \|x - z\|^2 - 2t\langle x - z | y - z \rangle \\ &\quad + t^2\|y - z\|^2 \end{aligned}$$

Une fonction de  $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  minimale en 0 d'où

$$\begin{aligned} f'(0) &\geq 0 \\ -2\langle x - z | y - z \rangle &\geq 0 \end{aligned}$$

(ii  $\Rightarrow$  i) Pour  $y = p(x)$  :

$$\langle p(x) - z | x - z \rangle \leq 0$$

Or par (i  $\Rightarrow$  ii) (avec  $z' = p(x)$  et  $y' = z$ ) on a

$$\begin{aligned} \langle z - p(x) | x - p(x) \rangle &\leq 0 \\ \langle p(x) - z | p(x) - x \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \langle z - p(x) | z - p(x) \rangle &= \|z - p(x)\|^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

D'où  $z = p(x)$ .

- Soit  $x, y \in E$  :

$$\begin{aligned} \langle p(y) - p(x) | x - p(x) \rangle &\leq 0 \\ \langle p(x) - p(y) | y - p(y) \rangle &\leq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \langle p(y) - p(x) | x - y + p(y) - p(x) \rangle &\leq 0 \\ \|p(y) - p(x)\|^2 &\quad + \langle p(y) - p(x) | x - y \rangle \leq 0 \\ \|p(y) - p(x)\|^2 &\leq \langle p(y) - p(x) | y - x \rangle \\ &\leq \|p(y) - p(x)\| \cdot \|y - x\| \\ \|p(y) - p(x)\| &\leq \|y - x\| \end{aligned}$$

# Valeurs propres, espaces propres

Définitions, caractérisation, démonstration autour des valeurs propres et des espaces propres.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , il y a équivalence entre

1.  $\exists x_0 \in E \setminus \{0\}, u(x_0) = \lambda x_0$
2.  $\ker(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$
3.  $u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E)$

On dit alors que  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , on appelle sous-espace propre de  $u$  pour la valeur propre  $\lambda$

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

## Démonstration

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in E \setminus \{0\}, u(x_0) = \lambda x_0 \\ & \Leftrightarrow \exists x_0 \in \ker(u - \lambda \text{id}) \setminus \{0\} \\ & \Leftrightarrow u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E) \quad \left( \begin{smallmatrix} \text{dimension} \\ \text{finie} \end{smallmatrix} \right) \end{aligned}$$



## Somme directe des sous-espaces propres

Démonstration du fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  ses valeurs propres deux à deux distinctes.

Soit  $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$  tels que  $\sum_{k=1}^p x_k = 0$ .

Par recurrence on montre que pour tout  $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ .

$$0 = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k) x_k$$

En particulier avec  $P = L_i$  pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a

$$0 = \sum_{k=1}^p L_i(\lambda_k) x_k = x_i$$

On appelle spectre de  $u$

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre}\}$$

Qui est finit ( $|\text{Sp}(u)| \leq n = \dim E$ ).

# Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définitions, propriétés élémentaires et démonstrations autour du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

## Matrices

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on définit le polynôme caractéristique de  $A$  comme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Et on a

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$a_n = 1 \quad (\chi_A \text{ unitaire})$$

$$a_{n-1} = -\text{tr}(A)$$

$$a_0 = (-1)^n \det(A)$$

## Endomorphismes

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $e$  base de  $E$ ,  $A = \mathcal{M}_e(u)$ . On définit

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

Ceci ne dépend pas de la base  $e$  choisie.

De plus

$$\text{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_u)$$

## Démonstration

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^n (X\delta_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)j})}_{P_{\sigma}(X)}$$

Pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $P_{\sigma} \in \mathbb{K}_n[X]$

donc  $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$ . De plus

$$\deg(P_{\sigma}) = |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \sigma(k) = k\}|$$

$$\deg(P_{\sigma}) = n \Leftrightarrow \sigma = \text{id}$$

Donc  $\deg \chi_A = n$  et  $\text{cd } \chi_A = 1$ .

Si  $\sigma \neq \text{id}$ ,  $\deg(P_{\sigma}) \leq n - 2$ , donc  $a_{n-1}$  est le terme en  $X^{n-1}$  de  $P_{\text{id}}$ .

$$P_{\text{id}} = \prod_{j=1}^n (X - A_{jj})$$

$$a_{n-1} = -\sum_{j=1}^n A_{jj} = -\text{tr}(A)$$

$$a_0 = \chi_A(0) = \det(0 - A)$$

$$= (-1)^n \det(A)$$

Soient  $e, e'$  deux bases de  $E$ ,  $A = \mathcal{M}_e(u)$ ,  $A' = \mathcal{M}_{e'}(u)$ ,  $P = P_{e' \rightarrow e}$ .

$$A' = PAP^{-1}$$

$$\begin{aligned} \chi_{A'}(X) &= \det(XI_n - A') \\ &= \det(XPI_nP^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P) \det(XI_n - A) \det(P^{-1}) \\ &= \chi_A(X) \end{aligned}$$

# Multiplicités d'une valeur propre

Définitions des multiplicités d'une valeur propre.

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de l'endomorphisme  $u$ .

- On appelle multiplicité algébrique ( $m_\lambda$ ), ou juste multiplicité de  $\lambda$  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_u$ .
- On appelle multiplicité géométrique de  $\lambda$  la dimension de son espace propre.

On a toujours

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

## Démonstration

Soit  $(e_1, \dots, e_d)$  base de  $E_\lambda$  complété en  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda I_d & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

$$\chi_u = \chi_{\mathcal{M}_e(u)}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \begin{array}{c|c} (X - \lambda)I_d & -B \\ \hline 0 & XI_{n-d} - C \end{array} \right| \\ &= (X - \lambda)^d \chi_C(X) \end{aligned}$$

## Propriétés diverses du polynôme caractéristique

Cas particuliers de calculs du polynôme caractéristique, et lien avec les endomorphisme induit.

---

- Pour tout  $T \in T_n(\mathbb{K})$

$$\chi_T = \prod_{k=1}^n T_{kk}$$

- Pour tout  $M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right) \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $A \in M_r(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n-r}(\mathbb{K})$ ,  $B \in M_{r,n-r}(\mathbb{K})$

$$\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$$

- Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  sev stable par  $u$ ,  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ , on a toujours

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

### Démonstration

- L'écrire.
- L'écrire.
- Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $F$  complété en base de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

Avec  $A = \mathcal{M}_{\tilde{e}}(\tilde{u})$ .

# Diagonalisabilité

Définition et premier critère de diagonalisabilité.

On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable s'il existe une base  $e$  de  $E$  tel que  $\mathcal{M}_e(u)$  est diagonale.

Une tel base est par définition formée de vecteurs propres de  $u$ .

De plus

$$\begin{aligned}
 & u \text{ diagonalisable} \\
 \Leftrightarrow & E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \\
 \Leftrightarrow & \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E
 \end{aligned}$$

En particulier

- Les homothéties sont diagonales dans toutes les bases
- Les projecteurs sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(p - \text{id})}_{E_1(p)} \oplus \underbrace{\ker p}_{E_0(p)} = E$$

- Les symétries sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(s - \text{id})}_{E_1(s)} \oplus \underbrace{\ker s + \text{id}}_{E_{-1}(s)} = E$$

## Autre critère de diagonalisabilité

Énoncer du critère de diagonalisabilité sur  $\chi_u$  et les multiplicités.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$

$u$  diagonalisable

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda \end{cases}$$

Où  $m_\lambda$  est la multiplicité (algébrique) de  $\lambda$ .

Ainsi car  $\dim E_\lambda(u) \geq 1$  pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,

$$\chi_u \text{ SARS} \Rightarrow u \text{ diagonalisable}$$

### Démonstration

- Supposons  $u$  diagonalisable, notons  $e$  la base qui le diagonalise.

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Donc  $\chi_u$  est scindé

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \prod_{k=1}^n (X - \alpha_k) \\ &= \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \deg \chi_u &= n = \sum_{k=1}^p m_{\lambda_k} \\ n &= \sum_{k=1}^p m_{\lambda_k} \geq \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k} = n \end{aligned}$$

- Supposons  $\chi_u$  scindé et pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$ .

$$\chi_u = \underbrace{\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}_{\deg = n}$$

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$$

Donc  $u$  est diagonalisable.

# Trigonalisabilité

Définition et premiers critères de la trigonalisabilité.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est trigonalisable s'il existe une base  $e = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  tel que  $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^+(\mathbb{K})$

Dans ce cas

- $u(e_1) = t_{11}e_1$ , donc  $e_1$  est un vecteur propre de  $u$ .
- Notons  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  le drapeau.

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(F_k) \subset F_k$$

- $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - t_{kk})$  scindé.

La réciproque est aussi vraie :

$\chi_u$  scindé  $\Rightarrow u$  trigonalisable.

Si  $F \neq \{0\}$  est un sev stable par  $u$  et  $u$  trigonalisable, alors  $\tilde{u}$  (induit par  $u$  sur  $F$ ) est trigonalisable (car  $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$  scindé).

Si  $\mathbb{K}$  est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

## Démonstration

Par récurrence sur  $n = \dim E$ .

Toute matrice de taille 1 est supérieure.

Supposons pour un  $n \in \mathbb{N}$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}),$$

$$\chi_A \text{ scindé} \Rightarrow A \text{ trigonalisable}$$

Soit  $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$  tel que  $\chi_A$  scindé.

$\chi_A$  a au moins une racine, donc  $A$  admet une valeur propre  $\lambda$ .

On dispose de  $X_0 \in \mathbb{K}^{n+1}$  tel que

$$AX_0 = \lambda X_0$$

Ainsi on peut construire la base  $e' = (X_0, \dots, X_n)$  de  $\mathbb{K}^{n+1}$ . Notons  $P = P_{\text{can} \rightarrow e'}$ .

$$A = P \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{array} \right) P^{-1}$$

Avec  $\tilde{A} \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}(X - \lambda)$  d'où  $\chi_{\tilde{A}}$  scindé.

Par hypothèse de récurrence  $\tilde{A}$  est trigonalisable et on peut donc construire  $P_0 \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que

$$A = P \left( \begin{array}{ccc} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{n+1} \end{array} \right) P^{-1}$$

# Caractérisation des endomorphismes nilpotents

Caractérisation des endomorphisme nilpotents.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1.  $u$  nilpotent
2.  $u$  trigonalisable en une matrice strictement supérieure.
3.  $u$  trigonalisable et  $\text{Sp}(u) = \{0\}$
4.  $\chi_u = X^n$

## Démonstration

- (4  $\Rightarrow$  3)  $\chi_u = X^n$  est scindé donc  $u$  est trigonalisable et  $\text{Sp}(u) = Z(X^n) = \{0\}$ .
- (3  $\Leftrightarrow$  2) Évident.
- (3  $\Rightarrow$  4) On dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \chi_u = X^n$$

- (2  $\Rightarrow$  1) On dispose de  $e$  base de  $E$  tel que  $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^{++}(\mathbb{K})$ , notons  $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ .

$$u(F_k) \subseteq u(F_{k-1})$$

$$u^n(F_n = E) \subseteq F_0 = \{0\}$$

$$u^n = 0$$

- (1  $\Rightarrow$  2)  $u$  est nilpotent d'indice  $d$ .

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \dots \subsetneq \ker u^d = E$$

Construisons une base adaptée

$$\left( \underbrace{e_1, \dots, e_{i_1}}_{\text{base de } \ker u}, \dots, \underbrace{e_{i_2}, \dots, e_{i_d}}_{\text{base de } \ker u^2} \right)$$

Pour tout  $x \in \ker u^k$  :

$$u(x) \in \ker u^{k-1}$$

Ainsi pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  si  $i_j + 1 \leq k \leq i_{j+1}$

$$e_k \in \ker u^j$$

$$u(e_k) \in \ker u^{j-1}$$

$$u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_{j-1}})$$



# Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique

Lien entre racines du polynôme minimal et celles du polynôme caractéristique.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$   
annulateur de  $u$ .

$$\text{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$$

$$Z(\chi_u) = \text{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$$

## Démonstration

- Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  et  $x \in E_{\lambda}(u) \setminus \{0\}$  :

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \sum_{k=0}^d u^k(x) = \sum_{k=0}^d \lambda^k x \\ &= P(\lambda)x = 0 \end{aligned}$$

Or  $x \neq 0$ , donc  $P(\lambda) = 0$ .

- $\Pi_u$  annule  $u$  d'où  $\text{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$
- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  racine de  $\Pi_u$

$$\Pi_u = (X - \lambda)Q(X)$$

$$0 = (u - \lambda \text{id}) \circ Q(u)$$

Donc  $\text{im } Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda \text{id})$ .

Mais  $Q(u) \neq 0$  car  $\Pi_u$  minimal, donc

$$\dim(\text{im } Q(u)) \geq 1$$

$$\text{im } Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda \text{id}) = E_{\lambda}(u)$$

$$\lambda \in \text{Sp}(u)$$

# Théorème des noyaux

Énoncé et démonstrations du théorème des noyaux.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  ( $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie),  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Si  $P = \prod_{k=1}^N P_k$  avec  $P_1, \dots, P_N$  deux à deux premiers entre eux, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Si de plus  $P$  annule  $u$  alors

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Où  $e$  est la base construite par concaténation de bases des  $\ker P_k(u)$ .

## Démonstration

Par récurrence sur  $N$ .

Pour  $P = P_1 P_2$  avec  $P_1 \wedge P_2 = 1$  :

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = 1$$

$$P_1(u) \circ V_1(u) + P_2(u) \circ V_2(u) = \text{id} \quad (*)$$

En évaluant on trouve

$$\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$$

De plus

$$P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u) = P(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \ker P_1(u) \subseteq \ker P(u) \\ \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u) \end{cases}$$

$$\ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u)$$

Soit  $x \in \ker P(u)$ , par  $(*)$  on a

$$x = \underbrace{V_1(u) \circ P_1(u)(x)}_{x_2} + \underbrace{V_2(u) \circ P_2(u)(x)}_{x_1}$$

$$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= (P_1 V_2 P_2)(u)(x) \\ &= (V_1 P)(u)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(u)(x_2) &= (P_2 V_1 P_1)(u)(x) \\ &= (V_2 P)(u)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$x = \underbrace{x_1}_{\in \ker P_1(u)} + \underbrace{x_2}_{\in \ker P_2(u)}$$

D'où  $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$ .

Supposons maintenant le résultat pour tout  $P_1, \dots, P_N$  respectant les conditions.

Soient  $P = P_1 \cdots P_{N+1} \in \mathbb{K}[X]$  avec  $P_1, \dots, P_{N+1}$  deux à deux premiers entre eux.

Donc  $Q = P_1 P_2 \cdots P_N$  et  $P_{N+1}$  sont premiers entre eux.

Ainsi

$$\begin{aligned} \ker P(u) &= \ker(P_{N+1} Q)(u) \\ &= \underbrace{\ker Q(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{cas } N=2} \\ &= \underbrace{\bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{H.R.}} \\ &= \bigoplus_{k=1}^{N+1} \ker P_k(u) \end{aligned}$$

# Démonstration annexe du théorème des noyaux

Démonstration secondaire du théorème des noyaux dans le cas d'un polynôme annulateur.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose  $P = \prod_{k=1}^N P_k$  annulateur de  $u$ ,  $P_1, \dots, P_N$  premiers entre eux deux à deux. On pose

$$Q_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N P_i$$

Qui sont premiers dans leur ensemble.

$$\sum_{k=1}^N V_k Q_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^N \underbrace{V_k(u) \circ Q_k(u)}_{\Pi_k} = \text{id} \quad (1)$$

On remarque que

$$P_k(u) \circ \Pi_k = (V_k P_k Q_k)(u) = (V_k P)(u) = 0$$

$$\text{Donc } \text{im } \Pi_k \subseteq \ker P_k(u)$$

Et pour  $k \neq i$ ,  $P \mid Q_i Q_k$  d'où

$$P \mid (V_k P_k)(V_i P_i)$$

$$\Pi_i \circ \Pi_k = 0$$

Donc par (1)

$$\sum_{i=1}^N \Pi_k \circ \Pi_i = \Pi_k \circ \Pi_k = \Pi_k$$

Donc les  $\Pi_k$  sont des projecteurs.

Soit  $x \in \ker P_k(u)$ , pour tout  $i \neq k$ ,  $\Pi_i(x) = 0$ . Par (1)

$$x = \Pi_k(x)$$

$$x \in \text{im } \Pi_k$$

Ainsi

$$\ker P_k(u) = \text{im } \Pi_k$$

$$\ker P_i(u) \subseteq \ker \Pi_k$$

Les  $\Pi_k$  projettent sur  $\ker P_k$ .

## Théorème des noyaux

Soient  $(x_1, \dots, x_N) \in \prod_{k=1}^N \ker P_k(u)$  tels que  $\sum_{k=1}^N x_k = 0$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\Pi_i \left( \sum_{k=1}^N x_k \right) = x_i = 0$$

Donc les  $\ker P_k(u) = \text{im } \Pi_k$  sont en somme directe.

Soit  $x \in \ker P(u) = E$ , par (1)

$$x = \sum_{k=1}^N \Pi_k(x) \in \sum_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

D'où

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Et de plus

$$\text{im } \Pi_k = \ker P_k(u)$$

$$\ker \Pi_k = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \ker P_i(u)$$

$$\Pi_k \in \mathbb{K}[u]$$

# Critère de Diagonalisabilité

Démonstration d'une CNS de diagonalisabilité.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1.  $u$  diagonalisable.
2.  $u$  annule un polynôme SARS.
3.  $\Pi_u$  est SARS

## Démonstration

- (2  $\Leftrightarrow$  3)

$$\begin{aligned} & \exists P \in \mathbb{K}[X], P \text{ SARS et } P(u) = 0 \\ & \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{K}[X], P \text{ SARS et } \Pi_u \mid P \\ & \Leftrightarrow \Pi_u \text{ SARS} \end{aligned}$$

- (3  $\Rightarrow$  1)  $\Pi_u$  SARS donc

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^N (X - \lambda)$$

Par le TDN

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{id}) \\ &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u) \end{aligned}$$

Donc  $u$  diagonalisable.

- (1  $\Rightarrow$  3)  $u$  diagonalisable

$$\mathcal{M}_e(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_M$$

$$P(X) = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k) \text{ SARS}$$

$$\begin{aligned} P(M) &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & P(\lambda_1) & \\ & & & \ddots & \\ & & & & P(\lambda_n) & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc  $\Pi_u \mid P$  SARS.

# Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  un sev stable par  $u$ .

Notons  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

- $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$
- Si  $u$  diagonalisable, alors  $\tilde{u}$  aussi.

## Démonstration

- $\Pi_u(\tilde{u}) = 0$  donc  $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$ .
- Si  $u$  diagonalisable,  $\Pi_u$  est SARS, donc  $\Pi_{\tilde{u}}$  aussi (car divise) donc  $\tilde{u}$  est diagonalisable.

## Sous-espaces cycliques

Définition de sous-espace cyclique et base associé.

Pour un  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $x_0 \in E$  on appelle sous-espace cyclique engendré par  $x_0$  (pour  $u$ )

$$F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$$

Cet espace admet comme base

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Où  $d = \deg \Pi_{u, x_0}$  le polynôme minimal ponctuel, l'unique polynôme unitaire minimal tel que

$$\text{Pour } \theta_{x_0} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow E \\ P & \mapsto P(u)(x_0) \end{cases}$$

$$\ker \theta_{x_0} = \Pi_{u, x_0} \mathbb{K}[X]$$

### Démonstration

$\theta_{x_0} \in \mathcal{L}(E)$ , donc  $\ker \theta_{x_0}$  est un sev, donc un sous-groupe de  $(\mathbb{K}[X], +)$ .

Soit  $P \in \ker \theta_{x_0}, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{aligned} \theta_{x_0}(QP) &= Q(u)(P(u)(x_0)) \\ &= Q(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

Donc  $\ker \theta_{x_0}$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ , qui est principal d'où  $\Pi_{u, x_0}$  existe. Notons  $d_{x_0} = \deg \Pi_{u, x_0}$ .

Par existence et unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \oplus \ker \theta_{x_0}$$

Donc  $\theta_{x_0}|_{\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X]}$  isomorphisme de  $\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \rightarrow \text{im } \theta_{x_0} = F_{x_0}$ .

Donc  $F_{x_0}$  a pour base

$$\begin{aligned} &(\theta_{x_0}(1), \theta_{x_0}(X), \dots, \theta_{x_0}(X^{d_{x_0}-1})) \\ &= (x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0)) \end{aligned}$$

# Endomorphismes cycliques

Définition, propriétés, démonstration autour des endomorphismes cycliques.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on dit que  $u$  est cyclique si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1.  $\exists x_0 \in E, \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}} = E.$
2.  $\exists x_0 \in E, (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  base de  $E.$

## Propriétés en vrac (sans démonstration)

- Si  $u$  cyclique, tout endomorphisme induit l'est aussi.
- Si  $u$  cyclique,  $u$  admet un nombre fini de sev stables.
- Si  $\mathbb{K}$  est infini et  $u$  admet un nombre fini de sev stables, alors  $u$  est cyclique.

## Démonstration équivalence

- $(2 \Rightarrow 1)$  Évident.
- $(1 \Rightarrow 2)$   $F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$  est le sous-espace engendré par  $x_0$  pour  $u$ , donc

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Où  $d = \deg \Pi_{u, x_0}$  en est une base.

Or  $F_{x_0} = E$  par hypothèse, donc  $\dim F_{x_0} = n$  et  $d = n.$

# Vision matricielle de la cyclicité

Lien entre endomorphisme cyclique et matrices de compagnon.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est cyclique ss'il existe une base  $e$  de  $E$  et  $P$  unitaire de degré  $n$  tel que  $\mathcal{M}_e(u) = C_P$ .

Dans ce cas  $\Pi_u = P$ .

## Démonstration

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique pour  $x_0 \in E$ . Notons  $e = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  la base associé.

On dispose alors de  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$  tels que

$$u^n(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$$

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Et alors

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_e(u) &= \begin{matrix} & x_0 & & & & \\ & u(x_0) & & & & \\ & \vdots & & & & \\ & u^{n-1}(x_0) & & & & \end{matrix} \begin{pmatrix} u(x_0) & \cdots & u^n(x_0) \\ 0 & & a_0 \\ 1 & & a_1 \\ & \ddots & 0 \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= C_P \end{aligned}$$

Réciproquement :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array} \right)$$

Alors pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$u(e_k) = u(e_{k+1})$$

$$\text{Donc } e = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

Donc  $u$  est cyclique.

Ainsi :

$$P(u)(x_0) = u^n(x_0) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)}_{u^n(x_0)} = 0$$

Donc pour tout  $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$P(u)(u^m(x_0)) = u^m(P(u)(x_0)) = 0$$

Ainsi  $P(u)$  annule une base, d'où  $\Pi_u \mid P$ .

Or  $\deg \Pi_{u, x_0} = n$  car  $u$  cyclique et  $\Pi_{u, x_0} \mid \Pi_u$ , donc

$$n \leq \deg \Pi_u \leq \deg P = n$$

Et comme  $\Pi_u$  et  $P$  sont unitaires

$$\Pi_u = P$$



# Matrice compagnon

Définition de matrice compagnon.

---

Soit  $P = X^d \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme unitaire. On appelle matrice compagnon de  $P$  la matrice

$$C_P = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{array} \right)$$

Ainsi (en développant selon la dernière colonne)

$$\chi_{C_P}(X) = P(X)$$

# Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , montrer qu'il existe  $x \in E$  tel que  $\Pi_{u,x} = \Pi_u$ .

En déduire que  $u$  cyclique ssi  $\deg \Pi_u = n$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

Avec  $P_1, \dots, P_N$  irréductibles deux à deux distincts.

**Démonstration  $\mathbb{K}$  quelconque**

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker \underbrace{P_k^{d_k}(u)}_{F_k}$$

$$\ker P_k^{d_k-1}(u) \subseteq \ker P_k^{d_k}(u) = F_k$$

Supposons par l'absurde qu'on ai égalité pour un  $k$ .

$$E = \bigoplus_{j \neq k} \ker P_j^{d_j}(u) \oplus \ker P_k^{d_k-1}(u)$$

$$= \ker \underbrace{\left( P_k^{d_k-1} \prod_{j \neq k} P_j^{d_j} \right)}_{\substack{\text{ne peut annuler } u \\ \text{car } \Pi_u \text{ minimal}}}(u)$$

Donc  $\ker P_k^{d_k-1}(u) \subsetneq \ker P_k^{d_k}(u)$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  on dispose de

$$x_k \in F_k \setminus \ker P_k^{d_k-1}(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} P_k^{d_k}(u)(x_k) = 0 \\ P_k^{d_k-1}(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \Pi_{u,x_k} \mid P_k^{d_k} \\ \Pi_{u,x_k} \nmid P_k^{d_k-1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x_k}}_{\text{car } P_k \text{ irréductible}} = P_k^{d_k}$$

On pose  $x = \sum_{k=1}^N x_k$ , alors pour tout  $P \in \Pi_{u,x} \mathbb{K}[X]$

$$P(u)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc  $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ .

**Démonstration  $\mathbb{K}$  infini**

Pour tout  $x \in E$ ,  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$  donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et  $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$  d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \underbrace{\bigcup_{P \in D'} \ker P(u)}_{\text{union finie de sev}}$$

Donc on dispose de  $Q = \Pi_{u,y} \in D'$  tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

Par minimalité de  $\Pi_u$ ,  $\Pi_{u,y} = \Pi_u$ .

**CNS de cyclicité**

On sait que si  $u$  cyclique, alors on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = C_{\Pi_u}$$

Avec  $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$  unitaire de degré  $n$ .

Supposons maintenant que  $\deg \Pi_u = n$ .

On dispose de  $x_0 \in E$  tel que  $\Pi_{u,x_0} = \Pi_u$ , d'où

$$\deg \Pi_{u,x_0} = n = \dim \underbrace{\text{Vect}(u^k(x_0))}_{F_{x_0}}_{k \in \mathbb{N}}$$

D'où  $F_{x_0} = E$  et  $u$  cyclique.

# Théorème de Cayley-Hamilton

Énoncé et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a  $\chi_u(u) = 0$  c'est à dire  $\Pi_u \mid \chi_u$ .

## Démonstration

Soit  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ , on veut montrer  $\chi_u(u)(x_0) = 0$ .

On pose  $F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$  sev de  $E$  stable par  $u$ .

Soit  $\tilde{u}$  endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_{x_0}$ , qui est donc cyclique.

Soit  $d \in \mathbb{N}$  tel que

$$e_0 = (x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Soit une base de  $F_{x_0}$ .

$$\mathcal{M}_{e_0}(\tilde{u}) = C_P = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array} \right)$$

Où

$$\tilde{u}^d(x_0) = u^d(x_0) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x_0)$$

$$P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Or  $P = \chi_{C_P} = \chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$  donc

$$\chi_u(u)(x_0) = Q(u)(P(u)(x_0)) = 0$$

# Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable, CNS pour  $u$  cyclique.
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent, CNS pour  $u$  cyclique.
3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique, montrer que pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = 1$ .
4. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique, montrer que  $\text{Com } u = \mathbb{K}[u]$ .

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$$

Où les  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  sont deux à deux distincts ( $\Pi_u$  SARS).

$u$  cyclique ssi  $N = n = \dim E$ .

- Si  $u$  cyclique,  $\deg \Pi_u = n = N$ .
- Si  $\deg \Pi_u = n$

Soit  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de vecteurs propres associés aux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Posons  $x = \sum_{k=1}^n e_k$ .

$$\mathcal{M}_e(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Matrice de Vandermonde

invertible, d'où

$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  base.

2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice  $q$ .

$$\Pi_u = X^q$$

- Si  $u$  cyclique, alors  $\deg \Pi_u = q = n$ .
- Si  $q = n$ ,  $u^{n-1} \neq 0$ , donc on dispose de  $x_0 \in E$  tel que  $u^{n-1}(x_0) \neq 0$ .

Et  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$  est libre et donc une base.

(En évaluant

$$u^i \left( \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0) \right)).$$

3. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique, donc on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$$\mathcal{M}_e(u - \lambda \text{id}) = \left( \begin{array}{cccc|c} -\lambda & & & & a_0 \\ 1 & -\lambda & & & a_2 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{array} \right)$$

Dont le quadrant inférieur gauche est une sous-matrice inversible de taille  $n - 1$ .

$$\text{rg } (u - \lambda \text{id}) \geq n - 1$$

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) = \dim \ker(u - \lambda \text{id}) \leq 1$$

4. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  cyclique. On dispose de  $x_0 \in E$  tel que

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

Est une base.

On a déjà  $\mathbb{K}[u] \subseteq \text{Com}(u)$ .

Soit  $v \in \text{Com}(u)$ . On dispose de

$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$  tels que

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0)$$

Soit  $m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$

$$v(u^m(x_0)) = u^m(v(x_0))$$

$$= u^m \left( \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(x_0) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k(u^m(x_0))$$

Donc  $v$  et  $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k u^k$  coïncident sur une base, d'où  $v \in \mathbb{K}[u]$ .

# Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , CNS de trigonalisabilité sur  $\Pi_u$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est trigonalisable ssi  $\Pi_u$  scindé.

## Démonstration

- Supposons  $u$  trigonalisable, donc  $\chi_u$  est scindé or  $\Pi_u \mid \chi_u$  donc  $\Pi_u$  est scindé.
- Supposons  $\Pi_u$  scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

Avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}}_{F_k}$$

Pour  $k$  fixé,  $F_k$  est stable par  $u$  et  $u - \lambda_k \text{id}$ , posons  $u_k$  induit par  $u$  sur  $F_k$ .

$u_k - \lambda_k \text{id}$  est nilpotent, donc on dispose de  $e_k$  base de  $F_k$  tel que

$$\mathcal{M}_{e_k}(u_k - \lambda_k \text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & * \\ & \ddots \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Notons  $e$  la base concaténant les bases  $e_1, \dots, e_N$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Où les  $A_1, \dots, A_N$  sont triangulaires.

- (Autre méthode) Par récurrence sur  $n$ .

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons le résultat pour  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $\dim E = n + 1$  et  $\Pi_u$  scindé.

$\Pi_u$  admet au moins une racine  $\lambda$ , on dispose donc de  $x \in E$  vecteur propre associé.

On forme la base  $(\lambda, e_1, \dots, e_{n-1})$  de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = A = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right)$$

Or

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \Pi_u(A) \\ &= \left( \begin{array}{c|ccc} \Pi_u(\lambda) & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \Pi_u(A_1) & \\ 0 & & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

D'où  $\Pi_u(A_1) = 0$  donc  $\Pi_{A_1} \mid \Pi_u$  et  $\Pi_{A_1}$  scindé, donc par hypothèse de récurrence  $A_1$  est trigonalisable.

## Exercice : polynôme caractéristique divisant une puissance du polynôme minimal

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $n = \dim E$ . Montrer que  $\chi_u \mid \Pi_u^n$

Par récurrence forte sur  $n$ .

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons le résultat pour tout  $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

Si  $u$  est cyclique,  $\Pi_u = \chi_u$  d'où  $\chi_u \mid \Pi_u^n$ .

Sinon on prend  $x_0 \in E \setminus \{0\}$ ,  $k = \deg \Pi_{u, x_0} < n$  donc  $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$  est libre, on la complète en une base  $e$  de  $E$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \left( \begin{array}{c|c} C_{\Pi_{u, x_0}} & * \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$

Donc

$$\chi_u = \underbrace{\chi_{C_{\Pi_{u, x_0}}} \chi_A}_{\Pi_{u, x_0}}$$

$$\chi_u \mid \Pi_u \chi_A$$

Or par hypothèse de récurrence  $\chi_A \mid \Pi_A^{n-k}$  et

$$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \left( \begin{array}{c|c} \Pi_u(C_{\Pi_{u, x_0}}) & * \\ \hline 0 & \Pi_u(A) \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } \Pi_A \mid \Pi_u$$

Ainsi

$$\chi_u \mid \Pi_u \Pi_A^{n-k} \mid \Pi_u^{n-k+1} \mid \Pi_u^n$$

# Décomposition en sous espaces caractéristiques

Définition et démonstration de la décomposition en sous-espaces caractéristiques.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé, l'espace  $E$  se décompose en somme directe de sev stables par  $u$  :

$$E = \bigoplus_{k=1}^N F_k$$

Où pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $u_k$  induit par  $u$  sur  $F_k$  vérifie

$$u_k = \lambda_k \text{id} + n_k$$

Où  $n_k$  est nilpotent et  $\lambda_k \in \text{Sp}(u)$ .

Dé plus  $\dim F_k = m_k$  et  $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}$ .

## Cas diagonalisable

Si  $u$  est diagonalisable

$$\dim F_k = m_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$$

$$E_{\lambda_k}(u) = \ker(u - \lambda_k \text{id})$$

$$\subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k} = F_k$$

$$E_{\lambda_k}(u) = F_k$$

## Démonstration

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Où  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

Par le TDN on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}}_{F_k}$$

Les  $F_k$  sont stables par  $u$ , on peut donc poser  $u_k$  induit par  $u$  sur  $F_k$ .

On note  $n_k = u_k - \lambda_k \text{id} \in \mathcal{L}(F_k)$  qui est nilpotent d'ordre inférieur à  $m_k$ .

Soit  $e_k$  base de  $F_k$  tel que

$$\mathcal{M}_{e_k}(n_k) = N_k \in T_{\dim F_k}^{++}(\mathbb{K}).$$

Ainsi  $\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = \lambda_k I_{\dim F_k} + N_k$ .

En concaténant les bases  $(e_k)_k$  en une base  $e$  de  $E$  on trouve

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

D'où

$$\prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$$

$$m_k = \dim F_k$$

## Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal

Lien entre la décomposition en sous-espaces caractéristiques et le polynôme minimal.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé, à fortiori,  $\Pi_u$  est scindé.

$$\begin{aligned}\Pi_u &= \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k} \\ \chi_u &= \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}\end{aligned}$$

On peut décomposer par le TDN sur  $\Pi_u$  et en les espaces caractéristiques

$$\begin{aligned}E &= \bigoplus_{k=1}^N \overbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}}^{F_k} \\ &= \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}}_{G_k}\end{aligned}$$

Or  $d_k \leq m_k$  (car  $\Pi_u \mid \chi_u$ ), d'où

$$\begin{aligned}G_k &= \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k} \\ &\subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k} = F_k\end{aligned}$$

Mais  $\bigoplus_{k=1}^N G_k = \bigoplus_{k=1}^N F_k$  donc  $G_k = F_k$ .

Soit  $q_k \leq d_k$  l'indice de nilpotence de  $n_k = (u - \lambda_k \text{id})|_{F_k}$ .

$$\begin{aligned}F_k &\subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{q_k} \\ &\subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k} = F_k\end{aligned}$$

Posons  $Q = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{q_k}$

$$\begin{aligned}E &= \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k)^{d_k} \\ &= \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k)^{q_k}\end{aligned}$$

Donc par le TDN  $\ker Q(u) = E$ ,  $\Pi_u \mid Q$  donc  $d_k \leq q_k \leq d_k$ .



## Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\Pi_u = X^d Q$  avec  $X \nmid Q$ .

1. Montrer que

$$d = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

2. Montrer que

$$E = \ker u^d \oplus \operatorname{im} u^d$$

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\Pi_u = X^d Q$  avec  $X \nmid Q$ .

1. Notons

$$q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

Soit  $\tilde{u}$  l'induit par  $u$  sur  $\ker u^q$ .

$$\begin{cases} \tilde{u}^q = 0 \\ \tilde{u}^{q-1} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Donc} \quad \Pi_{\tilde{u}} = X^q$$

$$\begin{aligned} X^q \mid \Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u = X^d Q \\ q \leq d \end{aligned}$$

Donc  $\ker u^q = \ker u^d$

$$\ker u^d \circ Q(u) = E$$

$$\operatorname{im} Q(u) \subseteq \ker u^d = \ker u^q$$

$$\ker u^q \circ Q(u) = E$$

$$\begin{aligned} X^d Q \mid X^q Q \\ q \geq d \end{aligned}$$

2. On a (TDN)

$$E = \ker u^d \oplus \ker Q(u)$$

Soit  $y \in \operatorname{im} u^d$ , on dispose donc de  $x \in E$  tel que  $y = u^d(x)$ .

$$y = u^d(x)$$

$$Q(u)(y) = (X^d Q)(u)(x) = 0$$

$$\operatorname{im} u^d \subseteq \ker Q(u)$$

Or par le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{im} u^d &= \dim E - \dim \ker u^d \\ &= \dim \ker Q(u) \end{aligned}$$

D'où  $\operatorname{im} u^d = \ker Q(u)$ .

# Décomposition de Dunford

Définition et démonstration de la décomposition de Dunford.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé.

On dispose de  $d, n \in \mathcal{L}(E)$  tel que

- $u = d + n$
- $d$  diagonalisable
- $n$  nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$

De plus cette décomposition est unique.

Elle peut entre autre servir pour les puissances de matrices :

$$= P \begin{pmatrix} (\lambda_1 I_{m_1} + N_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (\lambda_n I_{m_n} + N_n)^k \end{pmatrix}$$

## Démonstration

On reprend la décomposition en sous-espaces caractéristiques

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker (u - \lambda_k \text{id})^{m_k}}_{F_k}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_k = \ker (u - \lambda_k \text{id})^{d_k}$$

On note  $u_k$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F_k$ .

$$F_k = \ker (u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{D'où } (u_k - \lambda_k \text{id}_{F_k})^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$$

Posons

$$n_k = u_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$\text{Donc } u_k = \lambda_k \text{id}_{F_k} + n_k$$

Où  $n_k$  est nilpotent d'ordre  $d_k$  (cf démonstration sous-espaces caractéristiques).

On pose alors  $d, n \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$d|_{F_k} = \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$n|_{F_k} = n_k$$

Donc  $d$  diagonalisable et  $n$  nilpotent d'ordre  $\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (d_k)$ .

Matriciellement

$$\mathcal{M}_e(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_k} \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{M}_e(n) = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_N \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{K})$$

$$DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N N_N \end{pmatrix} = ND$$

## Unicité

On prend  $p_1, \dots, p_N$  les projecteurs associés à la décomposition (cf. démonstration du TDN)

$$E = \bigoplus_{k=1}^N F_k = \bigoplus_{k=1}^N \ker (u - \lambda_k \text{id})^{d_k}$$

On avait montrer que  $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{K}[u]$ .

On a

$$d = \sum_{k=1}^N \lambda_k p_k \in \mathbb{K}[u]$$

$$n = u - d \in \mathbb{K}[u]$$

Soient  $d', n' \in \mathcal{L}(E)$  respectent les conditions.

Comme  $u = d' + n'$ ,  $d'$  commute avec  $u$  et  $n'$  aussi, donc  $d'$  commute avec  $d \in \mathbb{K}[u]$  et  $n'$  avec  $n \in \mathbb{K}[u]$ .

Ainsi  $d'$  et  $d$  sont codiagonalisables, d'où  $d' - d$  est diagonalisable.

Et  $n - n'$  est nilpotent (binôme de Newton).

Or  $d' + n' = d + n$  d'où

$$\underbrace{d' - d}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{n - n'}_{\text{nilpotent}}$$

D'où  $d' - d = 0$  et  $n' - n = 0$ .

# Codiagonalisabilité

Définition et critère de codiagonalisabilité.

Soient  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  une famille d'endomorphismes.

On dit que les  $(u_i)_i$  sont codiagonalisables s'il existe une base  $e$  de  $E$  tels que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_e(u_i) \in D_n(\mathbb{K})$ .

## Démonstration : deux endomorphismes

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisables tels que  $u \circ v = v \circ u$ .

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u) \quad \text{où} \quad \text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Comme  $u \circ v = v \circ u$ , les  $E_{\lambda_k}(u)$  sont stables par  $v$ .

Soit  $v_k$  l'induit de  $v$  sur  $E_{\lambda_k}(u)$ , qui est diagonalisable car  $v$  l'est.

Pour chaque  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  on dispose de  $e_k$  base de vecteurs propres de  $v_k$  (donc de  $v$  et  $u$ ).

En concaténant on obtient une base qui convient.

## Démonstration famille quelconque

Par récurrence sur  $n = \dim E$ .

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons la propriété pour tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension inférieur à  $n$ .

Soit  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  diagonalisables commutant avec  $\dim E = n + 1$ .

Si tout les  $u_i$  sont des homothéties n'importe quelle base convient.

Sinon on dispose de  $j \in I$  tel que  $u_j$  n'est pas une homothétie.

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u_j) \quad \text{où} \quad \text{Sp}(u_j) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Pour tout  $i \in I$ , les  $E_{\lambda_k}(u_j)$  sont stables par  $u_i$  car  $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ .

Notons  $u_{i,k}$  l'induit de  $u_i$  sur  $E_{\lambda_k}(u_j)$  qui est de dimension inférieur à  $n$  car  $u_j$  n'est pas une homothétie.

Les  $(u_{i,k})_i$  sont donc diagonalisables et commutent entre eux, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On dispose donc de  $e_k$  base de  $E_{\lambda_k}(u_j)$  formée de vecteurs propres commun aux  $(u_i)_i$ . Il suffit alors de les concaténer.

# Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur le commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

- Pour tout  $v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $v \in \text{Com}(u)$  ssi les espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .
- $\dim \text{Com}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\dim E_{\lambda}(u))^2$

## Démonstration

- L'implication directe est évidente.

Supposons  $v \in \mathcal{L}(E)$  qui stabilise les espaces propres de  $u$ .

Pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  soit  $x \in E_{\lambda}(u)$ , d'où  $v(x) \in E_{\lambda}(u)$ .

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= v(\lambda x) = \lambda v(x) \\ u(v(x)) &= \lambda v(x) \end{aligned}$$

Or  $u$  diagonalisable, donc on dispose d'une base de vecteurs propres de  $u$ .

Ainsi  $u \circ v$  et  $v \circ u$  coïncident sur une base d'où l'égalité.

- On note  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

On considère

$$\theta : \begin{cases} \text{Com}(u) \rightarrow \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u)) \\ v \mapsto (v|_{E_{\lambda_1}(u)}, \dots, v|_{E_{\lambda_N}(u)}) \end{cases}$$

Qui est linéaire.

Soit  $v \in \ker \theta$  : pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$v(E_{\lambda_k}(u)) = 0$$

$$\text{Or } E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u)$$

$$\text{Donc } v = 0$$

Soit  $(v_1, \dots, v_k) \in \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u))$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , on note  $e_k$  base de  $E_{\lambda_k}(u)$ .

On définit  $v \in \mathcal{L}(E)$  qui coïncide avec  $v_k$  sur tout les vecteurs de  $E_{\lambda_k}$ .

Ainsi  $\theta(v) = (v_1, \dots, v_k)$ , et  $\theta$  isomorphisme.

$$\begin{aligned} \dim \text{Com}(u) &= \sum_{k=1}^N \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u)) \\ &= \sum_{k=1}^N (\dim E_{\lambda_k}(u))^2 \end{aligned}$$

## Exercice : le bicommutant

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable. On définit le bicommutant de  $u$

$$B(u) = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \mid \begin{array}{l} \forall v \in \text{Com}(u) \\ v \circ w = w \circ v \end{array} \right\}$$

Montrer que  $B(u) = \mathbb{K}[u]$ .

Comme  $u \in \text{Com}(u)$  on remarque

$$\mathbb{K}[u] \subseteq B(u) \subseteq \text{Com}(u)$$

On construit e concatenation de bases des  $E_{\lambda_k}(u)$  pour  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$  et  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

Soit  $w \in B(u) \subseteq \text{Com}(u)$  donc les  $(E_{\lambda_k})_k$  sont stables par  $w$ .

$$M = \mathcal{M}_e(w) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_N \end{pmatrix}$$

Pour tout  $v \in \text{Com}(u)$ ,  $w \circ v = v \circ w$ .

$$A = \mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Or  $AM = MA$  donc

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_k M_k = M_k A_k$$

Ainsi  $M_k$  est une matrice qui commute avec toutes les autres.

On montre facilement grâce à  $E_{ij}$  que  $M_k = \alpha_k I_{m_k}$ .

Par interpolation de Lagrange on dispose de  $P \in \mathbb{K}_{N+1}(X)$  tel que  $P(\lambda_k) = \alpha_k$ . Or

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_e(P(u)) &= \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_N I_{m_N} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{M}_e(w) \end{aligned}$$

D'où  $w \in \mathbb{K}[u]$ .

# Projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable

Définition et propriétés des projecteurs spectraux d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$$

Soient  $p_1, \dots, p_N$  les projecteurs associés à la décomposition

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})}_{E_{\lambda_k}(u)}$$

On a alors pour tout  $i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$p_i|_{E_{\lambda_j}(u)} = \delta_{ij} \lambda_i \text{id}$$

Dans la base  $e$  diagonalisant  $u$  et pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  on a

$$\mathcal{M}_e(P(u)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1)I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N)I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(p_k) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & I_{m_k} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $p_k = L_k(u) \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$  avec  $L_k$  polynôme de Lagrange associés aux  $(\lambda_i)_i$ .

Ainsi pour tout  $q \in \mathbb{N}$

$$u = \sum_{k=1}^N \lambda_k p_k$$

$$u^q = \sum_{k=1}^N \lambda_k^q p_k \in \mathbb{K}_{N-1}[u]$$

# Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur les sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  diagonalisable,  $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ .

1. Si  $G$  sev stable par  $u$  alors

$$G = \bigoplus_{k=1}^N G \cap E_{\lambda_k}(u)$$

2. Réciproquement si  $G_1, \dots, G_N$  sont des sevs de  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_N}(u)$  respectivement alors

$$G = \bigoplus_{k=1}^N G_k$$

Est un sev stable par  $u$ .

## Démonstration

1. Soit  $\tilde{u}$  induit par  $u$  sur  $G$  donc diagonalisable.

$$\begin{aligned} G &= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(\tilde{u})} E_{\lambda}(\tilde{u}) \\ &= \bigoplus_{k=1}^N \ker(\tilde{u} - \lambda_k \text{id}_G) \\ &= \bigoplus_{k=1}^N G \cap \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})}_{E_{\lambda_k}(u)} \end{aligned}$$

2. L'écrire.

# Existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel

Démonstration de l'existence d'une droite ou d'un plan stable dans un espace vectoriel réel.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev et  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  admet une droite ou un plan stable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{m_k}$$

Avec  $P_1, \dots, P_N$  irréductibles deux à deux distincts.

- Si l'un des  $P_k$  est de degré 1.

$$P_k = X - \lambda$$

Et  $\lambda$  est racine de  $\Pi_u$  et est donc une valeur propre de  $u$  d'où l'existence d'une droite stable.

- Si l'un des  $P_k$  est de degré 2.

$$P_k = X^2 - aX - b$$

Supposons par l'absurde que  $\ker P_k(u) = \{0\}$ .

$$\Pi_u(u) = P_k(u) \circ Q(u) = 0$$

D'où  $Q(u) = 0$  qui est absurde car  $\Pi_u$  est minimal.

On dispose donc de  $x \in \ker P_k(u) \setminus \{0\}$ .

$$u^2(x) = au(x) + bx$$

D'où  $F = \text{Vect}(x, u(x))$  stable par  $u$ .

Si  $u(x) = \alpha x$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\alpha^2 x = (a\alpha + b)x$$

$$\alpha \mid X^2 - aX - b$$

Absurde donc  $F$  est un plan.



# Endomorphismes simples

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1. Les seuls sev stables de  $u$  sont  $E$  et  $\{0\}$ .
2.  $\chi_u$  irréductible.
3.  $u$  est dit simple.

## 1. $(2 \Rightarrow 1)$ Par contraposé

Soit  $F$  sev stable par  $u$  de dimension dans  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , et  $\tilde{u}$  l'endomorphisme induit.

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

Avec  $\chi_{\tilde{u}} = \dim F \neq \deg \chi_u$  d'où  $\chi_u$  non irréductible.

## 2. $(1 \Rightarrow 2)$ Par contraposé : Soit $x \in E \setminus \{0\}$ on note

$$F_x = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$$

Qui est stable par  $u$ .

Si  $\deg \Pi_{u,x} = \dim F_x \leq n-1$ , alors  $u$  possède un sev stable non trivial.

Sinon  $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u \mid \chi_u$  tous unitaires de degré  $n$ , donc égaux. Ainsi

$$\Pi_{u,x} = \chi_u = PQ$$

$$y = Q(u)(x)$$

$$\Pi_{u,y} = P$$

D'où  $F_y$  stable non trivial.

# Endomorphismes semi-simples

Définition et propriétés des endomorphismes semi-simples.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il y a équivalence entre

1. Tout sev stable par  $u$  admet un supplémentaire stable.
2.  $\Pi_u$  est sans carrés

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k$$

Avec  $P_1, \dots, P_N$  irréductibles deux à deux distincts.

3.  $u$  est semi-simple.

## Démonstration

1.  $(1 \Rightarrow 2)$  On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

Pour  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ ,  $F = \ker P_k(u)$  admet un supplémentaire stable  $G$ .

Soient  $u_F, u_G$  induit par  $u$  sur  $F$  et  $G$ .

$$\Pi_{u_F} = P_i$$

Car annule et irréductible.

De plus

$$P(u) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in F, P(u)(x) = 0 \\ \forall x \in G, P(u)(x) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{u_F} \mid P \text{ et } \Pi_{u_G} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G} \mid P$$

$$\text{Donc } \Pi_u = \Pi_{u_F} \vee \Pi_{u_G}$$

Ainsi

$$\Pi_{u_G} \mid \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

$$\Pi_u = \Pi_{u_G} \vee P_i$$

Mais

$$G \cap F = \{0\}$$

$$G \cap \ker P_1(u) = \{0\}$$

$$0 \neq P_i(u_G) \in \text{GL}(E)$$

$$P_i \nmid \Pi_{u_G}$$

Ainsi comme  $\Pi_u = P_i \vee \Pi_{u_G}$

$$d_i = 1$$

2.  $(2 \Rightarrow 1)$  Cas  $\Pi_u$  irréductible.

On suppose  $\Pi_u$  irréductible de degré  $d$ .

Donc pour tout  $x \in E \setminus \{0\}$

$$\Pi_{u,x} \mid \Pi_u \text{ d'où } \Pi_u = \Pi_{u,x}$$

$$\text{et } \dim F_x = d$$

Soit  $F$  sev stable par  $u$ , si  $F = E$ ,  $G = 0$  convient.

On dispose alors de  $x_1 \in E \setminus F$ .

Comme  $F$  et  $F_{x_1}$  sont stables par  $u$ ,  $F \cap F_{x_1}$  l'est.

Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in F \cap F_{x_1} \setminus \{0\}$ .

$$\underbrace{F_x}_{\dim d} \subseteq \underbrace{\overbrace{F_{x_1} \cap F}^{\dim d}}_{\dim \leq d}$$

$$F_{x_1} \subseteq F$$

$$x_1 \in F$$

Qui est absurde :  $F \oplus F_{x_1} \subseteq E$ .

Supposons construits  $x_1, \dots, x_k$  tels que

$$\underbrace{F \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^k F_{x_i} \right)}_{F_k \text{ stable}} \subseteq E$$

Si  $F_k = E$  on a fini.

Sinon on choisit  $x_{k+1} \in E \setminus F_k$  et on répète.

$$F_{x_{k+1}} \cap F_k = \{0\}$$

$$F_k \oplus F_{x_{k+1}} \subseteq E$$

$$F \oplus \left( \bigoplus_{i=1}^{k+1} F_{x_i} \right) \subseteq E$$

Qui se termine en au plus  $\lfloor \frac{n}{d} \rfloor$  étapes.

3.  $(2 \Rightarrow 1)$  Cas général.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k$$

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Soit  $F$  sev stable par  $u$ ,  $\tilde{u}$  induit par  $u$  sur  $F$ . Par TDN

$$F = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(\tilde{u})$$

$$= \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{(\ker P_k(\tilde{u})) \cap F}_{F_k}$$

$F_k$  sev de  $E_k = \ker P_k(u)$  stable par  $u_k$  induit par  $u$  sur  $E_k$ .

De plus  $\Pi_{u_k} = P_k$  (annule et irréductible).

Donc par le premier cas on trouve  $G_k$  sev de  $E_k$  stable par  $u$  tel que

$$E_k = G_k \oplus F_k$$

Enfin

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_k = \underbrace{\left( \bigoplus_{k=1}^N F_k \right)}_{F \text{ stable par } u} \oplus \underbrace{\left( \bigoplus_{k=1}^N G_k \right)}_{G \text{ stable par } u}$$

## Exercice : critère de diagonalisabilité sur l'existence de supplémentaires stables

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  scindé. Montrer que  $u$  est diagonalisable ssi tout sev stable par  $u$  admet un supplémentaire stable.

- Supposons  $u$  diagonalisable, soit  $F$  un sev stable par  $u$ .

On dispose donc de  $f = (f_1, \dots, f_d)$  base de  $F$  et  $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de vecteurs propres de  $E$ .

On peut donc compléter la base  $f$  par des vecteurs de  $e$ :

$(f_1, \dots, f_d, e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-d}})$  base de  $E$

Ainsi  $G = \text{Vect}(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-d}})$  est un supplémentaire de  $F$  stable par  $u$ .

- Supposons que tout sev stable par  $u$  admettent un supplémentaire stable.

$$F = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Est un sev stable, et admet donc  $G$  comme supplémentaire stable. Notons  $\tilde{u}$  l'induit sur  $G$  de  $u$ .

$$\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u \text{ scindé}$$

Donc  $\tilde{u}$  admet une valeur propre  $\lambda$  et un vecteur propre  $x \in F \cap G = \{0\}$  qui est absurde. Donc  $G = \{0\}$  et  $F = E : u$  est diagonalisable.

# Endomorphismes de produit de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme  $M \mapsto AM$  et  $M \mapsto MA$  de  $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Posons

$$L_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM \text{ ou } MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K})).$$

Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $M \in M_n(\mathbb{K})$

$$P(L_A)(M) = \begin{cases} P(A)M \\ MP(A) \end{cases} = L_{P(A)}(M)$$

De plus  $L_B = 0 \Rightarrow L_B(I_n) = B = 0$   
d'où

$$P(L_A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$$

C'est à dire  $\Pi_{L_A} = \Pi_A$

On en déduit

- $L_A$  est nilpotent ssi  $A$  l'est et est de même ordre.
- $L_A$  est diagonalisable ssi  $A$  l'est.
- $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(L_A)$

De plus pour  $\lambda \in \text{Sp}(A)$

$$\dim E_\lambda(L_A) = n \dim E_\lambda(A)$$

## Démonstration

- Pour  $L_A(M) = AM$

Soit  $M = (C_1, \dots, C_n) \in M_n(\mathbb{K})$

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(L_A) &\Leftrightarrow AM = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, AC_j = \lambda C_j \\ &\Leftrightarrow \{C_1, \dots, C_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$ .

- Pour  $L_A(M) = MA$

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

$$\begin{aligned} M \in E_\lambda(L_A) &\Leftrightarrow MA = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, AL_i = \lambda L_i \\ &\Leftrightarrow \{L_1, \dots, L_n\} \subseteq E_\lambda(A) \end{aligned}$$

Ainsi  $E_\lambda(L_A) \simeq E_\lambda(A)^n$ .

# Endomorphisme différence de produits de matrices

Propriétés sur l'endomorphisme  
 $\varphi : M \mapsto AM - MB$  in  $\mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , tel que  $\chi_A$  scindé et  $B$  admet au moins une valeur propre. ( $\mathbb{K}$  algébriquement clos suffit).

Posons

$$\varphi : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM - MB \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

Il y a équivalence entre

1.  $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ .
2.  $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ .
3.  $\varphi$  injectif.
4.  $\varphi$  est un automorphisme.

De plus on a

- $\text{Sp}(\varphi) = \{\lambda - \mu, (\lambda, \mu) \in \text{Sp}(A) \times \text{Sp}(B)\}$

**Démonstration**

- (3  $\Leftrightarrow$  4) Argument dimensionnel.
- (1  $\Rightarrow$  2) Pour tout  $\lambda \in \text{Sp}(A)$

$$\lambda \notin \text{Sp}(B)$$

$$\ker(B - \lambda I_n) = E_\lambda(B) = \{0\}$$

$$B - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

Ainsi

$$\chi_A(B) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (B - \lambda I_n)^{m_\lambda} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$$

- (2  $\Rightarrow$  3) Soit  $M \in \ker \varphi$

$$AM = MB$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, A^k M = MB^k$$

$$0 = \chi_A(A)M = \underbrace{\chi_A(B)}_{\in \text{GL}_n(\mathbb{K})} M$$

$$M = 0$$

- (3  $\Rightarrow$  1) Par contraposé, supposons qu'on dispose de  $\lambda \in \text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B)$ .

On sait que  $\chi_B = \chi_{B^\top}$  donc toute valeur propre de  $B$  est valeur propre de  $B^\top$ .

Soit  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\begin{aligned} \varphi(XY^\top) &= AXY^\top - XY^\top B \\ &= AXY^\top - X(B^\top Y)^\top \\ &= \lambda XY^\top - \lambda XY^\top \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or  $XY^\top \neq 0$  d'où  $\varphi$  non injective.

- Soit  $\lambda \in \text{Sp}(A), \mu \in \text{Sp}(B)$ .  $X, Y$  vecteurs propres non nuls de  $A$  et  $B^\top$ .

$$\begin{aligned} \varphi(XY^\top) &= AXY^\top - XY^\top B \\ &= \lambda XY^\top - \mu XY^\top \\ &= (\lambda - \mu)XY^\top \end{aligned}$$

D'où  $\lambda - \mu \in \text{Sp}(\varphi)$

- Soit  $\alpha \in \text{Sp}(\varphi)$ ,  $M$  vecteur propre non nul associé.

$$\begin{aligned} \varphi(M) &= AM - MB = \alpha M \\ \underbrace{(A - \alpha I_n)M}_{\tilde{A}} - MB &= 0 \end{aligned}$$

Avec  $\chi_{\tilde{A}}$  scindé (pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ ,  $\lambda - \alpha$  est valeur propre de  $\tilde{A}$ )

Posons  $\varphi' : N \mapsto \tilde{A}N - NB$

$$\varphi'(M) = 0$$

Donc  $\varphi'$  non injectif d'où

$$\{\mu\} \subseteq \text{Sp}(\tilde{A}) \cap \text{Sp}(B) \neq \emptyset$$

Ainsi  $\alpha + \mu \in \text{Sp}(A)$ .

# Endomorphisme commutateur de matrices

Propriétés sur les endomorphismes de la forme  $M \mapsto AM - MA \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $\chi_A$  scindé.

$$\varphi_A : \begin{cases} M_n(\mathbb{K}) & \rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto AM - MA \end{cases} \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{K}))$$

On a les propriétés de  $M \mapsto AM - MB$ , et de plus

- Si  $A$  est nilpotent alors  $\varphi_A$  l'est.
- Si  $A$  est diagonalisable alors  $\varphi_A$  aussi.

## Démonstration

- Supposons  $A$  nilpotent d'ordre  $q$ . Posons

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{K}) &\rightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ L_A : M &\mapsto AM \\ R_A : M &\mapsto MA \end{aligned}$$

On sait que  $L_A$  et  $R_A$  sont nilpotents d'ordre  $q$  car  $A$  l'est.

De plus  $L_A \circ R_A = AMA = R_A \circ L_A$  d'où

$$\varphi_A = L_A - R_A$$

$$\varphi_A^{2q} = \sum_{k=0}^{2q} \binom{2q}{k} (-1)^k R_A^k \circ L_A^{2q-k} = 0$$

- Supposons  $A$  diagonalisable.

On sait que  $L_A$  et  $R_A$  commutent et sont diagonalisables, donc ils sont codiagonalisables :

$$\varphi_A = L_A - R_A$$

Est diagonalisable.

# Endomorphismes nilpotents cycliques

Caractérisation des sev stables par un endomorphisme nilpotent cyclique.

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent cyclique.

Les seuls sev de  $E$  stables par  $u$  sont les  $(\ker u^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ .

## Démonstration

Ils sont stables comme  $\ker$  d'un endomorphisme commutant avec  $u$ .

Soit  $F$  sev stable par  $u$ . Soit  $\tilde{u}$  induit par  $u$  sur  $F$  qui est nilpotent car  $\tilde{u}^n = 0$ .

Or l'ordre de nilpotence de  $\tilde{u}$  est majoré par  $d = \dim F : \tilde{u}^d = 0$ .

Donc  $F \subseteq \ker u^d$ .

De plus par les noyaux itérées

$$\underbrace{\ker u}_{\dim 1} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\ker u^d}_{\dim d} \subsetneq \cdots \subsetneq \underbrace{\ker u^n}_{\dim n}$$

D'où  $F = \ker u^d$ .

# Produit de Kronecker et diagonalisabilité

Diagonalisabilité du produit de Kronecker de matrices (dimension  $2n$ ).

Soit  $L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On pose le produit de Kronecker

$$M = L \otimes A = \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K})$$

Alors

- Si  $L$  est diagonalisable,  $M$  est diagonalisable ssi  $A$  l'est.
- Si  $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $M$  est diagonalisable ssi  $A = 0$ .

## Démonstration

- On suppose  $L$  diagonalisable :

$$L = P \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \quad P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{K}) \\ P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

On remarque

$$Q = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \\ Q' = P \otimes I_n = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix} \\ QQ' = \begin{pmatrix} I_n & \\ & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

$$Q'MQ = \begin{pmatrix} a'I_n & b'I_n \\ c'I_n & d'I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha A & \beta A \\ \gamma A & \delta A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \lambda A & \\ & \mu A \end{pmatrix}$$

Donc  $M$  est diagonalisable ssi  $A$  l'est.

- Pour  $L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$M^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \quad (\text{récurrence})$$

Donc pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

Si  $M$  est diagonalisable,  $\Pi_M$  est SARS.

$$\Pi_M(M) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Pi_M(A) = 0 \\ A\Pi_M(A) = 0 \end{cases}$$

Comme  $\Pi_M(A) = 0$ ,  $A$  est diagonalisable.

Or  $\Pi_M$  est SARS :  $\Pi_M \wedge \Pi_{M'} = 1$  donc  $P' \wedge \Pi_A = 1$  car  $\Pi_A \mid \Pi_M$ .

Donc  $\Pi_{M'}(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $A\Pi_{M'}(A) = 0$  d'où  $A = 0$ .



## Cotrigonalisation

Critère de Cotrigonalisabilité d'une famille d'endomorphismes.

Soit  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  une famille d'endomorphismes

trigonalisables qui commutent.

Il existe une base  $e$  de  $E$  tel que pour tout  $i \in I$ ,  $\mathcal{M}_e(u_i)$  soit triangulaire supérieure.

### Démonstration : structure

On voudra toujours

1. Trouver un vecteur propre commun
2. Faire une récurrence sur la dimension.

Faisons d'abord la 2<sup>e</sup> étape dans le cas général :

Supposons que toute famille  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  d'endomorphismes trigonalisables qui commutent admette un vecteur propre commun.

Cas  $n = 1$  évident.

Supposons la propriété sur tout  $\mathbb{K}$ -ev de dimension strictement inférieur à  $n$ .

Soit  $e_1$  vecteur propre commun aux éléments de  $(u_i)_i$  associé aux valeurs propres  $(\lambda_i)_i \in \mathbb{K}^I$ .

On complète  $e_1$  en la base  $(e_1, \dots, e_n)$ . Pour tout  $i \in I$

$$\mathcal{M}_e(u_i) = \left( \begin{array}{c|c} \lambda_i & * \\ \hline 0 & A_i \end{array} \right) \quad \chi_{u_i} = \chi_{A_i}(X - \lambda)$$

Or  $\chi_{u_i}$  scindé donc  $\chi_A$  scindé :  $\chi_A$  est trigonalisable.

De plus les  $(A_i)_i$  commutent car mes  $(u_i)_i$  aussi.

Par hypothèse de récurrence on conclut.

### Démonstration : deux endomorphismes

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  trigonalisables qui commutent.

Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $E_\lambda(u) \neq \{0\}$  est stable par  $v$ .

Notons  $\tilde{v}$  induit par  $v$  sur  $E_\lambda(u)$ , qui est encore trigonalisable, et admet donc un vecteur propre  $e_1$ .

Puis récurrence.

### Démonstration : famille finie

Par récurrence sur  $d$  cardinal de la famille.

Cas 1 et 2 endomorphismes traités.

On suppose que toute famille de cardinal inférieur à  $d$  admet un vecteur propre commun.

Soit  $u_1, \dots, u_{d+1} \in \mathcal{L}(E)$  trigonalisables qui comutent.

Soit  $x$  vecteur propre commun aux  $u_1, \dots, u_d$  associé aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{K}$ .

$$\{x\} \in F = \bigcap_{k=1}^d \underbrace{E_{\lambda_k}(u_k)}_{\text{stable par } v} \neq \emptyset$$

Donc  $F$  est stable par  $v$ , on peut donc y induire  $\tilde{v}$  qui est

trigonalisable et admet donc  $e_1$  vecteur propre commun aux

$u_1, \dots, u_{d+1}$ .

### Démonstration : famille infinie

Soit  $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$  une famille quelconque d'endomorphismes trigonalisables qui commutent.

$\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$  est un sev de  $\mathcal{L}(E)$  et admet donc une base  $u_{i_1}, \dots, u_{i_d}$ .

C'est une famille finie, donc cotrigonalisable dans une base  $e$ .

Et pour tout  $i \in I$ ,  $u_i \in$

$\text{Vect}(u_{i_1}, \dots, u_{i_d})$  donc  $\mathcal{M}_e(u_i)$  est triangulaire supérieur (comme combinaison linéaire de matrices qui le sont).

## Exercice : polynôme caractéristique d'une somme d'endomorphismes

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie,  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  qui commutent, tel que  $v$  est nilpotent.

Montrer que  $\chi_{u+v} = \chi_u$  (Exercice 106).

Deux perspectives

1. Comme  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev,  $u$  et  $v$  sont trigonalisables, et commutent, donc sont cotrigonalisable.

Ainsi on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(u + v) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\chi_{u+v} = \chi_u$$

## Exercice : commutateur qui vaut l'un des opérande

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev (car  $\mathbb{K} = 0$ ) et  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $uv - vu = u$ .

1. Montrer que  $u$  est nilpotent.
2. Montrer que si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ,  $u$  et  $v$  sont cotrigonalisable.

1. Deux méthodes :

- On considère

$$\varphi_v : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow & \mathcal{L}(E) \\ w & \mapsto & wv - vw \end{cases}$$

$$\varphi_v(u^k) = ku^k$$

Donc si  $u^k \neq 0$ ,  $k \in \text{Sp}(\varphi_v)$  qui est fini, donc on dispose de  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^k = 0$ .

- On remarque

$$P(u)v - vP(u) = uP'(u)$$

En particulier pour  $P = \Pi_u$

$$0 = u\Pi'_u(u)$$

$$\underbrace{\Pi_u}_{\deg d} \mid \underbrace{X\Pi'_u}_{\deg d}$$

$$X\Pi'_u = c\Pi_u$$

Donc

$$dX^d + \sum_{k=0}^{d-1} ka_k X^k = cX^d + \sum_{k=0}^{d-1} ca_k X^k$$

$$c = d$$

$$\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, da_k = ka_k$$

$$\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, a_k = 0$$

$$\Pi_u = X^d$$

2. Comme  $u$  est nilpotent,

$$\text{Sp}(u) = \{0\}.$$

$$(uv - vu)(\ker u) = u(\ker u)$$

$$u(v(\ker u)) = 0$$

$$v(\ker u) \subseteq \ker u$$

Donc  $\ker u$  est stable par  $v$ , posons  $\tilde{v}$  induit sur  $\ker u$ . Or  $\tilde{v}$  admet un vecteur propre commun  $x \in \ker u = E_0(u)$ .

Ainsi par récurrence sur la dimension de  $E$  :

Supposons la propriété pour tout  $\mathbb{C}$ -ev de dimension inférieur strictement à  $n$ .

Soit  $e_1$  vecteur propre commun à  $u$  et  $v$  associé aux valeurs propres 0 et  $\lambda$ .

Soit  $e' = (e_1, e'_2, \dots, e'_n)$  base de  $E$ .

$$\mathcal{M}_{e'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{e'}(v) = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

Et  $AB - BA = A$  car  $uv - vu = u$  donc on dispose de

$(e_2, \dots, e_n)$  qui cotrigonalisent  $A$  et  $B$ .

# Exercice : critère de nilpotence sur la trace des puissances

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $n$  ( $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ ).

1. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , montrer que  $u$  est nilpotent ssi pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{tr}(u^k) = 0$ .
2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\text{tr } u^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$$

Montrer que

$$\chi_u = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

Dans les deux cas,  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$ , donc  $u$  est trigonalisable dans  $\mathbb{C}$ .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \mu_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} = D$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \text{tr } u^k = \text{tr } D^k = \sum_{i=1}^n \mu_i^k$$

Posons  $\{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$  deux à deux distincts.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^d (X - \alpha_k)^{m_k}$$

$$\text{tr } u^k = \sum_{i=1}^d m_i \alpha_i^k \quad (*)$$

1. Par l'absurde : on suppose  $d \geq 2$  et  $\alpha_1 = 0$  (éventuellement  $m_1 = 0$ ).

Par (\*) :

$$\forall P \in X\mathbb{K}[X], \quad \sum_{k=1}^d m_k P(\alpha_k) = 0$$

Ainsi par interpolation de lagrange : pour  $i \in \llbracket 2, d \rrbracket$ ,

$$P(\alpha_i) = 1$$

$$\forall j \neq i, \quad P(\alpha_j) = 0$$

$$P(\alpha_i) = P(0) = 0 \text{ d'où } X \mid P$$

$$\sum_{k=1}^d m_k P(\alpha_k) = m_i = 0$$

2. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k$$

On considère  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \cup \{\mu_1, \dots, \mu_n\} = \{\beta_1, \dots, \beta_N\}$  deux à deux distincts.

Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$n_i = |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \mu_k = \beta_i\}|$$

$$m_i = |\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_k = \beta_i\}|$$

Donc pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^N n_i \beta_i^k = \sum_{i=1}^N m_i \beta_i^k$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{i=1}^N (n_i - m_i) \beta_i^k = 0$$

Or  $V(\beta_1, \dots, \beta_N) \neq 0$  d'où  $m_i = n_i$ .

# Calcul de puissance de matrice : cas diagonalisable

Méthodes de calcul des puissances d'une matrice diagonalisable.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  diagonalisable.

## 1. Matrice diagonale :

On dispose de  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  (à calculer) tel que

$$A = P \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$A^k = P \begin{pmatrix} \alpha_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

## 2. Lagrange : notons $d = \deg \Pi_A$

$$A^k \in \mathbb{K}[u] = \text{Vect}(I_n, A, \dots, A^{d-1})$$

Donc on dispose de  $P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$  tel que  $A^k = P(A)$ .

Explicitons le :

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^N E_{\lambda_i}$$

Soit  $X \in \mathbb{K}^n$

$$X = \underbrace{X_1}_{\in E_{\lambda_1}} + \dots + \underbrace{X_d}_{\in E_{\lambda_d}}$$

$$AX = \lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_d X_d$$

$$A^k X = \lambda_1^k X_1 + \dots + \lambda_d^k X_d$$

$$P(A)X = P(\lambda_1)X_1 + \dots + P(\lambda_d)X_d$$

Ainsi avec  $P$  construit par interpolation de Lagrange afin de vérifier

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, P(\lambda_i) = \lambda_i^k$$

$$P \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

On a alors  $P(A)X = A^k X$  pour tout  $X$ , d'où  $P(A) = A^k$ .

# Calcul de puissance de matrice : polynôme annulateur

Méthodes de calcul des puissances d'une matrice grâce à un polynôme annulateur.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$  annulateur de degré  $d$ .

$$X^k = QP + R$$

$$A^k = \underbrace{QP(A)}_0 + R(A)$$

Avec  $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$ .

Si  $P = (X - \lambda)^m$  on trouve le reste de la division euclidienne grâce à la formule de Taylor :

$$Q = \overbrace{\sum_{k=0}^{m-1} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^k}^{\text{reste}}$$

$$+ \underbrace{(X - \lambda)^m \sum_{k=m}^{\deg Q} \frac{Q^{(k)}(\lambda)}{k!} (X - \lambda)^{k-m}}_{\text{quotient}}$$

$$A^p = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{p}{k} \lambda^{p-k} (A - \lambda I_n)^k$$

# Équations matricielles

Méthodes de résolutions d'équations matricielles.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

On cherche à résoudre les équations de la forme

$$P(M) = A$$

## Idées

- $MA = AM$  car  $A \in \mathbb{K}[M]$ .
- Ainsi  $M$  laisse stable
  - Les sous-espaces propres de  $A$
  - Les sous-espaces caractéristiques de  $A$
  - Tout les  $\ker Q(A)$
- Pour  $Q$  annulateur de  $A$ ,  $Q \circ P$  est annulateur de  $M$  : si  $Q \circ P$  est SARS,  $M$  est diagonalisable.

## Résolutions cas simple

Si  $\chi_A$  SARS :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

$$A = R \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} R^{-1}$$

$$R = (C_1 \ \cdots \ C_n)$$

Avec  $C_1, \dots, C_n$  vecteurs propres associés aux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Si  $M$  est solution,  $M$  laisse stable tout les  $E_{\lambda_k} = \text{Vect}(C_k)$

$$MC_k = \mu_k C_k$$

$$M = R \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} R^{-1}$$

Or

$$P(M) = R \begin{pmatrix} P(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\mu_n) \end{pmatrix} R^{-1}$$

$$= A$$

D'où  $P(\mu_k) = \lambda_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

# Racine k-ème de matrices

Méthodes général de résolution de l'équation  $M^p = A$ .

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

- Si  $A$  est nilpotent : il peut ne pas exister de solutions, par exemple :

Si  $A$  nilpotent d'ordre  $n$  et  $p \geq 2$

$$A^n = (M^p)^n = 0$$

D'où  $M$  nilpotent

$$M^n = A^{\lceil \frac{n}{p} \rceil} = 0$$

Absurde.

- Cas  $A = I_n + N$  avec  $N$  nilpotent.

Idée : DL de  $(1 + x)^{\frac{1}{k}}$

$$(1 + x)^{\frac{1}{k}} = P_k(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1})$$

$$P_k(X) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=0}^{n-1} \left( \frac{1}{k} - i \right) \frac{x^j}{j!} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

$$\begin{aligned} 1 + x &= (P_k(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1}))^k \\ &= Q_k(x) + o_{x \rightarrow 0}(x^{n-1}) \end{aligned}$$

Par unicité de la partie principale du DL :

$$1 + X = Q_k(X)$$

Où  $Q_k$  est  $P_k^k$  tronqué à  $n - 1$  termes

$$1 + X = P_k^k(X) - X^n R_k(X)$$

$$A = I_n + N = P_k^k(N) - \underbrace{N^n R_k(N)}_0$$

D'où  $P_k(N)$  est solution.

- Cas  $A \in M_n(\mathbb{C})$  tel que  $0 \notin \text{Sp}(A)$  : Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$\chi_A = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} + N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q I_{m_q} + N_q \end{pmatrix} P^{-1}$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ , on dispose de  $\tilde{M}_j$  et  $\mu_j$  tels que

$$\mu_j^k = \lambda_j$$

$$\tilde{M}_j^k = I_{m_j} + \frac{1}{\lambda_j} N_j$$

On définit alors

$$M_j = \mu_j \tilde{M}_j$$

$$\begin{aligned} M_j^k &= \mu_j^k I_{m_j} + \frac{\mu_j^k}{\lambda_j} N_j \\ &= \lambda_j I_{m_j} + N_j \end{aligned}$$

Ainsi

$$M = P \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_q \end{pmatrix} P^{-1}$$

Est solution :

$$\begin{aligned} M^k &= P \begin{pmatrix} M_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & M_q^k \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= A \end{aligned}$$



## Exercice : lien entre diagonalisabilité d'un endomorphisme et son carré

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  où  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev, montrer que

$$u \text{ diagonalisable} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 \text{ diagonalisable} \\ \ker u = \ker u^2 \end{cases}$$

- Supposons  $u$  diagonalisable, on dispose de  $e$  base de  $E$  tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \\ \mathcal{M}_e(u^2) = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 \end{pmatrix}$$

D'où  $u^2$  diagonalisable, et de plus  $\ker u \subseteq \ker u^2$ .

Posons  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \\ \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n \neq 0$$

On a bien  $\ker u^2 = \ker u$  (Vision matricielle).

- Supposons  $0 \notin \text{Sp}(u)$ ,  $u^2$  diagonalisable et  $\ker u^2 = \ker u$ .

$$\Pi_{u^2} = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)$$

$$\Pi_{u^2}(u^2) = \prod_{k=1}^q (X - \delta_k)(X + \delta_k)(u) = 0$$

Avec  $\delta_k^2 = \lambda_k$ . Ainsi  $u$  est annuler par un polynôme SARRS, donc diagonalisable.

- Supposons  $0 = \lambda_1 \in \text{Sp}(u)$ ,  $u^2$  diagonalisable et  $\ker u^2 = \ker u$ .

$$E = \bigoplus_{k=1}^q \ker(u^2 - \lambda_k \text{id}) \\ = \bigoplus_{k=2}^q \ker(u^2 - \lambda_k \text{id}) \oplus \ker u^2 \\ = \bigoplus_{k=2}^q \ker(u - \delta_k \text{id})(u + \delta_k \text{id}) \\ \oplus \underbrace{\ker u^2}_{\ker u}$$

D'où  $u$  diagonalisable.

## Recherche d'hyperplans stables

Méthodes de recherche  
d'hyperplans stables.

---

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $H$  hyperplan de  $\mathbb{K}^n$ .

On dispose de  $L \in M_{1n}(\mathbb{K})$  tel que

$$H = \{X \in \mathbb{K}^n \mid LX = 0\} = \ker L$$

$H$  est stable par  $A$  ssi

$$L^T \text{ vecteur propre de } A^T$$

### Démonstration

$$AH \subseteq H \Leftrightarrow \ker L \subseteq \ker LA$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, LA = \lambda L$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}, A^T L^T = \lambda L^T$$

# Pseudo-commutativité du polynôme caractéristique

Pour  $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ ,  
lien entre  $\chi_{AB}$  et  $\chi_{BA}$ .

Soient  $A \in M_{pn}(\mathbb{K})$  et  $B \in M_{np}(\mathbb{K})$ .

$$AB \in M_p(\mathbb{K}) \quad BA \in M_n(\mathbb{K})$$

$$X^n \chi_{AB} = X^p \chi_{BA}$$

$$\text{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \text{Sp}(BA) \setminus \{0\}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

$$\dim E_\lambda(AB) = \dim E_\lambda(BA)$$

Si  $p = n$  ( $A$  et  $B$  sont carrés) alors

$$\chi_{AB} = \chi_{BA}$$

## Démonstration

• Cas  $A = J_r$  :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad B = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array} \right)$$

$$AB = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad BA = \left( \begin{array}{c|c} B_1 & 0 \\ \hline B_3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\chi_{AB} = \chi_{B_1} X^{p-r}$$

$$\chi_{BA} = \chi_{B_1} X^{n-r}$$

• Cas général :  $A = PJ_rQ$

$$AB = PJ_rQB$$

$$= P(J_rQB P)P^{-1}$$

$$BA = BPJ_rQ$$

$$= Q^{-1}(QB P J_r)Q$$

Donc

$$X^n \chi_{AB} = X^n \chi_{J_rQB P}$$

$$= X^p \chi_{QB P J_r} = X^p \chi_{BA}$$

• Pour tout  $X \in E_\lambda(AB)$

$$ABX = \lambda X$$

$$BABX = \lambda BX$$

$$BX \in E_\lambda(BA)$$

Ainsi

$$\theta : \begin{cases} E_\lambda(AB) & \rightarrow E_\lambda(BA) \\ X & \mapsto BX \end{cases}$$

Est linéaire injectif, donc

$$\dim E_\lambda(BA) \geq \dim E_\lambda(AB)$$

Avec égalité par symétrie.

# Réduction de matrice dans rang 1

Propriétés de réduction de matrices de rang 1.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  tel que  $\text{rg } A = 1$ .

1. On dispose de  $L \in M_{1n}(\mathbb{K})$ ,  $C \in M_{n1}(\mathbb{K})$  tels que  $A = CL$ .
2.  $A^2 = (\text{tr } A)A$ .
3.  $X(X - \text{tr } A)$  annule  $A$ .
4. Si  $\text{tr } A \neq 0$ ,  $A$  est diagonalisable.
5. Si  $\text{tr } A = 0$ ,  $A$  est nilpotente.

## Démonstration

1. Comme  $\text{rg } A = \text{rg } (C_1 \cdots C_n) = 1$ , on dispose de  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\{C_1, \dots, C_n\} \subseteq \text{Vect}(C_k)$  :

$$A = (C_1 \cdots C_n) = C_k(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \\ = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_C \underbrace{(\alpha_1 \cdots \alpha_n)}_L$$

2.  $A^2 = C \underbrace{LCL}_{\text{tr } A} = (\text{tr } A)A$

3. Évident.

4. Si  $\text{tr } A \neq 0$ ,  $A$  est annuler par  $X(X - \text{tr } A)$  SARS donc  $A$  est diagonalisable.

5. Si  $\text{tr } A = 0$ ,  $X^2$  annule  $A$ , donc  $A$  est nilpotente.

# Suites récurrentes linéaires

Propriétés, méthodes d'étude de suites récurrentes linéaires.

Pour tout  $(x_0, \dots, x_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on définit la suite  $(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$x_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k x_{n+k} \quad (*)$$

$$\mathcal{S} = \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid (*) \right\}$$

$$\dim \mathcal{S} = p$$

Où  $\mathcal{S}$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-1} \end{pmatrix} = C_P^T$$

$$P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

Ainsi si  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{pmatrix}$

$$AX_n = X_{n+1}$$

$$X_n = A^n X_0$$

Si  $\chi_A$  est SARS

$$\chi_A = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$$

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left( (\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$$

**Démonstration**

• Si  $P = \chi_{C_P} = \chi_A$  est SARS

$$X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)$$

$A$  est diagonalisable comme  $\chi_A$  est SARS

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p \end{pmatrix} Q^{-1}$$

$$A^n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n \Pi_k$$

Où les  $\Pi_k$  sont les projecteurs issus de la décomposition en sous-espaces propres.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n+p} \end{pmatrix} = X_n = A^n X_0$$

$$= \sum_{k=1}^p \lambda_k^n \Pi_k X_0$$

$$x_n = \sum_{k=1}^p \lambda_k^n \gamma_k$$

$$(x_n)_n = \sum_{k=1}^p \gamma_k (\lambda_k^n)_n$$

$$\in \text{Vect} \left( (\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$$

Soit  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$

$$\chi_A(\lambda_k) = 0$$

$$\text{Donc } \lambda_k^p = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \lambda_k^i$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_k^{p+n} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i \lambda_k^{n+i}$$

$$(\lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}$$

• Sinon

$$P = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)^{m_k}$$

Posons

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \rightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (y_n)_n & \mapsto & (y_{n+1})_n \end{cases}$$

Ainsi on a

$$\mathcal{S} = \ker P(\delta)$$

$$= \bigoplus_{k=1}^q \ker (\delta - \lambda_k)^{m_k}$$

► Montrons que  $(n^d \lambda_k^n)_n \in \ker (\delta - \lambda_k \text{id})^{m_k} \subseteq \ker P(\delta) = \mathcal{S}$  :

Définissons d'abord

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

On remarque que

$$P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k [(X+1)^k - X^k]$$

$$= \sum_{k=0}^d a_k \left[ \sum_{i=0}^{k-1} \underbrace{X^{k-1-i} X^i}_{\deg \leq k-1} \right]$$

$$\deg \Delta(P) \leq \deg P - 1$$

Ainsi  $\Delta^{d+1} P = 0$ .

Alors pour tout  $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $P \in \mathbb{K}_{m_k-1}[X]$

$$(\delta - \lambda_k \text{id})(P(n) \lambda_k^n)_n$$

$$= ([P(n+1) - P(n)] \lambda_k^{n+1})_n$$

$$= (\Delta(P)(n) \lambda_k^{n+1})_n$$

Donc

$$(\delta - \lambda_k)^{m_k} (P(n) \lambda_k^n)_n$$

$$= (\Delta^{m_k}(P)(n) \lambda_k^{n+1})_n$$

$$= 0$$

Ainsi pour  $P(X) = X^d$  avec  $d \in \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket$ ,

$$(n^d \lambda_k^n)_n \in \ker (\delta - \lambda_k \text{id})^{m_k}$$

► Montrons que la famille  $\left( (n^d \lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{d \in \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket}$  est libre.

Notons  $u_d = (n^d \lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Supposons

$$\sum_{i=0}^{m_k-1} \gamma_i u_i = 0$$

Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\left( \sum_{i=0}^{m_k-1} \gamma_i n^i \right)}_{P_k(n)} \underbrace{\lambda_k^n}_{\neq 0} = 0$$

Et  $P_k$  est un polynôme qui s'annule sur  $\mathbb{N}$  entier, et est donc nul.

Donc on dispose de bases des  $\ker (\delta - \lambda_k \text{id})^{m_k}$

$$\mathcal{S} = \text{Vect} \left( (n^d \lambda_k^n)_{n \in \mathbb{N}} \right)_{\substack{d \in \llbracket 0, m_k - 1 \rrbracket \\ k \in \llbracket 1, q \rrbracket}}$$

# Formule de newton

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x, a, b \in \mathbb{C}$

$$x^n - 1 = ?$$

$$a^n - b^n = ?$$

---

$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

# Formules sur les coefficients binomiaux

Soit  $k, n, p \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = ? \qquad \binom{n}{n} = ?$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = ? \qquad k \binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{n}{n-k} = ? \qquad \binom{k}{p} \binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = ?$$

Soit  $k, n, p \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{k}{p} \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

# Formule du crible

Formule du crible : soit

$$A_1, \dots, A_n \subseteq E$$

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = ?$$

Soit  $A_1, \dots, A_n \subseteq E$

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|$$



## Majorant, borne supérieure, élément maximale

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A \subseteq E$ , définitions de

- Majorant
- Maximum
- Borne supérieure
- Élément maximale

Soit  $(E, \leq)$  un ensemble ordonné et  $A \subseteq E$ .

**Majorant**  $M \in E$  est un majorant de  $A$  si  $\forall x \in A, x \leq M$

**Maximum**  $M$  est le maximum de  $A$  si  $M$  est un majorant de  $A$  et  $M \in A$ . S'il existe il est unique.

**Borne supérieure**  $B$  est la borne supérieure de  $A$  si  $B$  est le plus petit majorant de  $A$  :  
 $\forall M \in E, (\forall x \in A, x \leq M) \Rightarrow B \leq M$ . Si elle existe elle est unique.

**Élément maximale**  $M$  est un élément maximale de  $A$  si  $M$  n'est plus petit que personne :  $\nexists x \in A, M \leq x$ .  
 Dans le cas d'un ensemble totalement ordonné, seul un maximum est élément maximale, dans le cas d'un ensemble non totalement ordonné, il peut en exister plusieurs.

## Axiomes d'un groupe

Soit  $G$  un ensemble muni d'une opération interne  $*$ , quels axiomes pour que  $(G, *)$  ait une structure de groupe ?

---

Soit  $G$  un ensemble et  $*$  une opération interne,  $(G, *)$  forme un groupe si

i) Associativité :

$$\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$$

ii) Existence d'un neutre :

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$$

iii) Existence d'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e$$

# Vocabulaire d'ensemble structuré

Définitions du vocabulaire  
suivant

- Magma
- Semi-groupe
- Monoïde
- Groupe

Ensemble	Loi interne	Associative	Neutre	Inverse	Nom
×	×				Magma
×	×	×			Semi-groupe
×	×	×	×		Monoïde
×	×	×	×	×	Groupe

## Axiomes d'un sous-groupe

Soit  $(G, *)$  un groupe, quels axiome pour que  $H \subseteq G$  soit un sous-groupe ?

---

Soit  $(G, *)$  un groupe et  $H \subseteq G$ ,  $H$  est un sous-groupe de  $G$  si

i) Présence du neutre :

$$e \in H$$

ii) Stable par  $*$  :

$$\forall x, y \in H, x * y \in H$$

iii) Stable par inverse :

$$\forall x \in H, x^{-1} \in H$$

# Théorème de Lagrange

Énoncer le théorème de Lagrange sur les groupes.

---

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe de  $G$

$$|H| \mid |G|$$

# Démonstration du Théorème de Lagrange

## Démonstration du théorème de Lagrange

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe.

- Relation quotienté par  $H : x \mathcal{R} y$  si  $yx^{-1} \in H$  (relation d'équivalence). On note  $G/H$  l'ensemble des classes d'équivalences.
- Soit  $x \in G$ ,  $\bar{x}$  sa classe d'équivalence pour  $\mathcal{R}$ .  $\bar{x} = Hx = \{hx, h \in H\}$ .

Par double inclusion :

- ▶  $Hx \subseteq \bar{x}$  : Soit  $y \in Hx$ ,  $y = hx$  avec  $h \in H$ , donc  $yx^{-1} = h \in H$  d'où  $y \mathcal{R} x$  et  $y \in \bar{x}$ .
- ▶  $\bar{x} \subseteq Hx$  : Soit  $y \in \bar{x}$ ,  $yx^{-1} = h \in H$ , donc  $y = hx \in Hx$ .
- Donc  $\forall x \in G, \bar{x} = Hx \simeq H$  d'où  $|\bar{x}| = |H|$ .
- Enfin par le lemme du berger :  $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$  et donc  $|H| \mid |G|$ .

## Relation de cardinal pour un morphisme de groupe

Soient  $(G_1, +)$ ,  $(G_2, \cdot)$  des groupes et  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  un morphisme, avec  $G_1$  fini. Que peut on dire de  $|G_1|$  ?

---

Soient  $(G_1, +)$ ,  $(G_2, \cdot)$  des groupes et  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  un morphisme, avec  $G_1$  fini.

$$|G_1| = |\ker \varphi| \cdot |\operatorname{im} \varphi|$$

## Axiomes d'un anneau

Soit  $A$  muni de deux opérations internes  $+$  et  $\cdot$ , quels axiomes pour que  $(A, +, \cdot)$  soit un anneau ?

---

$(A, +, \cdot)$  est un anneau si :

- i)  $(A, +)$  est un groupe abélien
  - a) Associativité de  $+$
  - b) Existence d'un neutre additif ( $0_A$ )
  - c) Existence d'opposés ( $-x$ )
  - d) Commutativité de  $+$
- ii) Associativité de  $\cdot$
- iii) Existence d'un neutre multiplicatif ( $1_A$ )
- iv) Distributivité de  $\cdot$  sur  $+$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$



## Diviseur de zéro

Définition de diviseur de 0 dans un anneau.

---

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau,  $x \in A$  est dit diviseur de 0 (à gauche) si  $x \neq 0$  et  $\exists y \neq 0, \quad xy = 0$

## Intégrité d'un anneau

Définition d'un anneau intègre.

---

Un anneau  $(A, +, \cdot)$  est dit intègre si

- $A$  est commutatif
- $A$  n'admet aucun diviseur de 0

## Groupe des inversibles

Définition de groupe des inversibles d'un anneau.

---

Le groupe des inversibles d'un anneau  $(A, +, \cdot)$ , est le groupe  $(A^\times, \cdot)$ .

## Idéal d'un anneau

Définition d'un idéal d'un anneau, propriétés élémentaires.

---

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau et  $I \subseteq A$ ,  $I$  est un idéal de  $A$  si

- $I$  est un sous-groupe additif de  $A$
- $I$  est stable par produit externe :  $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$

Propriétés :

- Si  $1 \in I$  idéal de  $A$ , alors  $I = A$ .
- Plus généralement s'il existe  $x \in I$  inversible,  $I = A$ .
- Une intersection quelconque d'idéaux est un idéal.
- Une somme finie d'idéaux est un idéal.
- Si  $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$  un morphisme d'anneau avec  $A_1$  commutatif,  $\ker \varphi$  est un idéal de  $A_1$ .
- Pour tout  $b \in A$ ,  $bA$  est un idéal de  $A$ .
- Un idéal engendré par un ensemble est le plus petit idéal le contenant, dans le cas d'un singleton  $\{a\} \subset A$ , il s'agit de  $aA$ .

## Axiomes d'un corps

Soit  $K$  muni de deux opérations internes  $+$  et  $\cdot$ , quels axiomes pour que  $(K, +, \cdot)$  soit un corps ?

---

$(K, +, \cdot)$  est un corps si :

- i)  $(K, +)$  est un groupe abélien
  - a) Associativité de  $+$
  - b) Existence d'un neutre additif ( $0$ )
  - c) Existence d'opposés ( $-x$ )
  - d) Commutativité de  $+$
- ii) Associativité de  $\cdot$
- iii) Commutativité de  $\cdot$
- iv) Existence d'un neutre multiplicatif ( $1$ )
- v) Distributivité de  $\cdot$  sur  $+$
- vi) Existence d'inverses (sauf pour  $0$ )

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in K$$

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

## Corps gauche, anneau à division

Qu'est-ce qu'un "corps gauche" ou "anneau à division" ?

---

Un corps gauche ou anneau à division et un anneau non commutatif dont tous les éléments sont inversible sauf 0. C'est un corps dont le produit n'est pas commutatif.

## Axiomes d'un sous-corps

Soit  $(K, +, \times)$  un corps, axiomes pour que  $L \subseteq K$  soit un sous-corps ?

---

$(K, +, \times)$  un corps,  $L \subseteq K$  est un sous-corps si :

- i)  $0 \in L$
- ii)  $1 \in L$
- iii) Stable par  $+$
- iv) Stable par  $-$  ou stable par opposé
- v) Stable par  $\times$
- vi) Stable par  $\nabla \cdot$  ou stable par inverse

## Primalité de la caractéristique d'un corps

Si  $(K, +, \cdot)$  est un corps de caractéristique non nulle, que peut-on dire sur celle ci ?

$(K, +, \cdot)$  un corps, notons  $p$  sa caractéristique, si  $p \neq 0$  alors  $p$  est premier

Démonstration:

Notons  $p = ab$  avec  $a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^a 1\right) \left(\sum_{k=1}^b 1\right) &= \sum_{k=1}^a \sum_{k=1}^b 1 \\ &= \sum_{k=1}^{ab=p} 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

Or un corps n'admet pas de diviseurs de 0, donc  $\sum_{k=1}^a 1 = 0$  ou  $\sum_{k=1}^b 1 = 0$ , d'où

$$\text{ou } \begin{aligned}a &= p, b = 1 \\ p &= b, a = 1\end{aligned}$$

Donc  $p$  est premier.



## Corps des fractions

Définition du corps des fractions d'un anneau intègre.

---

$(A, +', \cdot)$  un anneau intègre.

- Soit  $(a, b), (c, d) \in A \times A \setminus \{0\}$ , on définit la relation d'équivalence suivante :

$$(a, b) \mathcal{R} (d, c) \text{ si } ad = bc$$

- On note  $\frac{a}{b}$  la classe d'équivalence de  $(a, b)$ .
- On définit les opérations  $+$ ,  $\times$  sur les fractions

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad +' cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Le corps des fractions de  $A$  est le corps

$$(A \times A \setminus \{0\}, +, \times)$$

# Théorème de Gauss

Théorème de Gauss.

---

Soit  $a, b, c \in \mathbb{N}$ , si  $a \mid bc$  et  $a \wedge b = 1$   
alors  $a \mid c$

# Équations diophantiennes

Résolutions d'une équation de la forme  $ax + by = c$  dans  $\mathbb{Z}$ .

---

Soit  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(E) : \quad ax + by = c$$

- Solution homogène : On cherche un couple  $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$  (Bézout) tel que

$$au + bv = c$$

- Solution particulière : il en existe si

$$a \wedge b \mid c$$

- Les solutions sont

$$S = \begin{cases} x = x_p - kb' \\ y = y_p + ka' \end{cases}$$

avec  $(x_p, y_p)$  solution particulière

$$\text{et } a' = \frac{a}{a \wedge b}, \quad b' = \frac{b}{a \wedge b}$$

## Nombres de Fermat

Que sont les nombres de Fermat, et quelques propriétés.

---

Le  $n$ -ème nombre de Fermat est

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Ils sont impaires et premier entre eux :

Soit  $n < m \in \mathbb{N}$ ,

$$(2^{2^n} - 1) \cdot F_n \qquad \cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1}$$

$$(2^{2^n} - 1) \cdot (2^{2^n} + 1) \qquad \cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1}$$

$$(2^{2^{n+1}} - 1) \cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1}$$

$$\vdots$$

$$2^{2^m} - 1 = F_m - 2$$

Donc  $F_n \mid F_m - 2$ , d'où  $F_m \wedge F_n \mid F_m - 2$ , donc  $F_m \wedge F_n \mid 2$ , mais ils sont impaire donc premier entre eux.

## Lemme d'Euclide

Théorème du lemme d'Euclide.

---

Soit  $p \in \mathbb{P}$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

Plus algébriquement :

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  est un anneaux intègre :

$$ab \equiv 0 [p] \Rightarrow a \equiv 0 [p] \text{ ou } b \equiv 0 [p]$$

## Formule du nombre de diviseurs

Formule du nombre de diviseurs d'un entier.

---

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

$$\text{nombre de diviseurs} = \prod_{i=1}^k (\alpha_k + 1)$$

# Théorème des restes chinois

Théorème des restes chinois.

---

Soit  $n, m \in \mathbb{N}^*$  premiers entre eux

- Formulation arithmétique :

$$\begin{aligned} \forall a \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \forall b \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \\ \exists ! x \in \llbracket 0, nm-1 \rrbracket, \\ x \equiv a \pmod{m} \text{ et } x \equiv b \pmod{n} \end{aligned}$$

- Formulation algébrique :

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ \varphi : \quad x &\mapsto \begin{pmatrix} x \pmod{m} \\ x \pmod{n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme  
d'anneaux.

- Structure de preuve : injectivité  
par  $\ker \varphi$  + argument de  
cardinal.

## Petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat.

---

- Première formulation :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z},$$

$$a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

- Deuxième formulation (moins forte) :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z},$$

$$a^p \equiv a [p]$$

- Démonstration : On étudie  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  :

$$\forall a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

$$\text{ord}(a) \mid p-1 \text{ (Lagrange)}$$

$$\text{donc } a^{p-1} \equiv 1 [p]$$



# Indicatrice d'Euler

Définition de l'indicatrice d'Euler, et propriétés.

La fonction indicatrice d'Euler est

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| \end{array}$$

Quelques propriétés :

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$$

$$m \wedge n = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

$$\varphi(n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1})$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\sum_{d \in \text{Div}(n)} \varphi(d) = n$$

Pour se convaincre de la dernière :

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}$$

Sous formes irréductibles ( $p_i \wedge q_i = 1$ )

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \dots + \frac{p_n}{q_n}$$

Il y a  $n$  fractions, les  $q_i \in \text{Div}(n)$ , et pour chaque  $q_i$ , on a tous les  $p_i \leq q_i$ , qui sont premiers avec eux :

$$\underbrace{\sum_{d \in \text{Div}(n)}}_{\text{somme sur tous les dénominateur}} \underbrace{\varphi(d)}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{fractions pour le} \\ \text{dénominateur } d}} = \underbrace{n}_{\text{nombre de fractions}}$$

Enfin, une généralisation du petit théorème de Fermat :

$$a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$$

# Théorème de Bézout

Énoncé et preuve du théorème de Bézout.

---

- Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  et  $d = a \wedge b$  alors il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$  tel que  $au + bv = d$ .
- Preuve : Soit  $I = \{au + bv, (u, v) \in \mathbb{Z}\}$

$I$  est un idéal de  $\mathbb{Z}$ , donc  $\exists d \in \mathbb{Z}, I = d\mathbb{Z}$  (principalité de  $\mathbb{Z}$ ).  
Donc  $d \mid a$  et  $d \mid b$ .

Soit  $\partial$  tel que  $\partial \mid a$  et  $\partial \mid b, \forall x \in I, \partial \mid x$ , en particulier  $\partial \mid d$  d'où  $\partial \leq d$ .

$a \wedge b = d \in I$  d'où  $\exists u, v \in \mathbb{Z}, d = au + bv$

## Propriétés diviseurs communs

Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$x \mid a \text{ et } x \mid b \text{ ssi } ?$$

$$a \mid y \text{ et } b \mid y \text{ ssi } ?$$

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = ?$$

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = ?$$

Soit  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$x \mid a \text{ et } x \mid b \text{ ssi } x \mid (a \wedge b)$$

$$a \mid y \text{ et } b \mid y \text{ ssi } m \mid (a \vee b)$$

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$$

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$$

## **Théorème de caractérisation des matrices inversibles**

Énoncé du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

---

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $A$  est inversible.
- $A \stackrel{L}{\sim} I_n$ .
- $\text{rg } A = n$ .
- Le système homogène  $AX = 0$  admet une seule solution.
- $\forall Y \in \mathbb{R}^n$  le système homogène  $AX = Y$  admet au plus une solution.
- $\forall Y \in \mathbb{R}^n$  le système homogène  $AX = Y$  admet au moins une solution.

## Polynômes associés

Définition et propriétés des polynômes associés.

---

Soit  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P$  et  $Q$  sont dit associé si  $P \mid Q$  et  $Q \mid P$ .

$P, Q$  sont associés ssi  $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$ . Toute class de polynômes associés contient un unique polynôme unitaire (à l'exception de  $\{0\}$ ).

# Propriétés des racines d'un polynôme

Propriétés des racines d'un polynôme.

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $n = \deg P$

## En général

1. Si  $P \neq 0$ ,  $P$  à au plus  $n$  racines (comptées avec multiplicités).
2. L'unique polynôme qui à une infinité de racines est  $P = 0$ .
3. Si  $Q \in \mathbb{K}_n[X]$  et  $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$  tels que  $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(\alpha_k) = Q(\alpha_k)$ , alors  $P = Q$ .

## En caractéristique nulle

4.  $a \in \mathbb{K}$  est racine de  $P$  avec multiplicité  $m$  ssi

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$$

$$\text{et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

## Démonstration

1. Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{K}$  sont des racines distinctes de  $P$ , et  $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$  leurs multiplicités.

Pour tout  $k \in$

$$\llbracket 1, N \rrbracket, (X - \alpha_k)^{m_k} \mid P$$

Or pour  $i < j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$(X - \alpha_i) - (X - \alpha_j) = \alpha_j - \alpha_i$$

Relation de Bézout ( $\alpha_j - \alpha_i$  associé à 1) donc premiers entre eux deux à deux.

D'où  $\prod_{k=1}^N (X - \alpha_k)^{m_k} \mid P$  et  $n \geq \sum_{k=1}^N m_k$ .

2. Par la propriétés précédente, si  $P$  à une infinité de racine distincte il ne peut être de degré positif (ou il serait infini) donc il est nul.
4. Par Taylor-Langrange formel, pour tout  $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$

$$P = \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}}_{R_j(X) \text{ (deg} < j \text{)}} + \underbrace{\sum_{k=j}^n P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}}_{(X-a)^j Q(X)}$$

D'où  $R_j$  le reste de la division euclidienne de  $P$  par  $(X-a)^j$ . Or  $a$  est une racine de multiplicité  $m$  ssi

$$\begin{cases} R_m = 0 \\ R_{m+1} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \frac{P^{(k)}(a)}{k!} = 0 \\ \exists k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, (P^{(k)}(a)) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

## Multiplicité d'une racine

Définition de multiplicité d'une racine.

---

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$  une racine et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $\alpha$  est de multiplicité  $n$  si (l'un ou l'autre) :

- $(X - \alpha)^n \mid P$  mais  $(X - \alpha)^{n+1} \nmid P$ .
- $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0$

## Polynômes scindés

Définition et propriétés des polynôme scindés.

---

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  ses racines et  $m_1, \dots, m_k$  leur multiplicités.

- $P$  est scindé si  $\deg P = \sum_{i=1}^k m_i$ .
- $P$  est scindé racines simples si  $P$  scindé et  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, m_i = 1$ .

Propriétés :

- Si  $P$  est scindé racines simples sur  $\mathbb{R}$ ,  $P'$  aussi.
- Si  $P$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ ,  $P'$  aussi.
- Tout polynôme  $P$  est scindé sur  $\mathbb{C}$  : théorème de Gauss-d'Alembert.



# Polynômes irréductibles

Définition et propriétés des polynômes irréductibles.

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P$  est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont  $P$ , 1 et leurs associés.

1. Dans  $\mathbb{C}$ , les polynômes irréductibles sont les monômes (théorème de Gauss-d'Alembert).
2. Dans  $\mathbb{R}$ , les polynômes irréductibles sont les monômes et les polynômes de degré 2 avec  $\Delta < 0$ .
3. En général, un polynôme de degré 1 est toujours irréductible.
4. Dans  $\mathbb{K}[X]$ , un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible ssi il n'admet pas de racine dans  $\mathbb{K}$ .
5. Dans  $\mathbb{K}[X]$ , un polynôme de degré  $\geq 2$  ne peut être irréductible s'il admet une racine dans  $\mathbb{K}$ .
6. ( $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$ ) Un polynôme  $P \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X]$  irréductible ( $\mathbb{L}$  extension de corps de  $\mathbb{K}$ ) n'admet que des racines simples dans  $\mathbb{L}$  (et à fortiori dans  $\mathbb{K}$ ).

## Démonstration

2. Par les propriétés 3 et 4, on sait que ces polynômes sont irréductibles, montrons que ce sont les seuls.

Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  irréductible de degré  $\geq 2$ .

$P \in \mathbb{C}[X]$  donc on dispose de  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  racine de  $P$ .

$$P(\bar{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = \overline{0} = 0$$

D'où ( $\text{car } (X - \lambda) \wedge (X - \bar{\lambda}) = 1$ )

$$Q = \underbrace{X^2 - 2\text{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2}_{\in \mathbb{R}[X]} \mid P$$

Comme  $P$  est irréductible,  $P$  et  $Q$  sont associés et  $\deg P = 2$ .

4. Soit  $P \in \mathbb{K}_3[X] \setminus \mathbb{K}_1[X]$ 
  - S'il est irréductible il n'admet pas de racine.
  - S'il n'est pas irréductible,

$$P = QR$$

- Soit  $\deg Q = 1$ ,  $Q = X - \alpha$  et  $\alpha$  racine de  $P$ .
- Soit  $\deg R = 1$ ,  $R = X - \beta$  et  $\beta$  racine de  $P$ .

6.  $0 \leq \deg P' \leq \deg P - 1$  et par irréductibilité de  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$

$$P \wedge P' = 1$$

Or le PGCD se conserve sur les extensions de corps, ils n'ont donc pas de racine communes (dans  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$ ).

# Fonctions symétriques des racines

Définition des fonctions  
symétriques des racines et  
formules de Viète.

---

Soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la  $k$ -ème fonction symétrique des élémentaire de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  est

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k \alpha_{i_j}$$

On remarque que  $\sigma_0 = 1$ .

Soit  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  scindé, on note  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  ses racines (non distinctes).

Formule de Viète :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

# Polynômes de Tchebycheff

Définition et propriétés des polynômes de Tchebycheff.

Le  $n$ -ème polynôme de Tchebycheff est le polynôme tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

Propriétés :

1. Formule de récurrence :

$$T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$$

2.  $\deg T_n = n$ , coefficient dominant :  $2^{n-1}$ , sauf pour  $n = 0$ ,  $T_0 = 1$ .

3.  $T_n$  est scindé racines simples sur  $\mathbb{R}$  :

$$T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( X - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

4. Orthogonalité : si  $n \neq p$

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_p(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

5. Minimalité en norme :

$$\|P\| = \max_{t \in [-1,1]} |P(t)|$$

Si  $P$  unitaire de degré  $n$ , alors  $\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$ .

Avec cas d'égalité si  $P(X) = \frac{T_n(X)}{2^{n-1}}$

Preuves :

1. Formules de trigonométrie :

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta)$$

$$T_{n+1}(\cos \theta) + T_{n-1}(\cos \theta) = 2(\cos \theta) T_n(\cos \theta)$$

Donc ils coïncident en une infinité de valeurs  $[-1, 1]$ , et sont donc égaux.

2. Par récurrence avec la relation de récurrence.

3. On résout  $\cos(n\theta) = 0$ , on fait attention à distingué les racines.

4. Changement de variable  $x = \cos \theta$ , puis formules de trigonométrie.

5. Par contraposé : On prend  $P$  unitaire de degré  $n$  tel que

$$\|P\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

•  $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n + Q$ ,  $\deg Q \leq n - 1$ .

• On regarde les  $y_k$  quand  $T_n(y_k) = \pm 1$ .

• On en déduit le signe de  $Q$

• Par le TVI  $Q$  à  $n$  racines donc  $Q = 0$ .

• Donc  $P(X) = \frac{T_n(X)}{2^{n-1}}$ .

# Propriétés des fractions rationnelles

## Propriétés des fractions rationnelles

---

- Si on dit que  $\frac{P}{Q}$  est scindé, c'est que  $Q$  est scindé.
- Si  $F$  admet une infinité de racines alors  $F = 0$ .
- Si  $F$  et  $G$  coïncident en une infinité de points alors  $F = G$ .

# Décomposition en éléments simples

Formules, propriétés de la décomposition en éléments simples.

Soit  $F \in \mathbb{K}(X)$ ,  $F$  se décompose de façon unique sous la forme

$$F = E + G \text{ avec } E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg G < 0$$

On appelle  $E$  la partie entière de  $F$  et  $G$  la partie pôlaire.

- Si  $F = \frac{P}{Q}$  scindé racines simples :  
soit  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les pôles et  
 $Q(X) = (X - \alpha_k)R_k(X)$  pour  
tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$F = E + \frac{\lambda_1}{X - \alpha_1} + \dots + \frac{\lambda_n}{X - \alpha_n}$$

Avec

$$\lambda_k = \frac{P(\alpha)}{R_k(\alpha)} = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

- Si  $F$  est scindé pôles multiples, on fait la même chose en retranchant les décompositions à chaque fois.

Décomposition en éléments simples de  $\frac{P'}{P}$  :

$$P(X) = \lambda(X - \alpha_1)^{m_1} \dots \dots (X - \alpha_k)^{m_k}$$

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{m_1}{X - \alpha_1} + \dots + \frac{m_k}{X - \alpha_k}$$

## Axiomes d'un espace vectoriel

Axiomes d'un espace vectoriel.

---

Sois  $\mathbb{K}$  un corps,  $E$  muni de la somme interne  $+$  et du produit externe  $\cdot$  est un  $\mathbb{K}$ -ev si

1.  $(E, +)$  est un groupe abélien.
2.  $\forall x \in E, 1 \cdot x = x$ .
3.  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ .
4.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ .
5.  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

## Théorème de caractérisation du rang

Énoncé du théorème de  
caractérisation du rang.

---

Soit  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , les  
assertions suivantes sont  
équivalentes

- $A$  équivalente par ligne à une  
matrice échelonné avec  $r$   
lignes non nulles.
- $\text{rg } \varphi_A = r$
- $\text{rg } (C_1, \dots, C_p) = r$  (avec  $C_i$  la  $i$ -  
ème colonne de  $A$ )
- $\text{rg } (L_1, \dots, L_n) = r$  (avec  $L_i$  la  $i$ -  
ème ligne de  $A$ )
- $A \stackrel{L,C}{\sim} J_r$

On dit alors que  $\text{rg } A = r$ .

On a aussi

$$A \stackrel{L,C}{\sim} B \text{ ssi } \text{rg } A = \text{rg } B$$

$$\begin{aligned} \text{rg}(\varphi \circ \psi) &= \text{rg } \psi - \dim(\ker \varphi \cap \text{im } \varphi) \\ &\leq \min(\text{rg } \varphi, \text{rg } \psi) \end{aligned}$$

## Formes linéaires et hyperplans

Formes linéaires et hyperplans.

---

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev

Un hyperplan de  $E$  est un sev de codimension 1, c'est à dire qui admet un supplémentaire de dimension 1.

- Si  $\alpha \in E^* \setminus \{0\}$ , alors  $\ker \alpha$  est un hyperplan.
- Si  $H$  est un hyperplan de  $E$ , il existe une forme linéaire  $\alpha$  unique à constante multiplicative près tel que  $H = \ker \alpha$ .

Deux hyperplans on toujours un supplémentaire commun.

### Démonstration

- Si  $H_1$  et  $H_2$  sont des hyperplans,  $H_1 \cup H_2 \neq E$ 
  - Par l'absurde : supposons  $H_1 \cup H_2 = E$  sev de  $E$   
Or  $H_1 \cup H_2 = (H_1 \text{ ou } H_2) = E$  (cf unions de sev) qui est absurde.

Donc on dispose de  $x_0 \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$

Ainsi  $\text{Vect}(x_0)$  est un supplémentaire de  $H_1$  et  $H_2$



## Matrices semblables

Définition de matrices semblables.

---

Soit  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $A$  est dite semblable à  $B$  si

$$\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K}), \quad B = P^{-1}AP$$

Invariants :

- $\text{rg } A = \text{rg } B$
- $\text{tr } A = \text{tr } B$
- $\det A = \det B$
- $\chi_A = \chi_B$
- $\mu_A = \mu_B$

# Fonctions arithmétiques : Möbius et indicatrice d'Euler

Définition, contexte et démonstration de la fonction de Möbius et la formule d'inversion.

Pour  $A = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$  on définit  $(*)$ , pour  $f, g \in A$

$$f * g = \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \end{cases}$$

Qui est une loi de composition interne sur  $A$ . On montre que

- $\mathbb{1}_{\{1\}}$  est l'élément neutre.
- $(*)$  est commutatif
- $(*)$  est associatif

On définit la fonction de Möbius, on note  $\pi(n) = |\{p \in \mathbb{P}, p \mid n\}|$

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ \mu : n \mid \nexists p \in \mathbb{P}, p^2 \mid n &\mapsto (-1)^{\pi(n)} \\ n \mid \exists p \in \mathbb{P}, p^2 \mid n &\mapsto 0 \end{aligned}$$

On montre de plus

$$\mu * \mathbb{1}_{\mathbb{N}} = \mathbb{1}_{\{1\}}$$

Pour  $n \geq 2$  on écrit  $n = \prod_{j=1}^k p_j^{\alpha_j}$ .  
Un diviseur  $d$  s'écrit  $\prod_{j=1}^k p_j^{\beta_j}$  avec  $\beta_j \leq \alpha_j$ . Donc

$$\mu(d) \neq 0 \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \beta_j \in \{0, 1\}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k \in \{0, 1\}} \mu\left(\prod_{j=1}^k p_j^{\beta_j}\right) \\ &= \sum_{q=0}^k \sum_{I \subset \llbracket 1, k \rrbracket} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit la formule d'inversion de Möbius : soit  $f :$

$\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ , on pose  $g : n \mapsto \sum_{n|d} f(d)$  ( $g = f * \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$ ), on a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

C'est à dire  $f = g * \mu = f * \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{N}} * \mu}_{\mathbb{1}_{\{1\}}}$ .

De plus  $\mu$  est multiplicative.

## Existence et unicité des sous groupes de groupe cyclique

Soit  $G$  un groupe cyclique d'ordre  $n$ , et  $d \mid n$ , montrer l'existence et l'unicité d'un sous groupe d'ordre  $d$ .

---

Soit  $G$  cyclique d'ordre  $n$ .

Par isomorphisme à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ , on se ramène à l'étude de  $(\mathbb{U}_n, \cdot)$ .

Soit  $H$  sous groupe de  $\mathbb{U}_n$ ,  $|H| = d$ .

Pour tout  $x \in H$ ,  $x^d = 1$  donc  $H \subset \mathbb{U}_d$ , par égalité des cardinaux,  $H = \mathbb{U}_d$ .

# Polynômes cyclotomiques

Définitions et propriétés des polynômes cyclotomiques.

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on note

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_n &= \{z \in \mathbb{U}_n \mid \text{ord}(z) = n\} \\ &= \left\{e^{\frac{2ki\pi}{n}}, k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right\}\end{aligned}$$

On définit de  $n$ -ème polynôme cyclotomique

$$\Phi_n(X) = \prod_{\xi \in \mathbb{V}_n} (X - \xi)$$

$$\deg(\Phi_n) = \varphi(n)$$

On montre

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

$$\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$$

$$\Phi_p \text{ irréductible}$$

## Démonstration

- Pour  $d \mid n$ , on a

$$\mathbb{V}_d = \{z \in \mathbb{U}_n \mid \text{ord}(n) = d\}$$

Car si  $z \in \mathbb{U}_n$  d'ordre  $d$ ,  $z \in \langle z \rangle$  sous groupe de  $\mathbb{U}_n$  de cardinal  $d$ , qui est unique car  $\mathbb{U}_n$  est cyclique. D'où  $z \in \mathbb{U}_d$  et à fortiori  $z \in \mathbb{V}_d$ .

- On a donc

$$\mathbb{U}_n = \bigsqcup_{d \mid n} \mathbb{V}_d$$

$$\begin{aligned}X^n - 1 &= \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \xi) \\ &= \prod_{d \mid n} \left( \prod_{\xi \in \mathbb{V}_d} (X - \xi) \right) \\ &= \prod_{d \mid n} \Phi_d\end{aligned}$$

- On montre que la division euclidienne dans  $\mathbb{Z}[X]$  par un polynôme unitaire donnent un polynôme dans  $\mathbb{Z}[X]$ . On refait la démonstration de la division euclidienne (récurrence).
- Récurrence forte sur  $n$  pour montrer que  $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

$$X^n - 1 = \Phi_n \cdot \left( \prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} \Phi_d \right)$$

- Soit  $p \in \mathbb{P}$

$$\begin{aligned}\Phi_p &= \prod_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_p \\ \text{ord}(\omega) = p}} (X - \omega) \\ &= \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Q}[X] & \rightarrow & \mathbb{Q}[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X + 1) \end{cases}$$

est un automorphisme d'anneau.

D'où  $\Phi_p(X)$  irréductible ssi  $\Phi_p(X + 1)$  irréductible.

$$\begin{aligned}\Phi_p(X + 1) &= \frac{(X + 1)^p - 1}{X} \\ &= X^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\text{divisible par } p} X^{k-1}\end{aligned}$$

et le coefficient constant est  $\binom{p}{1}$  qui n'est pas divisible par  $p^2$ , d'où par le critère d'Eisenstein,  $\Phi_p$  irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

Démonstration de  $n =$

$\sum_{d \mid n} \varphi(d) :$

$$\begin{aligned}n &= |\mathbb{U}_n| \\ &= \sum_{d \mid n} |\mathbb{V}_d| \\ &= \sum_{d \mid n} \varphi(d)\end{aligned}$$

## Groupes quotientés

Définitions et propriétés des groupes quotientés.

---

Soit  $G$  un groupe,  $H$  sous-groupe.

On définit la relation d'équivalence

$$\forall (x, y) \in G^2, \quad x \sim y \text{ ssi } y \in xH$$

On obtient ainsi les classes à gauche  $gH$  pour tout  $g \in G$ , dont l'ensemble est noté  $G/H$ .

$H$  est dit distingué si

$$\forall g \in G, \quad gHg^{-1} = H$$

Et dans ce cas  $G/H$  à une structure de groupe muni de la multiplication sur les classes

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

Et on pose

$$f : \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & G/H \\ g & \mapsto & gH \end{array}$$

qui est un morphisme de groupe surjectif appelé projection canonique de  $G$  sur  $G/H$  dont le noyau est  $H$ .

### Cas particuliers

- Tous noyau de morphisme est un sous groupe distingué.
- Tous sous-groupe d'indice 2 ( $\frac{|G|}{|H|} = 2$ ) est distingué.

# Idéaux maximaux, anneaux quotientés

Définitions d'idéal maximale, anneau quotienté, propriétés.

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau et  $I$  idéal de  $A$ .

## Idéal maximale

Un idéal  $I$  de  $A$  est dit maximale si pour tout  $J$  idéal de  $A$

$$I \subsetneq J \Rightarrow J = A$$

## Anneau quotienté

On définit sur  $A$  la relation d'équivalence

$$\forall (x, y) \in A^2, x \sim y \text{ ssi } x - y \in I$$

On note  $A/I$  l'ensemble des classes d'équivalences par cette relation qu'on muni d'une structure de groupe en définissant les loi suivantes

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{x \cdot y}$$

Qui ne dépend pas du représentant choisis.

## Propriétés

- $I$  est maximale ssi tous les éléments non nuls de  $A/I$  sont inversibles.
- Si  $A$  commutatif,  $I$  maximale, alors  $I$  est premier ( $A/I$  est intègre).

Démonstration :

- On suppose  $I$  maximale. Soit  $x \in A \setminus I$  c'est à dire  $x \notin \overline{0}_A$ , montrons que  $\overline{x}$  est inversible.

$I \subseteq xA + I = J$  est un idéal, or  $I$  maximale d'où  $1_A \in A = J$ , d'où l'existence de  $y \in A$  et  $z \in I$  tel que

$$xy + z = 1_A$$

$$\overline{xy} = \overline{1_A}$$

- On suppose les éléments non nuls de  $I/A$  inversibles.

Soit  $J \supsetneq I$  idéal de  $A$ , donc il existe  $x \in J$  tel que  $x \notin I$ .

$\overline{x} \neq \overline{0}$  donc  $\overline{x}^{-1} = \overline{y}$  existe.

$$\overline{xy} = \overline{xy} = \overline{1_A}$$

$$\exists z \in I, \underbrace{xy + z}_{\in J} = 1_A$$

$1_A \in J$  donc  $J = A$ ,  $I$  est maximale.

- Soit  $x, y \in A$  tels que  $xy \in I$ , supposons que  $x \notin I$ . Donc  $\overline{x}$  inversible : on dispose de  $x' \in A$  et  $z \in I$  tels que

$$xx' + z = 1_A$$

$$\underbrace{\overbrace{xy x'}^{\in I}}_{\in I} + zy = y \in I$$

## Signature d'une permutation

Définitions et propriétés de la signature dans  $\mathfrak{S}_n$ .

---

Plusieurs définitions alternatives.

- $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}^\times, \cdot)$  est l'unique morphisme non triviale.

Pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  :

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \\ &= (-1)^{N_\sigma} \\ &= (-1)^{n - |\text{Orb}(\sigma)|}\end{aligned}$$

Où  $N_\sigma = |\{(i, j) \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$ .

# Actions de groupe

Définitions et exemples usuels, propriétés des actions de groupes.

Soit  $G$  un groupe,  $X$  un ensemble. Une action de groupe est la donnée d'un morphisme de groupe

$$\varphi : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g \mapsto \rho_g : \begin{cases} X \rightarrow X \\ x \mapsto \rho_g(x) = g.x \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi tout groupe fini de cardinal  $n \in \mathbb{N}$  est isomorphe à un sous groupe de  $\mathfrak{S}_n$ .

## Démonstration

Grâce à l'action de groupe  $\varphi$

$$\varphi : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n \\ a \mapsto \rho : \begin{cases} G \rightarrow G \\ g \mapsto ag \end{cases} \end{cases}$$

Qui est un morphisme de groupe (car  $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{a,b}$ ), injectif (car  $\ker \varphi = e_G$ ), d'où  $\varphi|_{\varphi(G)}$  isomorphisme de  $G \rightarrow \varphi(G)$ , avec  $\varphi(G)$  sous groupe de  $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$ .

## Autre action classique

On peut aussi considérer l'action de conjugaison

$$\theta : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(G) \\ g \mapsto \rho_g : \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{g \in G \mid \theta(g) = \text{id}\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\} \\ &= Z(G) \end{aligned}$$



## Formule des classes

Énoncé, démonstration et définitions de la formule des classes.

Soit  $G$  un groupe et  $\varphi$  une action de  $G$  sur un ensemble  $X$ . On définit pour tout  $x \in X$

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

C'est un sous groupe de  $G$  :

- $e.x = x$  d'où  $e \in \text{Stab}(x)$
- $\forall g \in \text{Stab}(x), g^{-1}.x = g^{-1}.g.x = x$
- $\forall g, h \in \text{Stab}(x), (gh).x = g.h.x = x$

On définit également

$$\text{Orb}(x) = \{g.x, g \in G\}$$

Qui est la classe d'équivalence de  $x$  pour la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si } \exists g \in G, y = g.x$$

Donc les orbites forment une partition de  $X$ .

### Formule des classes

Pour tout  $x \in X$  fini et  $G$  fini

$$|\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)| = |G|$$

### Démonstration

Soit  $x \in X$ , pour  $y \in \text{Orb}(x)$ , on dispose de  $g_0 \in G$  tel que  $g_0.x = y$ .

Étudions  $\{g \in G \mid g.x = y\}$  :

$$\begin{aligned} g.x = y &\Leftrightarrow g.x = g_0.x \\ &\Leftrightarrow (g_0^{-1}g).x = x \\ &\Leftrightarrow g_0^{-1}g \in \text{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g \in g_0 \text{ Stab } (x) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} G &= \bigsqcup_{y \in \text{Orb}(x)} \{g \in G \mid g.x = y\} \\ |G| &= \sum_{y \in \text{Orb}(x)} |g_0 \text{ Stab } (x)| \\ &= \sum_{y \in \text{Orb}(x)} |\text{Stab } (x)| \\ &= |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab } (x)| \end{aligned}$$

## Exercice : Les $p$ -groupes

Définitions d'un  $p$ -groupe, et démonstration de

1. Pour  $G$   $p$ -groupe,  $|Z(G)| = p^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{N}^*$ .
2. Tout groupe  $G$  d'ordre  $p^2$  est abélien

Un  $p$ -groupe est un groupe dont tout les éléments sont d'ordre  $p^\gamma$  avec  $p \in \mathbb{P}$ . A fortiori, il s'agit d'un groupe de cardinal  $p^\alpha$ .

1. On étudie l'action de groupe

$$\varphi : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(G) \\ g \mapsto \rho_g : \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On montre que

$$x \in Z(G) \text{ ssi } \text{Orb}(x) = \{e_G\}$$

Et par la formule des classes on a pour tout  $x \in G$  :

$$p^\alpha = |G| = |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)|$$

Donc  $|\text{Orb}(x)| \mid p^\alpha$  d'où si  $|\text{Orb}(x)| > 0, p \mid |\text{Orb}(x)|$ .

Or les  $\text{Orb}(x)$  forment une partition de  $G$  donc

$$\begin{aligned} p^\alpha = |G| &= \sum_{x \in G} |\text{Orb}(x)| \\ &= |Z(G)| + \underbrace{\sum_{\substack{x \in G/\sim \\ |\text{Orb}(x)| > 1}} |\text{Orb}(x)|}_{\text{divisible par } p} \end{aligned}$$

Donc  $p \mid |Z(G)|$  mais  $e_G \in Z(G)$  donc  $|Z(G)| > 0$  d'où  $|Z(G)| \geq p$ .

2. Par l'exercice ci dessus

$$Z(G) \in \{p, p^2\}$$

Supposons qu'il existe  $x \in G \setminus Z(G)$ , alors

$$Z(G) \subset \text{Stab}(x) \text{ et } x \in \text{Stab}(x)$$

Donc  $|\text{Stab}(x)| \geq p + 1$  sous-groupe de  $G$  donc

$$\text{Stab}(x) = G$$

D'où  $x \in Z(G)$ , absurde.

## Exercice : élément d'ordre $p$ dans un groupe d'ordre divisé par $p$

Soit  $G$  un groupe d'ordre  $pq$  avec  $p \in \mathbb{P}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ , démonstration de l'existence d'un élément d'ordre  $p$ .

Soit  $G$  d'ordre  $n = pq$  avec  $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$ .

On pose

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 \cdots x_p = e_G\}$$

$$\sigma = (1 \ 2 \ \dots \ p) \in \mathfrak{S}_p$$

On considère  $H = \langle \sigma \rangle$  qui agit sur  $\Gamma$  via

$$\varphi : \begin{cases} H & \rightarrow \mathfrak{S}(\Gamma) \\ \sigma^k & \mapsto \rho_{\sigma^k} \end{cases}$$

Où

$$\rho_{\sigma^k} : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \Gamma \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto (x_{\sigma^k(1)}, \dots, x_{\sigma^k(p)}) \end{cases}$$

(On montre par récurrence sur  $k$  que  $\rho_{\sigma^k}$  à bien valeur dans  $\Gamma$ ).

On remarque que  $|H| = p$  et

$$\forall X = (x_1, \dots, x_p) \in G^p,$$

$$X \in \Gamma \Leftrightarrow x_p^{-1} = x_1 \cdots x_{p-1}$$

$$\Gamma \simeq G^{p-1} \text{ donc } |\Gamma| = n^{p-1}$$

Pour tout  $x \in \Gamma$  (par la formule des classes)

$$p = |H| = |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)|$$

$$\text{donc } |\text{Orb}(x)| \in \{1, p\}$$

$$\text{Orb}(x) = \{x\} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_p$$

$$\Leftrightarrow x_1^p = e_G$$

Et

$$n^{p-1} = |\Gamma| = \sum_{x \in \Gamma/\sim} |\text{Orb}(x)|$$

$$= \sum_{\substack{x \in \Gamma/\sim \\ |\text{Orb}(x)|=1}} 1 + \sum_{\substack{x \in \Gamma/\sim \\ |\text{Orb}(x)|>1}} p$$

$$= |\{x \in G \mid x^p = e_G\}| + kp$$

Avec  $k \in \mathbb{N}$ . Or  $p \mid n$  donc

$$p \mid |\{x \in G \mid x^p = e_G\}| \geq 1$$

Donc il existe au moins  $p - 1$  éléments d'ordre  $p$ .

**Cas  $n = 2$  :**

On regroupe les éléments avec leurs inverse, ce qui montre par la parité du cardinal l'existence d'un élément d'ordre 2.

# Théorème de Burnside

Énoncer et démonstration du théorème de Burnside.

Soit  $G$  un groupe fini qui agit sur un ensemble  $X$  fini par  $\varphi$ .

On définit pour  $g \in G$

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X, g.x = x\}$$

Notons  $N$  le nombre d'orbites :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

## Démonstration

On étudie

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\} \\ &= \bigcup_{x \in X} \{(g, x), g \in \text{Stab}(x)\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{(g, x), x \in \text{Fix}(g)\} \end{aligned}$$

Or par la formule des classes

$$|\text{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|\text{Orb}(x)|}$$

D'où (en notant  $x_i$  représentant du  $i$ -ème orbite)

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{x \in \overline{x_j}} |\text{Stab}(x)| \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{x \in \overline{x_j}} \frac{|G|}{|\text{Orb}(x_j)|} \\ &= N |G| \end{aligned}$$

Or

$$|\Gamma| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

D'où

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

## Exercice : Groupe d'éléments d'ordre inférieur à deux

Propriétés du groupe  $G$  tel que  
 $\forall x \in G, x^2 = 1$

---

On a immédiatement

$$\forall x \in G, x = x^{-1}$$

- $G$  est abélien, soit  $x, y \in G$  :

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

- Si  $G$  fini,  $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$  et  $|G| = 2^n$  pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

Passons en notation additive pour plus de clarté :

Faisons de  $G$  un  $\mathbb{F}_2$ -ev :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2 \times G &\rightarrow G \\ (\bar{k}, g) &\mapsto kg \end{aligned}$$

Qui ne dépend pas du représentant car  $2G = \{0\}$ .

$G$  un  $\mathbb{F}_2$ -ev de dimension finie, donc isomorphe à  $\mathbb{F}_2^n$  en tant qu'espace vectoriel, et à fortiori en tant que groupe.

# Irréductibles d'un anneau

Définition, propriétés élémentaires sur les irréductibles dans un anneau principal.

Soit  $(A, +, \cdot)$  un anneau principal.

- Dans un anneau principal on a un PGCD

Pour tout  $a, b \in A$ , il existe  $d \in A$  tel que  $aA + bA = dA$ , unique (à associés près), qu'on appelle PGCD de  $a$  et  $b$  ( $a \wedge b = d$ ).

On a aussi Bézout car  $d \in dA = aA + bA$  d'où  $\exists(u, v) \in A^2, d = au + bv$ .

- Un élément de  $A$  est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont ses associés et les inversibles.
- Pour tout  $a \in A$ , il existe une unique (à permutation et multiplication par des inversibles près) décomposition de  $a$  en irréductibles.

## Démonstration de la décomposition

- Toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

$(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  suite d'idéaux de  $A$  croissante au sens de l'inclusion.

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

Est encore un idéal car union croissante d'idéaux

Par principalité de  $A$ ,  $K = zA$  avec  $z \in K$  donc on dispose de  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $z \in I_k$  d'où

$$K = zA \subseteq I_k \subseteq K$$

- Tout élément de  $A$  admet au moins un diviseur irréductible dans  $A$ .

Soit  $x \in A$ , on construit la suite  $(x_n)$  par récurrence :  $x_0 = x$  et pour  $n \in \mathbb{N}$

- ▶ Si  $x_n$  irréductible,  $x_{n+1} = x_n$
- ▶ Sinon on prend  $x_{n+1}$  diviseur de  $x_n$  non associés et non inversible.

Par définition de la divisibilité,  $(x_n A)_n$  est une suite croissante d'idéaux, et est donc stationnaire.

Soit  $k$  le rang à partir du quel c'est le cas,  $x_k$  est donc un diviseur irréductible de  $x$ .

- Existence de la décomposition : récurrence avec la propriété ci dessus.
- Unicité de la décomposition : on prend deux décomposition on montre que chaque irréductible est présent à la même puissance dans les deux.

# Polynômes en caractéristique strictement positive

Remarques et mises en gardes à propos de  $\mathbb{K}[X]$  quand  $\text{car}(\mathbb{K}) > 0$

Soit  $\mathbb{K}$  un corps tel que  $\text{car}(\mathbb{K}) > 0$

- Le morphisme d'évaluation  $\theta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  n'est pas forcément injectif.

Dans  $\mathbb{F}_p$ ,  $\theta(X^p - X) = \theta(0) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)}$  or  $X^p - 1 \neq 0$ .

- Il n'y a pas équivalence entre multiplicité d'une racine et les valeurs des dérivées successives.

Pour  $\text{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P}$

Pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$

$$\binom{k}{p} = \frac{\overbrace{p(p-1) \cdots (p-k+1)}^{p \text{ divise}}}{\underbrace{k!}_{p \text{ ne divise pas}}}$$

D'où  $\binom{k}{p}$  nul dans  $\mathbb{K}$ .

Ainsi pour tout  $a, b \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} (a+b)^p &= a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{k}{p} a^k b^{p-k} \\ &= a^p + b^p \end{aligned}$$

Et on peut définir le morphisme de corps de Frobenius

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto x^p \end{cases}$$

Donc dans  $\mathbb{F}_p[X]$

$$Q = (X - 1)^p = X^p - 1$$

1 est racine de multiplicité  $p$  de  $Q$  or  $Q' = 0$  d'où pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $Q^{(k)}(1) = 0$ .

# Théorème de Wilson

Énoncer et démonstration du théorème de Wilson.

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $p$  est premier ssi  $(p-1)! \equiv -1[p]$ .

## Démonstration

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  non premier.
  - Si  $3 \leq n = m^2$  avec  $m \in \mathbb{N}^*$ .  
 $2m \cdot m \mid (n-1)!$  d'où  $(n-1)! \equiv 0[n]$
  - Sinon on dispose de  $1 \leq p, q < n$  tels que  $n = pq$  d'où  $n = pq \mid (n-1)!$  et  $(n-1)! \equiv 0[n]$ .
- Soit  $p \in \mathbb{P}$ , étudions  $(p-1)!$  dans  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

Soit  $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$  tel que  $x^2 = 1$

$$(x+1)(x-1) = 0$$

Donc  $x = \{1, -1\}$ .

On peut donc regrouper les éléments du produit  $(p-1)!$  avec leurs inverses (qui sont dans le produit), à l'exception de 1 et  $-1$  d'où

$$\begin{aligned}(p-1)! &= (p-1)(p-2) \cdots 1 \\ &= -1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

## Autre démonstration horrible pour le deuxième sens

Soit  $p \in \mathbb{P}$ , on étudie  $R = X^p - X$  dans  $\mathbb{F}_p[X]$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{F}_p$ ,  $R(x) = 0$  donc  $(X-x) \mid R$  et premiers entre eux deux  $x$  à deux d'où

$$\prod_{x \in \mathbb{F}_p} (X-x) \mid R$$

Et par égalité des degrés on a égalité des polynômes.

Considérons maintenant le morphisme d'anneau suivant :

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^n a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^n \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

$$Q = \prod_{k=0}^{p-1} (X-k) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

$$\pi(Q) = \prod_{k=0}^{p-1} (X - \overline{k}) = R$$

$$\begin{aligned}a_1 &= (-1)^{p-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 0, p-1 \rrbracket \\ |I|=p-1}} \prod_{i \in I} i \\ &= (p-1)!\end{aligned}$$

$$\overline{a_1} = \overline{(p-1)!} = -1$$



# Formule de Taylor-Langrange formelle

Formule de Taylor-Langrange formelle sur  $\mathbb{K}[X]$ , démonstration.

Soit  $\mathbb{K}$  un corps tel que  $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $N \geq \deg P$  et  $a \in \mathbb{K}$ .

$$P = \sum_{k=0}^N P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}$$

## Démonstration

Notons  $E = \mathbb{K}_N[X]$  qui est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension  $N+1$ .

La famille  $((X-a)^k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$  est libre car échelonné en degré, c'est donc une base de  $E$ , et comme  $P \in E$ , et comme  $P \in E$

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k (X-a)^k$$

Pour  $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} P^{(j)}(a) &= \sum_{k=j}^N \frac{\lambda_k k!}{(k-j)!} (a-a)^{k-j} \\ &= \lambda_j j! \\ \lambda_j &= \frac{P^{(j)}(a)}{j!} \end{aligned}$$

## Contenus d'un polynôme à coefficients entiers

Définitions, propriétés, et démonstrations à propos du contenu dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ , on définit le contenu de  $P$  comme

$$c(P) = \bigwedge_{k=0}^d a_k$$

Et on dit qu'un polynôme  $P$  est primitif si  $c(P) = 1$ .

- Soient  $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$  tels que  $c(P) = c(Q) = 1$ , alors  $c(PQ) = 1$ .A
- Pour tout  $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ ,  $c(PQ) = c(P)c(Q)$ .

### Démonstration

- Soit  $p \in \mathbb{P}$ , posons le morphisme d'anneau

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^d a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^d \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

$c(P) = 1$  donc  $P$  admet au moins un coefficient non divisible par  $p$  et de même pour  $Q$ .

$$\begin{aligned} \pi(P) &\neq 0 \text{ et } \pi(Q) \neq 0 \\ \pi(PQ) &= \pi(P)\pi(Q) \neq 0 \end{aligned}$$

Donc  $p$  ne divise pas tous les coefficients de  $PQ$  pour tout  $p \in \mathbb{P}$ , d'où  $c(PQ) = 1$ .

- On remarque que pour  $P \in \mathbb{Z}[X]$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $c(kP) = kc(P)$  et on étudie  $\tilde{P} = \frac{P}{c(P)}$  et  $\tilde{Q} = \frac{Q}{c(Q)}$ .

## Exercice : Produit de polynômes de rationnels unitaire entier

Soient  $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$  unitaires, montrer que si  $PQ \in \mathbb{Z}[X]$  alors  $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ .

$P, Q \in \mathbb{Q}[X]$  unitaires,  $PQ \in \mathbb{Z}[X]$ .

Comme  $PQ$  unitaire  $c(PQ) = 1$ .

On trouve  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $aP, bQ \in \mathbb{Z}[X]$ .

$$c(aP)c(bQ) = abc(PQ) = ab$$

Or  $P$  et  $Q$  étant unitaires

$$\begin{cases} c(aP) \mid a \\ c(bQ) \mid b \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = k_a c(aP) \\ b = k_b c(bQ) \end{cases}$$

$$c(aP)c(bQ) = ab = k_a k_b c(aP)c(bQ)$$

$$\text{d'où } k_a = k_b = 1 \text{ et } \begin{cases} a = c(aP) \\ b = c(bQ) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} P = a \frac{P}{a} \in \mathbb{Z}[X] \\ Q = b \frac{Q}{b} \in \mathbb{Z}[X] \end{cases}$$

## Exercice : Irréductibilité dans les rationels

Soit  $P \in \mathbb{Z}[X]$  dont les seuls diviseurs dans  $\mathbb{Z}[X]$  sont de degré 0 ou  $\deg P$ , montrer que  $P$  est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

---

On suppose par contraposé que  $P$  n'est pas irréductible dans  $\mathbb{Q}$ .

$$P = QR$$

$$1 \leq \deg Q, \deg R \leq \deg P - 1$$

On introduit  $a, b \in \mathbb{Z}$  tels que  $aQ, bR \in \mathbb{Z}[X]$ .

$$\begin{aligned} abc(P) &= c(aQbR) \\ &= c(aQ)c(bR) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{aQbR}{ab} \\ &= \frac{(aQ)(bR)}{\frac{c(aQ)c(bR)}{c(P)}} \\ &= c(P) \cdot \underbrace{\frac{aQ}{c(aQ)}}_{Q_0} \cdot \underbrace{\frac{bR}{c(bR)}}_{R_0} \in \mathbb{Z}[X] \end{aligned}$$

Avec  $Q_0$  et  $R_0$  diviseurs de  $P$  dans  $\mathbb{Z}[X]$  de degrés compris dans  $\llbracket 1, \deg P - 1 \rrbracket$ .

# Entiers algébriques

Définition d'entier algébrique.

Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$ , on dit que  $\alpha$  est un entier algébrique s'il existe  $Q \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire tel que  $Q(\alpha) = 0$ .

1.  $\alpha$  est donc aussi algébrique dans  $\mathbb{Q}$ , et son polynôme minimal est aussi dans  $\mathbb{Z}[X]$ .

## Entiers algébrique de degré 2

2.  $\alpha \in \mathbb{C}$  entier algébrique de degré 2 : on dispose de  $\pi_\alpha \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire de degré 2 qui annule  $\alpha$ .  $\mathbb{Z}[\alpha] = \text{im } \theta_\alpha$  est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$  (et donc de  $\mathbb{C}$ ).
3.  $\mathbb{Z}[\alpha] = \{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$  et tout élément s'écrit de manière unique sous cette forme.

4. On peut écrire

$$\pi_\alpha = (X - \alpha)(X - \beta)$$

On remarque que  $\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$  car  $\alpha + \beta = a \in \mathbb{Z}$  d'où  $\beta = a - \alpha \in \mathbb{Z}[\alpha]$ .

On définit

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z}[\alpha] & \rightarrow \mathbb{Z}[\alpha] \\ x + \alpha y & \mapsto x + \beta y \end{cases}$$

On a alors

$$\forall z, z' \in \mathbb{Z}[\alpha], \tau(zz') = \tau(z)\tau(z')$$

5. Et on peut alors définir

$$N : \begin{cases} \mathbb{Z}[\alpha] & \rightarrow \mathbb{Z} \\ z = x + \alpha y & \mapsto z\tau(z) \end{cases}$$

Qui est aussi multiplicatif.

6.  $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$  est inversible ssi  $N(z) = \pm 1$ .

## Démonstration

1. Notons  $P_\alpha$  ce polynôme, comme  $Q(\alpha) = 0$ ,  $P_\alpha \mid Q$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ , d'où

$$\mathbb{Z}[X] \ni Q = P_\alpha R \in \mathbb{Q}[X]$$

Et donc  $P_\alpha, R \in \mathbb{Z}[X]$  car  $Q$  unitaire (cf. exercices sur le contenu).

3.  $\alpha$  de degré 2 donc

$$\pi_\alpha(X) = X^2 + aX + b$$

- On a déjà  $\{x + \alpha y, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} \subseteq \mathbb{Z}[\alpha]$ .
- Soit  $x = P(\alpha) \in \mathbb{Z}[\alpha]$ ,  $P = Q\pi_\alpha + R$  avec  $Q \in \mathbb{K}[X]$ ,  $R \in \mathbb{K}_1[X]$ .

Donc

$$\begin{aligned} R &= yX + x \in \mathbb{Z}[X] \\ P(\alpha) &= \underbrace{Q(\alpha)\pi_{\alpha(\alpha)}}_0 + y\alpha + x \end{aligned}$$

- Soit  $x_1 + \alpha y_1 = x_2 + \alpha y_2$  avec  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}$ .

$$x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)\alpha$$

Par l'absurde, si  $y_1 \neq y_2$  :

$$\alpha = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbb{Q}[X]$$

Qui est absurde car  $\pi_\alpha$  serait de degré 1.

4. Soit  $z = x + \alpha y, z' = x' + \alpha y'$

On a  $\alpha^2 = a\alpha - b$  et  $\beta^2 = a\beta - b$  donc

$$\begin{aligned} \tau(zz') &= \tau(xx' + \alpha(xy' + x'y) + \alpha^2 yy') \\ &= \tau(xx' - byy' + \alpha(xy' + xy' + ayy')) \\ &= xx' - byy' + \beta(xy' + x'y + ayy') \\ &= (x + \beta y)(x' + \beta y) \\ &= \tau(z)\tau(z') \end{aligned}$$

5. Soit  $z = x + \alpha y \in \mathbb{Z}[\alpha]$

$$\begin{aligned} N(z) &= z\tau(z) = (x + \alpha y)(x + \beta y) \\ &= x^2 + (\alpha + \beta)xy + \alpha\beta y^2 \\ &= x^2 = axy + by^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

6. • Soit  $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$  inversible, on dispose de  $z' \in \mathbb{Z}[\alpha]$  tel que  $zz' = 1$ .

$$N(zz') = N(1) = 1 = N(z)N(z')$$

Donc  $|N(z)| = 1$

- Soit  $z \in \mathbb{Z}[\alpha]$  tel que  $N(z) = \varepsilon \in \{1, -1\}$

$$\begin{aligned} (x + \alpha y)(x + \beta y) &= \varepsilon \\ z(\varepsilon x + \varepsilon \beta y) &= 1 = \varepsilon^2 \\ z^{-1} &= \varepsilon(x + \beta y) \end{aligned}$$

## Exercice : Polynômes à coefficients entiers

1. Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ , montrer que si  $P$  admet une racine rationnelle  $\frac{p}{q}$  avec  $p \wedge q = 1$ , alors  $q \mid a_d$  et  $p \mid a_0$ .

1.

$$0 = P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^d a_k p^k q^{d-k}$$

$$-\underbrace{\sum_{k=0}^{d-1} a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } q} = a_d p^d$$

$$-\underbrace{\sum_{k=1}^d a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } p} = a_0 q^d$$

D'où  $\begin{cases} q \mid a_d p^d \\ p \mid a_0 q^d \end{cases}$  or  $q \wedge p = 1$  donc par le théorème de Gauss,  
 $\begin{cases} q \mid a_d \\ p \mid a_0 \end{cases}$ .

On en déduit que si  $P \in \mathbb{Z}[X]$  est unitaire et admet une racine rationnelle, alors elle est entière.

# Critère d'Eisenstein

Énoncé et démonstration du critère d'Eisenstein.

Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$  tel qu'il existe  $p \in \mathbb{P}$  et

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, p \mid a_k \\ p \nmid a_d \\ p^2 \nmid a_0 \end{cases}$$

Alors  $P$  n'a pas de diviseurs dans  $\mathbb{Z}[X]$  de degré compris dans  $\llbracket 1, d-1 \rrbracket$ , et est donc irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$  (cf. exercices sur le contenu).

## Démonstration

On considère le morphisme d'anneau suivant

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^d a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^d \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que  $P = QR$  avec  $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$

$$\overline{0} \neq \overline{a_d} X^d = \pi(P) = \pi(Q)\pi(R)$$

Par unicité de la décomposition en irréductibles dans  $\mathbb{F}_p[X]$

$$\pi(Q) = \alpha X^k \quad \pi(R) = \beta X^l$$

$$k + l = d \quad \deg Q \geq k \quad \deg R \geq l$$

Or  $\deg Q + \deg R = d$  d'où

$$Q = \sum_{i=0}^k b_i X^i \text{ avec } \begin{cases} \overline{b_k} = \alpha \neq 0 \\ \overline{b_0} = 0 \end{cases}$$

$$R = \sum_{i=0}^l c_i X^i \text{ avec } \begin{cases} \overline{c_l} = \beta \neq 0 \\ \overline{c_0} = 0 \end{cases}$$

D'où  $a_0 = b_0 c_0$  est divisible par  $p^2$ , absurde.

## Exercice : rationalité d'une racine de haute multiplicité

Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  de degré  $n$  et  $\alpha$  racine de  $P$  de multiplicité  $m_\alpha > \frac{n}{2}$ , montrer que  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .

Soit  $P \in \mathbb{Q}[X]$  de degré  $n$  et  $\alpha$  racine de  $P$  de multiplicité  $m_\alpha > \frac{n}{2}$ .

$$P = \prod_{k=0}^N Q_k^{p_k}$$

Décomposition en irréductibles de  $P$  dans  $\mathbb{Q}[X]$ . Pour tout  $i \neq j$ ,  $P_i \wedge P_j = 1$  dans  $\mathbb{Q}[X]$  et donc dans  $\mathbb{C}[X]$ .

Ainsi  $\alpha$  n'est racine que d'un des  $P_i$ , notons  $P_1(\alpha) = 0$ .

C'est une racine simple car  $P_1$  irréductible, d'où

$$p_1 \geq m_\alpha > \frac{n}{2}$$

$$2p_1 > n \geq p_1 \deg(P_1)$$

$$2 > \deg(P_1) = 1$$

Donc  $P_1 = \lambda(X - \alpha) \in \mathbb{Q}[X]$  d'où  $\alpha \in \mathbb{Q}$ .



# Algèbres

Définition d'une  $\mathbb{K}$ -Algèbre avec  $\mathbb{K}$  un corps.

---

Une  $\mathbb{K}$ -Algèbre est un ensemble  $A$  muni de deux lois de composition internes  $(+)$ ,  $(\times)$  et d'une loi de composition externe  $(\cdot)$  tel que

- $(A, +, \times)$  est un anneau
- $(A, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -ev
- $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times A^2$

$$\alpha(x \times y) = (\alpha x) \times y = x \times (\alpha y)$$

## Exemples

- $\mathbb{K}$  est une  $\mathbb{K}$ -Algèbre
- $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -Algèbre
- Pour  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -Algèbre.

## Exercice : existence d'un élément d'ordre du ppcm de deux autres

1. Soit  $G$  un groupe abélien fini, montrer que pour tout  $x, y \in G$ , il existe un élément  $z \in G$  tel que  $\text{ord}(z) = \text{ord}(x) \vee \text{ord}(y)$ .
2. En déduire que

$$\max_{g \in G} \text{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \text{ord}(g)$$

1. Soit  $G$  un groupe abélien,  $x, y \in G$  qui admettent un ordre.

$$\begin{aligned} \text{ord}(x) &= \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i} \\ \text{ord}(y) &= \prod_{i=1}^N p_i^{\beta_i} \end{aligned}$$

Pour tout  $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} \text{ord}\left(x^{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}}\right) &= p_k^{\alpha_k} \\ \text{ord}\left(y^{\prod_{i \neq k} p_i^{\beta_i}}\right) &= p_k^{\beta_k} \end{aligned}$$

On pose alors

$$z_k = \begin{cases} x^{\prod_{i \neq k} p_i^{\alpha_i}} & \text{si } \alpha_k \geq \beta_k \\ y^{\prod_{i \neq k} p_i^{\beta_i}} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où  $\text{ord}(z_k) = p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$

Ainsi en posant  $z = \prod_{k=1}^N z_k$  :

$$\begin{aligned} \text{ord}(z) &= \prod_{k=1}^N p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)} \\ &= \text{ord}(x) \vee \text{ord}(y) \end{aligned}$$

(Car  $G$  est abélien).

2. Par récurrence (car  $G$  fini) on dispose de  $h \in G$  tel que

$$\text{ord}(h) = \bigvee_{g \in G} \text{ord}(g) = m$$

Posons  $g_0 \in G$  d'ordre  $\max_{g \in G} \text{ord}(g)$ .

On a donc

$$\begin{aligned} m &\leq \text{ord}(g_0) \mid m \\ m &= \text{ord}(g_0) \end{aligned}$$

## Exercice : Cyclicité des sous-groupes finis des inversibles d'un corps

Soit  $\mathbb{K}$  un corps, et  $G \leq \mathbb{K}^\times$  fini.  
Montrer que  $G$  est cyclique.

### Première méthode

On utilise la propriété suivante (à redémontrer) : si  $G$  abélien fini

$$\max_{g \in G} \text{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \text{ord}(g)$$

Or pour tout  $g \in G$ ,  $g^m = 1$  d'où

$$G \subset \{\text{racines de } X^m - 1 \text{ dans } \mathbb{K}[X]\}$$

D'où  $|G| \leq m$  car  $\mathbb{K}$  est un corps  
et ainsi l'élément d'ordre  
maximale est d'ordre supérieure  
ou égal au cardinal de  $G$ , d'où  $G$   
cyclique.

### Deuxième méthode

Pour  $d \mid n = |G|$  on pose

$$\Gamma_d = \{g \in G \mid \text{ord}(g) = d\}$$

$$G = \bigsqcup_{d \mid n} \Gamma_d$$

$$n = \sum_{d \mid n} |\Gamma_d|$$

On pose aussi

$$\begin{aligned} A_d &= \{g \in G \mid g^d = 1\} \\ &= \{\text{racines de } X^d - 1\} \cap G \end{aligned}$$

$$|A_d| \leq d$$

Pour  $d \mid n$  on a

- $\Gamma_d = \emptyset$  et  $|\Gamma_d| = 0$
- Ou il existe  $x \in \Gamma_d$ , d'où  $\langle x \rangle \subset A_d$  et  $d \leq |A_d| \leq d$ .

Ainsi

$$\begin{aligned} \Gamma_d &= \{g \in A_d = \langle x \rangle \mid \text{ord}(g) = d\} \\ |\Gamma_d| &= \varphi(d) \end{aligned}$$

Finalement

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n = \sum_{d \mid n} \underbrace{|\Gamma_d|}_{\in \{0, \varphi(d)\}}$$

D'où nécessairement  $|\Gamma_d| = \varphi(d)$   
pour tout  $d \mid n$ , en particulier  
pour  $|\Gamma_n| = \varphi(n) > 0$  : il existe  $\varphi(n)$   
éléments d'ordre  $n$ .

## Exercice : Les carrés de $\mathbb{F}_p$

Notons  $\mathbb{F}_p^2 = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p\}$  et  $\mathbb{F}_p^{*2} = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p^*\}$ .

1. Montrer que  $|\mathbb{F}_p^2| = \frac{p+1}{2}$  et  $|\mathbb{F}_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}$ .
2. Montrer que pour  $x \in \mathbb{F}_p^*$ ,  $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$  ssi  $x^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1}$ .
3. En déduire que pour  $p \geq 3$ ,  $-1$  est un carré ssi  $p \equiv 1[4]$ .
4. On suppose  $p \equiv 3[4]$ , pour  $x \in \mathbb{F}_p^*$  montrer que  $x$  est un carré ssi  $-x$  n'en est pas un.
5. Soit  $p \in \mathbb{P} \mid p \equiv -1[4]$ , pour tout  $r \in \mathbb{F}_p^*$  montrer que  $\Gamma_r = \{(x, y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \mid x^2 - y^2 = r\}$  est de cardinal  $p - 3$ .

1. On étudie le morphisme de groupe

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^{*2} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{x \in \mathbb{F}_p^*, x^2 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{F}_p^*, (x-1)(x+1) = 0\} \\ &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{|\ker \theta|}_2 \cdot \underbrace{(\text{im } \theta)}_{|\mathbb{F}_p^{*2}|} = p - 1$$

D'où  $|\mathbb{F}_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}$ .

Et  $\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p^* \cup \{0\}$  d'où

$$|\mathbb{F}_p^2| = |\mathbb{F}_p^{*2}| + 1 = \frac{p+1}{2}$$

2. Soit  $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$ , on écrit  $x = y^2$  avec  $y \in \mathbb{F}_p^*$ .

$$x^{\frac{p-1}{2}} = y^{p-1} = \bar{1}$$

D'où

$$\underbrace{\mathbb{F}_p^{*2}}_{\frac{p-1}{2}} \subset \underbrace{\left\{ \text{racines de } X^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right\}}_{\leq \frac{p-1}{2}}$$

D'où l'égalité des ensembles.

3.  $\begin{aligned} \bar{-1} \in \mathbb{F}_p^{*2} &\Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \bar{1} \\ &\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow p \equiv 1[4] \end{aligned}$

4. On suppose  $p \equiv 3[4]$

$$(-1) \notin \mathbb{F}_p^{*2} \quad \text{car } (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$$

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{F}_p^{*2} &\Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = 1 \\ &\Leftrightarrow (-x)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \\ &\Leftrightarrow -x \notin \mathbb{F}_p^{*2} \end{aligned}$$

5. • Si  $r$  est un carré,  $r = a^2$  avec

$$a \in \mathbb{F}_p^*$$

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma_r &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2 \\ &\Leftrightarrow (xa^{-1})^2 - (ya^{-1})^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (xa^{-1}, ya^{-1}) \in \Gamma_1 \end{aligned}$$

D'où  $|\Gamma_r| = |\Gamma_1|$

- Si  $r$  n'est pas un carré,  $-r$  en est un.

$$(x, y) \in \Gamma_r \Leftrightarrow y^2 - x^2 = -r$$

Et on se ramène au cas précédent.

$$|\Gamma_r| = |\Gamma_1|$$

Dénombrons  $\Gamma_1$ .

$$\begin{aligned} (x, y) \in \Gamma_1 &\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 1 \end{aligned}$$

Posons  $a = x + y, b = x - y$  ( $p$  impair d'où  $2 \in \mathbb{F}_p^*$ )

$$\begin{aligned} x &= a + \frac{b}{2} \\ y &= a - \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$(x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$$

On a  $(p-1)$  choix pour  $a$ , et  $b$  déterminé par  $a$ , d'où au plus  $(p-1)$  couples.

Il faut exclure les cas où notre choix de  $a$  permet  $x, y \notin \mathbb{F}_p^*$  :

$$\begin{aligned} x = \bar{0} &\Leftrightarrow a = -a^{-1} \\ &\Leftrightarrow a^2 = -1 \\ y = \bar{0} &\Leftrightarrow a = a^{-1} \\ &\Leftrightarrow a^2 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi  $|\Gamma_r| = |\Gamma_1| = p - 3$ .

## Sous algèbres

Définition, propriétés des sous-algèbres.

---

Soit  $(A, +, \times, \cdot)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre,  $B \subset A$  est une sous-algèbre de  $A$  si c'est un sous-anneau et un sev de  $A$ .

De plus si  $B$  est de dimension finie

$$B^\times = B \cap A^\times$$

### Démonstration

On a évidemment  $B^\times \subset B \cap A^\times$ .

On suppose  $b \in B \cap A^\times$ , on dispose de  $a \in A, ab = ba = 1$ .

On pose

$$\varphi_b = \left\{ \begin{array}{l} B \rightarrow B \\ x \mapsto bx \end{array} \right. \in \mathcal{L}(B)$$

Soit  $x \in \ker \varphi_b$ , on a  $bx = 0$  donc  $(ab)x = x = 0$ .

Donc  $\varphi_b$  bijectif (argument dimensionnel), et  $\varphi_b^{-1}(1) = a$  existe et  $a \in B$ .

# Algèbres commutatives intégrales de dimension finie

Que peut-on dire d'une algèbre  $(A, +, \times, \cdot)$  commutative et intégrale de dimension finie ?

Si  $(A, +, \times, \cdot)$  est commutative, intégrale et de dimension finie, alors c'est un corps.

## Démonstration

Soit  $a \in A \setminus \{0\}$ , étudions

$$\varphi_a : \begin{cases} A \rightarrow A \\ x \mapsto ax \end{cases} \in \mathcal{L}(A)$$

$$\begin{aligned} \ker \varphi_a &= \{x \in A \mid ax = 0\} \\ &= \{x \in A \mid x = 0\} \quad (\text{par intégrité}) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Et par argument dimensionnel,  $\varphi_a$  bijectif, d'où  $\varphi_a^{-1}(a) = a^{-1}$  existe.

## Morphisme d'algèbre

Définition, propriétés des morphismes d'algèbres.

---

Pour  $A, B$  deux  $\mathbb{K}$ -algèbre, une application  $\varphi : A \rightarrow B$  est un morphisme d'algèbre si c'est un morphisme d'anneau linéaire.

Et dans ce cas  $\text{im } \varphi$  est une sous-algèbre de  $B$  et  $\ker \varphi$  est un idéal et un sev de  $A$ .

## Dévissage de groupes

Propriétés, outils du dévissage de groupes.

1. Soient  $G$  et  $H$  deux groupes cycliques de cardinaux  $n$  et  $p$ ,  $G \times H$  est cyclique ssi  $n \wedge p = 1$ .
- 2.

### Démonstration

1. • Par contraposé, supposons que  $n \wedge p = d > 1$ , ainsi  $m = n \vee p < np$ .

Pour tout  $(x, y) \in G \times H$ ,

$$(x, y)^m = (x^m, y^m) = (e_G, e_H)$$

donc  $\text{ord}((x, y)) \mid m < |G \times H|$  qui ne peut être cyclique.

- Soit  $x \in G$  d'ordre  $n$  et  $y \in H$  d'ordre  $p$ . Pour  $k \in \mathbb{N}^*$

$$(x, y)^k \Leftrightarrow (x^k, y^k) = (e_G, e_H)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \mid k \\ p \mid k \end{cases} \Leftrightarrow np \mid k$$

$$\Leftrightarrow G \times H \text{ cyclique}$$

- Autre méthode :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$G \times H \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\simeq \mathbb{Z}/(np)\mathbb{Z} \quad \text{cyclique}$$

2. Soient  $H, K$  sous-groupes de  $G$  et  $\varphi$  (qui n'est pas forcément un morphisme) tel que

$$\varphi : \begin{cases} H \times K \rightarrow G \\ (h, k) \mapsto hk \end{cases}$$

On note  $HK = \varphi(H \times K)$ .

Soient  $(h, k), (h_0, k_0) \in H \times K$

$$\varphi(h, k) = \varphi(h_0, k_0)$$

$$\Leftrightarrow hk = h_0k_0$$

$$\Leftrightarrow h_0^{-1}h = k_0k^{-1} = t \in H \cap K$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in H \cap K, \begin{cases} h = k_0t \\ k = t^{-1}h_0 \end{cases}$$

$\varphi$  est injectif ssi  $H \cap K = \{e_G\}$ , c'est automatique si  $|H| \wedge |K| = 1$  (en étudiant les ordres et les divisibilités de ceux-ci).

Dans ce cas  $|HK| = |\text{im } \varphi| = |H| \cdot |K|$

Dans le cas général

$$|\varphi^{-1}\{\varphi(h_0, k_0)\}| = |H \cap K|$$



# Groupe Diédral

Construction et propriétés du groupe diédral.

## Construction

Soient  $n \geq 2$  et  $A_0, \dots, A_{n-1}$  des points de  $\mathbb{R}^2$  d'afixes

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, A_i : e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

On considère  $\Gamma$  l'ensemble des isométries qui préservent le polygone  $A_0, \dots, A_{n-1}$ .

Comme une transformation affine préserve les barycentres, tout élément de  $\Gamma$  préserve l'isobarycentre (l'origine).

On a alors

$$\Gamma \in O(\mathbb{R}^2)$$

Et donc tout  $\gamma \in \Gamma$ , est soit une rotation ou une réflexion.

- Si  $\gamma$  est une rotation :  $\gamma(A_0) \in \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$  d'où  $\gamma = \text{rot}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$  pour un  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

On note  $r$  la rotation d'angle  $\frac{2\pi}{n}$

$$\gamma = r^k$$

- Si  $\gamma$  est une réflexion

Soit  $s$  la réflexion à l'axe des abscisses,  $s \in \Gamma$ .

$s \circ \gamma \in \Gamma$  est une rotation car

$$\det(s \circ \gamma) = (-1)^2 = 1$$

Ainsi  $\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  tel que

$$s \circ \gamma = r^k \Leftrightarrow \gamma = s \circ r^k$$

Donc

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{r^k, sr^k\}$$

## Groupe

$\Gamma$  est un sous-groupe de  $O(\mathbb{R}^2)$ .

- $|\Gamma| = 2n$
- $\Gamma = \langle s, r \rangle$

# Algèbre engendrée

Pour  $(A, +, \times, \cdot)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $\alpha \in A$ , définition et propriétés de  $\mathbb{K}[\alpha]$ .

Soit  $(A, +, \times, \cdot)$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $\alpha \in A$ . Si on pose le morphisme d'algèbre

$$\theta_\alpha : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow A \\ P = \sum_{k=0}^d a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^d a_k \alpha^k \end{cases}$$

On note  $\mathbb{K}[\alpha] = \text{im } \theta_\alpha$  qui est la plus petite sous-algèbre de  $A$  contenant  $\alpha$ .

De plus  $\ker \theta_\alpha$  est un idéal de  $\mathbb{K}[X]$ .

- Si  $\theta_\alpha$  est injectif et  $\mathbb{K}[\alpha] \simeq \mathbb{K}[X]$  qui est donc de dimension infinie.
- Sinon on dispose d'un unique polynôme  $\pi_\alpha$  unitaire tel que  $\ker \theta_\alpha = \pi_\alpha \mathbb{K}[X]$  (par principalité).

$\pi_\alpha$  est appelé polynôme minimal de  $\alpha$ ,  $\mathbb{K}[\alpha]$  est de dimension  $d = \deg \pi_\alpha$  et  $(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$  en est une base.

## Démonstration

- Soit  $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$  et  $d = \deg B$ , par l'existence et l'unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

- Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $G$  un supplémentaire de  $\ker u$ , montrons que  $u|_G$  est un isomorphisme de  $G \rightarrow \text{im } u$ .

$\ker u|_G = \ker u \cap G = \{0\}$  par complémentarité.

Soit  $y \in \text{im } u$ ,  $y = u(x)$ ,  $x = a + b$  avec  $(a, b) \in \ker u \times G$ .

$$\begin{aligned} u(x) &= \underbrace{u(a)}_0 + u(b) \\ y &= u|_G(b) \end{aligned}$$

Soit  $y \in \text{im } u|_G$ ,  $y = u|_G(x) = u(x)$ .

D'où  $\text{im } u = \text{im } u|_G$ .

- Si  $\theta_\alpha$  est injectif, c'est un isomorphisme de  $\mathbb{K}[X]$  sur  $\text{im } \theta_\alpha = \mathbb{K}[\alpha]$ .
- Sinon on a  $\pi_\alpha$  de degré  $d$  et

$$\mathbb{K}[X] = \pi_\alpha \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

$\mathbb{K}_{d-1}$  est un supplémentaire de  $\ker \theta_\alpha$ , ainsi  $\theta_\alpha|_{\mathbb{K}_{d-1}[X]}$  est un isomorphisme de  $\mathbb{K}_{d-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}[\alpha]$ , d'où

$$\dim \mathbb{K}[\alpha] = d$$

Et l'image de la base canonique de  $\mathbb{K}_{d-1}[X]$  par  $\theta|_{\mathbb{K}_{d-1}[X]}$  est

$$(1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1})$$

Qui est donc une base de  $\mathbb{K}[\alpha]$ .

## Condition d'intégrité d'une sous-algèbre engendrée

Pour  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $\alpha \in A$  tel que  $\theta_\alpha$  n'est pas injectif, sous quelle condition  $\mathbb{K}[\alpha]$  est elle intègre ?

Soit  $A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre et  $\alpha \in A$  tel que  $\theta_\alpha$  n'est pas injectif.

$\mathbb{K}[\alpha]$  est intègre ssi  $\pi_\alpha$  est irréductible.

### Démonstration

- Si  $\pi_\alpha$  irréductible, soit  $x = P(\alpha), y = Q(\alpha) \in \mathbb{K}[\alpha]$  tels que  $xy = 0$ .

$$PQ(\alpha) = 0$$

$$\pi_\alpha \mid PQ$$

Donc par le lemme d'Euclide,

$$\text{ou } \begin{array}{l} \pi_\alpha \mid P \Leftrightarrow x = 0 \\ \pi_\alpha \mid Q \Leftrightarrow y = 0 \end{array}$$

- Par contraposé, si  $\pi_\alpha$  non irréductible,  $\pi_\alpha = PQ$  avec  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  non inversible ou associé à  $\pi_\alpha$ .

$$\underbrace{P(\alpha)}_{\neq 0} \underbrace{Q(\alpha)}_{\neq 0} = \pi_\alpha(\alpha) = 0$$

D'où  $\mathbb{K}[\alpha]$  non intègre.

## inversibilité des éléments d'une sous-algèbre engendrée

Soit  $\mathbb{K}[\alpha]$  une sous-algèbre de  $A$  de dimension finie pour  $\alpha \in A$ , sous quelle condition  $x \in \mathbb{K}[\alpha]$  est-il inversible ?

Soit  $\mathbb{K}[\alpha]$  une sous-algèbre de  $A$  de dimension finie pour  $\alpha \in A$ .  
Soit  $x = P(\alpha) \in \mathbb{K}[\alpha]$ .

$$x \in \mathbb{K}[\alpha]^\times \text{ ssi } P \wedge \pi_\alpha = 1$$

On en déduit que  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps ssi  $\pi_\alpha$  est irréductible.

### Démonstration

Par propriété de sous-algèbre

$$\mathbb{K}[\alpha]^\times = A^\times \cap \mathbb{K}[\alpha]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{K}[\alpha]^\times &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{K}[\alpha], xy = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], PQ(\alpha) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], \pi_\alpha \mid (PQ - 1) \\ &\Leftrightarrow \exists Q, V \in \mathbb{K}[X], PQ - 1 = \pi_\alpha V \\ &\Leftrightarrow \exists Q, V \in \mathbb{K}[X], PQ - \pi_\alpha V = 1 \\ &\Leftrightarrow P \wedge \pi_\alpha = 1 \end{aligned}$$

Ainsi si  $\pi_\alpha$  irréductible, pour tout  $x = P(\alpha) \in \mathbb{K}[\alpha] \setminus \{0\}$ ,  $P \wedge \pi_\alpha = 1$  d'où  $x$  inversible et  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps.

Et si  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps, alors il est intègre et  $\pi_\alpha$  irréductible.

# Algèbres et extensions de corps

Propriétés des algèbres en lien avec les extensions de corps.

---

Soient  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$  deux corps. On remarque que  $\mathbb{L}$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{L}$  qui admet un polynôme annulateur dans  $\mathbb{K}[X]$  et  $\pi_\alpha$  son polynôme minimal.

$\pi_\alpha$  est irréductible dans  $\mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps.

## Démonstration

1.  $P, Q \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $\pi_\alpha = PQ$ .

Dans  $\mathbb{L}$

$$P(\alpha)Q(\alpha) = \pi_\alpha(\alpha) = 0$$

Donc  $P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \pi_\alpha \mid P$  ou  $Q(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \pi_\alpha \mid Q$  donc  $\pi_\alpha$  irréductible.

Ainsi  $\mathbb{K}[\alpha]$  est un corps.

# Nombres algébriques

Définitions et propriétés des nombres algébriques sur un corps  $\mathbb{K}$ .

---

Soit  $\alpha \in A$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre, on dit que  $\alpha$  est algébrique sur  $\mathbb{K}$  s'il admet un polynôme annulateur dans  $\mathbb{K}[X]$ .

Par défaut  $\alpha$  algébrique veut dire algébrique sur  $\mathbb{Q}$ , quitte à les échanger prenons  $P(\alpha) = 0, P \in \ker \theta_\alpha = \pi_\alpha \mathbb{K}[X]$ .

## Propriété

1. Soit  $\alpha \in \mathbb{L}$  une extension de corps de  $\mathbb{K}$ ,  $\alpha$  algébrique sur  $\mathbb{K}$ .

Pour tout  $P \in \mathbb{K}[X]$  unitaire,  $P = \pi_\alpha$  ssi  $P(\alpha) = 0$  et  $P$  irréductible sur  $\mathbb{K}[X]$ .

## Démonstration

1. Sens direct connu. Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  unitaire, irréductible et annulateur de  $\alpha$ .

On a  $\pi_\alpha \mid P$ , or  $P$  irréductible donc  $P$  et  $\pi_\alpha$  sont associés, or tout deux unitaires donc  $P = \pi_\alpha$ .

## Théorème de la base téléscopique

Énoncer et démonstration du  
théorème de la base  
téléscopique.

Soit  $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$  deux corps tel que  $\mathbb{L}$   
est de dimension finie sur  $\mathbb{K}$ .

Soient

- $E$  un  $\mathbb{L}$ -ev, (et donc un  $\mathbb{K}$ -ev).
- $e = (e_1, \dots, e_n)$  base de  $E$  sur  $\mathbb{L}$ .
- $z = (z_1, \dots, z_p)$  base de  $\mathbb{L}$  sur  $\mathbb{K}$ .

Alors  $F = (z_i e_j)_{\substack{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$  est une  
base de  $E$  sur  $\mathbb{K}$

Ainsi  $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{L}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ .

### Démonstration

- Soit  $\omega \in E$ , on dispose de  
 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$  tels que

$$\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$$

On dispose de  $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} z_i$$

Ainsi

$$\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} z_i e_j$$

- Soit  $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{\llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket}$  tel que

$$\sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^p a_{ij} z_i}_{\lambda_j \in \mathbb{L}} e_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$$

Donc pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0$ .

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} z_i = 0$$

Donc par liberté de  $z, a_{ij} = 0$   
pour tout  $i, j$ .

# Clôture algébrique des rationnels

Propriétés de la clôture algébrique de  $\mathbb{Q}$ .

Notons  $\mathbb{K}$  l'ensemble des  $\alpha \in \mathbb{C}$  algébriques sur  $\mathbb{Q}$ .

$\mathbb{K}$  est un corps algébriquement clos.

## Démonstration : corps

- Soit  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , montrons que  $\alpha\beta, \alpha + \beta \in \mathbb{K}$ .

On utilise le fait que  $z$  algébrique dans  $\mathbb{L}$  ssi  $\mathbb{L}[z]$  de dimension finie sur  $\mathbb{L}$  (car  $z$  admet un polynôme annulateur dans  $\mathbb{L}[X]$ ).

- ▶ Donc  $\mathbb{Q}[\alpha]$  est de dimension finie sur  $\mathbb{Q}$ ,
- ▶  $\beta$  algébrique sur  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[\alpha]$  donc algébrique sur  $\mathbb{Q}[\alpha]$ .
- ▶ Donc  $\mathbb{Q}[\alpha][\beta]$  est de dimension finie sur  $\mathbb{Q}[\alpha]$ , et donc par le théorème de la base télescopique, sur  $\mathbb{Q}$ .
- ▶ Or  $\mathbb{Q}[\alpha + \beta], \mathbb{Q}[\alpha\beta] \subseteq \mathbb{Q}[\alpha][\beta]$ , donc  $\mathbb{Q}[\alpha + \beta]$  et  $\mathbb{Q}[\alpha\beta]$  sont de dimension finie sur  $\mathbb{Q}$ .
- Soit  $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ , soit  $\pi_\alpha$  son polynôme minimal et  $d = \deg \pi_\alpha$ .

$$\underbrace{X^d \pi_\alpha \left( \frac{1}{X} \right)}_{\in \mathbb{Q}[X]} \text{ annule } \frac{1}{\alpha}$$

Donc  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{K}$

- $1 \in \mathbb{K}$  car  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ .

## Démonstration : clôture

Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ . Soit  $\alpha \in \mathbb{C}$  racine de  $P$ , montrons que  $\alpha \in \mathbb{K}$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$ ,  $a_k \in \mathbb{K}$  donc  $\mathbb{Q}[a_k]$  de dimension finie sur  $\mathbb{Q}$ .

Par récurrence on a

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}[a_0][a_1] \cdots [a_d]$$

De dimension finie sur  $\mathbb{Q}$ .

Comme  $P \in \mathbb{L}[X]$  annule  $\alpha$ ,  $\mathbb{L}[\alpha]$  est de dimension finie sur  $\mathbb{L}$  et donc sur  $\mathbb{Q}$ , id est  $\alpha \in \mathbb{K}$ .



## Exercice : Gauss-Lucas

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , montrer que les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ , montrer que les racines de  $P'$  sont dans l'enveloppe convexe des racines de  $P$ .

On écrit

$$P = c \prod_{k=1}^N (X - a_k)^{m_k}$$

Soit  $b$  une racine de  $P'$ .

Si  $b \in \{a_1, \dots, a_N\}$ ,  $b$  est nécessairement dans leur enveloppe convexe.

Sinon

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k}$$

$$0 = \frac{P'}{P}(b) = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{b - a_k} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{\overline{b - a_k}}$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|b - a_k|^2} (b - a_k)$$

$$b = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{a_k m_k}{|b - a_k|^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|b - a_k|^2}}$$

$$= \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$$

Où  $\lambda_k = \frac{\frac{a_k m_k}{|b - a_k|^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|b - a_i|^2}}$  (on a alors  $\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1$ ).

$b$  est donc un barycentre à coefficients positifs des  $a_1, \dots, a_n$  et est donc dans leur enveloppe convexe.

## Exercice : Dénombrement de morphismes

1. Dénombrer les morphismes de  $G_1$  vers  $G_2$ , avec  $|G_1| \wedge |G_2| = 1$ .
2. Dénombrer les morphismes de  $G_1$  vers  $G_2$  où  $G_1$  et  $G_2$  sont cyclique.
3. Même chose avec les injections et les surjections.

### Remarque générale

Soit  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  morphisme de groupe,  $x \in G_1$

$$\varphi(x)^{\text{ord}(x)} = e_{G_2}$$

$$\text{donc } \text{ord}(\varphi(x)) \mid |G_2|$$

$$\text{et } \text{ord}(\varphi(x)) \mid |G_1|$$

Ainsi  $\text{ord}(\varphi(x)) \mid |G_1| \wedge |G_2|$ .

### Exercices

1. Soit  $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$  morphisme,  $x \in G_1$ . Par la remarque ci dessus  $\text{ord}(\varphi(x)) \mid p \wedge q = 1$  donc  $\varphi(x) = 0$ , il n'y a donc que morphisme le morphisme triviale.

2. Notons  $G_1 = \langle a \rangle$ , posons

$$\theta : \begin{cases} \text{hom}(G_1, G_2) & \rightarrow G_2 \\ \varphi & \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

Qui est injectif car tout morphisme est uniquement déterminé par son image du générateur  $a$ .

Pour tout  $\varphi \in \text{hom}(G_1, G_2)$  on a

$$\varphi(a)^{|G_1|} = \varphi(a^{|G_1|}) = \varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$$

D'où

$$\text{im } \theta \subset \{y \in G_2 \mid y^{|G_1|} = e_{G_2}\}$$

Soit  $y \in \text{im } \theta$  posons

$$\varphi : \begin{cases} G_1 & \rightarrow G_2 \\ x = a^k & \mapsto y^k \end{cases}$$

Qui ne dépend pas du  $k$  choisi, soit  $x = a^k = a^l$  :

$$a^{k-l} = e_{G_1}$$

$$\text{donc } |G_1| \mid k-l$$

$$\text{et } y^{k-l} = e_{G_2}$$

$$\text{d'où } y^k = y^l$$

Donc  $\theta(\varphi) = y$ .

$$|\text{hom}(G_1, G_2)|$$

$$= |\text{im } \theta|$$

$$= \left| \{y \in G_2 \mid y^{|G_1|} = e_{G_2}\} \right|$$

$$= |\{y \in G_2 \mid \text{ord}(y) \mid |G_1|\}|$$

$$= \bigcup_{d \mid |G_1|} \{y \in G_2 \mid \text{ord}(y) = d\}$$

$$= \sum_{d \mid |G_1| \wedge |G_2|} \varphi(d)$$

$$= |G_1| \wedge |G_2|$$

3. • Pour les injections on veut  $\varphi \in \text{hom}(G_1, G_2)$  tels que  $\ker \varphi = \{e_{G_1}\}$ .

Pour  $k \in \llbracket 1, |G_1| - 1 \rrbracket$ ,

$$\varphi(a)^k = \varphi(a^k) \neq 0$$

$$\text{ord } \varphi(a) = |G_1|$$

Si  $|G_1| \nmid |G_2|$ ,  $G_2$  ne contient pas éléments d'ordre  $|G_1|$  donc aucune injection.

Si  $|G_1| \mid |G_2|$ , il y a  $\varphi(|G_1|)$  éléments d'ordre  $|G_1|$ , donc autant d'injections.

- Pour les surjections on veut

$\text{ord } \varphi(a) = |G_2|$ , donc

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |G_2| \nmid |G_1| \\ \varphi(|G_2|) & \text{sinon} \end{cases}$$

## Exercice : Union de sous espaces vectoriels

$E$  un  $\mathbb{K}$  espace vectoriel.

1. Soit  $F, G$  deux sev de  $E$ ,  
montrer que  $F \cup G$  sev ssi  $F \subseteq G$  ou  $G \subseteq F$ .
2. Supposons  $\mathbb{K}$  infini, soit  
 $F_1, \dots, F_n$   $n$  sevs, montrer que si  
 $\bigcup_{k=1}^n F_k$  est un sev, alors il  
existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que

$$\bigcup_{k=1}^n F_k = F_i$$

1. Soit  $F, G$  sevs de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev tel  
que  $F \cup G$  est un sev.

Si  $F \not\subseteq G$ , on pose  $z \in F \setminus G$ ,  
soit  $x \in G$ .

$$x + z \in F \cup G$$

$x + z \notin G$  car sinon

$$F \setminus G \ni z = \underbrace{(x + z)}_{\in G} - \underbrace{x}_{\in G} \in G$$

Donc  $x + z \in F$  d'où

$$x = (x + z) - z \in F$$

Et  $G \subseteq F$ .

2. Soient  $F_1, \dots, F_n$  sevs de  $E$  tels  
que  $\bigcup_{k=1}^n F_k$  est un sev.

Notons  $U_m = \bigcup_{k=1}^m F_k$  pour  $m \in \mathbb{N}$ .

On a déjà fait le cas  $n = 2$  et le  
cas  $n = 1$  est trivial.

Supposons la propriété vraie  
pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

Si  $U_n \subseteq F_{n+1}$  alors on a fini.

Si  $F_{n+1} \subseteq U_n$  alors par  
hypothèse de récurrence, on  
dispose de  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$U_{n+1} = U_n = F_i$$

Sinon, on dispose de

$$x \in F_{n+1} \setminus U_n \subseteq U_{n+1}$$

$$y \in U_n \setminus F_{n+1} \subseteq U_{n+1}$$

Soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$  deux à  
deux distincts.

$$z_k = x + \lambda_k y$$

Par le lemme des tiroirs, on  
dispose de  $k \neq l$  et  $j$  tel que  
 $z_k, z_l \in F_j$

Si  $j = n + 1$

$$z_k - z_l = \underbrace{(\lambda_k - \lambda_l)}_{\neq 0} y \in F_{n+1}$$

Et  $y \in F_{n+1}$  impossible.

Si  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\lambda_l z_k - \lambda_k z_l = \underbrace{(\lambda_l - \lambda_k)}_{\neq 0} x \in F_j$$

Et  $x \in F_j$  impossible.

## Somme directe de sous espaces vectoriels

Définition et propriétés de  
somme directe de sev.

Soient  $F_1, \dots, F_n$  sev de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.  
On dit qu'ils sont en somme  
directe si pour tout  $x \in \sum_{k=1}^n F_k$

$$\exists! (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k, \quad x = \sum_{k=1}^n x_k$$

Il y a équivalence entre  $F_1, \dots, F_n$   
en somme directe et

1.  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k, \quad \sum_{k=1}^n x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k = 0.$
2.  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad F_i \cap \left( \sum_{i \neq k}^n F_k \right) = \{0\}$
3.  $F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k = \{0\}$

**En dimension finie**

4.  $\dim \sum_{k=1}^n F_k \leq \sum_{k=1}^n \dim F_k$   
avec égalité ssi les  $F_1, \dots, F_n$   
sont en somme directe.

**Démonstration**

1.  $\Rightarrow$  il s'agit d'un cas particulier  
pour  $x = 0$ .

$$\Leftarrow \text{Supposons } \sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x'_k$$

Alors  $\sum_{k=1}^n (x_k - x'_k) = 0$  donc  
 $x_k = x'_k$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

3.  $\Rightarrow$  Soit  $x \in F_n \cap \bigoplus_{k=1}^n F_k$

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{n-1} 0 + x \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 0 \quad \text{car } x \in \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k \end{aligned}$$

Donc par unicité de la  
décomposition  $x = \sum_{k=1}^n 0 = 0$ .

$\Leftarrow$  Soit  $x_1, \dots, x_n \in E$  tels que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n x_k &= 0 \\ -x_n &= \sum_{k=1}^{n-1} x_k \in F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k \end{aligned}$$

Donc  $x_n = 0$  et  $\sum_{k=1}^{n-1} x_k = 0$   
donc  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ .

## Espaces supplémentaires

Définition, propriétés des  
espaces supplémentaires.

---

Soient  $F_1, \dots, F_n$  sevs de  $E$  un  $\mathbb{K}$ -  
ev. On dit qu'ils sont  
supplémentaires si

$$E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

Et on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \sum_{k=1}^n F_k \\ \dim(E) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k \\ \dim(E) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k) \end{cases}$$

## Notations de matrices

Notations de matrices :  
changements de bases, matrices  
d'un endomorphisme, ...

Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  bases de  $E$  et  $f = (f_1, \dots, f_p)$  base de  $F$ .

### Applications linéaires

$$\mathcal{M}_{e,f}(u) = \mathcal{M}_{e \leftarrow f}(u) = \mathcal{M}_e^f(u) \in M_{pn}(\mathbb{K})$$

Et la matrice est alors

$$\mathcal{M}_{f \leftarrow e}(u) = \begin{matrix} & u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{matrix} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Où pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^p a_{kj} f_k$$

### Endomorphismes

$$\mathcal{M}_e(u) = \mathcal{M}_{e \leftarrow e}(u) = \mathcal{M}_e^e(u)$$

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^p a_{kj} f_k$$

### Changement de base

$$P_{e \rightarrow e'} = \mathcal{M}_e(e') = \mathcal{M}_{e \leftarrow e'}(\text{id})$$

## Exercice : Noyaux et images itérées

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

Que peut on dire des suites

$(\ker u^k)_k$  et  $(\operatorname{im} u^k)_k$  ?

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev.

### Dimension quelconque

- Si  $\ker u^k = \ker u^{k+1}$  pour un  $k \in \mathbb{N}$  alors pour tout  $n \geq k$ ,  $\ker u^k = \ker u^n$ .
- De même pour les images.

### Dimension finie

En notant  $n = \dim E$  on a

$$d_k = \dim \ker u^k \in \llbracket 0, n \rrbracket \nearrow$$

$$r_k = \operatorname{rg} u^k \in \llbracket 0, n \rrbracket \searrow$$

Ces deux suites sont donc stationnaires, on peut poser

$$m_K = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

$$m_I = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \operatorname{im} u^k = \operatorname{im} u^{k+1}\}$$

On a de plus  $m_K = m_I = m$ .

Et en notant

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k = \ker u^m$$

$$I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{im} u^k = \operatorname{im} u^m$$

Qui sont les valeurs auxquelles les suites stationnent, on a

- $K \oplus I = E$
- $K, I$  stables par  $u$
- $u|_K^K$  est nilpotent
- $u|_I^I$  est inversible.
- Si  $E = K' \oplus I'$  avec  $K', I'$  stables par  $u$ ,  $u|_{K'}^{K'}$  nilpotent et  $u|_{I'}^{I'}$  inversible, alors  $K' = K$  et  $I' = I$ .

### Démonstration

- Soit  $l \geq k$ , on a évidemment  $\ker u^l \subseteq \ker u^{l+1}$ .

Soit  $x \in \ker u^{l+1}$  :

$$u^{k+1}(u^{l-k}(x)) = 0$$

$$u^{l-k}(x) \in \ker u^{k+1} = \ker u^k$$

$$u^k(u^{l-k}(x)) = 0$$

$$x \in \ker u^l$$

- Soit  $l \geq k$ , on a évidemment  $\operatorname{im} u^{l+1} \subseteq \operatorname{im} u^l$ .

Soit  $u^l(x) = y \in \operatorname{im} u^l$  :

$$u^{l-k}(u^k(x)) = y$$

$$u^k(x) \in \operatorname{im} u^k = \operatorname{im} u^{k+1}$$

$$u^k(x) = u^{k+1}(x')$$

$$u^{l-k}(u^{k+1}(x')) = y$$

$$y \in \operatorname{im} u^{l+1}$$

### Dimension finie

- Par le théorème de rang on a  $d_k = n - r_k$ , donc si  $r_k$  est constante à partir du rang  $m_I$ , alors  $d_k$  est aussi constante à partir de ce rang, donc  $m_K = m_I$ .

- Soit  $y \in K \cap I$ , on dispose de  $x \in E$  tel que

$$u^m(x) = y$$

$$u^m(y) = 0$$

$$u^{2m}(x) = 0$$

$$x \in \ker u^{2m} = \ker u^m$$

$$u^m(x) = y = 0$$

donc  $K \oplus I = E$ .

- Soit  $x \in K = \ker u^m$

$$u^m(u(x)) = u^{m+1}(x) = 0$$

donc  $u(x) \in K$ .

- Soit  $y \in I = \operatorname{im} u^m$ , on dispose de  $x \in E$  tel que

$$u^m(x) = y$$

$$u^{m+1}(x) = u(y) \in \operatorname{im} u^m$$

$$u(y) = u^m(x')$$

et  $u(y) \in I$ .

- Notons  $\tilde{u} = u|_K^K$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $K$ .

$$\tilde{u}^m(K) = u^m(K) = \{0\}$$

Donc  $\tilde{u}$  est nilpotent d'indice  $m$ .

- Notons  $\tilde{u} = u|_I^I$  l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $I$ .

$$\tilde{u}(I) = u(\operatorname{im} u^m) = \operatorname{im} u^{m+1}$$

$$= \operatorname{im} u^m = I$$

Donc  $\tilde{u}$  est inversible.

- Soit  $K' \oplus I' = E$  qui respectent les hypothèses.

On dispose de  $d \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$u^d(K') = \{0\}$$

$$K' \subseteq \ker u^d \subset K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k$$

Et on a

$$u(I') = I'$$

$$u^m(I') = I'$$

$$I' \subseteq \operatorname{im} u^m = I$$

Donc

$$\dim K' \leq \dim K$$

$$\dim I' \leq \dim I$$

Et on obtient l'égalité par complémentarité, d'où  $K' = K$  et  $I' = I$ .

## Développement du déterminant par ligne ou par colonne

Formules et définitions du développement du déterminant par ligne ou par colonne.

---

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$

- pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

- pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

Où  $\tilde{A}_{ij} \in M_{n-1}(\mathbb{K})$  est la matrice  $A$  privée de sa  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne.

On appelle  $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$  cofacteur.

On appelle  $\text{com}(A)$  la matrice des cofacteurs.

Et on a

$$A \cdot \text{com}(A)^T = \det(A) I_n$$



## Exercice : rang d'une comatrice

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ( $n \geq 3$ ), calculer  $\text{rg com}(A)$  en fonction de  $\text{rg } A$ .

---

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 3$ .

- Si  $\text{rg } A = n$ ,  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  donc  $\text{com } A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $\text{rg com}(A) = n$ .
- Si  $\text{rg } A \leq n - 2$ , pour tout  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  la matrice  $\tilde{A}_{ij}$  extraite de  $A$  privée de sa  $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne est de rang inférieur à  $n - 2$  et n'est donc pas inversible,  $\text{com } A = 0$  et  $\text{rg com}(A) = 0$ .
- Si  $\text{rg } A = n - 1$ , on dispose d'une matrice extraite de taille  $n - 1$  inversible, donc au moins un des cofacteur est non nul d'où  $\text{rg com}(A) \geq 1$ .

De plus

$$A^T \text{com}(A) = \det(A)I_n = 0$$

Donc  $\text{im com}(A) \subseteq \ker A^T$  et  $\dim \ker A^T = 1$  d'où  $\text{rg com}(A) \leq 1$ .

# Algorithme du pivot de Gauss

Description de l'algorithme du pivot de Gauss, et propriétés qui en découlent.

## Opérations, représentation matricielle

Notons  $(E_{ij})_{ij}$  la base canonique de  $M_n(\mathbb{K})$ . On a

$$E_{ik}E_{lj} = \delta_{kl}E_{ij}$$

Pour  $A \in M_{np}(\mathbb{K})$

$$E_{kl}^{(n)} A = \left( \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array} \right)$$

$$AE_{kl}^{(p)} = \left( \begin{array}{ccc|ccc} & & & C_k & & \\ 1 & \dots & l & \dots & n \end{array} \right)$$

Ainsi on peut définir

- $T_{kl}(\lambda) = I_n + \lambda E_{kl}^{(n)}$  la transvection sur les lignes ( $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_l$ )
- $T'_{kl}(\lambda) = I_p + \lambda E_{kl}^{(p)}$  la transvection sur les colonnes ( $C_l \leftarrow C_l + \lambda C_k$ )
- $P_{kl} = I_n - E_{kk}^{(n)} - E_{ll}^{(n)} + E_{kl}^{(n)} + E_{lk}^{(n)}$  la transposition de lignes ( $L_l \leftrightarrow L_k$ )
- $P_{kl} = I_p - E_{kk}^{(p)} - E_{ll}^{(p)} + E_{kl}^{(p)} + E_{lk}^{(p)}$  la transposition de colonnes ( $C_l \leftrightarrow C_k$ )

## Algorithme

Prenons  $A = (C_1 \dots C_n) \in M_n(\mathbb{K})$

- Si  $A = 0$  fini.
- Soit  $j = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid C_k \neq 0\}$

$$A^{(1)} : C_j \leftrightarrow C_1$$

- Soit  $i = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_{i1} \neq 0\}$ 
  - Si  $i = 1$  on effectue  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$  et on prend  $i = 2$ .

$$A^{(2)} : L_1 \leftarrow L_1 + \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{i1}}\right) L_i$$

$$A^{(2)} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & * & \dots & * \\ * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & * \end{array} \right)$$

- Pour tout  $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$  on effectue

$$A^{(i+1)} : L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$$

Ainsi

$$A^{(n+1)} = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \tilde{A} \end{array} \right)$$

On répète l'algorithme sur  $\tilde{A}$ , on obtient alors

$$\tilde{\tilde{A}} = \left( \begin{array}{cc|c|ccc} 1 & (*) & * & & & \\ & \ddots & \vdots & & (*) & \\ & & 1 & * & & \\ \hline & & & \mu & * & \dots & * \\ \hline & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

Avec  $\mu \neq 1$  ssi le blocs de zéros à la fin est de taille nulles (on ne dispose pas des lignes nécessaires pour se ramener à  $\mu = 1$ ).

On peut alors finalement effectuer pour tout  $i \in \llbracket 1, \text{rg } A \rrbracket$ , puis pour  $j \in \llbracket i + 1, n \rrbracket$

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} : C_j \leftarrow C_j - \frac{\tilde{\tilde{A}}_{ij}}{\tilde{\tilde{A}}_{ii}} C_i$$

$$\tilde{\tilde{\tilde{A}}} = \left( \begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{array} \right)$$

On remarque que si  $A$  est inversible, les transpositions sont inutiles car il n'existe pas de colonnes nulles.

## Propriétés

- Les transvections engendrent  $\text{SL}_n(\mathbb{K})$ .
- Les transvections et une dilatation (pour atteindre n'importe quel déterminant) suffisent à engendrer  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

## Intersection d'hyperplans

Propriétés sur les intersections  
d'hyperplans.

---

Soient  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^p$

$$\begin{aligned} \dim \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k &= n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \\ &\geq n - p \end{aligned}$$

### Démonstration

On montre l'inégalité par  
récurrence sur  $p$ .

Montrons l'égalité.

Quitte à extraire et renuméroter,  
 $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  est libre.

Or pour tout  $k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$ ,

$$\varphi_k \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

$$\text{Donc } \bigcap_{i=1}^r \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi_k$$

$$\text{D'où } \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k$$

Donc (cf. lemme sur la liberté  
d'une famille de formes linéaires)

$$\begin{aligned} \theta : \begin{cases} E & \rightarrow \mathbb{K}^r \\ x & \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective} \\ \ker \theta = \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k \end{aligned}$$

Donc par le théorème du rang

$$\dim \left( \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \right) = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

## Liberté d'une famille de l'espace dual

Démonstration d'une CNS pour  
la liberté d'une famille de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$   
où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev.

Soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

La famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$  est libre ssi

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^p \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

### Démonstration

- Supposons  $\theta$  surjective, on considère  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  tels que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k = 0$$

Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on dispose de  $x \in E$  tel que

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_i(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\left( \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k \right)(x) = 0 = \lambda_i$$

- Par contraposé supposons  $\theta$  non surjective :  $\text{rg } \theta \leq p - 1$ .

On dispose de  $H$  hyperplan tel que  $\text{im } \theta \subseteq H$ . Donc on dispose de  $(\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}$  tels que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \mid \sum_{k=1}^p \alpha_k x_k = 0 \right\}$$

Donc pour tout  $x \in E$ ,

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \in \text{im } \theta \subseteq H$$

$$\sum_{k=1}^p \alpha_k \varphi_k(x) = 0$$

Donc  $\sum_{k=1}^p \alpha_k \varphi_k = 0$  et la famille est liée

## Condition de liberté d'une forme linéaire à une famille

Soit  $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

Démonstration d'une CNS pour que  $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ .

Soit  $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

Pour tout  $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$$\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

$$\text{ssi } \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$$

### Démonstration

- Si  $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ , on dispose de  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  tels que

$$\psi = \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k$$

D'où

$$\begin{aligned} \psi \left( \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \right) &= \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k \left( \bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \right) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Et donc  $\bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$ .

- Supposons  $\bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$ .

Quitte à extraire et renuméroter,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  est libre.

Or pour tout  $k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$ ,

$$\varphi_k \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

$$\text{Donc } \bigcap_{i=1}^r \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi_k$$

$$\text{D'où } \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k$$

Donc

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^r \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

Posons alors

$$\theta' : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^{r+1} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Or

$$\bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{im } \theta'$$

La famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$  est liée d'où  $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ .

## Base duale, antéduale

Définitions, propriétés, démonstrations autour des bases duales.

### Base duale

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Il existe une unique famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$  tel que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Cette famille est appelée base duale de  $e$  et est une base de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ .

Dans ce cas

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) e_k$$

$$\forall \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \psi = \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k$$

### Base antéduale

Pour toute base  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ , il existe une unique base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  tel que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  en est la base duale.

### Démonstration

- Existence / Unicité : car les formes linéaires sont uniquement déterminés par leurs images d'une base.
- Génératrice : Soit  $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\left( \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k \right) (e_i) = \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k(e_i) = \psi(e_i)$$

$$\text{Donc } \psi = \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k$$

Donc  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base.

- Soit  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \varphi_i \left( \sum_{k=1}^n x_k e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n x_k \delta_{ik} = x_i \end{aligned}$$

- Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  base de  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

Par liberté de la famille, donc bijective par argument dimensionnel.

Notons  $(b_1, \dots, b_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

La famille  $(e_k = \theta^{-1}(b_k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$  est l'unique base de  $E$  tel que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

## Lemme de factorisation

Énoncé et démonstration du lemme de factorisation en algèbre linéaire.

Soient  $E, F, G$  trois  $\mathbb{K}$ -ev

1. Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(E, G)$ , dans ce cas

$$\begin{aligned} \ker u &\subseteq \ker v \\ \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, G), \quad v &= w \circ u \end{aligned}$$

(Si  $u$  est inversible  $w = v \circ u^{-1}$ ).

2. Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(G, F)$ , dans ce cas

$$\begin{aligned} \operatorname{im} v &\subseteq \operatorname{im} u \\ \Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E), v &= u \circ w \end{aligned}$$

### Démonstration

1. • Supposons qu'il existe  $w \in \mathcal{L}(F, G)$  tel que  $v = w \circ u$ .

$$\begin{aligned} v(\ker u) &= w(u(\ker u)) \\ &= w(\{0\}) = 0 \end{aligned}$$

D'où  $\ker u \subseteq \ker v$ .

- Supposons que  $\ker u \subseteq \ker v$ .

Soient  $H, K$  tels que

$$\begin{aligned} \ker u \oplus H &= E \\ \operatorname{im} u \oplus K &= F \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \begin{cases} H &\rightarrow \operatorname{im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{cases} \\ \ker \tilde{u} &= \ker u \cap H = \{0\} \\ \dim H &= \operatorname{rg} u \end{aligned}$$

Donc  $\tilde{u}$  inversible.

On peut donc écrire

$$w : \begin{cases} F = \operatorname{im} u \oplus K &\rightarrow G \\ x = y + z &\mapsto v \circ \tilde{u}^{-1}(y) \end{cases}$$

Soit  $x = y + z \in E = \ker u \oplus H$ .

$$\begin{aligned} w \circ u(x) &= v(\tilde{u}^{-1}(u(z))) \\ &= v(z) \\ v(x) &= \underbrace{v(y)}_0 + v(z) \end{aligned}$$

2. • Supposons qu'il existe  $w \in \mathcal{L}(G, E)$  tel que  $v = u \circ w$

$$v(E) = u \circ w(E) \subseteq u(E)$$

D'où  $\operatorname{im} v \subseteq \operatorname{im} u$ .

- Supposons que  $\operatorname{im} v \subseteq \operatorname{im} u$ .

Soit  $H$  tel que  $\ker u \oplus H = E$ .

$$\begin{aligned} \tilde{u} : \begin{cases} H &\rightarrow \operatorname{im} u \\ x &\mapsto u(x) \end{cases} \\ w : \begin{cases} G &\rightarrow E \\ x &\mapsto \tilde{u}^{-1} \circ v(x) \end{cases} \end{aligned}$$

On a bien pour  $x \in E$

$$u \circ w(x) = \tilde{u}(\tilde{u}^{-1}(v(x))) = v(x)$$

## Vandermonde, interpolation de Lagrange

Définitions, propriétés et démonstrations de l'interpolation de Lagrange et des matrices des Vandermonde.

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$  deux à deux distincts.

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1}) \end{cases}$$

Pour tout  $P \in \ker \theta$ ,

$$P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$$

Donc  $P$  est de degré  $n$  avec  $n + 1$  racines distinctes, d'où  $P = 0$ .

Donc  $\theta$  est un isomorphisme.

Notons

$$e = (e_0, \dots, e_n)$$

$$c = (1, X, \dots, X^n)$$

Les bases canoniques de  $\mathbb{K}^{n+1}$  et  $\mathbb{K}_n[X]$ .

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \theta^{-1}(e_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i} = L_k(X)$$

La matrice de  $\theta$  dans les bases canoniques est appelée matrice de Vandermonde de  $a_0, \dots, a_n$ .

$$\mathcal{M}_{e \leftarrow c}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

Son déterminant vaut

$$\begin{aligned} V(a_0, \dots, a_n) &= \det(\mathcal{M}_{e \leftarrow c}(\theta)) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \end{aligned}$$

### Démonstration

Par récurrence sur  $n$ , initialisée aisément pour  $n = 1$ .

On suppose la formule pour un  $n \in \mathbb{N}$ .

$$\begin{aligned} P(X) &= V(a_0, \dots, a_n, X) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n+1} \\ 1 & X & X^2 & \dots & X^{n+1} \end{vmatrix} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+j} X^j V_j \end{aligned}$$

Où  $V_j$  est le déterminant mineur en  $(n + 2, j + 1)$ . De plus

$$\deg P \leq n + 1$$

$$\text{cd } P = V(a_0, \dots, a_n) \neq 0$$

De plus pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(a_k) = 0$  donc

$$\begin{aligned} P &= V(a_0, \dots, a_n) \prod_{k=0}^n (X - a_k) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{k=0}^n (X - a_k) \end{aligned}$$

Ainsi on peut calculer

$$\begin{aligned} P(a_{n+1}) &= V(a_0, \dots, a_{n+1}) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{k=0}^n (a_{n+1} - a_k) \\ &= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i) \end{aligned}$$



## Exercice : endomorphisme qui stabilise toutes les droites

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  qui stabilise toute les droites, qu'en dire de  $u$  ?

---

Par définition pour tout  $x \in E$ ,  $u(x) = \lambda_x x$  avec  $\lambda_x \in \mathbb{K}$ .

Soit  $x, y \in E \setminus \{0\}$ .

- Si  $(x, y)$  est liée,  $y = \alpha x$

$$\lambda_y \alpha x = u(y) = \alpha u(x) = \lambda_x \alpha x$$

$$\lambda_y = \lambda_x$$

- Sinon  $(x, y)$  est libre

$$\lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y)$$

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y$$

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

Donc pour tout  $x \in E$ ,  $\lambda_x = \lambda$  et  $u = \lambda \text{id}$ .

## Endomorphismes nilpotents

Définition d'un endomorphisme nilpotent et inégalité sur son indice.

---

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $u$  est dit nilpotent s'il existe  $q \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^q = 0$ .

On appelle indice de nilpotence la valeur

$$d = \min\{q \in \mathbb{N}^* \mid u^q = 0\}$$

On a toujours  $d \leq \dim E$ .

### Démonstration

Comme  $u^{d-1} \neq 0$  on dispose de  $x \in E$  tel que  $u^{d-1}(x) \neq 0$ .

Considérons la famille  $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$ , soient  $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}$  tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

$$\begin{aligned} u^{d-1} \left( \sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x) \right) &= \lambda_0 u^{d-1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^{d-2} \left( \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k u^k(x) \right) &= \lambda_1 u^{d-1}(x) = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{aligned}$$

$\vdots$

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{d-1} = 0$$

D'où  $d \leq n$ .