Maths

Exercice

Topologie
Exercice : jauge d'un convexe

Topologie
Adhérance
Boules et sphères
Compacité
Compacité en dimension finie
Comparaison de normes
Continuité d'une fonction
Continuité d'une fonction en un point
Continuité des applications linéaires
Continuité des formes linéaires
Densité
Distance
Fonctions K-Lipschitziennes
Interieur
Limite d'une fonction
Limites de suites
Nature topologique d'un hyperplan
Norme
Norme euclidienne
Norme opérateur
Norme produit
Points d'adhérance d'une suite
Points extrémaux d'un convexe
Théorème de Heine
Théorème des bornes atteintes
Théorèmes du point fixe
Topologie sur un espace métrique
Topologie, espace topologique
Valeurs d'adhérance d'une suite
Voisinage

30 cartes.

Norme

Définition d'une norme sur un $\mathbb{K}$-ev E.

Une norme sur un $\mathbb{K}$-ev E est une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ tel que

1. Homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E$
$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
2. Inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$
$$N(x + y) \leq N(x) + N(y)$$
3. Séparation : $\forall x \in E$
$$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Norme euclidienne

Définition et propriétés des normes euclidiennes.

Pour E un $\mathbb{R}$-ev un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Pour un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ on a l'Inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$\forall x, y \in E$$
$$\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle$$

Avec cas d'égalité si (x, y) liée.

D'un produit scalaire dérive une norme (euclidienne)

$$\|\cdot\| : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x|x\rangle} \end{cases}$$

Démonstration

- Si $x = 0$ ou $y = 0$: évident. Sinon pour $x, y \in E \setminus \{0\}, t \in \mathbb{R}$:

  $$\begin{aligned} &\langle x + ty | x + ty\rangle \\ &= t^2\langle y|y\rangle + 2t\langle x|y\rangle + \langle x|x\rangle \\ &= P(t) \end{aligned}$$

  Comme $\langle y|y\rangle > 0, \deg P = 2$. De plus par positivité de $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$:

  $$\Delta = 4\langle x|y\rangle^2 - 4\langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle \leq 0$$
  $$\langle x|y\rangle^2 \leq \langle x|x\rangle \cdot \langle y|y\rangle$$

  Avec cas d'égalité si $\Delta = 0$, c'est à dire $x + ty = 0$.

- Vérifions les axiomes

  1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E$

     $$\begin{aligned} \|\lambda x\| &= \sqrt{\langle \lambda x | \lambda x\rangle} \\ &= |\lambda|\sqrt{\langle x|x\rangle} \\ &= |\lambda|\|x\| \end{aligned}$$

  2. Soit $x \in E$ tel que $\|x\| = 0$

     $$\begin{aligned} \sqrt{\langle x|x\rangle} &= 0 \\ \langle x|x\rangle &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

  3. Soit $x, y \in E$

     $$\begin{aligned} &\|x + y\|^2 \\ &= \langle x + y | x + y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x|y\rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\underbrace{|\langle x|y\rangle|}_{\text{C-S}} \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

  Avec égalité ssi $\langle x|y\rangle \geq 0$ et égalité dans C-S : ssi x, y positivement liés.

Norme produit

Définition de la norme produit.

Soit $(E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_d, \|\cdot\|_d)$ des $\mathbb{K}$-evn.

On définit la norme produit sur $\prod_{k=1}^{d} E_k$ comme

$$N : \begin{cases} \prod_{k=1}^{d} E_k & \to & \mathbb{R}_+ \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \max_{k \in [\![1,n]\!]} \|x_k\|_k \end{cases}$$

Distance

Définition de distance.

Soit X un ensemble non vide. On appelle distance une application $d : X^2 \to \mathbb{R}_+$ tel que

1. Symétrie : $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

2. Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in X$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

3. Séparation : $\forall x, y \in X$

$$d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

Dans un evn $(E, \|\cdot\|)$ on peut définir la distance sur E associé à la norme $\|\cdot\|$:

$$d : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x, y) & \mapsto & \|x - y\| \end{array} \right.$$

Boules et sphères

Définition, propriétés des boules et sphères.

Soit E un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$. On définit les ensembles suivants

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}$$
$$B_f(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) \leq r\}$$
$$\mathbb{S}(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) = r\}$$

Si E est un $\mathbb{K}$-evn alors on a de plus la convexité de $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$.

Points extrémaux d'un convexe

Définition des points extrémaux d'un convexe et points extrémaux d'une boule.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $K \subseteq E$ convexe. On dit que $x \in K$ est extrémal si

$$\forall y, z \in K, \forall t \in]0,1[,$$
$$x = (1-t)y + tz \Rightarrow x = y = z$$

Si $\|\cdot\|$ dérive d'un produit scalaire, alors pour tout $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble des points extrémaux de $B_f(a,r)$ est $\mathbb{S}(a,r)$.

Démonstration

Pour $r = 1$ et $a = 0$: (auxquels on peut se ramener)

- Soit $x \in B(0,1)$

  $$x = (1 - \|x\|)0 + \|x\| \frac{x}{\|x\|}$$

  D'où x pas extrémal (on traite le cas $x = 0$ séparément).

- Soit $x \in \mathbb{S}(0,1)$, $y, z \in B_f(0,1), t \in]0,1[$ tel que

  $$x = (1-t)y + tz$$
  $$\|x\| = 1 \leq (1-t)\underbrace{\|y\|}_{\leq 1} + t\underbrace{\|z\|}_{\leq 1}$$

  On a égalité dans l'inégalité triangulaire : y et z positivement liés (car produit scalaire) et $\|y\| = \|z\|$ d'où $y = z = x$.

Topologie, espace topologique

Définition d'une topologie.

Soit X un ensemble, $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une topologie sur X si

1. $\{\emptyset, X\} \subseteq T$
2. Pour toute famille $\left(\Omega_i\right)_i \in T^I$
$$\bigcup_{i \in I} \Omega_I \in T$$
3. Pour tout $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \in T$
$$\bigcap_{k=1}^{n} \Omega_k \in T$$

Les éléments de T sont appelés ouverts de X.

X muni de T est appelé espace topologique.

Topologie sur un espace métrique

Définitions des ouverts / fermés d'un espace métrique.

Soit (E, d) un espace métrique.

On dit que $\Omega \subseteq E$ est un ouvert de E si

$$\forall x \in \Omega, \exists \delta > 0, B(x, r) \subseteq \Omega$$

De manière équivalente

$$\forall x \in \Omega, \Omega \in \mathcal{V}(x)$$

L'ensemble T des ouverts de E forme une topologie :

1. $\emptyset$ et E sont ouverts.
2. T est stable par union quelconque.
3. T est stable par intersection finie.

On définit de plus les fermés : le complémentaire d'un ouvert.

Démonstration

1. Évident.
2. Soit $(\Omega_i)_i \in T^I$ une famille d'ouverts. Soit $x \in W = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$.

   On dispose de $i \in I$ tel que $x \in \Omega_i$, ainsi on dispose de plus de $\delta > 0$ tel que

   $$B(x, \delta) \subseteq \Omega_i \subseteq W$$

   Donc $W \in T$: c'est un ouvert.
3. Soit $F_1, ..., F_n \in T$, soit $x \in W = \bigcap_{k=1}^{n} F_k$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on dispose de $\delta_k > 0$ tel que

   $$B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$
   $$\delta = \min_{k \in [\![1; n]\!]} \delta_k$$

   Ainsi on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

   $$B(x, \delta) \subseteq B(x, \delta_k) \subseteq F_k$$

   Donc

   $$B(x, \delta) \subseteq W$$

Limites de suites

Définitions équivalentes de limites d'une suite.

Soit (E,d) un espace métrique, $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que $l \in E$ est limite de la suite u si l'une des définitions suivantes équivalentes s'applique :

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, d(u_n, l) < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in B(l, \varepsilon)$.
3. $(d(u_n, l))_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
4. $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in V$.

Si la limite existe, alors elle est unique.

Démonstration

- Équivalence : l'écrire.
- Si $l = \lim_{n\to\infty} u_n$, prendre $l' \neq l$ et montrer que $(d(l', u_n))_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$.

Valeurs d'adhérance d'une suite

Définitions et propriétés sur les valeurs d'adhérance d'une suite.

Soit (E, d) un espace métrique, $u = \left(u_n\right)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $l \in E$ est une valeur d'adhérance de u s'il existe φ extractrice tel que $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \xrightarrow[n \to \infty]{} l$.

Une suite qui à deux valeurs d'adhérance diverge.

Comparaison de normes

Définitions de comparaison de normes, propriétés.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E.

On dit que $\|\cdot\|_2$ est plus fine de $\|\cdot\|_1$ s'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in E,\ \|x\|_1 \leq \alpha \|x\|_2$$

Dans ce cas :

1. Pour tout $a \in E$ et $r > 0$
$$B_2(a, r) \subseteq B_1(a, \alpha r)$$
2. Si $\Omega \subseteq E$ est ouvert pour $\|\cdot\|_1$ est ouvert pour $\|\cdot\|_2$
3. Toute suite bornée pour $\|\cdot\|_1$ l'est pour $\|\cdot\|_2$.
4. Toute suite convergente pour $\|\cdot\|_1$ l'est pour $\|\cdot\|_2$.

On dit que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes si chacune est plus fine que l'autre. C'est une relation d'équivalence.

Adhérance

Définition de l'adhérance, caractérisation séquentielle.

Soit (E, d) un espace métrique, $A \subseteq E$ une partie. Un point $x \in A$ est dit adhérant à A s'il vérifit une des conditions équivalentes suivantes :

1. $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$
2. $\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}, \lim_{n \to \infty} u_n = x$
3. $d(x, A) = 0$

On définit alors l'adhérance d'un ensemble (noté $\overline{A}$) comme l'ensemble de ses points d'adhérance.

- $A \subseteq \overline{A}$.
- A est fermée ssi $A = \overline{A}$.
- $\overline{A}$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) fermé contenant A :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subseteq B \subseteq E \\ B \text{ fermé}}} B$$

- $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$

Démonstration

- ($1 \Rightarrow 2$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose x_n tel que $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n+1}\right)$, qui existe par hypothèse.

  Ainsi $d(x_n, x) < \frac{1}{n+1}$ d'où $(d(x_n, x))_n \to 0$ donc $(x_n)_n \to x$.

- ($2 \Rightarrow 1$) Par hypothèse on dispose de $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}} \to x$. Soit $r > 0$.

  On dispose de $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_N, x) < r$, donc

$$x_N \in B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

- ($2 \Leftrightarrow 3$)

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Leftrightarrow \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \to x \\ &\Leftrightarrow \exists (a_n)_n \in A^{\mathbb{N}},\ d(x, a_n) \to 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, A) = 0 \end{aligned}$$

- Supposons que $F \neq \overline{F}$, on dispose donc de $x \in \overline{F} \setminus F$.

  Soit $\varepsilon > 0$, comme $x \in \overline{F}$

$$B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$$
$$B(x, \varepsilon) \not\subseteq E \setminus F$$

  Donc $E \setminus F$ n'est pas un ouvert : F n'est pas fermée.

- Supposons que F n'est pas fermée, on dispose donc de $x \in E \setminus F$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \not\subseteq E \setminus F$$

  Donc pour tout $\varepsilon > 0$

$$B(x, \varepsilon) \cap F \neq \emptyset$$

  D'où $x \in \overline{F}$, mais $x \notin F$: $F \neq \overline{F}$.

Voisinage

Définition de voisinage.

Soit (E, d) un espace métrique et $x \in E$.

On dit que $V \subseteq E$ est un voisinage de x dans E s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq V$.

On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x dans E.

Densité

Définition de densité.

Soit (E, d) un espace métrique, on dit que $A \subseteq E$ est dense dans E si

$$\overline{A} = E$$

Interieur

Définition de l'interieur d'une partie.

Soit (E, d) un espace métrique, $A \subseteq E$ et $x \in E$.

On dit que x est un point interieur de A s'il existe $r > 0$ tel que

$$B(x, r) \subseteq A$$

C'est à dire $A \in \mathcal{V}(x)$.

On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points interieurs de A.

- $\mathring{A} \subseteq A$
- A est ouvert ssi $\mathring{A} = A$
- $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A
- $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$

On définie aussi la frontière d'une partie $\partial A = \mathrm{Fr}\ A = \overline{A} \setminus \mathring{A}$ qui est un fermé.

Limite d'une fonction

Définition de la limite d'une fonction.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques et $X \subseteq E$.

Soit $f \in \mathcal{F}(X, F)$, $a \in \overline{X}$, on dit que f admet $l \in F$ comme limite en a si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée.

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq B(l, \varepsilon)$
2. $\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap X) \subseteq V$.
3. $\forall (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} \to a, \lim_{n \to \infty} f(x_n) = l$.

Démonstration

- (1 $\Rightarrow$ 2) Soit $V \in \mathcal{V}(l)$, on dispose donc de $B(l, \varepsilon) \subseteq V$, et donc de $\delta > 0$ tel que

$$f\left(\underbrace{B(a, \delta)}_{W \in \mathcal{V}(a)} \cap X\right) \subseteq B(l, \varepsilon) \subseteq V$$

- (2 $\Rightarrow$ 1) Soit $\varepsilon > 0$, comme $V = B(\varepsilon, l) \in \mathcal{V}(l)$, on dispose de $W \in \mathcal{V}(a)$, et donc de $\delta > 0$ tel que

$$f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq f(W \cap X) \subseteq V$$

- L'écrire.

Continuité d'une fonction en un point

Définition de continuité en un point.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques, $X \subseteq E$ et $f \in \mathcal{F}(X, F)$.

On dit que f est continue en $a \in X$ si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Ce qui équivaut à

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$$

Il suffit d'ailleur que f admette une limite en a, car dans ce cas cette limite est forcément $f(a)$.

Démonstration

- Supposons f continue en a : comme $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, pour tout $V \in \mathcal{V}(f(a))$ on dispose de $W \in \mathcal{V}(a)$ tel que

$$f(W \cap X) \subseteq V$$
$$\mathcal{V}(a) \ni W \cap X \supseteq f^{-1}(V)$$

- Soit $V \in \mathcal{V}(f(a))$:

$$W = f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a)$$
$$f(W \cap X) \subseteq V$$

Continuité d'une fonction

Définition de continuité (sur un ensemble) d'une fonction.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques, $X \subseteq E$ et $f \in \mathcal{F}(X, F)$.

On dit que f est continue sur X ($f \in C^0(X, F)$) si pour tout $a \in X$, f est continue en a.

Ce qui est équivalent à

$$\forall \Omega \text{ ouvert de } F, f^{-1}(\Omega) \text{ ouvert de } X$$

On en déduit que

$$\forall F \text{ fermé de } F, f^{-1}(F) \text{ fermé de } X$$

Démonstration

- Supposons $f \in C^0(X, F)$, soit $\Omega \subseteq F$ ouvert et $a \in f^{-1}(\Omega)$.

  Comme $f(a) \in \Omega$, $\Omega \in \mathcal{V}(f(a))$, et par continuité en $a \in X$: $f^{-1}(\Omega) \in \mathcal{V}(a)$.

- Soit $a \in X, \varepsilon > 0$, comme $B(f(a), \varepsilon)$ est ouvert, $f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert contenant a : on dispose de $\delta > 0$ tel que

$$B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$$
$$f(B(a, \delta) \cap X) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$$

Fonctions K-Lipschitziennes

Définition des fonctions K-lipschitziennes.

Soit $(E, d_E), (F, d_F)$ deux espaces métriques et $X \subseteq E$.

Une fonction $f \in \mathcal{F}(X, F)$ est dite k-lipschitzienne pour un $k > 0$ si

$$\forall x, y \in X,$$
$$d_F(f(x), f(y)) \leq k d_E(x, y)$$

Toute fonction lipschitzienne est uniformement continue, donc continue.

Exemples (notons $d = d_E$) :

- Pour tout a in E, $x \mapsto d(x, a)$ est 1-lipschitzienne.
- Pour tout $A \subseteq E$, $x \mapsto d(x, A)$ est 1-lipschitzienne.

Si $E = \mathbb{K}^n$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie muni de $\|\cdot\|_\infty$ et d qui en dérive.

- Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

  $$\varphi_k : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto x_k \end{cases}$$

  Est 1-lipschitzienne.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X_1, ..., X_n]$

  $$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K} \\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & P(x_1, ..., x_n) \end{cases}$$

  Est continue (par somme et produit de fonctions qui le sont).

Démonstration

- Soit $a \in E, x, y \in X$

  $$|d(x, a) - d(y, a)|$$
  $$\leq |d(x, y) + d(y, a) - d(y, a)|$$
  $$\leq d(x, y)$$
- Soit $A \subseteq E, x, y \in X$. Soit $a \in A$

  $$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$$
  $$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

  Ceci pour tout a d'où

  $$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A)$$
  $$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

  Et par symétrie

  $$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$
- Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $x, y \in \mathbb{K}^n$

  $$|x_k - y_k| \leq \max_{i \in [\![1, n]\!]} |x_i - y_i|$$
  $$= \|x - y\|_\infty$$

Continuité des applications linéaires

Conditions de continuité d'une application linéaire.

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-evn, $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

On a équivalence entre

1. f continue sur E.
2. f continue en 0.
3. $\exists k > 0, \forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq k\|x\|$
4. f est lipschitzienne.

Inversement on a équivalence entre

1. f n'est pas continue sur E
2. Il existe $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1$$
$$(\|f(x_n)\|)_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$
3. Il existe $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que
$$(x_n)_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n)\| = 1$$

Enfin en dimension finie toute application linéaire est continue.

Démonstration

Continuité :

- ($1 \Rightarrow 2$) Par définition.
- ($2 \Rightarrow 3$) Par continuité de f en 0 on dispose de $\delta > 0$ tel que
$$f(B_E(0, \delta)) \subseteq B_F(0, \varepsilon)$$
Donc pour tout $x \in E$
$$\left\| f\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq 1$$
$$\|f(x)\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$$
- ($3 \Rightarrow 4$) Soit $x, y \in E$
$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|f(x - y)\| \\ &\leq k\|x - y\| \end{aligned}$$
- ($4 \Rightarrow 1$) Immédiat.

Non continuité :

- ($1 \Rightarrow 2$) Comme f n'est pas continue on a
$$\forall k > 0, \exists x \in E, \|f(x)\| > k\|x\|$$
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on dispose de $\tilde{x}_n \in E$ tel que
$$\|f(\tilde{x}_n)\| > n\|\tilde{x}_n\|$$
$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|\tilde{x}_n\|} \qquad \|x_n\| = 1$$
$$\|f(x_n)\| > n \quad \text{donc} \quad \|f(x_n)\| \to \infty$$
- ($2 \Rightarrow 3$) Soit $(\tilde{x}_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une telle suite.
$$x_n = \frac{\tilde{x}_n}{\|f(\tilde{x}_n)\|} \qquad \|f(x_n)\| = 1$$
$$\|x_n\| = \frac{1}{\|f(\tilde{x}_n)\|} \to 0$$
- ($3 \Rightarrow 1$) f n'est pas continue en 0.

En dimension finie, on prend une base $e = (e_1, ..., e_n)$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$, et pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$ on a
$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty \|f(e_k)\| \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} \|f(e_k)\| \right) \|x\|_\infty \end{aligned}$$

Nature topologique d'un hyperplan

Nature topologique d'un hyperplan.

Soit E un $\mathbb{K}$-evn, H un hyperplan de E.

H est soit fermé soit dense dans E.

Démonstration

Supposons que H n'est pas fermé. On dispose de

$$(h_n)_n \in H^{\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} z \notin H$$

Comme H est un hyperplan,

$$H \oplus \mathrm{Vect}(z) = E$$

Ainsi pour tout $x \in E$

$$x = h + \alpha z \qquad (h, \alpha) \in H \times \mathbb{K}$$
$$(h + \alpha h_n)_n \in H^{\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Continuité des formes linéaires

Condition de continuité d'une forme linéaires, lien avec les hyperplans.

Soit E un $\mathbb{K}$-evn.

Si $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est une forme linéaire alors f est continue ssi $\ker f$ est fermé.

Démonstration

- Si f est continue, $\ker f = f^{-1}\{0\}$ est fermé comme image reciproque d'un fermé par une application continue.
- Si f n'est pas continue, on dispose de $(x_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(x_n)| = 1$$
$$(x_n)_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

  Quitte à poser $(x'_n)_n$ on peut suppposer $f(x_n) = 1 = f(x_0)$.

$$h_n = x_n - x_0 \in \ker f$$
$$\lim_{n\to\infty} h_n = -x_0 \notin \ker f$$

  Donc $\ker f$ n'est pas fermé.

Norme opérateur

Définition de la norme opérateur.

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-evn, on définit

$$\mathcal{L}_C(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap C^0(E,F)$$

Qui est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Pour $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$ on définit

$$\begin{aligned}\|f\|_{\text{op}} = |||f||| &= \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|f(x)\|\end{aligned}$$

Qui est une norme d'algèbre sur $\mathcal{L}_C(E,F)$, elle est donc sous-multiplicative :

$$\forall f, g \in \mathcal{L}_C(E,F), \\ \|f \circ g\|_{\text{op}} \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|g\|_{\text{op}}$$

Démonstration

- Comme f est linéaire et continue on dispose de $k > 0$ tel que

  $$\forall x \in E, \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

  Ainsi

  $$\Gamma = \left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}, x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

  Est non vide majoré, donc le $\sup$ existe.

- De plus

  $$\begin{aligned}&\lambda \in \Gamma \\ \Leftrightarrow\ &\exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda = \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} \\ \Leftrightarrow\ &\exists x \in E \setminus \{0\}, \lambda = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \\ \Leftrightarrow\ &\exists x \in \mathbb{S}(0,1), \lambda = \|f(x)\|\end{aligned}$$

  Ainsi $\Gamma = \{\|f(x)\|, x \in \mathbb{S}(0,1)\}$.

- C'est bien une norme :

  1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}, f \in \mathcal{L}_C(E,F)$

     $$\begin{aligned}\|\lambda f\|_{\text{op}} &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \|\lambda f(x)\| \\ &= |\lambda| \|f\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

  2. Soit $f \in \mathcal{L}_C(E,F)$ tel que $\|f\|_{\text{op}} = 0$, soit $x \in E \setminus \{0\}$

     $$\|f(x)\| \leq \|f\|_{\text{op}} \cdot \|x\| = 0$$

     $$f(x) = 0 \quad \text{donc} \quad f = 0$$

  3. Soit $f, g \in \mathcal{L}_C(E,F)$

     $$\begin{aligned}&\|f+g\|_{\text{op}} \\ &= \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \frac{\|f(x)+g(x)\|}{\|x\|} \\ &\leq \sup_{x \in \mathbb{S}(0,1)} \left[\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} + \frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \right] \\ &\leq \|f\|_{\text{op}} + \|g\|_{\text{op}}\end{aligned}$$

- Soit $f \in \mathcal{L}_C(E,F), g \in \mathcal{L}_C(F,G)$ et $x \in E$:

  $$\begin{aligned}\|g(f(x))\| &\leq \|g\|_{\text{op}} \|f(x)\| \\ &\leq \|g\|_{\text{op}} \|f\|_{\text{op}} \|x\|\end{aligned}$$

  D'où $\|g \circ f\|_{\text{op}} \leq \|g\|_{\text{op}} \cdot \|f\|_{\text{op}}$.

Exercice : jauge d'un convexe

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{R}$-evn et $K \subseteq E$ convexe, symétrique par rapport à l'origine (c'est à dire stable par $-$), d'intérieur non vide et borné.

On pose

$$N : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \inf \left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in K\right\} \end{cases}$$

1. Montrer que N est bien définit.
2. Montrer que N est une norme
3. Montrer que N est équivalente à $\|\cdot\|$.
4. Montrer que $\overline{B_N}(0,1) = \overline{K}$

Montrons d'abord qu'on dispose de $\delta > 0$ tel que $B(0,\delta) \subseteq K$.

Soit $a \in \mathring{K}$, on dispose donc de $\delta > 0$ tel que

$$B(a,\delta) \subseteq K$$

Par symétrie, on a alors

$$B(-a,\delta) \subseteq K$$

Soit $x \in B(0,\delta)$

$$x + a \in B(a,\delta) \subseteq K$$
$$x - a \in B(-a,\delta) \subseteq K$$
$$\frac{1}{2}(x+a) + \frac{1}{2}(x-a) = x \in K$$

Par convexité.

1. Soit $x \in E$

   $$\frac{\delta}{2\|x\|}x < \delta$$
   $$\frac{\delta x}{2\|x\|} \in B(0,\delta) \subseteq K$$

   D'où $\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{x}{\lambda} \in K\right\}$ non vide minoré par 0 : $N(x)$ qui en est l'$\inf$ existe et est positif.

2. 1. Comme K est borné, on dispose de $R > 0$ tel que

      $$K \subseteq B(0,R)$$

      Soit $x \in E$ tel que $N(x) = 0$.

      Par caractérisation de la borne inférieur, on dispose de

      $$(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

      Et pour tout $n \in \mathbb{N}$

      $$\frac{x}{\lambda_n} \in K \subseteq B(0,R)$$
      $$\frac{\|x\|}{\lambda_n} \leq R$$
      $$\frac{\|x\|}{R} \leq \lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

      Donc $x = 0$
   2. Soit $\mu \in \mathbb{R}, x \in E$.
      - Si $\mu = 0, N(\mu x) = N(0) = 0$.
      - Si $\mu > 0$

      $$N(\mu x) = \inf\left\{\lambda > 0 \,\middle|\, \frac{\mu x}{\lambda} \in K\right\}$$
      $$= \mu N(x)$$

      - Si $\mu < 0$, par symétrie

      $$N(\mu x) = N(-\mu x) = -\mu N(x)$$
   3. Soit $x, y \in E$, $\lambda, \mu > 0$ tels que $\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\mu} \in K$ on a alors

      $$\frac{x+y}{\lambda+\mu} = \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}_{1-t}\underbrace{\frac{x}{\lambda}}_{\in K} + \underbrace{\frac{\mu}{\lambda+\mu}}_{t}\underbrace{\frac{y}{\mu}}_{\in K}$$
      $$\in K$$

      Ainsi

      $$N(x+y) \leq \lambda + \mu$$

      Et avec $\lambda \to N(x), \mu \to N(y)$

      $$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$$

3. Soit $x \in E$, $\lambda > 0$ tel que $\frac{x}{\lambda} \in K$.

   $$\frac{\|x\|}{\lambda} < R$$
   $$\|x\| \leq R \cdot N(x)$$

   Et

   $$\frac{\delta x}{2\|x\|} \in K$$
   $$N(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$$

4. Soit $x \in K, \frac{x}{1} \in K$ donc $X \in \overline{B_N}(0,1)$.

   Soit $x \in \overline{B_N}(0,1)$.
   - Si $N(x) = 1$, on dispose de

   $$(\lambda_n)_n \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{x}{\lambda_n} \in K$$
   $$x = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{\lambda_n} \in \overline{K}$$

   - Si $N(x) < 1$, on dispose par propriété de la borne inférieur de $\lambda \in [N(x), 1[$ tel que

   $$\frac{x}{\lambda} \in K$$
   $$x = (1-\lambda) \cdot 0 + \lambda \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right) \in K$$

Points d'adhérance d'une suite

Définition et propriétés sur les points d'adhérance d'une suite.

Soit (E, d) un espace métrique, $u = (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

On dit que $l \in E$ est un point d'adhérance de u s'il existe φ extractrice tel que

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \to l$$

Notons $\mathcal{V}(u)$ l'ensemble de ces points. On a

$$\mathcal{V}(u) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$$

Qui est donc fermé.

De plus si (u_n) converge vers $l \in E$.

$$K = \{u_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$$

Est compact.

Démonstration

- Soit $l = \lim_{n \to \infty} u_{\varphi(n)}$, $p \in \mathbb{N}$

  $$\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \geq p} \to l \in \overline{\{u_n, n \geq p\}}$$

  Donc

  $$l \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$$

- Soit $l \in \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \overline{\{u_n, n \geq p\}}$, on pose $\delta_n = \frac{1}{n+1}$.

  Comme $l \in \overline{\{u_n, n \in \mathbb{N}\}}$, on dispose de $\varphi(0)$ tel que $d\left(u_{\varphi(0)}, l\right) \leq \delta_0$.

  Supposons construits $\varphi(0), ..., \varphi(k)$, comme $l \in \overline{\{u_n, n \geq \varphi(k) + 1\}}$, on dispose de $\varphi(k+1)$ tel que

  $$d\left(u_{\varphi(k+1)}, l\right) < \delta_{k+1}$$

  Ainsi φ extractrice et $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \to l$.

- Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$, on pose

  $$\Gamma = \{n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, x_k = u_n\}$$

  Si Γ est fini, alors x_n prend une valeur une infinité de fois qui est valeur d'adhérance de (x_n).

  Sinon on construit : on prend $\psi(0) \in \Gamma$ et $\varphi(0)$ tel que $u_{\psi(0)} = x_{\varphi(0)}$.

  Supposons construits $\psi(0), ..., \psi(k)$ et $\varphi(0), ..., \varphi(k)$, on considère

  $$\Gamma_{k+1} = \left\{n > \psi(k) \mid \exists q > \varphi(k), x_q = u_n\right\}$$

  Qui est infini, donc on prend $\psi(k+1) \in \Gamma_{k+1}$ et $\varphi(k+1)$ tel que

  $$u_{\psi(k+1)} = x_{\varphi(k+1)}$$

  D'où l est valeur d'adhérance de (x_n).

Compacité

Définition de compacité.

Soit (E,d) un espace métrique, $K \subseteq E$ est dit compacte si de toute suite

$$(u_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$$

On peut extraire une sous suite convergente

$$\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \to l \in K$$

La compacité ne dépend pas de l'espace (E), mais dépend de d.

Si K est compacte :

- K est bornée dans E.
- Si $K \subseteq X$, K est fermé dans X.
- Si $F \subseteq K$ est fermé, alors F est compact.
- Si (u_n) est une suite à valeur dans K, alors elle converge ssi elle n'a qu'une seul valeur d'adhérance.
- Si $f \in C^0(K,F)$ avec F un espace métrique, alors $f(K)$ est compacte.
- Un produit fini de compacts est compact.

Démonstration

- Supposons K non bornée, soit $a \in K$, posons $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

  $$d(a, x_n) \geq n$$

  Donc (x_n) ne peut converger, et K n'est pas compacte.

- Soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}} \to l \in \overline{X}$, par compacité on peut éxtraire

  $$\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \to z \in K$$

  Et $z = l$ par unicité de la limite, donc K est fermé.

- Soit $(x_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$, par compacité de $K \supseteq F$, on a

  $$\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \to l \in K$$

  Or comme F est fermé et $\left(u_{\varphi(n)}\right)_n \in F^{\mathbb{N}}$, $l \in F$ d'où F compact.

- Par contraposée, soit $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ qui diverge, par compacité, elle admet une valeur d'adhérance l, mais $(x_n) \nrightarrow l_1$ c'est à dire

  $$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, d(x_n, l_1) \geq \varepsilon$$

  On fixe ε, on dispose d'une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ tel que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, d\left(x_{\varphi(n)}, l\right) \geq \varepsilon$$

  Or cette suite admet une valeur d'adhérance $l_2 \neq l_1$.

- Soit $(y_n)_n \in f(K)^{\mathbb{N}}$, on dispose de $(x_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ tel que

  $$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = y_n$$

  Et par compacité on peut éxtraire

  $$\left(x_{\varphi(n)}\right)_n \to l \in K$$

$$\left(f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right)_n = \left(y_{\varphi(n)}\right)_n \to f(l) \in f(K)$$

Théorème des bornes atteintes

Théorème des bornes atteintes en sur un espace métrique.

Soit K compact et $f \in C^0(K, \mathbb{R})$.

Comme $f(K)$ est compact, f est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi pour tout $x \in E \supseteq K$

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} d(x, y)$$

Admet un $\min$: la distance est atteinte.

Démonstration

$f(K)$ est bornée et fermé car compact, ainsi il existe un $\inf$ et un $\sup$, et ce sont un $\min$ et un $\max$.

Théorèmes du point fixe

Énoncés et démonstrations des différents théorèmes du points fixe.

---

1. Soit K compact, $f : K \to K$, si pour tout $x \neq y \in K$

   $$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

   Alors f admet un unique point fixe.

Démonstration

1. On pose

   $$\varphi : \begin{cases} K & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & d(f(x), x) \end{cases}$$

   Par compacité de K, φ admet un $\min$ atteint en $x_0 \in K$ Supposons par l'absurde que $f(x_0) \neq x_0$:

   $$\begin{aligned} \varphi(f(x_0)) &= d(f(f(x_0)), f(x_0)) \\ &< d(f(x_0), x_0) \\ &< \min \varphi \end{aligned}$$

   Absurde.

   Soit $x \neq x_0$

   $$d(f(x), x_0) < d(x, x_0)$$

   Donc $f(x) \neq x$.

Compacité en dimension finie

Propriétés de compacité en dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie muni de $\|\cdot\|_{\infty,e}$ pour la base e.

$$\|\cdot\|_{\infty,e} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x = \sum_{k=1}^{d} x_k e_k & \mapsto & \max_{k \in [\![1,d]\!]} |x_k| \end{array} \right.$$

- Pour tout $R > 0$, $\overline{B_{\|\cdot\|_{\infty,e}}(0,R)}$ est compact.
- $K \subseteq E$ est compact ssi K est fermé borné.

Démonstration

- On considère

  $$\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^d, \|\cdot\|_\infty) & \to & \left(E, \|\cdot\|_{\infty,e}\right) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} & \mapsto & \sum_{k=1}^{d} x_k e_d \end{array} \right.$$

  Qui est 1-lipschitzienne et

  $$\overline{B_{\|\cdot\|_{\infty,e}}(0,R)} = \theta\left([-R,R]^d\right)$$

  Or $[-R,R]$ est compact (Bolzano-Weierstrass), d'où le résultat.

- Soit $K \subseteq E$ fermé borné, on dispose donc de $R > 0$ tel que

  $$K \subseteq \underbrace{\overline{B_{\|\cdot\|_{\infty,e}}(0,R)}}_{\text{compacte}}$$

  Donc K est fermé dans un compact d'où le résultat.

Théorème de Heine

Théorème de Heine sur un espace métrique.

Soit K compact et F un espace métrique.

Si $f \in C^0(K, F)$ alors f est uniformement continue.

Démonstration

Supposons par l'absurde que f ne le soit pas.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in K,$$
$$\begin{cases} d(x, y) < \delta \\ d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon \end{cases}$$

On fixe un tel ε, on pose $\delta_n = \frac{1}{n+1}$, et on construit $(x_n)_n, (y_n)_n \in K^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} d(x_n, y_n) < \delta_n \\ d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon \end{cases}$$

Par compacité, on peut éxtraire

$$\left(x_{\varphi(n)}\right)_n \to l \in K$$
$$\text{Or} \quad d(x_n, y_n) \to 0 \quad \text{donc}$$
$$\left(y_{\varphi(n)}\right)_n \to l$$

Or comme f continue

$$d(f(x_n), f(y_n)) \to d(f(l), f(l)) = 0 \geq \varepsilon$$

Absurde.