

Maths
Algèbre
Vocabulaire
Algèbre

**Bas
Con
liné
Dév
lian**

- Lignes ou par colonne**
- Endomorphismes nilpotents**
- Espaces supplémentaires**
- Intersection d'hyperplans**
- Lemme de factorisation**
- Liberté d'une famille de l'espace du**
- Notations de matrices**
- Somme directe de sous espaces vectoriels**
- Théorème de la base télescopique**
- Vandermonde, interpolation de Lagrange**

- Algèbres**
- Algèbre engendrée**
- Algèbres**
- Algèbres commutatives intègres de dimension finie**
- Algèbres et extensions de corps**
- Clôture algébrique des rationnels**
- Condition d'intégrité d'une sous-algèbre engendrée**
- Morphisme d'algèbre**
- Nombres algébriques**
- Sous algèbres**
- Inversibilité des éléments d'une sous-algèbre engendrée**

- Anneaux et Corps**
- Irréductibles d'un anneau**

- Anneaux et corps**
- Axiomes d'un anneau**
- Axiomes d'un corps**
- Axiomes d'un sous-corps**
- Corps des fractions**
- Corps gauche, anneau à division**
- Diviseur de zéro**
- Groupe des inversibles**
- Idéal d'un anneau**
- Idéaux maximaux, anneaux quotientés**
- Intégrité d'un anneau**
- Primalité de la caractéristique d'un corps**

- Arithmétique**
- Fonctions arithmétiques : Möbius et indicatrice d'Euler**
- Formule du nombre de diviseurs**
- Indicatrice d'Euler**
- Lemme d'Euclide**
- Nombres de Fermat**
- Petit théorème de Fermat**
- Propriétés diviseurs communs**
- Théorème de Bézout**
- Théorème de Gauss**
- Théorème de Wilson**
- Théorème des restes chinois**
- Équations diophantiennes**

- Ensembles**
- Formule du crible**

- Espaces Vectoriels**
- Axiomes d'un espace vectoriel**
- Formes linéaires et hyperplans**
- Théorème de caractérisation du ran**

- Groupes**
- Actions de groupe**
- Axiomes d'un groupe**
- Axiomes d'un sous-groupe**
- Démonstration du Théorème de Lagrange**
- Dévissage de groupes**
- Exercice : Les p-groupes**
- Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p**
- Formule des classes**
- Groupe Diédral**
- Groupes quotientés**
- Rélation de cardinal pour un**

Sign
Thé
Thé
Éxis
de

- Matrices**
 - Matrices semblables
 - Théorème de caractérisation des matrices inversibles
- Polynômes**
 - Contenus d'un polynôme à coéfficients entiers
 - Critère d'Eisenstein
 - Décomposition en éléments simples
 - Entiers algébriques
 - Fonctions symétriques des racines
 - Formule de Taylor-Langrange formelle
 - Multiplicité d'une racine
 - Polynômes associés
 - Polynômes cyclotomiques
 - Polynômes de Tchebycheff
 - Polynômes en caractéristique strictement positive
 - Polynômes irréductibles
 - Polynômes scindés
 - Propriétés des fractions rationnelles
 - Propriétés des racines d'un polynôme
- Relations**
 - Majorant, borne supérieure, élément maximal
- Réduction**
 - Autre critère de diagonalisabilité
 - Caractérisation des endomorphismes nilpotents
 - Codiagonalisabilité
 - Commutant d'un endomorphisme diagonalisable
 - Critère de Diagonalisabilité
 - Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal
 - Diagonalisabilité
 - Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit
 - Décomposition de Dunford
 - Décomposition en sous espaces caractéristiques
 - Endomorphismes cycliques
 - Exercice : le bicommutant
 - Exercice : valuation X -adique du polynôme minimal.

Poly
end
Pre
et p
Pro

- théorème des noyaux
- Propriétés diverses du polynôme caractéristique
- Somme directe des sous-espaces propres
- Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal
- Sous-espaces cycliques
- Théorème de Cayley-Hamilton
- Théorème des noyaux
- Trigonalisabilité
- Valeurs propres, espaces propres
- Vision matricielle de la cyclicité

Analyse

- Recherche d'équivalent d'une suite

- Complexes**
- Formule de Moivre
- Formules d'addition trigonométriques
- Formules de duplication trigonométrique
- Formules de factorisation trigonométrique
- Formules de linéarisation trigonométrique
- Formules de parité et périodicité trigonométriques
- Formules en tangente de theta sur deux
- Inégalité Triangulaire

- Continuité**
- Fonctions K-Lipschitziennes
- Théorème de Heine
- Théorème des bornes atteintes

- Convexité**
- Propriétés de convexité

- Dérivation**
- Fonctions trigonométriques réciproques
- Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange
- Propriété des extrémum locaux Taylor-Lagrange
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis

- Développements Limités**

EDL
EDL
EDL

- Méthode de séparation des variables
- Méthode de variation de la constante

- Intégration**
- Comparaison série intégrale
- Critère de convergence d'intégrales usuelles
- Fonction gamma
- Hölder
- Intégrales de Wallis
- Intégration de l'inverse d'un trinôme
- Lemme de Riemann-Lebesgue
- Taylor reste intégrale

- Réels**
- Adhérence
- Corps totalement ordonné
- Densité
- Inégalité Triangulaire
- Partie convexe de \mathbb{R}
- Propriété de la borne supérieure
- Propriété fondamentale des réels
- Voisinage

- Suites Réelles**
- Caractérisation séquentielle de l'adhérence
- Comparaison asymptotiques usuelles
- Manipulations asymptotiques
- Moyennes de Cesàro
- Suites adjacentes, emboîtées
- Suites arithmético-géométriques
- Suites récurrentes d'ordre 2
- Suites récurrentes
- Théorème de Bolzano-Weierstrass

- Séries**
- Absolute convergence
- Comparaison série intégrale
- Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle
- Familles sommables
- Propriétés élémentaires sur les séries
- Règle de Raabe-Duhamel
- Séries de Bertrand
- Théorème de comparaison des séries positives
- Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries

pac
Thé
Trai
Équi
Rien

- Taylor**
 - Taylor reste intégrale
 - Taylor-Langrange
- Calculs**
 - Formule de newton
 - Formules de somme d'entiers consécutifs
 - Formules sur les coéfficients binomiaux
- Exercice**
 - Algèbre Générale**
 - Dévissage de groupes
 - Exercice : Cyclicité des sous-groupes finis des inversibles d'un corps
 - Exercice : Dénombrement de morphismes
 - Exercice : Groupe d'éléments d'ordre inférieur à deux
 - Exercice : Les carrés de F_p
 - Exercice : Les p -groupes
 - Exercice : existence d'un élément d'ordre du ppcm de deux autres
 - Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p
 - Algèbre Linéaire**
 - Exercice : Noyaux et images itérées
 - Exercice : Union de sous espaces vectoriels
 - Exercice : endomorphisme qui stabilise toutes les droites
 - Exercice : rang d'une comatrice
 - Polynômes**
 - Exercice : Gauss-Lucas
 - Exercice : Irréductibilité dans les rationnels
 - Exercice : Polynômes à coefficients entiers
 - Exercice : Produit de polynômes de rationnels unitaire entier
 - Exercice : rationalité d'une racine de haute multiplicité
 - Réduction**
 - Exercice : polynôme caractéristique divisant une puissance du polynôme minimal

Maths ▶ Analyse ▶ Déivation

Maths ▶ Analyse ▶ Taylor

Taylor-Lagrange

Théorème de Taylor-Lagrange, et conditions d'application.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, C^n sur $[a, b]$ et D^{n+1} sur $]a, b[$

Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!}$$

$$+ f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Maths ▶ Analyse ▶ Intégration

Maths ▶ Analyse ▶ Taylor

Taylor reste intégrale

Théorème de Taylor reste intégrale, et conditions d'application.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, C^{n+1}$

$$f(b) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(b-t)^n}{n!} dt$$

Maths ▶ Analyse ▶ Réels

Maths ▶ Analyse ▶ Complexes

Inégalité Triangulaire

Inégalité triangulaire première
et deuxième forme.

Soit $a, b \in \mathbb{C}$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$$

Formule de Moivre

Formule de Moivre.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Formules d'addition trigonométrique

Formules d'additions
trigonométriques.

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi$$

$$\sin(\theta + \varphi) = \cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi$$

$$\tan(\theta + \varphi) = \frac{\tan \theta + \tan \varphi}{1 - \tan \theta \tan \varphi}$$

Maths ▶ Analyse ▶ Complexes
Maths ▶ Trigonométrie ▶
Euclidienne

Formules de duplication trigonométrique

Formules de duplication trigonométriques.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin(2\theta) = 2 \cos \theta \sin \theta$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

Formules de linéarisation trigonométrique

Formules de linéarisation trigonométriques.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}[\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

Maths ▶ Analyse ▶ Complexes
Maths ▶ Trigonométrie ▶
Euclidienne

Formules de factorisation trigonométrique

Formules de factorisation trigonométriques.

Soient $p, q \in \mathbb{R}$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Maths ▶ Analyse ▶ Complexes
Maths ▶ Trigonométrie ▶
Euclidienne

Formules en tangente de theta sur deux

Formules en $\tan \frac{\theta}{2}$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos \theta = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$$

Formules de parité et périodicité trigonométriques

Formules de parité et périodicité trigonométriques.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

Formules de somme d'entiers consécutifs

Forme explicites des sommes suivantes :

$$\sum_{k=1}^n k = ?$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = ?$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = ?$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4}$$

Formule de newton

Soit $n \in \mathbb{N}$, $x, a, b \in \mathbb{C}$

$$x^n - 1 = ?$$

$$a^n - b^n = ?$$

$$x^n - 1 = (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$$

Formules sur les coéfficients binomiaux

Soit $k, n, p \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = ? \quad \binom{n}{n} = ?$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = ? \quad k \binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{n}{n-k} = ? \quad \binom{k}{p} \binom{n}{k} = ?$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = ?$$

Soit $k, n, p \in \mathbb{N}$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$\binom{k}{p} \binom{n}{k} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{k-p}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Formule du crible

Formule du crible : soit $A_1, \dots, A_n \subseteq E$

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = ?$$

Soit $A_1, \dots, A_n \subseteq E$

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| &= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ &\quad - |A_1 \cap A_2| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|$$

Majorant, borne supérieure, élément maximale

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et $A \subseteq E$, définitions de

- Majorant
 - Maximum
 - Borne supérieure
 - Élément maximale
-

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et $A \subseteq E$.

Majorant $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \leq M$

Maximum M est le maximum de A si M est un majorant de A et $M \in A$. S'il existe il est unique.

Borne supérieure B est la borne supérieure de A si B est le plus petit majorant de A : $\forall M \in E, (\forall x \in A, x \leq M) \Rightarrow B \leq M$. Si elle existe elle est unique.

Élément maximale M est un élément maximale de A si M n'est plus petit que personne : $\nexists x \in A, M \leq x$. Dans le cas d'un ensemble totalement ordonné, seul un maximum est élément maximale, dans le cas d'un ensemble non totalement ordonné, il peut en exister plusieurs.

EDL d'ordre 1

Soit $a, b \in \mathbb{C}$, $c(x)$ et $C(x)$ tel que $C'(x) = c(x)$.

$$(E_1) : \quad y' = ay + b$$

$$(E_2) : \quad y' = a(x)y$$

Les solutions S_1 et S_2 de (E_1) et (E_2) sont

$$S_1 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$S_2 = \left\{ x \mapsto \lambda e^{A(x)}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Méthode de séparation des variables

Soit $a(x) \in D^1$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

$$y(x) = ?$$

Soient $a(x) \in D^1$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

$$\frac{dy}{y} = a(x) dx$$

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = \int_{x_0}^x a(x) dx$$

$$\ln y - \ln y_0 = A(x) - A(x_0)$$

$$y = \underbrace{y_0 e^{-A(x_0)}}_{\lambda} e^{A(x)}$$

Méthode de variation de la constante

Soient $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$f_h : \quad y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

Trouver f_p , solution particulière par la variation de la constante.

Soient $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $A(x)$ une primitive de $a(x)$.

$$y' = a(x)y + b(x)$$

$$f_h : \quad y(x) = \lambda e^{A(x)}$$

On fait varier la constante : $\lambda \rightarrow \lambda(x)$:

$$f_p(x) = \lambda(x)e^{A(x)}$$

$$f_{p'}(x) = a(x)f_{p(x)} + b(x)$$

$$= \lambda'(x)e^{A(x)} + \lambda(x)a(x)e^{A(x)}$$

$$= \lambda(x)a(x)e^{A(x)} + b(x)$$

$$\lambda'(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

$$\lambda(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx$$

EDL d'ordre 2

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, résolution de l'équation homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$

$$ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle équation caractéristique

$$(EC) : az^2 + bz + c = 0$$

- Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les racines (réelles) de (EC)

$$f_{h(x)} = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta = 0$, soit r la racine double de (EC)

$$f_{h(x)} = (\lambda + \mu x)e^{rx}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Si $\Delta < 0$, soit $a + i\beta$ et $a - i\beta$ les racines complexes de (EC)

$$f_{h(x)} = e^{ax}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$$

Axiomes d'un groupe

Soit G un ensemble muni d'une opération interne $*$, quels axiomes pour que $(G, *)$ ait une structure de groupe ?

Soit G un ensemble et $*$ une opération interne, $(G, *)$ forme un groupe si

i) Associativité :

$$\forall x, y, z \in G, x * (y * z) = (x * y) * z$$

ii) Existence d'un neutre :

$$\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$$

iii) Existence d'inverse :

$$\forall x \in G, \exists y \in G, x * y = y * x = e$$

Vocabulaire d'ensemble structuré

Définitions du vocabulaire suivant

- Magma
- Semi-groupe
- Monoïde
- Groupe

| Ensemble | Loi interne | Associative | Neutre | Inverse | Nom |
|----------|-------------|-------------|--------|---------|-------------|
| x | x | | | | Magma |
| x | x | x | | | Semi-groupe |
| x | x | x | x | | Monoïde |
| x | x | x | x | x | Groupe |

Axiomes d'un sous-groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, quels axiome pour que $H \subseteq G$ soit un sous-groupe ?

Soit $(G, *)$ un groupe et $H \subseteq G$, H est un sous-groupe de G si

i) Présence du neutre :

$$e \in H$$

ii) Stable par $*$:

$$\forall x, y \in H, x * y \in H$$

iii) Stable par inverse :

$$\forall x \in H, x^{-1} \in H$$

Théorème de Lagrange

Énoncer le théorème de Lagrange sur les groupes.

Soit (G, \cdot) un groupe fini et H un sous-groupe de G

$$|H| \mid |G|$$

Démonstration du Théorème de Lagrange

Démonstration du théorème de Lagrange

Soit (G, \cdot) un groupe fini et H un sous-groupe.

- Relation quotienté par H : $x \mathcal{R} y$ si $yx^{-1} \in H$ (relation d'équivalence). On note G/H l'ensemble des classes d'équivalences.
- Soit $x \in G$, \bar{x} sa classe d'équivalence pour \mathcal{R} . $\bar{x} = Hx = \{hx, h \in H\}$.

Par double inclusion :

- $Hx \subseteq \bar{x}$: Soit $y \in Hx$, $y = hx$ avec $h \in H$, donc $yx^{-1} = h \in H$ d'où $y \mathcal{R} x$ et $y \in \bar{x}$.
- $\bar{x} \subseteq Hx$: Soit $y \in \bar{x}$, $yx^{-1} = h \in H$, donc $y = hx \in Hx$.
- Donc $\forall x \in G$, $\bar{x} = Hx \simeq H$ d'où $|\bar{x}| = |H|$.
- Enfin par le lemme du berger : $|G/H| = \frac{|G|}{|H|}$ et donc $|H| \mid |G|$.

Relation de cardinal pour un morphisme de groupe

Soient $(G_1, +)$, (G_2, \cdot) des groupes et $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme, avec G_1 fini. Que peut on dire de $|G_1|$?

Soient $(G_1, +)$, (G_2, \cdot) des groupes et $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme, avec G_1 fini.

$$|G_1| = |\ker \varphi| \cdot |\operatorname{im} \varphi|$$

Axiomes d'un anneau

Soit A muni de deux opérations internes $+$ et \cdot , quels axiomes pour que $(A, +, \cdot)$ soit un anneau ?

$(A, +, \cdot)$ est un anneau si :

- i) $(A, +)$ est un groupe abélien
 - a) Associativité de $+$
 - b) Existence d'un neutre additif (0_A)
 - c) Existence d'opposés ($-x$)
 - d) Commutativité de $+$
- ii) Associativité de \cdot
- iii) Existence d'un neutre multiplicatif (1_A)
- iv) Distributivité de \cdot sur $+$

$$x(y + z) = xy + xz$$

$$(x + y)z = xz + yz$$

Diviseur de zéro

Définition de diviseur de 0 dans un anneau.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, $x \in A$ est dit diviseur de 0 (à gauche) si $x \neq 0$ et $\exists y \neq 0, xy = 0$

Intégrité d'un anneau

Définition d'un anneau intègre.

Un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit intègre si

- A est commutatif
- A n'admet aucun diviseur de 0

Groupe des inversibles

Définition de groupe des inversibles d'un anneau.

Le groupe des inversibles d'un anneau $(A, +, \cdot)$, est le groupe (A^\times, \cdot) .

Idéal d'un anneau

Définition d'un idéal d'un anneau, propriétés élémentaires.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et $I \subseteq A$, I est un idéal de A si

- I est un sous-groupe additif de A
- I est stable par produit externe : $\forall x \in I, \forall a \in A, ax \in I$

Propriétés :

- Si $1 \in I$ idéal de A , alors $I = A$.
- Plus généralement s'il existe $x \in I$ inversible, $I = A$.
- Une intersection quelconque d'idéaux est un idéal.
- Une somme finie d'idéaux est un idéal.
- Si $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ un morphisme d'anneau avec A_1 commutatif, $\ker \varphi$ est un idéal de A_1 .
- Pour tout $b \in A$, bA est un idéal de A .
- Un idéal engendré par un ensemble est le plus petit idéal le contenant, dans le cas d'un singleton $\{a\} \subset A$, il s'agit de aA .

Axiomes d'un corps

Soit K muni de deux opérations internes $+$ et \cdot , quels axiomes pour que $(K, +, \cdot)$ soit un corps ?

$(K, +, \cdot)$ est un corps si :

- i) $(K, +)$ est un groupe abélien
 - a) Associativité de $+$
 - b) Existence d'un neutre additif (0)
 - c) Existence d'opposés ($-x$)
 - d) Commutativité de $+$
- ii) Associativité de \cdot
- iii) Commutativité de \cdot
- iv) Existence d'un neutre multiplicatif (1)
- v) Distributivité de \cdot sur $+$
- vi) Existence d'inverses (sauf pour 0)

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, \exists x^{-1} \in K$$

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

Corps gauche, anneau à division

Qu'est-ce qu'un “corps gauche” ou “anneau à division” ?

Un corps gauche ou anneau à division est un anneau non commutatif dont tous les éléments sont inversible sauf 0. C'est un corps dont le produit n'est pas commutatif.

Axiomes d'un sous-corps

Soit $(K, +, \times)$ un corps, axiomes pour que $L \subseteq K$ soit un sous-corps ?

$(K, +, \times)$ un corps, $L \subseteq K$ est un sous-corps si :

- i) $0 \in L$
- ii) $1 \in L$
- iii) Stable par $+$
- iv) Stable par $-$ ou stable par opposé
- v) Stable par \times
- vi) Stable par $\nabla \cdot$ ou stable par inverse

Primalité de la caractéristique d'un corps

Si $(K, +, \cdot)$ est un corps de caractéristique non nulle, que peut-on dire sur celle ci ?

$(K, +, \cdot)$ un corps, notons p sa caractéristique, si $p \neq 0$ alors p est premier

Démonstration:

Notons $p = ab$ avec $a, b \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^a 1 \right) \left(\sum_{k=1}^b 1 \right) &= \sum_{k=1}^a \sum_{k=1}^b 1 \\ &= \sum_{k=1}^{ab=p} 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Or un corps n'admet pas de diviseurs de 0, donc $\sum_{k=1}^a 1 = 0$ ou $\sum_{k=1}^b 1 = 0$, d'où

$$\text{ou } \begin{cases} a = p, b = 1 \\ p = b, a = 1 \end{cases}$$

Donc p est premier.

Corps des fractions

Définition du corps des fractions d'un anneau intègre.

$(A, +', \cdot)$ un anneau intègre.

- Soit $(a, b), (c, d) \in A \times A \setminus \{0\}$, on définit la relation d'équivalence suivante :

$$(a, b) \mathcal{R} (d, c) \text{ si } ad = bc$$

- On note $\frac{a}{b}$ la classe d'équivalence de (a, b) .
- On définit les opérations $+$, \times sur les fractions

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad +' cb}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Le corps des fractions de A est le corps

$$(A \times A \setminus \{0\}, +, \times)$$

Théorème de Gauss

Théorème de Gauss.

Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$, si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$ alors $a \mid c$

Équations diophantiennes

Résolutions d'une équation de la forme $ax + by = c$ dans \mathbb{Z} .

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(E) : ax + by = c$$

- **Solution homogène :** On cherche un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ (Bézout) tel que

$$au + bv = c$$

- **Solution particulière :** il en existe si

$$a \wedge b \mid c$$

- **Les solutions sont**

$$S = \begin{cases} x = x_p - kb' \\ y = y_p + ka' \end{cases}$$

avec (x_p, y_p) solution particulière

$$\text{et } a' = \frac{a}{a \wedge b}, \quad b' = \frac{b}{a \wedge b}$$

Nombres de Fermat

Que sont les nombres de Fermat, et quelques propriétés.

Le n -ème nombre de Fermat est

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Ils sont impaires et premier entre eux :

Soit $n < m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} & (2^{2^n} - 1) \cdot F_n \quad \cdots \cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1} \\ & (2^{2^n} - 1) \cdot (2^{2^n} + 1) \quad \cdots \cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1} \\ & \qquad \qquad \qquad (2^{2^{n+1}} - 1) \cdot F_{n+1} \cdots F_{m-1} \\ & \qquad \qquad \qquad \vdots \\ & \qquad \qquad \qquad 2^{2^m} - 1 = F_m - 2 \end{aligned}$$

Donc $F_n \mid F_m - 2$, d'où $F_m \wedge F_n \mid F_m - 2$, donc $F_m \wedge F_n \mid 2$, mais ils sont impaire donc premier entre eux.

Lemme d'Euclide

Théorème du lemme d'Euclide.

Soit $p \in \mathbb{P}$, $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

Plus algébriquement :

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneaux intègre :

$$ab \equiv 0 [p] \Rightarrow a \equiv 0 [p] \text{ ou } b \equiv 0 [p]$$

Formule du nombre de diviseurs

Formule du nombre de diviseurs d'un entier.

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

$$\text{nombre de diviseurs} = \prod_{i=1}^k (a_k + 1)$$

Théorème des restes chinois

Théorème des restes chinois.

Soit $n, m \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux

- Formulation arithmétique :

$$\forall a \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \forall b \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket,$$

$$\exists! x \in \llbracket 0, nm-1 \rrbracket,$$

$$x \equiv a [m] \text{ et } x \equiv b [n]$$

- Formulation algébrique :

$$\begin{array}{ccc} \varphi : & \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} & \rightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & x & \mapsto \begin{pmatrix} x[m] \\ x[n] \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme
d'anneaux.

- Structure de preuve : injectivité par $\ker \varphi$ + argument de cardinal.

Petit théorème de Fermat

Petit théorème de Fermat.

- Première formulation :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z},$$

$$a \wedge p = 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

- Deuxième formulation (moins forte) :

$$\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z},$$

$$a^p \equiv a [p]$$

- Démo : On étudie $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$:

$$\forall a \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$$

$\text{ord}(a) \mid p - 1$ (Lagrange)

$$\text{donc } a^{p-1} \equiv 1 [p]$$

Indicatrice d'Euler

Définition de l'indicatrice d'Euler, et propriétés.

La fonction indicatrice d'Euler est

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \rightarrow & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times| \end{array}$$

Quelques propriétés :

$$\varphi(p) = p - 1$$

$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$$

$$m \wedge n = 1 \Rightarrow \varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

$$\varphi(n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}) = \prod_{i=1}^k (p_i^a - p_i^{a-1})$$

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

$$\sum_{d \in \text{Div}(n)} \varphi(d) = n$$

Pour se convaincre de la dernière :

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n}$$

Sous formes irréductibles ($p_i \wedge q_i = 1$)

$$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} + \cdots + \frac{p_n}{q_n}$$

Il y a n fractions, les $q_i \in \text{Div}(n)$, et pour chaque q_i , on a tous les $p_i \leq q_i$, qui sont premiers avec eux :

$$\underbrace{\sum_{d \in \text{Div}(n)}}_{\substack{\text{somme sur} \\ \text{tous les} \\ \text{dénominateur}}} \underbrace{\varphi(d)}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{fractions pour le} \\ \text{dénominateur } d}} = \underbrace{n}_{\substack{\text{nombre de} \\ \text{fractions}}}$$

Enfin, une généralisation du petit théorème de Fermat :

$$a \wedge n = 1 \Rightarrow a^{\varphi(n)} \equiv 1 [n]$$

Théorème de Bézout

Énoncé et preuve du théorème de Bézout.

- Soient $a, b \in \mathbb{N}$ et $d = a \wedge b$ alors il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = d$.
- Preuve : Soit $I = \{au + bv, (u, v) \in \mathbb{Z}\}$

I est un idéal de \mathbb{Z} , donc $\exists d \in \mathbb{Z}, I = d\mathbb{Z}$ (principalité de \mathbb{Z}).
Donc $d \mid a$ et $d \mid b$.

Soit ∂ tel que $\partial \mid a$ et $\partial \mid b$. $\forall x \in I, \partial \mid x$, en particulier $\partial \mid d$ d'où $\partial \leq d$.

$a \wedge b = d \in I$ d'où $\exists u, v \in \mathbb{Z}, d = au + bv$

Propriétés diviseurs communs

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$

$x \mid a$ et $x \mid b$ ssi ?

$a \mid y$ et $b \mid y$ ssi ?

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = ?$

$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = ?$

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$

$x \mid a$ et $x \mid b$ ssi $x \mid (a \wedge b)$

$a \mid y$ et $b \mid y$ ssi $m \mid (a \vee b)$

$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$

$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = (a \vee b)\mathbb{Z}$

Corps totalement ordonné

Définition d'un corps totalement ordonné.

Soit $(K, +, \cdot)$ un corps et un ordre \leq .

1. $\forall x, y, z \in K, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$
2. $\forall x, y \in K, x \geq 0$ et $y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$

\mathbb{R} et \mathbb{Q} sont ordonnés, \mathbb{C} ne l'est pas. Mais il existe un seul corps totalement ordonné (à isomorphisme près) : \mathbb{R} .

Propriété fondamentale des réels

Propriété fondamentale des réels.

Toute partie non vide majoré de \mathbb{R} admet une borne sup. De même pour minoré.

On en déduit (car \mathbb{R} est totalement ordonné) que

- $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$
- Loi du signe de produit
- $x^2 \geq 0$
- $1 > 0$
- $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$
- $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

Propriété de la borne supérieure

Propriété de la borne supérieure.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non vide majoré, $S = \sup A$ ssi

1. $\forall x \in A, x \leq S$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in A, s - \varepsilon < y$

Partie convexe de \mathbb{R}

Définition de partie convexe.

Une partie convexe de \mathbb{R} est un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \leq y \in C, [x, y] \subseteq C$$

Les parties convexes de \mathbb{R} sont des intervalles.

Densité

Définition de densité.

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$, D est dense dans \mathbb{R} si

$$\forall a < b \in \mathbb{R},]a, b[\cap D \neq \emptyset$$

\mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , preuve : saut de grenouille.

Voisinage

Définition de voisinage.

Soit $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $V \subseteq \mathbb{R}$ est un voisinage de x si

$$\exists \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subseteq V$$

On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x .

Adhérence

Définition et propriétés de l'adhérence d'un ensemble.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \mathbb{R}$ est adhérent à A si

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$$

L'adhérence de A est alors

$$\begin{aligned} \text{adh}(A) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ adhérent à } A\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid \forall \varepsilon > 0,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Propriétés :

- $A \subseteq \text{adh}(A)$
- Si A non vide borné :
 $\{\inf A, \sup A\} \subseteq A$
- $\text{adh}(]a, b[) = [a, b]$
- D est dense dans \mathbb{R} ssi $\text{adh}(D) = \mathbb{R}$
- $\text{adh}(\text{adh}(A)) = \text{adh}(A)$

Suites arithmético-géométriques

Formule explicite d'une suite arithmético-géométrique.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$$

On note $f(x) = ax + b$, on trouve le point fixe $w = \frac{b}{1-a}$. Soit $v_n = u_n - w$.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= au_n + b - \underbrace{(aw + b)}_{-w} \\ &= a(u_n - w) = av_n \end{aligned}$$

$$v_n = a^n v_0$$

$$u_n = a^n(v_0 - w) + w$$

Suites récurrentes d'ordre 2

Formule explicite d'une suite récurrente d'ordre 2.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, (u_n) une suite tel que

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On résout l'équation caractéristique

$$x^2 = ax + b$$

- Deux racines r_1, r_2

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Racine double r

$$u_n = (\lambda + \mu n)r^n$$

Avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ déterminés par u_0 et u_1 .

Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Caractérisation séquentielle de l'adhérence et la borne supérieure.

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Si (u_n) une suite à valeur dans A et $u_n \rightarrow l$, alors $l \in \text{adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(A)$.
- Si $x \in \text{adh}_{\overline{\mathbb{R}}}$, alors il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow x$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \text{adh}(A) \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, u_n \rightarrow x\} \end{aligned}$$

Et $S = \sup A$ existe si A non vide majoré par S et il existe $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tel que $u_n \rightarrow S$.

Suites adjacentes, emboitées

Définition et théorème des suites adjacentes et emboitées.

- **Adjacentes :**

Deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes si

$$(a_n) \nearrow, \quad (b_n) \searrow \\ \text{et } \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

Théorème : (a_n) et (b_n) et
 $\lim a_n = \lim b_n$.

Preuve : Théorème de la limite croissante pour la convergence.

- **Emboitées :**

La même chose avec des segments.

Théorème :

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x\}$$

$$\text{avec } x = \lim a_n = \lim b_n$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Théorème de Bolzano-Weierstrass et démonstration.

Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente. Dans \mathbb{R}^n (et \mathbb{C}), il suffit d'être borné en norme ou module.

Preuve :

Soit (u_n) une suite bornée par a_0 et b_0 , notons $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$. Par récurrence :

- Ini : $|[a_0, b_0] \cap A| = \infty$
- Héré : On suppose $|[a_n, b_n] \cap A| = \infty$, et on coupe en $m = \frac{a_n + b_n}{2}$:
 - Si $|[a_n, m] \cap A| = \infty$, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = m \end{cases}$
 - Si $|[m, b_n] \cap A| = \infty$, $\begin{cases} a_{n+1} = m \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$

Par le théorème des suites emboitées :

$$\exists l \in [a_0, b_0], \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{l\}$$

Soit φ une extractrice, par récurrence :

- Ini : $\varphi(0) = 0$
- Héré : $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ est infini, donc il existe $m > \varphi(n)$ tel que $u_m \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$. On prend $\varphi(n+1) = m$.

Donc $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$ d'où $\lim u_{\varphi(n)} = l$.

Moyennes de Cesàro

Définition, propriétés des moyennes de Cesàro.

Soit (u_n) une suite. La suite des moyennes de Cesàro de u_n est

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Si $u_n \rightarrow l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\sigma_n \rightarrow l$.

Preuve :

- / fini : Découpage pour $n < N$ et $n \geq N$ et inégalité triangulaire.
- / infini : majoration.

Manipulations asymptotiques

Manipulations asymptotiques élémentaires.

- \sim : relation d'équivalence
 - produit, quotient, exposant
 - **pas** de somme, de composition, ...
- $o(1) \Leftrightarrow$ tend vers 0, $O(1) \Leftrightarrow$ borné
- O et o transitifs
- O et o mangent les constantes
- $u_n \sim v_n$ ssi $u_n = v_n + o(v_n)$
- Si $u_n \sim v_n$ (ou O, o), alors $u_{\varphi(n)} \sim v_{\varphi(n)}$ (ou O, o)
- o et \sim sont des cas particuliers de O .

Comparaison asymptotiques usuelles

Comparaison asymptotiques usuelles, stirling

Soit $k \in \mathbb{R}_+^*, q > 1$, au voisinage de l'infini :

$$n^k = o(q^n)$$

$$q^n = o(n!)$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n}$$

$$\ln(n!) \sim n \ln n$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Fonctions K-Lipschitziennes

Qu'est qu'une fonction K -lipschitzienne

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ est K -lipschitzienne si

$$\forall x, y \in A, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Lipschitz sur un segment implique uniformement continue.

Théorème des bornes atteintes

Théorème des bornes atteintes et démonstration.

Si f est $C^0([a, b])$, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Preuve :

Notons $M = \sup f$, quitte à avoir $M \in \overline{\mathbb{R}}$. $M \in \text{adh}_{\overline{\mathbb{R}}}(f([a, b]))$, donc il existe une suite (x_n) à valeur dans $[a, b]$ tel que $f(x_n) \rightarrow M$.

Par Bolzano-Weierstrass, il existe φ tel que $x_{\varphi(n)} \rightarrow l$ avec $l \in [a, b]$ et donc nécessairement $M \in \mathbb{R}$.

Théorème de Heine

Énoncé et démonstration du théorème de Heine.

Toute fonction continue sur un segment est uniformément continue.

Preuve :

Soit $f \in C^0([a, b])$. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue.

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in [a, b]$$

$$|x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

On prend $(x_n), (y_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

Ces suites sont bornées donc par Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ tel que $x_{\varphi(n)} \rightarrow l \in [a, b]$.

Or $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \rightarrow 0$ donc $y_{\varphi(n)} \rightarrow l$.

Mais par continuité de f ,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{\varphi(n)}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_{\varphi(n)}) \\ &= f(l) \end{aligned}$$

Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| < \varepsilon$$

Qui est absurde.

Fonctions trigonométriques réciproques

Domaine de définition et dérivées des fonctions trigonométrique réciproques.

$$\begin{aligned} \arccos &: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] \\ \arccos' &:]-1, 1[\rightarrow [-1, -\infty[\\ x &\mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arcsin &: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \arcsin' &:]-1, 1[\rightarrow [1, +\infty[\\ x &\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arctan &: \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ \arctan' &: \mathbb{R} \rightarrow]0, 1] \\ x &\mapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Propriété des extrémum locaux

Que peut on dire si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et admet un extrémum local en $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable qui admet un extrémum local en a , un point intérieur à I , alors $f'(a) = 0$.

Preuve : par hypothèse, pour un maximum (un minimum se traite de même)

$$\exists V \in \mathcal{V}(a), \forall x \in V, f(x) \leq f(a)$$

Étudions

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Si $x < a$:

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{<0} \stackrel{\leq 0}{\geq} 0$$

Si $x > a$:

$$\underbrace{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}_{>0} \stackrel{\leq 0}{\leq} 0$$

Donc $f'(a) = 0$ (les deux limites sont égales par la dérivabilité de f en a).

Théorème de Rolle, théorème des acroissements finis

Énoncé et preuve des théorèmes de Rolle et des acroissements finis.

Soit $f \in C^0([a, b])$ dérivable sur $]a, b[$

Rolle Si $f(a) = f(b)$, alors

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = 0$$

TAF

$$\exists c \in]a, b[, f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve :

- Rolle : théorème des bornes atteintes, propriétés des extrémum locaux avec une disjonction de cas si les extrémums sont aux bornes.
- TAF : Rolle en pente, on corrige par la pente pour se ramener à Rolle.

Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange

Inégalité des accroissements finis et de Taylor-Lagrange.

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et $a \in I$, pour tout $x \in I$

$$|f(x) - f(a)| \leq \sup_{[a,x]} |f'| \cdot |x - a|$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est D^{n+1} et $a \in I$, pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right| \leq \sup_{[a,x]} |f^{(n+1)}| \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Preuve :

On prend les théorème et on majore le paramètre.

Intégration de l'inverse d'un trinôme

Méthode d'intégration pour l'inverse d'un trinôme du second degré.

On prend $ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré, on vas intégrer $\frac{1}{ax^2+bx+c}$.

- $\Delta > 0$: décomposition en éléments simples
- $\Delta = 0$:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{a(x - r)^2}$$

$$= -\frac{1}{a(x - r)}$$

- $\Delta < 0$: on passe à la forme canonique

$$ax^2 + bx + c$$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{|\Delta|}{4a^2} \right]$$

Et on se ramène à $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u$.

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{|\Delta|}} \arctan \left(\frac{2ax + b}{\sqrt{|\Delta|}} \right)$$

Développements limités

$$\frac{1}{1-x} = ? \quad \text{ch}(x) = ?$$

$$\frac{1}{1+x} = ? \quad (1+x)^a = ?$$

$$\ln(1+x) = ? \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = ?$$

$$e^x = ? \quad \arcsin(x) = ?$$

$$\cos(x) = ? \quad \arccos(x) = ?$$

$$\sin(x) = ? \quad \arctan(x) = ?$$

$$\tan(x) = ?$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$$

$$= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

$$= \sum_{k=0}^n (-x)^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^{k+1}}{k+1} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+1})$$

$$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} \prod_{p=0}^{k-1} (a-p) + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} x^{2k} + o(x^{2k})$$

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)} + o(x^{2k+1})$$

$$\arccos(x) = -x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} - \frac{3}{8} \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=1}^n -\frac{\binom{2k}{k} x^{2k+1}}{2^{2k}(2k+1)} + o(x^{2k+1})$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

Étude local et asymptotique de fonctions

Méthode pour étudier le comportement local et asymptotique d'une fonction.

Local au voisinage de $a \in \mathbb{R}$

- Équivalent en a : premier terme
- Tangente en a : $\text{DL}_1(a)$
- Signe de f en a : premier terme non nul.
- Position relative par rapport à la tangente : signe du premier terme non nul après l'ordre 1.

Asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

- Asymptote oblique : $\text{DL}_1(\pm\infty)$
- Position relative : signe du terme suivant.

Rappelle :

f admet une asymptote oblique d'équation $ax + b$ si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax - b = 0$$

Suites récurrentes

Méthode pour les suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit f une fonction et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Intervalle stable : on cherche I tel que $f(I) \subseteq I$.
2. Variations de (u_n)
 - Signe de $f(x) - x$ sur I
 - + : (u_n) est croissante
 - - : (u_n) est décroissante
 - Sinon affiner I
 - Monotonie de f
 - Si f est croissante sur I , (u_n) est monotone
 - Si f est décroissante sur I , (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotone.
3. On montre l'existence de la limite (limite croissante)
4. On la détermine : il s'agit de l'un des points fixes de I (idéalement il n'y en a qu'un).

Dans le cas des fonctions décroissantes, on cherche les limites des deux sous-suites, points fixes de $f \circ f$.

Propriétés de convexité

Définition et propriétés de convexité.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, f est dite convexe si

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y)$$

$$\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Propriétés :

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe,

$$\forall x_1, \dots, x_n \in I$$

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Rightarrow$$

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

- Soit Φ convexe, $\forall f \in C^0([a, b])$

$$\Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx\right)$$

$$\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \Phi(f(x)) dx$$

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in I$, on note

$$\begin{aligned} \tau_a : I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

les taux d'acroissements en a de f .

f est convexessi $\forall a \in I$, τ_a est croissante.

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on appelle droite d'appuis en x_0 de f une droite $y = ax + b$ tel que
 - $\forall x \in I, ax + b \leq f(x)$
 - $f(x_0) = ax_0 + b$

Si f convexe, f admet des droites d'appuis en tout points.

Théorème de caractérisation des matrices inversibles

Énoncé du théorème de caractérisation des matrices inversibles.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, les assertions suivantes sont équivalentes :

- A est inversible.
- $A \xrightarrow{L} I_n$.
- $\text{rg } A = n$.
- Le système homogène $AX = 0$ admet une seule solution.
- $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ le système homogène $AX = Y$ admet au plus une solution.
- $\forall Y \in \mathbb{R}^n$ le système homogène $AX = Y$ admet au moins une solution.

Polynômes associés

Définition et propriétés des polynômes associés.

Soit $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, P et Q sont dit associé si $P \mid Q$ et $Q \mid P$.

P, Q sont associés ssi $\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B$. Toute class de polynômes associés contient un unique polynôme unitaire (à l'exception de $\{0\}$).

Propriétés des racines d'un polynôme

Propriétés des racines d'un polynôme.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $n = \deg P$

En général

- Si $P \neq 0$, P à au plus n racines (comptées avec multiplicités).
- L'unique polynôme qui à une infinité de racines est $P = 0$.
- Si $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\exists a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $P(a_k) = Q(a_k)$, alors $P = Q$.

En caractéristique nulle

- $a \in \mathbb{K}$ est racine de P avec multiplicité m ssi

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(a) = 0$$

$$\text{et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

Démonstration

- Si $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{K}$ sont des racines distinctes de P , et $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités.

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $(X - a_k)^{m_k} \mid P$

Or pour $i < j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$(X - a_i) - (X - a_j) = a_j - a_i$$

Relation de Bézout ($a_j - a_i$ associé à 1) donc premiers entre eux deux à deux.

D'où $\prod_{k=1}^N (X - a_k)^{m_k} \mid P$ et $n \geq \sum_{k=1}^N m_k$.

- Par la propriété précédente, si P à une infinité de racine distincte il ne peut être de degré positif (ou il serait infini) donc il est nul.

- Par Taylor-Lagrange formel, pour tout $j \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$

$$P = \underbrace{\sum_{k=0}^{j-1} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}}_{R_j(X) (\deg < j)} + \underbrace{\sum_{k=j}^n P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}}_{(X-a)^j Q(X)}$$

D'où R_j le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^j$.

Or a est une racine de multiplicité m ssi

$$\begin{cases} R_m = 0 \\ R_{m+1} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, \frac{P^{(k)}(a)}{k!} = 0 \\ \exists k \in \llbracket 0, m \rrbracket, \frac{P^{(k)}(a)}{k!} \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, (P^{(k)}(a)) = 0 \\ P^{(m)}(a) \neq 0 \end{cases}$$

Multiplicité d'une racine

Définition de multiplicité d'une racine.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ une racine et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que a est de multiplicité n si (l'un ou l'autre) :

- $(X - a)^n \mid P$ mais $(X - a)^{n+1} \nmid P$.
- $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$

Polynômes scindés

Définition et propriétés des polynôme scindés.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, a_1, \dots, a_k ses racines et m_1, \dots, m_k leur multiplicités.

- P est scindé si $\deg P = \sum_{i=1}^k m_k$.
- P est scindé racines simples si P scindé et $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, m_i = 1$.

Propriétés :

- Si P est scindé racines simples sur \mathbb{R} , P' aussi.
- Si P est scindé sur \mathbb{R} , P' aussi.
- Tout polynôme P est scindé sur \mathbb{C} : théorème de Gauss-d'Alembert.

Polynômes irréductibles

Définition et propriétés des polynômes irréductibles.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, P est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont P , 1 et leurs associés.

1. Dans \mathbb{C} , les polynômes irréductibles sont les monômes (théorème de Gauss-d'Alembert).
2. Dans \mathbb{R} , les polynômes irréductibles sont les monômes et les polynômes de degré 2 avec $\Delta < 0$.
3. En général, un polynôme de degré 1 est toujours irréductible.
4. Dans $\mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré 2 ou 3 est irréductible ssi il n'admet pas de racine dans \mathbb{K} .
5. Dans $\mathbb{K}[X]$, un polynôme de degré ≥ 2 ne peut être irréductible s'il admet une racine dans \mathbb{K} .
6. ($\text{car}(\mathbb{K}) = 0$) Un polynôme $P \in \mathbb{K}[X] \subset \mathbb{L}[X]$ irréductible (\mathbb{L} extension de corps de \mathbb{K}) n'admet que des racines simples dans \mathbb{L} (et à fortiori dans \mathbb{K}).

Démonstration

2. Par les propriétés 3 et 4, on sait que ces polynômes sont irréductibles, montrons que ce sont les seuls.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ irréductible de degré ≥ 2 .

$P \in \mathbb{C}[X]$ donc on dispose de $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ racine de P .

$$P(\bar{\lambda}) = \overline{P(\lambda)} = \overline{P(\lambda)} = 0$$

D'où $(\text{car}(X - \lambda) \wedge (X - \bar{\lambda})) = 1$

$$Q = \underbrace{X^2 - 2 \operatorname{Re}(\lambda)X + |\lambda|^2}_{\in \mathbb{R}[X]} \mid P$$

Comme P est irréductible, P et Q sont associés et $\deg P = 2$.

4. Soit $P \in \mathbb{K}_3[X] \setminus \mathbb{K}_1[X]$
 - S'il est irréductible il n'admet pas de racine.
 - S'il n'est pas irréductible,

$$P = QR$$

- Soit $\deg Q = 1$, $Q = X - a$ et a racine de P .

- Soit $\deg R = 1$, $R = X - \beta$ et β racine de P .

6. $0 \leq \deg P' \leq \deg P - 1$ et par irréductibilité de P dans $\mathbb{K}[X]$

$$P \wedge P' = 1$$

Or le PGCD se conserve sur les extensions de corps, ils n'ont donc pas de racine communes (dans \mathbb{K} et \mathbb{L}).

Fonctions symétriques des racines

Définition des fonctions symétriques des racines et formules de Viete.

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la k -ème fonction symétrique des élémentaire de a_1, \dots, a_n est

$$\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \prod_{j=1}^k a_{i_j}$$

On remarque que $\sigma_0 = 1$.

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ scindé, on note a_1, \dots, a_n ses racines (non distinctes).

Formule de Viete :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Polynômes de Tchebycheff

Définition et propriétés des polynômes de Tchebycheff.

Le n -ème polynôme de Tchebycheff est le polynôme tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

Propriétés :

1. Formule de récurrence :

$$T_{n+1} + T_{n-1} = 2XT_n$$

2. $\deg T_n = n$, coefficient dominant : 2^{n-1} , sauf pour $n = 0$, $T_0 = 1$.

3. T_n est scindé racines simples sur \mathbb{R} :

$$T_n(X)$$

$$= 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2n} \right)$$

4. Orthogonalité : si $n \neq p$

$$\int_{-1}^1 T_n(x) T_p(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

5. Minimalité en norme :

$$\|P\| = \max_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$$

Si P unitaire de degré n , alors $\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Avec cas d'égalité si $P(X) = \frac{T_n(X)}{2^{n-1}}$

Preuves :

1. Formules de trigonométrie :

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos \theta \cos(n\theta)$$

$$T_{n+1}(\cos \theta) + T_{n-1}(\cos \theta) = 2(\cos \theta)T_n(\cos \theta)$$

Donc ils coïncident en une infinité de valeurs $[-1, 1]$, et sont donc égaux.

2. Par récurrence avec la relation de récurrence.

3. On résout $\cos(n\theta) = 0$, on fait attention à distinguer les racines.

4. Changement de variable $x = \cos \theta$, puis formules de trigonométrie.

5. Par contraposé : On prend P unitaire de degré n tel que

$$\|P\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- $P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n + Q$, $\deg Q \leq n - 1$.

- On regarde les y_k quand $T_n(y_k) = \pm 1$.

- On en déduit le signe de Q

- Par le TVI Q à n racines donc $Q = 0$.

- Donc $P(X) = \frac{T_n(X)}{2^{n-1}}$.

Propriétés des fractions rationnelles

Propriétés des fractions rationnelles

- Si on dit que $\frac{P}{Q}$ est scindé, c'est que Q est scindé.
- Si F admet une infinité de racines alors $F = 0$.
- Si F et G coïncident en une infinité de points alors $F = G$.

Décomposition en éléments simples

Formules, propriétés de la décomposition en éléments simples.

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, F se décompose de façon unique sous la forme

$$F = E + G \text{ avec } E \in \mathbb{K}[X] \text{ et } \deg G < 0$$

On appelle E la partie entière de F et G la partie pôleire.

- Si $F = \frac{P}{Q}$ scindé racines simples : soit a_1, \dots, a_n les pôles et $Q(X) = (X - a_k)R_k(X)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$F = E + \frac{\lambda_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - a_n}$$

Avec

$$\lambda_k = \frac{P(a)}{R_k(a)} = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

- Si F est scindé pôles multiples, on fait la même chose en retranchant les décompositions à chaque fois.

Décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$:

$$P(X) = \lambda(X - a_1)^{m_1} \cdots \cdots (X - a_k)^{m_k}$$

$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \frac{m_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{m_k}{X - a_k}$$

Axiomes d'un espace vectoriel

Axiomes d'un espace vectoriel.

Sois \mathbb{K} un corps, E muni de la somme interne $+$ et du produit externe \cdot est un \mathbb{K} -ev si

1. $(E, +)$ est un groupe abélien.
2. $\forall x \in E, 1 \cdot x = x.$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$
4. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x.$
5. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

Théorème de caractérisation du rang

Énoncé du théorème de caractérisation du rang.

Soit $A \in M_{np}(\mathbb{K})$, $r \in \mathbb{N}$, les assertions suivantes sont équivalentes

- A équivalente par ligne à une matrice échelonnée avec r lignes non nulles.
- $\text{rg } \varphi_A = r$
- $\text{rg } (C_1, \dots, C_p) = r$ (avec C_i la i -ème colonne de A)
- $\text{rg } (L_1, \dots, L_n) = r$ (avec L_i la i -ème ligne de A)
- $A \xrightarrow{L,C} J_r$

On dit alors que $\text{rg } A = r$.

On a aussi

$$A \xrightarrow{L,C} B \text{ ssi } \text{rg } A = \text{rg } B$$

$$\begin{aligned}\text{rg}(\varphi \circ \psi) &= \text{rg } \psi - \dim(\ker \varphi \cap \text{im } \varphi) \\ &\leq \min(\text{rg } \varphi, \text{rg } \psi)\end{aligned}$$

Formes linéaires et hyperplans

Formes linéaires et hyperplans.

Soit E un \mathbb{K} -ev

Un hyperplan de E est un sev de codimension 1, c'est à dire qui admet un supplémentaire de dimension 1.

- Si $a \in E^* \setminus \{0\}$, alors $\ker a$ est un hyperplan.
- Si H est un hyperplan de E , il existe une forme linéaire a unique à constante multiplicative près tel que $H = \ker a$.

Deux hyperplans ont toujours un supplémentaire commun.

Démonstration

- Si H_1 et H_2 sont des hyperplans, $H_1 \cup H_2 \neq E$

► Par l'absurde : supposons $H_1 \cup H_2 = E$ sev de E

Or $H_1 \cup H_2 = (H_1 \text{ ou } H_2) = E$ (cf unions de sev) qui est absurde.

Donc on dispose de $x_0 \in E \setminus (H_1 \cup H_2)$

Ainsi $\text{Vect}(x_0)$ est un supplémentaire de H_1 et H_2

Matrices semblables

Définition de matrices semblables.

Soit $A, B \in M_{n(\mathbb{K})}$, A est dite semblable à B si

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), B = P^{-1}AP$$

Invariants :

- $\mathrm{rg} A = \mathrm{rg} B$
- $\mathrm{tr} A = \mathrm{tr} B$
- $\det A = \det B$
- $\chi_A = \chi_B$
- $\mu_A = \mu_B$

Propriétés élémentaires sur les séries

Propriétés élémentaires sur les séries.

- Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$, on dit que $\sum u_n$ converge si (S_n) converge.
- Si $\sum u_n$ converge alors

$$(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- La suite (u_n) converge ssi la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- L'ensemble S des séries convergentes est un sev de l'espace des suites, et l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \quad S &\rightarrow \mathbb{K} \\ (u_n) &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\end{aligned}$$

est linéaire.

- Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ alors $\sum u_n$ converge ssi (S_n) est majoré (théorème de la limite monotone).

Théorème de comparaison des séries positives

Énoncé et démonstration du théorème de comparaison des séries positives.

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ alors

1. Si $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
3. Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ alors $\sum u_n$ converge ssi $\sum v_n$ converge.

Démonstration :

1. (S_n) est majoré par (\tilde{S}_n) qui est fini.
2. (S_n) est majoré par $M \cdot \tilde{S}_n$ qui est fini.
3. $u_n \sim v_n$ implique $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Comparaison série intégrale

Propriétés et méthode de comparaison série intégrale.

Pour $f \in C_{\text{pm}}^0([a, +\infty[, \mathbb{R}_+)$, décroissante, $\forall n \geq \lceil a \rceil + 1 = N_0$

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t) dt$$

$$\leq \int_{n-1}^n f(t) dt$$

D'où

$$\sum_{n=N_0}^N f(n) \geq \int_{N_0}^{N+1} f(t) dt$$

$$\leq \int_{N_0-1}^N f(t) dt$$

Ainsi $\sum f(n)$ converge ssi $\int_{N_0}^{+\infty} f$ converge.

Et de plus (à redémontrer) :

$$\sum \left(\int_{n-1}^n f(t) dt - f(n) \right)$$

$$\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$$

sont à terme général positif et convergent car

$$f(n) \leq \int_{n-1}^n f \leq f(n+1)$$

$$0 \leq \int_{n-1}^n f - f(n) \leq f(n+1) - f(n)$$

Et $\sum f(n+1) - f(n)$ est positive et converge (série télescopique) car f converge (positive et décroissante).

Dans le cas f non monotone :

Si $f \in C^1$ et $\int_n^{+\infty} |f'|$ converge

$$\int_k^{k+1} f = \underbrace{[(t-k-1)f(t)]_k^{k+1}}_{f(k)}$$

$$- \int_k^{k+1} (t-k-1)f'(t) dt$$

$$\int_1^{N+1} f = \sum_{k=1}^N f(k) + \sum_{k=1}^N \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt$$

Or pour tout $k \geq 1$

$$\left| \int_k^{k+1} (k+1-t)f'(t) dt \right| \leq \int_k^{k+1} |f'|$$

Qui est le terme général d'une série convergente d'où

$$\sum f(n) \text{ converge}$$

$$\text{ssi } \left(\int_1^N f \right)_N \text{ converge}$$

$$\text{ssi } \int_1^{+\infty} f \text{ converge}$$

Séries de Bertrand

Définitions et propriétés des séries de Bertrand.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ est appelée série de Bertrand.

Cette série converge ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Démonstration :

- Cas $\alpha > 1$ comparaison avec les séries de Riemann, en prenant $\gamma \in]1, \alpha[$.
- Cas $\alpha < 1$ même chose avec $\gamma \in]\alpha, 1]$.
- Cas $\alpha = 1$, comparaison série intégrale avec $t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^\beta}$.

Recherche d'équivalent d'une suite

Méthodes de recherche d'équivalents.

Si on cherche un équivalent d'une suite (u_n)

- Étudier la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ou $\sum(u_n - u_{n+1})$, sommes partielles ou restes (voir théorème de sommation des relations de comparaison).
- Chercher $a \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_{n+1}^a - u_n^a \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}^*$, pour avoir

$$u_n^a - u_0^a = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^a - u_k^a \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nl$$

Absolue convergence

Définitions et démonstration du théorème de l'absolue convergence d'une série.

Une série $\sum u_n$ (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}) est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration : on étudie $((u_n)_+)$ et $((u_n)_-)$ pour le cas réel, puis $(\text{Re}(u_n))$ et $(\text{Im}(u_n))$ pour le cas imaginaire, à chaque fois on majore par le module et on applique les théorèmes de comparaison des séries positives.

Théorème des séries alternées

Énoncer et démonstration du théorème des séries alternées.

Si $(u_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ décroissante tel que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors $\sum u_n$ converge et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = S - S_n$ est du signe du premier terme et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Démonstration : on montre que les suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes et on étudie R_{2n} et R_{2n+1} .

Transformation d'Abel

Définition et applications de la transformation d'Abel.

Il s'agit d'une sorte d'IPP sur les séries. Soit (a_n) et (b_n) deux suites, la transformation d'Abel est utile si on a des hypothèses sur $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On pose $S_{-1} = 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n a_k b_k &= \sum_{k=0}^n (S_k - S_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=0}^n S_k b_k - \sum_{k=0}^n S_{k-1} b_k \\ &= S_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} S_k (b_{k+1} - b_k)\end{aligned}$$

Applications :

$$\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$$

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$$

Remarque : on peut aussi écrire $a_k = R_{k-1} - R_k$, qui peut être intéressant si $\sum a_n$ converge.

Règle de Raabe-Duhamel

Énoncé et démonstration de la règle de Raab-Duchamel.

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ et

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{a}{n} + O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right), \quad h > 0$$

On considère $n^a a_n = u_n$, on veut montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l \in \mathbb{R}_+^*$, c'est dire que $(\ln(u_n))$ a une limite réelle. On étudie $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.

$$\begin{aligned} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) + a \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right)\right) + a \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{a}{n} - \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+h}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\min(2, 1+h)}}\right) \end{aligned}$$

Donc par le théorème de comparaison des séries à terme positifs (en valeur absolue) $\sum \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge, d'où (u_n) converge.

Ainsi $n^a a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^l$, donc $a_n \sim \frac{e^l}{n^a}$, $\sum a_n$ converge ssi $a > 1$.

Théorème de sommation des relations de comparaison pour les séries

Énoncés des théorèmes de sommation des relations de comparaison pour les séries.

Pour les restes de séries convergentes :

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n$ converge.

1. Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\right)$$

2. Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n\right)$$

3. Si $u_n \sim a_n$, alors

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_n$$

Démonstration : on repasse par les définitions de o et O : $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $|u_n| \leq Ka_n$, avec $K > 0$ fixé pour O et $K = \varepsilon > 0$ pour o . Pour \sim , on a $u_n - a_n = o(a_n)$.

Pour les sommes partielles de séries divergentes :

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $(a_n) \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $\sum a_n$ diverge.

1. Si $u_n = O(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et

$$\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n a_n\right)$$

2. Si $u_n = o(a_n)$, alors $\sum u_n$ converge absolument et

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n a_n\right)$$

3. Si $u_n \sim a_n$, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n a_n$$

Démonstration : même que pour l'autre, on a juste à découper la somme entre avant et après un certain rang (pour o et O).

Équivalents de référence : séries de Riemann

Équivalent des restes ou sommes partielles des séries de Riemann (à redémontrer).

Par comparaison série intégrale :

- Pour $1 \geq a > 0$

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t^a} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \leq \int_2^n \frac{dt}{t^a}$$

$$S_n(a) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^{1-a}}{1-a}$$

- Pour $a > 0$

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^a} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$$

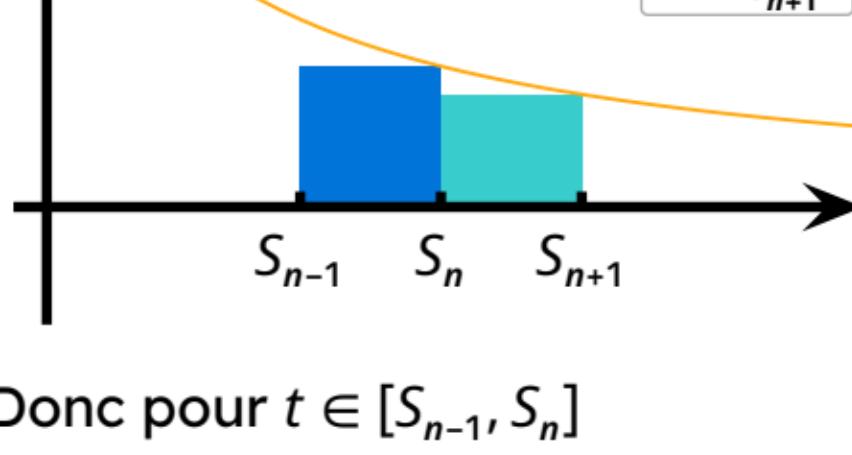
$$R_n(a) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{n^{a-1}}$$

Exercice : Nature de la série terme général sur somme partielle

Démonstration de la CNS sur a de la convergence de la série $\sum \frac{u_n}{S_n^a}$ (avec $\sum u_n$ divergente).

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^\mathbb{N}$, $\sum u_n$ diverge, et $a \in \mathbb{R}$. On note $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

- Si $a > 1$:



Donc pour $t \in [S_{n-1}, S_n]$

$$\frac{1}{t^a} \geq \frac{1}{S_n^a}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{S_k^a} \leq \int_{S_0}^{S_n} \frac{dt}{t^a} = \frac{1}{a-1} \left(\frac{1}{S_0^{a-1}} - \frac{1}{S_n^{a-1}} \right)$$

Or $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{S_n^a} \leq \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{S_0^a}$$

- Si $a = 1$:

Si $\frac{u_n}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, la série diverge grossièrement, et sinon

$$\frac{u_n}{S_n} \sim -\ln\left(1 - \frac{u_n}{S_n}\right)$$

$$\sim \ln(S_n) - \ln(S_{n-1})$$

Qui est le terme général d'une série télescopique divergente.

- Si $a \leq 1$, on compare avec $a = 1$, car à partir d'un certain rang $S_n \geq 1$.

Familles sommables

Définition et propriétés élémentaires des familles sommables.

Soit I un ensemble non vide.

Pour $(u_i) \in \mathbb{R}_+^I$, on définit

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{j \in J} u_j, J \subseteq I \text{ fini} \right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Pour une famille $(u_i) \in \mathbb{K}^I$, on dit qu'elle est sommable si

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors elle contient un nombre au plus dénombrable d'éléments non nuls (Démonstration : on étudie $J_n = \{i \in I \mid u_i \geq \frac{1}{n}\}$)

Théorème de sommation par paquets

Énoncer et éléments de démonstration du théorème de sommation par paquets.

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$, et $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ une partition. La famille (u_i) est sommable ssi

$$(*) : \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, (u_i)_{i \in I_n} \text{ sommable} \\ \sum \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right) \text{ converge vers } S \end{cases}$$

Dans ce cas

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

Démonstration :

- Cas positif :
 - On suppose $(*)$, on prend une sous famille finie J de I , on a donc une famille $(J_n = I_n \cap J)_n$, on note $N = \max(n \in \mathbb{N} \mid J_n \neq \emptyset)$ qui existe car J fini.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} u_j &= \sum_{n=0}^N \left(\sum_{j \in J_n} u_j \right) \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right) = S \end{aligned}$$

- Caractérisation de la borne supérieure, majoration et sous ensembles finis.
- Cas général : D'abord en valeurs absolues, puis parties positives, négatives, réelles et imaginaires.

Critère de convergence d'intégrales usuelles

Critère de convergence d'intégrales usuelles :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^\beta}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^a (\ln t)^\beta}$$

- $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^a}$ converge vers $\frac{1}{a-1}$ ssi $a > 1$.
- $\int_0^1 \frac{dt}{t^a}$ converge vers $\frac{1}{1-a}$ ssi $a < 1$.
- $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^\beta}$ converge ssi $a > 1$ ou $a = 1$ et $\beta > 1$
- $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^a (\ln t)^\beta}$ converge ssi $a < 1$ ou $a = 1$ et $\beta > 1$

Fonction gamma

Définition, convergence et démonstration de la fonction Γ .

On définit

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

- Qui converge pour $x > 0$.
- Pour $x > 0$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

- $\Gamma(1) = 1$

$t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est C_{pm}^0 sur $]0, +\infty[$.

- Sur $[1, +\infty[$

$$e^{-t} t^{x-1} = o_{t \rightarrow +\infty}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)$$

$$= o_{t \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Or $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} dt$ converge, donc par le théorème de comparaison d'intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ converge.

- Sur $]0, 1]$

$$e^{-t} t^{x-1} \underset{t \sim 0_+}{\sim} \frac{1}{t^{1-x}}$$

Or $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-x}}$ converge ssi $1 - x < 1$ d'où $x > 0$, et on conclut par le même théorème.

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x) \end{aligned}$$

Fonctions arithmétiques : Möbius et indicatrice d'Euler

Définition, contexte et démonstration de la fonction de Möbius et la formule d'inversion.

Pour $A = \mathcal{F}(\mathbb{N}^*, \mathbb{C})$ on définit (*), pour $f, g \in A$

$$f * g = \begin{cases} \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) \end{cases}$$

Qui est une loi de composition interne sur A . On montre que

- $\mathbb{1}_{\{1\}}$ est l'élément neutre.
- (*) est commutatif
- (*) est associatif

On définit la fonction de Möbius, on note $\pi(n) = |\{p \in \mathbb{P}, p | n\}|$

$$\mu : \begin{array}{ccc} 1 & \mapsto & 1 \\ n \mid \exists p \in \mathbb{P}, p^2 \mid n & \mapsto & (-1)^{\pi(n)} \\ n \mid \exists p \in \mathbb{P}, p^2 \nmid n & \mapsto & 0 \end{array}$$

On montre de plus

$$\mu * \mathbb{1}_{\mathbb{N}} = \mathbb{1}_{\{1\}}$$

Pour $n \geq 2$ on écrit $n = \prod_{j=1}^k p_j^{a_j}$. Un diviseur d s'écrit $\prod_{j=1}^k p_j^{\beta_j}$ avec

$\beta_j \leq a_j$. Donc

$$\mu(d) \neq 0 \Leftrightarrow \forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \beta_j \in \{0, 1\}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d) &= \sum_{\beta_1, \dots, \beta_k \in \{0, 1\}} \mu\left(\prod_{j=1}^k p_j^{\beta_j}\right) \\ &= \sum_{q=0}^k \sum_{I \subset \llbracket 1, q \rrbracket} (-1)^{|I|} \\ &= \sum_{q=0}^k (-1)^q \binom{k}{q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit la formule d'inversion de Möbius : soit $f : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$, on pose $g : n \mapsto \sum_{d|n} f(d)$ ($g = f * \mathbb{1}_{\mathbb{N}}$), on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$$

C'est à dire $f = g * \mu = f * \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{N}} * \mu}_{\mathbb{1}_{\{1\}}}$.

De plus μ est multiplicative.

Intégrales de Wallis

Définition, propriétés et démonstration des intégrales de Wallis.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^n d\theta \quad (\theta = \frac{\pi}{2} - t) \end{aligned}$$

Relation de récurrence

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{n+2} dt \\ &= \underbrace{\left[-\cos(t) \sin(t)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{0} \\ &\quad + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n (\cos t)^2 dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\ &= \frac{n+1}{n+2} W_n \end{aligned}$$

Formules explicites

$$W_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$W_1 = 1$$

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

D'où

$$W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$$

$$W_{2n}^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_{2n+1}^2$$

$$W_{2n} W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{4n+2}$$

Ainsi

$$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n+2}}$$

$$W_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$$

Lemme de Riemann-Lebesgue

Énoncé et démonstration du lemme de Riemann-Lebesgue.

Si I est un Intervalle de \mathbb{R} , et $f \in C_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{K})$ intégrable sur I , alors

$$\int_I f(t) e^{i\lambda t} dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_I f(t) \cos(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

$$\int_I f(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} 0$$

Démonstration

- Si f est C^1 sur un segment : par IPP, on dérive f , f' étant continue sur un segment elle est uniformément continue sur ce segment (théorème de Heine), et est donc bornée (théorème des bornes atteintes).
- On montre d'abord pour I segment.
 - On traite le cas f constante.
 - On généralise à f en escalier.
 - Par densité des fonctions en escalier on étend aux fonctions continues.
- On étend finalement aux intervalles quelconques.

Éxistence et unicité des sous groupes de groupe cyclique

Soit G un groupe cyclique d'ordre n , et $d \mid n$, montrer l'éxistence et l'unicité d'un sous groupe d'ordre d .

Soit G cyclique d'ordre n .

Par isomorphisme à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, on se ramène à l'étude de (\mathbb{U}_n, \cdot) .

Soit H sous groupe de \mathbb{U}_n , $|H| = d$.

Pour tout $x \in H$, $x^d = 1$ donc $H \subset \mathbb{U}_d$, par égalité des cardinaux, $H = \mathbb{U}_d$.

Polynômes cyclotomiques

Définitions et propriétés des polynômes cyclotomiques.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note

$$\begin{aligned}\mathbb{V}_n &= \{z \in \mathbb{U}_n \mid \text{ord}(z) = n\} \\ &= \left\{ e^{\frac{2ki\pi}{n}}, k \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \right\}\end{aligned}$$

On définit de n -ème polynôme cyclotomique

$$\begin{aligned}\Phi_n(X) &= \prod_{\xi \in \mathbb{V}_n} (X - \xi) \\ \deg(\Phi_n) &= \varphi(n)\end{aligned}$$

On montre

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

$$\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$$

Φ_p irréductible

Démonstration

- Pour $d \mid n$, on a

$$\mathbb{V}_d = \{z \in \mathbb{U}_n \mid \text{ord}(z) = d\}$$

Car si $z \in \mathbb{U}_n$ d'ordre d , $z \in \langle z \rangle$ sous groupe de \mathbb{U}_n de cardinal d , qui est unique car \mathbb{U}_n est cyclique. D'où $z \in \mathbb{U}_d$ et à fortiori $z \in \mathbb{V}_d$.

- On a donc

$$\mathbb{U}_n = \bigcup_{d \mid n} \mathbb{V}_d$$

$$\begin{aligned}X^n - 1 &= \prod_{\xi \in \mathbb{U}_n} (X - \xi) \\ &= \prod_{d \mid n} \left(\prod_{\xi \in \mathbb{V}_d} (X - \xi) \right)\end{aligned}$$

$$= \prod_{d \mid n} \Phi_d$$

- On montre que la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ par un polynôme unitaire donnent un polynôme dans $\mathbb{Z}[X]$. On refait la démonstration de la division euclidienne (récurrence).

- Référence forte sur n pour montrer que $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$

$$\begin{aligned}X^n - 1 &= \Phi_n \cdot \left(\prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} \Phi_d \right)\end{aligned}$$

- Soit $p \in \mathbb{P}$

$$\Phi_p = \prod_{\substack{\omega \in \mathbb{U}_p \\ \text{ord}(\omega) = p}} (X - \omega)$$

$$= \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{k=0}^{p-1} X^k$$

$$= X^{p-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{\binom{k}{p}}_{\text{divisible par } p} X^{k-1}$$

et le coefficient constant est $\binom{p}{1}$ qui n'est pas divisible par p^2 ,

d'où par le critère d'Eisenstein, Φ_p irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration de $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$:

$$n = |\mathbb{U}_n|$$

$$= \sum_{d \mid n} |\mathbb{V}_d|$$

$$= \sum_{d \mid n} \varphi(d)$$

Groupes quotientés

Définitions et propriétés des groupes quotientés.

Soit G un groupe, H sous-groupe.

On définit la relation d'équivalence

$$\forall (x, y) \in G^2, x \sim y \text{ ssi } y \in xH$$

On obtient ainsi les classes à gauche gH pour tout $g \in G$, dont l'ensemble est noté G/H .

H est dit distingué si

$$\forall g \in G, gHg^{-1} = H$$

Et dans ce cas G/H à une structure de groupe muni de la multiplication sur les classes

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$$

Et on pose

$$\begin{aligned} f : & G \rightarrow G/H \\ & g \mapsto gH \end{aligned}$$

qui est un morphisme de groupe surjectif appelé projection canonique de G sur G/H dont le noyau est H .

Cas particuliers

- Tous noyau de morphisme est un sous-groupe distingué.
- Tous sous-groupe d'indice 2 ($\frac{|G|}{|H|} = 2$) est distingué.

Idéaux maximaux, anneaux quotientés

Définitions d'idéal maximale, anneau quotienté, propriétés.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et I idéal de A .

Idéal maximale

Un idéal I de A est dit maximale si pour tout J idéal de A

$$I \subsetneq J \Rightarrow J = A$$

Anneau quotienté

On définit sur A la relation d'équivalence

$$\forall (x, y) \in A^2, x \sim y \text{ ssi } x - y \in I$$

On note A/I l'ensemble des classes d'équivalences par cette relation qu'on muni d'une structure de groupe en définissant les loi suivantes

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$$

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$$

Qui ne dépend pas du représentant choisis.

Propriétés

- I est maximale ssi tous les éléments non nuls de A/I sont inversibles.

- Si A commutatif, I maximale, alors I est premier (A/I est intègre).

Démonstration :

- On suppose I maximale. Soit $x \in A \setminus I$ c'est à dire $x \notin \overline{0_A}$, montrons que \bar{x} est inversible.

$I \subseteq xA + I = J$ est un idéal, or I maximale d'où $1_A \in A = J$, d'où l'existence de $y \in A$ et $z \in I$ tel que

$$xy + z = 1_A$$

$$\bar{x}\bar{y} = \overline{1_A}$$

- On suppose les éléments non nuls de I/A inversibles.

Soit $J \supsetneq I$ idéal de A , donc il existe $x \in J$ tel que $x \notin I$.

$\bar{x} \neq \overline{0}$ donc $\bar{x}^{-1} = \bar{y}$ existe.

$$\bar{x}\bar{y} = \overline{xy} = \overline{1_A}$$

$$\exists z \in I, \underbrace{\bar{x}\bar{y} + \bar{z}}_{\in J} = \overline{1_A}$$

$1_A \in J$ donc $J = A$, I est maximale.

- Soit $x, y \in A$ tels que $xy \in I$, supposons que $x \notin I$. Donc \bar{x} inversible : on dispose de $x' \in A$ et $z \in I$ tels que

$$xx' + z = 1_A$$

$$\underbrace{xyx' + zy}_{\in I} = y \in I$$

Signature d'une permutation

Définitions et propriétés de la signature dans \mathfrak{S}_n .

Plusieurs définitions alternatives.

- $\varepsilon : (\mathfrak{S}_n, \circ) \rightarrow (\mathbb{Z}^\times, \cdot)$ est l'unique morphisme non triviale.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \\ &= (-1)^{N_\sigma} \\ &= (-1)^{n - |\text{Orb}(\sigma)|}\end{aligned}$$

Où $N_\sigma = |\{(i, j) \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}|$.

Hölder

Inégalité de Hölder et démonstration.

Soit $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}_+$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Démonstration

- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q$$

Le cas nul se traite facilement, puis on utilise la concavité de \ln sur \mathbb{R}_+^* :

$$\ln\left(\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(x^p) + \frac{1}{q}\ln(y^q)$$

$$= \ln(xy)$$

$$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q \geq xy$$

- On traite d'abord le cas où l'un des vecteurs (X ou Y) est nul.
- On traite ensuite le cas où

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n y_j^q = 1$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p}x_i^p + \frac{1}{q}y_i^q$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \underbrace{\frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p}_{1} + \underbrace{\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q}_{1}$$

$$\leq 1 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

- Enfin dans le cas général, on pose pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i} \quad \tilde{y}_i = \frac{y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}$$

Et ça marche.

Actions de groupe

Définitions et exemples usuels, propriétés des actions de groupes.

Soit G un groupe, X un ensemble. Une action de groupe est la donnée d'un morphisme de groupe

$$\varphi : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g \mapsto \rho_g : \begin{cases} X \rightarrow X \\ x \mapsto \rho_g(x) = g.x \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi tout groupe fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est isomorphe à un sous groupe de \mathfrak{S}_n .

Démonstration

Grâce à l'action de groupe φ

$$\varphi : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n \\ a \mapsto \rho_a : \begin{cases} G \rightarrow G \\ g \mapsto ag \end{cases} \end{cases}$$

Qui est un morphisme de groupe (car $\rho_a \circ \rho_b = \rho_{a,b}$), injectif (car $\ker \varphi = e_G$), d'où $\varphi|_{\varphi(G)}$ isomorphisme de $G \rightarrow \varphi(G)$, avec $\varphi(G)$ sous groupe de $\mathfrak{S}(G) \simeq \mathfrak{S}_n$.

Autre action classique

On peut aussi considérer l'action de conjugaison

$$\theta : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(G) \\ g \mapsto \rho_g : \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{g \in G \mid \theta(g) = \text{id}\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gxg^{-1} = x\} \\ &= \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\} \\ &= Z(G) \end{aligned}$$

Formule des classes

Énoncé, démonstration et définitions de la formule des classes.

Soit G un groupe et φ une action de G sur un ensemble X . On définit pour tout $x \in X$

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

C'est un sous groupe de G :

- $e.x = x$ d'où $e \in \text{Stab}(x)$
- $\forall g \in \text{Stab}(x), g^{-1}.x = g^{-1}.g.x = x$
- $\forall g, h \in \text{Stab}(x), (gh).x = g.h.x = x$

On définit également

$$\text{Orb}(x) = \{g.x, g \in G\}$$

Qui est la classe d'équivalence de x pour la relation d'équivalence

$$x \sim y \text{ si } \exists g \in G, y = g.x$$

Donc les orbites forment une partition de X .

Formule des classes

Pour tout $x \in X$ fini et G fini

$$|\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)| = |G|$$

Démonstration

Soit $x \in X$, pour $y \in \text{Orb}(x)$, on dispose de $g_0 \in G$ tel que $g_0.x = y$.

Étudions $\{g \in G \mid g.x = y\}$:

$$\begin{aligned} g.x = y &\Leftrightarrow g.x = g_0.x \\ &\Leftrightarrow (g_0^{-1}g).x = x \\ &\Leftrightarrow g_0^{-1}g \in \text{Stab}(x) \\ &\Leftrightarrow g \in g_0 \text{ Stab }(x) \end{aligned}$$

D'où

$$G = \bigcup_{y \in \text{Orb}(x)} \{g \in G \mid g.x = y\}$$

$$|G| = \sum_{y \in \text{Orb}(x)} |g_0 \text{ Stab }(x)|$$

$$= \sum_{y \in \text{Orb}(x)} |\text{Stab}(x)|$$

$$= |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)|$$

Exercice : Les p-groupes

Définitions d'un p -groupe, et démonstration de

1. Pour G p -groupe, $|Z(G)| = p^a$ avec $a \in \mathbb{N}^*$.
2. Tout groupe G d'ordre p^2 est abélien

Un p -groupe est un groupe dont tout les éléments sont d'ordre p^r avec $r \in \mathbb{P}$. A fortiori, il s'agit d'un groupe de cardinal p^a .

1. On étudie l'action de groupe

$$\varphi : \begin{cases} G \rightarrow \mathfrak{S}(G) \\ g \mapsto \rho_g : \begin{cases} G \rightarrow G \\ x \mapsto gxg^{-1} \end{cases} \end{cases}$$

On montre que

$$x \in Z(G) \text{ ssi } \text{Orb}(x) = \{e_G\}$$

Et par la formule des classes on a pour tout $x \in G$:

$$p^a = |G| = |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)|$$

Donc $|\text{Orb}(x)| \mid p^a$ d'où si $|\text{Orb}(x)| > 0$, $p \mid |\text{Orb}(x)|$.

Or les $\text{Orb}(x)$ forment une partition de G donc

$$p^a = |G| = \sum_{x \in G} |\text{Orb}(x)|$$

$$= |Z(G)| + \underbrace{\sum_{\substack{x \in G / \sim \\ |\text{Orb}(x)| > 1}} |\text{Orb}(x)|}_{\text{divisible par } p}$$

Donc $p \mid |Z(G)|$ mais $e_G \in Z(G)$

donc $|Z(G)| > 0$ d'où $|Z(G)| \geq p$.

2. Par l'exercice ci dessus

$$Z(G) \in \{p, p^2\}$$

Supposons qu'il existe $x \in G \setminus Z(G)$, alors

$$Z(G) \subset \text{Stab}(x) \text{ et } x \in \text{Stab}(x)$$

Donc $|\text{Stab}(x)| \geq p + 1$ sous-groupe de G donc

$$\text{Stab}(x) = G$$

D'où $x \in Z(G)$, absurde.

Exercice : élément d'ordre p dans un groupe d'ordre divisé par p

Soit G un groupe d'ordre pq avec $p \in \mathbb{P}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, démonstration de l'existence d'un élément d'ordre p .

Soit G d'ordre $n = pq$ avec $(p, q) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}^*$.

On pose

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_p) \in G^p \mid x_1 \cdots x_p = e_G\}$$
$$\sigma = (1 \ 2 \ \cdots \ p) \in \mathfrak{S}_p$$

On considère $H = \langle \sigma \rangle$ qui agit sur Γ via

$$\varphi : \begin{cases} H & \rightarrow \mathfrak{S}(\Gamma) \\ \sigma^k & \mapsto \rho_{\sigma^k} \end{cases}$$

Où

$$\rho_{\sigma^k} : \begin{cases} \Gamma & \rightarrow \Gamma \\ (x_1, \dots, x_p) & \mapsto (x_{\sigma^k(1)}, \dots, x_{\sigma^k(p)}) \end{cases}$$

(On montre par récurrence sur k que ρ_{σ^k} à bien valeur dans Γ).

On remarque que $|H| = p$ et

$$\forall X = (x_1, \dots, x_p) \in G^p,$$

$$X \in \Gamma \Leftrightarrow x_p^{-1} = x_1 \cdots x_{p-1}$$

$$\Gamma \simeq G^{p-1} \text{ donc } |\Gamma| = n^{p-1}$$

Pour tout $x \in \Gamma$ (par la formule des classes)

$$p = |H| = |\text{Orb}(x)| \cdot |\text{Stab}(x)|$$

$$\text{donc } |\text{Orb}(x)| \in \{1, p\}$$

$$\text{Orb}(x) = \{x\} \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_p$$

$$\Leftrightarrow x_1^p = e_G$$

Et

$$n^{p-1} = |\Gamma| = \sum_{x \in \Gamma / \sim} |\text{Orb}(x)|$$

$$= \sum_{\substack{x \in \Gamma / \sim \\ |\text{Orb}(x)| = 1}} 1 + \sum_{\substack{x \in \Gamma / \sim \\ |\text{Orb}(x)| > 1}} p$$

$$= |\{x \in G \mid x^p = e_G\}| + kp$$

Avec $k \in \mathbb{N}$. Or $p \mid n$ donc

$$p \mid |\{x \in G \mid x^p = e_G\}| \geq 1$$

Donc il existe au moins $p - 1$ éléments d'ordre p .

Cas $n = 2$:
On regroupe les éléments avec leurs inverse, ce qui montre par la parité du cardinal l'existence d'un élément d'ordre 2.

Théorème de Burnside

Énoncer et démonstration du théorème de Burnside.

Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X fini par φ .

On définit pour $g \in G$

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X, g.x = x\}$$

Notons N le nombre d'orbites :

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Démonstration

On étudie

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\} \\ &= \bigcup_{x \in X} \{(g, x), g \in \text{Stab}(x)\} \\ &= \bigcup_{g \in G} \{(g, x), x \in \text{Fix}(g)\} \end{aligned}$$

Or par la formule des classes

$$|\text{Stab}(x)| = \frac{|G|}{|\text{Orb}(x)|}$$

D'où (en notant x_i représentant du i -ème orbite)

$$\begin{aligned} |\Gamma| &= \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{x \in \bar{x}_j} |\text{Stab}(x)| \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{x \in \bar{x}_j} \frac{|G|}{|\text{Orb}(x_j)|} \\ &= N |G| \end{aligned}$$

Or

$$|\Gamma| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

D'où

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Exercice : Groupe d'éléments d'ordre inférieur à deux

Propriétés du groupe G tel que
 $\forall x \in G, x^2 = 1$

On a immédiatement

$$\forall x \in G, x = x^{-1}$$

- G est abélien, soit $x, y \in G$:

$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$$

- Si G fini, $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ et $|G| = 2^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$.

Passons en notation additive pour plus de clarté :

Faisons de G un \mathbb{F}_2 -ev :

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_2 \times G &\rightarrow G \\ (\bar{k}, g) &\mapsto kg\end{aligned}$$

Qui ne dépend pas du représentant car $2G = \{0\}$.

G un \mathbb{F}_2 -ev de dimension finie, donc isomorphe à \mathbb{F}_2^n en tant qu'espace vectoriel, et à fortiori en tant que groupe.

Irréductibles d'un anneau

Définition, propriétés élémentaires sur les irréductibles dans un anneau principal.

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau principal.

- Dans un anneau principal on a un PGCD

Pour tout $a, b \in A$, il existe $d \in A$ tel que $aA + bA = dA$, unique (à associés près), qu'on appelle PGCD de a et b ($a \wedge b = d$).

On a aussi Bézout car $d \in dA = aA + bA$ d'où $\exists (u, v) \in A^2, d = au + bv$.

- Un élément de A est dit irréductible si ses seuls diviseurs sont ses associés et les inversibles.
- Pour tout $a \in A$, il existe une unique (à permutation et multiplication par des inversibles près) décomposition de a en irréductibles.

Démonstration de la décomposition

- Toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

$(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$ suite d'idéaux de A croissante au sens de l'inclusion.

$$K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$$

Est encore un idéal car union croissante d'idéaux

Par principauté de A , $K = zA$ avec $z \in K$ donc on dispose de $k \in \mathbb{N}$ tel que $z \in I_k$ d'où

$$K = zA \subseteq I_k \subseteq K$$

- Tout élément de A admet au moins un diviseur irréductible dans A .

Soit $x \in A$, on construit la suite (x_n) par récurrence : $x_0 = x$ et pour $n \in \mathbb{N}$

- Si x_n irréductible, $x_{n+1} = x_n$
- Sinon on prend x_{n+1} diviseur de x_n non associés et non inversible.

Par définition de la divisibilité, $(x_n A)_n$ est une suite croissante d'idéaux, et est donc stationnaire.

Soit k le rang à partir duquel c'est le cas, x_k est donc un diviseur irréductible de x .

- Existence de la décomposition : récurrence avec la propriété ci dessus.

• Unicité de la décomposition : on prend deux décomposition on montre que chaque irréductible est présent à la même puissance dans les deux.

Polynômes en caractéristique strictement positive

Remarques et mises en gardes à propos de $\mathbb{K}[X]$ quand $\text{car}(\mathbb{K}) > 0$

Soit \mathbb{K} un corps tel que $\text{car}(\mathbb{K}) > 0$

- Le morphisme d'évaluation $\theta : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ n'est pas forcément injectif.

Dans \mathbb{F}_p , $\theta(X^p - X) = \theta(0) = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)}$ or $X^p - 1 \neq 0$.

- Il n'y a pas équivalence entre multiplicité d'une racine et les valeurs des dérivées successives.

Pour $\text{car}(\mathbb{K}) = p \in \mathbb{P}$

Pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$

$$\binom{k}{p} = \frac{\overbrace{p(p-1) \cdots (p-k+1)}^{p \text{ divise}}}{\underbrace{k!}_{p \text{ ne divise pas}}}$$

D'où $\binom{k}{p}$ nul dans \mathbb{K} .

Ainsi pour tout $a, b \in \mathbb{K}$

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{k}{p} a^k b^{p-k}$$

$$= a^p + b^p$$

Et on peut définir le morphisme de corps de Frobenius

$$\sigma : \begin{cases} \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto x^p \end{cases}$$

Donc dans $\mathbb{F}_p[X]$

$$Q = (X-1)^p = X^p - 1$$

1 est racine de multiplicité p de

Q or $Q' = 0$ d'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^{(k)}(1) = 0$.

Théorème de Wilson

Énoncer et démonstration du théorème de Wilson.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, p est premier si $(p - 1)! \equiv -1[p]$.

Démonstration

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ non premier.
 - ▶ Si $3 \leq n = m^2$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. $2m \cdot m \mid (n - 1)!$ d'où $(n - 1)! \equiv 0[n]$
 - ▶ Sinon on dispose de $1 \leq p, q < n$ tels que $n = pq$ d'où $n = pq \mid (n - 1)!$ et $(n - 1)! \equiv 0[n]$.
- Soit $p \in \mathbb{P}$, étudions $(p - 1)!$ dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

Soit $x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ tel que $x^2 = 1$

$$(x + 1)(x - 1) = 0$$

Donc $x = \{1, -1\}$.

On peut donc regrouper les éléments du produit $(p - 1)!$ avec leurs inverses (qui sont dans le produit), à l'exception de 1 et -1 d'où

$$(p - 1)! = (p - 1)(p - 2) \cdots \cdot 1 = -1 \cdot 1 = 1$$

Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Autre démonstration horrible pour le deuxième sens

Soit $p \in \mathbb{P}$, on étudie $R = X^p - X$ dans $\mathbb{F}_p[X]$.

Pour tout $x \in \mathbb{F}_p$, $R(x) = 0$ donc $(X - x) \mid R$ et premiers entre eux deux à deux d'où

$$\prod_{x \in \mathbb{F}_p} (X - x) \mid R$$

Et par égalité des degrés on a égalité des polynômes.

Considérons maintenant le morphisme d'anneau suivant :

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^n a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^n \bar{a}_k X^k \end{cases}$$

$$Q = \prod_{k=0}^{p-1} (X - k) = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$$

$$\pi(Q) = \prod_{k=0}^{p-1} (X - \bar{k}) = R$$

$$a_1 = (-1)^{p-1} \sum_{\substack{I \subset [0, p-1] \\ |I| = p-1}} \prod_{i \in I} i$$

$$= (p - 1)!$$

$$\bar{a}_1 = \overline{(p - 1)!} = -1$$

Formule de Taylor-Lagrange formelle

Formule de Taylor-Lagrange formelle sur $\mathbb{K}[X]$, démonstration.

Soit \mathbb{K} un corps tel que $\text{car}(\mathbb{K}) = 0$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $N \geq \deg P$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^N P^{(k)}(a) \frac{(X - a)^k}{k!}$$

Démonstration

Notons $E = \mathbb{K}_N[X]$ qui est un \mathbb{K} -ev de dimension $N + 1$.

La famille $((X - a)^k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est libre car échelonné en degré, c'est donc une base de E , et comme $P \in E$, et comme $P \in E$

$$P = \sum_{k=0}^N \lambda_k (X - a)^k$$

Pour $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$

$$\begin{aligned} P^{(j)}(a) &= \sum_{k=j}^N \frac{\lambda_k k!}{(k - j)!} (a - a)^{k-j} \\ &= \lambda_j j! \end{aligned}$$

$$\lambda_j = \frac{P^{(j)}(a)}{j!}$$

Contenus d'un polynôme à coefficients entiers

Définitions, propriétés, et démonstrations à propos du contenu dans $\mathbb{Z}[X]$.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, on définit le contenu de P comme

$$c(P) = \bigwedge_{k=0}^d a_k$$

Et on dit qu'un polynôme P est primitif si $c(P) = 1$.

- Soient $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $c(P) = c(Q) = 1$, alors $c(PQ) = 1$. A
- Pour tout $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Démonstration

- Soit $p \in \mathbb{P}$, posons le morphisme d'anneau

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^d a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^d \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

$c(P) = 1$ donc P admet au moins un coefficient non divisible par p et de même pour Q .

$$\pi(P) \neq 0 \text{ et } \pi(Q) \neq 0$$

$$\pi(PQ) = \pi(P)\pi(Q) \neq 0$$

Donc p ne divise pas tous les

coefficients de PQ pour tout

$p \in \mathbb{P}$, d'où $c(PQ) = 1$.

- On remarque que pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$, $c(kP) = kc(P)$ et on

étudie $\tilde{P} = \frac{P}{c(P)}$ et $\tilde{Q} = \frac{Q}{c(Q)}$.

Exercice : Produit de polynômes de rationnels unitaire entier

Soient $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires, montrer que si $PQ \in \mathbb{Z}[X]$ alors $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$.

$P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires, $PQ \in \mathbb{Z}[X]$.

Comme PQ unitaire $c(PQ) = 1$. On trouve $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aP, bQ \in \mathbb{Z}[X]$.

$$c(aP)c(bQ) = abc(PQ) = ab$$

Or P et Q étant unitaires

$$\begin{cases} c(aP) \mid a \\ c(bQ) \mid b \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = k_a c(aP) \\ b = k_b c(bQ) \end{cases}$$

$$c(aP)c(bQ) = ab = k_a k_b c(aP)c(bQ)$$

$$\text{d'où } k_a = k_b = 1 \text{ et } \begin{cases} a = c(aP) \\ b = c(bQ) \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} P = a \frac{P}{a} \in \mathbb{Z}[X] \\ Q = b \frac{Q}{b} \in \mathbb{Z}[X] \end{cases}$$

Exercice :

Irréductibilité dans les rationnels

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ dont les seuls diviseurs dans $\mathbb{Z}[X]$ sont de degré 0 ou $\deg P$, montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

On suppose par contraposé que P n'est pas irréductible dans \mathbb{Q} .

$$P = QR$$

$$1 \leq \deg Q, \deg R \leq \deg P - 1$$

On introduit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $aQ, bR \in \mathbb{Z}[X]$.

$$\begin{aligned} abc(P) &= c(aQbR) \\ &= c(aQ)c(bR) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{aQbR}{ab} \\ &= \frac{(aQ)(bR)}{\frac{c(aQ)c(bR)}{c(P)}} \\ &= c(P) \cdot \underbrace{\frac{aQ}{c(aQ)}}_{Q_0} \cdot \underbrace{\frac{bR}{c(bR)}}_{R_0} \in \mathbb{Z}[X] \end{aligned}$$

Avec Q_0 et R_0 diviseurs de P dans $\mathbb{Z}[X]$ de degrés compris dans $\llbracket 1, \deg P - 1 \rrbracket$.

Entiers algébriques

Définition d'entier algébrique.

Soit $a \in \mathbb{C}$, on dit que a est un entier algébrique s'il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $Q(a) = 0$.

- a est donc aussi algébrique dans \mathbb{Q} , et son polynôme minimal est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$.

Entiers algébriques de degré 2

- $a \in \mathbb{C}$ entier algébrique de degré 2 : on dispose de $\pi_a \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire de degré 2 qui annule a . $\mathbb{Z}[a] = \text{im } \theta_a$ est un sous-anneau de \mathbb{R} (et donc de \mathbb{C}).
- $\mathbb{Z}[a] = \{x + ay, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ et tout élément s'écrit de manière unique sous cette forme.
- On peut écrire

$$\pi_a = (X - a)(X - \beta)$$

On remarque que $\beta \in \mathbb{Z}[a]$ car $a + \beta = a \in \mathbb{Z}$ d'où $\beta = a - a \in \mathbb{Z}[a]$.

On définit

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{Z}[a] & \rightarrow \mathbb{Z}[a] \\ x + ay & \mapsto x + \beta y \end{cases}$$

On a alors

$$\forall z, z' \in \mathbb{Z}[a], \tau(zz') = \tau(z)\tau(z')$$

- Et on peut alors définir

$$N : \begin{cases} \mathbb{Z}[a] & \rightarrow \mathbb{Z} \\ z = x + ay & \mapsto z\tau(z) \end{cases}$$

Qui est aussi multiplicatif.

- $z \in \mathbb{Z}[a]$ est inversible ssi $N(z) = |1|$.

$$\pi_a(X) = X^2 + aX + b$$

$$\bullet \text{ On a déjà } \{x + ay, (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} \subseteq \mathbb{Z}[a].$$

$$\bullet \text{ Soit } x = P(a) \in \mathbb{Z}[a], P = Q\pi_a + R \text{ avec } Q \in \mathbb{K}[X], R \in \mathbb{K}_1[X].$$

Donc

$$R = yX + x \in \mathbb{Z}[X]$$

$$P(a) = \underbrace{Q(a)\pi_{a(a)}}_0 + ya + x$$

$$\bullet \text{ Soit } x_1 + ay_1 = x_2 + ay_2 \text{ avec } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{Z}.$$

$$x_1 - x_2 = (y_2 - y_1)a$$

Par l'absurde, si $y_1 \neq y_2$:

$$a = \frac{x_1 - x_2}{y_2 - y_1} \in \mathbb{Q}[X]$$

Qui est absurde car π_a serait de degré 1.

- Soit $z = x + ay \in \mathbb{Z}[a]$

$$\begin{aligned} N(z) &= z\tau(z) = (x + ay)(x + \beta y) \\ &= x^2 + (a + \beta)xy + a\beta y^2 \\ &= x^2 + axy + a\beta y^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Soit $z = x + ay \in \mathbb{Z}[a]$

$$\begin{aligned} N(z) &= z\tau(z) = (x + ay)(x + \beta y) \\ &= x^2 + (a + \beta)xy + a\beta y^2 \\ &= x^2 + axy + a\beta y^2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- Soit $z \in \mathbb{Z}[a]$ inversible, on dispose de $z' \in \mathbb{Z}[a]$ tel que $zz' = 1$.

$$N(zz') = N(1) = 1 = N(z)N(z')$$

Donc $|N(z)| = 1$

- Soit $z \in \mathbb{Z}[a]$ tel que $N(z) = \varepsilon \in \{1, -1\}$

$$(x + ay)(x + \beta y) = \varepsilon$$

$$z(\varepsilon x + \varepsilon \beta y) = 1 = \varepsilon$$

$$z^{-1} = \varepsilon(x + \beta y)$$

Exercice : Polynômes à coefficients entiers

1. Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, montrer que si P admet une racine rationnelle $\frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$, alors $q \mid a_d$ et $p \mid a_0$.
-

1.

$$0 = P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^d a_k p^k q^{d-k}$$

$$\underbrace{- \sum_{k=0}^{d-1} a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } q} = a_d p^d$$

$$\underbrace{- \sum_{k=1}^d a_k p^k q^{d-k}}_{\text{divisible par } p} = a_0 q^d$$

D'où $\begin{cases} q \mid a_d p^d \\ p \mid a_0 q^d \end{cases}$ or $q \wedge p = 1$ donc par le théorème de Gauss,

$$\begin{cases} q \mid a_d \\ p \mid a_0 \end{cases}$$

On en déduit que si $P \in \mathbb{Z}[X]$ est unitaire et admet une racine rationnelle, alors elle est entière.

Critère d'Eisenstein

Énoncé et démonstration du critère d'Eisenstein.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ tel qu'il existe $p \in \mathbb{P}$ et

$$\begin{cases} \forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket, p \mid a_k \\ p \nmid a_d \\ p^2 \nmid a_0 \end{cases}$$

Alors P n'a pas de diviseurs dans $\mathbb{Z}[X]$ de degré compris dans $\llbracket 1, d-1 \rrbracket$, et est donc irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ (cf. exercices sur le contenu).

Démonstration

On considère le morphisme d'anneau suivant

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{Z}[X] & \rightarrow \mathbb{F}_p[X] \\ \sum_{k=0}^d a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^d \overline{a_k} X^k \end{cases}$$

Supposons par l'absurde que $P = QR$ avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$

$$\overline{0} \neq \overline{a_d} X^d = \pi(P) = \pi(Q)\pi(R)$$

Par unicité de la décomposition en irréductibles dans $\mathbb{F}_p[X]$

$$\pi(Q) = aX^k \quad \pi(R) = \beta X^l$$

$$k + l = d \quad \deg Q \geq k \quad \deg R \geq l$$

Or $\deg Q + \deg R = d$ d'où

$$Q = \sum_{i=0}^k b_i X^i \text{ avec } \begin{cases} \overline{b_k} = a \neq 0 \\ \overline{b_0} = 0 \end{cases}$$

$$R = \sum_{i=0}^l c_i X^i \text{ avec } \begin{cases} \overline{c_l} = \beta \neq 0 \\ \overline{c_0} = 0 \end{cases}$$

D'où $a_0 = b_0 c_0$ est divisible par p^2 , absurde.

Exercice : rationalité d'une racine de haute multiplicité

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré n et a racine de P de multiplicité $m_a > \frac{n}{2}$, montrer que $a \in \mathbb{Q}$.

Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ de degré n et a racine de P de multiplicité $m_a > \frac{n}{2}$.

$$P = \prod_{k=0}^N Q_k^{p_k}$$

Décomposition en irréductibles de P dans $\mathbb{Q}[X]$. Pour tout $i \neq j$, $P_i \wedge P_j = 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et donc dans $\mathbb{C}[X]$.

Ainsi a n'est racine que d'un des P_i , notons $P_1(a) = 0$.

C'est une racine simple car P_1 irréductible, d'où

$$p_1 \geq m_a > \frac{n}{2}$$

$$2p_1 > n \geq p_1 \deg(P_1)$$

$$2 > \deg(P_1) = 1$$

Donc $P_1 = \lambda(X - a) \in \mathbb{Q}[X]$ d'où $a \in \mathbb{Q}$.

Algèbres

Définition d'une \mathbb{K} -Algèbre avec \mathbb{K} un corps.

Une \mathbb{K} -Algèbre est un ensemble A muni de deux lois de composition internes $(+)$, (\times) et d'une loi de composition externe (\cdot) tel que

- $(A, +, \times)$ est un anneau
- $(A, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -ev
- $\forall (a, x, y) \in \mathbb{K} \times A^2$

$$a(x \times y) = (ax) \times y = x \times (ay)$$

Exemples

- \mathbb{K} est une \mathbb{K} -Algèbre
- $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot)$ est une \mathbb{K} -Algèbre
- Pour E un \mathbb{K} -ev, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -Algèbre.

Exercice : existence d'un élément d'ordre du ppcm de deux autres

1. Soit G un groupe abélien fini, montrer que pour tout $x, y \in G$, il existe un élément $z \in G$ tel que $\text{ord}(z) = \text{ord}(x) \vee \text{ord}(y)$.
2. En déduire que

$$\max_{g \in G} \text{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \text{ord}(g)$$

-
1. Soit G un groupe abélien, $x, y \in G$ qui admettent un ordre.

$$\text{ord}(x) = \prod_{i=1}^N p_i^{a_i}$$

$$\text{ord}(y) = \prod_{i=1}^N p_i^{\beta_i}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\text{ord}\left(x^{\prod_{i \neq k} p_i^{a_i}}\right) = p_k^{a_k}$$

$$\text{ord}\left(y^{\prod_{i \neq k} p_i^{\beta_i}}\right) = p_k^{\beta_k}$$

On pose alors

$$z_k = \begin{cases} x^{\prod_{i \neq k} p_i^{a_i}} & \text{si } a_k \geq \beta_k \\ y^{\prod_{i \neq k} p_i^{\beta_i}} & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où $\text{ord}(z_k) = p_k^{\max(a_k, \beta_k)}$

Ainsi en posant $z = \prod_{k=1}^N z_k$:

$$\text{ord}(z) = \prod_{k=1}^N p_k^{\max(a_k, \beta_k)}$$

$$= \text{ord}(x) \vee \text{ord}(y)$$

(Car G est abélien).

2. Par récurrence (car G fini) on dispose de $h \in G$ tel que

$$\text{ord}(h) = \bigvee_{g \in G} \text{ord}(g) = m$$

Posons $g_0 \in G$ d'ordre

$\max_{g \in G} \text{ord}(g)$.

On a donc

$$m \leq \text{ord}(g_0) \mid m$$

$$m = \text{ord}(g_0)$$

Exercice : Cyclicité des sous-groupes finis des inversibles d'un corps

Soit \mathbb{K} un corps, et $G \leq \mathbb{K}^*$ fini.
Montrer que G est cyclique.

Première méthode

On utilise la propriété suivante (à redémontrer) : si G abélien fini

$$\max_{g \in G} \text{ord}(g) = \bigvee_{g \in G} \text{ord}(g)$$

Or pour tout $g \in G$, $g^m = 1$ d'où
 $G \subset \{\text{racines de } X^m - 1 \text{ dans } \mathbb{K}[X]\}$

D'où $|G| \leq m$ car \mathbb{K} est un corps et ainsi l'élément d'ordre maximale est d'ordre supérieure ou égal au cardinal de G , d'où G cyclique.

Deuxième méthode

Pour $d \mid n = |G|$ on pose

$$\Gamma_d = \{g \in G \mid \text{ord}(g) = d\}$$

$$G = \bigcup_{d \mid n} \Gamma_d$$

$$n = \sum_{d \mid n} |\Gamma_d|$$

On pose aussi

$$A_d = \{g \in G \mid g^d = 1\} \\ = \{\text{racines de } X^d - 1\} \cap G$$

$$|A_d| \leq d$$

Pour $d \mid n$ on a

- $\Gamma_d = \emptyset$ et $|\Gamma_d| = 0$
- Ou il existe $x \in \Gamma_d$, d'où $\langle x \rangle \subset A_d$ et $d \leq |A_d| \leq d$.

Ainsi

$$\Gamma_d = \{g \in A_d = \langle x \rangle \mid \text{ord}(g) = d\}$$

$$|\Gamma_d| = \varphi(d)$$

Finalelement

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n = \sum_{d \mid n} \underbrace{|\Gamma_d|}_{\in \{0, \varphi(d)\}}$$

D'où nécessairement $|\Gamma_d| = \varphi(d)$ pour tout $d \mid n$, en particulier pour $|\Gamma_n| = \varphi(n) > 0$: il existe $\varphi(n)$ éléments d'ordre n .

Exercice : Les carrés de \mathbb{F}_p

Notons $\mathbb{F}_p^2 = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p\}$ et $\mathbb{F}_p^{*2} = \{x^2, x \in \mathbb{F}_p^*\}$.

- Montrer que $|\mathbb{F}_p^2| = \frac{p+1}{2}$ et $|\mathbb{F}_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}$.
- Montrer que pour $x \in \mathbb{F}_p^*$, $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$ ssi $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.
- En déduire que pour $p \geq 3$, -1 est un carré ssi $p \equiv 1[4]$.
- On suppose $p \equiv 3[4]$, pour $x \in \mathbb{F}_p^*$ montrer que x est un carré ssi $-x$ n'en est pas un.
- Soit $p \in \mathbb{P}$ | $p \equiv -1[4]$, pour tout $r \in \mathbb{F}_p^*$ montrer que $\Gamma_r = \{(x, y) \in (\mathbb{F}_p^*)^2 \mid x^2 - y^2 = r\}$ est de cardinal $p - 3$.

- On étudie le morphisme de groupe

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{F}_p^* \rightarrow \mathbb{F}_p^{*2} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \ker \theta &= \{x \in \mathbb{F}_p^*, x^2 = 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{F}_p^*, (x-1)(x+1) = 0\} \\ &= \{-1, 1\} \end{aligned}$$

$$\underbrace{|\ker \theta|}_{2} \cdot \underbrace{|\text{im } \theta|}_{|\mathbb{F}_p^{*2}|} = p - 1$$

$$\text{D'où } |\mathbb{F}_p^{*2}| = \frac{p-1}{2}.$$

$$\text{Et } \mathbb{F}_p = \mathbb{F}_p^* \cup \{0\} \text{ d'où}$$

$$|\mathbb{F}_p^2| = |\mathbb{F}_p^{*2}| + 1 = \frac{p+1}{2}$$

- Soit $x \in \mathbb{F}_p^{*2}$, on écrit $x = y^2$ avec $y \in \mathbb{F}_p^*$.

$$\begin{aligned} x^{\frac{p-1}{2}} &= y^{p-1} = 1 \\ \Leftrightarrow (-x)^{\frac{p-1}{2}} &= -1 \\ \Leftrightarrow -x &\notin \mathbb{F}_p^* \end{aligned}$$

D'où

$$\underbrace{\mathbb{F}_p^{*2}}_{\frac{p-1}{2}} \subset \underbrace{\{\text{racines de } X^{\frac{p-1}{2}} - 1\}}_{\leq \frac{p-1}{2}}$$

D'où l'égalité des ensembles.

- $\overline{-1} \in \mathbb{F}_p^2 \Leftrightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}$
 $\Leftrightarrow \frac{p-1}{2} \in 2\mathbb{Z}$
 $\Leftrightarrow p \equiv 1[4]$

- On suppose $p \equiv 3[4]$

$$(-1) \notin \mathbb{F}_p^2 \text{ car } (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1$$

$$x \in \mathbb{F}_p^2 \Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow (-x)^{\frac{p-1}{2}} = -1$$

$$\Leftrightarrow -x \notin \mathbb{F}_p^*$$

- Si r est un carré, $r = a^2$ avec $a \in \mathbb{F}_p^*$

$$(x, y) \in \Gamma_r \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow (xa^{-1})^2 - (ya^{-1})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (xa^{-1}, ya^{-1}) \in \Gamma_1$$

D'où $|\Gamma_r| = |\Gamma_1|$

- Si r n'est pas un carré, $-r$ en est un.

$$(x, y) \in \Gamma_r \Leftrightarrow y^2 - x^2 = -r$$

Et on se ramène au cas précédent.

$$|\Gamma_r| = |\Gamma_1|$$

Dénombrons Γ_1 .

$$(x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 1$$

Posons $a = x + y$, $b = x - y$ (p impair d'où $2 \in \mathbb{F}_p^*$)

$$x = a + \frac{b}{2}$$

$$y = a - \frac{b}{2}$$

$$(x, y) \in \Gamma_1 \Leftrightarrow b = a^{-1}$$

On a $(p-1)$ choix pour a , et b déterminé par a , d'où au plus $(p-1)$ couples.

Il faut exclure les cas où notre choix de a permet $x, y \notin \mathbb{F}_p$:

$$x = \overline{0} \Leftrightarrow a = -a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = -1$$

$$y = \overline{0} \Leftrightarrow a = a^{-1}$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 1$$

Ainsi $|\Gamma_r| = |\Gamma_1| = p - 3$.

Sous algèbres

Définition, propriétés des sous-algèbres.

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre, $B \subset A$ est une sous-algèbre de A si c'est un sous-anneau et un \mathbb{K} -espace vectoriel de A .

De plus si B est de dimension finie

$$B^\times = B \cap A^\times$$

Démonstration

On a évidemment $B^\times \subset B \cap A^\times$.

On suppose $b \in B \cap A^\times$, on dispose de $a \in A$, $ab = ba = 1$.

On pose

$$\varphi_b = \begin{cases} B & \rightarrow B \\ x & \mapsto bx \end{cases} \in \mathcal{L}(B)$$

Soit $x \in \ker \varphi_b$, on a $bx = 0$ donc $(ab)x = x = 0$.

Donc φ_b bijectif (argument dimensionnel), et $\varphi_b^{-1}(1) = a$ existe et $a \in B$.

Algèbres commutatives intègres de dimension finie

Que peut-on dire d'une algèbre $(A, +, \times, \cdot)$ commutative et intègre de dimension finie ?

Si $(A, +, \times, \cdot)$ est commutative, intègre et de dimension finie, alors c'est un corps.

Démonstration

Soit $a \in A \setminus \{0\}$, étudions

$$\varphi_a : \begin{cases} A \rightarrow A \\ x \mapsto ax \end{cases} \in \mathcal{L}(A)$$

$$\begin{aligned} \ker \varphi_a &= \{x \in A \mid ax = 0\} \\ &= \{x \in A \mid x = 0\} \quad (\text{par intégrité}) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Et par argument dimensionnel, φ_a bijectif, d'où $\varphi_a^{-1}(a) = a^{-1}$ existe.

Morphisme d'algèbre

Définition, propriétés des morphismes d'algèbres.

Pour A, B deux \mathbb{K} -algèbre, une application $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'algèbre si c'est un morphisme d'anneau linéaire.

Et dans ce cas $\text{im } \varphi$ est une sous-algèbre de B et $\ker \varphi$ est un idéal et un sev de A .

Dévissage de groupes

Propriétés, outils du dévissage de groupes.

1. Soient G et H deux groupes cycliques de cardinaux n et p , $G \times H$ est cyclique ssi $n \wedge p = 1$.

2.

Démonstration

1. • Par contraposé, supposons que $n \wedge p = d > 1$, ainsi $m = n \vee p < np$.

Pour tout $(x, y) \in G \times H$,

$$(x, y)^m = (x^m, y^m) = (e_G, e_H)$$

donc $\text{ord}((x, y)) \mid m < |G \times H|$ qui ne peut être cyclique.

• Soit $x \in G$ d'ordre n et $y \in H$ d'ordre p . Pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$(x, y)^k \Leftrightarrow (x^k, y^k) = (e_G, e_H)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \mid k \\ p \mid k \end{cases} \Leftrightarrow np \mid k$$

$\Leftrightarrow G \times H$ cyclique

• Autre méthode :

$$G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$H \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$G \times H \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

$$\simeq \mathbb{Z}/(np)\mathbb{Z} \text{ cyclique}$$

2. Soient H, K sous-groupes de G et φ (qui n'est pas forcément un morphisme) tel que

$$\varphi : \begin{cases} H \times K \rightarrow G \\ (h, k) \mapsto hk \end{cases}$$

On note $HK = \varphi(H \times K)$. Soient $(h, k), (h_0, k_0) \in H \times K$

$$\varphi(h, k) = \varphi(h_0, k_0)$$

$$\Leftrightarrow hk = h_0k_0$$

$$\Leftrightarrow h_0^{-1}h = k_0k_0^{-1} = t \in H \cap K$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in H \cap K, \begin{cases} h = k_0t \\ k = t^{-1}h_0 \end{cases}$$

φ est injectif ssi $H \cap K = \{e_G\}$, c'est automatique si $|H| \wedge |K| = 1$ (en étudiant les ordres et les divisibilités de ceux-ci).

Dans ce cas $|HK| = |\text{im } \varphi| = |H| \cdot |K|$

Dans le cas général

$$|\varphi^{-1}\{\varphi(h_0, k_0)\}| = |H \cap K|$$

Groupe Diédral

Construction et propriétés du groupe diédral.

Construction

Soient $n \geq 2$ et A_0, \dots, A_{n-1} des points de \mathbb{R}^2 d'afixes

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, A_i : e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

On considère Γ l'ensemble des isométries qui préservent le polygone A_0, \dots, A_{n-1} .

Comme une transformation affine préserve les barycentres, tout élément de Γ préserve l'isobarycentre (l'origine).

On a alors

$$\Gamma \in O(\mathbb{R}^2)$$

Et donc tout $\gamma \in \Gamma$, est soit une rotation ou une réflexion.

- Si γ est une rotation : $\gamma(A_0) \in \{A_0, \dots, A_{n-1}\}$ d'où $\gamma = \text{rot}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ pour un $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On note r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$

$$\gamma = r^k$$

- Si γ est une réflexion

Soit s la réflexion à l'axe des abscisses, $s \in \Gamma$.

$s \circ \gamma \in \Gamma$ est une rotation car

$$\det(s \circ \gamma) = (-1)^2 = 1$$

Ainsi $\exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que

$$s \circ \gamma = r^k \Leftrightarrow \gamma = s \circ r^k$$

Donc

$$\Gamma = \bigcup_{k=0}^{n-1} \{r^k, sr^k\}$$

Groupe

Γ est un sous-groupe de $O(\mathbb{R}^2)$.

- $|\Gamma| = 2n$
- $\Gamma = \langle s, r \rangle$

Algèbre engendrée

Pour $(A, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre et $a \in A$, définition et propriétés de $\mathbb{K}[a]$.

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre et $a \in A$. Si on pose le morphisme d'algèbre

$$\theta_a : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow A \\ P = \sum_{k=0}^d a_k X^k & \mapsto \sum_{k=0}^d a_k a^k \end{cases}$$

On note $\mathbb{K}[a] = \text{im } \theta_a$ qui est la plus petite sous-algèbre de A contenant a .

De plus $\ker \theta_a$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

- Si θ_a est injectif et $\mathbb{K}[a] \simeq \mathbb{K}[X]$ qui est donc de dimension infinie.
- Sinon on dispose d'un unique polynôme π_a unitaire tel que $\ker \theta_a = \pi_a \mathbb{K}[X]$ (par principauté).
 π_a est appelé polynôme minimal de a , $\mathbb{K}[a]$ est de dimension $d = \deg \pi_a$ et $(1, a, \dots, a^{d-1})$ en est une base.

Démonstration

- Soit $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ et $d = \deg B$, par l'éxistence et l'unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = B\mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

- Soit $u \in L(E, F)$ et G un supplémentaire de $\ker u$, montrons que $u|_G$ est un isomorphisme de $G \rightarrow \text{im } u$.
 $\ker u|_G = \ker u \cap G = \{0\}$ par supplémentarité.

Soit $y \in \text{im } u$, $y = u(x)$, $x = a + b$ avec $(a, b) \in \ker u \times G$.

$$u(x) = (\underbrace{a}_0) + u(b)$$

$$y = u|_G(b)$$

Soit $y \in \text{im } u|_G$, $y = u|_G(x) = u(x)$.

D'où $\text{im } u = \text{im } u|_G$.

- Si θ_a est injectif, c'est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\text{im } \theta_a = \mathbb{K}[a]$.
- Sinon on a π_a de degré d et

$$\mathbb{K}[X] = \pi_a \mathbb{K}[X] \oplus \mathbb{K}_{d-1}[X]$$

\mathbb{K}_{d-1} est un supplémentaire de $\ker \theta_a$, ainsi $\theta_a|_{\mathbb{K}_{d-1}[X]}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{d-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}[a]$, d'où

$$\dim \mathbb{K}[a] = d$$

Et l'image de la base canonique de $\mathbb{K}_{d-1}[X]$ par

$\theta|_{\mathbb{K}_{d-1}[X]}$ est

$$(1, a, \dots, a^{d-1})$$

Qui est donc une base de $\mathbb{K}[a]$.

Condition d'intégrité d'une sous-algèbre engendrée

Pour A une \mathbb{K} -algèbre et $a \in A$ tel que θ_a n'est pas injectif, sous quelle condition $\mathbb{K}[a]$ est-elle intègre ?

Soit A une \mathbb{K} -algèbre et $a \in A$ tel que θ_a n'est pas injectif.

$\mathbb{K}[a]$ est intègre ssi π_a est irréductible.

Démonstration

- Si π_a irréductible, soit $x = P(a), y = Q(a) \in \mathbb{K}[a]$ tels que $xy = 0$.

$$PQ(a) = 0$$

$$\pi_a \mid PQ$$

Donc par le lemme d'Euclide,

$$\text{ou } \begin{array}{l} \pi_a \mid P \Leftrightarrow x = 0 \\ \pi_a \mid Q \Leftrightarrow y = 0 \end{array}$$

- Par contraposé, si π_a non irréductible, $\pi_a = PQ$ avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ non inversible ou associé à π_a .

$$\underbrace{P(a)}_{\neq 0} \underbrace{Q(a)}_{\neq 0} = \pi_a(a) = 0$$

D'où $\mathbb{K}[a]$ non intègre.

inversibilité des éléments d'une sous-algèbre engendrée

Soit $\mathbb{K}[a]$ une sous-algèbre de A de dimension finie pour $a \in A$, sous quelle condition $x \in \mathbb{K}[a]$ est-il inversible ?

Soit $\mathbb{K}[a]$ une sous-algèbre de A de dimension finie pour $a \in A$. Soit $x = P(a) \in \mathbb{K}[a]$.

$$x \in \mathbb{K}[a]^* \text{ ssi } P \wedge \pi_a = 1$$

On en déduit que $\mathbb{K}[a]$ est un corps ssi π_a est irréductible.

Démonstration

Par propriété de sous-algèbre

$$\mathbb{K}[a]^* = A^* \cap \mathbb{K}[a]$$

Ainsi

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{K}[a]^* &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{K}[a], xy = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], PQ(a) = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{K}[X], \pi_a \mid (PQ - 1) \\ &\Leftrightarrow \exists Q, V \in \mathbb{K}[X], PQ - 1 = \pi_a V \\ &\Leftrightarrow \exists Q, V \in \mathbb{K}[X], PQ - \pi_a V = 1 \\ &\Leftrightarrow P \wedge \pi_a = 1 \end{aligned}$$

Ainsi si π_a irréductible, pour tout $x = P(a) \in \mathbb{K}[a] \setminus \{0\}$, $P \wedge \pi_a = 1$ d'où x inversible et $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

Et si $\mathbb{K}[a]$ est un corps, alors il est intègre et π_a irréductible.

Algèbres et extensions de corps

Propriétés des algèbres en lien avec les extensions de corps.

Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps. On remarque que \mathbb{L} est une \mathbb{K} -algèbre.

1. Soit $a \in \mathbb{L}$ qui admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{K}[X]$ et π_a son polynôme minimal.

π_a est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

Démonstration

1. $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\pi_a = PQ$.

Dans \mathbb{L}

$$P(a)Q(a) = \pi_a(a) = 0$$

Donc $P(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_a \mid P$ ou $Q(a) = 0 \Leftrightarrow \pi_a \mid Q$ donc π_a irréductible.

Ainsi $\mathbb{K}[a]$ est un corps.

Nombres algébriques

Définitions et propriétés des nombres algébriques sur un corps \mathbb{K} .

Soit $a \in A$ une \mathbb{K} -algèbre, on dit que a est algébrique sur \mathbb{K} s'il admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{K}[X]$.

Par défaut a algébrique veut dire algébrique sur \mathbb{Q} , quitte à les échangers prenons $P(a) = 0, P \in \ker \theta_a = \pi_a \mathbb{K}[X]$.

Propriété

1. Soit $a \in \mathbb{L}$ une extension de corps de \mathbb{K} , a algébrique sur \mathbb{K} .

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, $P = \pi_a$ ssi $P(a) = 0$ et P irréductible sur $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

1. Sens directe connus. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ unitaire, irréductible et annulateur de a .

On a $\pi_a \mid P$, or P irréductible donc P et π_a sont associé, or tout deux unitaires donc $P = \pi_a$.

Théorème de la base télescopique

Énoncer et démonstration du théorème de la base télescopique.

Soit $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps tel que \mathbb{L} est de dimension finie sur \mathbb{K} .

Soient

- E un \mathbb{L} -ev, (et donc un \mathbb{K} -ev).
- $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E sur \mathbb{L} .
- $z = (z_1, \dots, z_p)$ base de \mathbb{L} sur \mathbb{K} .

Alors $F = (z_i e_j)_{\substack{i \in [1, p] \\ j \in [1, n]}}$ est une base de E sur \mathbb{K}

Ainsi $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{L}} E \cdot \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$.

Démonstration

- Soit $\omega \in E$, on dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{L}$ tels que

$$\omega = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$$

On dispose de $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{[1, p] \times [1, n]}$

$$\forall j \in [1, n], \lambda_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} z_i$$

Ainsi

$$\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{ij} z_i e_j$$

- Soit $(a_{ij})_{ij} \in \mathbb{K}^{[1, p] \times [1, n]}$ tel que

$$\underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{ij} z_i e_j}_{\lambda_j \in \mathbb{L}} = 0$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$$

Donc pour tout $j \in [1, n]$, $\lambda_j = 0$.

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^p a_{ij} z_i = 0$$

Donc par liberté de z , $a_{ij} = 0$ pour tout i, j .

Clôture algébrique des rationnels

Propriétés de la clôture algébrique de \mathbb{Q} .

Notons \mathbb{K} l'ensemble des $a \in \mathbb{C}$ algébriques sur \mathbb{Q} .

\mathbb{K} est un corps algébriquement clos.

Démonstration : corps

- Soit $a, \beta \in \mathbb{K}$, montrons que $a\beta, a + \beta \in \mathbb{K}$.

On utilise le fait que z algébrique dans \mathbb{L} ssi $\mathbb{L}[z]$ de dimension finie sur \mathbb{L} (car z admet un polynôme annulateur dans $\mathbb{L}[X]$).

- Donc $\mathbb{Q}[a]$ est de dimension finie sur \mathbb{Q} ,
- β algébrique sur $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}[a]$ donc algébrique sur $\mathbb{Q}[a]$.
- Donc $\mathbb{Q}[a][\beta]$ est de dimension finie sur $\mathbb{Q}[a]$, et donc par le théorème de la base télescopique, sur \mathbb{Q} .
- Or $\mathbb{Q}[a + \beta], \mathbb{Q}[a\beta] \subseteq \mathbb{Q}[a][\beta]$, donc $\mathbb{Q}[a + \beta]$ et $\mathbb{Q}[a\beta]$ sont de dimension finie sur \mathbb{Q} .
- Soit $a \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, soit π_a son polynôme minimal et $d = \deg \pi_a$.

$$\underbrace{\pi_a(X)}_{\in \mathbb{Q}[X]} \left(\frac{1}{a} \right) \text{ annule } \frac{1}{a}$$

Donc $\frac{1}{a} \in \mathbb{K}$

- $1 \in \mathbb{K}$ car $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$.

Démonstration : clôture

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Soit $a \in \mathbb{C}$ racine de P , montrons que $a \in \mathbb{K}$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $a_k \in \mathbb{K}$ donc $\mathbb{Q}[a_k]$ de dimension finie sur \mathbb{Q} .

Par récurrence on a

$$\mathbb{L} = \mathbb{Q}[a_0][a_1] \cdots [a_d]$$

De dimension finie sur \mathbb{Q} .

Comme $P \in \mathbb{L}[X]$ annule a , $\mathbb{L}[a]$ est de dimension finie sur \mathbb{L} et donc sur \mathbb{Q} , id est $a \in \mathbb{K}$.

Exercice : Gauss-Lucas

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer que les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe des racines de P .

On écrit

$$P = c \prod_{k=1}^N (X - a_k)^{m_k}$$

Soit b une racine de P' .

Si $b \in \{a_1, \dots, a_N\}$, b est nécessairement dans leur enveloppe convexe.

Sinon

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{X - a_k}$$

$$0 = \frac{P'}{P}(b) = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{b - a_k} = \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|b - a_k|^2}$$

$$= \sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|b - a_k|^2} (b - a_k)$$

$$b = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{a_k m_k}{|b - a_k|^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{m_k}{|b - a_k|^2}}$$

$$= \sum_{k=1}^N \lambda_k a_k$$

Où $\lambda_k = \frac{\frac{a_k m_k}{|b - a_k|^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{|b - a_i|^2}}$ (on a alors

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k = 1).$$

b est donc un barycentre à coefficients positifs des a_1, \dots, a_n et est donc dans leur enveloppe convexe.

Exercice : Dénombrément de morphismes

1. Dénombrer les morphismes de G_1 vers G_2 , avec $|G_1| \wedge |G_2| = 1$.
2. Dénombrer les morphismes de G_1 vers G_2 où G_1 et G_2 sont cyclique.
3. Même chose avec les injections et les surjections.

Remarque générale

Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ morphisme de groupe, $x \in G_1$

$$\varphi(x)^{\text{ord}(x)} = e_{G_2}$$

$$\text{donc } \text{ord}(\varphi(x)) \mid |G_2|$$

$$\text{et } \text{ord}(\varphi(x)) \mid |G_1|$$

Ainsi $\text{ord}(\varphi(x)) \mid |G_1| \wedge |G_2|$.

Exercices

1. Soit $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ morphisme, $x \in G_1$. Par la remarque ci dessus $\text{ord}(\varphi(x)) \mid p \wedge q = 1$ donc $\varphi(x) = 0$, il n'y a donc que morphisme le morphisme triviale.
2. Notons $G_1 = \langle a \rangle$, posons

$$\theta : \begin{cases} \text{hom}(G_1, G_2) \rightarrow G_2 \\ \varphi \mapsto \varphi(a) \end{cases}$$

Qui est injectif car tout morphisme est uniquement déterminé par son image du générateur a .

Pour tout $\varphi \in \text{hom}(G_1, G_2)$ on a

$$\varphi(a)^{|G_1|} = \varphi(a^{|G_1|}) = \varphi(e_{G_1}) = e_{G_2}$$

D'où

$$\text{im } \theta \subset \{y \in G_2 \mid y^{|G_1|} = e_{G_2}\}$$

Soit $y \in \text{im } \theta$ posons

$$\varphi : \begin{cases} G_1 \rightarrow G_2 \\ x = a^k \mapsto y^k \end{cases}$$

Qui ne dépend pas du k choisi, soit $x = a^k = a'$:

$$a^{k-l} = e_{G_1}$$

$$\text{donc } |G_1| \mid k - l$$

$$\text{et } y^{k-l} = e_{G_2}$$

$$\text{d'où } y^k = y^l$$

Donc $\theta(\varphi) = y$.

$$|\text{hom}(G_1, G_2)| = |\text{im } \theta|$$

$$= |\{y \in G_2 \mid y^{|G_1|} = e_{G_2}\}|$$

$$= |\{y \in G_2 \mid \text{ord}(y) \mid |G_1|\}|$$

$$= \bigcup_{d \mid |G_1| \wedge |G_2|} \{y \in G_2 \mid \text{ord}(y) = d\}$$

$$= \sum_{d \mid |G_1| \wedge |G_2|} \varphi(d)$$

$$= |G_1| \wedge |G_2|$$

3. • Pour les injections on veut $\varphi \in \text{hom}(G_1, G_2)$ tels que $\ker \varphi = \{e_{G_1}\}$.

Pour $k \in \llbracket 1, |G_1| - 1 \rrbracket$,

$$\varphi(a)^k = \varphi(a^k) \neq 0$$

$$\text{ord } \varphi(a) = |G_1|$$

Si $|G_1| \nmid |G_2|$, G_2 ne contient

pas éléments d'ordre $|G_1|$ donc

aucune injection.

Si $|G_1| \mid |G_2|$, il y a $\varphi(|G_1|)$

éléments d'ordre $|G_1|$, donc autant d'injections.

- Pour les surjections on veut

$$\text{ord } \varphi(a) = |G_2|, \text{ donc}$$

$$\begin{cases} 0 & \text{si } |G_2| \nmid |G_1| \\ \varphi(|G_2|) & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice : Union de sous espaces vectoriels

E un \mathbb{K} espace vectoriel.

1. Soit F, G deux sev de E , montrer que $F \cup G$ sev ssi $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$.
2. Supposons \mathbb{K} infini, soit F_1, \dots, F_n n sevs, montrer que si $\bigcup_{k=1}^n F_k$ est un sev, alors il existe $i \in [1, n]$ tel que

$$\bigcup_{k=1}^n F_k = F_i$$

-
1. Soit F, G sevs de E un \mathbb{K} -ev tel que $F \cup G$ est un sev.

Si $F \not\subseteq G$, on pose $z \in F \setminus G$, soit $x \in G$.

$$x + z \in F \cup G$$

$x + z \notin G$ car sinon

$$F \setminus G \ni z = \underbrace{(x + z)}_{\in G} - \underbrace{x}_{\in G} \in G$$

Donc $x + z \in F$ d'où

$$x = (x + z) - z \in F$$

Et $G \subseteq F$.

2. Soient F_1, \dots, F_n sevs de E tels que $\bigcup_{k=1}^n F_k$ est un sev.

Notons $U_m = \bigcup_{k=1}^m F_k$ pour $m \in \mathbb{N}$.

On a déjà fait le cas $n = 2$ et le cas $n = 1$ est trivial.

Supposons la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}$.

Si $U_n \subseteq F_{n+1}$ alors on a fini.

Si $F_{n+1} \subseteq U_n$ alors par hypothèse de récurrence, on dispose de $i \in [1, n]$

$$U_{n+1} = U_n = F_i$$

Sinon, on dispose de

$$x \in F_{n+1} \setminus U_n \subseteq U_{n+1}$$

$$y \in U_n \setminus F_{n+1} \subseteq U_{n+1}$$

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$$z_k = x + \lambda_k y$$

Par le lemme des tiroirs, on dispose de $k \neq l$ et j tel que

$$z_k, z_l \in F_j$$

Si $j = n + 1$

$$z_k - z_l = \underbrace{(\lambda_k - \lambda_l)}_{\neq 0} y \in F_{n+1}$$

Et $y \in F_{n+1}$ impossible.

Si $j \in [1, n]$

$$\lambda_l z_k - \lambda_k z_l = \underbrace{(\lambda_l - \lambda_k)}_{\neq 0} x \in F_j$$

Et $x \in F_j$ impossible.

Somme directe de sous espaces vectoriels

Définition et propriétés de somme directe de sev.

Soient F_1, \dots, F_n sev de E un \mathbb{K} -ev. On dit qu'ils sont en somme directe si pour tout $x \in \sum_{k=1}^n F_k$

$$\exists!(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k, \quad x = \sum_{k=1}^n x_k$$

Il y a équivalence entre F_1, \dots, F_n en somme directe et

1. $\forall(x_1, \dots, x_n) \in \prod_{k=1}^n F_k, \quad \sum_{k=1}^n x_k = 0 \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k = 0.$
2. $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad F_i \cap \left(\sum_{i \neq k}^n F_k \right) = \{0\}$
3. $F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k = \{0\}$

En dimension finie

4. $\dim \sum_{k=1}^n F_k \leq \sum_{k=1}^n \dim F_k$ avec égalité ssi les F_1, \dots, F_n sont en somme directe.

Démonstration

1. \Rightarrow il s'agit d'un cas particulier pour $x = 0$.

\Leftarrow Supposons $\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x'_k$

Alors $\sum_{k=1}^n (x_k - x'_k) = 0$ donc $x_k = x'_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

3. \Rightarrow Soit $x \in F_n \cap \bigoplus_{k=1}^n F_k$

$$x = \sum_{k=1}^{n-1} 0 + x$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} x_k + 0 \quad \text{car } x \in \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k$$

Donc par unicité de la décomposition $x = \sum_{k=1}^n 0 = 0$.

\Leftarrow Soit $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que

$$\sum_{k=1}^n x_k = 0$$

$$-x_n = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \in F_n \cap \bigoplus_{k=1}^{n-1} F_k$$

Donc $x_n = 0$ et $\sum_{k=1}^{n-1} x_k = 0$ donc

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Espaces supplémentaires

Définition, propriétés des espaces supplémentaires.

Soient F_1, \dots, F_n sevs de E un \mathbb{K} -ev.
On dit qu'ils sont supplémentaires si

$$E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

Et on a

$$E = \bigoplus_{k=1}^n F_k$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E = \sum_{k=1}^n F_k \\ \dim(E) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{k=1}^n F_k = \bigoplus_{k=1}^n F_k \\ \dim(E) = \sum_{k=1}^n \dim(F_k) \end{cases}$$

Notations de matrices

Notations de matrices :
changements de bases, matrices d'un endomorphisme, ...

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $e = (e_1, \dots, e_n)$, $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ bases de E et $f = (f_1, \dots, f_p)$ base de F .

Applications linéaires

$$\mathcal{M}_{e,f}(u) = \mathcal{M}_{e \leftarrow f}(u) = \mathcal{M}_e^f(u) \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$$

Et la matrice est alors

$$\mathcal{M}_{f \leftarrow e}(u) = f_1 \begin{pmatrix} u(e_1) & u(e_2) & \cdots & u(e_n) \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

Où pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^p a_{kj} f_k$$

Endomorphismes

$$\mathcal{M}_e(u) = \mathcal{M}_{e \leftarrow e}(u) = \mathcal{M}_e^e(u)$$

$$u(e_j) = \sum_{k=1}^p a_{kj} f_k$$

Changement de base

$$P_{e \rightarrow e'} = \mathcal{M}_e(e') = \mathcal{M}_{e \leftarrow e'}(\text{id})$$

Exercice : Noyaux et images itérées

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -ev. Que peut-on dire des suites $(\ker u^k)_k$ et $(\text{im } u^k)_k$?

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un \mathbb{K} -ev.

Dimension quelconque

- Si $\ker u^k = \ker u^{k+1}$ pour un $k \in \mathbb{N}$ alors pour tout $n \geq k$, $\ker u^k = \ker u^n$.
- De même pour les images.

Dimension finie

En notant $n = \dim E$ on a

$$d_k = \dim \ker u^k \in \llbracket 0, n \rrbracket \nearrow$$
$$r_k = \text{rg } u^k \in \llbracket 0, n \rrbracket \searrow$$

Ces deux suites sont donc stationnaires, on peut poser

$$m_K = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$
$$m_I = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \text{im } u^k = \text{im } u^{k+1}\}$$

On a de plus $m_K = m_I = m$.

Et en notant

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k = \ker u^m$$
$$I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{im } u^k = \text{im } u^m$$

Qui sont les valeurs auquelles les suites stationnent, on a

- $K \oplus I = E$
- K, I stables par u
- $u|_K^k$ est nilpotent
- $u|_I^I$ est inversible.

• Si $E = K' \oplus I'$ avec K', I' stables par u , $u|_{K'}^{K'}$ nilpotent et $u|_{I'}^{I'}$ inversible, alors $K' = K$ et $I' = I$.

Démonstration

- Soit $l \geq k$, on a évidemment $\ker u^l \subseteq \ker u^{l+1}$.

Soit $x \in \ker u^{l+1}$:

$$u^{l+1}(u^{l-k}(x)) = 0$$
$$u^{l-k}(x) \in \ker u^{k+1} = \ker u^k$$
$$u^k(u^{l-k}(x)) = 0$$
$$x \in \ker u^l$$

- Soit $l \geq k$, on a évidemment $\text{im } u^{l+1} \subseteq \text{im } u^l$.

Soit $u^l(x) = y \in \text{im } u^l$:

$$u^{l-k}(u^k(x)) = y$$
$$u^k(x) \in \text{im } u^k = \text{im } u^{k+1}$$
$$u^k(x) = u^{k+1}(x')$$
$$u^{l-k}(u^{k+1}(x')) = y$$
$$y \in \text{im } u^{l+1}$$

Dimension finie

- Par le théorème de rang on a $d_k = n - r_k$, donc si r_k est constante à partir du rang m_I , alors d_k est aussi constante à partir de ce rang, donc $m_K = m_I$.

Et en notant

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k = \ker u^m$$

$$I = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \text{im } u^k = \text{im } u^m$$

Qui sont les valeurs auquelles les suites stationnent, on a

- $K \oplus I = E$
- K, I stables par u

• Notons $\tilde{u} = u|_K^k$ l'endomorphisme induit par u sur K .

$$\tilde{u}^m(K) = u^m(K) = \{0\}$$

$$= \text{im } u^m = I$$

Donc \tilde{u} est nilpotent d'indice m .

- Notons $\tilde{u} = u|_I^I$ l'endomorphisme induit par u sur I .

$$\tilde{u}(I) = u(\text{im } u^m) = \text{im } u^{m+1}$$

$$= \text{im } u^m = I$$

$$\tilde{u}^m(I) = u^m(I) = \{0\}$$

Donc \tilde{u} est inversible.

- Soit $K' \oplus I' = E$ qui respectent les hypothèses.

On dispose de $d \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u^d(K') = \{0\}$$

$$K' \subseteq \ker u^d \subset K = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \ker u^k$$

Et on a

$$u(I') = I'$$

$$u^m(I') = I'$$

$$I' \subseteq \text{im } u^m = I$$

Donc

$$\dim K' \leq \dim K$$

$$\dim I' \leq \dim I$$

Et on obtient l'égalité par supplémentarité, d'où $K' = K$ et $I' = I$.

Développement du déterminant par ligne ou par colonne

Formules et définitions du développement du déterminant par ligne ou par colonne.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

- pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(\tilde{A}_{ij})$$

Où $\tilde{A}_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ est la matrice A privée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

On appelle $\hat{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(\tilde{A}_{ij})$ cofacteur.

On appelle $\text{com}(A)$ la matrice des cofacteurs.

Et on a

$$A \cdot \text{com}(A)^T = \det(A)I_n,$$

Exercice : rang d'une comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ($n \geq 3$), calculer $\text{rg com}(A)$ en fonction de $\text{rg } A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geq 3$.

- Si $\text{rg } A = n$, $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ donc $\text{com } A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\text{rg com}(A) = n$.
- Si $\text{rg } A \leq n - 2$, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ la matrice \tilde{A}_{ij} extraite de A privée de sa $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne est de rang inférieur à $n - 2$ et n'est donc pas inversible, $\text{com } A = 0$ et $\text{rg com}(A) = 0$.
- Si $\text{rg } A = n - 1$, on dispose d'une matrice extraite de taille $n - 1$ inversible, donc au moins un des cofacteur est non nul d'où $\text{rg com}(A) \geq 1$.

De plus

$$A^T \text{ com}(A) = \det(A) I_n = 0$$

Donc $\text{im com}(A) \subseteq \ker A^T$ et $\dim \ker A^T = 1$ d'où $\text{rg com}(A) \leq 1$.

Algorithme du pivot de Gauss

Déscription de l'algorithme du pivot de Gauss, et propriétés qui en découlent.

Opérations, représentation matricielle

Notons $(E_{ij})_{ij}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a

$$E_{ik} E_{lj} = \delta_{kl} E_{ij}$$

Pour $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$

$$E_{kI}^{(n)} A = \begin{pmatrix} & | & 1 \\ L_I & | & k \\ & | & \vdots \\ & | & n \end{pmatrix}$$

$$AE_{kI}^{(p)} = \left(\frac{C_k}{1 \dots I \dots n} \right)$$

Ainsi on peut définir

- $T_{kI}(\lambda) = I_n + \lambda E_{kI}^{(n)}$ la transvection sur les lignes ($L_k \leftarrow L_k + \lambda L_I$)
- $T'_{kI}(\lambda) = I_p + \lambda E_{kI}^{(p)}$ la transvection sur les colonnes ($C_I \leftarrow C_I + \lambda C_k$)
- $P_{kI} = I_n - E_{kk}^{(n)} - E_{II}^{(n)} + E_{kI}^{(n)} + E_{Ik}^{(n)}$ la transposition de lignes ($L_I \leftrightarrow L_k$)
- $P_{kI} = I_p - E_{kk}^{(p)} - E_{II}^{(p)} + E_{kI}^{(p)} + E_{Ik}^{(p)}$ la transposition de colonnes ($C_I \leftrightarrow C_k$)

Algorithme

Prenons $A = (c_1 \dots c_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- Si $A = 0$ fini.

- Soit $j = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid C_k \neq 0\}$

$$A^{(1)} : \quad C_j \leftrightarrow C_1$$

- Soit $i = \min\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid a_{i1} \neq 0\}$
 - Si $i = 1$ on effectue $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et on prend $i = 2$.

$$A^{(2)} : \quad L_1 \leftarrow L_1 + \left(1 - \frac{a_{11}}{a_{i1}}\right) L_i$$

$$A^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & * & \dots & * \\ \hline * & & & & \\ \vdots & & & * & \\ * & & & & \end{array} \right)$$

- Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ on effectue

$$A^{(i+1)} : \quad L_i \leftarrow L_i - a_{i1} L_1$$

Ainsi

$$A^{(n+1)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & & \tilde{A} & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$$

On repète l'algorithme sur \tilde{A} , on obtient alors

$$\tilde{\tilde{A}} : \quad C_j \leftarrow C_j - \frac{\tilde{A}_{ij}}{\tilde{A}_{ii}} C_i$$

$$\tilde{\tilde{A}} = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \\ \ddots & (*) & * & & (*) \\ & 1 & * & & \\ \hline & \mu & * & \dots & * \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{array} \right)$$

On remarque que si A est inversible, les transpositions sont inutiles car il n'existe pas de colonnes nulles.

Propriétés

- Les transvections engendrent $SL_n(\mathbb{K})$.
- Les transvections et une dilatation (pour atteindre n'importe quel déterminant) suffisent à engendrer $GL_n(\mathbb{K})$.

Intersection d'hyperplans

Propriétés sur les intersections d'hyperplans.

Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^p$

$$\dim \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) \geq n - p$$

Démonstration

On montre l'inégalité par récurrence sur p .

Montrons l'égalité.

Quitte à extraire et renommer, $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre.

Or pour tout $k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$,

$$\varphi_k \in \operatorname{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

$$\text{Donc } \bigcap_{i=1}^r \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi_k$$

$$\text{D'où } \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k$$

Donc (cf. lemme sur la liberté d'une famille de formes linéaires)

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^r \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

$$\ker \theta = \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k$$

Donc par le théorème du rang

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \right) = n - \operatorname{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

Liberté d'une famille de l'espace dual

Démonstration d'une CNS pour la liberté d'une famille de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ où E est un \mathbb{K} -ev.

Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre ssi

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^p \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

Démonstration

- Supposons θ surjective, on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k = 0$$

Soit $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on dispose de $x \in E$ tel que

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_i(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\left(\sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k \right)(x) = 0 = \lambda_i$$

- Par contraposé supposons θ non surjective : $\text{rg } \theta \leq p - 1$.

On dispose de H hyperplan tel que $\text{im } \theta \subseteq H$. Donc on dispose de $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{K}^p \setminus \{0\}$ tels que

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \mid \sum_{k=1}^p a_k x_k = 0 \right\}$$

Donc pour tout $x \in E$,

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_p(x) \end{pmatrix} \in \text{im } \theta \subseteq H$$

$$\sum_{k=1}^p a_k \varphi_k(x) = 0$$

Donc $\sum_{k=1}^p a_k \varphi_k = 0$ et la famille est liée

Condition de liberté d'une forme linéaire à une famille

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Démonstration d'une CNS pour que $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_p, \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Pour tout $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$$\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$$

$$\text{ssi } \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$$

Démonstration

- Si $\varphi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$, on dispose de $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que

$$\psi = \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k$$

D'où

$$\begin{aligned} \psi \left(\bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \right) &= \sum_{k=1}^p \lambda_k \varphi_k \left(\bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i \right) \\ &= \{0\} \end{aligned}$$

Et donc $\bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$.

- Supposons $\bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$.

Quitte à extraire et renommer, $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ est libre.

Or pour tout $k \in \llbracket r+1, p \rrbracket$,

$$\varphi_k \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$$

$$\text{Donc } \bigcap_{i=1}^r \ker \varphi_i \subseteq \ker \varphi_k$$

$$\text{D'où } \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k$$

Donc

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^r \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

Posons alors

$$\theta' : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^{r+1} \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_r(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \bigcap_{k=1}^r \ker \varphi_k = \bigcap_{k=1}^p \ker \varphi_k \subseteq \ker \psi$$

$$\text{Donc } \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{im } \theta'$$

La famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_r, \psi)$ est liée d'où $\psi \in \text{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$.

Base duale, antéduale

Définitions, propriétés, démonstrations autours des bases duals.

Base duale

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Il existe une unique famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})^n$ tel que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Cette famille est appelée base duale de e et est une base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Dans ce cas

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n \varphi_k(x) e_k$$

$$\forall \psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}), \psi = \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k$$

Base antéduale

Pour toute base $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, il existe une unique base (e_1, \dots, e_n) de E tel que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ en est la base duale.

Démonstration

- Existence / Unicité : car les formes linéaire sont uniquement déterminés par leurs image d'une base.
- Génératrice : Soit $\psi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\left(\sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k \right)(e_i) = \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k(e_i)$$

$$= \psi(e_i)$$

$$\text{Donc } \psi = \sum_{k=1}^n \psi(e_k) \varphi_k$$

Donc $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base.

- Soit $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \in E, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\varphi_i(x) = \varphi_i\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k \delta_{ik} = x_i$$

- Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ base de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$

$$\theta : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{K}^n \\ x \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix} \end{cases} \text{ surjective}$$

Par liberté de la famille, donc bijective par argument dimensionnel.

Notons (b_1, \dots, b_n) la base canonique de \mathbb{K}^n .

La famille $(e_k = \theta^{-1}(b_k))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est l'unique base de E tel que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$$

Lemme de factorisation

Énoncé et démonstration du lemme de factorisation en algèbre linéaire.

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -ev

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(E, G)$, dans ce cas

$$\ker u \subseteq \ker v$$

$$\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(F, G), v = w \circ u$$

(Si u est inversible $w = v \circ u^{-1}$).

2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(G, F)$, dans ce cas

$$\text{im } v \subseteq \text{im } u$$

$$\Leftrightarrow \exists w \in \mathcal{L}(G, E), v = u \circ w$$

Démonstration

1. • Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{L}(F, G)$ tel que $v = w \circ u$.

$$\begin{aligned} v(\ker u) &= w(u(\ker u)) \\ &= w(\{0\}) = 0 \end{aligned}$$

D'où $\ker u \subseteq \ker v$.

- Supposons que $\ker u \subseteq \ker v$.

Soient H, K tels que

$$\begin{aligned} \ker u \oplus H &= E \\ \text{im } u \oplus K &= F \end{aligned}$$

Posons

$$\tilde{u} : \begin{cases} H \rightarrow \text{im } u \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

$$\ker \tilde{u} = \ker u \cap H = \{0\}$$

$$\dim H = \text{rg } u$$

Donc \tilde{u} inversible.

On peut donc écrire

$$w : \begin{cases} F = \text{im } u \oplus K \rightarrow G \\ x = y + z \mapsto v \circ \tilde{u}^{-1}(y) \end{cases}$$

Soit $x = y + z \in E = \ker u \oplus H$.

$$w \circ u(x) = v(\tilde{u}^{-1}(u(z)))$$

$$= v(z)$$

$$v(x) = \underbrace{v(y)}_0 + v(z)$$

2. • Supposons qu'il existe $w \in \mathcal{L}(G, E)$ tel que $v = u \circ w$

$$v(E) = u \circ w(E) \subseteq u(E)$$

D'où $\text{im } v \subseteq \text{im } u$.

- Supposons que $\text{im } v \subseteq \text{im } u$.

Soit H tel que $\ker u \oplus H = E$.

$$\tilde{u} : \begin{cases} H \rightarrow \text{im } u \\ x \mapsto u(x) \end{cases}$$

$$w : \begin{cases} G \rightarrow E \\ x \mapsto \tilde{u}^{-1} \circ v(x) \end{cases}$$

On a bien pour $x \in E$

$$u \circ w(x) = \tilde{u}(\tilde{u}^{-1}(v(x))) = v(x)$$

Vandermonde, interpolation de Lagrange

Définitions, propriétés et démonstrations de l'interpolation de Lagrange et des matrices des Vandermonde.

Soit \mathbb{K} un corps, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

$$\theta : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P \mapsto \begin{pmatrix} P(a_0) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1}) \end{cases}$$

Pour tout $P \in \ker \theta$,

$$P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0$$

Donc P est de degré n avec $n + 1$ racines distinctes, d'où $P = 0$.

Donc θ est un isomorphisme.

Notons

$$e = (e_0, \dots, e_n)$$

$$c = (1, X, \dots, X^n)$$

Les bases canoniques de \mathbb{K}^{n+1} et $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \theta^{-1}(e_k) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{X - a_i}{a_k - a_i} = L_k(X)$$

La matrice de θ dans les bases canoniques est appelée matrice de Vandermonde de a_0, \dots, a_n .

$$\mathcal{M}_{e \leftarrow c}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+j} X^j V_j$$

Ainsi on peut calculer

$$P(X) = V(a_0, \dots, a_n, X)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n+1} \\ 1 & X & X^2 & \cdots & X^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) \prod_{k=0}^n (X - a_k)$$

$$= \prod_{0 \leq i < j \leq n+1} (a_j - a_i)$$

Exercice : endomorphisme qui stabilise toutes les droites

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise toute les droites, qui dire de u ?

Par définition pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda_x x$ avec $\lambda_x \in \mathbb{K}$.

Soit $x, y \in E \setminus \{0\}$.

- Si (x, y) est liée, $y = ax$

$$\lambda_y ax = u(y) = au(x) = \lambda_x ax$$

$$\lambda_y = \lambda_x$$

- Sinon (x, y) est libre

$$\lambda_{x+y}(x + y) = u(x + y) = u(x) + u(y)$$

$$\lambda_{x+y}x + \lambda_{x+y}y = \lambda_x x + \lambda_y y$$

$$\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$$

Donc pour tout $x \in E$, $\lambda_x = \lambda$ et $u = \lambda \text{id}$.

Valeurs propres, espaces propres

Définitions, caractérisation, démonstration autour des valeurs propres et des espaces propres.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, il y a équivalence entre

1. $\exists x_0 \in E \setminus \{0\}, u(x_0) = \lambda x_0$
2. $\ker(u - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$
3. $u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E)$

On dit alors que λ est une valeur propre de u , on appelle sous-espace propre de u pour la valeur propre λ

$$E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & \exists x_0 \in E \setminus \{0\}, u(x_0) = \lambda x_0 \\ \Leftrightarrow & \exists x_0 \in \ker(u - \lambda \text{id}) \setminus \{0\} \\ \Leftrightarrow & u - \lambda \text{id} \notin \text{GL}(E) \quad (\text{dimension finie}) \end{aligned}$$

Somme directe des sous-espaces propres

Démonstration du fait que les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ ses valeurs propres deux à deux distinctes.

Soit $(x_1, \dots, x_p) \in \prod_{k=1}^p E_{\lambda_k}(u)$ tels que $\sum_{k=1}^p x_k = 0$.

Par récurrence on montre que pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$.

$$0 = \sum_{k=1}^p P(\lambda_k)x_k$$

En particulier avec $P = L_i$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$0 = \sum_{k=1}^p L_i(\lambda_k)x_k = x_i$$

On appelle sp̄ectre de u

$$\text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \lambda \text{ valeur propre}\}$$

Qui est finit ($|\text{Sp}(u)| \leq n = \dim E$).

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définitions, propriétés élémentaires et démonstrations autour du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Matrices

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit le polynôme caractéristique de A comme

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

Et on a

$$\chi_A(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$$

$$a_n = 1 \quad (\chi_A \text{ unitaire})$$

$$a_{n-1} = -\text{tr}(A)$$

$$a_0 = (-1)^n \det(A)$$

Endomorphismes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, e base de E , $A = \mathcal{M}_e(u)$. On définit

$$\chi_u(X) = \chi_A(X)$$

Ceci ne dépend pas de la base e choisie.

De plus

$$\text{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\chi_u)$$

Démonstration

$$\chi_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{j=1}^n (X \delta_{\sigma(j)j} - A_{\sigma(j)j})}_{P_\sigma(X)}$$

Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $P_\sigma \in \mathbb{K}_n[X]$ donc $\chi_A \in \mathbb{K}_n[X]$. De plus

$$\deg(P_\sigma) = |\{k \in [\![1, n]\!] \mid \sigma(k) = k\}|$$

$$\deg(P_\sigma) = n \Leftrightarrow \sigma = \text{id}$$

Donc $\deg \chi_A = n$ et $\text{cd } \chi_A = 1$.

Si $\sigma \neq \text{id}$, $\deg(P_\sigma) \leq n - 2$, donc a_{n-1} est le terme en X^{n-1} de P_{id} .

$$P_{\text{id}} = \prod_{j=1}^n (X - A_{jj})$$

$$a_{n-1} = - \sum_{j=1}^n A_{jj} = -\text{tr}(A)$$

$$a_0 = \chi_A(0) = \det(0 - A)$$

$$= (-1)^n \det(A)$$

Soient e, e' deux bases de E , $A = \mathcal{M}_e(u)$, $A' = \mathcal{M}_{e'}(u)$, $P = P_{e' \rightarrow e}$.

$$A' = PAP^{-1}$$

$$\chi_{A'}(X) = \det(XI_n - A')$$

$$= \det(XPI_n P^{-1} - PAP^{-1})$$

$$= \det(P) \det(XI_n - A) \det(P^{-1})$$

$$= \chi_A(X)$$

Multiplicités d'une valeur propre

Définitions des multiplicités d'une valeur propre.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de l'endomorphisme u .

- On appelle multiplicité algébrique (m_λ), ou juste multiplicité de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u .
- On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension de son espace propre.

On a toujours

$$\dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda$$

Démonstration

Soit (e_1, \dots, e_d) base de E_λ complété en $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E .

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_d & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right)$$

$$\chi_u = \chi_{\mathcal{M}_e(u)}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} (X - \lambda)I_d & -B \\ 0 & XI_{n-d} - C \end{vmatrix} \\ &= (X - \lambda)^d \chi_c(X) \end{aligned}$$

Propriétés diverses du polynôme caractéristique

Cas particuliers de calculs du polynôme caractéristique, et lien avec les endomorphismes induits.

- Pour tout $T \in T_n(\mathbb{K})$

$$\chi_T = \prod_{k=1}^n T_{kk}$$

- Pour tout $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{K})$

$$\chi_M(X) = \chi_A(X)\chi_C(X)$$

- Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F le sous-espace stable par u , \tilde{u} l'endomorphisme induit par u sur F , on a toujours

$$\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$$

Démonstration

- L'écrire.
- L'écrire.
- Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de F complété en base de E .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Avec $A = \mathcal{M}_{\tilde{e}}(\tilde{u})$.

Diagonalisabilité

Définition et premier critère de diagonalisabilité.

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base e de E tel que $\mathcal{M}_e(u)$ est diagonale.

Une telle base est par définition formée de vecteurs propres de u .

De plus

u diagonalisable

$$\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$$

En particulier

- Les homothéties sont diagonales dans toutes les bases
- Les projecteurs sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(p - \text{id})}_{E_1(p)} \oplus \underbrace{\ker p}_{E_0(p)} = E$$

- Les symétries sont diagonalisables :

$$\underbrace{\ker(s - \text{id})}_{E_1(s)} \oplus \underbrace{\ker s + \text{id}}_{E_{-1}(s)} = E$$

Autre critère de diagonalisabilité

Énoncer du critère de diagonalisabilité sur χ_u et les multiplicités.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

u diagonalisable

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \chi_u \text{ scindé} \\ \forall \lambda \in \text{Sp}(u), \dim E_\lambda(u) = m_\lambda \end{cases}$$

Où m_λ est la multiplicité (algébrique) de λ .

Ainsi car $\dim E_\lambda(u) \geq 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$,

χ_u SARS $\Rightarrow u$ diagonalisable

Démonstration

- Supposons u diagonalisable, notons e la base qui le diagonalise.

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$$

Donc χ_u est scindé

$$\begin{aligned} \chi_u(X) &= \prod_{k=1}^n (X - a_k) \\ &= \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\deg \chi_u = n = \sum_{k=1}^p m_{\lambda_k}$$

$$n = \sum_{k=1}^p m_{\lambda_k} \geq \sum_{k=1}^p \dim E_{\lambda_k} = n$$

• Supposons χ_u scindé et pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda$.

$$\chi_u = \underbrace{\prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (X - \lambda)^{m_\lambda}}_{\deg = n}$$

$$n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_\lambda = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$$

Donc u est diagonalisable.

Trigonalisabilité

Définition et premier critères de la trigonalisabilité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E tel que $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^+(\mathbb{K})$

Dans ce cas

- $u(e_1) = t_{11}e_1$, donc e_1 est un vecteur propre de u .
- Notons $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ le drapeau.

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u(F_k) \subset F_k$$

- $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^n (X - t_{kk})$ scindé.

La réciproque est aussi vraie : χ_u scindé $\Rightarrow u$ trigonalisable.

Si $F \neq \{0\}$ est un sev stable par u et u trigonalisable, alors \tilde{u} (induit par u sur F) est trigonalisable (car $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ scindé).

Si \mathbb{K} est algébriquement clos, toute matrice ou endomorphisme est trigonalisable.

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Toute matrice de taille 1 est supérieure.

Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \chi_A \text{ scindé} \Rightarrow A \text{ trigonalisable}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que χ_A scindé.

χ_A a au moins une racine, donc A admet une valeur propre λ .

On dispose de $X_0 \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$AX_0 = \lambda X_0$$

Ainsi on peut construire la base $e' = (X_0, \dots, X_n)$ de \mathbb{K}^{n+1} . Notons $P = P_{\text{can} \rightarrow e'}$.

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{A} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

Avec $\tilde{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\chi_A = \chi_{\tilde{A}}(X - \lambda)$ d'où $\chi_{\tilde{A}}$ scindé.

Par hypothèse de récurrence \tilde{A} est trigonalisable et on peut donc construire $P_0 \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ tel que

$$A = P \begin{pmatrix} a_1 & & * & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{n+1} & & \end{pmatrix} P^{-1}$$

Endomorphismes nilpotents

Définition d'un endomorphisme nilpotent et inégalité sur son indice.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est dit nilpotent s'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^q = 0$.

On appelle indice de nilpotence la valeur

$$d = \min\{q \in \mathbb{N}^* \mid u^q = 0\}$$

On a toujours $d \leq \dim E$.

Démonstration

Comme $u^{d-1} \neq 0$ on dispose de $x \in E$ tel que $u^{d-1}x \neq 0$.

Considérons la famille $(x, u(x), \dots, u^{d-1}(x))$, soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{d-1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x) = 0$$

$$u^{d-1} \left(\sum_{k=0}^{d-1} \lambda_k u^k(x) \right) = \lambda_0 u^{d-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = 0$$

$$u^{d-2} \left(\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k u^k(x) \right) = \lambda_1 u^{d-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0$$

⋮

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{d-1} = 0$$

D'où $d \leq n$.

Caractérisation des endomorphismes nilpotents

Caractérisation des endomorphismes nilpotents.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. u nilpotent
2. u trigonalisable en une matrice strictement supérieure.
3. u trigonalisable et $\text{Sp}(u) = \{0\}$
4. $\chi_u = X^n$

Démonstration

- (4 \Rightarrow 3) $\chi_u = X^n$ est scindé donc u est trigonalisable et $\text{Sp}(u) = Z(X^n) = \{0\}$.
- (3 \Leftrightarrow 2) Évident.
- (3 \Rightarrow 4) On dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } \chi_u = X^n$$

- (2 \Rightarrow 1) On dispose de e base de E tel que $\mathcal{M}_e(u) \in T_n^{++}(\mathbb{K})$, notons $F_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

$$u(F_k) \subseteq u(F_{k-1})$$

$$u^n(F_n = E) \subseteq F_0 = \{0\}$$

$$u^n = 0$$

$$\{0\} \subsetneq \ker u \subsetneq \dots \subsetneq \ker u^d = E$$

Construisons une base adaptée

$$\left(\underbrace{\overbrace{e_1, \dots, e_{i_1}}_{\text{base de } \ker u}, \dots, e_{i_2}, \dots, e_{i_d}}_{\text{base de } \ker u^2} \right)$$

Pour tout $x \in \ker u^k$:

$$u(x) \in \ker u^{k-1}$$

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ si $i_j + 1 \leq k \leq i_{j+1}$

$$e_k \in \ker u^j$$

$$u(e_k) \in \ker u^{j-1}$$

$$u(e_k) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i_{j-1}})$$

Premier lien entre polynôme minimal et polynôme caractéristique

Lien entre racines du polynôme minimal et celles du polynôme caractéristique.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u .

$$\text{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(P)$$

$$Z(\chi_u) = \text{Sp}(u) = Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$$

Démonstration

- Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $x \in E_{\lambda}(u) \setminus \{0\}$:

$$P(X) = \sum_{k=0}^d a_k X^k$$

$$\begin{aligned} P(u)(x) &= \sum_{k=0}^d u^k(x) = \sum_{k=0}^d \lambda^k x \\ &= P(\lambda)x = 0 \end{aligned}$$

Or $x \neq 0$, donc $P(\lambda) = 0$.

- Π_u annule u d'où $\text{Sp}(u) \subseteq Z_{\mathbb{K}}(\Pi_u)$
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ racine de Π_u

$$\Pi_u = (X - \lambda)Q(X)$$

$$0 = (u - \lambda \text{id}) \circ Q(u)$$

Donc $\text{im } Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda \text{id})$.

Mais $Q(u) \neq 0$ car Π_u minimal, donc

$$\dim(\text{im } Q(u)) \geq 1$$

$$\text{im } Q(u) \subseteq \ker(u - \lambda \text{id}) = E_{\lambda}(u)$$

$$\lambda \in \text{Sp}(u)$$

Théorème des noyaux

Énoncé et démonstrations du théorème des noyaux.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (\mathbb{K} -ev de dimension finie), $P \in \mathbb{K}[X]$.

Si $P = \prod_{k=1}^N P_k$ avec P_1, \dots, P_N deux à deux premiers entre eux, alors

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Si de plus P annule u alors

$$E = \ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Où e est la base construite par concaténation de bases des $\ker P_k(u)$.

Démonstration

Par récurrence sur N .

Pour $P = P_1 P_2$ avec $P_1 \wedge P_2 = 1$:

$$P_1 V_1 + P_2 V_2 = 1$$

$$P_1(u) \circ V_1(u) + P_2(u) \circ V_2(u) = \text{id} \quad (*)$$

En évaluant on trouve

$$\ker P_1(u) \cap \ker P_2(u) = \{0\}$$

De plus

$$P_1(u) \circ P_2(u) = P_2(u) \circ P_1(u) = P(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} \ker P_1(u) \subseteq \ker P(u) \\ \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u) \end{cases}$$

$$\ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u) \subseteq \ker P(u)$$

Soit $x \in \ker P(u)$, par $(*)$ on a

$$x = \underbrace{V_1(u) \circ P_1(u)(x)}_{x_2} + \underbrace{V_2(u) \circ P_2(u)(x)}_{x_1}$$

$$\begin{aligned} P_1(u)(x_1) &= (P_1 V_2 P_2)(u)(x) \\ &= (V_1 P)(u)(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$P_2(u)(x_2) = (P_2 V_1 P_1)(u)(x) = (V_2 P)(u)(x) = 0$$

$$x = \underbrace{x_1}_{\in \ker P_1(u)} + \underbrace{x_2}_{\in \ker P_2(u)}$$

D'où $\ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

Supposons maintenant le résultat pour tout P_1, \dots, P_N respectant les conditions.

Soient $P = P_1 \cdots P_{N+1} \in \mathbb{K}[X]$ avec P_1, \dots, P_{N+1} deux à deux premiers entre eux.

Donc $Q = P_1 P_2 \cdots P_N$ et P_{N+1} sont premiers entre eux.

Ainsi

$$\ker P(u) = \ker(P_{N+1} Q)(u)$$

$$= \underbrace{\ker Q(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{cas } N=2}$$

$$= \underbrace{\bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u) \oplus \ker P_{N+1}(u)}_{\text{H.R.}}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{N+1} \ker P_k(u)$$

Projecteurs de la démonstration du théorème des noyaux

Démonstration secondaire du théorème des noyaux dans le cas d'un polynôme annulateur.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose $P = \prod_{k=1}^N P_k$ annulateur de u , P_1, \dots, P_N premiers entre eux deux à deux.
On pose

$$Q_k = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N P_i$$

Qui sont premiers dans leur ensemble.

$$\sum_{k=1}^N V_k Q_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^N \underbrace{V_k(u) \circ Q_k(u)}_{\Pi_k} = \text{id} \quad (1)$$

On remarque que

$$P_k(u) \circ \Pi_k = (V_k P_k Q_k)(u) = (V_k P)(u) = 0$$

$$\text{Donc } \text{im } \Pi_k \subseteq \ker P_k(u)$$

Et pour $k \neq i$, $P \mid Q_i Q_k$ d'où

$$P \mid (V_k P_k)(V_i P_i)$$

$$\Pi_i \circ \Pi_k = 0$$

Donc par (1)

$$\sum_{i=1}^N \Pi_k \circ \Pi_i = \Pi_k \circ \Pi_k = \Pi_k$$

Donc les Π_k sont des projecteurs.

Soit $x \in \ker P_k(u)$, pour tout $i \neq k$, $\Pi_i(x) = 0$. Par (1)

$$x = \Pi_k(x)$$

$$x \in \text{im } \Pi_k$$

Ainsi

$$\ker P_k(u) = \text{im } \Pi_k$$

$$\ker P_i(u) \subseteq \ker \Pi_k$$

Les Π_k projettent sur $\ker P_k$.

Théorème des noyaux

Soient $(x_1, \dots, x_N) \in \prod_{k=1}^N \ker P_k(u)$ tels que $\sum_{k=1}^N x_k = 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$\Pi_i \left(\sum_{k=1}^N x_k \right) = x_i = 0$$

$$x \in \text{im } \Pi_k$$

D'où

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker P_k(u)$$

Et de plus

$$\text{im } \Pi_k = \ker P_k(u)$$

$$\ker \Pi_k = \bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^N \ker P_i(u)$$

$$\Pi_k \in \mathbb{K}[u]$$

Critère de Diagonalisabilité

Démonstration d'une CNS de diagonalisabilité.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, il y a équivalence entre

1. u diagonalisable.
2. u annule un polynôme SARS.
3. Π_u est SARS

Démonstration

- (2 \Leftrightarrow 3)

$$\begin{aligned} & \exists P \in \mathbb{K}[X], P \text{ SARS et } P(u) = 0 \\ \Leftrightarrow & \exists P \in \mathbb{K}[X], P \text{ SARS et } \Pi_u \mid P \\ \Leftrightarrow & \Pi_u \text{ SARS} \end{aligned}$$

- (3 \Rightarrow 1) Π_u SARS donc

$$\Pi_u = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^N (X - \lambda)$$

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \ker(u - \lambda \text{id})$$

$$= \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

Donc u diagonalisable.

- (1 \Rightarrow 3) u diagonalisable

$$\mathcal{M}_e(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}}_M$$

$$P(X) = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k) \text{ SARS}$$

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & & \\ & \ddots & & \\ & & P(\lambda_1) & \\ & & & \ddots \\ & & & & P(\lambda_n) \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

Donc $\Pi_u \mid P$ SARS.

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit

Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev stable par u .

Notons \tilde{u} l'endomorphisme induit par u sur F .

- $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$
- Si u diagonalisable, alors \tilde{u} aussi.

Démonstration

- $\Pi_u(\tilde{u}) = 0$ donc $\Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u$.
- Si u diagonalisable, Π_u est SARS, donc $\Pi_{\tilde{u}}$ aussi (car divise) donc \tilde{u} est diagonalisable.

Sous-espaces cycliques

Définition de sous-espace cyclique et base associé.

Pour un $u \in \mathcal{L}(E)$ et $x_0 \in E$ on appelle sous-espace cyclique engendré par x_0 (pour u)

$$F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$$

Cet espace admet comme base

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Où $d = \deg \Pi_{u,x_0}$ le polynôme minimal ponctuel, l'unique polynôme unitaire minimal tel que

$$\text{Pour } \theta_{x_0} : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \rightarrow E \\ P \mapsto P(u)(x_0) \end{cases}$$

$$\ker \theta_{x_0} = \Pi_{u,x_0} \mathbb{K}[X]$$

Démonstration

$\theta_{x_0} \in \mathcal{L}(E)$, donc $\ker \theta_{x_0}$ est un sev, donc un sous-groupe de $(\mathbb{K}[X], +)$.

Soit $P \in \ker \theta_{x_0}$, $Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\begin{aligned} \theta_{x_0}(QP) &= Q(u)(P(u)(x_0)) \\ &= Q(u)(0) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\ker \theta_{x_0}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$, qui est principal d'où Π_{u,x_0} existe.

Notons $d_{x_0} = \deg \Pi_{u,x_0}$.

Par existance et unicité de la division euclidienne on a

$$\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \oplus \ker \theta_{x_0}$$

Donc $\theta_{x_0}|_{\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X]}$ isomorphisme de $\mathbb{K}_{d_{x_0}-1}[X] \rightarrow \text{im } \theta_{x_0} = F_{x_0}$.

Donc F_{x_0} a pour base

$$(\theta_{x_0}(1), \theta_{x_0}(X), \dots, \theta_{x_0}(X^{d_{x_0}-1}))$$

$$= (x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Endomorphismes cycliques

Définition, propriétés, démonstration autour des endomorphismes cycliques.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est cyclique si l'une des conditions équivalentes suivantes est vérifiée

1. $\exists x_0 \in E, \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}} = E$.
2. $\exists x_0 \in E, (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base de E .

Propriétés en vrac (sans démonstration)

- Si u cyclique, tout endomorphisme induit l'est aussi.
- Si u cyclique, u admet un nombre fini de sev stables.
- Si \mathbb{K} est fini et u admet un nombre fini de sev stables, alors u est cyclique.

Démonstration équivalence

- $(2 \Rightarrow 1)$ Évident.
- $(1 \Rightarrow 2)$ $F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ est les sous-espace engendré par x_0 pour u , donc

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Où $d = \deg \Pi_{u, x_0}$ en est une base.

Or $F_{x_0} = E$ par hypothèse, donc

$$\dim F_{x_0} = n \text{ et } d = n.$$

Vision matricielle de la cyclicité

Lien entre endomorphisme cyclique et matrices de compagnon.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est cyclique si il existe une base e de E et P unitaire de degré n tel que $\mathcal{M}_e(u) = C_P$.

Dans ce cas $\Pi_u = P$.

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique pour $x_0 \in E$. Notons $e = (x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ la base associée.

On dispose alors de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$u^n(x_0) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) = 0$$

$$P = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Et alors

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{matrix} & u(x_0) & \cdots & u^n(x_0) \\ x_0 & 0 & & a_0 \\ u(x_0) & 1 & & a_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ u^{n-1}(x_0) & & 0 & a_{n-1} \\ & & 1 & \end{matrix}$$

$$= C_P$$

Réiproquement :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \\ \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} \\ \hline 1 & \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} 0 & a_0 \\ 1 & a_1 \\ \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n-1} \\ \hline 1 & \end{array} \right)$$

Alors pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$

$$u(e_k) = u(e_{k+1})$$

$$\text{Donc } e = (e_1, u(e_1), \dots, u^{n-1}(e_1))$$

Donc u est cyclique.

Ainsi :

$$P(u)(x_0) = u^n(x_0) - \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)}_{u^n(x_0)} = 0$$

Donc pour tout $m \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

$$P(u)(u^m(x_0)) = u^m(P(u)(x_0)) = 0$$

Ainsi $P(u)$ annule une base, d'où $\Pi_u \mid P$.

Or $\deg \Pi_{u,x_0} = n$ car u cyclique et

$\Pi_{u,x_0} \mid \Pi_u$, donc

$$n \leq \deg \Pi_u \leq \deg P = n$$

Et comme Π_u et P sont unitaires

$$\Pi_u = P$$

Matrice compagnon

Définition de matrice compagnon.

Soit $P = X^d \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On appelle matrice compagnon de P la matrice

$$C_P = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{d-1} \end{array} \right)$$

Ainsi (en développant selon la dernière colonne)

$$\chi_{C_P}(X) = P(X)$$

Exercice : vecteur dont le polynôme minimal ponctuel est le polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{u,x} = \Pi_u$.

En déduire que u cyclique ssi $\deg \Pi_u = n$.

Soit $u \in \mathcal{L}(e)$.

On pose

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N P_k^{d_k}$$

Avec P_1, \dots, P_N irréductibles deux à deux distincts.

Démonstration \mathbb{K} quelconque

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker \underbrace{P_k^{d_k}(u)}_{F_k}$$

$$\ker P_k^{d_k-1}(u) \subseteq \ker P_k^{d_k}(u) = F_k$$

Supposons par l'absurde qu'on ait égalité pour un k .

$$\begin{aligned} E &= \bigoplus_{j \neq k} \ker P_j^{d_j}(u) \oplus \ker P_k^{d_k-1}(u) \\ &= \ker \left(\underbrace{P_k^{d_k-1} \prod_{j \neq k} P_j^{d_j}}_{\substack{\text{ne peut annuler } u \\ \text{car } \Pi_u \text{ minimal}}}(u) \right) \end{aligned}$$

Donc $\ker P_k^{d_k-1}(u) \subsetneq \ker P_k^{d_k}(u)$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on dispose de

$$x_k \in F_k \setminus \ker P_k^{d_k-1}(u)$$

$$\text{Donc } \begin{cases} P_k^{d_k}(u)(x_k) = 0 \\ P_k^{d_k-1}(x_k) \neq 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underbrace{\Pi_{u,x_k} = P_k^{d_k}}_{\substack{\text{car } P_k \text{ irréductible}}}$$

On pose $x = \sum_{k=1}^N x_k$, alors pour tout $P \in \Pi_{u,x} \mathbb{K}[X]$

$$P(u)(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N P(u)(x_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P(u)(x_k) = 0}_{\text{somme directe}}$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, P_k^{d_k} = \Pi_{u,x_k} \mid P$$

$$\Leftrightarrow \prod_{k=1}^N P_k^{d_k} = \Pi_u \mid P$$

$$\Leftrightarrow P \in \Pi_u \mathbb{K}[X]$$

Donc $\Pi_u \mid \Pi_{u,x} \mid \Pi_u$.

Démonstration \mathbb{K} infini

Pour tout $x \in E$, $\Pi_{u,x} \mid \Pi_u$ donc

$$\Pi_{u,x} \in D = \{\text{Diviseurs unitaires de } \Pi_u\}$$

$$|D| = \prod_{k=1}^N (d_k + 1)$$

$$D' = \{\Pi_{u,y} \mid y \in E\} \subseteq D$$

Et $x \in \ker \Pi_{u,x}(u)$ d'où

$$E = \bigcup_{x \in E} \ker \Pi_{u,x}(u)$$

$$= \bigcup_{P \in D'} \ker P(u)$$

union finie de sev

Donc on dispose de $Q = \Pi_{u,y} \in D'$ tel que (cf. exercice union de sev dans un corps infini)

$$E = \ker Q(u)$$

Par minimalité de Π_u , $\Pi_{u,y} = \Pi_u$.

CNS de cyclicité

On sait que si u cyclique, alors on dispose de e base de E tel que

$$\mathcal{M}_e(u) = C_{\Pi_u}$$

Avec $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ unitaire de degré n .

Supposons maintenant que $\deg \Pi_u = n$.

On dispose de $x_0 \in E$ tel que

$$\Pi_{u,x_0} = \Pi_u, \text{ d'où}$$

$$\deg \Pi_{u,x_0} = n = \dim \underbrace{\text{Vect}(u^k(x_0))}_{F_{x_0}}_{k \in \mathbb{N}}$$

D'où $F_{x_0} = E$ et u cyclique.

Théorème de Cayley-Hamilton

Énoncé et démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, on a $\chi_u(u) = 0$ c'est à dire $\Pi_u \mid \chi_u$.

Démonstration

Soit $x_0 \in E \setminus \{0\}$, on veut montrer $\chi_u(u)(x_0) = 0$.

On pose $F_{x_0} = \text{Vect}(u^k(x_0))_{k \in \mathbb{N}}$ sev de E stable par u .

Soit \tilde{u} endomorphisme induit par u sur F_{x_0} , qui est donc cyclique.

Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que

$$e_0 = (x_0, u(x_0), \dots, u^{d-1}(x_0))$$

Soit une base de F_{x_0} .

$$\mathcal{M}_{e_0}(\tilde{u}) = C_P = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & a_{n-2} \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array} \right)$$

Où

$$\tilde{u}^d(x_0) = u^d(x_0) = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^k(x_0)$$

$$P(X) = X^d - \sum_{k=0}^{d-1} a_k X^k$$

$$P(u)(x_0) = 0$$

Or $P = \chi_{C_P} = \chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$ donc

$$\chi_u(u)(x_0) = Q(u)(P(u)(x_0)) = 0$$

Exercice : propriétés des endomorphismes cycliques

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable, CNS pour u cyclique.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, CNS pour u cyclique.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, montrer que pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$, $\dim E_\lambda(u) = 1$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, montrer que $\text{Com } u = \mathbb{K}[u]$.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)$$

Où les $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont deux à deux distincts (Π_u SARS).

u cyclique ssi $N = n = \dim E$.

- Si u cyclique, $\deg \Pi_u = n = N$.
- Si $\deg \Pi_u = n$

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ base de vecteurs propres associés aux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Posons $x = \sum_{k=1}^n e_k$.

$$\mathcal{M}_e(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^n \end{pmatrix}$$

Matrice de Vandermonde inversible, d'où $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ base.

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice q .

$$\Pi_u = X^q$$

- Si u cyclique, alors $\deg \Pi_u = q = n$.
- Si $q = n$, $u^{n-1} \neq 0$, donc on dispose de $x_0 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_0) \neq 0$.

Et $(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$ est libre et donc une base.

(En évaluant $u^i(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k u^k(x_0))$).

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique, donc on dispose de e base de E tel que pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$

$$\mathcal{M}_e(u - \lambda \text{id}) = \left[\begin{array}{cc|c} -\lambda & & a_0 \\ 1 & -\lambda & a_2 \\ & 1 & \ddots \\ & & \ddots & -\lambda & a_{n-2} \\ & & & 1 & a_{n-1} - \lambda \end{array} \right]$$

Dont le quadrant inférieur gauche est une sous-matrice inversible de taille $n - 1$.

$$\begin{aligned} \text{rg } (u - \lambda \text{id}) &\geq n - 1 \\ 1 \leq \dim E_\lambda(u) &= \dim \ker(u - \lambda \text{id}) \leq 1 \end{aligned}$$

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ cyclique. On dispose de $x_0 \in E$ tel que

$$(x_0, u(x_0), \dots, u^{n-1}(x_0))$$

Est une base.

On a déjà $\mathbb{K}[u] \subseteq \text{Com}(u)$.

Soit $v \in \text{Com}(u)$. On dispose de $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que

$$v(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0)$$

Soit $m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$

$$v(u^m(x_0)) = u^m(v(x_0))$$

$$= u^m \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(x_0) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k(u^m(x_0))$$

Donc v et $\sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$ coincident sur une base, d'où $v \in \mathbb{K}[u]$.

Critère de trigonalisabilité sur le polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, CNS de trigonalisabilité sur Π_u .

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, u est trigonalisable ssi Π_u scindé.

Démonstration

- Supposons u trigonalisable, donc χ_u est scindé or $\Pi_u \mid \chi_u$ donc Π_u est scindé.
- Supposons Π_u scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

Avec $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

Par le TDN

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}}_{F_k}$$

Pour k fixé, F_k est stable par u et $u - \lambda_k \text{id}$, posons u_k induit par u sur F_k .

$u_k - \lambda_k \text{id}$ est nilpotent, donc on dispose de e_k base de F_k tel que

$$\mathcal{M}_{e_k}(u_k - \lambda_k \text{id}) = \begin{pmatrix} 0 & * \\ & \ddots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{e_k}(u_k) = A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & * \\ & \ddots \\ & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Notons e la base concaténant les bases e_1, \dots, e_N .

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & A_N & \end{pmatrix}$$

Où les A_1, \dots, A_N sont triangulaires.

- (Autre méthode) Par récurrence sur n .

Cas $n = 1$ évident.

Supposons le résultat pour $n \in \mathbb{N}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E = n + 1$ et Π_u scindé.

Π_u admet au moins une racine λ , on dispose donc de $x \in E$ vecteur propre associé.

On forme la base $(\lambda, e_1, \dots, e_{n-1})$ de E .

$$\mathcal{M}_e(u) = A = \left[\begin{array}{c|cccc} \lambda & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & A_1 & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

Or

$$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \Pi_u(A)$$

$$= \left[\begin{array}{c|cccc} \Pi_u(\lambda) & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & & \\ \vdots & & \Pi_u(A_1) & & \\ 0 & & & & \end{array} \right]$$

D'où $\Pi_u(A_1) = 0$ donc $\Pi_{A_1} \mid \Pi_u$ et Π_{A_1} scindé, donc par hypothèse de récurrence A_1 est trigonalisable.

Exercice : polynôme caractéristique divisant une puissance du polynôme minimal

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E$. Montrer que $\chi_u \mid \Pi_u^n$

Par récurrence forte sur n .

Cas $n = 1$ évident.

Supposons le résultat pour tout $m \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$.

Si u est cyclique, $\Pi_u = \chi_u$ d'où $\chi_u \mid \Pi_u^n$.

Sinon on prend $x_0 \in E \setminus \{0\}$, $k = \deg \Pi_{u,x_0} < n$ donc $(x_0, u(x_0), \dots, u^{k-1}(x_0))$ est libre, on la complète en une base e de E .

$$\mathcal{M}_e(u) = \left(\begin{array}{c|c} C_{\Pi_{u,x_0}} & * \\ \hline 0 & A \end{array} \right)$$

Donc

$$\chi_u = \underbrace{\chi_{C_{\Pi_{u,x_0}}}}_{\Pi_{u,x_0}} \chi_A$$

$$\chi_u \mid \Pi_u \chi_A$$

Or par hypothèse de récurrence $\chi_A \mid \Pi_A^{n-k}$ et

$$0 = \mathcal{M}_e(\Pi_u(u)) = \left(\begin{array}{c|c} \Pi_u(C_{\Pi_{u,x_0}}) & * \\ \hline 0 & \Pi_u(A) \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } \Pi_A \mid \Pi_u$$

Ainsi

$$\chi_u \mid \Pi_u \Pi_A^{n-k} \mid \Pi_u^{n-k+1} \mid \Pi_u^n$$

Décomposition en sous espaces caractéristiques

Définition et démonstration de la décomposition en sous-espaces caractéristiques.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé, l'espace E se décompose en somme directe de ses stables par u :

$$E = \bigoplus_{k=1}^N F_k$$

Où pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, u_k induit par u sur F_k vérifie

$$u_k = \lambda_k \text{id} + n_k$$

Où n_k est nilpotent et $\lambda_k \in \text{Sp}(u)$.

Dé plus $\dim F_k = m_k$ et $F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}$.

Cas diagonalisable

Si u est diagonalisable

$$\dim F_k = m_k = \dim E_{\lambda_k}(u)$$

$$E_{\lambda_k}(u) = \ker(u - \lambda_k \text{id}) \subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k} = F_k$$

$$E_{\lambda_k}(u) = F_k$$

Démonstration

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé.

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$= \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$\prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k} = \chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{\dim F_k}$$

$$m_k = \dim F_k$$

Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal

Lien entre la décomposition en sous-espaces caractéristiques et le polynôme minimal.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé, à fortiori, Π_u est scindé.

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

On peut décomposer par le TDN sur Π_u et en les espaces caractéristiques

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \overbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k}}^{F_k}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}}_{G_k}$$

Or $d_k \leq m_k$ (car $\Pi_u \mid \chi_u$), d'où

$$G_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k} \subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{m_k} = F_k$$

Mais $\bigoplus_{k=1}^N G_k = \bigoplus_{k=1}^N F_k$ donc $G_k = F_k$.

Soit $q_k \leq d_k$ l'indice de nilpotence de $n_k = (u - \lambda_k \text{id})|_{F_k}$.

$$F_k \subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{q_k}$$

$$\subseteq \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k} = F_k$$

Posons $Q = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{q_k}$

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k)^{d_k}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k)^{q_k}$$

Donc par le TDN $\ker Q(u) = E$,

$\Pi_u \mid Q$ donc $d_k \leq q_k \leq d_k$.

Exercice : valuation X-adique du polynôme minimal.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi_u = X^d Q$ avec $X \nmid Q$.

1. Montrer que

$$d = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

2. Montrer que

$$E = \ker u^d \oplus \text{im } u^d$$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\Pi_u = X^d Q$ avec $X \nmid Q$.

1. Notons

$$q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid \ker u^k = \ker u^{k+1}\}$$

Soit \tilde{u} l'induit par u sur $\ker u^q$.

$$\begin{cases} \tilde{u}^q = 0 \\ \tilde{u}^{q-1} \neq 0 \end{cases} \text{ Donc } \Pi_{\tilde{u}} = X^q$$

$$X^q \mid \Pi_{\tilde{u}} \mid \Pi_u = X^d Q$$

$$q \leq d$$

Donc $\ker u^q = \ker u^d$

$$\ker u^d \circ Q(u) = E$$

$$\text{im } Q(u) \subseteq \ker u^d = \ker u^q$$

$$\ker u^q \circ Q(u) = E$$

$$X^d Q \mid X^q Q$$

$$q \geq d$$

2. On a (TDN)

$$E = \ker u^d \oplus \text{ker } Q(u)$$

Soit $y \in \text{im } u^d$, on dispose donc de $x \in E$ tel que $y = u^d(x)$.

$$y = u^d(x)$$

$$Q(u)(y) = (X^d Q)(u)(x) = 0$$

$$\text{im } u^d \subseteq \ker Q(u)$$

Or par le théorème du rang

$$\begin{aligned} \dim \text{im } u^d &= \dim E - \dim \ker u^d \\ &= \dim \ker Q(u) \end{aligned}$$

D'où $\text{im } u^d = \ker Q(u)$.

Décomposition de Dunford

Définition et démonstration de la décomposition de Dunford.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u scindé.

On dispose de $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que

- $u = d + n$
- d diagonalisable
- n nilpotent
- $d \circ n = n \circ d$

De plus cette décomposition est unique.

Démonstration

On reprend la décomposition en sous-espaces caractéristiques

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{d_k}$$

$$\chi_u = \prod_{k=1}^N (X - \lambda_k)^{m_k}$$

$$E = \bigoplus_{k=1}^N \underbrace{\ker(u - \lambda_k \text{id})_k^m}_{F_k}$$

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}$$

On note u_k l'endomorphisme induit par u sur F_k .

$$F_k = \ker(u - \lambda_k \text{id}_E)^{m_k}$$

$$\text{D'où } (u_k - \lambda_k \text{id}_{F_k})^{m_k} = 0_{\mathcal{L}(F_k)}$$

Posons

$$n_k = u_k - \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$\text{Donc } u_k = \lambda_k \text{id}_{F_k} + n_k$$

Où n_k est nilpotent d'ordre d_k (cf démonstration sous-espaces caractéristiques).

On pose alors $d, n \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket,$$

$$d|_{F_k} = \lambda_k \text{id}_{F_k}$$

$$n|_{F_k} = n_k$$

Donc d diagonalisable et n nilpotent d'ordre $\max_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} (d_k)$.

Matriciellement

$$\mathcal{M}_e(d) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_N} \end{pmatrix} \in D_n(\mathbb{K})$$

$$\mathcal{M}_e(n) = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_N \end{pmatrix} \in T_n^{++}(\mathbb{K})$$

$$DN = \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N N_N \end{pmatrix} = ND$$

Unicité

On prend p_1, \dots, p_N les projecteurs associés à la décomposition (cf. démonstration du TDN)

$$E = \bigoplus_{k=1}^N F_k = \bigoplus_{k=1}^N \ker(u - \lambda_k \text{id})^{d_k}$$

On avait montré que $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{K}[u]$.

On a

$$d = \sum_{k=1}^N \lambda_k p_k \in \mathbb{K}[u]$$

$$n = u - d \in \mathbb{K}[u]$$

Soient $d', n' \in \mathcal{L}(E)$ respectent les conditions.

Comme $u = d' + n'$, d' commute avec u et n' aussi, donc d' commute avec $d \in \mathbb{K}[u]$ et n' avec $n \in \mathbb{K}[u]$.

Ainsi d' et d sont codiagonalisables, d'où $d' - d$ est diagonalisable.

Et $n - n'$ est nilpotent (binôme de Newton).

Or $d' + n' = d + n$ d'où

$$\underbrace{d' - d}_{\text{diagonalisable}} = \underbrace{n - n'}_{\text{nilpotent}}$$

D'où $d' - d = 0$ et $n' - n = 0$.

Codiagonalisabilité

Définition et critère de codiagonalisabilité.

Soient $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ une famille d'endomorphismes.

On dit que les $(u_i)_i$ sont codiagonalisables s'il existe une base e de E tels que pour tout $i \in I$, $\mathcal{M}_e(u_i) \in D_n(\mathbb{K})$.

Démonstration : deux endomorphismes

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u) \text{ où } \text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Comme $u \circ v = v \circ u$, les $E_{\lambda_k}(u)$ sont stables par v .

Soit v_k l'induit de v sur $E_{\lambda_k}(u)$, qui est diagonalisable car v l'est.

Pour chaque $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ on dispose de e_k base de vecteurs propres de v_k (donc de v et u).

En concaténant on obtient une base qui convient.

Démonstration famille quelconque

Par récurrence sur $n = \dim E$.

Cas $n = 1$ évident.

Supposons la propriété pour tout \mathbb{K} -ev de dimension inférieur à n .

Soit $(u_i)_i \in \mathcal{L}(E)^I$ diagonalisables commutant avec $\dim E = n + 1$.

Si tout les u_i sont des homothéties n'importe quelle base convient.

Sinon on dispose de $j \in I$ tel que u_j n'est pas une homothétie.

$$E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u_j) \text{ où } \text{Sp}(u_j) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$$

Pour tout $i \in I$, les $E_{\lambda_k}(u_j)$ sont stables par u_i car $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

Notons $u_{i,k}$ l'induit de u_i sur $E_{\lambda_k}(u_j)$ qui est de dimension inférieur à n car u_j n'est pas une homothétie.

Les $(u_{i,k})_i$ sont donc diagonalisables et commutent entre eux, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

On dispose donc de e_k base de $E_{\lambda_k}(u_j)$ formée de vecteurs propres commun aux $(u_i)_i$. Il suffit alors de les concatener.

Commutant d'un endomorphisme diagonalisable

Propriétés sur le commutant d'un endomorphisme diagonalisable.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.

- Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$, $v \in \text{Com}(u)$ si les espaces propres de u sont stables par v .
- $\dim \text{Com}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\dim E_\lambda(u))^2$

Démonstration

- L'implication directe est évidente.

Supposons $v \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise les espaces propres de u .

Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$ soit $x \in E_\lambda(u)$, d'où $v(x) \in E_\lambda(u)$.

$$\begin{aligned} v(u(x)) &= v(\lambda x) = \lambda v(x) \\ u(v(x)) &= \lambda v(x) \end{aligned}$$

Or u diagonalisable, donc on dispose d'une base de vecteurs propres de u .

Ainsi $u \circ v$ et $v \circ u$ coïncident sur une base d'où l'égalité.

- On note $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

On considère

$$\theta : \begin{cases} \text{Com}(u) \rightarrow \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u)) \\ v \mapsto (v|_{E_{\lambda_1}(u)}, \dots, v|_{E_{\lambda_N}(u)}) \end{cases}$$

Qui est linéair.

Soit $v \in \ker \theta$: pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$

$$v(E_{\lambda_k}(u)) = 0$$

$$\text{Or } E = \bigoplus_{k=1}^N E_{\lambda_k}(u)$$

$$\text{Donc } v = 0$$

Soit $(v_1, \dots, v_k) \in \prod_{k=1}^N \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u))$.

Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note e_k base de $E_{\lambda_k}(u)$.

On définit $v \in \mathcal{L}(E)$ qui coïncide avec v_k sur tout les vecteurs de e_k .

Ainsi $\theta(v) = (v_1, \dots, v_k)$, et θ isomorphisme.

$$\dim \text{Com}(u) = \sum_{k=1}^N \dim \mathcal{L}(E_{\lambda_k}(u))$$

$$= \sum_{k=1}^N (\dim E_{\lambda_k}(u))^2$$

Exercice : le bicommutant

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On définit le bicommutant de u

$$B(u) = \left\{ w \in \mathcal{L}(E) \mid \begin{array}{l} \forall v \in \text{Com}(u) \\ v \circ w = w \circ v \end{array} \right\}$$

Montrer que $B(u) = \mathbb{K}[u]$.

Comme $u \in \text{Com}(u)$ on remarque

$$\mathbb{K}[u] \subseteq B(u) \subseteq \text{Com}(u)$$

On construit e concaténation de bases des $E_{\lambda_k}(u)$ pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $\text{Sp}(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$.

Soit $w \in B(u) \subseteq \text{Com}(u)$ donc les $(E_{\lambda_k})_k$ sont stables par w .

$$M = \mathcal{M}_e(w) = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_N \end{pmatrix}$$

Pour tout $v \in \text{Com}(u)$, $w \circ v = v \circ w$.

$$A = \mathcal{M}_e(v) = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_N \end{pmatrix}$$

Or $AM = MA$ donc

$$\forall k \in \llbracket 1, N \rrbracket, A_k M_k = M_k A_k$$

Ainsi M_k est une matrice qui commute avec toutes les autres.

On montre facilement grâce à E_{ij} que $M_k = a_k I_{m_k}$.

Par interpolation de Lagrange on dispose de $P \in \mathbb{K}_{N+1}(X)$ tel que $P(\lambda_k) = a_k$. Or

$$\mathcal{M}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_N I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{M}_e(P(u)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_N) I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 I_{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & a_N I_{m_N} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}_e(w)$$

D'où $w \in \mathbb{K}[u]$.