Physique
Produit vectoriel

Analyse Vectorielle
Champ scalaire, champ vectoriel
Champ à circulation conservative
Champ à flux conservatif
Circulation dans un champ de vecteur
Divergence d'un champ vectoriel
Flux au travers d'une surface
Gradient d'un champ scalaire
Notation nabla
Rotationnel d'un champ de vecteur
Systèmes de coordonées orthogonales
Théorème de Green-Ostrogradski

Électricité
Amplificateurs Opérationels

13 cartes.

Physique ▸ Électricité

Amplificateurs Opérationels

Systèmes de coordonées orthogonales

Définitions élémentaires de système de coordonées orthogonales en analyse vectorielle.

On peut décrire l'espace dans un système de coordonées (q_1, q_2, q_3) associé au trièdre local $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}M}$ s'éxprime

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{d}M} &= h_1(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_1\vec{e}_1 \\ &\quad + h_2(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_2\vec{e}_2 \\ &\quad + h_3(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

- En cartésiennes (x, y, z) :

$$h_1 = h_2 = h_3 = 1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

- En cylindriques (r, θ, z) :

$$h_1 = h_3 = 1 \quad h_2 = r$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

- En sphériques (r, θ, φ) :

$$h_1 = 1 \quad h_2 = r \quad h_3 = r\sin\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$$

Champ scalaire, champ vectoriel

Définitions d'un champ scalaire, champ vectoriel.

Un champ est une une grandeur dans un domaine D de l'espace à un instant t, noté $\vec{G}(\vec{r}, t)$.

Un champ peut être vectoriel ou scalaire selon si la grandeur qu'il représente l'est.

Un champ est dit

Uniforme s'il est indépendant de $\vec{r}$.

Stationnaire ou permanant s'il est indépendant de t.

Constant S'il est les deux

- On appelle ligne de champ une courbe de l'espace qui est en tout points tengente au champ.
- Pour un champ $f(\vec{r}, t)$, on appelle surface équi-f une surface où f est uniforme.

Gradient d'un champ scalaire

Définition du gradient d'un champ scalaire.

Pour un champ scalaire $f(\vec{r}, t)$. On définit le gradient de f, noté $\overrightarrow{grad} f$ ou $\boldsymbol{\nabla} f$ afin que

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

En coordonées cartésiennes

$$\overrightarrow{grad} f = \boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$$

Car

$$\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\ &= \boldsymbol{\nabla} f \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}\end{aligned}$$

En général

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial q_3}\vec{e}_3$$

Cas particulier

- En sphérique : $\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\vec{u}_r$
- En sphérique : $\boldsymbol{\nabla} r^2 = 2r\vec{u}_r$

Flux au travers d'une surface

Définition du flux au travers d'une surface.

On considère une fonction vectorielle $\vec{F}(q_1, q_2, q_3)$

Pour une surface

- Fermée : on l'oriente de l'intérieur vers l'extérieur par convention.
- Ouverte : on oriente le coutour sur lequel elle s'appuis et on applique la règle de la main droite.

Le flux Φ au travers de la surface S est

$$\mathrm{d}\Phi = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

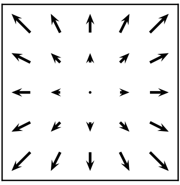
$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$$

Divergence d'un champ vectoriel

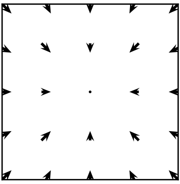
Définition de la divergence d'un champ vectoriel.

La divergence d'un champ de vecteur représente à quelle point le champ diverge ou converge en ce points. On écrit div $\vec{F}$ ou $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}$.

$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} > 0$



$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} < 0$



Son expression est

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 F_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1 h_3 F_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 F_{q_3})\right]$$

En cartésiennes

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Cas particuliers

- En cylindrique : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\vec{u_r}}{r} = 0$ (sauf en 0)
- En sphérique : $\boldsymbol{\nabla} \cdot \frac{\vec{u_r}}{r^2} = 0$ (sauf en 0)
- $\boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{r} = \dim E$

Théorème de Green-Ostrogradski

Énoncé du théorème de Green-Ostrogradski.

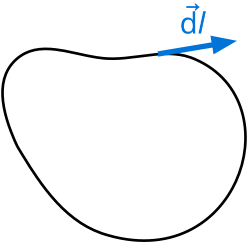
Pour un champ vectoriel $\vec{F}$ et une surface fermée S qui délimite un volume V, on a

$$\Phi = \oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot F \,\mathrm{d}\tau$$

Circulation dans un champ de vecteur

Définition de la circulation dans un champ de vecteurs.

Pour C un coutour orienté



On définit la circulation du champ $\vec{F}$ sur C comme

$$dC = \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$C = \int_C \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

Rotationnel d'un champ de vecteur

Définition du rotationnel d'un champ de vecteur.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial(h_3 F_{q_3})}{\partial q_2} - \frac{\partial(h_2 F_{q_2})}{\partial q_3}\right] \\ \frac{1}{h_3 h_1}\left[\frac{\partial(h_1 F_{q_1})}{\partial q_3} - \frac{\partial(h_3 F_{q_3})}{\partial q_1}\right] \\ \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial(h_2 F_{q_2})}{\partial q_1} - \frac{\partial(h_1 F_{q_1})}{\partial q_2}\right] \end{pmatrix}$$

En cartésienne

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Physique

Produit vectoriel

Expression du produit vectoriel.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_y & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_x & b_y \\ a_z & b_z \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_y b_z - b_y a_z \\ a_z b_y - b_z a_y \\ a_x b_z - b_y a_z \end{pmatrix}$$

Propriétés

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$$

$$= [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$$

$$= [\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]$$

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$$

Notation nabla

Notation nabla.

En coordonées cartésiennes, on “définit”

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ainsi on retrouve les formules des opérateurs (toujours en cartésiennes)

$$\overrightarrow{grad}\ f = \boldsymbol{\nabla} f$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F}$$

$$\overrightarrow{rot}\ \vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}$$

En général

$$\boldsymbol{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

Champ à circulation conservative

Définition de champ à circulation conservative.

Un champ $\vec{F}$ est dit à circulation conservative ssi pour toute courbe fermée $\mathcal{C}$ on a

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\vec{\mathrm{d}}l = 0$$

Ainsi la circulation de toute courbe passant par A et B deux points est la même, elle ne dépend pas du chemin choisis.

On peut alors définir le potentiel V, un champ scalaire tel que

$$V(A) = V_A$$

$$V(B) = V_A + \int_A^B \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}l$$

Entre $\vec{M}$ et $\vec{M} + \overrightarrow{\mathrm{d}M}$

$$V(M) - V(M + \mathrm{d}M) = \mathrm{d}V(M) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

Ainsi

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} V$$

De plus

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot \vec{\mathrm{d}}l = \iint_S \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}\right) \cdot \vec{\mathrm{d}S} = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 \quad (\boldsymbol{\nabla} \wedge (\boldsymbol{\nabla} V) = 0)$$

Champ à flux conservatif

Définition d'un champ à flux conservatif.

Un champ $\vec{F}$ est dit à flux conservatif si pour toute surface S fermée qui délimite un volume V.

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0$$

Ainsi

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} \, \mathrm{d}\tau = 0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{F}\right) = 0\right)$$

De plus on dispose de $\vec{A}$ (champ potentiel vecteur, H.P.) tel que

$$\vec{F} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \vec{A}$$