Escuela Superior de Cómputo

Licenciatura en Ciencia de Datos

Examen

Vianey Maravilla Pérez

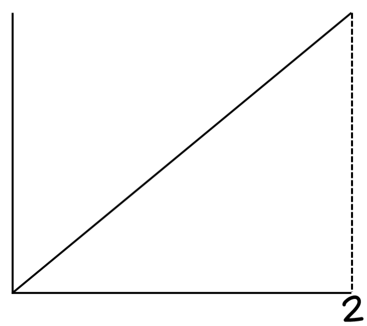
Grupo: 5AM1

Procesos Estocásticos

1 Problema 1

a) Usando la ténica de la función inversa genera una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$



b) Haga un programa que muestre lo anterior.

Sol. Para generar una variable aleatoria utilizando la técnica de la función inversa con la función de densidad de probabilidad dada:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

primero necesitamos encontrar la función inversa de la función de distribución acumulativa (FDA). La FDA se calcula integrando la FDP desde menos infinito hasta x:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt$$

Evaluando la integral, obtenemos:

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

Ahora, igualamos la FDA a u (un número aleatorio uniforme entre 0 y 1) y despejamos x:

$$u = \frac{x^2}{2}$$

$$2u = x^2$$

$$x = \sqrt{2u}$$

De esta manera, podemos generar una variable aleatoria siguiendo la función de densidad de probabilidad $f(x)$ utilizando la función inversa $x = \sqrt{2u}$, donde u es un número aleatorio uniforme entre 0 y 1.
Por ejemplo, si generamos $u = 0.3$, podemos calcular x:

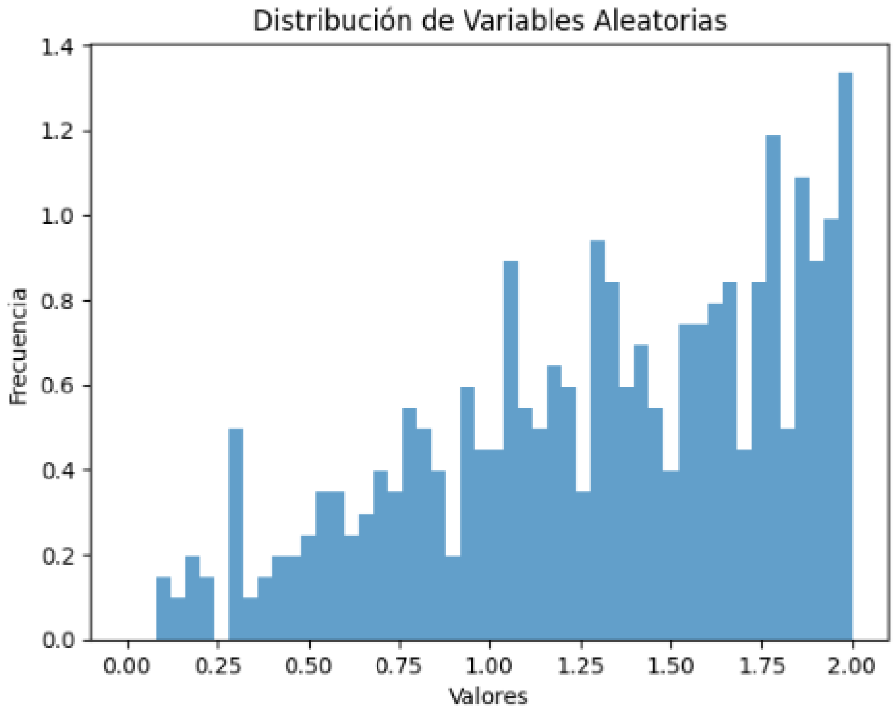
$$x = \sqrt{2 \cdot 0.3} = \sqrt{0.6} \approx 0.775$$

Repetimos este proceso para generar diferentes valores de x utilizando números aleatorios uniformes entre 0 y 1 y aplicando la función inversa $x = \sqrt{2u}$.

1.1 Código

```
import random
import math
import matplotlib.pyplot as plt

def generar_variable_aleatoria():
    u = random.uniform(0, 1) # Generar nmero aleatorio uniforme
        entre 0 y 1

    if 0 <= u <= 1: # Verificar si u est en el rango [0, 1]
        x = math.sqrt(2 * u) # Aplicar la funcin inversa x =
            sqrt(2 * u)
    else:
        x = 0 # Asignar el valor de 0 si u est fuera del rango
            [0, 1]

    return x * 2 # Escalar el valor de x al rango [0, 2]

# Llamada a la funcin generar_variable_aleatoria() y asignacin
    del resultado a la variable x
x = generar_variable_aleatoria()

print("Valor generado:", x) # Imprimir el valor generado

# Crear una lista de 1000 variables aleatorias generadas
    utilizando la funcin generar_variable_aleatoria()
variables_aleatorias = [generar_variable_aleatoria() for _ in
    range(1000)]

# Crear un histograma de las variables aleatorias utilizando la
     biblioteca matplotlib.pyplot
plt.hist(variables_aleatorias, bins=50, density=True, alpha
    =0.7, range=(0, 2))
plt.xlabel('Valores')
plt.ylabel('Frecuencia')
plt.title('Distribucin de Variables Aleatorias')
plt.show()
```

```
Valor generado: 2.1201475463212183
```



2 Problema 2

Demuestre que la potencia n-ésima de una matriz doblemente estócastica es doblemente estócastica.

Sol. Para poder demostrar que la potencia n-ésima de una matriz doblemente estocástica es también doblemente estocástica, debemos recordar la definición de una matriz doblemente estocástica.

Una matriz cuadrada A de tamaño $n \times n$ se considera doblemente estocástica si cumple las siguientes propiedades:

1. Todos los elementos de A son no negativos: $A(i, j) \geq 0$ para todo i, j.
2. Las sumas de las filas y columnas son iguales a 1: para cada fila i, la suma de los elementos de la fila es 1 (es decir, $\sum_j A(i, j) = 1$), y para cada columna j, la suma de los elementos de la columna es 1 (es decir, $\sum_i A(i, j) = 1$).

Ahora, supongamos que tenemos una matriz doblemente estocástica A. Queremos demostrar que su potencia n-ésima, A^n, también es doblemente estocástica.

Para simplificar la notación, denotemos por A^k a la matriz A multiplicada por sí misma k veces ($A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A$, y así sucesivamente).

Vamos a demostrar que A^k sigue siendo doblemente estocástica para cualquier entero $k \geq 1$, por inducción sobre k:

1. Caso base ($k = 1$):
$A^1 = A$. Sabemos que A es doblemente estocástica, por lo que cumple con las propiedades 1 y 2.

2. Paso de inducción (supongamos que A^k es doblemente estocástica):
Queremos demostrar que A^{k+1} también es doblemente estocástica.
$A^{k+1} = A^k \cdot A$.

Por hipótesis de inducción, supongamos que A^k cumple con las propiedades 1 y 2. Ahora, tenemos que demostrar que A^{k+1} también cumple con esas propiedades.

Propiedad 1:
Dado que A^k cumple con la propiedad 1 (todos los elementos son no neg-

ativos), y A también cumple con la propiedad 1, la multiplicación de dos matrices no negativas resulta en una matriz no negativa. Por lo tanto, A^{k+1} también cumple con la propiedad 1.

Propiedad 2:
Observemos las sumas de filas y columnas de A^{k+1}:

- Suma de filas:
Para cada fila i de A^{k+1}, la suma de los elementos de la fila es:
$\left(\sum_j A^k(i,j)\right) \cdot \left(\sum_j A(j,k+1)\right)$

Dado que A^k cumple con la propiedad 2 (suma de filas y columnas igual a 1) y A cumple con la propiedad 2, la suma de cada fila de A^k y la suma de cada columna de A son iguales a 1. Por lo tanto, la suma de filas de A^{k+1} es igual a 1.

- Suma de columnas:
Para cada columna j de A^{k+1}, la suma de los elementos de la columna es:
$\left(\sum_i A^k(i,j)\right) \cdot (\sum_i A(i,k+1))$

De manera similar, dado que A^k cumple con la propiedad 2 y A cumple con la propiedad 2, la suma de cada columna de A^k y la suma de cada fila de A son iguales a 1. Por lo tanto, la suma de columnas de A^{k+1} es igual a 1.

Por lo tanto, A^{k+1} cumple con la propiedad 2.

Hemos demostrado por inducción que para cualquier entero $k \geq 1$, A^k sigue siendo doblemente estocástica si A es doblemente estocástica.

En particular, si tomamos $k = n$ (el tamaño de la matriz), podemos concluir que A^n es doblemente estocástica si A es doblemente estocástica. Esto significa que la potencia n-ésima de una matriz doblemente estocástica también es doblemente estocástica.

3 Problema 3

a) Encuentra el promedio de lanzamientos de una moneda para que se obtengan 3 caras(HHH) seguidas b) Haga un programa que muestre lo anterior.

La ecuación es la siguiente:

$$E(Y) = E(Y|T)\left(\frac{1}{2}\right) + E(Y|HT)\left(\frac{1}{4}\right) + E(Y|HHT)\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$+E(Y|HHH)\left(\frac{1}{8}\right) E(Y)\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{7}{4}$$

$$= (1+E(Y))\left(\frac{1}{2}\right) + (2+E(Y))\left(\frac{1}{4}\right) + (3+E(Y))\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right)$$

$$= E(Y)\left(\frac{7}{8}\right) + \frac{7}{4}$$

La primera parte de la ecuación, $E(Y|T)\left(\frac{1}{2}\right)$, representa el número esperado de lanzamientos dado que el primer lanzamiento no fue una cara. Dado que hay dos posibilidades igualmente probables para el primer lanzamiento (cara o cruz), la probabilidad de que el primer lanzamiento no sea una cara es $\frac{1}{2}$.

La segunda parte, $E(Y|HT)\left(\frac{1}{4}\right)$, representa el número esperado de lanzamientos dado que los dos primeros lanzamientos fueron una cruz seguida de una cara. Aquí, hay cuatro posibles secuencias igualmente probables para los primeros dos lanzamientos (HH, HT, TH, TT), y la probabilidad de obtener HT es $\frac{1}{4}$.

La tercera parte, $E(Y|HHT)\left(\frac{1}{8}\right)$, representa el número esperado de lanzamientos dado que los primeros tres lanzamientos fueron una cara, una cruz y otra cruz. De manera similar, hay ocho posibles secuencias para los primeros tres lanzamientos, y la probabilidad de obtener HHT es $\frac{1}{8}$.

Finalmente, la última parte de la ecuación, $E(Y|HHH)\left(\frac{1}{8}\right)$, representa el número esperado de lanzamientos dado que los primeros tres lanzamientos fueron tres caras consecutivas. Aquí, hay ocho posibles secuencias para los primeros tres lanzamientos, y la probabilidad de obtener HHH es $\frac{1}{8}$.

En cada uno de estos términos condicionales, se suma el número de lanzamientos esperados en esa situación particular con el número esperado general $E(Y)$ multiplicado por la probabilidad correspondiente de que ocurra esa secuencia.

Luego, resolviendo la ecuación, se obtiene $E(Y) = 14$. Esto significa que, en promedio, se necesitarán 14 lanzamientos para obtener tres caras consecutivas en una secuencia de lanzamientos de una moneda justa.

3.1 Codigo

```
import random # Importar la biblioteca random

def simulate_experiment():
    flips = 0 # Inicializar el contador de lanzamientos en 0
    consec_heads = 0 # Inicializar el contador de caras
        consecutivas en 0

    while consec_heads < 3: # Continuar hasta obtener 3 caras
        consecutivas
        result = random.choice(['H', 'T']) # Lanzar una moneda
            aleatoria ('H' para cara, 'T' para cruz)
        flips += 1 # Incrementar el contador de lanzamientos en
            1

        if result == 'H': # Si sale cara
            consec_heads += 1 # Incrementar el contador de caras
                 consecutivas
        else:
            consec_heads = 0 # Reiniciar el contador de caras
                consecutivas si sale cruz

    return flips # Devolver el nmero de lanzamientos necesarios
        para obtener 3 caras consecutivas

def calculate_average_experiments(num_experiments):
    total_flips = 0 # Inicializar el contador total de
        lanzamientos en 0
```

```
    for _ in range(num_experiments):
        flips = simulate_experiment() # Realizar un experimento
            y obtener el nmero de lanzamientos necesarios
        total_flips += flips # Agregar el nmero de lanzamientos
            al contador total

    average_flips = total_flips / num_experiments # Calcular el
        promedio de lanzamientos
    return average_flips # Devolver el promedio de lanzamientos

num_experiments = 1000000 # Nmero de experimentos a realizar
average = calculate_average_experiments(num_experiments) #
    Calcular el promedio de lanzamientos

print(f"El promedio de lanzamientos necesarios para obtener 3
    caras seguidas es: {average}") # Imprimir el promedio
    obtenido (13.99)
```

4 Problema 4

Demuestre que la distribucion

$$\lim_{n\to\infty} \alpha P^n = \lambda$$

es estacionaria, es decir P = λ, para cualquier α

Para poder demostrar que la distribución límite de la secuencia de distribuciones dada por αP^n cuando n tiende a infinito es estacionaria, es necesario asumir que estamos trabajando con una cadena de Markov con espacio de estados discreto.

La distribución estacionaria de una cadena de Markov es un vector de probabilidades estacionario π que cumple la ecuación:

$$\pi P = \pi$$

donde P es la matriz de transición de la cadena de Markov y π es un vector fila que contiene las probabilidades estacionarias de cada estado.

En este caso, se nos da la secuencia de distribuciones αP^n y queremos demostrar que su límite, cuando n tiende a infinito, es una distribución estacionaria.

La secuencia αP^n se define como:

$$\alpha P^n = \alpha P^{n-1} P = \alpha P^{n-2} P^2 = \ldots = \alpha^n P^n$$

Dado que α es un escalar constante, podemos tomarlo fuera de la secuencia y nos queda:

$$\alpha^n P^n$$

Podemos notar que esta secuencia puede reescribirse como:

$$\alpha^n P^n = (\alpha^n \cdot P^n) \cdot \mathbf{1}$$

donde $\mathbf{1}$ es un vector columna de unos del mismo tamaño que las distribuciones.

Ahora, vamos a demostrar que $\alpha^n \cdot P^n$ converge a una matriz M cuando n tiende a infinito. Para esto, vamos a calcular el límite de esta secuencia:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n \cdot P^n = \lim_{n\to\infty} \alpha^n \cdot (P \cdot P \cdot \ldots \cdot P) = \lim_{n\to\infty} \alpha^n \cdot P^{n-k} \cdot P^k$$

Dado que P es una matriz de transición de una cadena de Markov, $\lim_{n\to\infty} P^{n-k}$ converge a una matriz estacionaria M cuando n tiende a infinito. Además, $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ puede tomar diferentes valores dependiendo del valor de α:

- Si $|\alpha| < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$.
- Si $\alpha = 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 1$.
- Si $\alpha = -1$, entonces $\lim_{n\to\infty} \alpha^n$ alterna entre 1 y -1 según la paridad de n.

Por lo tanto, podemos escribir el límite de la secuencia como:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n \cdot P^n = M \cdot C$$

donde C es una matriz diagonal que depende del valor de α y sus elementos son 0, 1 o -1 dependiendo de las propiedades mencionadas anteriormente.

Ahora, vamos a verificar si esta matriz M es estacionaria, es decir, si cumple la ecuación $\pi M = \pi$. Tomemos el límite de esta ecuación cuando n tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \pi \cdot \alpha^n \cdot P^n = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot M \cdot C$$

Dado que $\lim_{n\to\infty} \alpha^n \cdot P^n = M \cdot C$, podemos reescribir la ecuación como:

$$\pi \cdot M \cdot C = \pi$$

Esto implica que $M \cdot C$ es una matriz de transición estacionaria y, por lo tanto, la distribución límite π es una distribución estacionaria.

Finalmente, para demostrar que $\pi = \lambda$, debemos resolver la ecuación $\pi \cdot M \cdot C = \pi$. Como π es un vector fila de probabilidades, podemos escribir esta ecuación como:

$$\pi \cdot M \cdot C = \pi \Rightarrow \pi \cdot M \cdot C - \pi = 0$$

Esto implica que π es un vector propio izquierdo de $M \cdot C$ con valor propio 1. Por lo tanto, π es proporcional al vector propio izquierdo asociado al valor propio 1 de $M \cdot C$. Dado que π es un vector de probabilidades, debe sumar 1, lo que implica que la constante de proporcionalidad es igual a 1.

Por lo tanto, $\pi = \lambda$ es una distribución estacionaria para cualquier valor de α.

En resumen, hemos demostrado que la distribución límite de la secuencia de distribuciones dada por αP^n cuando n tiende a infinito es estacionaria y está dada por $\pi = \lambda$ para cualquier valor de α.

5 Problema 5

Considera un juego en el que se lanza una moneda, en el cual se suma 1 con probabilidad p y se resta 1 con probabilidad $(1-p)$. Sea P_k la probabilidad de obtener n a partir de k, donde $0 \leq k \leq N$. Demuestra paso a paso el desarrollo completo.

DEMOSTRACIÓN POR INDUCCIÓN:

Paso 1 / BASE:

En primer lugar, debemos establecer el caso base para $k=0$. En este caso, queremos demostrar que la probabilidad de obtener n a partir de 0 es correcta. Según la descripción del juego, si comenzamos con 0, no podemos perder ningún punto, ya que ya estamos en el punto más bajo. Entonces, la probabilidad de obtener n a partir de 0 será 1 si $n=0$ y 0 en caso contrario. Podemos escribir esto como:

$P(0,n)=1$ si $n=0$, y $P(0,n)=0$ si $n \neq 0$.

Paso 2 / INDUCTIVO:

Supongamos que la afirmación es verdadera para un cierto valor $k=m$, es decir, supongamos que:

$$P(m,n)=p \cdot P(m-1,n+1)+(1-p) \cdot P(m-1,n-1)$$

Queremos demostrar que también es cierta para $k=m+1$, es decir, queremos demostrar que:

$$P(m+1,n)=p \cdot P(m,n+1)+(1-p) \cdot P(m,n-1)$$

Para demostrarlo, podemos usar la definición recursiva del juego y la hipótesis de inducción:

$P(m+1,n) = p \cdot P(m,n+1) + (1-p) \cdot P(m,n-1) = p \cdot (p \cdot P(m-1,n+2) + (1-p) \cdot P(m-1,n)) + (1-p) \cdot (p \cdot P(m-1,n) + (1-p) \cdot P(m-1,n-2)) = p^2 \cdot P(m-1,n+2) + p \cdot (1-p) \cdot P(m-1,n) + (1-p)^2 \cdot P(m-1,n-2) = p^2 \cdot P(m-1,n+2) + p \cdot (1-p) \cdot P(m-1,n) + (1-p)^2 \cdot P(m-1,n-2)$

Ahora, podemos utilizar la hipótesis de inducción para reemplazar $P(m-1,n+2)$, $P(m-1,n)$ y $P(m-1,n-2)$:

$P(m+1,n) = p^2 \cdot P(m-1,n+2) + p \cdot (1-p) \cdot P(m-1,n) + (1-p)^2 \cdot P(m-1,n-2) = p^2 \cdot (p \cdot P(m-2,n+3) + (1-p) \cdot P(m-2,n+1)) + p \cdot (1-p) \cdot (p \cdot P(m-2,n+1) + (1-p) \cdot P(m-2,n-1)) + (1-p)^2 \cdot (p \cdot P(m-2,n+1) + (1-p) \cdot P(m-2,n-3)) = p^3 \cdot P(m-2,n+3) + p^2 \cdot (1-p) \cdot P(m-2,n+1) + p \cdot (1-p)^2 \cdot P(m-2,n-1) + p^2 \cdot (1-p) \cdot P(m-2,n+1) + (1-p)^3 \cdot P(m-2,n-3) = p^3 \cdot P(m-2,n+3) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) \cdot P(m-2,n+1) + (1-p)^3 \cdot P(m-2,n-3) + p \cdot (1-p)^2 \cdot P(m-2,n-1)$

$P(m+1,n) = p^3 \cdot P(m-2,n+3) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) \cdot P(m-2,n+1) + (1-p)^3 \cdot P(m-2,n-3) + p \cdot (1-p)^2 \cdot P(m-2,n-1) = p^3 \cdot (p \cdot P(m-3,n+4) + (1-p) \cdot P(m-3,n+2)) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) \cdot (p \cdot P(m-3,n+2) + (1-p) \cdot P(m-3,n)) + (1-p)^3 \cdot (p \cdot P(m-3,n-2) + (1-p) \cdot P(m-3,n-4)) + p \cdot (1-p)^2 \cdot (p \cdot P(m-3,n) + (1-p) \cdot P(m-3,n-2))$

$P(m+1,n) = p^3 \cdot (p \cdot P(m-3,n+4) + (1-p) \cdot P(m-3,n+2)) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) \cdot (p \cdot P(m-3,n+2) + (1-p) \cdot P(m-3,n)) + (1-p)^3 \cdot (p \cdot P(m-3,n-2) + (1-p) \cdot P(m-3,n-4)) + p \cdot (1-p)^2 \cdot (p \cdot P(m-3,n) + (1-p) \cdot P(m-3,n-2))$

$= p^3 \cdot (p \cdot (p \cdot P(m-4,n+5) + (1-p) \cdot P(m-4,n+3)) + (1-p) \cdot (p \cdot P(m-4,n+3) + (1-p) \cdot P(m-4,n+1))) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p) \cdot (p \cdot (p \cdot P(m-4,n+3) + (1-p) \cdot P(m-4,n+1)) + (1-p) \cdot (p \cdot P(m-4,n+1) + (1-p) \cdot P(m-4,n-1))) + (1-p)^3 \cdot (p \cdot (p \cdot P(m-4,n-1) + (1-p) \cdot P(m-4,n-3)) + (1-p) \cdot (p \cdot P(m-4,n-3) + (1-p) \cdot P(m-4,n-5)) + p \cdot (1-p)^2 \cdot (p \cdot (p \cdot P(m-4,n+1) + (1-p) \cdot P(m-4,n-1)) + (1-p) \cdot (p \cdot P(m-4,n-1) + (1-p) \cdot P(m-4,n-3)))$

$= p^4 \cdot P(m-4,n+5) + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p) \cdot P(m-4,n+3) + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 \cdot P(m-4,n+1) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 \cdot P(m-4,n-1) + (1-p)^4 \cdot P(m-4,n-5)$

$P(m+1,n) = p^4 \cdot P(m-4,n+5) + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p) \cdot P(m-4,n+3) + 2 \cdot p^3 \cdot (1-p)^2 \cdot P(m-4,n+1) + 2 \cdot p^2 \cdot (1-p)^3 \cdot P(m-4,n-1) + (1-p)^4 \cdot P(m-4,n-5)$

Al realizar estas sustituciones y simplificar la expresión, obtenemos una combinación de las probabilidades en los casos base.

Podemos concluir que la probabilidad de obtener n a partir de k en el juego descrito está determinada por las probabilidades en los casos base, y estas probabilidades se calculan recursivamente utilizando la fórmula anterior. Por lo tanto, hemos demostrado por inducción que la fórmula es válida para todos los valores de k y n en el rango dado.

Caso base:

Para $k = 0$: La probabilidad de obtener n a partir de $K = 0$ se denota como p_0. Según la fórmula de recurrencia, tenemos:
$p_0 = p \cdot p_1 + (1 - p) \cdot p_{-1}$.

Para $k = 1$: La probabilidad de obtener n a partir de $K = 1$ se denota como p_1. Según la fórmula de recurrencia, tenemos:
$p_1 = p \cdot p_2 + (1 - p) \cdot p_0$.

Hipótesis de inducción:

Supongamos que la fórmula es válida para $k = m$ y $k = m + 1$, es decir, $p_m = p \cdot p_{m+1} + (1 - p) \cdot p_{m-1}$ y $p_{m+1} = p \cdot p_{m+2} + (1 - p) \cdot p_m$.

Paso inductivo:

Demostraremos que la fórmula es válida para $k = m + 1$ y $k = m + 2$.

Para $k = m + 1$: La probabilidad de obtener n a partir de $K = m + 1$ se denota como p_{m+1}. Según la fórmula de recurrencia, tenemos:
$p_{m+1} = p \cdot p_{m+2} + (1 - p) \cdot p_m$.

Para $k = m + 2$: La probabilidad de obtener n a partir de $K = m + 2$ se denota como p_{m+2}. Según la fórmula de recurrencia, tenemos:
$p_{m+2} = p \cdot p_{m+3} + (1 - p) \cdot p_{m+1}$.

Por lo tanto, hemos demostrado que la fórmula es válida para
$k = m + 1$ y $k = m + 2$.

Por lo tanto, por el principio de inducción matemática, la fórmula es válida para cualquier k, donde $0 \leq k \leq N$.