



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

ESCUELA SUPERIOR DE CÓMPUTO

PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Ensayo sobre Procesos Estocásticos

MARAVILLA PÉREZ VIANEY

June 1, 2023

Contents

1	Probabilidad	3
1.1	Experimento	3
1.2	Eventos	3
1.3	Espacio muestral	4
1.4	Probabilidad condicional	4
1.5	Independencia de eventos	6
1.6	Probabilidad conjunta	6
1.7	Función de densidad de probabilidad	7
1.8	Variable aleatoria	8
2	Distribuciones	9
2.1	Distribución de Bernoulli	9
2.2	Distribución binomial	10
2.3	Distribución geométrica	11
2.4	Distribución de Poisson	12
3	Función de densidad conjunta	13
4	Agujas de Buffon	14
5	Aproximación de π por lanzamiento de dardos	14
6	Ley débil y fuerte de los grandes números	15
7	Desigualdad de Markov	16
8	Distribución Gaussiana (Normal)	17
9	Secuencia congruencial periódica	18
10	Desigualdad de Chebyshev	19
11	Distribución binomial negativa	20
12	Distribución hipergeométrica	21
13	Procesos estocásticos	22
14	Caminata aleatoria	22

15 Cadenas de Markov	23
16 Teorema de Chapman-Kolmogorov	23
17 Distribución estacionaria o final de una cadena de Markov	25
18 Clasificación de estados en una cadena de Markov	26
19 Distribución multinomial	26
20 Procesos de Poisson	27
21 Tiempos de interarribo	28
22 Tasa de ocurrencia	29
23 Procesos compuestos de Poisson	30
24 Ley de la varianza total	31
25 Procesos de Poisson condicionales	32
26 Procesos de nacimiento y muerte	32
27 Función generatriz	33
28 Binomio generalizado de Newton	34

1 Probabilidad

1.1 Experimento

En el ámbito de la probabilidad y la estadística, se utiliza el término "experimento" para referirse a una acción o proceso realizado con el propósito de observar y medir ciertos resultados. Este experimento puede ser un evento físico, como lanzar una moneda, o un evento conceptual, como seleccionar una carta de una baraja. Un experimento se caracteriza por producir resultados inciertos y repetibles, lo que implica que los resultados pueden variar en cada ocasión en que se realiza el experimento.

En la teoría de la probabilidad, los experimentos se consideran repetibles y tienen un conjunto finito de resultados posibles, los cuales se conocen como eventos. Matemáticamente, estos eventos se pueden describir utilizando un conjunto denominado espacio muestral, que incluye todos los posibles resultados del experimento.

1.2 Eventos

En el contexto de la probabilidad, un evento se refiere a un suceso o resultado específico que puede ocurrir durante un experimento. Puede tratarse de un resultado simple, como obtener cara al lanzar una moneda, o de un resultado compuesto, como obtener un número par al lanzar un dado. Los eventos pueden combinarse mediante operaciones como la unión (ocurrencia de al menos uno de los eventos), la intersección (ocurrencia simultánea de dos o más eventos) y la complementación (no ocurrencia de un evento).

Existen diversos tipos de eventos, incluyendo eventos simples, eventos compuestos, eventos mutuamente excluyentes y eventos independientes. Los eventos simples consisten en un único resultado posible, mientras que los eventos compuestos constan de más de un resultado posible. Los eventos mutuamente excluyentes son aquellos que no pueden ocurrir simultáneamente, mientras que los eventos independientes son aquellos cuya ocurrencia o no ocurrencia no afecta la probabilidad de que ocurran otros eventos.

La probabilidad de un evento se puede calcular sumando las probabilidades de los resultados que conforman dicho evento. Esta relación se expresa matemáticamente como:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

donde A es el evento de interés, A_i son los resultados que conforman el evento A y n es el número total de resultados en el espacio muestral.

1.3 Espacio muestral

El espacio muestral es el conjunto que contiene todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Es el conjunto completo y exhaustivo de todos los valores que pueden surgir en el contexto del experimento. Se utiliza como base para definir probabilidades y analizar sistemas estocásticos.

El espacio muestral se representa comúnmente mediante la letra griega omega (ω) y está compuesto por los valores posibles de las variables involucradas en el experimento. Por ejemplo, si se lanza un dado, el espacio muestral estaría formado por los números del 1 al 6.

Es importante tener en cuenta que el espacio muestral debe abarcar todos los resultados posibles y ser inclusivo. Cada resultado posible se representa como un elemento único en el espacio muestral.

La probabilidad de un evento A se calcula utilizando el espacio muestral mediante la regla de Laplace, que establece que la probabilidad de un evento es igual al número de resultados favorables para ese evento dividido por el número total de resultados posibles en el espacio muestral.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Donde $n(A)$ es el número de resultados favorables para el evento A y $n(\Omega)$ es el número total de resultados posibles en el espacio muestral.

1.4 Probabilidad condicional

La probabilidad condicional es una medida de la probabilidad de que ocurra un evento A , dado que se ha producido otro evento B . En otras palabras, si sabemos que el evento B ha ocurrido, la probabilidad condicional describe la probabilidad de que también ocurra el evento A , considerando la información adicional proporcionada por B .

La probabilidad condicional se denota como $P(A|B)$, que se lee como "la probabilidad de A dado que B ha ocurrido". Se puede calcular utilizando la fórmula de la probabilidad condicional:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

donde $P(A \cap B)$ es la probabilidad de que ocurran simultáneamente los eventos A y B , y $P(B)$ es la probabilidad de que ocurra el evento B .

La probabilidad condicional se aplica en muchos campos, como en la teoría de la colas y en la teoría de la información. En la teoría de colas, por ejemplo, la probabilidad condicional se utiliza para analizar el rendimiento de los sistemas de espera, permitiendo la predicción y optimización de la utilización de recursos.

Un ejemplo común de la aplicación de la probabilidad condicional es el cálculo de la probabilidad de tener una enfermedad dado un resultado positivo en una prueba. En este caso, la probabilidad condicional nos permite ajustar la probabilidad inicial de tener la enfermedad en función de los resultados de la prueba, y tomar decisiones informadas acerca del diagnóstico y del tratamiento.

Problema:

En una caja hay 3 bolas rojas, 2 bolas azules y 5 bolas verdes. Se selecciona una bola al azar. Si la bola seleccionada es roja, se añade una bola azul a la caja. Si la bola seleccionada es azul, se añade una bola roja a la caja. Si la bola seleccionada es verde, no se añade ninguna bola a la caja. Después de esta selección y posible adición, se selecciona una segunda bola al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda bola sea azul dado que la primera bola fue roja?

Solución:

1. **Paso 1:** Primero, necesitamos calcular la probabilidad de seleccionar una bola roja en el primer intento. Hay 3 bolas rojas de un total de 10 bolas, por lo que la probabilidad es $\frac{3}{10}$.
2. **Paso 2:** Si seleccionamos una bola roja en el primer intento, añadimos una bola azul a la caja. Por lo tanto, para el segundo intento, hay 3 bolas azules y un total de 11 bolas. La probabilidad de seleccionar una bola azul en el segundo intento, dado que seleccionamos una bola roja en el primer intento, es $\frac{3}{11}$.
3. **Paso 3:** La probabilidad condicional se calcula como el producto de las probabilidades de los dos eventos. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar una bola azul en el segundo intento dado que la primera bola fue roja es $\frac{3}{10} \times \frac{3}{11} = \frac{9}{110}$.

Por lo tanto, la probabilidad de que la segunda bola sea azul dado que la primera bola fue roja es $\frac{9}{110}$.

1.5 Independencia de eventos

La independencia de eventos es un concepto fundamental en probabilidad que se refiere a la relación entre Dos eventos A y B se consideran independientes si la ocurrencia o no ocurrencia de uno de ellos no tiene ningún efecto sobre la probabilidad del otro. En otras palabras, la probabilidad de que ocurra el evento A no se ve afectada por si el evento B ha ocurrido o no, y viceversa.

La independencia de eventos se puede determinar comparando las probabilidades individuales de cada evento con la probabilidad conjunta de ambos eventos. Si la probabilidad conjunta es igual al producto de las probabilidades individuales, entonces los eventos se consideran independientes. Matemáticamente, esto se expresa como:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Si la igualdad se cumple, los eventos A y B son independientes. Si la igualdad no se cumple, los eventos son dependientes.

Es importante destacar que la independencia de eventos no implica necesariamente que los eventos sean mutuamente excluyentes. Dos eventos pueden ser independientes y aún así tener una intersección no vacía, lo que significa que pueden ocurrir simultáneamente.

La independencia de eventos tiene aplicaciones en diversos campos, como la teoría de juegos, el análisis de riesgos y la toma de decisiones. Permite simplificar los cálculos de probabilidad en situaciones donde se asume la independencia, y proporciona una base para el modelado y la predicción de eventos en sistemas complejos.

1.6 Probabilidad conjunta

La probabilidad conjunta se refiere a la medida de la probabilidad de que ocurran simultáneamente dos o más eventos aleatorios. En otras palabras, representa la probabilidad de que múltiples variables aleatorias tomen valores específicos al mismo tiempo.

La probabilidad conjunta, denotada como $P(A \cap B)$, se calcula utilizando la regla del producto de probabilidades. Para dos eventos A y B, la probabilidad conjunta se obtiene multiplicando la probabilidad de que ocurra el evento A por la probabilidad de que ocurra el evento B, dado que el evento A ya ha ocurrido.

Matemáticamente, se expresa como:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Donde $P(A)$ es la probabilidad de que ocurra el evento A, y $P(B|A)$ es la probabilidad de que ocurra el evento B dado que el evento A ha ocurrido.

La probabilidad conjunta es ampliamente utilizada en diversos campos, como la teoría de la información, la estadística y el procesamiento de señales. Permite analizar la relación y dependencia entre diferentes variables aleatorias, y proporciona información importante para la modelización y el análisis de sistemas estocásticos.

Es importante destacar que la probabilidad conjunta satisface propiedades como la no negatividad (las probabilidades son mayores o iguales a cero), la suma total de probabilidades (la suma de todas las probabilidades conjuntas es igual a 1) y la regla del producto de probabilidades (para eventos independientes, la probabilidad conjunta es el producto de las probabilidades individuales).

La probabilidad conjunta proporciona una base fundamental para el estudio de eventos y variables aleatorias en conjunto, y es un concepto clave en el análisis probabilístico y estadístico.

1.7 Función de densidad de probabilidad

La función de densidad de probabilidad es una herramienta fundamental en el análisis probabilístico y estadístico. Se utiliza para describir la distribución de probabilidades de una variable aleatoria continua.

La función de densidad de probabilidad, denotada como $f(x)$, asigna probabilidades a diferentes valores de una variable continua. Indica la probabilidad relativa de que la variable aleatoria tome un valor dentro de un intervalo dado.

La función de densidad de probabilidad satisface las siguientes propiedades:

No negatividad: La función de densidad de probabilidad es siempre no negativa, es decir, $f(x) \geq 0$ para todos los valores de x .

Integral total: La integral de la función de densidad de probabilidad sobre todo el rango de la variable aleatoria es igual a 1, es decir, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

La función de densidad de probabilidad permite calcular la probabilidad de que una variable aleatoria caiga dentro de un intervalo específico mediante la integral de la función de densidad en ese intervalo. Es decir, la probabilidad de que X esté en el intervalo $[a, b]$ se calcula como $\int_a^b f(x)dx$.

Es importante tener en cuenta que la función de densidad de probabilidad solo se aplica a variables aleatorias continuas. Para variables aleatorias discretas, se utiliza la función de masa de probabilidad.

La función de densidad de probabilidad es una herramienta esencial en el análisis de datos, el modelado de fenómenos naturales y sociales, y la toma de decisiones basada en probabilidades. Proporciona información clave sobre la distribución de probabilidades de una variable aleatoria continua y permite realizar cálculos y estimaciones relacionadas con probabilidades y percentiles.

1.8 Variable aleatoria

Una variable aleatoria es un valor numérico que corresponde a un resultado de un experimento aleatorio. Algunos ejemplos son: número de caras obtenidas al lanzar seis veces una moneda, número de llamadas que recibe un teléfono durante una hora, tiempo de fallo de una componente eléctrica, etc. El estudio que haremos en este capítulo será análogo al que llevamos a cabo en el capítulo uno con las variables estadísticas. Así retomaremos el concepto de distribución y las características numéricas, como la media y varianza. El papel que allí jugaba la frecuencia relativa lo juega ahora la probabilidad.

Definición de variable aleatoria. Clasificación. Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio probabilístico. Una función $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una variable aleatoria, transforma los resultados del espacio muestral en números reales. Las variables aleatorias se clasifican en: Discretas: toman un número finito o infinito numerable de valores. Por ejemplo, número de caras obtenidas al lanzar dos monedas. $\Omega = (c, c), (c, +), (+, c), (+, +)$, $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $(c, c) \rightarrow 2$, $(c, +) \rightarrow 1$, $(+, c) \rightarrow 1$, $(+, +) \rightarrow 0$

Variable aleatoria discreta Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espacio probabilístico y X una variable aleatoria discreta (v.a.d) que toma valores x_i $i=1, \dots, n$. Se llama función de probabilidad $p(x)$ a la función que indica la probabilidad de cada posible valor de la v.a.d. X , es decir,

$$p(x_i) = P(X = x_i) = p_i, i$$

X = Número de caras obtenidas es una variable aleatoria que toma valores 0,1,2, y cada uno de ellos lo tomará con una probabilidad. - Continuas: pueden tomar cualquier valor en \mathbb{R} . Por ejemplo, tiempo de fallo de una componente.

Variable aleatoria continua Decíamos que las variables aleatorias continuas (v.a.c.) pueden tomar cualquier valor de la recta real. Generalmente

presentarán muchos valores distintos (cada uno con muy escasa frecuencia o probabilidad), por lo que en este caso carece de sentido hablar de probabilidad en un punto aislado y se toman probabilidades por intervalos.

2 Distribuciones

2.1 Distribución de Bernoulli

La distribución de Bernoulli es una distribución de probabilidad discreta que describe el resultado de un experimento aleatorio que solo puede tener dos resultados posibles: éxito o fracaso.

La distribución de Bernoulli se utiliza para modelar eventos binarios, en los que solo existe la posibilidad de dos resultados mutuamente excluyentes. Por ejemplo, el lanzamiento de una moneda, donde la probabilidad de obtener cara es el éxito y la probabilidad de obtener sello es el fracaso.

La distribución de Bernoulli se denota como $B(p)$, donde p es la probabilidad de éxito. La distribución de Bernoulli tiene dos parámetros: el valor de éxito y el valor de fracaso, que deben ser mutuamente excluyentes y agotadores.

La demostración matemática de la distribución de Bernoulli se basa en la probabilidad de éxito y la probabilidad de fracaso. Si X es una variable aleatoria que representa el resultado de un experimento binario, entonces la distribución de Bernoulli se puede definir matemáticamente como:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{(1-x)}$$

donde x es igual a 0 o 1, lo que representa el fracaso o el éxito respectivamente.

Además, la esperanza de una distribución de Bernoulli se define como el valor esperado de la variable aleatoria, que representa el número esperado de éxitos en una serie de experimentos binarios. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$E(X) = \sum_{i=0}^1 x_i \cdot P(X = x_i) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

donde p es la probabilidad de éxito.

La varianza de una distribución de Bernoulli se define como la media de las diferencias al cuadrado entre los valores de la variable aleatoria y su media. Matemáticamente, puede calcularse así:

$$\text{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = (0 - p)^2 \cdot (1 - p) + (1 - p)^2 \cdot p = p(1 - p)$$

La esperanza y la varianza son medidas estadísticas fundamentales en cualquier análisis de datos y sistemas estocásticos. Estas medidas permiten caracterizar la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, lo que es esencial en el análisis de sistemas complejos y la toma de decisiones informadas en diferentes campos.

2.2 Distribución binomial

La distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de éxitos en un conjunto fijo de experimentos independientes, cada uno de los cuales tiene solo dos posibles resultados: éxito o fracaso.

La distribución binomial se utiliza para modelar situaciones en las que se realizan una serie de experimentos independientes y se desea calcular la probabilidad de obtener un número de éxitos dado.

La distribución binomial se denota como $B(n, p)$, donde n es el número de experimentos y p es la probabilidad de éxito en cada experimento. La distribución binomial tiene dos parámetros: el número total de experimentos y la probabilidad de éxito.

Matemáticamente, la distribución binomial se puede definir como:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

donde X es una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n experimentos independientes, y k representa el número de éxitos. La notación $\binom{n}{k}$ se refiere al coeficiente binomial, que cuenta el número de formas de elegir k elementos de un conjunto de n elementos.

La esperanza en la distribución binomial se refiere al valor esperado del número de éxitos en una serie de experimentos independientes. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$E(X) = np$$

donde X es una variable aleatoria que representa el número de éxitos en n experimentos independientes y p es la probabilidad de éxito en cada experimento.

La varianza en la distribución binomial se refiere a la medida de la dispersión de la variable aleatoria. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$Var(X) = np(1 - p)$$

La esperanza y la varianza en la distribución binomial se utilizan en diversos campos, como la estadística, la ingeniería o la biología, para modelar situaciones en las que se realizan una serie de experimentos independientes y se desea estimar el número de éxitos y su dispersión. Estas medidas son esenciales para la toma de decisiones informadas en sistemas complejos.

2.3 Distribución geométrica

La distribución geométrica es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de ensayos independientes necesarios para obtener el primer éxito en una secuencia de experimentos de Bernoulli.

La distribución geométrica se utiliza para modelar situaciones en las que se realiza un número ilimitado de experimentos independientes y se desea calcular la probabilidad de obtener el primer éxito en un número dado de experimentos.

La distribución geométrica se denota como $Geo(p)$, donde p es la probabilidad de éxito en un solo experimento de Bernoulli. Matemáticamente, la distribución geométrica se puede definir como:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$$

donde X es una variable aleatoria que representa el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito, y k representa el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito.

La esperanza en la distribución geométrica se refiere al valor esperado del número de ensayos independientes necesarios para obtener el primer éxito en una secuencia de experimentos de Bernoulli. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$E(X) = \frac{1}{p}$$

donde X es una variable aleatoria que representa el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito y p es la probabilidad de éxito en un solo experimento de Bernoulli.

La varianza en la distribución geométrica se refiere a la medida de la dispersión de la variable aleatoria. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

La esperanza y la varianza en la distribución geométrica se utilizan en diversos campos, como la estadística, la ingeniería o la economía, para modelar situaciones en las que se realizan ensayos independientes y se desea estimar el número de ensayos necesarios para obtener el primer éxito y su dispersión.

2.4 Distribución de Poisson

La distribución de Poisson es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de eventos en un intervalo de tiempo o espacio dado, cuando los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente, y la tasa promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio es conocida.

La distribución de Poisson se utiliza para modelar situaciones en las que se desea calcular la probabilidad de un número dado de eventos en un intervalo de tiempo o espacio dado, como por ejemplo, el número de llamadas que llegan a un centro de atención en una hora determinada.

La distribución de Poisson se denota como $Pois(\lambda)$, donde λ es la tasa promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio. La tasa promedio se utiliza para describir la intensidad del proceso estocástico subyacente.

La demostración matemática de la distribución de Poisson se basa en la definición matemática de la probabilidad de un número dado de eventos en un intervalo de tiempo o espacio dado, y en la ley de los grandes números, que indica que la probabilidad de un evento en un intervalo de tiempo o espacio dado se aproxima a la tasa promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio a medida que el número de observaciones aumenta.

Matemáticamente, la distribución de Poisson se puede definir como:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

donde X es una variable aleatoria que representa el número de eventos en un intervalo de tiempo o espacio dado, y k representa el número de eventos. La notación $k!$ se refiere al factorial de k .

La esperanza en la distribución de Poisson se refiere al valor esperado del número de eventos en un intervalo de tiempo o espacio dado, cuando

los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente, y la tasa promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio es conocida. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$E(X) = \lambda$$

donde X es una variable aleatoria que representa el número de eventos en un intervalo de tiempo o espacio dado y λ es la tasa promedio de eventos por unidad de tiempo o espacio.

La varianza en la distribución de Poisson se refiere a la medida de la dispersión de la variable aleatoria. Matemáticamente, se puede calcular así:

$$Var(X) = \lambda$$

Su aplicación es esencial para la toma de decisiones informadas en diversos campos, y su precisión en el cálculo es crucial para la comprensión de fenómenos naturales y sociales.

3 Función de densidad conjunta

La función de densidad conjunta es una función matemática que describe la distribución de probabilidad conjunta de dos o más variables aleatorias. Se utiliza para comprender la relación probabilística entre dos o más variables aleatorias y para analizar la dependencia o independencia estadística entre ellas.

La demostración matemática de la función de densidad conjunta se basa en la definición matemática de una función de densidad de probabilidad y en la caracterización de la distribución de probabilidad conjunta de dos o más variables aleatorias.

Matemáticamente, la función de densidad conjunta se puede escribir como $f_{X,Y}(x,y)$, donde X e Y son dos variables aleatorias y x e y son valores en sus respectivos rangos.

La función de densidad conjunta se utiliza en diversos campos, como la estadística, la física o la ingeniería, para modelar la relación probabilística entre diferentes variables aleatorias y para diseñar modelos matemáticos que puedan explicar y predecir el comportamiento de sistemas complejos.

4 Agujas de Buffon

El experimento de las agujas de Buffon es un famoso experimento diseñado para estimar el valor de π , la constante matemática que representa la relación entre la circunferencia y el diámetro de un círculo. Este experimento es una aplicación de la teoría de probabilidad y los procesos estocásticos.

El experimento consiste en lanzar una aguja de longitud l sobre un piso dividido en tiras paralelas mediante líneas rectas separadas por una distancia d mayor que la longitud de la aguja. Se registra si la aguja cruza alguna de las líneas de la tira en la que cayó. Si x es el número de veces que la aguja cruza una línea en n lanzamientos, entonces se puede utilizar la tasa de éxito $p = x/n$ para estimar el valor de π , utilizando la siguiente fórmula:

$$\pi \approx \frac{2ln}{px}$$

Si se traza una línea de origen en el centro de una circunferencia de radio r , la probabilidad de que una aguja de longitud l lanzada sobre la circunferencia toque una línea perpendicular que pase por el origen es

$$p = \frac{2l}{\pi r}$$

5 Aproximación de π por lanzamiento de dardos

El método de la aproximación de π por lanzamiento de dardos es un interesante procedimiento que también se basa en la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, de una manera análoga al experimento de las agujas de Buffon.

Este método se basa en la geometría y la proporción de áreas. Se considera un cuadrado de lado 2 y dentro de este, un círculo de radio 1 cuyo centro coincide con el centro del cuadrado. Luego se lanzan n dardos al azar dentro del cuadrado, y se cuentan cuántos de estos dardos caen dentro del círculo, denominaremos a esta cantidad *hits*.

Dado que la relación entre las áreas del círculo y el cuadrado es $\pi/4$, se puede usar la tasa de éxito, $p = hits/n$ para estimar el valor de π , utilizando la fórmula:

$$\pi \approx \frac{4hits}{n}$$

Al ejecutar este código, se obtiene una salida similar a: "El valor estimado de π es: 3.1548". Observe que, debido a la naturaleza aleatoria de este método, cada ejecución del código proporcionará una estimación ligeramente diferente de π .

6 Ley débil y fuerte de los grandes números

Si X es una variable aleatoria con función de densidad de probabilidad $f()$ entonces:

$$P(x \geq a) < \frac{E(x)}{a} \quad (a < 0)$$

Prueba:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^a xf(x)dx + \int_a^{\infty} xf(x)dx$$

Si la integral evaluada de infinito a a es positivo, se lo restamos a la otra integral

$$\int_a^{\infty} xf(x)dx \leq E[x]$$

En la integral se cumple que a es menor que x , si se integra, queda:

$$a \int_a^{\infty} xf(x)dx \leq \int_a^{\infty} xf(x)dx \leq E[x]$$

Esto es lo mismo que verlo como si multiplicáramos a por la función

$$\int_a^{\infty} af(x) \leq \int_a^{\infty} xf(x)dv$$

Las leyes débil y fuerte de los grandes números son dos teoremas importantes en la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos que establecen la relación entre la media muestral y la media de la población. Estas leyes se utilizan para describir la convergencia de la media muestral a la media de la población cuando el tamaño de la muestra se incrementa.

La ley débil de los grandes números establece que, si X_1, X_2, \dots, X_n son una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza finita σ^2 , entonces para cualquier número real $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \epsilon) = 0$$

donde \bar{X}_n es la media muestral, es decir,

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

La demostración matemática de la ley débil de los grandes números se basa en diversos conceptos matemáticos, como la desigualdad de Chebyshev y la ley de los grandes números clásica.

Por otro lado, la ley fuerte de los grandes números establece que, si X_1, X_2, \dots, X_n son una muestra aleatoria de una población con media μ y varianza finita σ^2 , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu$$

con probabilidad 1. Es decir, la media muestral converge a la media de la población casi seguramente.

La demostración matemática de la ley fuerte de los grandes números se basa en diversos conceptos matemáticos, como las desigualdades de Borel-Cantelli y la función generatriz de momentos.

La ley débil y fuerte de los grandes números se utilizan en diversos campos, como la estadística, la física, la ingeniería o la biología, para establecer límites en los errores y la precisión de la estimación de la media y la varianza de la población.

7 Desigualdad de Markov

La desigualdad de Markov es una desigualdad importante que relaciona la probabilidad de un evento con la media de una variable aleatoria no negativa.

La desigualdad de Markov establece que, para cualquier variable aleatoria no negativa X y cualquier número real positivo a , se cumple la siguiente desigualdad:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

donde $E(X)$ es la media de la variable aleatoria X . Esta desigualdad se puede interpretar como que la probabilidad de un evento poco probable (es decir, que $X \geq a$) es menor o igual a la fracción de veces que el valor de X excede a , comprobado con el cociente de la media de X y a .

La demostración matemática de la desigualdad de Markov se basa en la definición de la media de una variable aleatoria no negativa y la definición matemática de la probabilidad. Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces su media se calcula como:

$$E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx$$

Donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de X .

A partir de esta definición, se puede demostrar la desigualdad de Markov utilizando la propiedad de monotonía de la integral.

La desigualdad de Markov se utiliza en diversos campos, como la estadística, la ingeniería, la economía o la biología, para establecer límites en la probabilidad de un evento dado el valor medio de la variable aleatoria.

8 Distribución Gaussiana (Normal)

La distribución Gaussiana, también conocida como distribución normal, es una de las distribuciones de probabilidad más importantes en la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos. Esta distribución se utiliza para modelar variables aleatorias que se distribuyen alrededor de una media central.

En la distribución Gaussiana, la media y la varianza de la variable aleatoria son dos parámetros importantes que describen su forma. Matemáticamente, la función de densidad de probabilidad de la distribución Gaussiana se puede expresar como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

donde x es la variable aleatoria, μ es la media, σ es la desviación estándar y e es la constante de Euler, que se aproxima a 2.71828.

La demostración matemática de la distribución Gaussiana se basa en diversos conceptos matemáticos, como la función exponencial y la integral de Riemann-Stieltjes. A partir de la definición de la media y la varianza de la variable aleatoria, se puede demostrar que la distribución se ajusta a esta forma específica.

La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria X se define como:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

donde $f(x)$ es la función de densidad de probabilidad de la distribución Gaussiana y x es la variable aleatoria. Para la distribución Gaussiana, la esperanza se simplifica y se puede demostrar que es igual a la media de la distribución:

$$E(X) = \mu$$

Por otro lado, la varianza de una variable aleatoria X se define como:

$$Var(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Para la distribución Gaussiana, la varianza se puede demostrar que es igual al cuadrado de la desviación estándar de la distribución:

$$Var(X) = \sigma^2$$

donde σ es la desviación estándar de la distribución.

9 Secuencia congruencial periódica

La generación de números aleatorios uniformemente distribuidos es una herramienta importante para la simulación de sistemas estocásticos. Una secuencia congruencial periódica es uno de los métodos clásicos para generar números aleatorios que se distribuyen uniformemente entre 0 y 1.

Este método se basa en una fórmula matemática recursiva que genera una secuencia infinita de números aleatorios. Matemáticamente, la fórmula se expresa como:

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \mod m$$

donde X_n es el número aleatorio n -ésimo, a es un multiplicador, c es una constante y m es el módulo. Esta fórmula produce una secuencia de números aleatorios entre 0 y $m - 1$. Para modificar esta secuencia y obtener números aleatorios entre 0 y 1, se divide cada número en la secuencia por m .

La elección de los valores de a , c y m es importante para garantizar la aleatoriedad y uniformidad de la secuencia generada. Además, la elección del valor inicial X_0 también afecta a la aleatoriedad de la secuencia.

10 Desigualdad de Chebyshev

La desigualdad de Chebyshev es un teorema importante en la teoría de la probabilidad y los procesos estocásticos que establece una relación entre la varianza de una variable aleatoria y su probabilidad. Esta desigualdad se utiliza para establecer límites en la dispersión de una variable aleatoria y es esencial para el análisis de sistemas complejos.

La desigualdad de Chebyshev establece que, para cualquier variable aleatoria X con media μ y varianza finita σ^2 , y para cualquier número real $k > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Es decir, la probabilidad de que la variable aleatoria X se desvíe del valor medio en más de k veces la desviación estándar es menor o igual a la inversa del cuadrado de k .

La demostración matemática de la desigualdad de Chebyshev se basa en diversos conceptos matemáticos, como la desigualdad de Markov y la aplicación de la desigualdad de Chebyshev a la variable aleatoria $(X - \mu)^2$.

La desigualdad de Chebyshev se utiliza en diversos campos, como la estadística, la física, la ingeniería o la biología, para establecer límites en la dispersión de una variable aleatoria y para garantizar la precisión en las estimaciones de la media y la varianza de una población.

Problema:

Supongamos que se conoce que el tiempo de vida de una batería tiene una media de 500 horas y una desviación estándar de 100 horas. Según la desigualdad de Chebyshev, ¿qué porcentaje mínimo de las baterías durará entre 300 y 700 horas?

Solución:

La desigualdad de Chebyshev establece que la proporción de valores que caen dentro de k desviaciones estándar de la media es al menos $1 - \frac{1}{k^2}$ para cualquier $k > 1$.

En este caso, queremos encontrar el porcentaje mínimo de baterías que durarán entre 300 y 700 horas. Esto es equivalente a encontrar el porcentaje mínimo de baterías que durarán dentro de 2 desviaciones estándar de la media ($500 \pm 2 \cdot 100 = 300$ a 700).

Por lo tanto, podemos aplicar la desigualdad de Chebyshev con $k = 2$:

$$1 - \frac{1}{k^2} = 1 - \frac{1}{2^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

Por lo tanto, según la desigualdad de Chebyshev, al menos el 75% de las baterías durará entre 300 y 700 horas.

11 Distribución binomial negativa

La distribución binomial negativa es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de ensayos independientes que son necesarios para obtener un número fijo de éxitos en una secuencia de ensayos. Esta distribución se utiliza en diversos campos, como la estadística, la física, la ingeniería o la biología, para modelar fenómenos en los que se requiere un número fijo de éxitos antes de detener el experimento.

Matemáticamente, la distribución binomial negativa se expresa como:

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} p^k q^r$$

donde k es el número de ensayos exitosos, r es el número fijo de éxitos, p es la probabilidad de éxito en un ensayo y $q = 1 - p$ es la probabilidad de fracaso en un ensayo.

La demostración matemática de la función de masa de probabilidad de la distribución binomial negativa se basa en conceptos matemáticos como la regla del producto, la regla del complemento y la combinatoria.

La aplicación de la distribución binomial negativa es esencial en diversos campos, como la ingeniería, la biología, la epidemiología, entre otras disciplinas. Por ejemplo, en la industria farmacéutica, la distribución binomial negativa se utiliza para modelar el número de pruebas necesarias para aprobar un nuevo medicamento.

La esperanza de la distribución binomial negativa se puede calcular matemáticamente como:

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

donde r es el número fijo de éxitos y p es la probabilidad de éxito en un ensayo.

La varianza de la distribución binomial negativa se puede calcular matemáticamente como:

$$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

Estas medidas son esenciales en el análisis de la distribución binomial negativa ya que permiten establecer límites en la precisión de la estimación del número de ensayos necesarios antes de obtener el número fijo de éxitos.

12 Distribución hipergeométrica

La distribución hipergeométrica es una distribución de probabilidad discreta que modela el número de elementos exitosos en una muestra extraída sin reemplazo de una población finita con un número fijo de elementos exitosos y no exitosos. Esta distribución se utiliza en diversas aplicaciones, como en la biología, la estadística, la demografía, la ingeniería, entre otras.

La distribución hipergeométrica se expresa matemáticamente como:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

donde N es el tamaño de la población, K es el número total de elementos exitosos de la población, n es el tamaño de la muestra y k es el número de elementos exitosos en la muestra.

La esperanza de la distribución hipergeométrica se puede calcular matemáticamente como:

$$E(X) = \frac{nK}{N}$$

donde n es el tamaño de la muestra, K es el número total de elementos exitosos en la población y N es el tamaño de la población.

La varianza de la distribución hipergeométrica se puede calcular matemáticamente como:

$$Var(X) = n \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N} \right) \frac{N-n}{N-1}$$

Estas medidas son esenciales en el análisis de la distribución hipergeométrica para establecer límites en los errores y la precisión de la estimación en las aplicaciones en las que se utiliza, como la evaluación de controles de calidad o el muestreo sin reemplazo.

13 Procesos estocásticos

Matemáticamente, un proceso estocástico se expresa como una secuencia de variables aleatorias que evolucionan en el tiempo. Estas variables pueden ser discretas o continuas, y su evolución se modela mediante una función de distribución de probabilidad condicional.

Existen diferentes tipos de procesos estocásticos, como los procesos de Markov, los procesos de Poisson y los procesos de renovación, entre otros. El proceso de Markov es uno de los procesos estocásticos más comunes y se caracteriza por la propiedad de Markov, que establece que la probabilidad condicional de la variable aleatoria en un tiempo futuro depende solo del valor actual y no de los valores anteriores.

La demostración matemática de un proceso estocástico implica la demostración de la definición matemática del proceso y la aplicación de conceptos de probabilidad y estadística.

Los procesos estocásticos tienen diversas aplicaciones en diferentes campos. Por ejemplo, en la física, se pueden utilizar procesos estocásticos para modelar la evolución de sistemas físicos, como el movimiento browniano. En la ingeniería, se pueden utilizar para modelar la fiabilidad de sistemas y la planificación de mantenimiento. En la economía, se pueden utilizar para modelar el comportamiento de los mercados financieros.

14 Caminata aleatoria

La caminata aleatoria, es un proceso estocástico que se utiliza para modelar el movimiento aleatorio de partículas en diferentes medios, como puede ser el movimiento de partículas suspendidas en un gas o fluido. Este proceso estocástico también es utilizado en otras aplicaciones, como en la física, la química y la economía.

En la caminata aleatoria, la posición de una partícula en cada momento se modela como una variable aleatoria, y su movimiento se describe mediante una distribución de probabilidad condicional. En este proceso, una partícula se mueve de manera aleatoria en diferentes direcciones, lo que genera un patrón de movimiento que parece aleatorio.

La demostración matemática de la caminata aleatoria se basa en la aplicación de conceptos de probabilidad y estadística, como la ley de los grandes números y la distribución normal.

La caminata aleatoria tiene diversas aplicaciones en diferentes campos. Por ejemplo, en la física se utiliza para modelar el movimiento de partículas

suspendidas en fluidos, y en la química se utiliza para modelar la difusión de moléculas en solventes. En la economía, se utiliza para modelar el comportamiento de los precios en los mercados financieros.

15 Cadenas de Markov

Las cadenas de Markov son un tipo de proceso estocástico en el que la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor determinado en un momento dado solo depende del valor que tomó en el momento anterior. Este tipo de proceso estocástico se utiliza para modelar sistemas en los que existe cierta dependencia temporal entre los eventos.

Matemáticamente, una cadena de Markov se define como una secuencia de variables aleatorias $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ con un conjunto finito o infinito de estados, que cumple con la propiedad de Markov. Esto es, la probabilidad condicional de que la variable aleatoria X_n tome un valor dado, dado el valor que tomó en el momento anterior X_{n-1} , depende solo del valor de X_{n-1} .

La demostración matemática de las cadenas de Markov se basa en la demostración de la propiedad de Markov y la aplicación de técnicas de probabilidad como la ley de probabilidad total y la regla del producto.

Las cadenas de Markov tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la biología, la física, la economía y la informática. Por ejemplo, en la ingeniería, se pueden utilizar para modelar la evolución del tráfico en una ciudad y la eficiencia de los sistemas de transporte. En la biología, se pueden utilizar para modelar la evolución de las poblaciones y la diseminación de enfermedades. En la informática, se pueden utilizar para la creación de algoritmos de aprendizaje automático y de inteligencia artificial.

16 Teorema de Chapman-Kolmogorov

El teorema de Chapman-Kolmogorov es un resultado teórico importante en el ámbito de las cadenas de Markov que permite la construcción de la probabilidad de transición de una cadena de Markov utilizando probabilidades condicionales parciales. Este teorema se utiliza para calcular la probabilidad de que un sistema transite de un estado a otro en un instante de tiempo determinado.

El teorema de Chapman-Kolmogorov tiene diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la ciencia de datos, la física, la biología y la economía.

Ecuación de Chapman - Kolmogorov

Sea X_n una cadena de Markov con probabilidades de transición P_{ij}

Proposición:

Para cualquier par de tiempos r y n tales que $0 \leq r \leq n$,

$$P_{ij}(n) = \sum_k P_{ik}(r) P_{kj}(n-r)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} P_{ij}(n) &= P(X_n = j | X_0 = i) \\ &= P(X_n = j, X_0 = i) / P(X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j, X_r = k, X_0 = i) / P(X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k, X_0 = i) P(X_r = k, X_0 = i) / P(X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_r = k) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P(X_{n-r} = j | X_0 = k) P(X_r = k | X_0 = i) \\ &= \sum_k P_{ik}(r) P_{kj}(n-r) \end{aligned}$$

Como consecuencia de la ecuación de Chapman - Kolmogorov tenemos el siguiente resultado

Proposición: Si P es la matriz de probabilidades de transición en un paso,

$$P_{ij}(n) = (P^n)_{ij}$$

Demostración: Inducción sobre n

Para $n = 1$, $P_{ij}(1) = (P)_{ij}$

Supongamos que la identidad se cumple para $n = m$,

$$ie. P_{ij}(m) = (P^m)_{ij}.$$

Entonces

$$P_{ij}(m+1) = \sum_k P_{ik}(1) P_{kj}(m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k P_{ik}(1)(P^m)_{kj} \\
&= (P * P^m)_{ij} \\
&= (P^{m+1})_{ij}
\end{aligned}$$

17 Distribución estacionaria o final de una cadena de Markov

La distribución estacionaria o final de una cadena de Markov es una distribución de probabilidad que describe la probabilidad de que una cadena de Markov se encuentre en cada uno de sus estados después de un tiempo infinito, una vez que ha alcanzado un equilibrio en su evolución. Esta distribución se utiliza para analizar el comportamiento a largo plazo de la cadena de Markov.

Matemáticamente, la distribución estacionaria se puede encontrar haciendo la ecuación de balance para la cadena de Markov, es decir, igualando las entradas y las salidas de probabilidad en un estado de la cadena, y luego resolviendo las ecuaciones resultantes. Si la cadena de Markov es irreducible, positiva recurrente y aperiódica, entonces existe una distribución estacionaria única.

La demostración matemática de la distribución estacionaria se basa en la definición de la propiedad de Markov, la ley de probabilidad total y la ley de los grandes números.

La distribución estacionaria tiene diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la física, la biología, la economía y la informática. Por ejemplo, en la ingeniería, se utiliza para modelar la capacidad y la utilización de equipos y recursos. En la física, se utiliza para modelar sistemas de partículas que se encuentran en equilibrio térmico. En la biología, se utiliza para modelar la distribución de diversas especies en un ecosistema.

Este sistema de ecuaciones lineales puede ser resuelto usando métodos numéricos o simbólicos. La solución dará los valores de π_1 , π_2 , y π_3 que representan la distribución estacionaria de la cadena de Markov.

18 Clasificación de estados en una cadena de Markov

La clasificación de estados en una cadena de Markov es un proceso que se utiliza para determinar las propiedades de los diferentes estados en los que se puede encontrar una cadena de Markov. Esta clasificación se basa en las propiedades de la cadena, como su accesibilidad y su estabilidad, y es útil para identificar qué estados tienen una importancia significativa en el análisis de la cadena de Markov.

Existen tres tipos de estados para clasificar una cadena de Markov: estados transitorios, estados recurrentes y estados absorbentes. Los estados transitorios son aquellos en los que la cadena de Markov solo puede pasar temporalmente y nunca volver. Los estados recurrentes son aquellos en los que la cadena de Markov puede quedarse para siempre y volver varias veces. Finalmente, los estados absorbentes son aquellos en los que la cadena de Markov siempre debe quedarse.

La demostración matemática de la clasificación de estados se basa en la definición de las propiedades de la cadena de Markov, así como en la aplicación de técnicas matemáticas como la matriz de transición.

La clasificación de estados tiene diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la física, la biología, la economía y la informática. Por ejemplo, en la ingeniería, se utiliza para modelar la fiabilidad y el rendimiento de sistemas complejos. En la física, se utiliza para modelar sistemas de partículas y su evolución a lo largo del tiempo. En la biología, se utiliza para modelar la dinámica de poblaciones y la propagación de enfermedades.

19 Distribución multinomial

La distribución multinomial es una distribución de probabilidad discreta que describe el número de ocurrencias de múltiples eventos en una serie de ensayos independientes y repetidos. Es una generalización de la distribución binomial para más de dos resultados posibles. Esta distribución se utiliza para modelar situaciones en las que se tienen múltiples categorías para un evento.

Matemáticamente, si se tienen n ensayos independientes y repetidos, y se desea conocer la probabilidad de obtener x_1, x_2, \dots, x_k ocurrencias en las k categorías, se representa como:

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! x_2! \dots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_k^{x_k}$$

donde x_1, x_2, \dots, x_k satisfacen la restricción $\sum_{i=1}^k x_i = n$ y p_1, p_2, \dots, p_k son las probabilidades de éxito en cada una de las k categorías.

La demostración matemática de la distribución multinomial se basa en la definición de la probabilidad condicional y la aplicación de la regla del producto.

La distribución multinomial tiene diversas aplicaciones en diferentes campos, como la estadística, la biología, la física, la economía y la informática. Por ejemplo, en la estadística, se utiliza para modelar la distribución de diferentes resultados en un experimento de muestreo. En la biología, se utiliza para modelar las distribuciones de diferentes tipos de células en una población.

Matemáticamente, la esperanza de la distribución multinomial se calcula como:

$$E(x_i) = np_i$$

donde n es el número total de ensayos e p_i es la probabilidad de éxito en la categoría i .

Por otro lado, la varianza de la distribución multinomial se calcula como:

$$Var(x_i) = np_i(1 - p_i)$$

La demostración matemática de la esperanza y la varianza de la distribución multinomial se basa en la definición matemática de la esperanza y la varianza, la ley de los grandes números y la expansión binomial.

20 Procesos de Poisson

Los procesos de Poisson son procesos estocásticos que modelan el número de ocurrencias de eventos raros en un periodo de tiempo o en un intervalo de espacio. Estos procesos se utilizan en situaciones en las que los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente, y su tasa promedio de ocurrencia es constante.

Matemáticamente, un proceso de Poisson se puede definir como un proceso estocástico que satisface las siguientes propiedades:

- El número de eventos en cualquier intervalo es independiente del número de eventos en cualquier otro intervalo no superpuesto.
- La probabilidad de que ocurra un evento en un intervalo es proporcional al tamaño del intervalo.
- La probabilidad de que dos o más eventos ocurran en un intervalo pequeño es despreciable.

La distribución de probabilidad para un proceso de Poisson se define como:

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

donde X es el número de ocurrencias de eventos en un intervalo, λ es la tasa promedio de ocurrencia de eventos y $k = 0, 1, 2, \dots$

La demostración matemática de la distribución de Poisson se basa en la definición de la probabilidad de un evento raro, la distribución de Poisson se aproxima a la distribución binomial cuando la probabilidad de éxito es pequeña, y la expansión de la serie de Taylor.

Los procesos de Poisson tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la física, la biología, la economía y la informática. Por ejemplo, en la ingeniería, se utilizan para modelar la llegada de solicitudes en una red de computadoras. En la física, se utilizan para modelar la emisión de fotones por átomos radiactivos. En la biología, se utilizan para modelar los tiempos de llegada de átomos de carbono-14. En la economía, se utilizan para modelar la llegada de clientes en un restaurante. En la informática, se utilizan para modelar el tráfico de datos en una red de comunicaciones.

21 Tiempos de interarribo

Los tiempos de interarribo son una medida estadística que se utiliza en procesos estocásticos para modelar el tiempo que transcurre entre la ocurrencia de dos eventos consecutivos. Estos tiempos se utilizan para modelar situaciones en las que los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente.

Matemáticamente, si se tienen n ocurrencias de eventos consecutivos en un periodo de tiempo t , los tiempos de interarribo se definen como:

$$T_i = X_i - X_{i-1}$$

donde X_i es el tiempo de ocurrencia del evento i .

La distribución de probabilidad de los tiempos de interarribo depende de la distribución de probabilidad de los tiempos de llegada. En el caso de los procesos de Poisson, la distribución de probabilidad de los tiempos de interarribo se puede expresar como una distribución exponencial:

$$P(T > t) = e^{-\lambda t}$$

donde t es el tiempo transcurrido desde la última ocurrencia de un evento y λ es la tasa promedio de ocurrencia de eventos.

La demostración matemática de la distribución exponencial se basa en la definición de los tiempos de interarribo, la distribución de Poisson y la propiedad de la falta de memoria de la distribución exponencial.

Los tiempos de interarribo tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la física, la biología, la economía y la informática. Por ejemplo, en la ingeniería, se utilizan para modelar el tiempo entre las fallas de un componente en un sistema de producción. En la física, se utilizan para modelar el tiempo entre las emisiones de fotones por átomos radiactivos. En la biología, se utilizan para modelar los tiempos de división celular en una población de células. En la economía, se utilizan para modelar el tiempo entre dos transacciones consecutivas en un mercado financiero. En la informática, se utilizan para modelar el tiempo entre dos solicitudes consecutivas en una red de computadoras.

22 Tasa de ocurrencia

La tasa de ocurrencia se refiere a la cantidad promedio de eventos que ocurren por unidad de tiempo en un proceso estocástico. Esta medida estadística es importante en procesos estocásticos para caracterizar la frecuencia de ocurrencia de eventos y para realizar predicciones y análisis de riesgo.

Matemáticamente, la tasa de ocurrencia se puede calcular como:

$$\lambda = \frac{E[N]}{T}$$

donde $E[N]$ es el número esperado de ocurrencias de eventos en un periodo de tiempo T .

Esta tasa de ocurrencia se utiliza en diferentes distribuciones de probabilidad, como la distribución de Poisson y la distribución exponencial, para modelar la frecuencia de ocurrencia de eventos.

La demostración matemática de la tasa de ocurrencia se basa en la definición matemática de la tasa y en la definición de la esperanza.

La tasa de ocurrencia tiene diversas aplicaciones en diferentes campos, como la ingeniería, la física, la biología, la economía y la informática. Por ejemplo, en la ingeniería, se utiliza para modelar la tasa de fallos en un sistema y para realizar predicciones de mantenimiento preventivo. En la física, se utiliza para modelar la tasa de emisión de partículas por un material radiactivo. En la biología, se utiliza para modelar la tasa de nacimientos y muertes en una población. En la economía, se utiliza para modelar la tasa de ventas y compras en un mercado financiero. En la informática, se utiliza para modelar la tasa de transacciones en un sistema distribuido.

23 Procesos compuestos de Poisson

Los procesos compuestos de Poisson son procesos estocásticos que combinan la distribución de Poisson con otra distribución de probabilidad continua o discreta para modelar eventos raros que tienen una magnitud o impacto aleatorio. Estos procesos se utilizan en situaciones en las que los eventos ocurren de manera aleatoria e independiente, pero su magnitud o impacto no es constante.

Matemáticamente, si se tienen n ocurrencias de eventos consecutivos en un periodo de tiempo t , el valor total del impacto de los eventos se puede definir como:

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

donde Y_i es una variable aleatoria que describe el impacto del evento i .

La distribución de probabilidad de los procesos compuestos de Poisson se puede calcular mediante la convolución de la distribución de Poisson y la distribución de probabilidad del impacto de los eventos. Por ejemplo, si el impacto de los eventos se describe mediante una distribución exponencial, la distribución de probabilidad del proceso compuesto de Poisson sería:

$$P(S_n = k) = \sum_{j=0}^k e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-j}}{(n-j)!} \frac{\beta^j}{j!} e^{-\beta}$$

donde k es el valor total del impacto, λ es la tasa promedio de ocurrencia de eventos, β es el parámetro de la distribución de probabilidad del

impacto y $n = 0, 1, 2, \dots$

La demostración matemática de la distribución de los procesos compuestos de Poisson se basa en la definición de los procesos compuestos de Poisson, la ley de los grandes números y la convolución de las distribuciones de probabilidad.

Los procesos compuestos de Poisson tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, como la economía, la ingeniería, la física y la informática. Por ejemplo, en la economía, se utilizan para modelar el impacto de eventos en los mercados financieros. En la ingeniería, se utilizan para modelar el impacto de las fallas en un sistema. En la física, se utilizan para modelar el impacto de las partículas radiactivas en un detector de partículas. En la informática, se utilizan para modelar el impacto de las interrupciones en un sistema distribuido.

24 Ley de la varianza total

La ley de la varianza total es un teorema estadístico que se utiliza en procesos estocásticos para descomponer la varianza de una variable aleatoria en componentes que corresponden a diferentes fuentes de variación. Esta descomposición es útil para analizar y entender la influencia de diferentes factores en la varianza de la variable aleatoria.

Matemáticamente, la ley de la varianza total se puede expresar como:

$$\text{Var}(Y) = E[\text{Var}(Y|X)] + \text{Var}(E[Y|X])$$

donde Y es una variable aleatoria, X es una variable aleatoria relacionada con Y y E y Var representan la esperanza y la varianza de una variable aleatoria respectivamente.

La ley de la varianza total se aplica en diferentes contextos de procesos estocásticos. Por ejemplo, en el análisis de procesos de regresión, se utiliza para descomponer la varianza del error en la regresión en una componente debida a la variabilidad del modelo y otra componente debida a la variabilidad no explicada por el modelo. En el análisis de series de tiempo, se utiliza para descomponer la varianza de una serie de tiempo en una componente debida a la tendencia y otra componente debida a la variabilidad aleatoria.

La demostración matemática de la ley de la varianza total se basa en la definición de la esperanza y la varianza condicionales, la ley de la esperanza total y la propiedad de la varianza de una suma de variables aleatorias.

25 Procesos de Poisson condicionales

Los procesos de Poisson condicionales son procesos estocásticos que se utilizan para modelar la probabilidad de ocurrencia de eventos en un subconjunto de un tiempo dado que se han producido eventos en un subconjunto diferente. Estos procesos se utilizan cuando se requiere modelar la ocurrencia de eventos de manera dependiente.

Matemáticamente, si se tienen n ocurrencias de eventos consecutivos en un periodo de tiempo t , la probabilidad de que ocurran m eventos en un subintervalo de longitud s dado que ya han ocurrido k eventos en un subintervalo de longitud r se puede expresar como:

$$P(N^{(s)} = m | N^{(r)} = k) = \frac{\binom{n-k}{m} \binom{k}{n-m}}{\binom{n}{k}}$$

donde $N^{(s)}$ y $N^{(r)}$ son las variables aleatorias que describen el número de eventos en los subintervalos de longitud s y r respectivamente, y $\binom{n}{m}$ denota el número de combinaciones posibles de elegir m elementos de un conjunto de n elementos.

La demostración matemática de los procesos de Poisson condicionales se basa en la definición de los procesos de Poisson, la definición de la distribución binomial y las propiedades de la probabilidad condicional y la independencia.

Los procesos de Poisson condicionales tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, como la biología, la economía y la ingeniería. Por ejemplo, en la biología, se utilizan para modelar la propagación de enfermedades en una población en diferentes regiones geográficas. En la economía, se utilizan para modelar la propagación de riesgos en diferentes industrias. En la ingeniería, se utilizan para modelar la propagación de fallas en diferentes componentes de un sistema.

26 Procesos de nacimiento y muerte

Los procesos de nacimiento y muerte son procesos estocásticos que se utilizan para modelar la evolución de un sistema en el que hay un número finito de estados posibles y una tasa constante de nacimientos y muertes. Estos procesos se utilizan en situaciones en las que se puede modelar el proceso de transición de un estado a otro a través de una tasa constante de nacimientos y muertes.

Matemáticamente, si $X(t)$ es el estado del sistema en el tiempo t , las tasas de nacimiento y muerte se pueden denotar como λ_i y μ_i respectivamente, y se cumple que:

- Si $X(t) = i$, la tasa de nacimiento es λ_i y la tasa de muerte es μ_i . - Si $X(t) = 0$, la tasa de nacimiento es λ_0 y no hay muertes posibles. - Si $X(t) = n$, la tasa de muerte es μ_n y no hay nacimientos posibles.

La distribución estacionaria de los procesos de nacimiento y muerte se puede calcular mediante el uso de las ecuaciones diferenciales de balance y la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

La demostración matemática de la distribución estacionaria se basa en el equilibrio de las tasas de nacimiento y muerte para cada estado.

Los procesos de nacimiento y muerte tienen diversas aplicaciones en diferentes campos, como la biología, la economía, la física y la informática. Por ejemplo, en la biología, se utilizan para modelar el tamaño de una población en la que hay una tasa constante de nacimientos y muertes. En la economía, se utilizan para modelar la demanda de bienes y servicios en un mercado en el que hay una tasa constante de producción y consumo. En la física, se utilizan para modelar el movimiento de las partículas en un sistema termodinámico en equilibrio. En la informática, se utilizan en algoritmos de enrutamiento de red.

27 Función generatriz

La función generadora es una herramienta fundamental en la teoría de procesos estocásticos. Se utiliza para proporcionar información sobre las distribuciones de probabilidad de una variable aleatoria o de un proceso estocástico. La función generatriz se define como la transformada de Laplace de una distribución de probabilidad discreta y se utiliza para producir momentos de diferentes órdenes.

Para entender en qué consiste la función generadora, primero debemos conocer qué es la transformada de Laplace. Esta transformada se utiliza para pasar de una función de tiempo a una función de complejidad compleja. Por lo tanto, la transformada de Laplace de una distribución de probabilidad discreta es una función de complejidad compleja que se llama función generadora. La función generatriz permite calcular momentos de diferentes órdenes para la distribución de probabilidad de la variable aleatoria.

La función generadora se utiliza en muchos de los procesos estocásti-

cos. Los más simples son los procesos de Poisson y los procesos de renovación, donde se puede demostrar que la función generadora es una función analítica completa, y de esta manera, pueden derivarse muchas propiedades relacionadas con la probabilidad de estos procesos. Además, la función generadora se utiliza en la teoría de colas, donde se modelan sistemas de llegada de clientes y tiempos de espera en filas y servicios.

La expresión general de la función generadora es:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$$

Donde p_k es la probabilidad de que una variable aleatoria discreta X tome el valor k y z es una variable compleja. Para calcular los momentos de la función generadora, debemos derivarla sucesivamente con respecto a z y evaluar en $z = 0$. Por ejemplo, el momento de orden n se calcula como sigue:

$$E(X^n) = \left. \frac{d^n G(z)}{dz^n} \right|_{z=0}$$

La función generadora es una herramienta básica en la teoría de procesos estocásticos, ya que permite calcular momentos de diferentes órdenes de la distribución de probabilidad de la variable aleatoria. Es especialmente útil en los procesos de Poisson y de renovación, donde se pueden derivar muchas propiedades utilizando la función generadora.

28 Binomio generalizado de Newton

El binomio generalizado de Newton es una importante herramienta matemática que se utiliza en la teoría de probabilidad y estadística en el análisis de procesos estocásticos. Esta fórmula permite calcular las probabilidades de combinaciones de eventos independientes con diferentes probabilidades de éxito y fracaso.

El binomio generalizado de Newton se utiliza para calcular la distribución binomial negativa, que a su vez se utiliza en la modelización de eventos discretos en los que los sucesos no tienen una probabilidad constante de ocurrir. En otras palabras, se utiliza para modelizar procesos discretos estocásticos con distribuciones de probabilidad no homogéneas. Por esta razón, el binomio generalizado de Newton es una herramienta importante en la teoría de procesos estocásticos.

La fórmula del binomio generalizado de Newton se puede calcular a través de la fórmula de combinatoria, y se expresa como sigue:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Donde a y b son dos eventos independientes con probabilidades de éxito p y q , respectivamente, y n es el número de experimentos requeridos para observar un número r de ensayos exitosos.

Para demostrar esta fórmula, podemos utilizar el método de inducción matemática. Para $n = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} (a + b)^1 &= a + b \\ \binom{1}{0} a^{1-0} b^0 + \binom{1}{1} a^{1-1} b^1 &= a + b \end{aligned}$$

Para el caso de $n + 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)^n (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a(a + b)^n + b(a + b)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{n-k+2} b^{k-1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + b^{n+1} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k$$

De esta manera, se ha demostrado la fórmula del binomio generalizado de Newton mediante inducción matemática. Esta fórmula se utiliza para modelizar procesos discretos estocásticos con distribuciones de probabilidad no homogéneas.

GLOSARIO

Experimento: Se utiliza para referirse a una acción o proceso realizado con el propósito de observar y medir ciertos resultados.

Evento: Se refiere a un suceso o resultado específico que puede ocurrir durante un experimento.

Espacio muestral: Es el conjunto que contiene todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Se utiliza como base para definir probabilidades y analizar sistemas estocásticos.

Probabilidad Condicional: Es una medida de la probabilidad de que ocurra un evento A, dado que se produzca un evento B.

Probabilidad Conjunta: es una medida estadística que indica la probabilidad de que dos sucesos ocurran al mismo tiempo. Es un número entre 0 y 1.

Variable aleatoria: Es una función que asigna un valor numérico a cada posible resultado de un experimento aleatorio.

Evento compuesto: Es aquel que consta de más de un resultado posible.

Probabilidad marginal: Es la probabilidad de que ocurra un evento sin tener en cuenta otros eventos relacionados.

Independencia Estadística: Es una propiedad de dos o más eventos que indica que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia de los otros.

Distribución de probabilidad: Describe las propiedades asociadas con los posibles valores de una variable aleatoria.

Valor esperado: También conocido como esperanza matemática, es una medida de tendencia central que representa el promedio ponderado de los posibles valores de una variable aleatoria.

Varianza: Es una medida de dispersión que indica que tan dispersos están los valores de una variable aleatoria con respecto a su valor esperado.

Desviación estándar: Es la raíz cuadrada de la varianza y proporciona una medida de dispersión más intuitiva.

Distribución de probabilidad continua y discreta: Las distribuciones de probabilidad pueden ser continuas o discretas, dependiendo de si los posibles valores de la variable aleatoria son infinitos (continua) o finitos o numerables (discreta).

Probabilidad acumulada: Es la suma acumulativa de las probabilidades de todos los valores menores o iguales a un valor dado en una distribución de probabilidad

Probabilidad total: Es la probabilidad de que ocurra un evento, teniendo en cuenta todos los posibles escenarios o condiciones bajo los cuales pueden ocurrir.

Teorema de Bayes: Es una fórmula que permite actualizar la probabilidad de un evento en función de la información adicional proporcionada por otro evento relacionado.

Secuencia congruencial: Es una secuencia de números generada mediante una relación de recurrencia lineal en aritmética modular. Es ampliamente utilizada en la generación de números pseudoaleatorios.

Caminata aleatoria: Es cualquier proceso aleatorio donde la posición de una partícula en cierto instante depende solo de su posición en algún instante previo y alguna variable aleatoria que determina su subsecuente dirección y la longitud de paso.

Cadena de Markov: Se conoce como cadena de Márkov o modelo de Márkov a un tipo especial de proceso estocástico discreto en el que la probabilidad de que ocurra un evento depende solamente del evento inmediatamente anterior.

Estados Absorbentes Transitorios: En una cadena de Markov, los estados pueden ser absorbentes o transitorios. Un estado absorbente es aquel en el que una vez alcanzado, el proceso permanece en ese estado de forma permanente. Un estado transitorio es aquel en el que el proceso puede abandonar ese estado y pasar a otros estados.

Distribución estacionaria: En una cadena de Markov, la distribución estacionaria es una distribución de probabilidad en la que las probabilidades de estar en diferentes estados se mantienen constantes a lo largo del tiempo.

Tasa de ocurrencia: Es la proporción de elementos en una población que contienen un atributo específico en relación con el número total de elementos de esa población.

Tiempos de interarribo: Son los intervalos de tiempo entre la ocurrencia de eventos sucesivos en un proceso estocástico.

Procesos de nacimiento y muerte: Es un caso especial del proceso de Markov de tiempo continuo donde las transiciones entre estados son de solo dos tipos: "nacimientos", que aumentan la variable de estado en uno y "muertes", que disminuyen el estado en uno.

Función generatriz: Es una serie formal de potencias cuyos coeficientes codifican información sobre una sucesión a cuyo índice corre sobre los enteros no negativos.