

Projet d'ANN201 : Application de la méthode des éléments finis à l'évolution de la température d'une pièce

Victor PRISER & Mathieu PETITBOIS

9 novembre 2020

Table des matières

1	Introduction	3
2	Problème stationnaire avec des coefficients variables et condition de Dirichlet	4
2.1	Formulation du problème	4
2.1.1	Problème à résoudre	4
2.1.2	Reformulation du problème sous forme variationnelle	4
2.1.3	Vérification que le problème est bien posé	5
2.1.4	Discrétisation du problème (approximation de Galerkin)	6
2.2	Algorithmes de résolution numérique	8
2.2.1	Calcul des matrices	8
2.2.2	Calcul des intégrales	12
2.2.3	Erreur numérique	13
2.3	Code pratique dans Matlab	13
2.4	Vérification des résultats	15
2.5	Application	19
3	Equation de la chaleur stationnaire avec conditions de Fourier	21
3.1	Formulation du problème	21
3.1.1	Problème à résoudre	21
3.1.2	Reformulation du problème sous forme variationnelle	22
3.1.3	Vérification que le problème est bien posé	23
3.1.4	Discrétisation du problème (approximation de Galerkin)	25
3.2	Algorithmes de résolution numérique	26
3.2.1	Calcul des matrices	26
3.2.2	Calcul des matrices élémentaires	28
3.2.3	Erreur numérique	29
3.3	Code pratique dans Matlab	29
3.4	Vérification des résultats	29
3.5	Application	32

4	Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes	35
4.1	Formulation du problème	35
4.2	Application	36
4.3	Combinaison de plusieurs types de conditions aux limites	37
4.3.1	Résultat	38
4.4	Erreur liée à Δt	39
5	Conclusion	41

1 Introduction

Le but de ce projet est de mettre en place une méthode pour déterminer l'évolution de la température dans une pièce bidimensionnelle carrée et son voisinage s'étalant sur un domaine nommé Ω . Nous considérerons dans la suite de cette étude que l'évolution spatio-temporelle de la température est régie par l'équation de la chaleur issue de la physique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S$$

Cette équation lie les variations spatiales et temporelles de la température en tout point du domaine Ω en fonction des valeurs d'un terme source S et de la conductivité de la pièce σ . Il est par ailleurs courant de considérer σ et S comme variables dans Ω par hétérogénéité du milieu. De plus, la finitude de notre domaine nous oblige à considérer des conditions sur la températures au bord du domaine, que l'on nomme $\partial\Omega$.

Devant la richesse des configurations de notre problème, nous avons choisit de développer et mettre en oeuvre notre démarche d'étude pour 3 cas particuliers très courant dans les applications industrielles :

1. Un cas stationnaire ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) où la température est fixée sur le bord du four (T_Γ). Le terme de source dépend de la température ($S - \alpha T$). Ainsi le problème (dit avec conditions de Dirichlet) à résoudre sera :

$$\begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

2. Le même problème mais avec cette fois un climatiseur régulant la température sur le bord suivant l'équation :

$$\sigma \nabla T \cdot n + \lambda(T - T_c) = 0$$

Ainsi le problème (dit avec conditions de Fourier) s'écrira :

$$\begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla T \cdot n + \lambda(T - T_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

3. Enfin un cas non-stationnaire où la température est fixe sur le bord (T_Γ). La température avant l'allumage du four est T_0 . Enfin, le terme de source est indépendant de la température. Le problème sera donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times [0, t_{\max}[\\ T_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times [0, t_{\max}[\end{cases}$$

La résolution de tels problèmes est d'une importance capitale pour l'industrie. Par exemple, lors du traitement de matériaux, il n'est pas rare de réaliser des trempes pour consolider ces derniers. La températures du matériau dans le four doit suivre une évolution précise (et c'est ici que la résolution du problème est nécessaire) afin que le matériau hérite des propriétés physiques souhaitées.

Cependant, il est impossible de résoudre ces problèmes analytiquement de par la complexité des équations mises en jeu. Le but de notre démarche sera donc dans chacun des cas ci-dessus de prouver l'existence et l'unicité de la solution puis de construire une méthode de résolution approchée bien connue : la méthode des éléments finis, pour enfin quantifier l'erreur commise par ses approximations afin de pouvoir valider sa cohérence et justifier son utilité.

2 Problème stationnaire avec des coefficients variables et condition de Dirichlet

2.1 Formulation du problème

2.1.1 Problème à résoudre

Pour un ouvert borné à frontière polygonale de \mathbb{R}^2 : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, nous souhaitons résoudre le problème :

$$\text{Trouvez } T \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Avec $\alpha > 0$ une constante, σ une fonction à valeur dans \mathbb{R} telle que $\sigma|_{\Omega_1}$ et $\sigma|_{\Omega_2}$ sont régulières et bornées par σ_{min} et σ_{max} strictement positives presque partout, $S \in L^2(\Omega)$ et T_Γ une constante.

2.1.2 Reformulation du problème sous forme variationnelle

Si nous posons u telle que : $T = T_\Gamma + u$, alors comme T_Γ est constante, $\nabla T = \nabla u$ et le problème devient :

$$\text{Trouvez } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = S - \alpha T_\Gamma = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

Si nous multiplions la première équation de (1) par un élément v de $H_0^1(\Omega)$ et que nous intégrons l'équation sur le domaine, en notant que $H_0^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $H_1(\Omega)$ de trace sur le bord nulle, une solution de (1) est solution du problème suivant :

$$\text{Trouvez } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que : } \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \alpha \int_{\Omega} u v d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Or, en remarquant que :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) v = \operatorname{div}(\sigma v \nabla u) - \sigma \nabla u \cdot \nabla v$$

Si u vérifie (1) alors elle est de laplacien dans L^2 nous pouvons donc supposer $u \in H^2(\Omega)$ donc $\sigma v \nabla u$ est dans $H^1(\Omega)$.

Si nous appliquons la formule de Stoke qui s'énonce : Pour $k \in (H^1(\Omega))^2$ et n le vecteur normal sortant de $\partial\Omega$:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(k) d\Omega = \int_{\partial\Omega} k \cdot n d\sigma$$

Nous obtenons (pour $k = \text{div}(\sigma \nabla u)$) le résultat suivant (l'intégrale sur le bord est nulle car v est nulle sur le bord) :

$$\int_{\Omega} \text{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega = - \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$$

Donc si u est solution de (1) alors u est solution du problème variationnel :

$$\text{Trouvez } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tq : } \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad \alpha \int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2)$$

Il faut maintenant montrer que (2) implique (1). Pour cela, nous prenons $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$ et si u vérifie (2) :

$$\begin{aligned} \alpha \langle u, \varphi \rangle + \sum_i \langle \sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \implies \alpha \langle u, \varphi \rangle - \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ &\implies \langle \alpha u, \varphi \rangle - \langle \text{div}(\sigma \nabla u), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ &\implies \alpha u - \text{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ &\implies \alpha u - \text{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ car } f \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

La condition sur le bord est automatiquement vérifiée car $H_0^1(\Omega)$ est un espace dont les éléments sont de trace nulle sur le bord.

Nous venons de montrer que la formulation (1) est équivalente à la formulation (2).

Nous allons donc dans la suite considérer le problème sous forme variationnel (2).

2.1.3 Vérification que le problème est bien posé

Nous voulons vérifier que le problème ci-dessous est bien posé :

$$\text{Trouvez } u \in V \text{ tq : } \forall v \in V \quad a(u, v) = l(v) \quad (3)$$

Avec :

$$a(u, v) = \alpha \int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad \text{et} \quad V = H_0^1(\Omega)$$

Pour cela, il suffit donc d'appliquer le théorème de Lax Milgram qui montre l'unicité et l'existence de la solution du problème (3) si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. **V est un espace de Hilbert** : En effet, $V = H_0^1(\Omega)$ (muni de la norme H^1) est un sous espace vectoriel fermé (adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$) de $H^1(\Omega)$ qui est lui même un espace de Hilbert.
2. **l est une forme linéaire continue** : En effet, $l : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale et du produit et pour tout $v \in V$, nous trouvons par l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|l(v)| = |\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_l \|v\|_V$$

l est donc bien continue.

3. **a est une forme bilinéaire continue et coercive** : $a : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ est une forme dont la bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale et du produit par f . Nous trouvons pour $u, v \in V$

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \alpha \left| \int_{\Omega} u v d\Omega \right| + \int_{\Omega} |\sigma| \cdot |\nabla u \cdot \nabla v| d\Omega \quad (\text{inégalité triangulaire} + \text{de la moyenne}) \\
&\leq \alpha \|u\|_V \cdot \|v\|_V + \sigma_{max} \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| d\Omega \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz } (L^2) + 0 < \sigma < \sigma_{max}) \\
&\leq \alpha \|u\|_V \cdot \|v\|_V + \sigma_{max} \int_{\Omega} \sqrt{\nabla u^2} \cdot \sqrt{\nabla v^2} d\Omega \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz } (\mathbb{R}^2)) \\
&\leq \alpha \|u\|_V \cdot \|v\|_V + \sigma_{max} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz } (L^2)) \\
&\leq (\alpha + \sigma_{max}) \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad (\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \|\cdot\|_V)
\end{aligned}$$

L'application a est bien continue. De plus pour $u \in V$:

$$\begin{aligned}
a(u, u) &\geq \alpha \int_{\Omega} u^2 d\Omega + \sigma_{min} \int_{\Omega} \nabla u^2 d\Omega \quad \text{car } \sigma_{min} > 0 \\
&\geq \min(\alpha, \sigma_{min}) \|u\|_V^2
\end{aligned}$$

Donc comme $\sigma_{min} > 0$ et $\alpha > 0 \implies \min(\alpha, \sigma_{min}) > 0$, a est coercive.

Les hypothèses de Lax-Milgram étant vérifiées, le problème est bien posé.

La coercivité de a nous permet également d'affirmer que :

$$\min(\alpha, \sigma_{min}) \|u\|_V^2 \leq a(u, u) = l(u) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_V$$

Soit,

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\min(\alpha, \sigma_{min})} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi, l'application qui à une donnée du second membre f associe la solution du problème u étant linéaire, on en déduit sa continuité. Ceci nous permet donc d'avoir la garantie que la solution u ne changera que faiblement pour des petites variations de la donnée f . Cela nous permettra dans la suite d'approximer f par son interpolée dans un espace de dimension finie.

2.1.4 Discrétisation du problème (approximation de Galerkin)

Le problème étant difficilement résoluble dans un espace de dimension infinie ($H_0^1(\Omega)$), nous allons essayer de le résoudre dans un espace de dimension finie $V_h^0 \subset H_0^1(\Omega)$. Nous allons définir V_h^0 de la manière suivante :

- Nous définissons un maillage de triangles \mathcal{T}_h sur Ω
- Nous notons $(T_l)_{l=1 \dots L}$ les triangles du maillage
- Nous notons $(M_i)_{i=1 \dots N}$ les points du maillage

- Nous notons $(w_i)_{i=1\dots N}$ la base de V_h définie telle que w_i est polynomiale d'ordre 1 et nulle sur tout les sommets sauf en M_i où elle vaut 1.
- Nous numérotions les sommets tel que les $N - N_0$ derniers sommets sont sur la frontière, N_0 étant alors le nombre de sommets au bord.

Nous dirons donc que :

$$V_h^0 = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0})$$

Ainsi la formulation discrète du problème est :

$$\text{Trouvez } u_h \in V_h^0 \text{ tel que : } \forall v_h \in V_h^0 \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

Comme V_h^0 est un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H_0^1(\Omega)$, nous pouvons dire que c'est aussi un espace de Hilbert une fois associé à la norme H^1 . Ainsi le problème discrétisé admet une unique solution par Lax-Milgram.

Nous appelons, \tilde{u}_h l'unique solution du problème. Comme cette solution est dans $V_h^0 = \text{Vect}(w_1, \dots, w_{N_0})$ elle s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{u}_h = \sum_{i=1}^{N_0} \tilde{u}_i w_i$$

Soit $i \in \{1, \dots, N_0\}$, comme $w_j(M_i) = \delta_{ij}$:

$$\tilde{u}_h(M_i) = \tilde{u}_i$$

Donc, au final nous trouvons :

$$\tilde{u}_h = \sum_{i=1}^{N_0} \tilde{u}_h(M_i) w_i$$

Le problème discrétisé se réécrit :

$$\forall v = (v_1, \dots, v_{N_0}) \in \mathbb{R}^{N_0} \quad \sum_{i,j=1}^{N_0} \tilde{u}_i v_j a(w_i, w_j) = \sum_{j=0}^{N_0} v_j l(w_j)$$

Nous posons la matrice :

$$\mathbb{A}^0 = \alpha \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0 = (a(w_i, w_j))_{i,j \in \{1, \dots, N_0\}}$$

Avec

$$\mathbb{M}_{ij}^0 = \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \text{ (masse)} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}_{ij}^0 = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_i \nabla w_j d\Omega \text{ (rigidité)}$$

Nous posons aussi les vecteur de \mathbb{R}^{N_0} :

$$\tilde{U}^0 = (\tilde{u}_h(M_i))_{i \in \{1, \dots, N_0\}} \quad \text{et} \quad L^0 = (l(w_i))_{i \in \{1, \dots, N_0\}}$$

Ainsi, \tilde{u}_h vérifie :

$$\forall V \in \mathbb{R}^{N_0} \quad {}^t V \mathbb{A}^0 \tilde{U}^0 = {}^t V L^0$$

C'est en particulier vrai pour $V = \mathbb{A}^0 \tilde{U}^0 - L^0$ donc $\mathbb{A}^0 \tilde{U}^0 - L^0 = 0$. Et nous obtenons :

$$\mathbb{A}^0 \tilde{U}^0 = L^0$$

Pratiquement, nous allons préférer travailler en dimension N . Nous allons donc résoudre le système :

$$\mathbb{A} \tilde{U} = L$$

Avec

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & 0 \\ 0 & I_{N-N_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} L^0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avec ce système nous aurons :

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{U}^0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui correspond bien avec notre solution dans V_h car nous la voulons nulle sur les bords.

On remarque que grâce à la coercivité de a , \mathbb{A} est définie positive donc inversible. Ainsi, pour trouver la solution de l'équation discrétisée, il suffit de calculer la matrice :

$$\mathbb{A}^{-1} L$$

2.2 Algorithmes de résolution numérique

Nous venons de voir que la résolution numérique se réduit à calculer la matrice \mathbb{A} et L puis inverser \mathbb{A} et faire un produit matriciel.

L'enjeu de cette résolution est d'être la plus rapide possible, afin de pouvoir calculer des solutions pour h petit et avoir une très bonne approximation de la solution réelle.

2.2.1 Calcul des matrices

Pour cette résolution numérique nous allons d'abord calculer les matrices sans se préoccuper du bord :

$$\mathbb{A}_{\text{bis}} = \alpha \mathbb{M}_{\text{bis}} + \mathbb{K}_{\text{bis}} \quad \text{et} \quad L_{\text{bis}} = (l(w_i))_{i \in \{1, \dots, N\}}$$

Avec pour $i, j \in \{1, \dots, N\}$:

$$(\mathbb{M}_{\text{bis}})_{ij} = \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \quad \text{et} \quad (\mathbb{K}_{\text{bis}})_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_i \nabla w_j d\Omega$$

Pour retomber sur les bonnes matrices nous allons pour chaque i tel que M_i est sur le bord mettre les lignes i et les colonnes i de \mathbb{A}_{bis} à 0 sauf le coefficient diagonal qui sera mis à 1. Nous mettrons le coefficient i à 0 pour L_{bis} .

Pour calculer \mathbb{A}_{bis} nous allons procéder de la manière suivante :

Pour chaque triangle T_l avec $l \in \{1, \dots, L\}$ (les sommets de T_l sont notés : M_{l_1}, M_{l_2} et M_{l_3}) :

— On calcule les matrices élémentaires \mathbb{M}_l et \mathbb{K}_l qui vérifient :

$$\mathbb{K}_l = \left(\int_{T_l} \sigma \nabla w_{l_p} \nabla w_{l_k} d\Omega \right)_{p,k \in \{1,2,3\}} \quad (4)$$

Et :

$$\mathbb{M}_l = \left(\int_{T_l} w_{l_p} w_{l_k} d\Omega \right)_{p,k \in \{1,2,3\}} \quad (5)$$

— Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on a :

$$(\mathbb{M}_{\text{bis}})_{l_i l_j} = (\mathbb{M}_{\text{bis}})_{l_i l_j} + (\mathbb{M}_l)_{ij}$$

et

$$(\mathbb{K}_{\text{bis}})_{l_i l_j} = (\mathbb{K}_{\text{bis}})_{l_i l_j} + (\mathbb{K}_l)_{ij}$$

Une fois cela calculé, nous obtenons \mathbb{A}_{bis} en sommant les deux matrices obtenues.

Pour calculer :

$$(L_{\text{bis}})_i = \int_{\Omega} f w_i d\Omega$$

Nous allons faire une autre approximation en interpolant f dans V_h . Pour cela, il faut que f soit continue or elle est L^2 par définition. Nous allons donc supposer que nous sommes dans le cas particulier où f est continue. Si ce n'est pas le cas il faudrait calculer l'intégrale directement.

$$f = \sum_{i=1}^N f(M_i) w_i$$

Si nous considérons de vecteur $F = (f(M_i))_{0 \leq i \leq N}$, nous avons L_{bis} qui s'obtient par la formule :

$$L_{\text{bis}} = \mathbb{M}_{\text{bis}} F \quad (6)$$

2.2.1.1 Le calcul des matrices élémentaires

Le calcul d'une intégrale sur un triangle n'est pas une chose aisée. Cependant le fait que les fonctions à intégrer soient polynomiales de degrés 1 simplifie la tâche.

Il faut donc calculer pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$ et $l \in \{1, \dots, L\}$:

$$\int_{T_l} w_{l_i} w_{l_j} d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{T_l} \sigma \nabla w_{l_i} \nabla w_{l_j} d\Omega$$

Pour cela, nous posons la transformation qui transforme le triangle $\hat{T} = (\hat{M}_1 = (0,0), \hat{M}_2 = (1,0), \hat{M}_3 = (0,1))$ en $T_l = (M_{l_1}, M_{l_2}, M_{l_3})$:

$$\mathcal{F}_l = \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \hat{M} & \mapsto \mathcal{B}_l \hat{M} + S_l \end{cases}$$

Avec :

$$\mathcal{B}_l = (M_{l_2} - M_{l_1} | M_{l_3} - M_{l_1}) \quad \text{et} \quad S_l = M_{l_1}$$

Nous remarquons que :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad \mathcal{F}_l(\hat{M}_i) = M_{l_i}$$

Il faut montrer que \mathcal{F} est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \hat{T} dans T_l .

1. **Montrons d'abord que c'est une bijection de \hat{T} dans T_l** : Soit, $M = (x, y) \in T_l$.

Nous notons que $\det \mathcal{B}_l \neq 0$ car le segment $[M_{l_1}, M_{l_2}]$ n'est pas colinéaire avec le segment $[M_{l_1}, M_{l_3}]$ par définition d'un triangle du maillage. Donc \mathcal{B}_l est inversible.

Nous pouvons donc poser $(\hat{x}, \hat{y}) = \mathcal{B}_l^{-1}(M - M_{l_1})$, l'unique point qui vérifie :

$$\mathcal{F}(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y)$$

Il faut montrer que (\hat{x}, \hat{y}) est dans \hat{T} . Soit que $0 \leq \hat{x} \leq 1$ et $0 \leq \hat{y} \leq 1 - \hat{x}$.

Nous montrons sans grandes difficultés que :

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\mathcal{B}_l)} \begin{pmatrix} \det(M - M_{l_1}, M_{l_3} - M_{l_1}) \\ -\det(M - M_{l_1}, M_{l_2} - M_{l_1}) \end{pmatrix}$$

Le déterminant est le produit mixte en dimension 2. Il a donc pour signe celui du sinus de l'angle entre les deux vecteurs. Il est donc clair que \hat{x} et \hat{y} sont positifs quand M est dans le triangle. (Par exemple dans le cas particulier de la figure 1, $\frac{1}{\det(\mathcal{B}_l)} < 0$, $\det(M - M_{l_1}, M_{l_3} - M_{l_1}) < 0$ et $\det(M - M_{l_1}, M_{l_2} - M_{l_1}) > 0$).

Donc si nous notons \mathcal{A}_i l'aire du triangle T_i , $i = 1..3$ et \mathcal{A}_l l'aire du triangle T_l (cf la figure 1), nous avons (quand M est dans le triangle) :

$$\begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_l} \\ \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_l} \end{pmatrix}$$

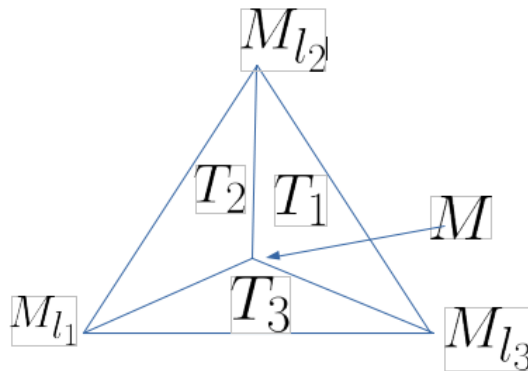


FIGURE 1 – Triangle T_l qui englobe T_1 , T_2 et T_3

Donc il est clair que $0 \leq \hat{x} \leq 1$. De plus :

$$1 - \hat{x} = \frac{\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_l} \geq \hat{y} \geq 0$$

Donc pour tout M dans T_l , $\mathcal{F}^{-1}(M)$ est dans \hat{T}

Il ne reste plus qu'à montrer que pour tout \hat{M} dans \hat{T} , $\mathcal{F}(\hat{M})$ est dans T_l

Cela se montre de la même manière donc au final :

\mathcal{F} réalise une bijection de \hat{T} dans T_l

2. **\mathcal{F} est trivialement de classe \mathcal{C}^1**

3. **Le jacobien est non nul.** En effet, il est égal à $\det(\mathcal{B}_l)$ qui est non nul (cf point 1).

Ainsi, \mathcal{F} est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \hat{T} dans T_l .

Nous pouvons donc appliquer le changement de variable licite suivant :

$$\int_{T_l} w_{l_i} w_{l_j} d\Omega = \int_{\hat{T}} w_{l_i} \circ \mathcal{F} \cdot w_{l_j} \circ \mathcal{F} |\det(\mathcal{B}_l)| d\hat{\Omega}$$

Et :

$$\int_{T_l} \sigma \nabla w_{l_i} \nabla w_{l_j} d\Omega = \int_{\hat{T}} \sigma \circ \mathcal{F} \cdot (\nabla w_{l_i}) \circ \mathcal{F} \cdot (\nabla w_{l_j}) \circ \mathcal{F} |\det(\mathcal{B}_l)| d\hat{\Omega}$$

Si nous notons (une fonction indépendante du triangle) :

$$\hat{w}_i = w_{l_i} \circ \mathcal{F}$$

Nous avons :

$$\nabla \hat{w}_i = (\nabla w_{l_i}) \circ \mathcal{F} \cdot \mathcal{B}_l = {}^t \mathcal{B}_l (\nabla w_{l_i}) \circ \mathcal{F}$$

Donc les matrices élémentaires s'obtiennent grâce aux formules :

$$\int_{T_l} w_{l_i} w_{l_j} d\Omega = \int_{\hat{T}} \hat{w}_i \cdot \hat{w}_j |\det(\mathcal{B}_l)| d\hat{\Omega} \quad (7)$$

Et :

$$\int_{T_l} \sigma \nabla w_{l_i} \nabla w_{l_j} d\Omega = \int_{\hat{T}} \sigma \circ \mathcal{F} \cdot ({}^t \mathcal{B}_l^{-1} \nabla \hat{w}_i) \cdot ({}^t \mathcal{B}_l^{-1} \nabla \hat{w}_j) |\det(\mathcal{B}_l)| d\hat{\Omega} \quad (8)$$

Comme w_{l_i} est polynomiale d'ordre 1 et \mathcal{F} aussi, nous en concluons que \hat{w}_i est polynomiale d'ordre 1.

De plus $\hat{w}_i(\hat{M}_j) = w_{l_i}(M_{l_j}) = \delta_{i,j}$

Donc \hat{w}_i est l'unique fonction polynomiale d'ordre 1 qui vaut 1 en \hat{M}_i et 0 sur les autres sommets.

Ainsi :

$$\hat{w}_1(\hat{x}, \hat{y}) = 1 - \hat{x} - \hat{y} \text{ et } \hat{w}_2(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x} \text{ et } \hat{w}_3(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}$$

2.2.2 Calcul des intégrales

Nous avons vu qu'il était nécessaire de calculer des intégrales sur un triangle simple \hat{T} .

Nous souhaitons obtenir une formule générale qui donne une bonne approximation de l'intégrale pour des fonctions quelconques et un résultat exact pour des fonctions polynomiales d'ordre 2. En effet, si σ est constant, nous aurons seulement à intégrer des polynôme d'ordre 2 et nous aurons donc un résultat exact.

Nous considérons l'approximation suivante :

$$\int_{\hat{T}} G d\Omega \approx \frac{1}{6} \left(G\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + G\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + G\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right) \quad (9)$$

Vérifions que l'approximation est exacte pour un polynôme d'ordre 2. Par linéarité de l'intégrales il faut montrer que la formule est vraie pour :

$$f_1 = 1 \text{ et } f_2 = x \text{ et } f_3 = x^2 \text{ et } f_4 = xy$$

Il faut aussi le faire pour 2 autres fonctions (y et y^2) que nous ne traiterons pas ici car le raisonnement est le même.

Comme l'aire du triangle est $\frac{1}{2}$, il est clair que l'approximation est exacte pour f_1

Pour f_2 (à l'aide du théorème de Fubini) :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}} f_2 d\Omega &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} x dx dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{(1-y)^2}{2} dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{y^2}{2} dy \\ &= \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6} \left(f_2\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f_2\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f_2\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Pour f_3 :

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}} f_3 d\Omega &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} x^2 dx dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{(1-y)^3}{3} dy \\ &= \int_{y=0}^1 \frac{y^3}{3} dy \\ &= \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{6} \left(f_3\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right) + f_3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right) + f_3\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right) \right) \end{aligned}$$

Pour f_4 :

$$\begin{aligned}
\int_{\hat{T}} f_4 d\Omega &= \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^{1-y} xy dx dy \\
&= \int_{y=0}^1 \frac{y(1-y)^2}{2} dy \\
&= \int_{y=0}^1 \frac{y^2(1-y)}{2} dy \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{24} \\
&= \frac{1}{6} \left(f_4 \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right) + f_4 \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6} \right) + f_4 \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3} \right) \right)
\end{aligned}$$

Ainsi l'approximation est exacte pour les polynômes d'ordre 2.

Pour des fonctions quelconques, cela sera comme si nous approximons la fonction à intégrer par la meilleure fonction polynomiale d'ordre 2 qui passe par les 3 points de la formule.

2.2.3 Erreur numérique

Dans la résolution nous effectuons de nombreuses approximations (approximation de Galerkin, approximation de f et l'approximation du calcul d'intégrale si σ n'est pas constant).

Toutes ces approximations peuvent faire peur. Pour nous rassurer il faudrait majorer l'erreur. Nous pouvons montrer que (car nous pouvons faire comme si la solution est de régularité H^2 sur les triangles et nous approximons la solution en un polynôme d'ordre 1) :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2$$

Et :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C'h$$

Tout cela est aussi en admettant que les erreurs de quadratures sont négligeables devant l'erreur de Galerkin.

Ainsi, la méthode converge et nous aurons des résultats aussi précis que nous voulons quand nous réduirons h .

2.3 Code pratique dans Matlab

La première chose à faire est de créer le maillage avec le pas voulu grâce à la commande :

```
system(['gmsh -2 -clmax ' num2str(h) ' -clmin ' num2str(h) ' geomChaleur.geo']);
```

La lecture du maillage se fait grâce à la commande `lecture_msh`.

Ainsi nous avons tous les éléments du maillage pour calculer \mathbb{A} et L .

Nous commençons par calculer les matrices locales (dans les fichiers `matM_elem` et `matK_elem`) qui nous sont données par les formules (13) et (15). Ceux sont donc des matrices 3×3 et nous introduisons ainsi les deux boucle `for` :

```
for i=1:3
    for j=1:3
```

Pour le calcul des intégrales nous appliquons d'abord les transformations (7) et (8). Nous avons ainsi les fonctions à intégrer G grâce à l'expression :

```
G = @(x,y) expr;
```

Puis le calcul direct se fait par l'approximation (9) :

```
Mel(i,j) = 1/6*(G(1/6,1/6)+G(2/3,1/6)+G(1/6,2/3));
```

Il faut noter que, dans le cas de `Ke1`, il faut distinguer le domaine du triangle pour choisir $\hat{\sigma} = \sigma \circ \mathcal{F}$ (`sigChap`). Le domaine nous est donné par le vecteur `Reftri` qui vaut 1 si le triangle est Ω_1 et 2 s'il est dans Ω_2 . Ainsi :

```
if(Reftriangle==1)
    sigChap=@(x,y) sigma_1(F_trans(x,y));
else
    sigChap=@(x,y) sigma_2(F_trans(x,y));
end
```

Une fois les matrices élémentaires obtenues, nous pouvons faire l'assemblage global décrit dans la section 2.2.1.

Nous notons que L_{bis} s'obtient grâce à la formule (16). Il faut donc interpoler f (il faut quand même vérifier que f est continue sinon il faut changer de méthode) :

```
F = @(x,y) f(x,y);
FF = arrayfun(F,Coorneu(:,1),Coorneu(:,2));
```

Dans la section 2.2.1, nous disions aussi qu'il faut supprimer des termes dans les matrices pour avoir une solution nulle sur les bord. La fonction `elimine` remplira ce rôle :

```
function [A,L] = elimine(AA,LL,refneu,Nbpt)
A=AA;
L=LL;
for i=1:Nbpt
```

```

        if refneu(i)==1
            L(i)=0;
            A(i,i)=1;
            for j=1:Nbpt
                if j~=i
                    A(i,j)=0;
                    A(j,i)=0;
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

En notant que quand `Refneu` est à 1, le noeud est sur la frontière.

Une fois tout cela fait, nous pouvons donc calculer l'approximation \mathbb{U} :

```

UU = tilde_AA\tilde_LL;

```

2.4 Vérification des résultats

Nous souhaitons appliquer notre solution dans le cas où \tilde{u} est connue pour vérifier notre code. Pour ce faire, on crée un maillage de pas noté h qui nous servira dans la suite de ce projet :

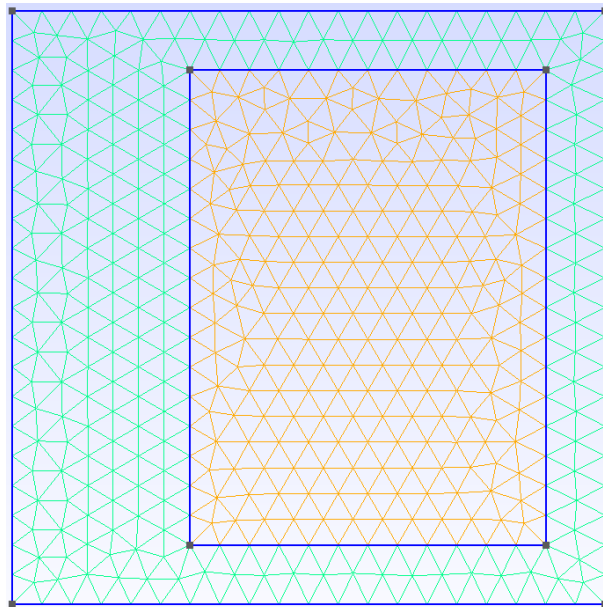


FIGURE 2 – Maillage d'étude au pas de $h = 0.1$

On remarque alors que le domaine maillé Ω sera partitionné en 3 parties de références respectives 0 pour l'extérieur du domaine d'étude et le bord, 1 pour le sous-domaine extérieur étudié en vert (Ω_1) et 2 pour le sous-domaine intérieur étudié (la pièce) en orange (Ω_2) de sorte que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. Ceci nous permettra dans la suite de pouvoir modéliser des hétérogénéités de conductivité au sein de la pièce sans impacter son extérieur.

Ainsi, si nous choisissons pour cas-test les données :

$$f = (1 + 2\pi^2) \sin(x\pi) \sin(y\pi)$$

Et $\sigma = \alpha = 1$, $T_\Gamma = 0$. La solution devrait être :

$$\tilde{u} = \sin(x\pi) \sin(y\pi)$$

Nous pouvons observer le résultat :

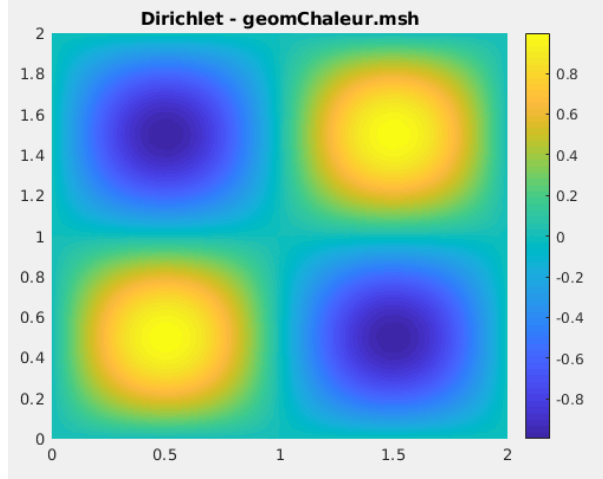


FIGURE 3 – Résolution numérique avec un pas de $h = 0.1$

Le résultat semble cohérent car nous avons des valeurs entre -1 et 1 . Et nous pouvons observer les valeurs extrêmes aux 4 points : $(1 \pm \frac{1}{2}, 1 \pm \frac{1}{2})$. Si nous notons π_h l'interpolation de l'ensemble des fonctions continues dans V_h . Il est facile de représenter numériquement $|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h|$:

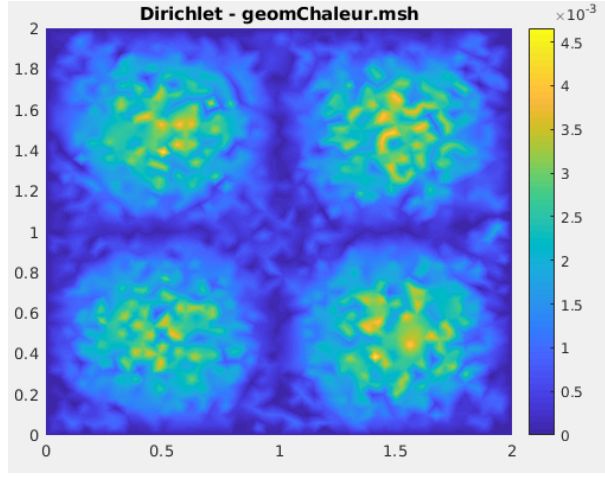


FIGURE 4 – $|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h|$ avec un pas de $h = 0.05$

Nous pouvons voir que pour un pas $h = 0.05$ cette quantité est faible de l'ordre de 10^{-3} .

Nous pouvons ensuite calculer la quantité (nous notons $U - U_h$ le vecteur associé à $\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h$) :

$$\begin{aligned}
 \|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} (\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h)^2 d\Omega \\
 &= \sum_{i,j=1}^N (U - U_h)_i (U - U_h)_j \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \\
 &= \sum_{i,j=1}^N (U - U_h)_i (U - U_h)_j \mathbb{M}_{ij} d\Omega \\
 &= {}^t(U - U_h) \mathbb{M} (U - U_h)
 \end{aligned}$$

En théorie il faudrait \mathbb{M}_{bis} mais comme $U - U_h = 0$ sur le bord, cela marche quand même avec \mathbb{M} .

De même nous avons la semi norme H^1 :

$$\|\nabla \pi_h \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 = {}^t(U - U_h) \mathbb{K} (U - U_h)$$

Nous trouvons :

$$\|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = 9.11 \cdot 10^{-6}$$

Et :

$$\|\nabla \pi_h \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2}^2 = 2.1 \cdot 10^{-3}$$

Si nous regardons la figure 4, $|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h|$ est plus grande quand \tilde{u}_h varie beaucoup. Il est donc logique que l'erreur liée à la quantité $|\nabla \pi_h \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h|$ soit plus grande que celle liée à $|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h|$.

Il faut noter que en réalité nous souhaitons accéder aux erreurs :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \text{et} \quad \|\nabla \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2}^2$$

Or ces quantités sont difficiles à calculer numériquement car il faut calculer une intégrale qui nous force à faire une approximation.

Nous allons donc approximer la solution par son interpolée (qui est définie par continuité de la solution). Il faut vérifier que $\|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ constitue une bonne approximation de l'erreur L^2 . Nous pouvons encadrer l'erreur par l'inégalité triangulaire :

$$\|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} - \|\tilde{u} - \pi_h \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u} - \pi_h \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

Or $\|\tilde{u} - \pi_h \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} < Ch^2$ (voir cours). Nous pouvons donc encadrer l'erreur par :

$$\|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} - Ch^2 \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} + Ch^2$$

Nous avons un résultat pour la semi norme H^1 :

$$\|\nabla \pi_h \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2} - C'h \leq \|\nabla \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq \|\nabla \pi_h \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2} + C'h$$

La qualité de l'approximation dépend donc de la taille de C et C' . Il nous est donc difficile d'aller plus loin et de pouvoir conclure sur la taille de l'erreur (si ce n'est qu'elle converge vers 0 quand h tend vers 0).

Si nous traçons l'évolution de l'approximation de l'erreur en échelle log :

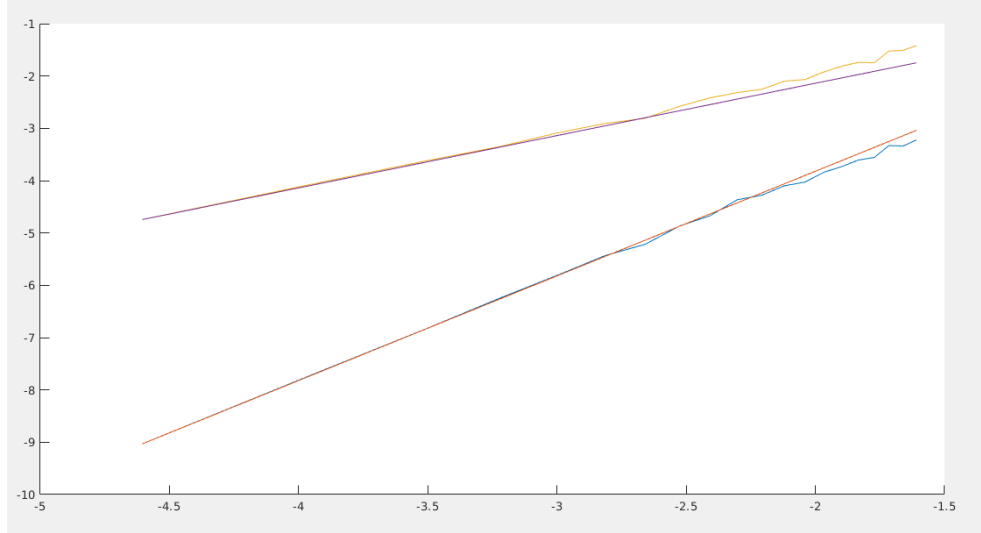


FIGURE 5 – log de erreur L^2 en bleu et H^1 en orange. En abscisse, il y a $\log(h)$ avec h le pas du maillage allant de 0.01 à 0.2. Nous avons fait 20 mesures

Nous voyons que les deux erreurs suivent des droites de coefficient directeur 1 et 2.

Ainsi nous pouvons écrire les approximations suivantes (quand h est faible) :

$$\|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \approx kh^2 \text{ et } \|\nabla \pi_h \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2} \approx k'h$$

Grâce aux encadrements précédents, nous avons :

$$(k - C)h^2 \leq \|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq (k + C)h^2$$

Et :

$$(k' - C')h \leq \|\nabla \tilde{u} - \nabla \tilde{u}_h\|_{(L^2(\Omega))^2} \leq (k' + C')h$$

Ces résultats étaient déjà connus car par le lemme de Céa nous avons :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{Céa}} \|\tilde{u} - \pi_h \tilde{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\text{Céa}} Ch^2$$

Nous venons donc d'une façon détournée de vérifier le lemme de Céa. Cela nous rassure donc encore plus pour la validité des résultats.

2.5 Application

Nous souhaitons donc calculer la température dans la pièce de terme de source maximal au centre $(1, 1)$ et qui se réduit exponentiellement quand nous nous en écartons. Soit :

$$S = 600 \exp \left(- \left(\frac{x-1}{0.8} \right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8} \right)^2 \right)$$

Et une température sur les parois de $T_\Gamma = 290$ constante. De plus $\alpha = 1$. Nous choisissons un coefficient de diffusion thermique dans l'air égale à $\sigma_1 = 5$ dans le domaine Ω_1 et un coefficient plus faible dans $\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Nous obtenons :

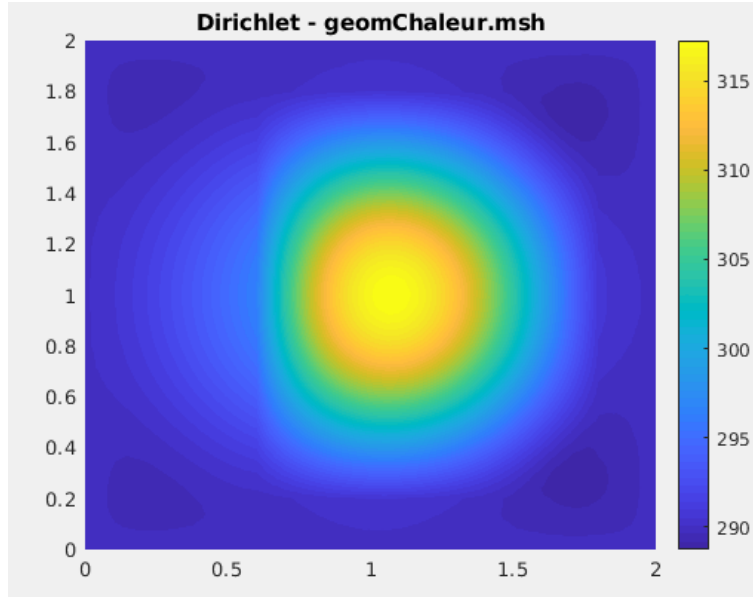


FIGURE 6 – Température approché avec un pas de 0.05 ($\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Nous voyons une température qui varie entre 290° et 315°.

La température est concentrée sur la pièce (Ω_2) car son coefficient de diffusion est plus faible et la source est en son milieu. On dira que la pièce est un milieu plus isolant que l'extérieur. Ainsi l'énergie thermique ne peut pas bien se diffuser ce qui crée de forts gradients de température de 320°C au centre à environ 300°C au bords de la pièce. Dans Ω_1 , la diffusion thermique est élevée donc la température est plus homogène (peu de variation) et diminue plus rapidement vers la température de la paroi qui a ici un rôle de thermostat.

Si l'on considère cette fois une conductivité thermique variable dans Ω_2 :

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x)(2 + \sin(16\pi y)))$$

La température approchée devient :

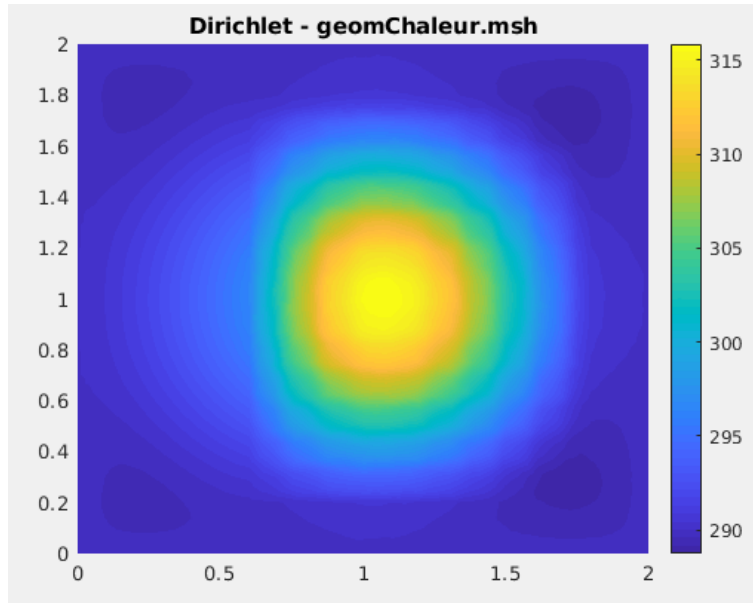


FIGURE 7 – Température approché avec un pas de 0.05 ($\sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x)(2 + \sin(16\pi y)))$)

La figure est alors similaire au cas précédent mais on peut en percevoir plus facilement les différences si l'on affiche la différences des deux températures à σ_2 fixe : T_{fixe} et à σ_2 variable : T_{var} . On obtient alors :

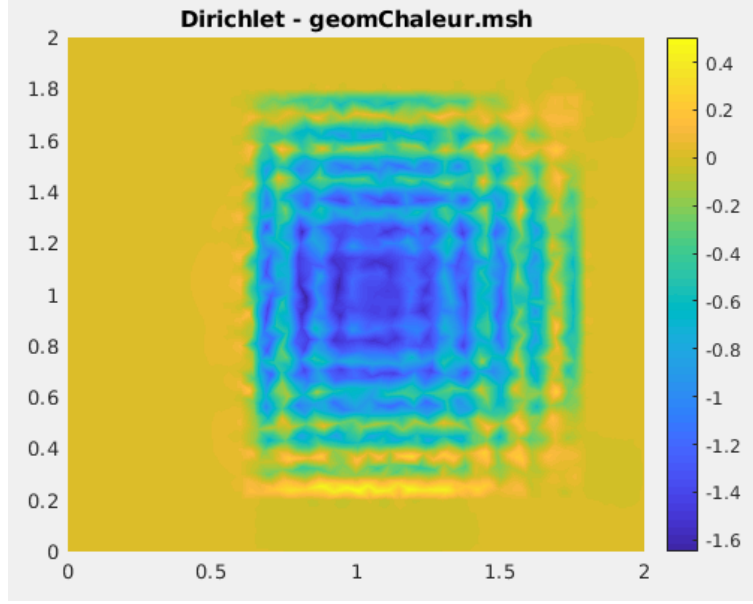


FIGURE 8 – différence des deux températures $T_{var} - T_{fixe}$ approché avec un pas de 0.05 (T_{var} correspond à $\sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x)(2 + \sin(16\pi y)))$ et T_{fixe} correspond à $\sigma_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$)

Nous voyons alors apparaître un quadrillage qui correspond à la période des sinus de σ_{var} .

De plus la différence est nulle sur Ω_2 ce qui est logique car dans le domaine Ω_1 la température est constante égal à T_Γ dans les deux cas.

3 Equation de la chaleur stationnaire avec conditions de Fourier

3.1 Formulation du problème

3.1.1 Problème à résoudre

On place à présent un climatiseur régulant la température sur le bord selon l'équation :

$$\sigma \nabla T \cdot n + \lambda(T - T_c) = 0$$

On s'intéresse alors à la résolution du nouveau problème :

$$\begin{cases} \alpha T - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla T \cdot n + \lambda(T - T_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Avec $\alpha > 0$ une constante, σ une fonction à valeur dans \mathbb{R} telle que $\sigma|_{\Omega_1}$ et $\sigma|_{\Omega_2}$ sont régulières et bornées par σ_{min} et σ_{max} strictement positives presque partout, $S \in L^2(\Omega)$ et T_Γ, T_c et $\lambda > 0$ des constantes.

3.1.2 Reformulation du problème sous forme variationnelle

On pose u telle que : $T = T_\Gamma + u$ et u_c telle que $T_c = T_\Gamma + u_c$. Vu que T_Γ est toujours une constante on a encore : $\nabla T = \nabla u$ si bien que le nouveau problème s'écrit :

$$\text{Trouvez } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \begin{cases} \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = S - \alpha T_\Gamma = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma \nabla u \cdot n + \lambda(u - u_c) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (10)$$

En multipliant (10) par un élément quelconque v de $H^1(\Omega)$ et en intégrant sur le domaine, une solution de (10) est solution du problème :

$$\text{Trouvez } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \forall v \in H^1(\Omega) \quad \alpha \int_{\Omega} u v d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Or, en remarquant comme précédemment que :

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) v = \operatorname{div}(\sigma v \nabla u) - \sigma \nabla u \cdot \nabla v$$

Si u vérifie (10) alors elle est de laplacien dans L^2 on peut donc supposer $u \in H^2(\Omega)$ donc $\sigma v \nabla u$ est dans $H^1(\Omega)$.

Si on applique une nouvelle fois la formule de Stoke, on obtient :

$$\text{Trouvez } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \alpha u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \sigma v \nabla u \cdot n d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Or, ici, l'intégrale surfacique ne s'annule forcément pas car v n'est plus de trace nulle. En appliquant la condition aux limites du problème (10), on en déduit que u est maintenant solution de la formulation variationnelle :

$$u \in H^1(\Omega) \text{ t.q : } \forall v \in H^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \alpha u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u v d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma \quad (11)$$

On veut maintenant montrer que la formulation variationnelle (11) implique réciproquement (10). En prenant $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, si u est solution de (11), alors :

$$\begin{aligned} \alpha \langle u, \varphi \rangle + \sum_i \langle \sigma \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \implies \alpha \langle u, \varphi \rangle - \sum_i \langle \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x_i} \right), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ &\implies \langle \alpha u, \varphi \rangle - \langle \operatorname{div}(\sigma \nabla u), \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \\ &\implies \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ &\implies \alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ car } f \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

car ici $\int_{\partial\Omega} \lambda u v d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma = 0$, les éléments de $\mathcal{D}(\Omega)$ étant tous de trace nulle sur le bord du domaine.

On choisit ensuite $v \in H^1(\Omega)$. Sachant à présent que $\alpha u - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = f$ dans $L^2(\Omega)$, on sait que u est à laplacien dans L^2 et donc on peut supposer $u \in H^2(\Omega)$ et donc que $\sigma v \nabla u$ est dans $H^1(\Omega)$. Ainsi, en appliquant la formule : $\operatorname{div}(\sigma \nabla u)v = \operatorname{div}(\sigma v \nabla u) - \sigma \nabla u \cdot \nabla v$, on obtient dans un premier temps :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \int_{\Omega} \alpha u v d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma v \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u v d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma$$

et en réappliquant la formule de Stokes dans le sens inverse à la deuxième intégrale on retrouve :

$$\forall v \in H^1(\Omega) \int_{\Omega} \alpha u v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \sigma v \nabla u \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma \nabla u) v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u v d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma$$

Or, d'après ce qui précède, l'équation se simplifie en :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega), \int_{\partial\Omega} \sigma v \nabla u \cdot n d\Gamma + \int_{\partial\Omega} \lambda u v d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma \implies \forall v \in H^1(\Omega), \int_{\partial\Omega} (\sigma \nabla u \cdot n + \lambda(u - u_c)) v d\Gamma = 0 \\ &\implies \sigma \nabla u \cdot n + \lambda(u - u_c) = 0 \quad \text{dans } L^2(\partial\Omega) \\ &\implies \sigma \nabla u \cdot n + \lambda(u - u_c) = 0 \quad \text{p.p. dans } \partial\Omega \end{aligned}$$

On vient donc bien de montrer que le problème (10) est équivalent à la formulation variationnelle (11). On étudiera donc dans la suite le problème au travers de (11).

3.1.3 Vérification que le problème est bien posé

On veut tout d'abord prouver que le problème de travail est également bien posé. Pour ce faire, on compte appliquer comme précédemment le théorème de Lax Milgram au problème (11) mis sous la forme :

$$\text{Trouvez } u \in V \text{ tq : } \forall v \in V \quad a(u, v) = l(v) \quad (12)$$

Avec :

$$a(u, v) = \alpha \int_{\Omega} u v d\Omega + \int_{\Omega} \sigma \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u v d\Gamma \quad \text{et} \quad l(v) = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma \quad \text{et} \quad V = H^1(\Omega)$$

On vérifie alors que les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont bien toutes vérifiées :

1. **V est un espace de Hilbert :** $H^1(\Omega)$ est en effet un espace de hilbert classique quand il est muni de sa norme usuelle.
2. **l est une forme linéaire continue :** En effet, $l : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ est linéaire par linéarité de l'intégrale et du produit par f et λu_c et pour tout $v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} |l(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} f v d\Omega \right| + \left| \int_{\partial\Omega} \lambda u_c v d\Gamma \right| \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} + |\lambda u_c| \|v\|_{L^2} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz } (L^2) + \text{linéarité de l'intégrale}) \\ &\leq (\|f\|_{L^2} + |\lambda u_c|) \|v\|_{L^2} \\ &\leq C_l \|v\|_V \end{aligned}$$

l est donc bien continue.

3. **a est une forme bilinéaire continue et coercive :** $a : H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ est une forme dont la bilinéarité découle de la linéarité de l'intégrale et du produit. On trouve pour $u, v \in V$

$$\begin{aligned}
|a(u, v)| &\leq \alpha \left| \int_{\Omega} u v d\Omega \right| + \int_{\Omega} |\sigma| \cdot |\nabla u \cdot \nabla v| d\Omega + \lambda \left| \int_{\partial\Omega} u v d\Gamma \right| \quad (\text{inégalité triangulaire} + \text{de la moyenne}) \\
&\leq \alpha \|u\|_V \cdot \|v\|_V + \sigma_{max} \int_{\Omega} |\nabla u \cdot \nabla v| d\Omega + \lambda \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz} \\
&\quad (L^2) + 0 < \sigma < \sigma_{max}) \\
&\leq \alpha \|u\|_V \cdot \|v\|_V + \sigma_{max} \int_{\Omega} \sqrt{\nabla u^2} \cdot \sqrt{\nabla v^2} d\Omega + \lambda C_0^2 \|u\|_V \|v\|_V \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz} \\
&\quad (\mathbb{R}^2) + \text{premier théorème de trace}) \\
&\leq (\alpha + \lambda C_0^2) \|u\|_V \cdot \|v\|_V + \sigma_{max} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwartz } (L^2)) \\
&\leq (\alpha + \lambda C_0^2 + \sigma_{max}) \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad (\|\nabla(\cdot)\|_{L^2(\Omega)} < \|\cdot\|_V)
\end{aligned}$$

L'application a est bien continue. De plus pour $u \in V$:

$$\begin{aligned}
a(u, u) &\geq \alpha \int_{\Omega} u^2 d\Omega + \sigma_{min} \int_{\Omega} \nabla u^2 d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u^2 d\Gamma \quad \text{car } \sigma_{min} > 0 \\
&\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sigma_{min} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Or, on peut démontrer à partir de l'inégalité de Poincaré qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que :

$$\forall v \in V, \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \right]$$

Et en passant au carré :

$$\forall v \in V, \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_p^2 \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right] \leq C_p^2 \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right]$$

Ainsi, pour $u \in V$:

$$\begin{aligned}
a(u, u) &\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \min(\sigma_{min}, \lambda) \left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right] \\
&\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\min(\sigma_{min}, \lambda)}{2} \left[\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right] + \frac{\min(\sigma_{min}, \lambda)}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \alpha \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\min(\sigma_{min}, \lambda)}{2C_p^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\min(\sigma_{min}, \lambda)}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \min\left(\frac{2\alpha C_p^2 + \min(\sigma_{min}, \lambda)}{2C_p^2}, \frac{\min(\sigma_{min} + \lambda)}{2}\right) \|u\|_V^2
\end{aligned}$$

Et comme les termes du minimum sont tous strictement positifs, on en déduit que a est bien coercive. Les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont vérifiées et le problème est bien posé.

3.1.4 Discrétisation du problème (approximation de Galerkin)

On veut une nouvelle fois discrétiser le problème en utilisant les éléments finis de Lagrange P^1 . On introduit alors (de manière analogue au problème de Dirichlet) un nouvel espace de discrétisation $V_h \subset H^1(\Omega)$ de dimension finie défini comme suit :

- Nous définissons un maillage de triangles \mathcal{T}_h sur Ω
- Nous notons $(T_l)_{l=1\dots L}$ les triangles du maillage
- Nous notons $(M_i)_{i=1\dots N}$ les points du maillage
- Nous notons $(w_i)_{i=1\dots N}$ la base de V_h définie tel que w_i est polynomiale d'ordre 1 et nulle sur tout les sommets sauf en M_i où elle vaut 1.

On définit alors V_h tel que :

$$V_h = \text{Vect}(w_1, \dots, w_N)$$

Ainsi la formulation discrète du problème est :

$$\text{Trouvez } u_h \in V_h \text{ tel que : } \forall v_h \in V_h \quad a(u_h, v_h) = l(v_h)$$

Comme V_h est un sous espace vectoriel fermé de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$, nous pouvons dire que c'est aussi un espace de Hilbert une fois associé à la norme H^1 . Ainsi le problème discrétisé admet une unique solution par Lax-Milgram.

Nous appelons, \tilde{u}_h l'unique solution du problème. Comme cette solution est dans $V_h = \text{Vect}(w_1, \dots, w_N)$ elle s'écrit de la façon suivante :

$$\tilde{u}_h = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_i w_i$$

Soit $i \in \{1, \dots, N\}$, comme $w_j(M_i) = \delta_{ij}$:

$$\tilde{u}_h(M_i) = \tilde{u}_i$$

Donc, au final nous trouvons :

$$\tilde{u}_h = \sum_{i=1}^N \tilde{u}_h(M_i) w_i$$

Le problème discrétisé se réécrit :

$$\forall v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N \quad \sum_{i,j=1}^N \tilde{u}_i v_j a(w_i, w_j) = \sum_{j=0}^N v_j l(w_j)$$

Nous posons la matrice :

$$\mathbb{A} = \alpha \mathbb{M} + \mathbb{K} + \lambda \mathbb{S} = (a(w_i, w_j))_{i,j \in \{1, \dots, N\}}$$

Avec

$$\mathbb{M}_{ij} = \int_{\Omega} w_i w_j d\Omega \quad \text{et} \quad \mathbb{K}_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \nabla w_i \nabla w_j d\Omega \quad \text{et} \quad \mathbb{S}_{ij} = \int_{\partial\Omega} w_i w_j d\Gamma$$

Nous posons aussi les vecteur de \mathbb{R}^N :

$$\tilde{U} = (\tilde{u}_h(M_i))_{i \in \{1, \dots, N\}} \quad \text{et} \quad L = (l(w_i))_{i \in \{1, \dots, N\}}$$

Ainsi, \tilde{u}_h vérifie :

$$\forall V \in \mathbb{R}^N \quad {}^t V \mathbb{A} \tilde{U} = {}^t V L$$

C'est en particulier vrai pour $V = \mathbb{A} \tilde{U} - L$ donc $\mathbb{A} \tilde{U} - L = 0$. Et nous obtenons :

$$\mathbb{A} \tilde{U} = L$$

On voit encore une fois grâce à la coercivité de a que la matrice \mathbb{A} est définie positive et donc inversible. Pour trouver la solution \tilde{U} , on inversera la matrice \mathbb{A} et :

$$\tilde{U} = \mathbb{A}^{-1} L$$

3.2 Algorithmes de résolution numérique

3.2.1 Calcul des matrices

Le problème discrétisé pour les conditions de Fourier étant très similaire au problème de Dirichlet, le principe de l'algorithme de résolution reste inchangé. Il faudra cette fois, néanmoins, prendre en compte les contributions au bord pour le calcul de \mathbb{A} et F .

Pour calculer \mathbb{A} , on procède similairement : Pour chaque triangle T_l avec $l \in \{1, \dots, L\}$ (les sommets de T_l sont notés : M_{l_1}, M_{l_2} et M_{l_3}) :

— On calcule les matrices élémentaires \mathbb{M}_l et \mathbb{K}_l qui vérifient :

$$\mathbb{K}_l = \left(\int_{T_l} \sigma \nabla w_{l_p} \nabla w_{l_k} d\Omega \right)_{p,k \in \{1,2,3\}} \quad (13)$$

Et :

$$\mathbb{M}_l = \left(\int_{T_l} w_{l_p} w_{l_k} d\Omega \right)_{p,k \in \{1,2,3\}} \quad (14)$$

— Pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$, on fais encore :

$$(\mathbb{M})_{l_i l_j} = (\mathbb{M})_{l_i l_j} + (\mathbb{M}_l)_{ij}$$

et

$$(\mathbb{K})_{l_i l_j} = (\mathbb{K})_{l_i l_j} + (\mathbb{K}_l)_{ij}$$

Pour prendre en compte les contributions au bord, on boucle cette fois sur toutes les arêtes S_a avec $a \in \{1, \dots, A\}$, A étant le nombre d'arêtes (les extrémités de S_a sont notées : M_{a_1} et M_{a_2}) et pour chaque arête $S_a = [M_{a_1}, M_{a_2}]$:

— On calcule la matrice élémentaire de bord :

$$\mathbb{S}_a = \left(\int_{[M_{a_1}, M_{a_2}]} \mathbf{1}_{\partial\Omega} w_{a_p} w_{a_k} d\Gamma \right)_{p,k \in \{1,2\}} = \left(\mathbf{1}_{[M_{a_1}, M_{a_2}] \subset \partial\Omega} \int_{[M_{a_1}, M_{a_2}]} w_{a_p} w_{a_k} d\Gamma \right)_{p,k \in \{1,2\}} \quad (15)$$

— Puis pour $i, j \in \{1, 2\}$, on ajoute les contributions :

$$(\mathbb{S})_{a_i a_j} = (\mathbb{S})_{a_i a_j} + (\mathbb{S})_{ij}$$

On obtiendra par suite \mathbb{A} avec :

$$\mathbb{A} = \alpha \mathbb{M} + \mathbb{K} + \lambda \mathbb{S}$$

. Puis, pour calculer :

$$L_i = \int_{\Omega} f w_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \lambda u_c w_i d\Gamma = L_i^1 + L_i^2$$

On réalise pour la première intégrale une interpolation de f dans V_h comme précédemment en nous supposant dans le cas particulier où $S \in C^0(\bar{\Omega})$ donc $f \in C^0(\bar{\Omega})$:

$$f = \sum_{i=1}^N f(M_i) w_i$$

Si nous considérons de vecteur $F = (f(M_i))_{0 \leq i \leq N}$, nous avons L^1 qui s'obtient par la formule :

$$L^1 = \mathbb{M}F \quad (16)$$

La seconde intégrale est calculable d'une manière similaire. On suppose que $T_c \in C^0(\partial\bar{\Omega})$. On peut en réalité supposer que $T_c \in C^0(\bar{\Omega})$ par prolongement sans pour autant changer le problème car T_c n'y intervient que sur le bord. On a donc $u_c \in C^0(\bar{\Omega})$ et on peut réaliser l'interpolation :

$$u_c \simeq \pi u_c = \sum_{i=1}^N u_c(M_i) w_i$$

et en considérant le vecteur $U_c = (u_c(M_i))_{0 \leq i \leq N}$, on obtient l'approximation de L^2 par la formule :

$$L^2 \simeq \lambda S U_c$$

Ainsi, le vecteur L s'obtient par somme des vecteurs L^1 et L^2 .

3.2.2 Calcul des matrices élémentaires

Les matrices élémentaires de masse et de rigidité sont calculées par la même méthode que dans le cas du problème de Dirichlet. Pour ce qui est des matrices élémentaires de masse de bord, il suffit de remarquer qu'en notant s l'abscisse curviligne de parcours du segment $[M_{l_p}, M_{l_q}]$, les fonctions $w_{l_i}, i = 1..3$ étant polynômiales d'ordre 1 telles que $\forall I, J \in \{1, \dots, N\}, w_I(M_J) = \delta_{ij}$, on a :

$$\begin{aligned} \forall p, q \in \{1, 2, 3\}, \int_{[M_{l_p}, M_{l_q}]} w_{l_p} w_{l_q} d\Gamma &= \int_{s=0}^{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||} \frac{s(||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}|| - s)}{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^2} ds \\ &= \frac{1}{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^2} \left[\int_{s=0}^{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||} s ||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}|| ds - \int_{s=0}^{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||} s^2 ds \right] \\ &= \frac{1}{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^2} \left[\frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^3}{2} - \frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^3}{3} \right] \\ &= \frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||}{6} \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \forall p, q \in \{1, 2, 3\}, \int_{[M_{l_p}, M_{l_q}]} w_{l_p} w_{l_p} d\Gamma &= \int_{s=0}^{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||} \frac{s^2}{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^2} ds \\ &= \frac{1}{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^2} \times \frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||^3}{3} \\ &= \frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||}{3} \end{aligned}$$

où $||\cdot||$ désigne ici la norme euclidienne dans \mathbb{R}^2 . On remarquera également que par symétrie :

$$\forall p, q \in \{1, 2, 3\}, \int_{[M_{l_p}, M_{l_q}]} w_{l_q} w_{l_p} d\Gamma = \frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||}{6} \quad \text{et} \quad \int_{[M_{l_p}, M_{l_q}]} w_{l_q} w_{l_q} d\Gamma = \frac{||\overrightarrow{M_{l_p} M_{l_q}}||}{3}$$

3.2.3 Erreur numérique

Avec ces modification, le maillage est toujours régulier et la régularité locale de la solution est préservée pour tout maillage de pas h :

$$\forall l \in \{1, L\}, u \in H^2(\Omega)$$

On aura donc toujours :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^2$$

Et :

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C'h$$

et donc convergence de la méthode.

3.3 Code pratique dans Matlab

Le principe général du code restant inchangé, on spécifiera ici seulement les modifications importantes devant être apportées au code pour l'adapter au nouveau problème de type Neumann.

Les modification correspondent en réalité au calcul de la matrice \mathbb{S} . Après le calcul des matrices \mathbb{M} et \mathbb{K} , on boucle alors sur les arêtes en calculant pour chacune la matrice élémentaire :

```
Se1 = mat_elem_surface(Coorneu(Numaretet(a,1),:),Refaretet(a))}
```

La fonction `mat_elem_surface` prend en argument les coordonnées de deux sommets et une référence d'arête. Si la référence d'arête est nulle, c'est que l'arête n'est pas au bord du domaine et alors `Se1` est une matrice 2×2 nulle et sinon elle est calculée selon les formules démontrées à la page précédente.

On n'oubliera pas non plus de ne plus appliquer la méthode de pseudo-élimination car on ne travaille ici plus dans $H_0^1(\Omega)$ mais dans $H^1(\Omega)$ plus généralement.

3.4 Vérification des résultats

On souhaite trouver une solution de notre problème de Neumann dans un cas simple. Or, on vérifie que dans le cas où : $\alpha = 1, \sigma = 1$ et $\lambda = 1$:

$$\bar{u}(x, y) = \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$$

est bien solution du problème :

$$\text{Trouvez } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n + u - u_c = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (17)$$

Pour $f : (x, y) \mapsto (1 + 5\pi^2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ sur Ω et $u_c : (x, y) \mapsto \cos(\pi x) \cos(2\pi y)$ sur $\partial\Omega$.

On réalise alors la résolution numérique pour un pas $h = 0.05$ et on observe le résultat :

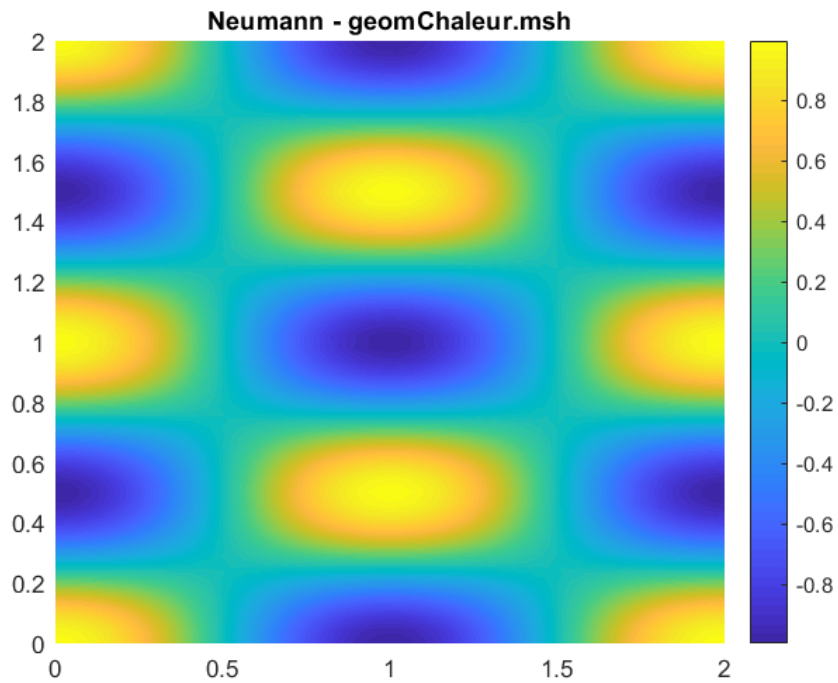


FIGURE 9 – Résolution numérique avec un pas de $h = 0.05$

On remarque que l'aspect de l'approximation obtenue est identique à celui de la fonction u . L'ensemble des valeurs balaye continûment l'intervalle $[-1, 1]$ et la fréquence des oscillations semble deux fois supérieure dans les direction des ordonnées.

On peut également représenter $|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h|$ où π_h l'interpolation de l'ensemble des fonctions continues dans V_h au pas $h = 0.05$:

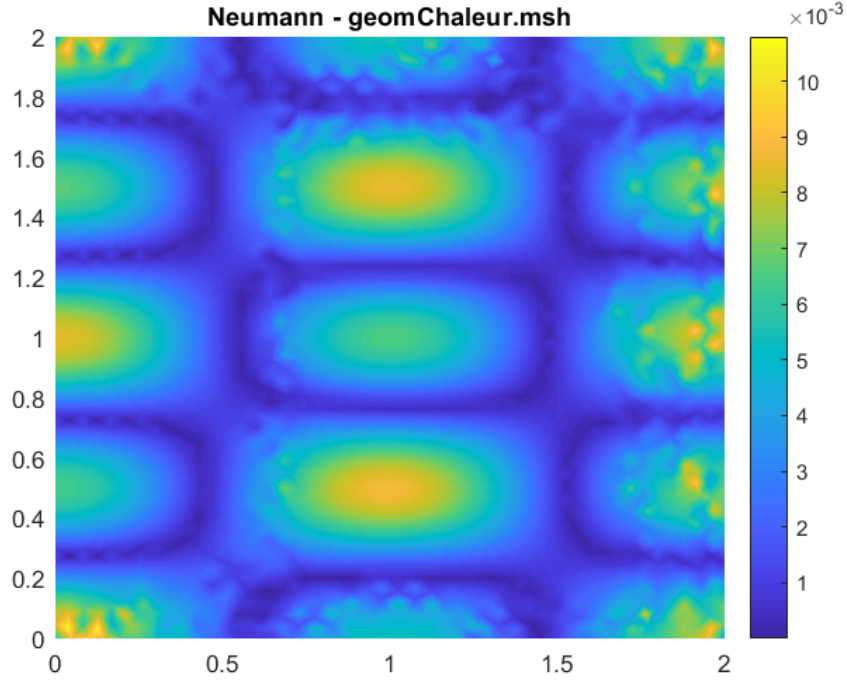


FIGURE 10 – $|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h|$ avec un pas de $h = 0.05$

On remarque que les erreurs restent de l'ordre de 10^{-3} et sont maximales aux points d'extrema de la fonction \tilde{u}_h .

On peut enfin calculer l'erreur d'interpolation L^2 comme dans le cas du problème de Dirichlet et on trouve :

$$\|\pi_h \tilde{u} - \tilde{u}_h\|_{L^2(\Omega)}^2 = 6.0236 \times 10^{-05}$$

Quant aux erreurs liées à la discrétisation, on trace de même l'évolution du log leur approximation en échelle logarithmique de h :

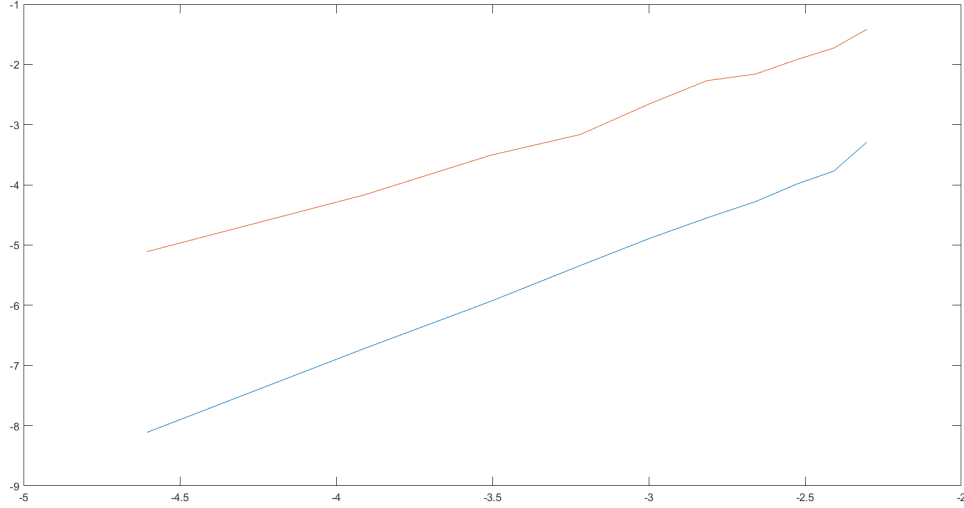


FIGURE 11 – log de erreur L^2 (en bleu) et de la semi-norme H^1 (en orange). En abscisse, il y a $\log(h)$ avec h le pas du maillage allant de 0.01 à 0.1. Nous avons fait 10 mesures

On remarque alors bien que la pente reste de valeur 2. La pente de l'erreur de la semi-norme H^1 est quant à elle de 1,5 environ. A première vue, nous avons pensé que c'est pas normal. On a en effet vu que cette erreur devait être majorée par une fonction affine. Nous pouvons émettre plusieurs hypothèses qui justifieraient ce résultat :

- Les erreurs de quadrature ne sont en fait pas négligeables et introduisent une erreur de l'ordre de $Ch^{\frac{3}{2}}$.
- Il est possible d'avoir $C'h^{\frac{3}{2}} < Ch$ si $C' > C$ et que h soit pas trop petit. Ainsi on peut émettre l'hypothèse que pour h plus petit la pente devrait tendre vers 1. On ne peut malheureusement pas vérifier cette hypothèse car pour $h < 0.01$ les temps de calcul sont trop grands.

3.5 Application

Nous souhaitons appliquer la méthode décrite précédemment au problème de Fourier dans le cas particulier d'un terme S sous forme de produit de deux sinus de même fréquence spatiale :

$$S(x, y) = \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2)$$

avec de plus $\alpha = 1$, $\sigma = 1$ et $\lambda = 0$. On prendra également et on se ramène alors au problème :

$$\text{Trouvez } u \in H^1(\Omega) \text{ telle que : } \begin{cases} u - \Delta u = S - \alpha T_\Gamma & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (18)$$

On retombe alors sur un problème équivalent à une formulation variationnelle analogue à celle de la partie 1 mais cette fois dans l'espace $H_1(\Omega)$ tout entier. On obtient alors :

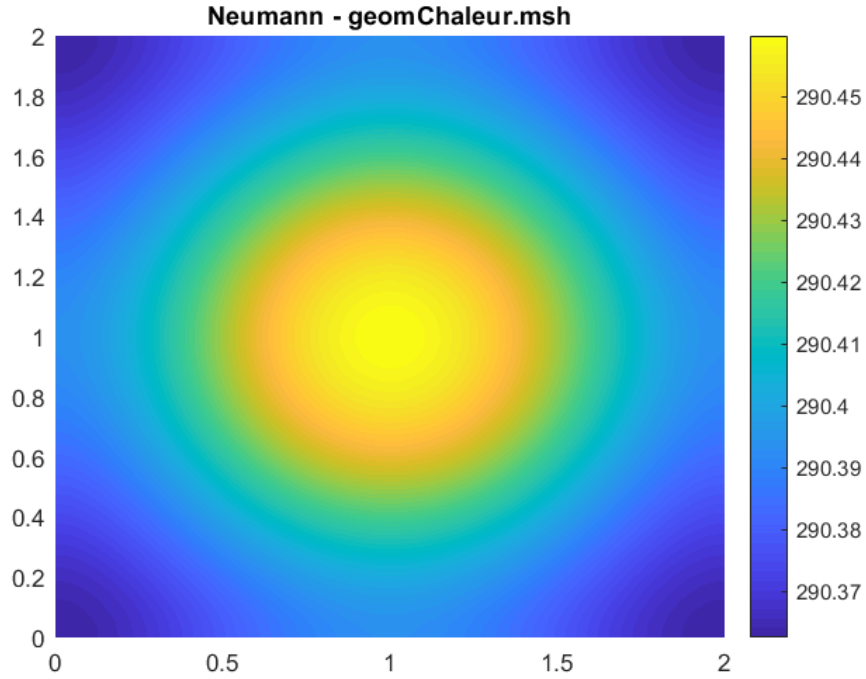


FIGURE 12 – Tracé de T pour un pas de 0.05

On remarque que lignes de niveau de la températures semblent toutes s'aligner à la normale du bord lorsqu'elles arrivent à son voisinage. Ceci est cohérent avec la condition au bord $\partial\Omega : \nabla u \cdot n = 0$, le gradient ∇u étant orthogonal aux lignes de niveau.

On reprend ensuite la modélisation d'hétérogénéité de la pièce utilisée pour le problème de Dirichlet où $\alpha = 1$, $\sigma_1 = 5$, $\sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x)(2 + \sin(16\pi y)))$, $T_\Gamma = 290$ et on ajoute en plus $\lambda = 1$ ainsi que $T_c = 290$. On trace ci-dessous la figure obtenue :

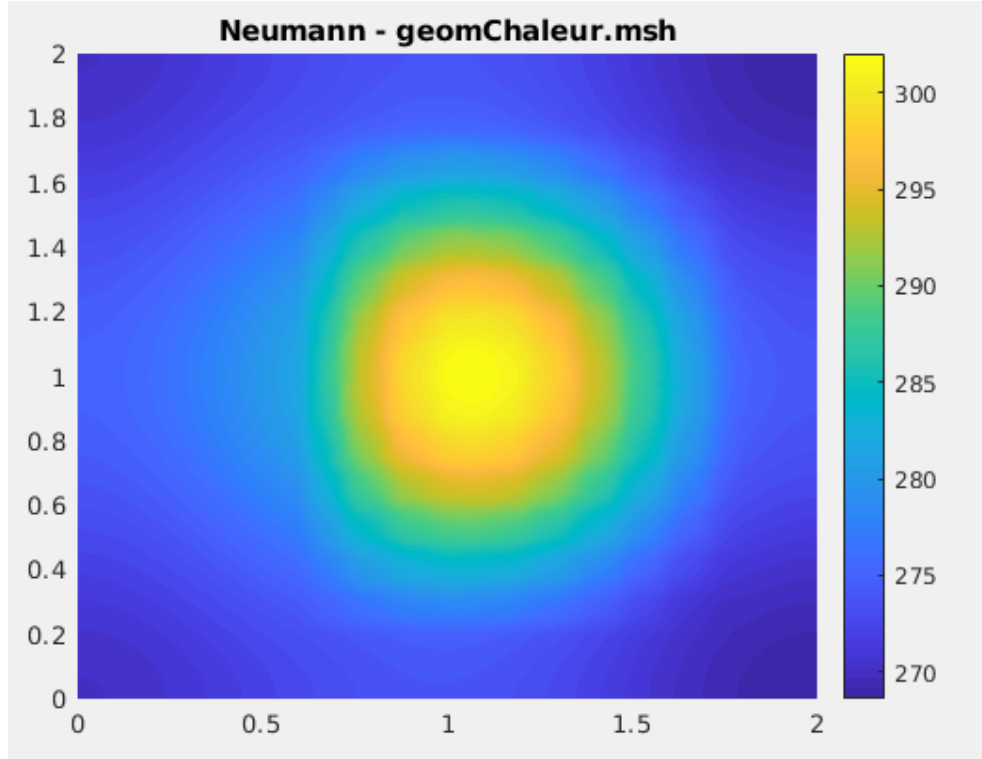


FIGURE 13 – Tracé de T pour un pas de 0.05

On remarque encore qu'au niveau des bord les lignes de niveau de la température semblent s'aligner avec la normale du bord au niveau de son voisinage. En effet, plus on est proche du bord, plus la différence $T - T_c \simeq 0$ ce qui implique que $\nabla u \cdot n \simeq 0$.

4 Equation de la chaleur instationnaire avec des conditions aux limites mixtes

Ce problème est une combinaison des deux problèmes précédents mais avec cette fois le temps qui intervient. Nous ne détaillerons que la démarche que nous avons prise pour surmonter la dimension temporelle.

4.1 Formulation du problème

Nous souhaitons résoudre le problème suivant :

$$\text{Trouvez } T(t) \in H^1(\Omega) \text{ tq : } \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times [0, t_{\max}[\\ T_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \times [0, t_{\max}[\end{cases}$$

La définition des variables est la même que précédemment et cette fois S dépend du temps. Nous introduisons de plus T_0 une fonction de $H^1(\Omega)$.

Comme dans le premier problème, nous pouvons introduire la fonction $u = T + T_\Gamma$. Le problème se reformule alors :

$$\text{Trouvez } u(t) \in H_0^1(\Omega) \text{ tq : } \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = S & \text{dans } \Omega \times [0, t_{\max}[\\ u_{t=0} = u_0 = T_0 + T_\Gamma & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

Pour se débarrasser du terme qui gêne : $\frac{\partial u}{\partial t}$, nous allons discrétiser l'espace temporel avec un pas Δt et noter :

$$u^k = u(t = k\Delta t)$$

Puis à l'aide d'un schéma implicite nous allons faire l'approximation :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{k+1} = \frac{u^{k+1} - u^k}{\Delta t}$$

Ainsi, si en posant $\alpha = \frac{1}{\Delta t}$ et $K = \lfloor \frac{t_{\max}}{\Delta t} \rfloor$, nous sommes ramenés au problème suivant pour $k \in \llbracket 1, K-1 \rrbracket$:

$$\text{Trouvez } u^k \in H_0^1(\Omega) \text{ tq : } \begin{cases} \alpha u^{k+1} - \operatorname{div}(\sigma \nabla u^{k+1}) = S + \alpha u^k \\ u^0 = u_0 \end{cases}$$

Comme $u^k \in L^2(\Omega)$, nous sommes ramené au problème 1 avec $f = S + \alpha u^k$.

Et donc, comme au problème 1, nous avons existence et unicité de la solution par Lax-Milgram.

En reprenant l'espace discrétisé des problèmes précédent, nous pouvons réécrire le problème sous forme discrétisé en notant U^k le vecteur de \mathbb{R}^N correspondant à u^k :

$$\begin{cases} U^0 = (u_0(M_i))_{i \in \{1, \dots, N\}} \\ \mathbb{A}U^{k+1} = \mathbb{M}(F + \alpha U^k) = L^{k+1} \end{cases}$$

Pour prendre l'interpolée, nous devons supposer u_0 et S continues. Et F sera l'interpolée de S (si cette condition est vérifiée) :

$$F = (S(M_i))_{i \in \{1, \dots, N\}}$$

4.2 Application

Le code ne vas pratiquement pas changer par rapport au problème 1. Il faut juste garder en mémoire les U^k pour mettre à jour L .

Il faut d'abord tester le code. Pour cela nous choisissons :

$$S = 3\pi^2 \sin(\pi y) \sin(\pi x) e^{\pi^2 t}$$

Et :

$$u_0 = \sin(\pi y) \sin(\pi x)$$

Avec $\sigma = 1$ et $T_\Gamma = 0$

Il est alors facile de voir que :

$$u = \sin(\pi y) \sin(\pi x) e^{\pi^2 t}$$

est solution du problème.

Représentons la solution à l'instant $t = 0.1$:

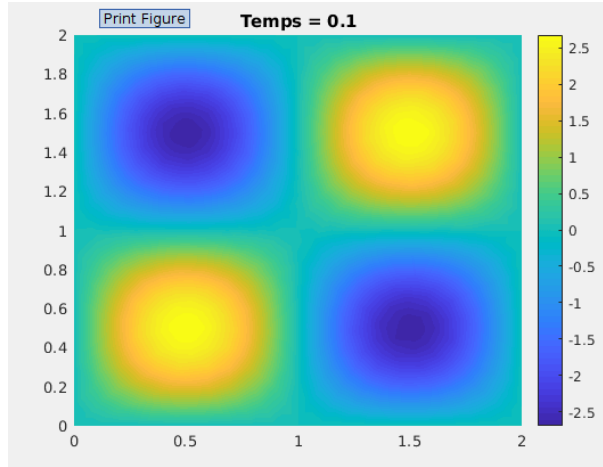


FIGURE 14 – Avec $\Delta t = 0.01$ et $h = 0.1$.

Nous remarquons qu'on a bien la solution cherchée. En effet, les valeurs extrémales sont aux 4 points $(1 \pm \frac{1}{2}, 1 \pm \frac{1}{2})$. Et elles sont égales à environ ± 2.5 et $e^{0.1\pi^2} = 2.68$.

Maintenant que nous avons vérifié que le code marchait correctement. Nous pouvons chercher la solution au problème où :

$$\sigma_2 = \frac{1}{4}(2 + \sin(16\pi x)(2 + \sin(16\pi y))) \text{ et } \sigma_1 = 5$$

De plus :

$$T_0 = 300 \text{ et } T_\Gamma = 280 \text{ et } S = 600 \exp \left(- \left(\frac{x-1}{0.8} \right)^2 - \left(\frac{y-1}{0.8} \right)^2 \right) e^{-5t}$$

Imaginons le comportement cohérent :

Au début nous devrions avoir un fort laplacien de température aux extrémités du domaine. Ainsi nous aurons $\frac{\partial T}{\partial t}$ négatif sur le bord est positif au centre. Nous allons donc avoir une carte de chaleur similaire à celle du problème 1. Mais ensuite (car S tend vers 0) l'état final stationnaire vérifiera :

$$\Delta T = 0 \text{ et } T_\Gamma$$

Donc quand t tend vers l'infini la température va tendre vers T_Γ .

Lorsque nous observons le résultat il est similaire à nos prédictions. C'est donc rassurant.

Comme il est difficile de représenter l'évolution d'une carte de température, je vais représenter la température en différents points :

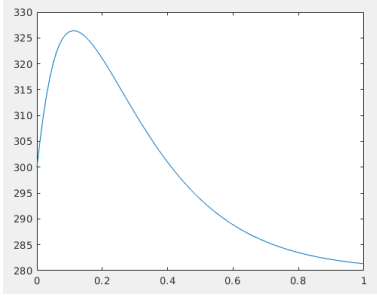


FIGURE 15 – (1, 1)

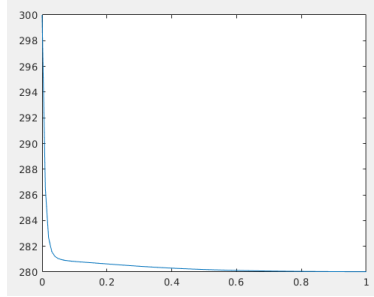


FIGURE 16 – (1.8, 1.8)

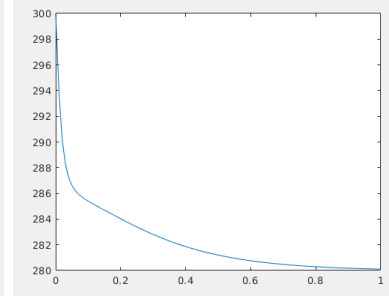


FIGURE 17 – (0.6, 0.3)

FIGURE 18 – Pour $h = 0.01$ et $\Delta t = 0.01$ en ordonnée la température et le temps en abscisse

4.3 Combinaison de plusieurs types de conditions aux limites

Nous appelons $\partial\Omega_1$ le côté gauche de $\partial\Omega$ et $\partial\Omega_2 = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_1$. Nous souhaitons cette fois ajouter une condition de fourier sur le bord $\partial\Omega_1$. Ainsi le problème à résoudre est :

$$\text{Trouvez } T(t) \in H^1(\Omega) \text{ tq : } \begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\sigma \nabla T) = S & \text{dans } \Omega \times [0, t_{\max}[\\ T_{t=0} = T_0 & \text{dans } \Omega \\ T = T_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega_2 \times [0, t_{\max}[\\ T = \sigma \frac{\partial T}{\partial n} + \lambda(T - T_c) & \text{sur } \partial\Omega_1 \times [0, t_{\max}[\end{cases}$$

Comme il s'agit de la même chose que ce qui a été vu précédemment, nous n'expliquerons pas les résultats suivants :

Le problème à résoudre est :

$$\begin{cases} U^0 = (u_0(M_i))_{i \in \{1, \dots, N\}} \\ \mathbb{A}U^{k+1} = L^{k+1} \end{cases}$$

Avec $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \alpha \mathbb{M} + \lambda \mathbb{S}$. Et $L^{k+1} = \mathbb{M}(F + \alpha U^k) + \lambda \mathbb{S}U_c^{k+1}$. Avec les mêmes notations que précédemment.

Et cette fois nous avons utilisé une technique de pseudo-élimination que sur Ω_2

4.3.1 Résultat

Pour ce qui est du code, c'est presque le même qu'à la section 4.1 sauf que cette fois il faut ajouter les termes liés à la condition de Fourier. La difficulté est de faire en sorte que la fonction `elimine` élimine que les termes de $\partial\Omega_2$. pour cela il suffit de changer les données du maillage. Nous changerons `Refneu` de manière à qu'il donne une référence de -1 aux éléments de $\partial\Omega_1$. Une manière simple de repérer les noeuds de $\partial\Omega_1$ est de regarder si l'abscisse du point est égal à 0.

```
for i=1:Nbpt
    if Coorneu(i,1) == 0
        Refneu(i)=-1;
    end
end
```

Donc avec des conditions aux limites multiples :

$$T_\Gamma = 280 \text{ et } T_0 = 300 \text{ et } T_c = 290 \text{ et } \lambda = 1$$

Avec le même σ et S qui sont les même que précédemment.

J'obtiens pour $t = 1$:

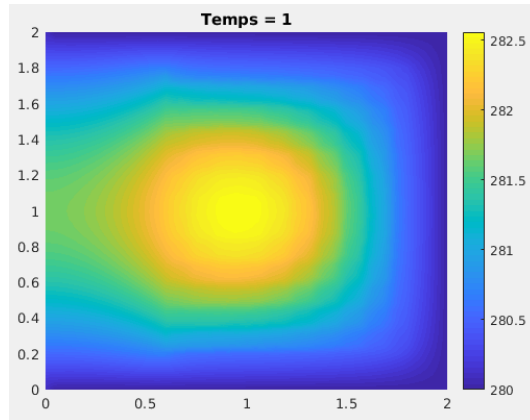


FIGURE 19 – Carte de température à $t = 1$ pour des pas $h = 0.05$ et $\Delta t = 0.01$

Cette fois grâce à condition de Fourier, la température n'est plus fixée sur le bord gauche. Et un flux de chaleur semble venir de ce bord. Ce qui est cohérent car $T_c > T$.

Nous pouvons imaginer le cas où la porte de la pièce est ouverte c'est à dire T_c faible (nous choisissons $T_c = 280 - 2000 \min(t, 0.1)$ pour simuler l'ouverture d'une pièce). Nous choisirons cette fois S constant dans le temps (privé de e^{5t}).

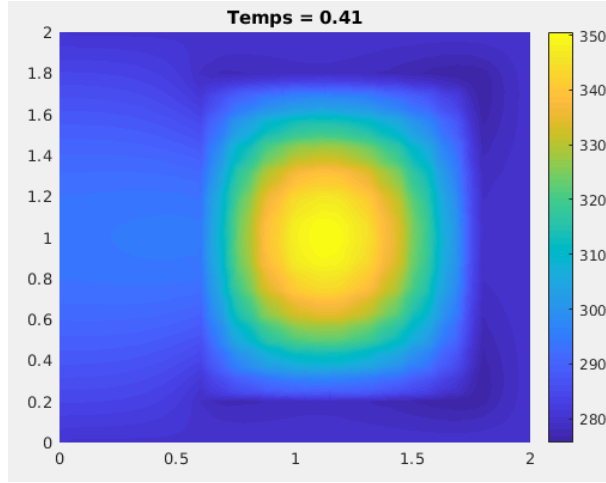


FIGURE 20 – Avec un pas de $h = 0.05$ et $\Delta t = 0.05$

Nous voyons un flux de chaleur qui s'échappe par l'ouverture de la pièce ce qui est cohérent. De plus, la température de la pièce ne diminue pas car elle garde une source de chaleur au centre et sur les bords. On observe encore le phénomène d'absorption dans le domaine Ω_1

Il est possible de faire plein d'autres choses comme résoudre un problème de minimisation qui nous donne une source telle que la température est constante dans tous le domaine.

4.4 Erreur liée à Δt

Dans le cas des problèmes hyperbolique, nous savons que la stabilité et la convergence d'un schéma numérique dépend parfois du paramètre :

$$\alpha = c \frac{\Delta t}{h}$$

Nous allons essayer de voir si un critère similaire s'applique dans notre cas.

Pour analyser ces erreurs, nous allons considérer $\sigma = 1$, $\lambda = 1$ et :

$$\begin{aligned} S(x, y, t) = & \left(4 + \left(\frac{9}{4} \right)^2 + 16t^2 \right) \pi^2 \cos\left(\frac{9}{4}\pi x\right) \sin(2\pi y) \sin(4\pi t y) + 4\pi y \cos\left(\frac{9}{4}\pi x\right) \sin(2\pi y) \cos(4\pi t y) \\ & - 16\pi^2 t \cos\left(\frac{9}{4}\pi x\right) \cos(2\pi y) \cos(4\pi t y) \end{aligned}$$

Et (sur le bord) :

$$T_c(x, y, t) = \cos\left(\frac{9}{4}\pi x\right) \sin(2\pi y) \sin(4\pi t y)$$

Avec de telles conditions, la solution est :

$$u(x, y, t) = \cos\left(\frac{9}{4}\pi x\right) \sin(2\pi y) \sin(4\pi t y)$$

Nous avons volontairement pris une fonction compliquée pour pouvoir avoir des erreurs qui sont plus importantes pour la variation de ΔT .

La solution u est de la forme suivante :

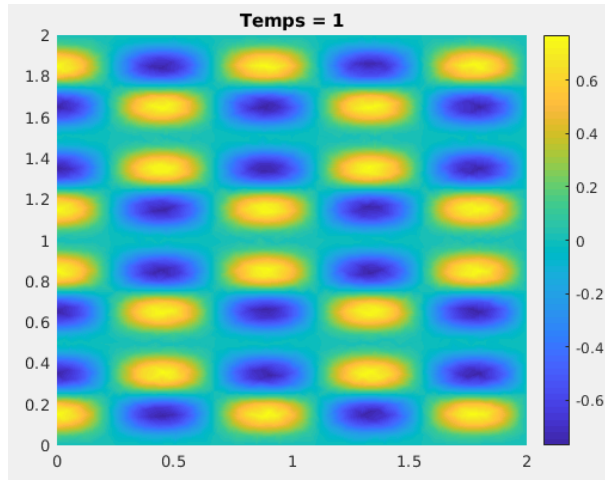


FIGURE 21 – Avec un pas de $h = 0.01$

Nous obtenons :

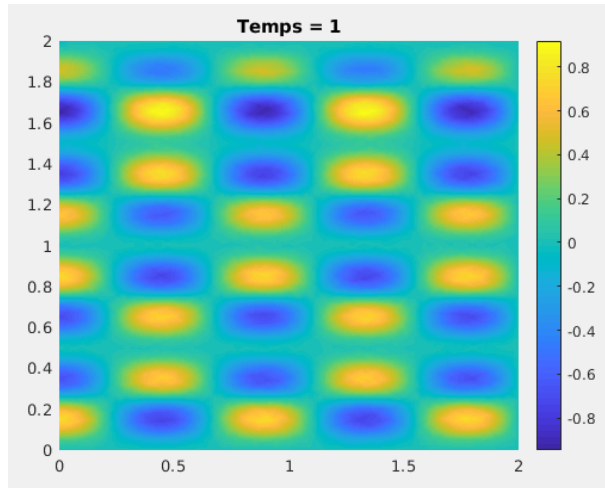


FIGURE 22 – Avec un pas de $h = 0.05$ et $\Delta t = 0.01$

Le résultat est similaire à ce qu'on devait obtenir. C'est donc rassurant pour la validité de notre code.

Traçons l'erreur à h fixé :

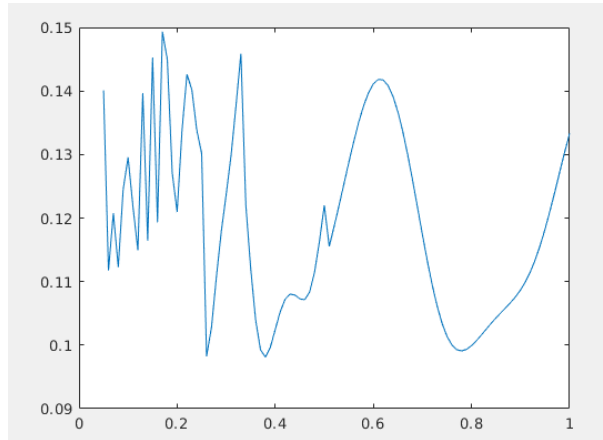


FIGURE 23 – Avec un pas de $h = 0.05$ et Δt allant de 0.05 à 1

Nous observons que l'erreur L^2 ne diminue pas quand le pas Δt diminue.

Nous ne pouvons donc pas décider d'un critère de stabilité. Et pire, nous n'avons pas de critère (Δt petit) pour choisir Δt .

5 Conclusion

Nous avons donc montré qu'il était possible d'avoir une bonne approximation des solutions de problèmes elliptiques. Ces problèmes permettent de résoudre des problèmes physiques comme connaître la distribution de la chaleur dans une pièce.

Mais il faut cependant faire attention au pas de la discrétisation pour avoir la meilleure discrétisation possible.

Nous avons rencontré dans ces problèmes divers problèmes que nous n'avons pas forcément évoqué (on les a même parfois ignoré) dans le rapport :

1. Il faut avoir un code avec la plus faible complexité possible afin de pouvoir choisir des pas petits.
2. Il faut choisir les formules de quadratures qui minimisent l'erreur est la complexité.
3. Matlab effectue une approximation dans la résolution du système linéaire :

$$AU = L$$

qui n'est pas forcément négligeable.

De plus l'erreur $\delta\mathbb{A}$ peut être amplifiée dans la résolution. Il faudrait choisir une méthode appropriée à chaque problème qui équilibre la complexité et l'erreur.

4. Dans le cas de l'ajout de la variable temporelle, l'erreur liée à la discrétisation du temps Δt est un mystère.