

## Projet FQ301

---

---

# Option sur maximum (Floatting lookback put)

---

---

**Réalisé par :**  
Virginie DAUL  
Victor PRISER  
Florian SEIGNAT  
Louis-Paul VELLUET

**Encadrant :**  
Alessandro ZILIO

Année universitaire : 2021-2022

# 1 Introduction

On considère un sous-jacent qui vérifie, sous la probabilité risque neutre, l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = S_t (r dt + dB_t)$$

On note  $M_t = \max_{0 \leq \tau \leq t} S$  la valeur maximale sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ .  
Le prix de l'option à l'instant  $t$  est :

$$e^{-r(T-t)} \mathbf{E}[\varphi(S_T, M_T) \mid \mathcal{F}_t]$$

où  $\varphi(S_T, M_T)$  est le payoff de l'option.

D'après l'énoncé, le prix à l'instant  $t$  peut s'écrire  $V(t, S_t, M_t)$  où  $V = V(t, S, M)$  est solution de l'EDP suivante :

$$\begin{cases} -\partial_t V - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_{SS} V - rS \partial_S V + rV = 0 & 0 \leq S \leq M, 0 \leq t \leq T \\ V(T, S, M) = \varphi(S, M) & 0 \leq S \leq M \\ \partial_M V(t, S, S) = 0 & S \geq 0 \end{cases}$$

On considérera le cas du payoff du floating lookback put qui s'écrit :  
 $\varphi(S, M) = M - S$ .

Après avoir explicité le système d'EDP par un changement de variable, l'objectif sera d'approcher numériquement la solution du système trouvé par les méthodes de différences finies étudiées en cours, d'en préciser les conditions de stabilité pour chacune, et la conformité de leur ordre numérique avec celui de la théorie.

## 2 Système d'EDP

Tout d'abord, nous montrons dans cette partie que si  $V = MW(t, S/M)$ , alors  $W$  vérifie l'EDP suivante :

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\partial_t W - \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx} W - rx \partial_x W + rW = 0 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T, \\ W(T, x) = \tilde{\varphi}(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ \partial_x W(t, 1) = W(t, 1) & t > 0 \end{cases}$$

avec  $\tilde{\varphi}(x)$  une fonction que nous allons préciser.

On pose donc :

$$W\left(t, \frac{S}{M}\right) = \frac{1}{M} V(t, S, M)$$

$$\varphi = M - S$$

On doit cependant noter que ce changement de variable doit être bijectif afin de pouvoir revenir au problème initial. Ce n'est pas évident car on passe d'une fonction

à 3 variables à une fonction à 2 variables. Ainsi, pour être bijectif, il faut que :

$$\frac{1}{Mx}V(t, Sx, Mx)$$

soit indépendant de  $x$ . On peut voir que cette condition est bien vérifiée grâce à la formule fermée. On supposera pas la suite que la fonction solution du problème de discrétisation vérifie aussi cette condition.

En prenant  $x = \frac{S}{M}$ , on exprime les dérivées de  $V$  en fonction de  $W$  :

$$\begin{aligned}\partial_t V(t, S, M) &= M \partial_t W(t, x) \\ \partial_S V(t, S, M) &= \partial_x W(t, x) \\ \partial_{SS} V(t, S, M) &= \frac{1}{M} \partial_{xx} W(t, x)\end{aligned}$$

Les conditions initiales s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{aligned}W(T, x) &= \frac{1}{M} V(T, S, M) = \frac{1}{M} \varphi(S, M) = 1 - x \\ \partial_M V(t, S, S) &= W(t, 1) - \frac{S}{S} \partial_x W(t, 1) = 0\end{aligned}$$

En remplaçant les termes dans le système et en divisant par  $M$  dans la première EDP, on obtient :

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\partial_t W - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} W - rx \partial_x W + rW = 0 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \\ W(T, x) = 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ \partial_x W(t, 1) = W(t, 1) & t > 0 \end{cases}$$

On trouve  $\tilde{\varphi}(x) = 1 - x$ .

Enfin, on inverse le temps par le changement de variable  $t \longrightarrow T - t$  de manière à avoir une condition initiale. On obtient :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \partial_t W - \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \partial_{xx} W - rx \partial_x W + rW = 0 & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T \\ W(0, x) = 1 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ \partial_x W(t, 1) = W(t, 1) & t > 0 \end{cases}$$

On peut désormais s'intéresser à la discrétisation du système.

### 3 Discrétisation par différences finies

Soient  $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_N = 1$  et  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_J = T$  les points du maillage  $(x_i = ih, t_j = jk)$  pour  $h = 1/(N+1)$  et  $k = T/(J+1)$ ,  $N, J \in \mathbb{N}_0$  et  $i = 0, \dots, N$  et  $j = 1, \dots, J$ .

On écrira comme dans le cours  $\mathcal{W}_{i,j}$  la solution au nœud  $(t_j, x_i)$ ,  $\mathcal{W}^j = [\mathcal{W}_{0,j}, \dots, \mathcal{W}_{N-1,j}]^T$  et  $\Pi^j(W) = [W(t_j, x_0), \dots, W(t_j, x_{N-1})]^T$ .

Ainsi, en utilisant, conformément à l'énoncé, le schéma centré pour la discrétisation en espace, on écrit  $\forall i \in \{1, \dots, N-1\}$  :

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(t_j, x_i) - r x_i \frac{\partial}{\partial x} W(t_j, x_i) + r W(t_j, x_i) \\ \simeq -\frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{W(t_j, x_{i+1}) - 2W(t_j, x_i) + W(t_j, x_{i-1}))}{h^2} \\ - r x_i \frac{W(t_j, x_{i+1}) - W(t_j, x_{i-1}))}{2h} + r W(t_j, x_i) \end{aligned}$$

Pour  $i = N$ , on utilise la condition au bord pour une discrétisation centrée en écrivant :

$$\begin{aligned} W(t_j, x_N) = \frac{\partial}{\partial x} W(t_j, x_N) &\simeq \frac{W(t_j, x_{N+1}) - W(t_j, x_{N-1}))}{2h} \\ \implies W(t_j, x_{N+1}) &= 2hW(t_j, x_N) + W(t_j, x_{N-1}) \end{aligned}$$

Cette expression nous permet d'avoir une expression explicite de  $W_N$ . Donc en remplaçant dans l'expression :

$$\begin{aligned} -\frac{\sigma^2 x_N^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(t_j, x_N) - r x_N \frac{\partial}{\partial x} W(t_j, x_N) + r W(t_j, x_N) \\ \simeq -\frac{\sigma^2 x_N^2}{2} \frac{W(t_j, x_{N+1}) - 2W(t_j, x_N) + W(t_j, x_{N-1}))}{h^2} \\ - r x_N \frac{W(t_j, x_{N+1}) - W(t_j, x_{N-1}))}{2h} + r W(t_j, x_N) \\ \simeq -\frac{\sigma^2 x_N^2}{2h^2} (2W(t_j, x_{N-1}) + 2(h-1)W(t_j, x_N)) \\ - r x_N W(t_j, x_N) + r W(t_j, x_N) \end{aligned}$$

Finalement, on peut écrire,  $\forall i \in \{1, \dots, N\}$  :

$$-\frac{\sigma^2 x_i^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} W(t_j, x_i) - r x_i \frac{\partial}{\partial x} W(t_j, x_i) + r W(t_j, x_i) \simeq \left( \mathbb{A} \Pi^j(W) \right)_i$$

où la matrice  $\mathbb{A}$  est :

$$\mathbb{A} = -\frac{\sigma^2}{2h^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_1^2 & -2x_1^2 & x_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & -2x_2^2 & x_2^2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2x_{N-1}^2 & x_{N-1}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x_N^2 & 2(h-1)x_N^2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{r}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & x_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{N-1} & 0 & x_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2hx_N \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## 4 Convergence

### 4.1 Première approche

Dans le cas de la méthode explicite, on doit résoudre le système matriciel :

$$W^{j+1} = (1 - k\mathbb{A})W^j$$

Le premier réflexe est de regarder la consistance et la stabilité. Pour ce qui est de la consistance, avec  $w$  la solution exacte :

$$\begin{aligned} \|w^{j+1} - (1 - k\mathbb{A})w^j\|_\infty &= \max_{n \in \{0 \dots N\}} (w^{j+1} - (1 - k\mathbb{A})w^j)_n \\ &\leq \max \left( Ck(k^2 + h), (w^{j+1} - (1 - k\mathbb{A})w^j)_N \right) \end{aligned}$$

En utilisant la formule classique pour les schémas centrés des Calls européens, il faut majorer :

$$\begin{aligned} w_N^{j+1} - w_N^j + k(\mathbb{A}w^j)_N &= k \frac{\partial w^j}{\partial t}_N - k \frac{\sigma^2}{2h^2} (2w_{N-1}^j + 2(h-1)w_N^j) + \mathcal{O}(k^2) \text{ DL de } w_N^{j+1} \\ &= k \frac{\partial w^j}{\partial t}_N - k \frac{\sigma^2}{2h^2} \left( 2hw_N^j - 2h \frac{\partial w^j}{\partial x}_N + h^2 \frac{\partial^2 w^j}{\partial x^2}_N + \mathcal{O}(h^3) \right) + \mathcal{O}(k^2) \text{ DL de } w_N^j \\ &= k \frac{\partial w^j}{\partial t}_N - k \frac{\sigma^2}{2h^2} \left( h^2 \frac{\partial^2 w^j}{\partial x^2}_N + \mathcal{O}(h^3) \right) + \mathcal{O}(k^2) \text{ Condition au bord} \\ &= k\mathcal{O}(h) + \mathcal{O}(k^2) \text{ Condition au bord + EDP vérifiée par } w \end{aligned}$$

Et finalement le dernier noeud réduit l'ordre spatial à 1 :

$$\|w^{j+1} - (1 - k\mathbb{A})w^j\|_\infty \leq Ck(k + h)$$

Pour la stabilité, il suffit de vérifier :

$$\|I - k\mathbb{A}\|_\infty \leq 1 + Ck$$

Ou de manière équivalente :

$$\max_{i \in \{1 \dots N+1\}} \sum_{j=1}^{N+1} |I - k\mathbb{A}|_{ij} \leq 1 + Ck$$

Or par un résultat classique pour les calls européens, on sait que :

$$\max_{i \in \{1 \dots N\}} \sum_{j=1}^{N+1} |I - k\mathbb{A}|_{ij} \leq 1$$

Sous les conditions :

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{\sigma^2 + r} \text{ et } \sigma^2 \geq r$$

Il faut donc vérifier que sous ces conditions :

$$\frac{\sigma^2}{2h^2}(2k) + \left| 1 + 2(h-1)\sigma^2 \frac{k}{2h^2} \right| \leq 1 + Ck$$

Or sous la condition CFL :

$$1 + 2(h-1)\sigma^2 \frac{k}{2h^2} \geq h \geq 0$$

Ainsi, on obtient une borne :

$$\frac{\sigma^2}{2h^2}(2k) + \left| 1 + 2(h-1)\sigma^2 \frac{k}{2h^2} \right| \leq 1 + 2h$$

Ainsi :

$$|||I - k\mathbb{A}|||_{\infty} \leq 1 + 2h$$

Pour que la méthode soit stable, il faut donc :  $h < k$ . Ce qui est malheureusement incohérent avec la première condition de CFL.

## 4.2 2ème approche

On peut voir le problème d'une manière différente. Posons  $\bar{\mathbb{A}}$  :

$$\bar{\mathbb{A}} = -\frac{\sigma^2}{2h^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & -2x_1^2 & x_1^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2^2 & -2x_2^2 & x_2^2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2x_{N-1}^2 & x_{N-1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x_N^2 & -2x_N^2 & x_N^2 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{r}{2h} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & x_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -x_{N-1} & 0 & x_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -x_N & 0 & x_N \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\bar{\mathbb{A}}$  n'est pas carrée, elle est de la dimension de  $\mathbb{A}$  avec une colonne en plus. Nous pouvons donc écrire le système de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} U^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (I \ 0) - k\bar{\mathbb{A}} \\ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{1}{2h} \ 1 \ -\frac{1}{2h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^k \\ U_{N+1}^k \end{pmatrix}$$

Ce système est équivalent au précédent. Pour cela, il suffit de voir qu'en faisant l'opération équivalente par ligne :

$$\text{Ligne}_{N+1} \rightarrow \text{Ligne}_{N+1} + \left( 2h \left( \frac{k\sigma^2}{2h^2} + \frac{rk}{2h} \right) \right) \times \text{Ligne}_{N+2}$$

On retrouve le système précédent. Mais cette fois la consistance est d'ordre 2 en espace. Pour simplifier, nous posons :

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} (I \ 0) - k\bar{\mathbb{A}} \\ 0 \ \dots \ 0 \ \frac{1}{2h} \ 1 \ -\frac{1}{2h} \end{pmatrix}$$

La dernière ligne peut être multipliée par une constante (cela ne changera pas le système) suffisamment petite de telle manière qu'en utilisant le résultat du cours sur les calls européens, on trouve :

$$|||\mathbb{B}|||_{\infty} \leq 1$$

Puis essayons de majorer l'erreur :

$$\begin{aligned} \|W^{k+1} - w^{k+1}\|_{\infty} &= \left\| \begin{pmatrix} W^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} W^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbb{B} \begin{pmatrix} w^k \\ w_{N+1}^k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + \left\| \begin{pmatrix} w^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbb{B} \begin{pmatrix} w^k \\ w_{N+1}^k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &\leq |||\mathbb{B}|||_{\infty} \left\| \begin{pmatrix} W^k \\ W_{N+1}^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^k \\ w_{N+1}^k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + \left\| \begin{pmatrix} w^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbb{B} \begin{pmatrix} w^k \\ w_{N+1}^k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \\ &\leq \left\| \begin{pmatrix} W^k \\ W_{N+1}^k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w^k \\ w_{N+1}^k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} + \left\| \begin{pmatrix} w^{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbb{B} \begin{pmatrix} w^k \\ w_{N+1}^k \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \end{aligned}$$

Puis il faudrait avoir :

$$\|W_{N+1}^k - w_{N+1}^k\|_{\infty} \leq \|W^k - w^k\|_{\infty}$$

Or par la condition au bord, on a :

$$\begin{aligned} W_{N+1}^k - w_{N+1}^k &= 2h (W_N^k - w_N^k) + (W_{N-1}^k - w_{N-1}^k) + \mathcal{O}(h^3) \\ &\leq (1 + 2h) \|W^k - w^k\|_{\infty} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Ce qui revient au même résultat incohérent trouvé dans la section précédente.

Dans la suite nous supposerons les résultats suivants (observés algorithmiquement) :

$$\|W_{N+1}^k - w_{N+1}^k\|_{\infty} \leq \|W^k - w^k\|_{\infty}$$

Avec cette hypothèse la méthode explicite est conditionnellement convergente en ordre 2 en espace et 1 en temps (le dernier système est consistant d'ordre 2 en espace contrairement au premier).

Pour la méthode implicite on va étudier le système :

$$\begin{pmatrix} (I \ 0) + k\bar{\mathbb{A}} \\ 0 \ \dots \ 0 \ -\frac{1}{2h} \ -1 \ \frac{1}{2h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^{k+1} \\ U_{N+1}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U^k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce système est consistant d'ordre 2. Mais de la même façon, nous n'avons pas réussi à montrer la stabilité dans le cadre général, sans faire d'hypothèses supplémentaires.

Le schéma de Crank-Nikolson s'étudie en réunissant le travail sur la méthode implicite et explicite.

### 4.3 Résumé

Malgré nos problèmes pour montrer la stabilité, on va donner les résultats suivants :

1. **Explicite** : Convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps sous les conditions :

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{\sigma^2 + r} \text{ et } \sigma^2 \geq r$$

2. **Implicite** : Convergent d'ordre 2 en espace et 1 en temps sous la condition :

$$\sigma^2 \geq r$$

3. **Crank-Nikolson** : Convergent d'ordre 2 en espace en temps sous la condition :

$$\sigma^2 \geq r$$

## 5 Modélisation

Afin d'avoir une référence pour comparer les résultats de notre modélisation on définit une solution de référence pour le problème. Ainsi, la référence [17] de l'énoncé nous donne une expression de la solution exacte du problème :

$$\begin{aligned} V(t, S, M) := & M e^{-r(T-t)} N\left(-d_1 + \sigma\sqrt{T-t}\right) - S N\left(-d_1\right) \\ & + S e^{-r(T-t)} \frac{\sigma^2}{2r} \left[ -\left(\frac{S}{M}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} N\left(d_1 - 2\frac{r}{\sigma}\sqrt{T-t}\right) + e^{r(T-t)} N\left(d_1\right) \right] \end{aligned}$$

avec

$$d_1 = \frac{\log(S/M) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dt$$



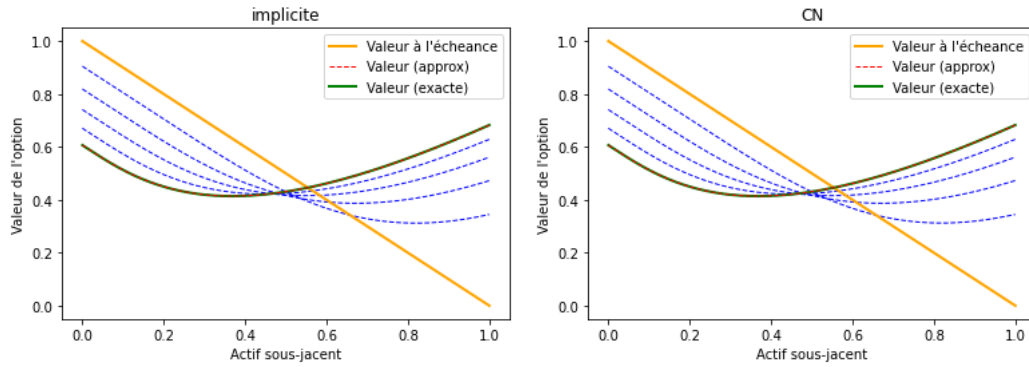


FIGURE 1 – Modélisation dans le cadre de la méthode implicite et de Crank-Nicolson

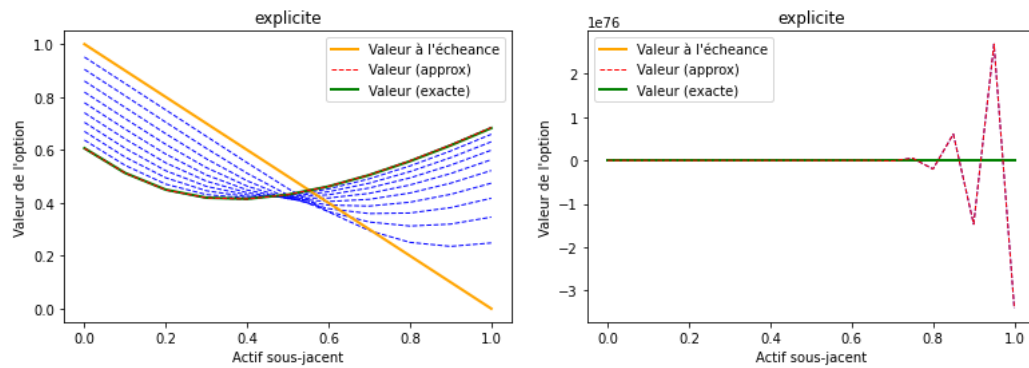


FIGURE 2 – Modélisation dans le cadre de la méthode explicite suivant les conditions de stabilité

Pour comparer la solution exacte avec celle de la modélisation par éléments finis, on exprime la solution sous la forme de  $W$  énoncée plus tôt. On aboutit alors aux graphes suivants pour les mêmes paramètres :

On peut constater sur la Figure 2 l'impact de la condition de stabilité. Dans le premier cas, le schéma est bien stable avec  $\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{(\sigma^2 + r)}$ . Dans la seconde, la condition n'est pas vérifiée et le schéma est bien instable.

Nous pouvons de plus comparer notre condition avec la condition CFL du cours. En traçant les limites de stabilité nous obtenons ce graphique.

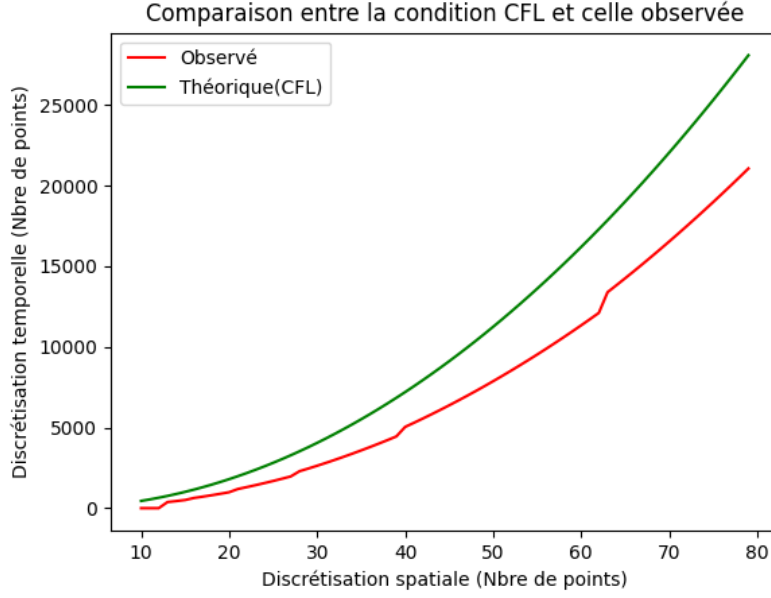


FIGURE 3 – Comparaison entre la condition CFL et notre condition de stabilité

La méthode est stable lorsque l'on se situe au dessus de la courbe. Nous pouvons donc en conclure que notre condition observée permet de contenir la condition théorique puisque notre courbe est toujours en dessous de la courbe de la condition CFL.

## 6 Etude de l'erreur

On veut regarder l'erreur de chaque méthode qui s'exprime sous la forme :

$$\|u_{théorique} - u_{simulé}\| = \mathcal{O}(h^p + k^q)$$

Pour cela, nous allons chercher à isoler les sources d'erreur spatiale et temporelle. Par exemple pour observer l'erreur spatiale, nous devons rendre l'erreur temporelle négligeable par rapport à l'erreur spatiale ( $k \ll h$ ). Sous ces conditions on obtient :

$$\|u_{théorique} - u_{simulé}\| \simeq \mathcal{O}(h^p)$$

Pour observer numériquement l'ordre  $p$  de la convergence spatiale, il suffit de tracer la log erreur en fonction de  $\log h$  et la pente moyenne devrait être d'environ  $p$ .

Le raisonnement pour la convergence temporelle (selon  $h$ ) est analogue à celui explicité ci-dessus pour la convergence spatiale.

### 6.1 Schéma explicite

La théorie nous dit que la convergence est d'ordre  $p = 2$  (espace) et  $q = 1$  (temps). Concernant l'erreur temporelle, nous devons, d'abord minimiser l'erreur spatiale

pour isoler la composante temporelle. Cependant, la condition CFL ne permet pas de réaliser cette manipulation. Nous ne pouvons donc pas déduire l'erreur temporelle pour cette méthode. Ce problème est bien visible sur le deuxième graphique. Pour la convergence spatiale nous retrouvons bien une erreur d'ordre 2 malgré une légère divergence (sûrement dû au manque de précision).

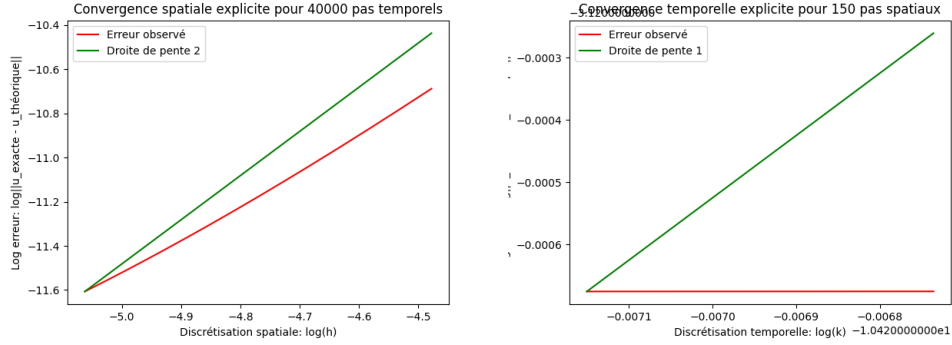


FIGURE 4 – Log-erreur temporelle et spatiale pour la méthode explicite

## 6.2 Schéma implicite

La théorie nous dit que la convergence est d'ordre  $p = 2$  (espace) et  $q = 1$  (temps). On retrouve bien le bon ordre pour les 2 erreurs. On constate toutefois un légère divergence pour l'erreur spatiale. Comme il n'y a pas de condition CFL, il n'y a de problème pour minimiser les 2 erreurs.

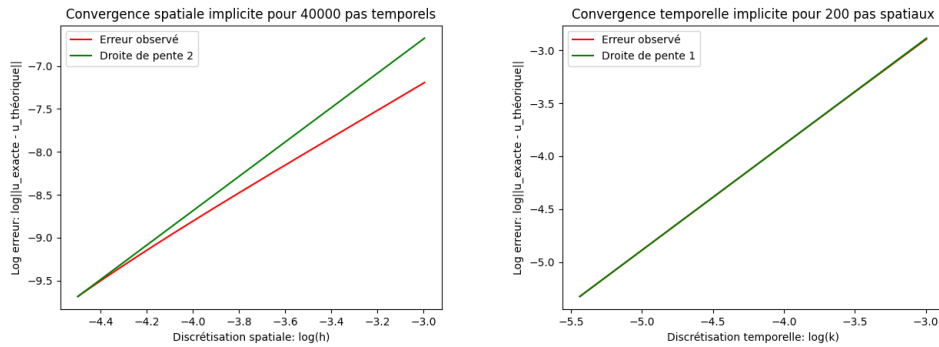


FIGURE 5 – Log-erreur temporelle et spatiale pour la méthode implicite

### 6.3 Schéma Crank-Nicolson

La théorie nous dit que la convergence est d'ordre  $p = 2$  (espace) et  $q = 2$  (temps). On retrouve bien le bon ordre pour les 2 erreurs. On constate toutefois un légère divergence pour l'erreur temporelle.

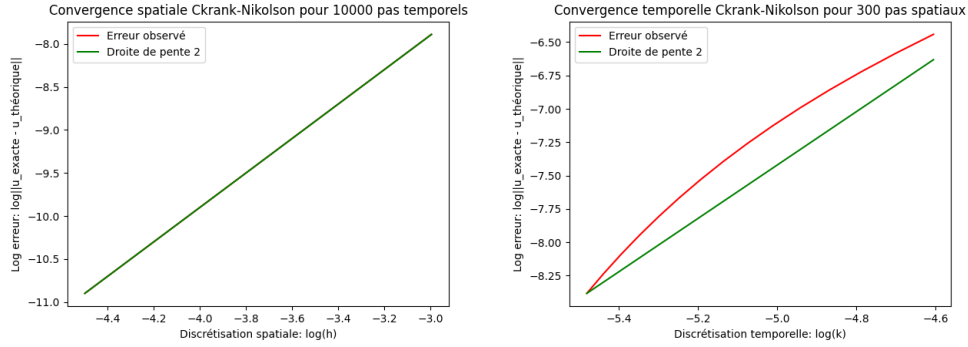


FIGURE 6 – Log-erreur temporelle et spatiale pour la méthode de Crank-Nicolson

### 6.4 Etude de la condition de bord

On remarque grâce au schéma ci-dessous l'utilité de faire un schéma spatial centré au lieu de upwind pour la condition au bord. En effet, grâce au schéma centré on retrouve bien une erreur d'ordre 1, qui correspond au résultat du cours.

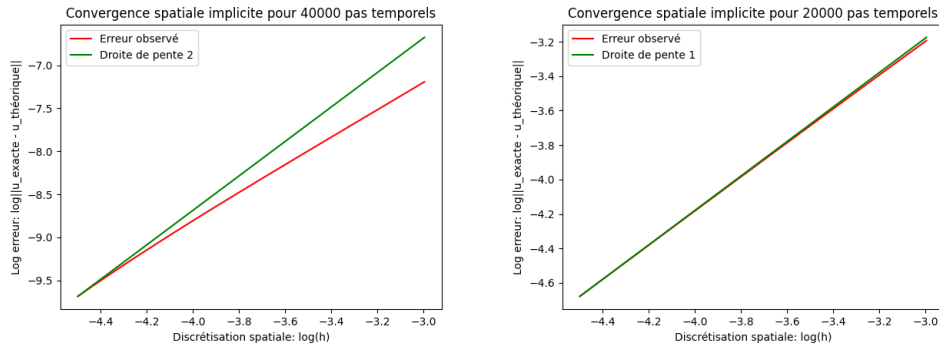


FIGURE 7 – Condition de bord selon une discrétisation centrée ou upwind

## 7 Conclusion

L'étude du modèle "floating lookback option" a permis de mettre en évidence l'influence du type de discrétisation spatiale au bord (upwind ou centré) et des conditions de bords qui peuvent modifier l'ordre de convergence.

On constate que la formule explicite permet de vérifier les conditions de convergences théoriques. Toutefois, il apparaît que la méthode de Crank-Nicolson a le meilleur ordre de convergence mais cette méthode est plus coûteuse en temps de calcul.