Questão 1

(a) Assumindo (incorretamente) que as estrelas de alta velocidade, conhecidas por Oort em 1927, estão perto da velocidade de fuga da Galáxia, sendo $V_{esc} \approx$ 300 Km/s, estime a massa da Via Láctea. Para simplificar, tome as direções dos vetores de velocidade para estar radialmente longe do centro galáctico e suponha que toda a massa esteja distribuída esfericamente e seja interior a R_0. (Este cálculo destina-se apenas a ser uma estimativa de ordem de grandeza). Compare sua resposta com a massa estimada $M = 8.8 \cdot 10^{10} M_\odot$ utilizando a terceira lei de Kepler, que tem forma: $P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)} a^3$ no limite onde $m_1 \gg m_2$.

Assumindo uma distribuição de massa esférica e utilizamos os vetores velocidade saindo radialmente do centro galáctico. Dito isso, sabendo que a velocidade de escape tenha relação com a massa da galáxia, então fazemos

$$V_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R_0}} \tag{1}$$

e substituímos os dados do raio e alta velocidade das estrelas. Respectivamente temos: R_0=8 Kpc e V_{esc}= 300 Km/s. Convertendo para unidades do SI, obtemos $V_{esc} = 3 \cdot 10^5$ m/s e $R_0 = 2.46 \cdot 10^{20}$m. Conhecendo a constante gravitacional G= $6.67 \cdot 10^{-11}$ m³/kg/s², temos finalmente: $M = 1.667 \cdot 10^{41}$kg, em função da massa solar $M_\odot = 1.989 \cdot 10^{30}$kg, temos: $M = 8.4 \cdot 10^{10} M_\odot$. Este resultado vai de encontro com o resultado obtido pela terceira lei de Kepler $M = 8.8 \cdot 10^{10} M_\odot$.

(b) Repita seu cálculo usando o conhecimento de que um pequeno número de estrelas de velocidade extremamente altas existem na vizinhança solar com velocidades de O que poderia explicar a massa extra em comparação com sua resposta na parte (a).

Montamos uma relação entre as massas e as velocidades, de maneira que facilite os cálculos. Sabemos que $v_1 = K \cdot \sqrt{M}$, onde $K = \sqrt{2G/R_0}$, então podemos aproximar $v_1/v_2 = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}$. Substituindo os valores conhecidos e utilizando $V_{esc2} = 500km/s$ obtemos $M_2 = 2.3 \cdot 10^{11} M_\odot$. Para cobrir o défict entre uma massa estimada e outra, eles teorizaram existir um halo de matéria escura na galáxia.

(c) Comente sobre a dificuldade de determinar a verdadeira massa da Galáxia com base em observações de estrelas na vizinhança solar.

A dificuldade está presente na diferença de comportamento que a galáxia apresenta para diferentes tipos de raios. Analisando a curva de rotação, vemos que externamente há um comportamento constante na velocidade mesmo que a densidade vá caindo $\rho = \frac{\rho_0}{a^3}$, onde a é o fator de escala do universo. Dito isso, não podemos aproximar uma dinâmica local da vizinhança solar para explicar um evento que possui outro comportamento e escala.

Questão 2

(a) Mostre que a rotação do corpo rígido perto do centro galáctico é consistente com uma rotação esférica em uma distribuição de massa simétrica de densidade constante.

a) O conceito de corpo rígido envolve um sistema que gira com todas as suas partes fixas e em conjunto e sem qualquer alteração da sua forma. Há um eixo fixo em que o objeto rotaciona em torno. A aceleração que esse objeto tem ao rotacionar difere, uma vez que ela não representa a variação de velocidade. Dito isso, conhecendo a aceleração centrípeta, podemos fazer a igualdade $\frac{\Theta^2}{R} = \frac{GM}{R^2}$ daí isolamos a componente de rotação $\theta = \sqrt{\frac{GM}{R}}$. Como a densidade é constante, e nós sabemos que $\rho = \frac{M}{V}$, onde V é o volume da esfera, por isso obtemos: $\theta = \sqrt{\frac{4\pi G\rho R^3}{3R}} = \theta = \sqrt{\frac{4\pi\rho}{3}} \cdot R$. Portanto, vemos que a aceleração é proporcional ao raio, já que todo o outro termo é constante. Isto conclui e demonstra que todo o sistema gira como um só.

(b) A distribuição de massa no halo de matéria escura que segue o perfil de densidade

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1 + (r/a)^2)} \tag{2}$$

é consistente com o corpo rígido rotacionando perto do centro galáctico? Por que ou por que não?

Assumimos que a distribuição de matéria escura tenha a forma $\rho(r) = \frac{\rho_0}{(1+(r/a)^2)}$ onde $\rho 0$ e a são parâmetros definidos para estudar a curva em questão. Foi dito que o sistema está rotacionando perto do centro galáctico, por isso analisamos o caso em que r«a então r $\rightarrow$ 0, e por isso $\rho(r) \approx \rho_0$, ou seja, a densidade é constante. Concluímos, portanto, que se a densidade é constante, irá rotacionar proporcionalmente em toda sua extensão e isto define a rotação de um corpo rígido, sendo assim consistente.

Questão 3

Mostre que se o brilho da superfície de uma galáxia elíptica segue a lei $r^{1/4}$ dada por

$$log_{10}\left[\frac{I(r)}{I_e}\right] = -3.3307(\left[(\frac{r}{r_e})^{1/4} - 1\right] \tag{3}$$

então o brilho médio da superfície sobre a área de um disco circular de raio r_e é dado por

$$\langle I \rangle = 3.607 I_e \tag{4}$$

Dica: Comece reescrevendo a lei $r^{1/4}$:

$$I(r) = I_e e^{-\alpha[(r/r_e)^{1/4}]} \tag{5}$$

e lembre-se da definição de uma integral média dada sendo

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau f(t)dt. \tag{6}$$

Você também pode achar útil escrever a integral de tal forma que os limites de integração se estendam de zero a infinidade. Isso pode ser feito considerando a definição de r_e.

Questão 3 continua na próxima página...

Partimos da igualdade

$$\log\left[I(r)/I(r_e)\right] = -3.3307[(r/r_e)^{(1/4)} - 1] \tag{7}$$

Podemos isolar o brilho superficial aplicando a propriedade $a^{log_a(x)} = x$ e daí

$$I(r) = I_e 10^{-3.3307[(r/r_e)^{(1/4)}-1]} \tag{8}$$

Analisando o último resultado, vemos que a relação $10^x = e^y$ ajuda a obter $y = ln(10)^x$ onde $ln(10) \approx 2.3026$ Nesta demonstração $x = -3.3307[(r/r_e)^{(1/4)} - 1$. De maneira à diminuir os termos, escrevemos $\alpha = 2.3026 \cdot 3.3307$. Então finalmente temos

$$I(r) = I_e e^{-\alpha[(r/r_e)^{(1/4)}-1]} \tag{9}$$

Dito isso, a média da integralização da intensidade é

$$\langle I \rangle = \frac{1}{\pi r_e^2} \int_0^{r_e} I(r) 2\pi r\, dr \tag{10}$$

onde 2π r é o comprimento de arco. Quando evoluímos a integral até o limite do raio efetivo, sabemos que corresponde à metade da luminosidade total, então podemos aproximar a integral num intervalo até infinito. Fazemos isso e a substituição de I(r) obtido anteriormente.

$$\langle I \rangle = \frac{1}{2\pi r_e^2} \int_0^{\infty} I_e e^{-\alpha[(r/r_e)^{1/4}-1]} 2\pi r dr \tag{11}$$

Colocando os termos que não dependem de r para fora da integral e manipulando com a substituição $u = \alpha(\frac{r}{r_e})^{1/4}$, onde vemos que $\frac{r}{r_e} = (\frac{u}{\alpha})^4$ então $rdr = 4r_e^2 u^7 \alpha^{-8} du$ podemos obter, fazendo as substituições:

$$\langle I \rangle = \frac{4 I_e e^{\alpha}}{\alpha^8} \int_0^{\infty} u^7 e^{-u} du \tag{12}$$

Chegamos no ponto onde reconhecemos a integral sendo a função gama, pois vemos a igualdade

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \tag{13}$$

Por isso, sabendo também que $\Gamma(n+1) = n!$ escrevemos portanto

$$\langle I \rangle = \frac{4 I_e e^{\alpha}}{\alpha^8} \Gamma(8) = \frac{4 e^{\alpha} 7!}{\alpha^8} \tag{14}$$

Efetuando o fatorial e substituindo o valor de $\alpha = 7.6692$. Chegamos finalmente em $\langle I \rangle = 3.607 I_e$