Ecuaciones No Lineales

Los ejercicios indicados con * son parte del Obligatorio

Ejercicio 1

Determinar las raíces reales de la función $f(x) = -0.6x^2 + 2.4\,x + 5.5$

a. Gráficamente.
b. Usando la fórmula de Bhaskara.
c. Realizando 6 iteraciones del método de bisección. Usar como estimación inicial $x_l = 5$ y $x_u = 10$. Calcular el error relativo estimado ε_a y el error relativo verdadero ε_T luego de cada iteración y armar un cuadro de salida.

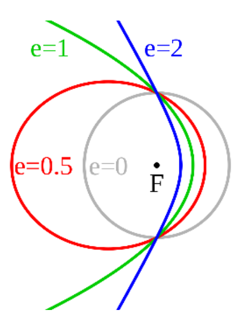
Ejercicio 2*

Determinar las raíces reales de la función $f(x) = \ln(x^4) - 0.7$

a. Usando el algoritmo de búsqueda incremental determinar los intervalos posibles donde se encuentran raíces.
b. Realice 5 iteraciones del método de bisección en alguno de los intervalos encontrados.
c. Ídem 5 iteraciones del método de regula falsi.
d. Comprobar los resultados usando el comando `fzero()`. A partir del resultado real, ¿qué concluye de los métodos anteriores?.

Ejercicio 3

La ecuación de Kepler para determinar la posición de un cuerpo moviéndose en una órbita elíptica es:



$$M = x - e\,sen(x) \;\; ; \quad e\,\epsilon(0,1)\,, M\,\epsilon[0,\pi]$$

donde:

e es la excentridad (proporciona la forma de la elipse)
M es la anomalía media (ángulo que expresa la fracción transcurrida de un período orbital)

a. Probar que la iteración de punto fijo converge.

b. Suponga que un satélite se mueve en una órbita elíptica con $e = 0.205635$ y $M = x_0 = 1.2$; calcule el punto fijo (llamado anomalía excéntrica; determina la posición del satélite en la órbita) con un error relativo menor a 10^{-4} radianes. Exprese el resultado final en radianes y grados (usar la función de Octave de conversión).

Ejercicio 4

Muchos de los cometas conocidos tienen órbitas elípticas con excentricidad mayor que 0.9. Por ejemplo, el cometa de Halley tiene una excentricidad $e = 0.967$. Para estas órbitas el método de punto fijo converge muy lentamente, en estos casos se aplica el método de Newton-Raphson (N-R).

Reescribamos la función anterior como: $f(E) = E - e\,sen(E) - M$.

Considere los valores $e = 0.967, M = 3\;y\;50$ iteraciones y comenzado con $E_0 = 3.000$. Considerando que el valor exacto es $E = 3.0696$:

a. Calcule el error relativo real aplicando el método de punto fijo.
b. Ídem aplicando N-R.

Ejercicio 5*

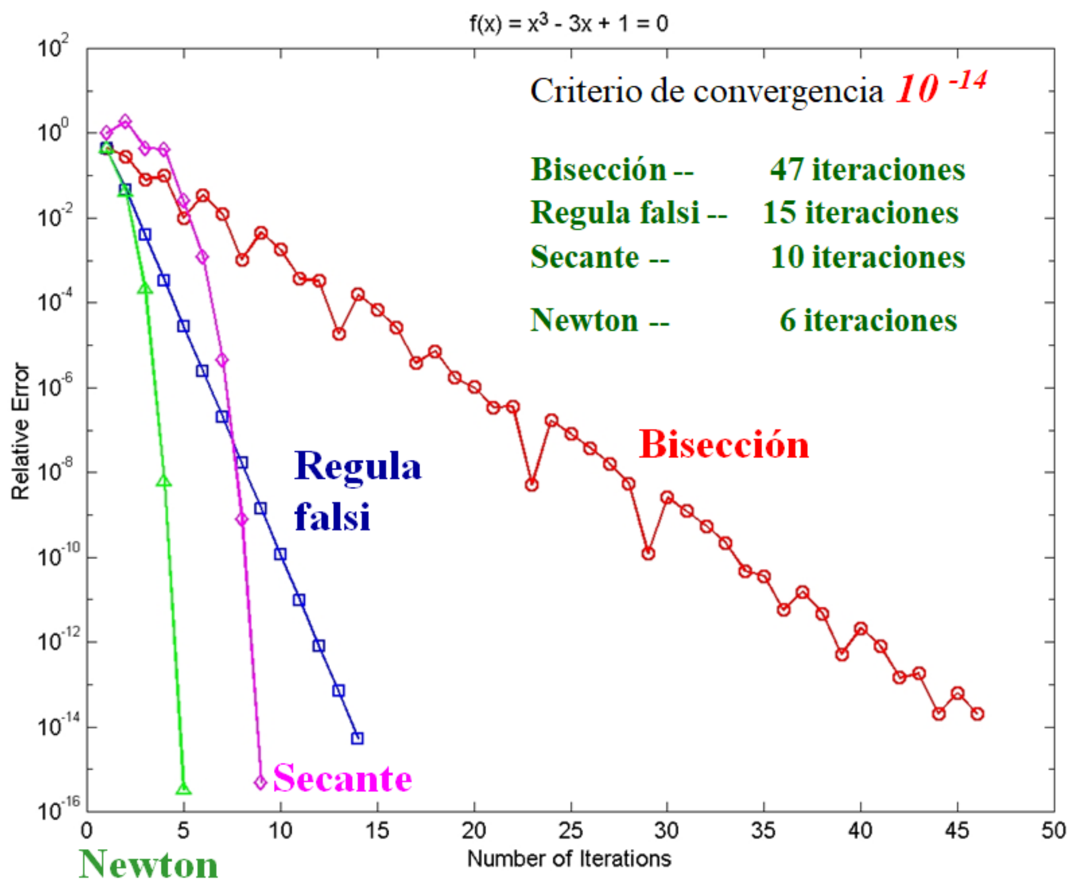
Dada la función cúbica $f(x) = x^3 - 3x - 20 = 0$ la misma puede ser escrita como:

1. $x = \frac{(x^3-20)}{3}$
2. $x = \frac{20}{(x^2-3)}$
3. $x = (3x + 20)^{1/3}$

a. Seleccione la función que satisface el teorema de punto fijo en el intervalo [1,4].
b. Luego partiendo del punto $x_0 = 1.5$ itere hasta lograr un error relativo porcentual de $10^{-2}\%$.

Ejercicio 6*

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 1$ se quiere graficar la cantidad de iteraciones vs. el error relativo para un error relativo máximo de 10^{-14} , asimismo imprimir la cantidad de iteraciones por cada método tal como se indica en el gráfico a continuación.



Ejercicio 7

Localice la primera raíz positiva de $f(x) = sen\,(x) + \cos(1 + x^2) - 1$, donde x está expresado en radiantes. Realice 4 iteraciones del método de la secante usando como puntos iniciales:

a. $x_0 = 1.0\,, x_1 = 3.0$
b. $x_0 = 1.5\,, x_1 = 2.5$
c. $x_0 = 1.5\,, x_1 = 2.25$

Grafique y explique los resultados.

Ejercicio 8

Sea la función $f(x) = x^3 - 0{,}165x^2 + 3{,}993 \times 10^{-4}$ de la cual se quiere hallar sus raíces aplicando el método de Newton-Raphson.

a. Realizar las iteraciones necesarias para obtener 4 dígitos significativos.
b. Realizar la gráfica de la función.
c. Comprobar las raíces con la función `fzero()`.

Ejercicio 9*

El método de aceleración de la convergencia de Aitken Δ^2 (delta cuadrado) se usa para acelerar otros métodos, por ej. la búsqueda de raíces, y se define como:

$$x_{n+3}{}^{*} = x_{n+2} - \frac{(x_{n+2} - x_{n+1})^2}{(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n)} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n} \quad n \geq 1$$

Se usan 3 valores previos los cuales se calculan por cualquier otro método (por ej. punto fijo) y el siguiente valor se calcula aplicando la fórmula anterior. De esta forma un algoritmo de convergencia lineal, como el de punto fijo, puede ser acelerado para converger de forma cuadrática.

Considere la función $f(x) = x - \frac{1}{2}e^{-x}$ para la cual se quieren determinar sus raíces partiendo de $x_1 = 1$. Se requiere completar el siguiente cuadro hasta lograr que $\varepsilon_a\,\% = \mathbf{10^{-6}}\%$

iter	Punto fijo	Aitken	$\varepsilon_a\,\%\ PF$	$\varepsilon_a\%\ Aitken$
1	xxxx	xxxx		
2	xxxx	xxxx		
3	xxxx	xxxx		
4	xxxx	xxxx		
5	xxxx	xxxx		
6	xxxx	xxxx		
7	xxxx	xxxx		

…….

Ejercicio 10*

Contrariamente a los que ocurre con otros temas, por ej. sistemas de ecuaciones lineales, la solución de los sistemas no lineales es una cuestión delicada. Generalmente es difícil garantizar la convergencia a la solución exacta y además la complejidad computacional crece muy rápidamente con el tamaño del sistema.

Por ejemplo, considere el siguiente sistema:

$$\begin{cases} y - x^3 - \frac{1}{2} = 0 \\ 4y^2 - x + \boldsymbol{c} = 0 \end{cases} \quad ; \ x, y \in [-2{,}1]$$

a. Aplicando el método de Newton-Raphson resuélvalo para $c = \{0,\ 0.7,\ -1,\ -1.5\}$
b. Realice los 4 cuadros simultáneamente que muestren el comportamiento de las ecuaciones para los distintos valores de *c*.

Ejercicio 11

Resuelva el siguiente sistema usando el método de N-R:

$$\begin{cases} x + e^y \quad = 68.1 \\ sen\, x - y = -3.6 \end{cases}$$

Comenzar con la aproximación inicial $x_0 = 2.5,\ \ y_0 = 4$ e itere hasta que el error sea menor a 10^{-4} (norma a elección).

Ejercicio 12

Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 4)^2 = 5 \\ x_1^2 + x_2^2 = 16 \end{cases}$$

a. Use una aproximación gráfica para obtener los valores de arranque iniciales.
b. Aplicando el método de N-R determine las raíces.
c. Verifique los resultados usando el comando de Octave `fsolve()`.

Ejercicio 13

El método de la Secante utiliza el siguiente algoritmo para encontrar la raíz de una función.

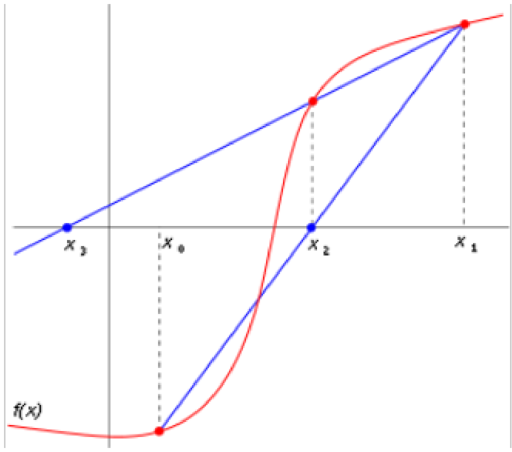
$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

En detalle:

$$x_2 = x_1 - f(x_1)\frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)}$$
$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_2 - x_1}{f(x_2) - f(x_1)}$$

...

$$x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1})\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$



Implementarlo en Octave.