UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
JAA/BBM/LNB/JSA/MSS/MVH/jaa

Listado de Ejercicios 2
Álgebra I (525147)

Problema 1 (En práctica a), b) y d)) Sean $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tales que $\operatorname{gr}(p) = n$ y $\operatorname{gr}(q) = m$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdadres o falsas. Justifique en cada caso.

a) $\operatorname{gr}(pq) = n + m$

b) $\operatorname{gr}(p + q) = \text{máx}\{\operatorname{gr}(p), \operatorname{gr}(q)\}$

c) Si $\operatorname{gr}(p)$ es un número par, entonces p es una función par

d) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\ \operatorname{gr}(\alpha p) = \operatorname{gr}(p)$

e) $(\forall x > 0)\ p(x) \geq 0$

f) $\operatorname{Rec}(p) = \mathbb{R}$

g) $(\exists r \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))\ (\forall x \in \mathbb{R})\ p(x)\, r(x) = 1$

h) $(\exists r \in \mathcal{P}(\mathbb{R}))\ (\exists x_0 \in \mathbb{R})\ p(x_0)\, r(x_0) = 1$

i) La función compuesta $p \circ q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\operatorname{gr}(p \circ q) = nm$

j) $\operatorname{gr}(p^2)$ siempre es par

Problema 2 Determine un polinomio $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p(2) = 4$ y $p(3) = 10$.

Problema 3 Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ tenga como una de sus raíces el complejo $z = 2 + i$.

Problema 4 (En práctica b)) Determine el cuociente $q(x)$ y el resto $r(x)$ de la división entre $p(x)$ y $d(x)$, donde

a) $p(x) = x^5 - 7x^4 + 2x^2 - x + 2$; $d(x) = x - 2$

b) $p(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 22x$; $d(x) = x^2 - 4x + 1$

c) $p(x) = 2x^4 - 15x^2 + 8x - 3$; $d(x) = x + 3$

Problema 5 Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(x + 1)^2$ es un factor de $p(x) = ax^4 + bx + 15$.

Problema 6 (En práctica) Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $p(x) - 5$ es divisible por $(x + 5)$ y $p(x) + 5$ es divisible por $(x - 5)$. Determine el resto de dividir $p(x)$ por $(x^2 - 25)$.

Problema 7 Sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{gr}(p) \geq 4$. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$. Se sabe que el resto de dividir p por $(x^2 - b^2)$ es cx y el resto de dividir p por $(x^2 - b^2)(x - a)$ es un polinomio mónico (o sea, su coeficiente principal es igual a 1).

a) Determine el valor de $p(b)$ y $p(-b)$.

b) Determine el resto de dividir p por $(x^2 - b^2)(x - a)$.

Indicación: Aplique sucesivamente el Teorema del Resto.

Problema 8 Sean $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ y $c \in \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes.

a) $p(x)$ es divisible por $(x-c)^k$, pero no por $(x-c)^{k+1}$.

b) Existe $q \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $p(x) = (x-c)^k q(x)$, donde q no admite a c como raíz.

Problema 9 **(En práctica b))** Encuentre el o los valores de $k \in \mathbb{C}$ de forma que

a) $4x^3 + 3x^2 - kx + 6k$ sea divisible por $x + 3$

b) $x^2 + kx + 4$ tenga el mismo resto cuando se divide por $x + 1$ y por $x - 1$

c) El resto de la división de $x^2 + 2x - 4$ por $x - k$ es 31.

d) Las ra ces del polinomio $4x^2 - 8x + 2k + 1$ satisfagan que una de ellas es el triple de la otra.

Problema 10 Sean $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$. Demuestre que, si un polinomio es divisible por $ax - b$, también es divisible por $x - \dfrac{b}{a}$.

Problema 11 **(En práctica d))** Divida los polinomios $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dados por $x - c$, donde c se indica en cada caso. Luego, decida si el valor de c corresponde o no a una raíz del polinomio.

a) $p(x) = 6x^3 + 17x^2 - 5x - 6$; $c = -1/2$

b) $p(x) = x^3 - 8x^2 + x + 42$; $c = 5$

c) $p(x) = x^4 + 20x^2 - 10x - 50$; $c = 5$

d) $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$; $c = 2$

e) $p(x) = x^7 - 6x^4 - x^3 + 6$; $c = i$

f) $p(x) = x^7 - 6x^4 - x^3 + 6$; $c = 3$

Problema 12 **(En práctica b))** Hallar todas las raíces del polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ dado por

a) $p(x) = x^5 + 6x^4 + 15x^3 + 26x^2 + 36x + 24$, sabiendo que -2 es una raíz múltiple de p.

b) $p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 4x + 10$, sabiendo que $1 - i$ es una raíz de p.

c) $p(x) = x^4 + (1-i)x^3 - (4+i)x^2 - 4(1-i)x + 4i$, sabiendo que i es una raíz de p.

Problema 13 **(En práctica e))** Para los siguientes polinomios, estime la cantidad de raíces reales positivas y negativas, las posibles raíces racionales, determine las raíces y establezca una factorización en factores irreductibles en $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ de los siguientes polinomios

a) $p\left(x\right) = x^4 + 2x^3 - x - 2$

b) $p\left(x\right) = x^3 + x + 2$

c) $p\left(x\right) = 2x^3 - x^2 - 1$

d) $p\left(x\right) = x^3 - 1$

e) $p\left(x\right) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 2x - 6$

f) $p(x) = x^3 - x^2 - 17x + 33$

g) $p(x) = 6x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

h) $p(x) = x^8 - 4x^6 - 10x^4 + 28x^2 - 15$

i) $p(x) = x^6 + 1$

j) $p\left(x\right) = 3x^4 + 7x^2 + 6$

Problema 14 (En práctica d) y f)) Descomponga las siguientes funciones racionales en sumas de fracciones parciales de $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$ y $\mathcal{P}\left(\mathbb{C}\right)$.

a) $\dfrac{10x^2 + 9x - 7}{\left(x+2\right)\left(x^2-1\right)}$

b) $\dfrac{1}{x\left(x-1\right)\left(x-2\right)}$

c) $\dfrac{x^4 - 3x^3 - 19x^2 + 4x + 18}{x^2 - 3x - 18}$

d) $\dfrac{\left(x^2 - x + 1\right)^2}{x^2\left(x-1\right)^2}$

e) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2\left(x-1\right)^3}$

f) $\dfrac{x^5 + 3x}{x^4 - 5x^2 + 4}$

g) $\dfrac{x^6}{\left(x^2-1\right)^3}$

h) $\dfrac{x^3 - 3x + 1}{x^4 + 3x^2 + 2}$

Problema 15 Sean $k, l, n \in \mathbb{N}$ y $p\left(x\right) = x^{3k} + x^{3l+1} + x^{3n+2}$ un polinomio.

a) Demuestre que las raíces de $q\left(x\right) = x^2 + x + 1$ son también raíces cúbicas de 1.

b) Demuestre que p es divisible por q.

Indicación: Si bien es posible hacer el cálculo directo de las raíces de $q\left(x\right)$, la parte a) se puede trabajar sin necesidad de calcularlas. Para ello, verifique que $\left(x-1\right)q\left(x\right) = x^3 - 1$. Para la parte b), basta con comprobar que todas las raíces de q son también raíces de p.

Ejercicios de evaluaciones anteriores

Problema 16 Sea $a \in \mathbb{R}$. Considere el polinomio $p\left(x\right) = x^4 + \left(a-1\right)x^2 + a$.

a) ¿Para qué valores de a, el polinomio p posee exactamente una raíz real positiva y una negativa?

b) ¿Para qué valores de a, el polinomio p posee dos raíces reales positivas y dos negativas?

c) En función del valor de a, establezca una factorización irreductible de p en $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$.

Problema 17 Considere los polinomios $p(x) = 5x^6 + 3x^4 + 3x^3 - 11x^2 - x - 7$ y $q(x) = x^4 - 1$.

a) Escriba $q\left(x\right)$ como producto de factores irreducibles en $\mathcal{P}\left(\mathbb{R}\right)$ y $\mathcal{P}\left(C\right)$.

b) Descomponga $\dfrac{p}{q}$ en suma de fracciones parciales.

Problema 18 (En práctica) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $p(x) = x^6 + 8x^5 + 23x^4 + 20x^3 - 30x^2 + ax + b$.

a) Determine los valores de a y b de forma que -2 sea raíz doble de $p(x)$.

b) Sabiendo que $-2+i$ es raíz de p (con los valores de a y b determinados antes), encuentre la descomposición de p en factores irreducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(C)$.

Problema 19 Sea $p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$.

a) Encuentre todas las raíces de p.

b) Determine la descomposición de $\dfrac{x^2-1}{p(x)}$ en suma de fracciones parciales.

Problema 20 (En práctica) Sean $p(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4$, y $q(x) = x^5 + a_3x^3 + a_1x + a_0$ con $a_0, a_1, a_3 \in \mathbb{R}^+$.

a) Sabiendo que $p(x)$ es divisible por $x-1$, encuentre todas sus raíces indicando la multiplicidad de cada una de ellas.

b) Pruebe que $q(x)$ tiene sólo una raíz real $x_0 < 0$.

Problema 21 Considere el polinomio $p(x) = x^5 + 2x^4 - 7x^3 - 10x^2 + 28x + 40$.

a) Determine todas sus raíces y la multiplicidad de cada una de ellas, sabiendo que sus únicas raíces racionales tienen valor absoluto menor o igual a 2.

b) Obtenga la descomposición en suma de fracciones parciales en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ de $\dfrac{p(x)}{(x+2)^3(x^3-8)}$.

Problema 22 Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente polinomio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + 4x^2 + 4x + b$$

a) Sabiendo que p es divisible por $x - 2 - i$, determine los valores de las constantes a y b.

b) Con los valores de a y b encontrados en la parte a), encuentre la factorización de $p(x)$ en polinomios ireeducibles en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{C})$.

c) Escriba la siguiente expresión como suma de fracciones parciales en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

$$\frac{x^3 - 7x + 14}{p(x)}$$
