UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
JAA/BBM/LNB/JSA/MSS/MVH/jaa

Listado de Ejercicios 3
Álgebra I (525147)

Mientras no se diga lo contrario, $\mathbb{K}$ es un cuerpo e $\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\Theta} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ denotan la matriz identidad y la matriz nula, respectivamente.

Problema 1. Calcule el valor de la siguiente matriz

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Problema 2. Considere la siguientes matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Resuelva las siguientes ecuaciones matriciales, donde la incógina es $\boldsymbol{X} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) $-2\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$

b) **(En práctica)** $2\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$

c) $\left(\boldsymbol{A} - \frac{2}{3}\boldsymbol{X}\right)^T = 2\boldsymbol{C}$

d) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^T + \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{C}$

Problema 3. **(En práctica)** Considere la siguientes matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determine el valor de $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}^2$ y $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})$. ¿Qué se puede deducir a partir de este cálculo en función de las operaciones básicas de matrices?

Problema 4. **(En práctica b) y e))** Sea $\boldsymbol{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que $\boldsymbol{M}$ es antisimétrica si y sólo si $\boldsymbol{M}^T = -\boldsymbol{M}$, y que $\boldsymbol{M}$ es ortogonal si y sólo si $\boldsymbol{M}^{-1} = \boldsymbol{M}^T$. Demuestre las siguientes proposiciones.

a) Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T$ es una matriz simétrica y $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^T$ es una matriz antisimétrica.

b) Toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y otra antisimétrica.

c) Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ y $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ son simétricas.

d) Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donde ambas matrices son ortogonales, entonces $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ es una matriz ortogonal.

e) Si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz simétrica y $\boldsymbol{B}$ es una matriz ortogonal, entonces $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ es una matriz simétrica.

f) Si $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, entonces $\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ y es simétrica.

g) Existen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrices simétricas tales que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ no es simétrica.

Problema 5. (En práctica a) y b)) Sea $\boldsymbol{A} : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la función dada por

$$(\forall\theta \in \mathbb{R}) \ \ \boldsymbol{A}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Demuestre que

a) $\boldsymbol{A}(\theta)$ es ortogonal.

b) $(\forall\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R})\ \boldsymbol{A}(\theta_1)\,\boldsymbol{A}(\theta_2) = \boldsymbol{A}(\theta_1 + \theta_2)$

c) $(\forall n \in \mathbb{N})\ \boldsymbol{A}(\theta)^n = \boldsymbol{A}(n\theta)$

Problema 6. (En práctica) Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ambas invertibles, tales que $\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B}^{-1} + \boldsymbol{A}$ son invertibles. Demuestre que

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1} + \boldsymbol{B}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$$

Problema 7. Sea $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior tal que $(\forall i \in \{1, 2, 3\})\ c_{ii} = 1$ y $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}$

a) Demuestre que $\boldsymbol{N}^3 = \Theta$

b) Demuestre que $\boldsymbol{C}$ es invertible y que $\boldsymbol{C}^{-1} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{N} + \boldsymbol{N}^2$.

Problema 8. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ es invertible y $\boldsymbol{B} = I - \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^{-1}\boldsymbol{A}^T$. Demuestre que

a) $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$

b) $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \Theta$

c) $\boldsymbol{B}$ es simétrica

Problema 9. Sea $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se define la matriz conjugada de $\boldsymbol{A}$ como $\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\overline{\boldsymbol{A}}_{ij}\right)$ y la matriz conjugada traspuesta de $\boldsymbol{A}$ como $\boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}}^T$.

a) **(En práctica b))** Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Demuestre que

a.1) $\overline{\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$ y $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$

a.2) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$ y $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$

a.3) Si $\boldsymbol{A}$ es invertible, entonces $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

b) Se dice que $\boldsymbol{A}$ es hermitiana o hermítica si y sólo si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$. Demuestre que la siguiente matriz es hermítica.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2+i & 3-2i \\ 2-i & 2 & -1+3i \\ 3+2i & -1-3i & -4 \end{pmatrix}$$

c) **(En práctica)** Se dice que $\boldsymbol{A}$ es unitaria si y sólo si $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^{-1}$. Demuestre que la siguiente matriz es unitaria.

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+i & -1+i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

Problema 10. (En práctica) Sean $\boldsymbol{C} = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\boldsymbol{D} = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrices diagonales.

a) Demuestre que $\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{DC}$, o sea, el producto de matrices diagonales es conmutativo.

b) Sean $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, con $\boldsymbol{S}$ una matriz invertible. Demuestre que, si $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{AS}$ y $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{BS}$ son matrices diagonales, entonces

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$$

c) Demuestre que $\boldsymbol{C}$ es invertible si y sólo si $(\forall i \in \{1, \ldots, n\})\ c_{ii} \neq 0$. Use esto para demostrar que, si $\boldsymbol{C}$ es invertible, entonces

$$\boldsymbol{C}^{-1} = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{c_{11}}, \frac{1}{c_{22}}, \ldots, \frac{1}{c_{nn}}\right)$$

Problema 11. (En práctica b)) Determine el o los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que las siguientes matrices sean invertibles

a) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & k & 4-k \\ 1 & k & -k \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -k \\ 2 & 6 & -2k \\ 1 & 3 & k+1 \end{pmatrix}$

Problema 12. (En práctica b) y c)) Mediante operaciones elementales por filas, obtenga una matriz triangular superior y una matriz diagonal equivalentes a cada matriz. Si es posible, determine también la inversa.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde $a \in \mathbb{R}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 13. (En práctica b) y d)) Calcule el determinante de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{pmatrix}$, donde $\varepsilon \in \mathbb{R}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 14. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\det(\boldsymbol{A}) = 5$. Calcule el valor de las siguientes expresiones

a) $\det\left(\boldsymbol{A}^5\right)$ b) $\det(-\boldsymbol{A})$ c) $\det\left(2\boldsymbol{A}^{-1}\right)$ d) $\det\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T\right)$

Problema 15. (En práctica b)) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Demuestre que

a) $\det\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (a-b)(a-c)(b-c)$ b) $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} = a(a-1)^2$

Problema 16. (En práctica c)) Calcule el o los valores de $k \in \mathbb{R}$, si es que existen, de tal manera que las siguientes matrices tengan rango igual a 3, 2 o 1.

a) $\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 & k \\ 0 & k & -k & 1 \\ 0 & k & k & k \end{pmatrix}$

Problema 17. (En práctica a)) Escriba los siguientes sistemas de ecuaciones en forma matricial y resuélvalos utilizando el método de eliminación de Gauss.

a)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 &= 2 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Ejercicios de evaluaciones anteriores

Problema 18. (En práctica) Una matriz $\boldsymbol{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice idempotente si y sólo si $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$.

a) Sea $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz idempotente, demuestre que

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \qquad \boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{A}$$

b) Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. Demuestre que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son idempotentes.

Problema 19. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}$. Considere las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & a \\ 0 & -1 & a & 2 \\ -1 & a & 2 & 0 \\ a & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule $\det(\boldsymbol{A})$ y concluya que $\boldsymbol{A}$ es invertible.

b) Verifique que $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{\Theta}$ (donde $\boldsymbol{I}$ y $\boldsymbol{\Theta}$ son la matriz identidad y la matriz nula, respectivamente) y deduzca el valor de $\boldsymbol{A}^{-1}$.

c) Determine el o los valores de a para los que $\boldsymbol{B}$ es invertible. Si es invertible, ¿su inversa es invertible? Justifique.

Problema 20. Determine el valor de las constantes $a, b \in \mathbb{R}$, si existen, tales que la inversa de la siguiente matriz $\boldsymbol{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2a & -b & b \\ b & 2a & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sea igual a su matriz traspuesta.

Problema 21. Considere $a, b \in \mathbb{R}$ y las matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -a & 2 & 0 & 1 \\ a & -3 & 2 & -1 \\ a & -2 & -1 & 1 \\ 2a & -2 & -4 & b \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ a+b+2 \end{pmatrix}$$

a) Determine los valores de a y b para los cuales el sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, sea compatible determinado, compatible indeterminado, o indeterminado.

b) Para $a = 1$ y $b = -1$, encuentre las soluciones del sistema.

Problema 22. Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \\ 7 & 8 & 9a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Encuentre el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ tales que el sistema sea compatible determinado. En cada uno de los casos, encuentre la solución de este sistema.

Problema 23. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el sistema de ecuaciones de incógnitas $x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 0 \\ x + y + \beta z &= 0 \\ \alpha x + \beta y + z &= 0 \end{aligned}$$

a) Determine α y β tales que la solución de este sistema de ecuaciones sea única. ¿Cuál es dicha solución?

b) Determine α y β tales que el sistema tenga solución no trivial, y su respectivo conjunto solución.

Problema 24. **(En práctica)** Encuentre los valores de $\alpha, \beta, k \in \mathbb{R}$ para que el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y + kz &= \alpha \\ z + ky + z &= \beta \\ kx + y + z &= \alpha \end{aligned}$$

a) Tenga solución única

b) Sea incompatible

Problema 25. (En práctica) Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Considere el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{rrrrcl} x & +y & -z & +w & = & 2 \\ 2x & +3y & +\alpha z & -2w & = & 1 \\ x & +\alpha y & +3z & & = & 2 \\ 2x & +2y & -2z & -\beta w & = & 0 \end{array}$$

a) Determine el o los valores de α y β tales que este sistema de ecuaciones sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible

b) Para $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, determine el conjunto solución.

Primer Trimestre, 2016
30 de agosto de 2016