Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°1
Cálculo III (521227)

1. Hallar la adherencia, el interior, el conjunto de los puntos de acumulación y la frontera para

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq z \leq 9 \right\}.$$

Además, indicar justificadamente, si A es cerrado, abierto y/o acotado.

Solución:

$adh(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq z \leq 9 \right\}$ **(4 puntos)**

$int(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > \sqrt{x^2 + y^2}, 4 < z < 9 \right\}$ **(4 puntos)**

$A' = adh(A)$ **(3 puntos)**

$Fr(A) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2}, 4 \leq z \leq 9 \right\} \cup \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 16, z = 4 \} \cup \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 81, z = 9 \}$ **(9 puntos)**

A no es cerrado pues $A \neq \overline{A}$ **(3 puntos)**

A no es abierto pues $int(A) \neq A$ **(3 puntos)**

A es acotado pues, por ejemplo, $A \subset B((0, 0, 0); 9\sqrt{2} + 1)$ **(4 puntos)**

2. Calcular, si es posible, los siguientes límites:

   a) $\displaystyle \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^3 y^2}{x^6 + y^4}$,

   b) $\displaystyle \lim_{(x,y,z) \to (2,0,1)} \frac{x + y + z - 3}{\sqrt{(x-2)^2 + y^2 + |z - 1|}}$.

Solución:

a) Si $x = 0$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} = 0$. **(5 puntos)**

Si $y^2 = x^3$, se tiene que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} = \dfrac{1}{2}$. **(5 puntos)**

De lo anterior, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^4} = 0$ no existe. **(5 puntos)**

b) Para $(x, y, z) \neq (2, 0, 1)$, se tiene que

$$\frac{|(x-2)^2y(z-1)|}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+|z-1|}} \leq |x-2|$$

y como $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,1)} |x-2| = 0$ **(8 puntos)**, por Teorema del sandwich, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,0,1)} \dfrac{(x-2)^2y(z-1)}{\sqrt{(x-2)^2+y^2+|z-1|}} = 0$. **(7 puntos)**

GAJ/EBC/EGG/egg
22 de Septiembre de 2016