UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

EGG/JRC/CFS/JOF/HPV 04 Mayo 2017

Test 4
Cálculo III (521227)

Nombre:

Matrícula: Sección:

1. Calcular, en caso de ser posible, el valor de $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\ dy\ dx$.

   Solución.

   Notemos primero que f definida por $f(x,y) = e^{-y^2}$ es una función continua sobre el conjunto medible $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2;\ x \leq y \leq 2\}$. Luego, f es integrable en D. - - - (3 puntos)

   Ahora, puesto que no es posible calcular directamente la integral $\displaystyle\int e^{-y^2}\ dy$, realizaremos un cambio de orden de integración en la integral doble.

   Al cambiar el orden de integración tenemos:

   $$\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\ dy\ dx = \int_0^2 \int_0^y e^{-y^2}\ dx\ dy - - - (12\ puntos)$$

   Luego, como

   $$\int_0^y e^{-y^2}\ dx = ye^{-y^2} - - - (7\ puntos)$$

   se deduce que

   $$\int_0^2 \int_0^y e^{-y^2}\ dx\ dy = \int_0^2 ye^{-y^2}\ dy = \frac{1}{2}(1 - e^{-4})$$

   Consecuentemente,

   $$\int_0^2 \int_x^2 e^{-y^2}\ dy\ dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-4}) - - - (8\ puntos)$$

2. Encontrar el valor del volumen de la región del primer octante acotada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$.

   Solución.

   Proyectando la región sobre el plano XY tenemos que:

$$D = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 6;\ 0 \leq y \leq \frac{6-x}{2}\right\}$$

   y luego el volumen pedido es

$$V := \iint_D \left(\frac{6 - x - 2y}{3}\right)\ d(x, y). - - - (15\ puntos)$$

   De este modo,

$$V = \frac{1}{3}\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} (6 - x - 2y)\ dy\ dx$$

   Ahora, como

$$\int_0^{\frac{6-x}{2}} (6 - x - 2y)\ dy = \frac{(6-x)^2}{2} - \frac{(6-x)^2}{4} = \frac{(6-x)^2}{4} - - - (8\ puntos)$$

   tenemos que

$$V = \frac{1}{3}\int_0^6 \frac{(6-x)^2}{4} = \frac{1}{12}\int_0^6 (6-x)^2\ dx = 6\ unid.^3 - - - (7\ puntos)$$

   * * El volumen de la región pedida puede también ser expresado como: * *

$$V = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} 1\ dz\ dy\ dx = 6\ unid.^3$$