UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra II - Capítulo 1: Espacios Vectoriales - Listado 1

Problema 1. Sea $\mathbb{K} = \{0, 1\}$. Las operaciones

$$\Delta : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad\qquad * : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$$

son tales que

$$\begin{array}{c|cc} \Delta & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} * & 0 & 1 \\ \hline 0 & & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

1.1 ¿Son Δ y $*$ conmutativas? ¿Hay un elemento neutro para la primera operación? ¿Hay un neutro para la segunda?

1.2 Defina los valores que faltan en las tablas de modo que el conjunto $\mathbb{K}$, con las operaciones Δ y $*$, sea un cuerpo.

<u>*Solución*</u>:

1.1 Se observa la propiedad de conmutatividad para cada par de elementos. Primero, para Δ

$$0\Delta 1 \overset{\text{Def}}{=} 1 = 1\Delta 0,$$

y para $*$

$$0 * 1 \overset{\text{Def}}{=} 0 = 1 * 0.$$

Además, se puede observar que 0 y 1 son candidatos a elementos neutros para Δ y $*$, respectivamente, pues

$$0\Delta 0 \overset{\text{Def}}{=} 0, \quad 1\Delta 0 \overset{\text{Def}}{=} 1,$$

y para $*$

$$0 * 1 \overset{\text{Def}}{=} 0, \quad 1 * 1 \overset{\text{Def}}{=} 1$$

1.2 Luego de lo observado en la parte anterior, se definen las operaciones restantes de la siguiente manera

$$1\Delta 1 := 0, \quad 0 * 0 := 0.$$

Esto con tal de que cada elemento tenga inverso para cada operación. Notar que 0, al ser neutro de Δ, no necesita tener inverso en $*$, por lo que puede asumir cualquier valor en un principio. No obstante, con tal de que la terna $(\mathbb{K}, \Delta, *)$ resulte ser cuerpo, es necesario que $0 * 0 = 0$ (**Corregir de la práctica**). De esta forma, la operaciones Δ y $*$ resultan ser asociativas. En efecto, para Δ

$$\begin{array}{ll} \bullet 0\Delta(0\Delta 0) = 0\Delta 0 = (0\Delta 0)\Delta 0 & \bullet\, 0\Delta(0\Delta 1) = 0\Delta 1 = (0\Delta 0)\Delta 1 \\ \bullet 0\Delta(1\Delta 0) = 0\Delta 1 = (0\Delta 1)\Delta 0 & \bullet\, 1\Delta(0\Delta 0) = 1\Delta 0 = (1\Delta 0)\Delta 0 \\ \bullet 0\Delta(1\Delta 1) = 0\Delta 0 = 1\Delta 1 = (0\Delta 1)\Delta 1 & \bullet\, 1\Delta(0\Delta 1) = 1\Delta 1 = (1\Delta 0)\Delta 1 \\ \bullet 1\Delta(1\Delta 0) = 1\Delta 1 = (1\Delta 1)\Delta 0 & \bullet\, 1\Delta(1\Delta 1) = 1\Delta 0 = 0\Delta 1 = (1\Delta 1)\Delta 1, \end{array}$$

y para $*$

$\bullet 0*(0*0)=0*0=0=(0*0)*0$	$\bullet\, 0*(0*1)=0*0=0=(0*0)*1$
$\bullet 0*(1*0)=0*0=0=(0*1)*0$	$\bullet\, 1*(0*0)=1*0=0=(1*0)*0$
$\bullet 0*(1*1)=0*1=0=(0*1)*1$	$\bullet\, 1*(1*0)=1*0=0=(1*1)*0$
$\bullet 1*(0*1)=1*0=0=(1*0)*1$	$\bullet\, 1*(1*1)=1*1=1=(1*1)*1.$

Por último, se debe verificar que la terna $(\mathbb{K},\Delta,*)$ resulta ser distributivo. En efecto, similarmente a la parte asociativa, se debe verificar caso a caso la propiedad (Abreviación; Con: Conmutatividad de Δ, C.A: Caso anterior)

$$\bullet 0*(0\Delta 0)=0*0=0=0*0\Delta 0*0$$
$$\bullet 0*(0\Delta 1)=0*1=0=0*0\Delta 0*1$$
$$\bullet 0*(1\Delta 0)\overset{\text{Con}}{=}0*(0\Delta 1)\overset{\text{C.A}}{=}0*0\Delta 0*1\overset{\text{Con}}{=}0*0\Delta 1*0$$
$$\bullet 1*(0\Delta 0)=1*0=0=1*0\Delta 0*0$$
$$\bullet 0*(1\Delta 1)=0*0=0=0*1\Delta 0*1$$
$$\bullet 1*(1\Delta 0)=1*1=1*1\Delta 0=1*1\Delta 1*0$$
$$\bullet 1*(0\Delta 1)\overset{\text{Con}}{=}1*(1\Delta 0)\overset{\text{C.A}}{=}1*1\Delta 1*0\overset{\text{Con}}{=}1*0\Delta 1*1$$
$$\bullet 1*(1\Delta 1)=1*0=0=1\Delta 1=1*1\Delta 1*1.$$

Con esto se deduce que $(\mathbb{K},\Delta,*)$ es efectivamente un cuerpo.

Problema 2. Sea X un conjunto no vacío. Determine si $(\mathcal{P}(X),\cup,\cap)$ es un cuerpo.
Solución: Tal terna no es cuerpo. Esto se debe a que $\cup$ tiene como elemento neutro a el conjunto vacío, pues

$$\forall A\subseteq X,\quad A\cup\varnothing=A.$$

Sin embargo, no existe en general inverso en $\cup$ para cada subconjunto de X. Basta considerar el caso de un síngleton $\{x\}$, con $x\in X$ (Conjunto de un sólo elemento), pues en tal caso se observa que

$$\forall A\in\mathcal{P}(X),\quad \varnothing\subsetneq\{x\}\cup A.$$

Problema 3. Decida si los siguientes son o no espacios vectoriales

3.1 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot)$,

Solución: Tal dupla es espacio vectorial. En efecto, las cuatro primeras propiedades exclusivas de $+$ en $\mathbb{C}$ son heredadas de los axiomas de cuerpo de los números reales (Revisar materia de Álgebra I). Además, de la asociatividad y existencia de neutro multiplicativo de $\cdot$ para $\mathbb{C}$, y de la propiedad distributiva de los números complejos, se deducen directamente las siguientes cuatro propiedades.

3.2 $(\mathbb{R},\oplus,\cdot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{Q},\oplus,\odot)$.

Solución: Es espacio vectorial. Todas sus propiedades se obtienen directamente de los axioma de cuerpo de los números reales.

3.3 $(\mathbb{Q},\oplus,\odot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

Solución: No resulta ser un espacio vectorial. Tal característica pareciera cumplirse, pero falla en la eventual definición de la operación binaria externa del espacio vectorial. A saber, el producto $\sqrt{2}\cdot 1$ no es racional, sin embargo $\sqrt{2}$ pertenece, como es sabido, al conjunto de los números reales.

3.4 $(\mathbb{C}^2,\oplus,\odot)$, sobre el cuerpo $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

Solución: Es espacio vectorial. En efecto, teniendo en cuenta que la operaciones $\oplus,\odot:\mathbb{C}^2*\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ son tales que

$$\forall(z_1,z_2),(w_1,w_2)\in\mathbb{C}^2,(z_1,z_2)\oplus(w_1,w_2)=(z_1+w_1,z_2+w_2),$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \alpha \odot (z_1, z_2) = (\alpha \odot z_1, \alpha \odot z_2)$$

es directo observar que se cumplen las cuatro primeras propiedades para la operación binaria interna $\oplus$. Además, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $z, w \in \mathbb{C}^2$, se cumple que

1. $\alpha \odot (\beta \odot z) = (\alpha \cdot \beta) \odot x$. En efecto:

$$\begin{aligned}(\beta \odot z) &= \alpha \odot (\beta \cdot x_1, \beta \cdot x_2) \\ &= (\alpha \cdot \beta \cdot x_1, \alpha \cdot \beta \cdot x_2) \\ &= (\alpha \cdot \beta) \odot x.\end{aligned}$$

2. $\alpha \odot (z \oplus w) = \alpha \odot z \oplus \alpha \odot w$. En efecto:

$$\begin{aligned}\alpha \odot (z \oplus w) &= \alpha \odot ((z_1, z_2) \oplus (w_1, w_2)) \\ &= \alpha \odot (z_1 + w_1, z_2 + w_2) \\ &= (\alpha \cdot z_1 + \alpha \cdot w_1, \alpha \cdot z_2 + \alpha \cdot w_2) \\ &= (\alpha \cdot z_1, \alpha \cdot z_2) \oplus (\alpha \cdot w_1, \alpha \cdot w_2) \\ &= \alpha \odot (z_1, z_2) \oplus \alpha \odot (w_1, w_2) \\ &= \alpha \odot z \oplus \alpha \odot w.\end{aligned}$$

3. $(\alpha + \beta) \odot z = \alpha \odot z \oplus \beta \odot z$. En efecto,

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \odot z &= (\alpha + \beta) \odot (z_1, z_2) \\ &= (\alpha \cdot z_1 + \beta \cdot z_1, \alpha \cdot z_2 + \beta \cdot z_2) \\ &= (\alpha \cdot z_1, \alpha \cdot z_2) \oplus (\beta \cdot z_1, \beta \cdot z_2) \\ &= \alpha \odot (z_1, z_2) \oplus \beta \odot (z_1, z_2) \\ &= \alpha \odot z \oplus \beta \odot z.\end{aligned}$$

4. $1 \odot z = z$. En efecto,

$$\begin{aligned}1 \odot z &= 1 \odot (z_1, z_2) \\ &= (1 \cdot z_1, 1 \cdot z_2) \\ &= (z_1, z_2) = z.\end{aligned}$$

Problema 4. Justifique adecuadamente si el conjunto V con la operación $\oplus$ y la multiplicación por escalar $\odot$ definidas en cada caso es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

4.1 $V = \mathbb{R}^+, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \qquad x \oplus y = xy \quad$ y $\quad \alpha \odot x = x^\alpha$

<u>*Solución*</u>: Es espacio vectorial. Para ver esto, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x, y, z \in \mathbb{R}^+$. Así,

1. $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$. En efecto,

$$\begin{aligned}x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (yz) \\ &= x(yz) \\ &= (xy)z \\ &= (x \oplus y) \oplus z.\end{aligned}$$

2. $x \oplus y = y \oplus x$, pues la multiplicación de números reales es conmutativa.

3. El número 1, neutro multiplicativo de los reales, resulta ser el neutro aditivo para $\oplus$.

$$1 \oplus x = 1x = x$$

4. Para cada real positivo x, su inverso multiplicativo x^{-1} satisface que

$$x \oplus x^{-1} = xx^{-1} = 1.$$

   Es decir, el inverso multiplicativo usual para la mutiplicación de reales resulta ser el inverso para $\oplus$.

5. $\alpha \odot (\beta \odot x)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha \odot (\beta \odot x) &= \alpha \odot (x^{\beta}) \\ &= (x^{\beta})^{\alpha} \\ &= x^{\alpha\beta} \\ &= (\alpha\beta) \odot x. \end{aligned}$$

6. $\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y$. En efecto,

$$\begin{aligned} \alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot (xy) \\ &= (xy)^{\alpha} \\ &= x^{\alpha} y^{\alpha} \\ &= x^{\alpha} \oplus y^{\alpha} \\ &= \alpha \odot x \oplus \alpha \odot y. \end{aligned}$$

7. $(\alpha + \beta) \odot x$. En efecto,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \odot x &= x^{\alpha+\beta} \\ &= x^{\alpha} x^{\beta} \\ &= x^{\alpha} \oplus x^{\beta} \\ &= \alpha \odot x \oplus \beta \odot x. \end{aligned}$$

8. $1 \odot x = x$. En efecto,

$$1 \odot x = x^1 = x.$$

4.2

$$v = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C},$$

con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un número complejo

Solución: No es espacio vectorial. Esto se debe a que el conjunto V no es cerrado bajo producto por escalar. Por ejemplo, el producto por escalar siguiente no pertenece a V:

$$\underbrace{i}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\in V} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \notin \mathbb{C}.$$

4.3

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un número real.

Solución: A diferencia del caso anterior, éste sí resulta ser espacio vectorial. Es más, resulta ser un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ en el cuerpo de los reales. En efecto, del teorema de caracterización de subespacio, se prueban las siguientes tres propiedades:

1) $V \neq \varnothing$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in V$$

2) Dadas las matrices

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} \in V, \quad \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} \in V,$$

se observa que la suma

$$\begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ -\overline{w_1} & \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2 & w_2 \\ -\overline{w_2} & \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\overline{w_1} - \overline{w_2} & \overline{z_1} + \overline{z_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 + z_2 & w_1 + w_2 \\ -\overline{w_1 + w_2} & \overline{z_1 + z_2} \end{pmatrix}$$

pertenece a V.

3) Dada $\lambda \in \mathbb{R}$ y matriz

$$\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \in V, \end{pmatrix}$$

se observa que la multiplicación por escalar

$$\lambda \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \in V, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z & \lambda w \\ -\lambda\overline{w} & \lambda\overline{z}, \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z & \lambda w \\ -\overline{\lambda w} & \overline{\lambda z} \end{pmatrix}$$

pertenece a V.

4.4 $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{y} \quad \alpha \odot (x_1, y_1) = (\alpha x_1, y_1)$$

<u>*Solución*</u>: No es espacio vectorial, pues no se cumple la propiedad distributiva con respecto a la suma de escalares. Por ejemplo,

$$(1 + 2) \odot (3, 3) = 3 \odot (3, 3) = (9, 3),$$

pero

$$1 \odot (3, 3) \oplus 2 \odot (3, 3) = (3, 3) \oplus (6, 3) = (9, 6) \neq (9, 3).$$

Problema 5. Determine si los subconjuntos indicados son subespacios vectoriales del espacio vectorial V con las operaciones usuales de suma y producto por escalar sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Para cada conjunto, escríbalo (si se puede) en forma paramétrica, o bien caracterícelo usando ecuaciones.

5.1) $V = \mathbb{R}^3, \mathbb{K} = \mathbb{R}$.

5.1.1) **(P)** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \geq 0\}$

<u>*Solución*</u>: No es espacio vectorial. Esto se debe a que M no es cerrado bajo multiplicación por escalar. Por ejemplo, el vector $(-1, 1, -1)$ pertenece a M, pero

$$-1(-1, 1, -1) = (1, -1, 1)$$

no satisface que el producto de sus componentes sea no negativo.

5.1.3) **(P)** $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$

<u>*Solución*</u>: . Sí es subespacio vectorial. Para observar esto, primero es claro que S es no vacío, pues, por ejemplo, el vector $(0, 1, 1)$ satisface la ecuación pedida. Además, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, se cumple que

1. $(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \in S$, pues

$$2(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) - (z_1 + z_2) = \underbrace{(2x_1 + y_1 - z_1)}_{=0} + \underbrace{(2x_2 + y_2 - z_2)}_{=0} = 0.$$

2. $\alpha(x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \in S$, pues

$$2(\alpha x_1) + \alpha y_1 - \alpha z_1 = \alpha \underbrace{(2x_1 + y_1 - z_1)}_{=0} = 0.$$

5.2) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.2.2) **(P)** $P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)\}$
<u>*Solución*</u>: No es subespacio vectorial. Se puede concluir del siguiente ejemplo:

$$\mathrm{Re}(1 + i) = \mathrm{Re}(1 + 2i),$$

pero

$$\mathrm{Re}(i(1 + i)) = \mathrm{Re}(-1 + i) = -1$$

y

$$-1 \neq \mathrm{Re}(i(1 + 2i)) = \mathrm{Re}(-2 + 1) = -2.$$

Es decir, $(1 + i, 1 + 2i)$ pertenece a P, pero $i(1 + i, 1 + 2i)$ no.

5.3) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

5.3.2) **(P)** $P = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)\}$
<u>*Solución*</u>: Es subespacio vectorial. Primero, $P \neq \varnothing$, pues claramente $(0, 0)$ pertenece a P. Además, siendo $\alpha \in \mathbb{C}$ y $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{C}^2$, se cumple que
1. $\mathrm{Re}(x_1) = \mathrm{Re}(y_1)$ y $\mathrm{Re}(x_2) = \mathrm{Re}(y_2)$. Y como en general

$$\mathrm{Re}(z + w) = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \quad \forall z, w \in \mathbb{C},$$

se concluye que

$$\mathrm{Re}(x_1 + x_2) = \mathrm{Re}(y_1 + y_2)$$

Por lo que $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ pertenece a P.
2. $\mathrm{Re}(\alpha z) = \alpha \mathrm{Re}(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ (Esto no se cumple si α es en general complejo). Por lo que

$$\mathrm{Re}(\alpha x_1) = \mathrm{Re}(\alpha y_1).$$

Es decir, $\alpha(x_1, y_1) \in P$.

5.4) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

5.4.2) **(P)** $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Q} \right\}$
<u>*Solución*</u>: No es subespacio vectorial. Recordar que todo espacio vectorial requiere tener un elemento neutro aditivo. Tal característica no se cumple en W por no existir un número a que haga nula a la matriz

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}.$$

5.6) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$.

5.6.1 **(P)** $S = \{p : \text{intersecta al eje } Y \text{ en } -1\}$
<u>*Solución*</u>: No es espacio vectorial, pues el polinomio nulo no verifica tal propiedad.

5.7 $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.7.1 **(P)** $G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \text{ es cóncava}\}$

<u>*Solución*</u>: Es espacio vectorial. Primero, es fácil ver que la función nula es cóncava. Además, dados $\alpha \in \mathbb{R}$ y $f, g \in G$, se tiene que

1.
$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &\geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)\\ &= \lambda(f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)\end{aligned}$$

   Por lo que la suma es cóncava, y así pertenece a G.

2.
$$\begin{aligned}(\alpha f)(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \alpha f(\lambda x + (1-\lambda)y)\\ &= \alpha(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))\\ &= \lambda(\alpha f)(x) + (1-\lambda)(\alpha f)(y)\end{aligned}$$

   Por lo que también la multiplicación por escalar es cerrada.

5.7.3 **(P)** $S = \{f \in \{(\mathbb{R},\mathbb{R}) : f \text{ es sobreyectiva}\}$

<u>*Solución*</u>: No es espacio vectorial. Por ejemplo, tanto la función identidad, $f(x) = x$, y su inverso aditivo, $g(x) = -x$, son sobreyectivas; pero claramente su suma no lo es.

Problema 7. Sea V un $\mathbb{K}$-e.v y U un s.e.v de V. Muestre que para todo escalar $\alpha \neq 0$, el conjunto

$$\alpha U := \{\alpha \cdot u : u \in U\}$$

es igual a U.
<u>*Solución*</u>: Se procede por doble inclusión. En efecto,
$\boxed{\supseteq}$ Si $x \in U$, también se cumple que $\alpha^{-1}x \in U$, por ser un subespacio vectorial cerrado bajo multiplicación por escalar. Luego, de la definición del conjunto αU se concluye que

$$x = \alpha(\alpha^{-1}x) \in \alpha U.$$

$\boxed{\subseteq}$ Por otro lado, Si $x \in \alpha U$, por definición existe $u \in U$ tal que

$$x = \alpha u.$$

Luego, como U debe ser cerrado bajo multiplicación por escalar, se concluye que $x \in U$.

Problema 9. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ y sea el conjunto $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 :\ \vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{b} = 0\}$.

9.1 Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

<u>*Solución*</u>: Se observa que

1) $S \neq \varnothing$, pues el vector $(0,0,0) \in S$
2) Si $\vec{x}, \vec{y} \in S$, entonces
$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{a}}_{=0} + \underbrace{\vec{y} \cdot \vec{a}}_{=0} = 0,$$
   y también
$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{b} = \underbrace{\vec{x} \cdot \vec{b}}_{=0} + \underbrace{\vec{y} \cdot \vec{b}}_{=0} = 0.$$
   Por lo que la suma de vectores es cerrada en S.

3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda\vec{x} \cdot \vec{a} = \lambda(\vec{x} \cdot \vec{a}) = 0 = \lambda\vec{x} \cdot \vec{b}.$$

Por lo que también es cerrada bajo multiplicación por escalar.

Lo anterior prueba que S es subespacio vectorial.

9.2 Pruebe que $S = \{\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) : \ \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Solución: Se procede por doble inclusión. En efecto, todo vector $\alpha(\vec{a} \times \vec{b})$ satisface las dos condiciones que aseguran su pertenencia en S, pues $\vec{a} \times \vec{b}$ es siempre perpendicular a $\vec{a}$ y $\vec{b}$. Por otro lado, si se considera que $[x_1, x_2, x_3] \in S$, se cumple que

$$x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 = 0 \tag{1}$$

$$x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3 = 0 \tag{2}$$

Luego, de la segunda ecuación

$$x_1 = \frac{-x_2b_2 - x_3b_3}{b_1}. \tag{3}$$

Reemplazando en (1) y despejando x_2 queda

$$x_2 = \frac{x_3(a_3b_1 - b_3a_1)}{a_2b_1 - a_1b_2}. \tag{4}$$

Y ahora reemplazando en (3) se obtiene

$$x_1 = \frac{x_3(a_3b_2 - b_3a_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \tag{5}$$

Por lo tanto, de (5) y (4) se puede caracterizar S con las ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\alpha(a_3b_2 - b_3a_2)}{a_2b_1 - a_1b_2} \\ x_2 &= \frac{\alpha(a_3b_1 - b_3a_1)}{a_2b_1 - a_1b_2}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 &= \alpha, \end{aligned}$$

o equivalentemente (multiplicando el vector director por $(a_1b_2 - a_2b_1)$)

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha(b_3a_2 - a_3b_2) \\ x_2 &= \alpha(b_3a_1 - a_3b_1), \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_3 &= \alpha(a_1b_2 - a_2b_1). \end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuanta que $\vec{a} \times \vec{b} = [a_2b_3 - a_3b_2, a_1b_3 - a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1]$, se concluye lo pedido.

Víctor Burgos Villanueva.
Concepción, 14 de marzo de 2017.