UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

LISTADO 3: COMBINACIONES LINEALES. CONJUNTO GENERADOR.

Álgebra II - 525148

Observación: Los ejercicios marcados con **(P)** son los ejercicios a resolver en las clases prácticas.

1) En cada caso exprese, si es posible, al elemento indicado como combinación lineal de los vectores en el subconjunto del espacio vectorial V dado,

   1.1) **(P)** $(1,-1)$, $\left\{(0,-1),(\sqrt{2},1),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$, $V=\mathbb{R}^2$ sobre $\mathbb{Q}$.
   1.2) x^2+x-1, $\left\{x^2-1, x-1, x^2-x\right\}$, $V=\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.
   1.3) **(P)** i, $\left\{1, x+x^2, x^2+1\right\}$, $V=\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$.
   1.4) e^{-x}, $\{e^x+e^{-x}, e^x-e^{-x}\}$, $V=\mathcal{F}(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$.

   Observación: $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$.

2) **(P)** Sean $u=(1,-3,2)$ y $v=(-2,-1,-4)$ vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$.

   2.1) ¿Es $(6,31,12)$ una combinación lineal de u y v? ¿Es $(6,31,12)$ combinación lineal de u y v si se considera a $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$?
   2.2) Determine, si existen, valores para $k\in\mathbb{R}$ de modo que $(3,k,6)$ sea combinación lineal de u y v.
   2.3) Determine la ecuación que caracteriza a todos los vectores (x,y,z) que pertenecen al subespacio generado por u y v.

3) Descomponga, si es posible, al vector $p\in\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ definido por $\forall\, x\in\mathbb{R}\ :\ p(x)=1+2x-4x^2+x^3$ como combinación lineal de los vectores en el siguiente conjunto:

$$S=\left\{x^3-x^2, x^2-x, x-1, 1-x^3\right\}$$

   ¿Es única la descomposición encontrada? ¿es S l.i.?

4) Sea V un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo $\mathbb{K}$. Si S es un conjunto de vectores de V, y U y W son subespacios vectoriales de V, demuestre que:

   4.1) $\Theta\in\langle S\rangle$,
   4.2) $S\subseteq\langle S\rangle$,
   4.3) $\langle S\rangle$ es un subespacio vectorial de V,
   4.4) $\langle U\rangle=U$,
   4.5) $\langle\langle S\rangle\rangle=\langle S\rangle$
   4.6) $U+W=\langle U\cup W\rangle$.

5) **(P)** Caracterice al subespacio vectorial U del espacio vectorial real $\mathbb{C}^2$

$$U=\langle\{(i,0),(1,i-1)\}\rangle+\langle\{(i,-1),(1,i)\}\rangle.$$

6) En cada caso determine si S, subconjunto del espacio vectorial V sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, es l.i. o l.d.

   6.1) $V=\mathbb{C}$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $S=\{1,i\}$,
   6.2) $V=\mathbb{C}$, $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $S=\{1,i\}$,
   6.3) **(P)** $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $S=\left\{\left(2+\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right),\left(1,-1+\sqrt{3}\right)\right\}$,
   6.4) **(P)** $V=\mathbb{R}^2$, $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$, $S=\left\{\left(2+\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right),\left(1,-1+\sqrt{3}\right)\right\}$,
   6.5) $V=\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $S=\{1,x-1,(x-1)(x-2)\}$.

7) **(P)** Suponga que $S=\{v_1,\ldots,v_n\}$ es un conjunto l.i. de vectores en un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V. Decida si los siguientes conjuntos son l.i. Justifique sus respuestas.

7.1) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$,

7.2) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}, v_1 + v_2 + \ldots + v_n\}$,

7.3) $S - \{v_i\}$, siendo v_i un elemento cualquiera de S.

8) Dé un ejemplo de un conjunto l.d. de tres vectores del espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ tal que cualquier subconjunto de él de dos vectores sea l.i.

9) Considere los siguientes conjuntos de vectores en los $\mathbb{K}$-espacios vectoriales V dados.

i) $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$

1) **(P)** $C_1 = \{(1, i), (2, i)\}$

2) $C_2 = \{(i, 3), (-2, 6i), (4i, 12)\}$

3) $C_3 = \{(1, 1), (-1, 1), (0, 1)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$

1) $C_1 = \{(1, -2, 1), (1, 0, 1)\}$

2) $C_2 = \{(1, 1, 1), (-2, -6, 0), (0, -4, 2)\}$

3) $C_3 = \{(0, -1, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 2)\}$

iii) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$

1) $C_1 = \{(1 - t)^3, 1 - t^2, 0\}$

2) **(P)** $C_2 = \{t - 1, t^2 - 1, t^2 + 1\}$

iv) $V = M_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{R}$

1) **(P)** $C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \right\}$

2) $C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4i & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Para cada uno de ellos

9.1) describa el subespacio que generan de la manera más simple posible,

9.2) decida si es l.i. o no y, en caso de ser l.d., redúzcalo a un conjunto l.i..

10) **(P)** Sea $A = \{\, p_0, p_1, \ldots, p_m \,\} \subseteq \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$. Los vectores en A son tales para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$ se cumple que $p_j(1) = 0$. Demuestre que entonces A es l.d., considerando a $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real.

10.1) Si B es un conjunto $B = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ de $n+1$ ($n < m$) vectores en $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ que también satisfacen $\forall\, j \in \{0, 1, \ldots, n\} \,:\, q_j(1) = 0$, ¿puede asegurarse también que B es l.d.?

11) Sean $U_0, U_1, U_2, \ldots$ los siguientes subconjuntos del espacio vectorial real $\mathcal{F}(\mathbb{R})$,

$$U_0 = \{1\}\,, \qquad \forall\, j \in \mathbb{N} \,:\, U_j = \{\sin(2\,j\pi x)\,,\, \cos(2\,j\pi x)\}\,,$$

es decir,

$$U_0 = \{1\}\,, U_1 = \{\sin(2\pi x)\,,\, \cos(2\pi x)\}\,, U_2 = \{\sin(4\pi x)\,,\, \cos(4\pi x)\}\,, \ldots$$

11.1) Pruebe que los conjuntos definidos son l.i.

11.2) Demostrar que, dados $m, n \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_0 \cup U_m \cup U_n$ también es l.i.

11.3) Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $W_n := \bigcup_{j=0}^{n} U_j$ es también l.i.