UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tiempo de desarrollo: 40 min. **17/11/2016**

Test n^{o}5- 521227
(Cálculo III)

1. **Problema**.- Sean $S_1 = \left\{(x,y)\ /\ 0 \leq x \leq 2y - y^2\right\}$, $S_2 = \ \{(x,y)\ /\ 0 \leq y \leq 2x,\ 0 \leq x \leq 1\}$, $S_3 = \ \left\{(x,y)\ /\ 0 \leq y \leq \dfrac{2}{x},\ 1 \leq x \leq 2\right\}$, y sea f la función definida por $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y^2}$, con $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

   (a) Calcule contenido de la intersección $S_1 \cap S_2$ y el contenido de la intersección $S_2 \cap S_3$.

   (b) Justificando adecuadamente sus respuestas, decida la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones:

   1. Si $S = S_1 \cup S_2$, $\displaystyle\int_S f(x,y)\, d(x,y) = \int_{S_1} f(x,y)\, d(x,y) + \int_{S_2} f(x,y)\, d(x,y)\,.$
   2. Si $S = S_2 \cup S_3$, $\displaystyle\int_S f(x,y)\, d(x,y) = \int_{S_2} f(x,y)\, d(x,y) + \int_{S_3} f(x,y)\, d(x,y)$

   En caso de respuesta afirmativa, calcule $\displaystyle\int_S f(x,y)\, d(x,y)\,.$

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua, pruebe que:

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\, dy\ dx\ + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\, dy\ dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\, dx\ dy$$

Respuestas

Problema 1.

1-a-1. Medida de $S_1 \cap S_2 :\ m(S_1 \cap S_2)$.

$S_1 \cap S_2 = \left\{(x,y)\ /\ y/2 \leq x \leq 2y - y^2,\ 0 \leq y \leq 3/2\right\}$

$$\begin{aligned} m(S_1 \cap S_2) &= \int_0^{3/2} \int_{y/2}^{2y-y^2} dx\ dy = \int_0^{3/2} \left(\frac{3}{2}y - y^2\right) dy \qquad \textbf{(15 ptos)} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

1-a-2. Medida de $S_2 \cap S_3 :\ m(S_2 \cap S_3)$.

$S_2 \cap S_3 = \{(x,y)\ /\ 0 \leq y \leq 2,\ x = 1\}$ (segmento de recta en $\mathbb{R}^2$)

Como $S_2 \cap S_3$ es un segmento de recta en $\mathbb{R}^2$ entonces

$$m(S_2 \cap S_3) = 0 \qquad \textbf{(15 ptos)}$$

NO EVALUAR 1-b

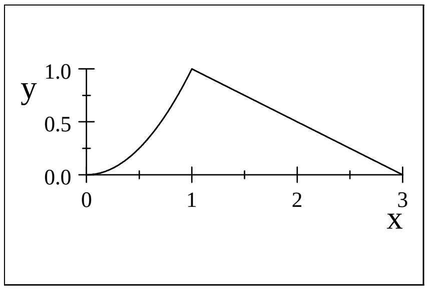
Problema 2. Sea S la región acotada del plano tal que

$$\int_S f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\ dx\ + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy\ dx \tag{1}$$

Es claro que la región de integración S es

$$S = \{(x,y)\,/\ 0 \le y \le x^2,\ 0 \le x \le 1\} \cup \{(x,y)\,/\ 0 \le y \le (3-x)/2,\ 1 \le x \le 3 \qquad \textbf{(10 ptos)}$$

Esto es, S es la región del plano limitada por la parábola $C: y = x^2$,la recta $L: y = (3-x)/2$ y el eje OX



Así, S tambien puede describirse mediante

$$S = \{(x,y)\,/\ \sqrt{y} \le x \le 3-2y,\ 0 \le y \le 1\} \qquad \text{(10 ptos)}$$

entonces,

$$\int_S f(x,y)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\ dy$$

Luego, de (1) y (2)

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\,dy\ dx\ + \int_1^3 \int_0^{(3-x)/2} f(x,y)\,dy\ dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)\,dx\ dy \qquad \text{(10 ptos)}$$