UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

LISTADO 4: BASE Y DIMENSIÓN DE ESPACIOS VECTORIALES.

Álgebra II - 525148

Observación: Los ejercicios marcados con **(P)** son los ejercicios a resolver en las clases prácticas.

1) Encuentre una base y determine la dimensión del siguiente s. e. v. $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) : a = i \quad \wedge \quad c = g \quad \wedge \quad b = d = f = h \right\}$$

2) **(P)** Considere los siguientes subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ sobre $\mathbb{C}$,

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \right\} \right\rangle, \quad T = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \right\} \right\rangle.$$

2.1) Escriba qué relaciones deben cumplirse entre las entradas de las matrices en T.

2.2) Determine si S y T están en suma directa o no.

2.3) Encuentre una base de $S + T$.

2.4) Responda las preguntas anteriores considerando ahora a $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ como e. v. sobre $\mathbb{R}$.

3) **(P)** Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$, una base de V.

3.1) Muestre que si $w \in V$ es tal que $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ con $\alpha_1 \neq 0$, entonces

$$\mathcal{B}_2 = \{w, v_2, \ldots, v_n\}$$

es también base de V, es decir, muestre que $\langle \mathcal{B}_2 \rangle = V$ y $\mathcal{B}_2$ es li.

3.2) Determine las coordenadas de u en $\mathcal{B}_2$ si

$$[u]_{\mathcal{B}_1} = (1, 1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}.$$

4) Sea el espacio vectorial real $V = \mathbb{R}^4$ y sus subespacios

$$F = \langle \{(1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 6), (0, 2, 4, 4)\} \rangle, \quad G = \langle \{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 0, 1)\} \rangle$$

Determine las dimensiones de F, G, $F \cap G$ y $F + G$ y dé una base para cada uno de estos subespacios.

5) Muestre que el conjunto B es base del espacio vectorial V y encuentre el vector coordenada $[w]_B$ si:

5.1) **(P)** $V = \mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \{(4, 1, 0), (2, 0, 2), (-2, 1, 0)\}$ y $w = (-4, 1, 4)$

5.2) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \{(t-2)^3, t^2, (t-1), 1\}$ y $w = t^2 + 1$

5.3) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ y $w = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.4) **(P)** $V = \mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, $B = \{(1, i), (i, 1), (i, i), (1, -1)\}$ y $w = (2 + i, i - 2)$

6) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ forman los vectores $(a, -1, 0)$, $(1, -1, a)$, $(1 - a, 1, 0)$ una base para $\mathbb{R}^3$?

7) Dados los conjuntos:

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

7.1) Muestre que $\langle S_1 \rangle = \langle S_2 \rangle$.

7.2) Encuentre una base para $\langle S_1 \rangle$.

8) Encuentre una base y determine la dimensión de los siguientes subespacios. Complete en cada caso las bases obtenidas a una base de todo el espacio.

8.1) $W_1 = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \ : \ \ p \text{ es par}\}$

8.2) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ 0 & a & c \\ 0 & c & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

8.3) $W_3 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + z = 0\big\}$

8.4) $W_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b + c \\ a - b & c \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

8.5) **(P)** $W_5 = \left\{ p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \ : \ \int_{-1}^{1} p(x)\mathrm{d}x = 0 \right\}$

8.6) $W_6 = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ : \ \ A \text{ es antisimétrica}\}$

9) Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, una base de V. Sean además $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ distintos de cero.

9.1) Muestre que $\mathcal{B}_1 = \{\lambda_1 v_1, \ \lambda_2 v_2, \ \ldots, \ \lambda_n v_n\}$ es también una base de V.

9.2) Si $x \in V$ es tal que $x = v_1 + v_2 + \ldots + v_n$, ¿cuáles son las coordenadas de x en $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{B}_1$?

10) **(P)** Sean $w = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\, i - 1\right)$ una de las raíces cúbicas de la unidad y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & w^2 \end{pmatrix}$.

10.1) Pruebe que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}$ y $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.2) Considere

$$V = \left\{ X \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C}) \ : \ \exists\, n \in \mathbb{N} \ : \ \exists\, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \ : \ X = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i \right\}$$

Determine una base y la dimensión de V.