

Si $T : V \rightarrow V$ es un operador lineal que satisface

$$\forall v \in V, \quad T(T(v)) = \theta,$$

entonces el operador $L := I - T$ es invertible (Donde I es el operador identidad)

En efecto, si $v \in \text{Ker}(L)$, se tiene que

$$\begin{aligned} L(v) &= \theta \\ \Leftrightarrow v - T(v) &= \theta \\ \Leftrightarrow T(v) &= v \quad (*) \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente el operador T se obtiene

$$T(T(v)) = T(v).$$

Como la hipótesis del problema indica que el lado izquierdo de la igualdad anterior es nulo, de $(*)$ se concluye que $v = \theta$. Por tanto, como lo anterior muestra que $\text{Ker}(L) = \{\theta\}$, del teorema de las dimensiones se concluye que L es invertible.

Concepción, 24 de mayo de 2017.