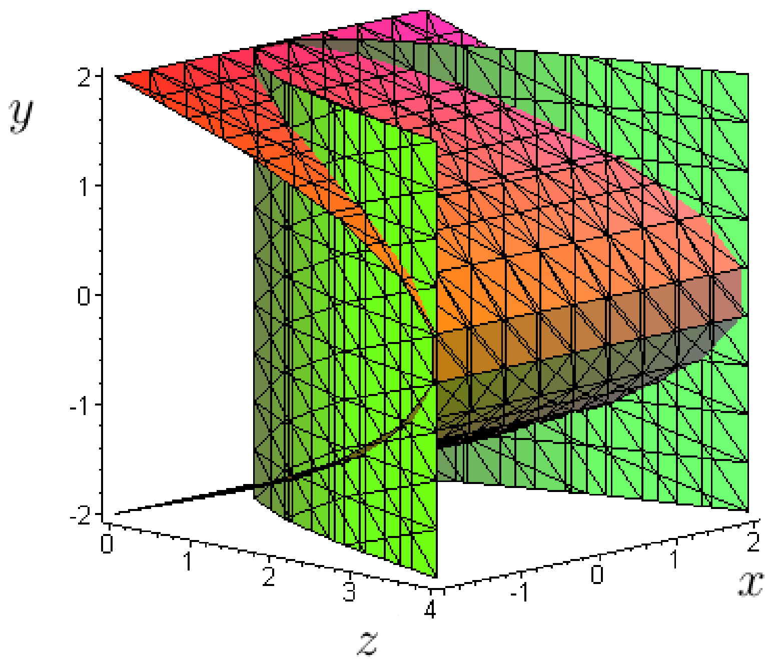
Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°6
Cálculo III (521227)

1. Utilizar coordenadas cilíndricas para calcular el volumen del sólido acotado por los cilindros parabólicos de ecuaciones $z = x^2$ y $z = 4 - y^2$.

   Solución: La proyección del sólido en el plano xy corresponde al disco $x^2 + y^2 \leq 4$ y al usar coordenadas cilíndricas se tiene que $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq r \leq 2$. **(10 puntos)**



   Como la cota inferior para el sólido está dada por $z = x^2$ y la superior por $z = 4-y^2$, el volumen es

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{r^2 \cos^2\theta}^{4 - r^2 \sin^2\theta} r \, dz \, dr \, d\theta \ \textbf{(10 puntos)} \\
&= 8\pi. \ \textbf{(10 puntos)}
\end{aligned}
$$

2. Calcular la integral de línea

$$\int_C 3xy\, dx + x^2 dy,$$

donde C es la curva frontera del conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 2x - 1\}$ recorrida una vez en sentido antihorario.

Solución 1: Al considerar como C_1 el segmento orientado desde $(1, 1)$ hasta $(3, 1)$, él puede parametrizarse por $C_1(t) = (2t + 1, 1)$, donde $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto

$$\int_{C_1} 3xy\, dx + x^2 dy = \int_0^1 6(2t + 1)\, dt = 12. \ \textbf{(8 puntos)}$$

Al considerar como C_2 el segmento desde $(3, 1)$ hasta $(3, 5)$, él puede parametrizarse por $C_2(t) = (3, 4t + 1)$, donde $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto

$$\int_{C_2} 3xy\, dx + x^2 dy = \int_0^1 36\, dt = 36. \ \textbf{(8 puntos)}$$

Al considerar como C_3 el segmento desde $(3, 5)$ hasta $(1, 1)$, él puede parametrizarse por $C_3(t) = (3 - 2t, 5 - 4t)$, donde $0 \leq t \leq 1$ y por lo tanto

$$\int_{C_3} 3xy\, dx + x^2 dy = \int_0^1 \left(-6(3 - 2t)(5 - 4t) - 4(3 - 2t)^2\right) dt = -\frac{172}{3}. \ \textbf{(8 puntos)}$$

De lo anterior, como $C = C_1 + C_2 + C_3$, se tiene que

$$\int_C 3xy\, dx + x^2 dy = 12 + 36 - \frac{172}{3} = -\frac{28}{3}. \ \textbf{(6 puntos)}$$

Solución 2: Al considerar el campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definido por

$$F(x, y) = (p(x, y), q(x, y)) = \left(3xy, x^2\right),$$

se tiene que él es de clase C^1 en todo $\mathbb{R}^2$ y en particular, es de clase C^1 sobre un abierto que contiene a D. Por Teorema de Green, se tiene

$$\begin{aligned}
\int_C 3xy\, dx + x^2 dy &= \iint_D \left(\frac{\partial q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y)\right) d(x, y) \ \textbf{(10 puntos)} \\
&= \int_1^3 \int_1^{2x-1} -x\, dy\, dx \ \textbf{(10 puntos)} \\
&= -\frac{28}{3}. \ \textbf{(10 puntos)}
\end{aligned}$$

EGG/JAG/CFS/JOF/HPV/egg
8 de Junio de 2017