Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática
GAJ/EBC/EGG/gaj 01-12-2016

Test N°6 (Cálculo III)

Nombre: ____ Matrícula: ______________

Problema 1: Calcular el volumen del cuerpo K del espacio que se encuentra dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=100$ y dentro del cono $x^2+y^2=z^2, z\geq 0$.

Problema 2: Calcular, mediante el cambio de variables dado por $x=a\sqrt{u}$, $y=b\sqrt{v}$, $z=c\sqrt{w}$ la integral $I=\int_D xyz\,d(x,y,z)$, con $D=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\right\}$.

Desarrollo:

Problema 1

$Vol(K)=\int_K 1d(x,y,z)$ **...5 puntos**

Pasando a coordenadas esféricas

Se tiene $Vol(K)=\int_{K^*}\rho^2 sen(\varphi)\,d(\rho,\theta,\varphi)$

donde $K^*=\left\{(\rho,\theta,\varphi):0\leq\rho\leq 10, 0\leq\theta\leq 2\pi, 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}\right\}$ **...........................15 puntos**

Luego $Vol(K)=\int_0^{10}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\rho^2 sen(\varphi)\right)d\varphi\right)d\theta\right)d\vartheta$ **.......................................5 puntos**

Por lo tanto $\boxed{Vol(K)=\frac{1000\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)}$ **..5 puntos**

$\boxed{\text{30 puntos}}$

Problema 2

La función $g:D^*\to\mathbb{R}^2$ **definida por** $g(u,v,w)=(x,y,z)$**, donde** $x=a\sqrt{u}, y=b\sqrt{v}, z=c\sqrt{w}$**, de dominio** $D^*=\{(u,v,w):u+v+w\leq 1, u\geq 0, v\geq 0, w\geq 0\}$ **es**

de clase C^1 **sobre el interior** A^* **de** $D*$**, inyectiva, con Jacobiano** $\dfrac{abc}{8\sqrt{uvw}}$ **distinto de cero en en** $A^* = \{(u,v,w) : u+v+w<1, u>0, v>0, w>0\}$ **y** $g(D^*) = D$ **…………………………15 puntos**

Luego por el teorema del cambio de variables aplicado al subconjunto $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} < 1, x>0, y>0, z>0\right\}$ **de** D **y a la función continua** f **dada por** $f(x,y,x) = xyz$ **que es integrable sobre** D **y sobre A y además** $\int\limits_D f(x,y,z) d(x,y,z) = \int\limits_A f(x,y,z) d(x,y,z)$**.**

Se tiene

$$I = \int\limits_{A^*} (abc)\sqrt{uvw} \frac{abc}{8\sqrt{uvw}} d(uvw) = \int\limits_{D^*} \frac{(abc)^2}{8} d(uvw) = \frac{(abc)^2}{8} (\int\limits_{D^*} 1 d(u,v,w))$$ **……15 puntos**

$\boxed{I = \dfrac{(abc)^2}{48}}$ **…………………………………………………………………………………15 puntos**

$\boxed{\text{30 puntos}}$