UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Tiempo de desarrollo: 40 min. **06/10/2015**

Test n^{o}2 - 521227
(Cálculo III)

Problema.- Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-y} & , \quad y\neq x^2\\[2ex] 0 & , \quad y=x^2\end{cases}$$

1. Decida la continuidad de f en $(0,0)$ y en $(1,1)$. (05 ptos c/u)

   Respuesta:

   i) Continuidad de f en $(0,0)$.

   Como $\displaystyle\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}}\left(\frac{x^2}{x^2-y}\right)=1$ y $f(0,0)=0$, entonces f no es continua $(0,0)$.

   ii) Continuidad de f en $(1,1)$.

   Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left(x^2\right)=1$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}x^2-y=0$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)}\left(\frac{x}{x-y^2}\right)$ no existe.
   Luego f no es continua en $(1,1)$

2. Calcule, si existe, $\dfrac{\partial f}{\partial\hat{u}}(0,0)$ en la dirección del vector $\vec{u}=\left(\sqrt{3},1\right)$.

   Respuesta: Como $\|\vec{u}\|=2$, entonces $\hat{u}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. (02 ptos)

   Asi, si límite existe,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial\hat{u}}(0,0) &= \lim_{t\to0}\frac{f\left(t\frac{\sqrt{3}}{2},t\frac{1}{2}\right)-f(0,0)}{t}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{\dfrac{t^2\frac{3}{4}}{t^2\frac{3}{4}-t\frac{1}{2}}}{t}\\ &= \lim_{t\to0}\frac{t\frac{3}{4}}{\left(t\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)t}\\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(08 ptos)

3. Encuentre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tal que $y\neq x^2$. (05 pts c/u)

   Respuesta:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{-2xy}{\left(y-x^2\right)^2}\ ,\qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{\left(y-x^2\right)^2}$$

4. Calcule, si existen, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. (05 ptos c/u)

   Respuesta: Si límite existe,

   i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}=\infty$. Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ no existe en $\mathbb{R}$.

   ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$. Luego, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

5. Decida la diferenciabilidad de f en $(1,1)$. (05 pts)

   Respuesta: Como f no es continua en $(1,1)$, entonces f no es diferenciable en $(1,1)$

6. Pruebe que f es diferenciable en $(1,2)$ y exhiba la buena aproximación afin de f en una vecindad de $(1,2)$.

   Respuesta: Como f es racional en una vecindad de $(1,2)$, entonces es diferenciable en $(1,2)$. (05 pts)

   La buena aproximación afin de f en una vecindad V de $(1,2)$ esta dada por:

$$\begin{aligned} B(x,y) &= f(1,2)+d_{(1,2)}f(x-1,y-2) && \text{((05 pts))}\\ &= f(1,2)+f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2) \end{aligned}$$

   en donde: $f(1,2)=-1$, $f_x(1,2)=-4$ y $f_y(1,2)=1$

   Así,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= -1-4(x-1)+(y-2) && \text{((05 pts))}\\ &= -4x+y+1 \end{aligned}$$