Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Cálculo III (521227)
Test 7.

Semestre1-2017

Nombre:

Sección:

Problema. Sea $\mathcal{S}$ la parte de la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está limitada por el plano $z = 0$ y por el paraboloide $z = x^2 + (y-1)^2$.

Parte I. Determinar el área de $\mathcal{S}$.

Parte II. Determinar el valor de

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \mathrm{dS},$$

donde F es el campo vectorial

$$F(x, y, z) = (x \ , \ y + 1 \ , \ z + 2),$$

y la orientación de $\mathcal{S}$ es la que considera como vector normal al que apunta hacia el exterior de la región encerrada por el cilindro.

Cada parte vale 30 puntos.

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN REDACTARSE CONSISTENTEMENTE Y JUSTIFICARSE ADECUADA Y DETALLADAMENTE
Tiempo Máximo: 45 Minutos

Pauta

Parte I.

Una parametrización de $\mathcal{S}$ es

$$\beta(\theta, z) = (\cos\theta \ , \ \text{sen}\ \theta \ , \ z), \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 2 - 2\text{sen}\ \theta.$$

(10pt)

La medida del área de la superficie está dada por

$$A = \iint_{\mathcal{S}} \text{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\,sen\theta} ||\frac{\partial\beta}{\partial\theta} \times \frac{\partial\beta}{\partial z}||\ \text{dz d}\theta.$$

(10pt)

Calculamos

$$\frac{\partial\beta}{\partial\theta} = (-\text{sen}\ \theta \ , \ \cos\theta \ , \ 0) \quad , \quad \frac{\partial\beta}{\partial z} = (0,0,1),$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial\theta} \times \frac{\partial\beta}{\partial z} = (\cos\theta \ , \ \text{sen}\ \theta \ , \ 0).$$

Luego,

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\,sen\theta} \text{dz d}\theta = \int_0^{2\pi} (2 - 2\text{sen}\theta)\, d\theta = 4\pi.$$

(10pt)

Parte II. Se aplica la definición de integral de superficie de un campo vectorial. Una parametrización de $\mathcal{S}$ es

$$\beta(\theta, z) = (\cos\theta \ , \ \text{sen}\ \theta \ , \ z), \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le z \le 2 - 2\text{sen}\ \theta.$$

(10pt)

El vector normal asociado es

$$\frac{\partial\beta}{\partial\theta} \times \frac{\partial\beta}{\partial z} = (\cos\theta \ , \ \text{sen}\ \theta \ , \ 0).$$

el cual apunta en la dirección positiva dada.

(10pt)

Por lo tanto, tenemos que

$$\iint_{\mathcal{S}} F \cdot \text{dS} = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-2\,sen\theta} (\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta + \text{sen}\theta + 0)\ \text{dz d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (2 - 2\text{sen}^2\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\theta)\, d\theta = 2\pi.$$

(10pt)