UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra II - Capítulo 1: Espacios Vectoriales - Listado 2

Solución para los ejercicios complementarios

Problema 2. Sea $(V, +, \cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y U, un subespacio vectorial de V. Muestre que $U + V = V$.
Solución: Por doble inclusión, si $x \in U + V$, entonces $x = u + v$, con $u \in U$ y $v \in V$. Pero como V es cerrado bajo suma, se tiene que $x = u + v \in V$. Recíprocamente, si ahora $x \in V$, se puede observar que

$$x = \underbrace{(x - u)}_{\in V} + \underbrace{u}_{\in U}.$$

Esta descomposición en suma muestra que $x \in U + V$.

Problema 3. Sea $\mathcal{F}$ el espacio vectorial real de las funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es función}\},$$

y sean

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}, \qquad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F} : \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}.$$

Pruebe que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.
Solución: Se recuerda que tanto $\mathcal{P}$ y $\mathcal{I}$ son subespacios de $\mathcal{F}$. Ahora, una funcíon f que pertenece a $\mathcal{P} + \mathcal{I}$ satisface que

$$f(x) = f_p(x) + f_i(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } f_p \in \mathcal{P} \text{ y } f_i \in \mathcal{I} \tag{1}$$

Luego, evaluando en $-x$ se obtiene que

$$f(-x) = f_p(-x) + f_i(-x) = f_p(x) - f_i(x) \tag{2}$$

Así, sumando y restando (1) y (2) se obtiene que

$$f(x) + f(-x) = 2f_p(x) \quad \wedge \quad f(x) - f(-x) = 2f_i(x),$$

respectivamente. Por lo que f admite representación

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Esto prueba que f, una función arbitraria de $\mathcal{F}$, siempre se puede descomponer en suma de una función par y una impar. Por lo tanto, se concluye que $\mathcal{F} = \mathcal{P} + \mathcal{I}$. Por último, f pertenece a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$ si se verifica que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x) \ \wedge \ f(-x) = -f(x).$$

Lo cual implica que, para cada x real

$$2f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Por lo que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{\Theta\}$, y a su vez $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

Problema 5. Considere el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual a 1 con coeficientes reales y los subespacios de él

$$U = \{p \in V : p(0) + p'(1) = 0 \ \wedge \ p''(0) = 0\}, \quad W_K = \{p \in V : p(x) = a + bx + cx^2, \text{ con } a - Kb = 0\},$$

siendo K un número real.

5.1) Caracterice el conjunto $A = \{(a, b, c) : a + bx + cx^2 \in U\}$.

<u>*Solución*</u>: Las ecuaciones involucradas indican que

$$a + b + 2c = 0 \quad \wedge \quad 2c = 0,$$

o equivalentemente que

$$a = -b \quad \wedge \quad c = 0.$$

Por lo tanto, el conjunto queda caracterizado como todos los vectores $(-b, b, 0)$, con $b \in \mathbb{R}$.

5.2) Demuestre que A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

<u>*Solución*</u>: En efecto, que sea no vacío es obvio. Además, siendo λ un escalar cualquiera y $(-\beta_1, \beta_1, 0)$ con $(-\beta_2, \beta_2, 0)$ vectores arbitrarios de A, se cumple que

1) $(-\beta_1, \beta_1, 0) + (-\beta_2, \beta_2, 0) = (-(\beta_1 + \beta_2), \beta_1 + \beta_2, 0)$. Y como obviamente $b_1 + b_2$ es un número real, se concluye que la suma pertenece a A.
2) $\lambda(-\beta_1, \beta_1, 0) = (-(\lambda\beta_1), \lambda\beta_1, 0)$. Y dado que $\lambda\beta_1$ es real, también la multiplicación por escalar está en A. Por lo que A es subespacio vectorial.

5.3) Determine, si existen, valores de la contante K para que U y W_k estén en suma directa.

<u>*Solución*</u>: En otras palabras, se buscan $k \in \mathbb{R}$ tales que $U \cap W_K = \{\theta\}$. Estos vienen dados al considerarse conjuntamente las ecuaciones

$$a = -b, \quad c = 0, \quad a = Kb.$$

Así, el único valor posible es $K = 0$, pues en tal caso $a = b = c = 0$.

5.4) ¿Existen valores de la constante K de modo que $U + W_K = V$?

<u>*Solución*</u>: Como todo elemento de U es de la forma $p(x) = -\alpha + \alpha x$ y todo elemento de W_K es de la forma $q(x) = K\beta + \beta x + \gamma x^2$, con α, β, γ números reales, al imponer que

$$a + bx + \gamma x^2 = (-\alpha + \alpha x) + (K\beta + \beta x + \gamma x^2),$$

por igualdad de polinomios se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} a &= -\alpha + K\beta \\ b &= \alpha + \beta \\ c &= \gamma, \end{aligned}$$

que tiene solución para cada coeficiente $a, b, c \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, el determinante de la matriz involucrada en el sistema es no nulo. Esto es

$$\det \begin{pmatrix} -1 & K & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad K \neq -1.$$

Problema 6. Sea $k \in \mathbb{C}$. Considere los siguientes subconjuntos del espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

$$H_k = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : A \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad S_k = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) : (k \ \ 1)A = (0 \ \ 0)\}$$

6.1) Demuestre que para cualquier $k \in \mathbb{C}$ se cumple que H_k y S_k son subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Solución: : Como siempre, mostrar que son no vacíos y cerrados para la suma y el producto por escalar.

6.2) Calcule $H_k \cup S_k$, $H_k \cap S_k$ y $H_k + S_k$ ¿Es $H_k + S_k$ una suma directa?

Víctor Burgos Villanueva.
Concepción, 30 de marzo de 2017.