UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

LISTADO 1: ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

Álgebra II - 525148

Observación: Los ejercicios marcados con **(P)** son los ejercicios a resolver en las clases prácticas.

1) **(P)** Sea $\mathbb{K} = \{0,\, 1\}$. Las operaciones

$$\Delta : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad * : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

son tales que

Δ	0	1
0	0	1
1	1	

$*$	0	1
0		0
1	0	1

Estas tablas significan que Δ y $*$ son tales que

$0\Delta 0 = 0,\quad 0\Delta 1 = 1,\quad 1\Delta 0 = 1,\quad 1\Delta 1$ no se define
$0 * 0$ no se define, $\quad 0 * 1 = 0,\quad 1 * 0 = 0,\quad 1 * 1 = 1.$

1.1) ¿Son Δ y $*$ conmutativas? ¿Hay un elemento neutro para la primera operación? ¿Hay un neutro para la segunda?

1.2) Defina los valores que faltan en las tablas de modo que el conjunto $\mathbb{K}$, con las operaciones Δ y $*$, sea un cuerpo.

2) Sea X un conjunto no vacío. Determine si $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap)$ es un cuerpo. Recuerde que

$$\mathcal{P}(X) = \{A \;:\; A \subseteq X\}$$

y las operaciones $\cup$ y $\cap$ son tales que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{P}(X)$

$$A \cup B = \{x \in X \;:\; x \in A \vee x \in B\}, \qquad A \cap B = \{x \in X \;:\; x \in A \wedge x \in B\}.$$

3) Decida si los siguientes son o no espacios vectoriales.

3.1) $(\mathbb{C}, \oplus, \odot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

3.2) $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$,

3.3) **(P)** $(\mathbb{Q}, \oplus, \odot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$,

3.4) **(P)** $(\mathbb{C}^2, \oplus, \odot)$ sobre el cuerpo $(\mathbb{C}, +, \cdot)$,

donde, en cada caso, $+$ y $\cdot$ denotan la suma y producto usuales entre los elementos de los cuerpos dados, $\oplus$ es la suma usual entre los elementos de los conjuntos especificados y $\odot$ es el producto usual entre un elemento del primer conjunto y un elemento del cuerpo.

4) Justifique adecuadamente si el conjunto V con la operaciones suma $\oplus$ y multiplicación por escalar $\odot$ definidas en cada caso es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

4.1) **(P)** $V = \mathbb{R}^+$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\qquad x \oplus y = xy \qquad$ y $\qquad \alpha * x = x^\alpha$.

4.2) **(P)**

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{C},$$

con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un número complejo.

4.3)
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \right\}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{R},$$
con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de una matriz por un número real.

4.4) $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
$$(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad \text{y} \qquad \alpha \odot (x_1, y_1) := (\alpha x_1, y_1).$$

5) Determine si los subconjuntos indicados son subespacios vectoriales del espacio vectorial V con las operaciones usuales de suma y producto por escalar sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Para cada conjunto, escríbalo (si se puede) en forma paramétrica, o bien caracterícelo usando ecuaciones.

5.1) $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1) **(P)** $M = \{(x, y, z) : xyz \geq 0\}$
2) $N = \{(x, y, z) : x = y\}$
3) **(P)** $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 2x + y - z = 0\right\}$
4) $T = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x - yz = 0\right\}$

5.2) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1) $R = \{(x, y) : x + \overline{y} = 0\}$
2) **(P)** $P = \{(x, y) : \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)\}$

5.3) $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1) $R = \{(x, y) : x + \overline{y} = 0\}$
2) **(P)** $P = \{(x, y) : \mathrm{Re}(x) = \mathrm{Re}(y)\}$

5.4) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$

1) $U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \ : \ b \in \mathbb{Q} \right\}$
2) **(P)** $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \ : \ a \in \mathbb{Q} \right\}$
3) $P = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} \ : \ a + 2b - 1 = 0 \right\}$

5.5) $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

1) $U = \{A : A \text{ es invertible}\}$
2) $S = \left\{A : A^2 = \theta\right\}$
3) $W = \{A : A \text{ es antisimétrica}\}$
4) $R = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \ : \ \mathrm{rango}(A) = 0\}$

5.6) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1) **(P)** $S = \{p : p \text{ intersecta al eje } Y \text{ en } -1\}$
2) $M = \{p : p \text{ intersecta al eje } X \text{ en } -1\}$
3) $U = \{p : p'(0) + 2p(1) = 0\}$
4) $W = \{p : p' = p\}$

5.7) $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

1) **(P)** $G = \{f \in \mathcal{F} \ : \ f \text{ es cóncava}\}$
2) $W_p = \{f \in \mathcal{F} \ : \ f \text{ es } p\text{-periódica}\}$
3) **(P)** $S = \{f \in \mathcal{F} \ : \ f \text{ es sobreyectiva}\}$
4) $E = \{f \in C^2(0, 1) : \ f \text{ es par}\}$

Recordar que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es el conjunto de las funciones reales. Además $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es

- **convexa** si $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall \lambda \in [0, 1])\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$;
- **cóncava** si $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall \lambda \in [0, 1])\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$;
- **par** si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = f(x)$;
- **impar** si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(-x) = -f(x)$; y
- **p-periódica** si $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x + p) = f(x)$.

6) Sea V un espacio vectorial sobre cierto cuerpo $\mathbb{K}$. Demuestre que si U es subespacio vectorial de V y E es subespacio vectorial de U, entonces E es subespacio vectorial de V.

7) **(P)** Sea V un $\mathbb{K}$-e.v y U un s.e.v. de V. Muestre que para todo escalar $\alpha \neq 0$, el conjunto $\alpha U := \{\alpha \cdot u : u \in U\}$ es igual a U.

8) Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Considere el conjunto $S = \{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} : \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

   8.1) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   8.2) Pruebe que $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0\}$.

9) **(P)** Sean $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$ y sea el conjunto $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \quad \vec{x} \cdot \vec{a} = \vec{x} \cdot \vec{b} = 0\}$.

   9.1) Demuestre que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

   9.2) Pruebe que $S = \{\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) : \quad \alpha \in \mathbb{R}\}$.