Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática
GAJ/EBC/EGG/gaj 20-10-2016

Test n°3 Cálculo III(521227

Nombre..**Matricula**...........................

1) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)sen\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Justificando su respuesta indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) f **es diferenciable en** $(0,0)$ **.Es verdadera** porque

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, ya que para x $x\neq 0,$ e $y\neq 0$ se tiene

$f(x,0)=x^2 sen\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ y $f(x,0)=x^2 sen\left(\dfrac{1}{|x|}\right)$ **:Por lo tanto**

$$\frac{f(x,o)-f(0,0)}{x}\to 0 \text{ cuando } x\to 0 \quad \text{y} \quad \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}\to 0 \text{ cuando y}\to 0$$

Además

$\left|\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f\bullet(0,0)}{\|(x,y)\|}\right|\leq\|(x,y)\|$ **.Luego**

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\bullet(x,y)}{\|(x,y)\|}=0$$

....**12 puntos**

b) f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$. **Es falsa** basta notar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$,

Porque para $(x,y)\neq(0,0)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xsen\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ no tiende a 0

cuando $(x,y)\to(0,0)$.

....**12 puntos**

c) f es diferenciable en todo abierto no vacío A de $\mathbb{R}^2$ tal que $(0,0) \notin A$. **ES verdadera porque f es de clase C^1 en A. ....6 puntos**

d) La buena aproximación afín de f en el punto $(1,2)$, es una función polinómica del tipo $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $T(x,y) = ax + by + c$, donde a,b,c son constantes reales

Es verdadera porque las buenas aproximaciones afines en $\mathbb{R}^2$ de las funciones son siempre funciones polinómicas de grado a lo más uno.

..6 puntos

2) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $f(x,y) = \left(y + e^{xy}, x - e^{xy}\right)$.

a) Comprobar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y hallar su matriz Jacobiana.

f es diferenciable porque f es de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$

La matriz jacobiana de f en (x,y) es

$$\left[df(x,y)\right] = \begin{bmatrix} ye^{xy} & 1 + xe^{xy} \\ 1 - ye^{xy} & -xe^{xy} \end{bmatrix}$$

..6 puntos

b) Comprobar que la función compuesta $g = f \circ f$ es diferenciable y calcular su matriz jacobiana en $(0,0)$.

g es diferenciable por ser la compuesta de 2 funciones diferenciables.

Y se tiene.

La Matriz jacobiana de g en $(0,0)$ es:

$$\left[dg(0,0)\right] = \left[d(f \circ f)(0,0)\right] = \left[df(f(0,0)) \circ df(0,0)\right] = \left[df(1,-1)\right]\left[df(0,0)\right]$$

Se obtiene entonces

$$\left[dg(0,0)\right] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} & 1 + \frac{1}{e} \\ 1 + \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{|}{e} & -\frac{1}{e} \\ -\frac{1}{e} & 1 - \frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

..18 puntos