UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
FACULTAD DE CIENCIAS
FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Álgebra II - Capítulo 1: Espacios Vectoriales - Listado 3

Solución para ejercicios varios

Problema 7. (P) Suponga que $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es un conjunto l.i. de vectores en un $\mathbb{K}$ espacio vectorial V. Decida si los siguientes conjuntos son l.i. Justifique sus respuestas

7.1) $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, \ldots, v_{n-1} - v_n, v_n - v_1\}$

<u>*Solución*</u>: El conjunto no es l.i. Esto se puede deducir al escoger escalares todos iguales a 1 en la combinación lineal, obteniéndose una estructura telescópica en la suma.

$$\sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (v_i - v_{i+1}) = (v_1 - v_2) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{n-1} - v_n) + (v_n - v_1) = 0$$

7.2) $\{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$

<u>*Solución*</u>: Sí es un conjunto l.i. Siendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, se tiene

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2(v_1 + v_2) + \alpha_3(v_1 + v_2 + v_3) + \cdots + \alpha_{n-1}(v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) + \alpha_n(v_1 + v_2 + \cdots + v_n) = 0$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i v_2 + \cdots + \sum_{i=n-1}^{n} \alpha_i v_{n-1} + \alpha_n v_n = 0$$

Así, por la lineal independencia de los vectores de S, cada factor escalar en la última ecuación debe ser nulo, y por lo anterior, de manera recursiva, todos los escalares α_i son nulos.

7.3) $S - \{v_i\}$, siendo v_i un elemento cualquiera de S.

<u>*Solución*</u>: Es un conjunto l.i. En efecto, inicialmente se sabe que, si

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_i v_i + \cdots + \alpha_n v_n = 0,$$

entonces cada escalar a_i es nulo. Así, como

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + 0 \cdot v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0,$$

se debe cumplir que los restantes escalares α_i son nulos.

Problema 11. Sean $U_0, U_1, U_2, \ldots$ los siguientes subconjuntos del espacio vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$,

$$U_0 = \{1\}, \quad \forall j \in \mathbb{N},\ U_j = \{\sin(2j\pi x), \cos(2j\pi x)\}.$$

11.1) Pruebe que los conjuntos definidos son l.i.

<u>*Solución*</u>: U_0 es obviamente l.i. Para los restantes, si

$$\alpha \sin(2j\pi x) + \beta \cos(2j\pi x) = 0,$$

evaluando en $x = 0$ se obtiene $\beta = 0$, y evaluando en $x = \frac{1}{4j}$ se obtiene $\alpha = 0$.

11.2) Demostrar que, dados $h, k \in \mathbb{N}$, el conjunto $U_0 \cup U_h \cup U_k$ es también l.i.

Solución: Para mostrar esto y lo indicado en 11.3 se utilizan los siguientes resultados:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(mx)dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx = \begin{cases} \pi & \text{si } m = n \\ \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases} \tag{2}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx = 0 \tag{3}$$

Para verificar estas integrales, se pueden utilizan las igualdades trigonométricas

$$\begin{aligned} \cos(mt - nt) - \cos(mt + nt) &= 2\sin(mt)\sin(nt), \\ \cos(mt - nt) + \cos(mt + nt) &= 2\cos(mt)\cos(nt), \\ \sin(mt + nt) + \sin(mt - nt) &= 2\sin(mt)\cos(nt). \end{aligned}$$

Ahora, dados $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin(2h\pi x) + \alpha_3 \cos(2h\pi x) + \alpha_4 \sin(2k\pi x) + \alpha_5 \sin(2k\pi x) = 0, \tag{4}$$

se puede observar que, al integral la ecuación anterior entre 0 y 2π,

$$\int_0^{2\pi} \alpha_1 dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi\ \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

También, multiplicando la ecuación (4) por $\sin(2h\pi x)$ e integrando entre 0 y 2π queda

$$\int_0^{2\pi} \alpha_2 \sin^2(2h\pi x)dx = 0 \ \Leftrightarrow\ \pi\alpha_2 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha_2 = 0$$

Replicando esta idea para cada término en (4) se concluye que todos los escalares α_i son nulos.

11.3) Demuestre que para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto $W_n := \bigcup_{j=0}^{n} U_j$ es también l.i.

Solución: El mismo argumento utilizado en la parte 11.2) sirve para mostrar esto.

Víctor Burgos Villanueva.
Concepción, 8 de abril de 2017.