Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Universidad de Concepción

Cálculo III (521227)
Test 3.

`Semestre1-2017`

Nombre:

Sección:

Problema 1. Considerar la función definida por

$$f(x, y) = x^2 + \text{sen }(xy).$$

Determinar todas las direcciones en las que la derivada direccional de f en el punto $(1, 0)$ es igual a 0.

Problema 2. Sea $g = g(x, y)$ una función dada, de clase C^2 y armónica en $\mathbb{R}^2$.

Considerar la función definida por

$$h(s, t) = g\left(s\mathrm{e}^t,\, 1 + s\mathrm{e}^{-t}\right).$$

Encontrar

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t}(1, 0).$$

Recordar que el hecho que g sea armónica significa que satisface la igualdad

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

Cada problema vale 30 puntos.

TODAS LAS RESPUESTAS DEBEN REDACTARSE CONSISTENTEMENTE Y JUSTIFICARSE ADECUADA Y DETALLADAMENTE
Tiempo Máximo: 45 Minutos

Pauta

Solución 1.

Como f es de clase C^1, en cualquier dirección $v = (p, q)$,

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \nabla f(1,0) \cdot v.$$

(5 pt)

Se tiene, evaluando en cada caso en el punto (1,0), que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y\cos\,(xy) = 2,$$

(5pt)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos\,(xy) = 1.$$

(5pt)

Luego,

$$\nabla f(1,0) = (2,1).$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial v} = (2,1)\cdot(p,q) = 2p + q.$$

(5pt)

Por lo tanto, debe cumplirse

$$2p + q = 0 \implies q = -2p \implies v = p(1,-2).$$

Por lo tanto, las direcciones en que la derivada direccional es 0, son

$$v_1 = (1/\sqrt{5}\ ,\ -2/\sqrt{5}\ ) \ \text{ y } \ v_2 = (-1/\sqrt{5}\ ,\ 2/\sqrt{5}\ ).$$

(10pt)

Solución 2. Se tiene:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} s\mathrm{e}^{t} - \frac{\partial g}{\partial y} s\mathrm{e}^{-t} = s(\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{e}^{t} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{e}^{-t}).$$

(10pt)

Y, como las derivadas mixtas son iguales al ser g de clase C^2,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} &= \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{e}^{t} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{e}^{-t} + s\left((\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{e}^{t} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{t} - (\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}\mathrm{e}^{t} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t}\right)\\ &= \frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{e}^{t} - \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{e}^{-t} + s\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\mathrm{e}^{2t} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\mathrm{e}^{-2t}\right)\end{aligned}$$

(10pt)

En el punto $(s,t) = (1,0)$, aplicando que g es armónica, se tiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s \partial t} = \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x}(1,2) - \frac{\partial g}{\partial y}(1,2) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,2),$$

pues $(x, y) = (1, 2)$.

(10pt)