UNIVERSIDAD DE CONCEPCIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA

LISTADO 2: OPERACIONES ENTRE ESPACIOS VECTORIALES

Álgebra II - 525148

Observación: Los ejercicios marcados con **(P)** son los ejercicios a resolver en las clases prácticas.

1) **(P)** Sean
$$\vec{r}_1 = (-1,1,2)\,, \quad \vec{r}_2 = (1,1,0)\,, \quad \vec{r}_3 = (0,1,1)\,, \quad \vec{r}_4 = (1,0,1)$$

   1.1) Escriba la ecuación de la recta $\mathcal{L}_1$ que contiene al origen de coordenadas y tiene a $\vec{r}_1$ como vector director. Muestre que $\mathcal{L}_1$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$, como espacio vectorial real.

   1.2) Escriba la ecuación del plano Π que contiene a $\theta = (0,0,0)$ y tiene a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ como vectores directores, es decir,
$$\Pi = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ : \ (x,y,z) = \alpha\vec{r}_1 + \beta\vec{r}_2\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}^3 \ : \ \vec{\theta P} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = 0\right\}.$$

   1.3) Sea $\mathcal{L}_2$ la recta que contiene al origen de coordenadas y tiene a $\vec{r}_2$ como vector director. Determine $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ y $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. ¿Es alguno de estos conjuntos igual a Π?

   1.4) Determine $\Pi + \mathcal{L}_3$, siendo $\mathcal{L}_3$ la recta que contiene al origen de coordenadas y tiene a $\vec{r}_3$ como vector director. ¿Se cumple $\Pi \oplus \mathcal{L}_3 = \mathbb{R}^3$?

   1.5) Determine $\Pi + \mathcal{L}_4$, siendo $\mathcal{L}_4$ la recta que contiene al origen de coordenadas y tiene a $\vec{r}_4$ como vector director. ¿Se cumple $\Pi \oplus \mathcal{L}_4 = \mathbb{R}^3$?

2) Sea $(V,+,\cdot)$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y U, un subespacio vectorial de V. Muestre que $U + V = V$.

3) Sea $\mathcal{F}$ el espacio vectorial real de las funciones definidas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir,
$$\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ : \ f \text{ es función}\}$$
   y sean
$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F} \ : \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(-x) = f(x)\}\,, \qquad \mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F} \ : \ \forall\, x \in \mathbb{R} \ : \ f(-x) = -f(x)\}\,,$$
   En el listado 1 ya se demostró que $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{F}$. Pruebe que $\mathcal{F} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

4) **(P)** Sea V el espacio vectorial real $M_2(\mathbb{R})$. Considere los siguientes subespacios vectoriales de V:
$$W = \left\{A \in V \ : \ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\right\},$$
$$U_1 = \left\{A \in V \ : \ A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\right\}, \qquad U_2 = \left\{A \in V \ : \ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\right\},$$

   4.1) Describa a los conjuntos W, U_1 y U_2.

   4.2) Determine vectores $A, B, C \in V$, distintos del vector nulo en V y tales que $A \in W, B \in U_1, C \in U_2$.

   4.3) Compruebe que $W + U_1 = W + U_2$, pero $U_1 \neq U_2$. ¿Son las sumas anteriores sumas directas?

   4.4) Determine S, un subespacio vectorial de V, de modo que $W \cup S$ también sea un subespacio vectorial de V.

5) Considere el espacio vectorial V de los polinomios de grado menor o igual que 2 con coeficientes reales y los subespacios de él
$$U = \{p \in V \ : \ p(0) + p'(1) = 0 \ \wedge \ p''(0) = 0\}, \qquad W_K = \{p \in V \ : \ p(x) = a + bx + cx^2 \text{ con } a - Kb = 0\},$$
   siendo K un número real.

5.1) Caracterice el conjunto $A = \{(a,b,c) : a + bx + cx^2 \in U\}$.

5.2) Demuestre que A es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

5.3) Determine, si existen, valores de la constante K para que U y W_K estén en suma directa.

5.4) ¿Existen valores de la constante K de modo que $U + W_K = V$?.

6) **(P)** Sea $\kappa \in \mathbb{C}$. Considere los siguientes subconjuntos del espacio vectorial complejo $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

- $H_\kappa = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ A \begin{pmatrix} \kappa \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $S_\kappa = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \ : \ \begin{pmatrix} \kappa & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

6.1) Demuestre que para cualquier $\kappa \in \mathbb{C}$ se cumple que H_κ y S_κ son subespacios de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

6.2) Calcule $H_i \cup S_i$, $H_i \cap S_i$ y $H_i + S_i$ ¿Es $H_i + S_i$ una suma directa?

6.3) ¿Pertenece la matriz $C = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 2-i & 1-2i \end{pmatrix}$ a $H_i + S_i$? Justifique su respuesta. De ser afirmativa, determine, si es posible, pares de matrices $A_1, A_2 \in H_i, B_1, B_2 \in S_i$ de modo que $A_1 \neq A_2$, $B_1 \neq B_2$ y $C = A_1 + B_1 = A_2 + B_2$.

6.4) Determine para qué valores de κ los espacios H_κ y S_κ están en suma directa.

6.5) Determine para qué valores de κ se cumple $H_\kappa + S_\kappa = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.