UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Test N^o 2 -521227

Nombre : ....
Profesor: ....
Tiempo : 45 minutos
30 puntos cada problema
6/04/2017
JRC

1. Dada $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{x^6+y^8} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (a) Estudie la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

   (b) ¿f es diferenciable en el punto $(0,0)$?.

   (c) ¿f es diferenciable en el punto $(1,1)$?.

2. Diga si $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x^3}{x} + 2y & , \quad x \neq 0 \\ y^2 & , \quad x = 0 \end{cases}$ es diferenciable en $(0,0)$.

Solución.-

UNIVERSIDAD DE CONCEPCION
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

Solución Test N^o 2 -521227

1. (a) $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x^3=y^4}} f(x,y) \overset{(x,y)\neq(0,0)}{=} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x^3=y^4}} \dfrac{x^3y^4}{x^6+y^8} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$

   Esto prueba que f no es continua en el punto $(0,0)$.

   (b) f no es diferenciable en el punto $(0,0)$ ya que f no es continua en ese punto.

   (c) f es una composición de funciones diferenciables sobre el conjunto abierto $A = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$. Luego f es diferenciable sobre el conjunto A, en particular f es diferenciable en el punto $(1,1)$.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \overset{h\neq 0}{=} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{\sinh^3}{h}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\dfrac{\sinh^3}{h^3} = 0\cdot 1 = 0$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \overset{x=0}{=} \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h = 0$

   $$A(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x - \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y}{\|(x,y)\|} = \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

   $$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,x>0}} A(x,y) = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x,x>0}} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x,x)}{\sqrt{2}x} \overset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x^3}{\sqrt{2}x^2} + \sqrt{2}\frac{x}{x}\right) =$$

   $$= \lim_{x\to 0}\left(\overbrace{\frac{x}{\sqrt{2}}\frac{\sin x^3}{x^3}}^{\nearrow 0} + \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} \neq 0$$

   Esto prueba que f no es diferenciable en $(0,0)$.

.
31 de Marzo de 2017
JRC