Universidad de Concepción
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Matemática

Pauta Test N°4
Cálculo III (521227)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 20x + 20y$. Justificar por qué f posee extremos absolutos sobre el conjunto compacto

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + xy \leq 12\right\}$$

y luego hallar dichos valores.

Solución:

Dado que f es continua y D es compacto, entonces por el Teorema de los valores extremos, está asegurada la existencia del máximo y mínimo absolutos. **(10 puntos)**

En $int(D)$ no hay puntos críticos. **(10 puntos)**

En $Fr(D)$, utilizando multiplicadores de Lagrange, al considerar $g(x,y) = x^2+y^2+xy-12$, se tiene el sistema determinado por $\nabla f(x,y) = \nabla g(x,y)$ y $g(x,y) = 0$ **(10 puntos)**, esto es,

$$2x - 4y + 20 = \lambda(2x + y) \qquad (1)$$
$$2y - 4x + 20 = \lambda(x + 2y) \qquad (2)$$
$$x^2 + xy + y^2 = 12 \qquad (3)$$

De (1) y (2), restando, se tiene que $(x-y)(6-\lambda) = 0$, de donde $y = x$ o $\lambda = 6$.

Si $y = x$, de (3) se tiene que $x = \pm 2$ y se obtienen dos puntos $P_1 = (2,2) = -P_2$.

Si $\lambda = 6$, de (1) se tiene que $y = 2 - x$; luego, de (3) se tiene que $x = -2$ o $x = 4$ y se obtienen dos puntos más, $P_3 = (-2,4)$ y $P_4 = (4,-2)$. **(20 puntos)**

Como $f(P_1) = 72$, $f(P_2) = -88$, $f(P_3) = 92$ y $f(P_4) = 92$, se tiene que el mínimo absoluto es -88 y máximo absoluto es 92. **(10 puntos)**

GAJ/EBC/EGG/egg
3 de Noviembre de 2016