

Pauta Test N°7  
Cálculo III (521227)

1. Considerar  $F(x, y, z) = (3x^2y^2 + 6xz)\hat{i} + (2x^3y + 2z^2)\hat{j} + (3x^2 + 4yz)\hat{k}$ .
- a) Indicar justificadamente, si el campo vectorial  $F$  es conservativo.
- b) Sea  $C$  la curva que se encuentra en el primer octante como intersección entre los cilindros  $x^2 + z^2 = 4$  e  $y^2 + z^2 = 4$ . Indicando una orientación para  $C$ , calcular el trabajo  $W = \int_C F \cdot dr$ .

**Solución:**

- a) El campo  $F$  es conservativo pues  $\nabla \times F = 0_{\mathbb{R}^3}$ . **(10 puntos)**
- b) Al considerar  $f(x, y, z) = x^3y^2 + 3x^2z + 2yz^2$ , como  $\nabla f = F$ ; se tiene que  $f$  es un potencial para  $F$ . Considerando como punto inicial de  $C$  a  $P_i = (0, 0, 2)$  y como punto final a  $P_f = (2, 2, 0)$ , se tiene

$$W = \int_C F \cdot dr = f(P_f) - f(P_i) = 32. \text{ (25 puntos)}$$

Observación: En la parte a) también se puede exhibir un potencial para mostrar que  $F$  es conservativo.

2. Calcular la integral de línea  $\oint_{\Gamma} (e^x + 3x^2y^2) dx + (4x + 2x^3y) dy$ , donde  $\Gamma$  es la curva simple y cerrada cuya traza es el cuadrilátero de vértices  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(2, 2)$  y  $D(0, 3)$  recorrida en sentido antihorario.

**Solución:** Al considerar  $p(x, y) = e^x + 3x^2y^2$ ,  $q(x, y) = 4x + 2x^3y$  y la región encerrada por  $\Gamma$  como  $R$ , aplicando el Teorema de Green **(10 puntos)**, se tiene que

$$\oint_{\Gamma} p dx + q dy = \iint_R \left( \frac{\partial q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \right) d(x, y) = 4 \text{Área}(R) = 12. \text{ (15 puntos)}$$