

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

- a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
 b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
 c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j \right) \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k^{n-2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n-k$ du polynôme P donc appartient à \mathbb{Z} .

Finalement,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geq d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^d \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \llbracket -d, d \rrbracket$.

Comme $\llbracket -d, d \rrbracket^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $f(n+k) = f(n'+k)$.
 Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $(n' - n)$ -périodique

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r) \frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^d \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^d (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d - f(r) + \frac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x}$$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$