Exercice 235 :

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinces et tel que P'' divise P.
a) Montrer que P est à racines simples.
b) Montrer que les racines de P sont alignées.

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que $P''|P$.

a) Montrer que P est à racines simples.

Écrivons P sous la forme : $P = \lambda\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)\prod_{i=1}^{q}(X-b_i)^{m_i}$ avec $p \geq 1$ et les $m_i \geq 2$ et les a_i, b_i distincts.
L'objectif est de montrer $q = 0$.
Par hypothèse, P'' s'écrit $P'' = Q\prod_{i=1}^{q}(X-b_i)^{m_i-2}$ avec $Q|\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.
On note n le degré de P et en regardant les degrés on a : $n-2 = \deg Q + \sum_{i=1}^{q}(m_i-2) = p + \sum_{i=1}^{q}(m_i) - 2$ d'où $2 = p - \deg Q + 2q$ avec $p \geq \deg Q$. Ainsi $q = 0$ ou $q = 1$. Par l'absurde supposons $q = 1$.
On pose $T = \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.
On a $T'' = \lambda n(n-1)T(X-b_1)^{m_1-2} = \lambda(X-b_1)^{m_1-2}((X-b_1)^2T'' + 2m_1(X-b_1)T' + m_1(m_1-1)T)$
En divisant par $(X-b_1)^{m_1-2}$ et en évaluant en b_1, on a $n(n-1)T(b_1) = m_1(m_1-1)T(b_1)$. Or $T(b_1) \neq 0$ et $n > m_1$ car $p > 0$.

C'est absurde donc $q = 0$ et P est à racines simples.

b) Montrer que les racines de P sont alignées.
On rappelle le théorème de Gauss-Lucas : Si $P \in \mathrm{C}[X]$ alors les racines de P' sont des barycentres à coefficients strictement positifs de celles de P.
D'après la question précédente, P admet n racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et P'' en a $n-2$ parmi celles ci. Les racines de P forment un polygone G dont on note, quitte à renuméroter, $a_1, ..., a_s$ les sommets. Par l'absurde on suppose $s \geq 3$, c'est-à-dire que G n'est pas un segment.
Par théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'intérieur de G et celles de P'' aussi. Or au moins une des racines de P'' n'est pas dans l'intérieur de G puisque une d'entre elle est un sommet ($k \geq 3$), ce qui est absurde.

Finalement $k = 2$ (deux racines distinctes) et les racines de P sont alignées.