

Corrigés RMS 2019

Exercice 228 :

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\bar{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$ la classe de conjugaison de x . On dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \bar{x}$.

a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.

b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tel que $g^2 = x$. Montrer que $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G .

a) Soit C une classe de conjugaison et $x \in C$ ambivalent. On a $x^{-1} \in \bar{x} = C$ donc $C = \overline{x^{-1}}$. Soit $y \in \bar{x}$. Il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$. Or on a aussi $C = \bar{y}$ donc $y^{-1} \in \bar{y}$, ce qui conclut.

b) Notons Γ l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{l \in G} \delta(l^2 = x) \right)^2 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = x) \delta(h^2 = x) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = h^2) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(u,h) \in G^2} \delta(huh^{-1}u = h^2) \text{ car } u \rightarrow hu \text{ est une bijection} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) \end{aligned}$$

Or $\forall u \in \gamma$ considérons la fonction $\Phi_u : h \in G \rightarrow hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \bar{u}$. Elle est surjective.

On a alors :

$$\sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant, $\Phi_u^{-1}(\{u\})$ et $\Phi_x^{-1}(\{x\})$ sont en bijection pour tout $x \in \gamma$.

En effet, si $x \in \gamma$ alors il existe $g \in G$ tel que $x = gu^{-1}g^{-1}$ et comme u est ambivalent il existe $h \in G$ tel que $u = hu^{-1}h^{-1}$.

x est aussi ambivalent donc il existe $k \in G$ tel que $x^{-1} = kxk^{-1}$.

On a alors en regroupant $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$.

On peut donc définir $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \rightarrow hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{x\})$. C'est alors clairement une bijection.

Finalement, on a :

$$\sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |\gamma|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est G .)

$$\text{D'où } \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 \text{ est le nombre de classes de conjugaison de } G.$$

Exercice 237 :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

- a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
 b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
 c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j \right) \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k^{n-2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n - k$ du polynôme P donc appartient à \mathbb{Z} .

Finalement,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geq d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^d \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \llbracket -d, d \rrbracket$.

Comme $\llbracket -d, d \rrbracket^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $f(n+k) = f(n'+k)$.

Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $(n' - n)$ -périodique

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r) \frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^d \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^d (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d - f(r) + \frac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x}$$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$

Exercice 251 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C \mid R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\text{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\text{Re}(iC)(A) = 0$

Or C est unitaire donc $\text{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).

Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\text{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C , ce qui est absurde.

Ainsi, C est réel et $R \mid C$.

Finalement,

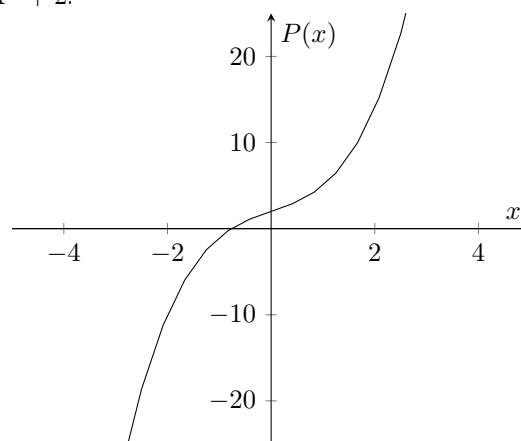
$$R = C$$

Exercice 254 :

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tel qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$.
Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: On note $P = X^3 + 2X + 2$. On obtient $P' = 3X^2 + 2$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		+	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$+\infty$



Ainsi, par théorème de la bijection, P n'admet qu'une seule racine réel α . On note β et $\bar{\beta}$ ses racines complexes conjuguées.

Pour $n \leq 3$, il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant P comme polynôme minimal (Théorème de Caley-Hamilton).

Pour $n = 3$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_A = P$.

P est un polynôme annulateur de A (théorème de Caley-Hamilton), et P est scindé à racines simples donc P est le polynôme minimal de A .

Pour $n \geq 3$, la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-3} & \\ & A \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_B = (X - \alpha)^{n-3} P$.

P est un polynôme annulateur de B et tout polynôme annulateur de B divise P donc P est le polynôme minimal de B .

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$: On suppose par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ t.q. $p \wedge q = 1$.

$P(\alpha) = 0 \implies \left(\frac{p}{q}\right)^3 + 2 \cdot \frac{p}{q} + 2 = 0 \implies p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$ donc par théorème de Gauss, $p|2$ et $q|2$ donc

$\alpha \in \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2, -\frac{1}{2}, -1, -2, \right\}$ Absurde. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et P , de degré 3, est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $n \in 3\mathbb{N}$, la matrice $C = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ admet bien comme polynôme minimal P .

Pour $n \notin 3\mathbb{N}$, par l'absurde on suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ayant P comme polynôme minimal.

χ_C et P ont même racines, donc $\chi_C = (X - \alpha)^p ((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^q$ avec $p + 2q = n$ donc $p \neq q$ car $n \notin 3\mathbb{N}$.

- Si $p > q$, $\chi_C = (X - \alpha)^{p-q} P^q$ donc $(X - \alpha)^{p-q} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $p - q - 1$ de $(X - \alpha)^{p-q}$ est $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Absurde.
- Si $q > p$, $\chi_C = ((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p} P^p$ donc $((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $q - p - 1$ de $((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p}$ est $2\text{Re}(\beta)$. Par relation coefficient racines sur P , $\alpha + 2\text{Re}(\beta) = 0$ donc $2\text{Re}(\beta) \notin \mathbb{Q}$. Absurde.

Exercice 260 :

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

a) Montrer que pour tout $u \in \text{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.

b) Étudier la continuité de $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

a) Soient $u \in \text{GL}(E)$ et $\mu = \sum_{i=0}^r \mu_i X^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $r = \deg \mu \leq n$ son polynôme minimal.

On a alors $0 = \mu(u) = \sum_{i=0}^r \mu_i u^i$ où $\mu_0 \neq 0$ (sinon μ n'est pas minimal).

Ainsi, $\text{Id} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^r \mu_i u^i = u \left(\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i \right)$ où $\lambda_i = -\frac{\mu_{i+1}}{\mu_0}$

Ainsi, en posant $I_u = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i X^i$, comme u et $I_u(u)$ commutent, on a $u^{-1} = I_u(u)$

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre polynôme $P = \sum_{i=0}^{r-1} \nu_i X^i$ de degré inférieur ou égal à celui de I_u tel que $u^{-1} = P(u)$.

Alors $\text{Id} - \sum_{i=1}^r \nu_{i-1} u^i = 0$ donc un polynôme non nul de degré inférieur à celui du polynôme minimal de u annule

ce dernier. Donc $X - \sum_{i=1}^r \nu_{i-1} u^i = N\lambda$ où $N \in \mathbb{C}$.

Donc I_u et P sont associés. Comme $I_u(u) = u^{-1} = P(u)$, $P = I_u$.

Ainsi, il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$.

De plus, $\deg I_u = r - 1 < n$.

b) On pose la suite $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(E)^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{A_n} = 2 - X$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = I_n$ et $I_{I_n} = 1$

L'application $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ n'est pas continue.