

Exercice 255 :

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition M admet-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

- Si $\chi_M = (X - a)(X - b)$ et M diagonalisable, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

Si $a = b$ alors $N^2 - aI_2 = 0$ et sinon $(N^2 - aI_2)(N^2 - bI_2) = 0$.

Donc N est annulée par un polynôme scindé à racines simples dans \mathbb{C} donc N est diagonalisable dans \mathbb{C} de valeurs propres α et β .

Tout vecteur propre de N est vecteur propre de M donc en notant E_M, F_M, E_N et F_N les sous-espaces propres respectifs de M et N ,

on a $E_N \subset E_M$ et $F_N \subset F_M$. Comme tous ces sous-espaces sont de dimension 1, ces inclusions sont des égalités.

Or M est diagonalisable dans \mathbb{R} donc admet au moins un vecteur propre réel pour chaque valeur propre. Donc il en est de même de N .

En prenant ces vecteurs propres, on diagonalise simultanément M et N dans \mathbb{R} .

On note P la matrice de passage qui est réelle.

On a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ donc α et β sont réels.

De plus, $\alpha^2 = a$ et $\beta^2 = b$.

Donc $a, b \geq 0$.

Synthèse : On suppose que $a, b \geq 0$.

On diagonalise M dans \mathbb{R} et on note P la matrice de passage.

Alors en posant $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.

- Si $\chi_M = (X - a)^2$, avec $a \in \mathbb{R}$ et M non diagonalisable.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

Comme précédemment, il existe un vecteur propre de N qui soit réel (on prend le sous-espace propre de A associé à a qui est de dimension 1).

En prenant un deuxième vecteur réel libre avec le premier, et en notant P la matrice de passage associée

(qui est réelle), on a $\begin{pmatrix} a & y \\ 0 & a \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ où $y \in \mathbb{R}$ et $x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Donc $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ car N est réelle.

De plus, $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = a$ et $2\alpha x = y$.

Donc $a \geq 0$.

Synthèse : On suppose que $a \geq 0$.

On trigonalise M dans \mathbb{R} et on note P la matrice de passage.

Alors en posant $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{y}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.

On remarquera que de cette manière, on peut traiter aussi le cas M diagonalisable. Ce cas a été traité à part pour plus de clarté.

- Enfin, si $\chi_M = (X - z)(X - \bar{z})$, avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on note $z = re^{i\theta}$.

On pose $\alpha = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Si $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, alors $\alpha \in i\mathbb{R}$ donc $z = \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Absurde. Donc $\alpha + \bar{\alpha} \neq 0$.

On pose $N = \frac{1}{\alpha + \bar{\alpha}}(M + \alpha\bar{\alpha}I_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a $N^2 - M = \frac{1}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 + (2r - 4r \cos^2(\frac{\theta}{2}))M)$.

Donc $N^2 - M = \frac{1}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 - 2r \cos(\theta)M) = \frac{\chi_M(M)}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}$.

Donc $N^2 - M = 0$ par théorème de Cayley-Hamilton et $N^2 = M$.

M admet une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.