Exercice 272 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M s'écrit de façon unique OS où $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

a) Analyse : On suppose qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
${}^tMM = {}^t(OS)OS = {}^tS\,{}^tOOS = S^2$.
${}^tMM \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ${}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)MX > 0$ donc ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
${}^tMM$ et S sont symétriques réeles et commutent donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \dots \lambda_n, \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu_1, \dots \mu_n, \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $P\,{}^tMMP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$.
Or $S^2 = {}^tMM$ donc $PS^2P^{-1} = P\,{}^tMMP^{-1}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]\ \sqrt{\lambda_i} = \mu_i$.
On note L l'unique polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]\ L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Donc $L({}^tMM) = S$ ainsi S est unique.

On obtient ainsi $O = MS^{-1}$.

Synthèse : On pose $S = L({}^tMM)$ par théorème spéctral il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$ {}^tP\,{}^tMMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} $$

Donc ${}^tPSP = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ donc $S^2 = {}^tMM$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
On note $O = MS^{-1}$, $O\,{}^tO = MS^{-1}\,{}^t(MS^{-1}) = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM = I_n$. Donc $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.
Par pivot de Gauss, il existe $T_1, \dots, T_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices de transpositions tel que

$$ A = \prod_{i=1}^{k} T_i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A \end{pmatrix} $$

On pose $\gamma : [0, 1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto \prod_{i=1}^{k} (T_i + t(I_n - T_i)) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A + t(1 - \det A) \end{pmatrix}$. $\forall t \in [0, 1], \forall i \in [\![1, k]\!], T_i + t(I_n - T_i)$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux à 1.
Donc $T_i + t(I_n - T_i) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus

$$ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A + t(1 - \det A) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) $$

.
Donc $\forall t \in [0, 1], \gamma(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = I_n$.
De plus, γ est continue, donc il existe un chemin reliant chaque matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\mathrm{GL}_n(R)$ est connexe par arcs.