

Soit  $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$ . Comparer ses polynômes minimaux dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Soient  $R \in \mathbb{R}[X]$  et  $C \in \mathbb{C}[X]$  les polynômes minimaux de  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  respectivement.

On a bien sur  $C|R$ .

$C(A) = 0$  donc  $iC(A) = 0$  donc  $\operatorname{Re}(iC(A)) = 0$  donc  $\operatorname{Re}(iC)(A) = 0$

Or  $C$  est unitaire donc  $\operatorname{Re}(iC)$  est de degré strictement inférieur à  $C$  (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).

Ainsi, si  $C$  n'est pas à coefficients réels,  $\operatorname{Re}(iC)$  est un polynôme non-nul, annulant  $A$  et de degré strictement inférieur à celui de  $C$ , ce qui est absurde.

Ainsi,  $C$  est réel et  $R|C$ .

Finalement,

$$R = C$$