Corrigés RMS 2019

Exercice 228 :

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\overline{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$ la classe de conjugaison de x. On dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \overline{x}$.
a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.
b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tel que $g^2 = x$. Montrer que $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{x\in G}\rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G.

a) Soit C une classe de conjugaison et $x \in C$ ambivalent. On a $x^{-1} \in \overline{x} = C$ donc $C = \overline{x^{-1}}$. Soit $y \in \overline{x}$. Il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$. Or on a aussi $C = \overline{y}$ donc $y^{-1} \in \overline{y}$, ce qui conclut.

b) Notons Γ l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_{l\in G}\delta(l^2=x)\right)^2\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_{(l,h)\in G^2}\delta(l^2=x)\delta(h^2=x)\right)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{(l,h)\in G^2}\delta(l^2=h^2)\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{(u,h)\in G^2}\delta(huhu=h^2) \text{ car } u\to hu \text{ est une bijection}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{u\in\gamma}\sum_{h\in G}\delta(u=hu^{-1}h^{-1})
\end{aligned}$$

Or $\forall u \in \gamma$ considérons la fonction $\Phi_u : h \in G \to hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \overline{u}$. Elle est surjective.
On a alors:

$$\sum_{u\in\gamma}\sum_{h\in G}\delta(u=hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u\in\gamma}|\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant, $\Phi_u^{-1}(\{u\})$ et $\Phi_x^{-1}(\{u\})$ sont en bijection pour tout $x \in \gamma$.
En effet, si $x \in \gamma$ alors il existe $g \in G$ tel que $x = gu^{-1}g^{-1}$ et comme u est ambivalent il existe $h \in G$ tel que $u = hu^{-1}h^{-1}$.
x est aussi ambivalent donc il existe $k \in G$ tel que $x^{-1} = kxk^{-1}$.
On a alors en regroupant $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$.
On peut donc définir $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \to hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{u\})$. C'est alors clairement une bijection.
Finalement, on a :

$$\sum_{u\in\gamma}|\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r\in\gamma}|\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |G|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est G.)

D'où $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{x\in G}\rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison de G.

Exercice 235 :

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinces et tel que P'' divise P.
a) Montrer que P est à racines simples.
b) Montrer que les racines de P sont alignées.

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que $P''|P$.

a) Montrer que P est à racines simples.
Écrivons P sous la forme : $P = \lambda\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)\prod_{i=1}^{q}(X - b_i)^{m_i}$ avec $p \geq 1$ et les $m_i \geq 2$ et les a_i, b_i distincts.
L'objectif est de montrer $q = 0$.
Par hypothèse, P'' s'écrit $P'' = Q\prod_{i=1}^{q}(X - b_i)^{m_i-2}$ avec $Q|\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$.
On note n le degré de P et en regardant les degrés on a : $n - 2 = \deg Q + \sum_{i=1}^{q}(m_i - 2) = p + \sum_{i=1}^{q}(m_i) - 2$ d'où $2 = p - \deg Q + 2q$ avec $p \geq \deg Q$. Ainsi $q = 0$ ou $q = 1$. Par l'absurde supposons $q = 1$.
On pose $T = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i)$.
On a $T'' = \lambda n(n - 1)T(X - b_1)^{m_1-2} = \lambda(X - b_1)^{m_1-2}((X - b_1)^2T'' + 2m_1(X - b_1)T' + m_1(m_1 - 1)T)$
En divisant par $(X - b_1)^{m_1-2}$ et en évaluant en b_1, on a $n(n - 1)T(b_1) = m_1(m_1 - 1)T(b_1)$. Or $T(b_1) \neq 0$ et $n > m_1$ car $p > 0$.

C'est absurde donc $q = 0$ et P est à racines simples.

b) Montrer que les racines de P sont alignées.
On rappelle le théorème de Gauss-Lucas : Si $P \in \mathrm{C}[X]$ alors les racines de P' sont des barycentres à coefficients strictement positifs de celles de P.
D'après la question précédente, P admet n racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et P'' en a $n-2$ parmi celles ci. Les racines de P forment un polygone G dont on note, quitte à renuméroter, $a_1, ..., a_s$ les sommets. Par l'absurde on suppose $s \geq 3$, c'est-à-dire que G n'est pas un segment.
Par théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'intérieur de G et celles de P'' aussi. Or au moins une des racines de P'' n'est pas dans l'intérieur de G puisque une d'entre elle est un sommet ($k \geq 3$), ce qui est absurde.

Finalement $k = 2$ (deux racines distinctes) et les racines de P sont alignées.

Exercice 237 :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^{d}\lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$
$$\sum_{i=1}^{d}\lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j\right)\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^{n-2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k}\right) \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \right)\right)
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(-1)^k \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n-k$ du polynôme P donc appartient à $\mathbb{Z}$.
Finalement,

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geqslant d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{d} \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \right)\right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in [\![-d, d]\!]$.
Comme $[\![-d, d]\!]^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in [\![0, d-1]\!], f(n+k) = f(n'+k)$.
Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

$$\text{la suite } (f(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } (n'-n)\text{-périodique}$$

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned}
S(x) &= d + f(r)\frac{x}{1-x} \\
&= d + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{rn}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i^{r}x)^n \\
&= \sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^{r}x)^n \\
&= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x}
\end{aligned}$$

Donc $d - f(r) + \dfrac{f(r)}{1-x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x}$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$

Exercice 249 :

a) Calculer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1+\omega)$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, calculer $\det(I_n + P_\sigma)$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$.

d) Donner une formule simple pour T_n.

a) On note $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}} (-X+\omega) = (-1)^n(X^n - 1)$. Ainsi, $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1+\omega) = P(-1) = 1 + (-1)^{n+1}$.

b) σ se décopose en produit de cycles à support disjoint. $\sigma = c_1 \dots c_p$ où $c_i = (a_1^i \dots a_{n_i}^i)$.

Si on permute les éléments de la base canonique, alors P_σ devient semblable à $P_\sigma = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{pmatrix}$

Il y a p blocs C_i où chaque C_i est de taille n_i on a alors $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{C_i} = \det(XI_n - C_i) = X^{n_i} - 1$ donc $\chi_{P_\sigma} = \prod_{i=1}^{p} (X^{n_i} - 1)$ et $\det(I_n + P_\sigma) = (-1)^n \cdot \chi_{P_\sigma}(-1) = \prod_{i=1}^{p} (1 - (-1)^{n_i})$

c) On pose E_k l'ensemble des σ tel que l'orbite de $n+1$ soit de longueur k.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{n+1}} \det(I_{n+1}+P_\sigma)\\
&= \sum_{k}\sum_{\sigma\in E_k} \det(I_{n+1}+P_\sigma)\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{\sigma\in S_{n+1-k}} (1-(-1)^k)\frac{n!}{(n+1-k)!}\det(I_{n+1-k}+P_\sigma)
\end{aligned}$$

Donc $|E_k| = \dfrac{n!}{(n+1-k)!}|S_{n+1-k}|$ donc $\binom{n}{k-1}(k-1)!(n+1-k)! = \dfrac{n!}{(n+1-k)!}(n+1-k)!$
Donc $n! = \dfrac{n!}{(n+1-k)!}(n+1-k)!$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k+1}^{n+1}(1-(-1^k))\frac{n!}{(n+1-k)!}T_{n+1-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(1+(-1)^{n-k})\frac{n!}{k!}T_k\\
&= 2T_n + n(n-1)\sum_{k=0}^{n-1}(1+(-1)^{n-2-k})\frac{(n-2)!}{k!}T_k\\
&= 2T_n + n(n-1)T_{n-1}
\end{aligned}$$

d) Déjà, on a $T_0 = 0$ et $T_1 = 2$.
On pose $f : x\in\mathbb{R}\mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{T_n}{n!}x^n$.
Alors,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{T_n}{(n-1)!}x^{n-1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{T_{n+1}}{n!}x^n\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2T_n+n(n-1)T_{n-1}}{n!}x^n + 2\\
&= 2 + 2f(x) + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{T_{n-1}}{(n-2)!}x^n\\
&= \frac{2}{1-x^2}f(x) + \frac{2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Donc f vérifie l'équation différentielle

$$y' = \left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)y + \frac{2}{1-x^2}$$

Solution générale : $y_0(x) = \lambda\exp\left(\ln\dfrac{1+x}{1-x}\right) = \lambda\dfrac{1+x}{1-x}$.
Méthode de variation de la constante : $\lambda'(x) = \dfrac{1-x}{1+x}\dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ donc on prend $\lambda(x) = -\dfrac{2}{1+x}$
et $y_1(x) = -\dfrac{2}{1+x}\dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{2}{1-x}$

Ainsi, $f(x) = \lambda \dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{2}{1-x}$

Comme de plus $f(0) = 0 = \lambda - 2$, on a $f(x) = \dfrac{2+2x-2}{1-x} = \dfrac{2x}{1-x} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2n!}{n!} x^n$

$$\text{Finalement, } T_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2n!$$

Exercice 251 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C|R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\mathrm{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\mathrm{Re}(iC)(A) = 0$
Or C est unitaire donc $\mathrm{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).
Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\mathrm{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C, ce qui est absurde.
Ainsi, C est réel et $R|C$.

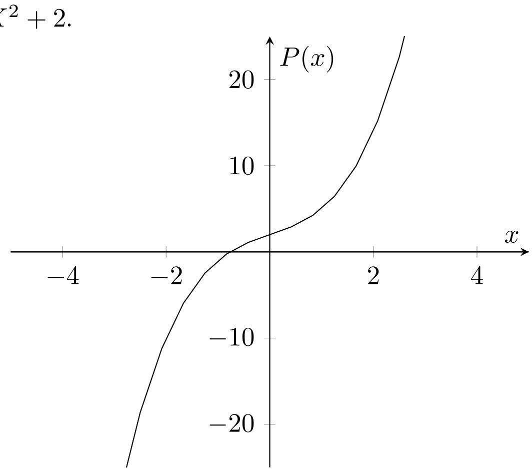
Finalement,
$$R = C$$

Exercice 254 :

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tel qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$.
Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: On note $P = X^3 + 2X + 2$. On obtient $P' = 3X^2 + 2$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	
$P(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$



Ainsi, par théorème de la bijection, P n'admet qu'une seule racine réel α. On note β et $\overline{\beta}$ ses racines complexes conjuguées.
Pour $n < 3$, il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant P comme polynôme minimal (Théorème de Caley-Hamilton).
Pour $n = 3$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_A = P$.
P est un polynôme annulateur de A (théorème de Caley-Hamilton), et P est scindé à racines simples donc P est le polynôme minimal de A.

Pour $n>3$, la matrice $B=\begin{pmatrix}\alpha I_{n-3} & \\ & A\end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_B=(X-\alpha)^{n-3}P$.
P est un polynôme annulateur de B et tout polynôme annulateur de B divise P donc P est le polynôme minimal de B.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$: On suppose par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ t.q. $p\wedge q=1$.
$P(\alpha)=0 \implies \left(\dfrac{p}{q}\right)^3+2\cdot\dfrac{p}{q}+2=0 \implies p^3+2pq^2+2q^3=0$ donc par théorème de Gauss, $p|2$ et $q|2$ donc $\alpha\in\left\{\dfrac{1}{2},1,2,-\dfrac{1}{2},-1,-2,\right\}$ Absurde. Donc $\alpha\notin\mathbb{Q}$ et P, de degré 3 , est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $n\in 3\mathbb{N}$, la matrice $C=\begin{pmatrix}A & & \\ & \ddots & \\ & & A\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ admet bien comme polynôme minimal P.

Pour $n\notin 3\mathbb{N}$, par l'absurde on suppose qu'il existe $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ayant P comme polynôme minimal.
χ_C et P ont même racines, donc $\chi_C=(X-\alpha)^p\left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^q$ avec $p+2q=n$ donc $p\neq q$ car $n\notin 3\mathbb{N}$.

- Si $p>q$, $\chi_C=(X-\alpha)^{p-q}P^q$ donc $(X-\alpha)^{p-q}\in\mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $p-q-1$ de $(X-\alpha)^{p-q}$ est $\alpha\notin\mathbb{Q}$. Absurde.
- Si $q>p$, $\chi_C=\left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^{q-p}P^p$ donc $\left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^{q-p}\in\mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $q-p-1$ de $\left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^{q-p}$ est $2\mathrm{Re}(\beta)$. Par relation coefficient racines sur P, $\alpha+2\mathrm{Re}(\beta)=0$ donc $2\mathrm{Re}(\beta)\notin\mathbb{Q}$. Absurde.

Exercice 255 :

Soit $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition M admet-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

- Si $\chi_M=(X-a)(X-b)$ et M diagonalisable, avec $a,b\in\mathbb{R}$.
  Analyse : On suppose qu'il existe $N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2=M$.
  Si $a=b$ alors $N^2-aI_2=0$ et sinon $(N^2-aI_2)(N^2-bI_2)=0$.
  Donc N est annulée par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc N est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ de valeurs propres α et β.
  Tout vecteur propre de N est vecteur propre de M donc en notant E_M, F_M, E_N et F_N les sous-espaces propres respectifs de M et N,
  on a $E_N\subset E_M$ et $F_N\subset F_M$. Comme tous ces sous-espaces sont de dimension 1, ces inclusions sont des égalités.
  Or M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ donc admet au moins un vecteur propre réel pour chaque valeur propre.
  Donc il en est de même de N.
  En prenant ces vecteurs propres, on diagonalise simultanément M et N dans $\mathbb{R}$.
  On note P la matrice de passage qui est réelle.
  On a $\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}=PNP^{-1}$ donc α et β sont réels.
  De plus, $\alpha^2=a$ et $\beta^2=b$.
  Donc $a,b\geqslant 0$.
  Synthèse : On suppose que $a,b\geqslant 0$.
  On diagonalise M dans $\mathbb{R}$ et on note P la matrice de passage.
  Alors en posant $N=P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{a} & 0\\ 0 & \sqrt{b}\end{pmatrix}P$, on a $N^2=M$.
- Si $\chi_M=(X-a)^2$, avec $a\in\mathbb{R}$ et M non diagonalisable.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.
Comme précédemment, il existe un vecteur propre de N qui soit réel (on prend le sous-espace propre de A associé à a qui est de dimension 1).
En prenant un deuxième vecteur réel libre avec le premier, et en notant P la matrice de passage associée (qui est réelle), on a $\begin{pmatrix} a & y \\ 0 & a \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ où $y \in \mathbb{R}$ et $x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
Donc $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ car N est réelle.
De plus, $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = a$ et $2\alpha x = y$.
Donc $a \geqslant 0$.

Synthèse : On suppose que $a \geqslant 0$.
On trigonalise M dans $\mathbb{R}$ et on note P la matrice de passage.
Alors en posant $N = P^{-1}\begin{pmatrix} \sqrt{a} & \dfrac{y}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.
On remarquera que de cette manière, on peut traiter aussi le cas M diagonalisable. Ce cas a été traité à part pour plus de clarté.

- Enfin, si $\chi_M = (X - z)(X - \overline{z})$, avec $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, on note $z = re^{i\theta}$.
  On pose $\alpha = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
  Si $\alpha + \overline{\alpha} = 0$, alors $\alpha \in i\mathbb{R}$ donc $z = \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Absurde. Donc $\alpha + \overline{\alpha} \neq 0$.
  On pose $N = \dfrac{1}{\alpha + \overline{\alpha}}(M + \alpha\overline{\alpha}I_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
  On a $N^2 - M = \dfrac{1}{4r\cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 + (2r - 4r\cos^2(\frac{\theta}{2}))M)$.
  Donc $N^2 - M = \dfrac{1}{4r\cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 - 2r\cos(\theta)M) = \dfrac{\chi_M(M)}{4r\cos^2(\frac{\theta}{2})}$.
  Donc $N^2 - M = 0$ par théorème de Cayley-Hamilton et $N^2 = A$.

$$M \text{ admet une racine carrée dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } Sp(A) \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*.$$

Exercice 256 :

Quelles sont les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que M soit semblable à $2M$?

Analyse : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M \sim 2M$.

1ère méthode : En trigonalisant M, on remarque que les valeurs propres de $2M$ sont le double de celles de M. Or M et $2M$ sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres. Ces dernières sont donc toutes nulles.

Donc M est nilpotente.

2ème méthode : Il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $PM = 2MP$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, PM^n = 2^nM^nP$.
La famille (I_n, M) est libre tandis que $I_n, M, \ldots, M^{n^2}$ est liée.
Il existe donc $p \in [\![1, n^2]\!]$ tel que $(I, \ldots, M^p)$ est libre et $(I, \ldots, M^{p+1})$ est liée.
On peut donc trouver $a_0, \ldots, a_{p+1}$ non tous nuls tels que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} a_iM^i = 0$.
Donc $P\displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} a_iM^i = 0$ donc $\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} a_i2^iM^i\right)P = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} a_i2^iM^i = 0$.
Donc $2^{p+1}\displaystyle\sum_{i=0}^{p+1} a_iM^i - \sum_{i=0}^{p+1} a_i2^iM^i = 0$ donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{p}(2^{p+1} - 2^i)a_iM^i = 0$.
Par liberté de $(I_n, \ldots, M^p)$, les $(2^{p+1} - 2^i)a_i$ sont nuls donc les a_i sont nuls pour $i \in [\![0, p]\!]$.
Donc $a_{p+1} \neq 0$ et $a_{p+1}M^{p+1} = 0$ donc $M^{p+1} = 0$

$$\text{Donc } M \text{ est nilpotente.}$$

Synthèse : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

Lemme : Montrons que M étant nilpotente, elle est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_p & \\ & & & (0) \end{pmatrix} \text{ où les } J_i \text{ sont des blocs de Jordan : } J_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit p l'ordre de nilpotence de M. Alors $M^{p-1} \neq 0$ donc il existe $x \in \mathbb{C}^n$ tel que $M^{n-1}x \neq 0$.
Alors la famille $(x, Mx, \ldots, M^{p-1}x)$ est libre, on en note E_1 l'espace engendré et J_1 la matrice de l'induit de M sur cet espace. C'est un bloc de Jordan de coefficient 0.
Le supplémentaire de E_1 dans E, qu'on note $\tilde{E_1}$, est stable par M. On note M_1 l'induit, qui est toujours nilpotent.
Soit M_1 est nulle, auquel cas on a fini, soit son ordre de nilpotence p_1 est non nul. On recommence alors le procédé précédent.
On itère cela jusqu'à tomber sur un induit nul ou un supplémentaire égal à $\{0\}$. □

On prend

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors, pour N de la forme donnée par le lemme, $PN = 2NP$ donc N $2N$.
Comme M et N sont semblables,

$$M \text{ est semblable à } 2M.$$

Exercice 260 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.
a) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.
b) Étudier la continuité de $u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

a) Soient $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $\mu = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \mu_i X^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $r = \deg \lambda \leqslant n$ son polynôme minimal.

On a alors $0 = \mu(u) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \mu_i u^i$ où $\mu_0 \neq 0$ (sinon μ n'est pas minimal).

Ainsi, $\mathrm{Id} = -\dfrac{1}{\mu_0} \displaystyle\sum_{i=1} \mu_i u^i = u\left(\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i\right)$ où $\lambda_i = -\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu_0}$

Ainsi, en posant $I_u = \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i X^i$, comme u et $I_u(u)$ commutent, on a $u^{-1} = I_u(u)$

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \nu_i X^i$ de degré inférieur ou égal à celui de I_u tel que $u^{-1} = P(u)$.

Alors $\mathrm{Id} - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \nu_{i-1} u^i = 0$ donc un polynome non nul de degré inférieur à celui du polynôme minimal de u annule ce dernier. Donc $X - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \nu_{i-1} u^i = N\lambda$ où $N \in \mathbb{C}$.
Donc I_u et P sont associés. Comme $I_u(u) = u^{-1} = P(u)$, $P = I_u$.

$$\text{Ainsi, il existe un unique polynôme } I_u \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré minimal tel que } u^{-1} = I_u(u).$$
$$\text{De plus, } \deg I_u = r - 1 < n.$$

b) On pose la suite $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(E)^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{A_n} = 2 - X$. Or, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A_n = I_n$ et $I_{I_n} = 1$

$$\text{L'application } u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ n'est pas continue.}$$

Exercice 272 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M s'écrit de façon unique OS où $O \in {}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \S_n^{++}(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

---

a) Analyse : On suppose qu'il existe $O \in {}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \S_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.
${}^tMM = {}^t(OS)OS = {}^tS\,{}^tOOS = S^2$.
${}^tMM \in \S_n(\mathbb{R})$ et $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, donc $\forall X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, ${}^tX\,{}^tMMX = {}^t(MX)MX > 0$ donc ${}^tMM \in \S_n^{++}(\mathbb{R})$.
${}^tMM$ et S sont symétriques réeles et commutent donc il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \in \mathbb{R}_+^*$ et $\mu_1, \ldots \mu_n, \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $P\,{}^tMMP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $PSP^{-1} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$.
Or $S^2 = {}^tMM$ donc $PS^2P^{-1} = P\,{}^tMMP^{-1}$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]\ \sqrt{\lambda_i} = \mu_i$.
On note L l'unique polynôme interpolateur de Lagrange tel que $\forall i \in [\![1, n]\!]\ L(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$. Donc $L({}^tMM) = S$ ainsi S est unique.

$$\text{On obtient ainsi } O = MS^{-1}.$$

Synthèse : On pose $S = L({}^tMM)$ par théorème spéctral il existe $P \in {}_n(\mathbb{R})$ tel que

$${}^tP\,{}^tMMP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc ${}^tPSP = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$ donc $S^2 = {}^tMM$ et $S \in \S_n^{++}(\mathbb{R})$.
On note $O = MS^{-1}$, $O\,{}^tO = MS^{-1}\,{}^t(MS^{-1}) = M({}^tMM)^{-1}\,{}^tM = I_n$. Donc $O \in {}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $A, B \in \mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.
Par pivot de Gauss, il existe $T_1, \ldots, T_k \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ des matrices de transpositions tel que

$$A = \prod_{i=1}^{k} T_i \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A \end{pmatrix}$$

On pose $\gamma : [0,1] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), t \mapsto \prod_{i=1}^{k} (T_i + t(I_n - T_i)) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A + t(1-\det A) \end{pmatrix}$. $\forall t \in [0,1], \forall i \in [\![1,k]\!], T_i + t(I_n - T_i)$ est triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux à 1.
Donc $T_i + t(I_n - T_i) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. De plus

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \det A + t(1-\det A) \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$$

.
Donc $\forall t \in [0,1], \gamma(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = I_n$.
De plus, γ est continue, donc il existe un chemin reliant chaque matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Donc $\mathrm{GL}_n(R)$ est connexe par arcs.

Exercice 273 :

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que M est diagonalisable.
Il existe donc $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale tels que $M = Q^{-1}DQ$.
Soit $A = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(M)$.

Dans un premier temps, on suppose que $\det PQ$ et $\det Q$ sont de même signe, tous deux positifs par symétrie.
Par pivot de Gauss, il existe $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{GL}(\mathbb{R})$ telles que

$$P = T_1 \times \cdots \times T_n \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & 0 & & \det Q \end{pmatrix} = T_1 \times \cdots \times T_n \times B$$

On pose alors $\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto \prod_{i=1}^{n} (I_2 + t(T_i - I_2))B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est continue, $\gamma_1(0) = I_2$ et $\gamma_1(1) = P$
$\forall t \in [0,1], \forall i \in [\![1,n]\!], \det(I_2 + t(T_i - I_2)) = 1$ et $\det \gamma_1(t) > 0$ donc $\gamma_1(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\gamma_1([0,1]) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
De même, on trouve $\gamma_2 : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $\gamma_2(0) = PQ$ et $\gamma_2(1) = I_2$.
Ainsi, $\gamma = \gamma_1\gamma_2 : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est continue et $\gamma(0) = PQ$ et $\gamma(1) = Q$.
Finalement, $\mu : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathcal{C}(M)$ est continue car $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On a $\mu(0) = PQD(PQ)^{-1} = A$ et $\mu(1) = QPQ^{-1} = M$

Si $\det PQ$ et $\det Q$ sont de signes opposés, $A = (PQ)D(PQ)^{-1} = (PQC)D(PQC)^{-1}$ où $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut -1.
Comme $\det PQC$ et $\det QC$ sont de même signe, on revient au premier cas.

Ainsi, la classe de similitude de M est connexe par arcs.

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la classe de similitude de M est connexe par arcs.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.
La fonction $f : (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto a_{12} - a_{21} \in \mathbb{R}$ est continue et $f(M) = -f(M')$.
Comme $\mathcal{C}(M)$ est connexe par arcs, on peut y trouver N telle que $f(N) = 0$, c'est-à-dire que N est symétrique.
Elle est donc diagonalisable.
Comme N et M sont semblables,

$$M \text{ est diagonalisable}$$

Exercice 275 :

Soient $C = [-1, 1]^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Étudier la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous les hypothèses suivantes :
i) $f(C) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$
ii) $f(C) \subset]-1, 1[^2$
iii) $f(C) \subsetneq C$

i) On travaille avec la norme infinie : $\|\cdot\| : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(x, y)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
On a $\|f(x, y)\| \leqslant \dfrac{\|(x, y)\|}{2}$ car $\dfrac{1}{\|(x, y)\|}(x, y) \in [-1, 1]^2$.
Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\|f^n(x, y)\| \leqslant \dfrac{\|(x, y)\|}{2^n}$.
Alors $\dfrac{2^n}{\|(x, y)\|} f(x, y) \in [-1, 1]^2$ donc $f(\frac{2^n}{\|(x,y)\|} f^n(x, y)) \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\|f^n(x, y)\| \leqslant \dfrac{\|(x, y)\|}{2^{n+1}}$.
Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x, y)\| \leqslant \dfrac{\|(x, y)\|}{2^n}$.

$$\text{Par encadrement, pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \|f^n(x, y)\| = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f^n(x, y) = 0.$$

ii) La boule unité $C = [-1, 1]^2$ est compacte et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est continue donc elle atteint un maximum en norme sur C, atteint en (x_0, y_0).
Comme $f(C) \subset]-1, 1[^2$, $M = \|(x_0, y_0)\| < 1$.
Ainsi, $f(C) \subset [-M, M]^2$ et on se retrouve dans un cas similaire à la question précédente :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x, y)\| \leqslant \dfrac{\|(x, y)\|}{M^n}$.

$$\text{Par encadrement, pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \|f^n(x, y)\| = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f^n(x, y) = 0.$$

iii) On cherche à montrer que la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de f.
On note A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Montrons d'abord que les valeurs propres de f dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur à 1.
Soit donc λ une valeur propre de f. Alors $\exists X \in \mathbb{C}^2 \backslash \{0\}, AX = \lambda X$.
Comme $f(C) \subset C$ et que f est linéaire, $(f^n(X))$ est bornée par $\|X\|$ donc $(A^n X)$ également.
Donc (λ^n) est bornée, ce qui implique nécessairement que $|\lambda| \leqslant 1$.

On suppose que (f^n) converge. On appelle g sa limite.
Si f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé.
Alors $f^n(x) = \lambda^n x$ donc (λ^n) converge.

$$\text{Ainsi, } \lambda \neq -1.$$

On suppose maintenant que -1 n'est pas valeur propre de f.
χ_f est de degré 2 à coefficients réels donc il est soit scindé sur $\mathbb{R}$ soit scindé à racines simples sur $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, où les deux racines sont conjuguées l'une de l'autre.

1$^{\text{er}}$ cas : χ_f est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ de module 1.
On note $\lambda, \overline{\lambda}$ les racines de χ_f.
La suite (λ_n) est contenue dans le compact C donc admet une sous-suite $\lambda^{\varphi(n)}$ convergente.
Alors, $(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers 1.
Comme $A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \sim \operatorname{diag}(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, \overline{\lambda}^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$, $(A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers I_2.
Donc $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers Id. Soit $x \in C\backslash f(C)$. La suite $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x))$ converge vers x et C est stable par f donc x est adhérent à $f(C)$.
Pourtant, f est continue et C est fermé donc $f(C)$ l'est également.
C'est absurde donc ce cas est impossible.

2$^{\text{e}}$ cas : χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, de racines de module strictement inférieur à 1.
Alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $A = PDP^{-1}$ où $D = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ et comme $|\lambda|, |\mu| < 1$, les suites (λ^n) et (μ^n) convergent et la suite (D^n) également.
Le produit matriciel étant continu, (A^n) converge et (f^n) aussi.
C'est absurde, donc ce cas n'est pas possible.

3$^{\text{e}}$ cas : χ_f admet 1 et $\lambda \in]-1, 1[$ comme racines.
Alors (λ^n) converge vers 0 et f est diagonalisable donc $A \sim \operatorname{diag}(1, \lambda)$.
Donc (A^n) converge vers $B \sim \operatorname{diag}(1, 0)$ et (f^n) converge vers g de matrice canoniquement associée B.

4$^{\text{e}}$ cas : χ_f admet une racine double, nécessairement réelle, qu'on note λ.
Alors, $\lambda \in]-1, 1]$. On trigonalise f pour obtenir $f = \lambda\mathrm{Id} + v$ où $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ nilpotente.
λ ne peut être égal à 1, sinon $f = \mathrm{Id}$ et $f(C) = C$.
Comme Id et v commutent, on a $f^n = \lambda^n\mathrm{Id} + n\lambda^{n-1}v$ et f converge vers 0.

Dans tous les cas, (f^n) converge.