a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$
$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j\right)\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^{n-2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k}\right) \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \right) \right)
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n-k$ du polynôme P donc appartient à $\mathbb{Z}$.
Finalement,

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geqslant d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{d} \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j} \right) \right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in [\![-d, d]\!]$.
Comme $[\![-d, d]\!]^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in [\![0, d-1]\!], f(n+k) = f(n'+k)$.
Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

$$\text{la suite } (f(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } (n'-n)\text{-périodique}$$

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(mr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r)\frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x} \end{aligned}$$

Donc $d - f(r) + \frac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x}$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$