**Exercice 275 :**

Soient $C = [-1,1]^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Étudier la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous les hypothèses suivantes :
**i)** $f(C) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$
**ii)** $f(C) \subset ]-1,1[^2$
**iii)** $f(C) \subsetneq C$

**i)** On travaille avec la norme infinie : $\|\cdot\| : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(x,y)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On a $\|f(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2}$ car $\dfrac{1}{\|(x,y)\|}(x,y) \in [-1,1]^2$.
Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2^n}$.
Alors $\dfrac{2^n}{\|(x,y)\|} f(x,y) \in [-1,1]^2$ donc $f(\frac{2^n}{\|(x,y)\|} f^n(x,y)) \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2^{n+1}}$.
Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2^n}$.

$$\text{Par encadrement, pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \|f^n(x,y)\| = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f^n(x,y) = 0.$$

**ii)** La boule unité $C = [-1,1]^2$ est compacte et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est continue donc elle atteint un maximum en norme sur $C$, atteint en $(x_0, y_0)$.
Comme $f(C) \subset ]-1,1[^2$, $M = \|(x_0,y_0)\| < 1$.
Ainsi, $f(C) \subset [-M,M]^2$ et on se retrouve dans un cas similaire à la question précédente :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{M^n}$.

$$\text{Par encadrement, pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \|f^n(x,y)\| = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f^n(x,y) = 0.$$

**iii)** On cherche à montrer que la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $-1$ n'est pas valeur propre de $f$.
On note $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Montrons d'abord que les valeurs propres de $f$ dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur à 1. Soit donc $\lambda$ une valeur propre de $f$. Alors $\exists X \in \mathbb{C}^2\backslash\{0\}, AX = \lambda X$.
De plus, la suite $(A^n X)_n$ est bornée car $f(C) \subset C$.
Donc $(\lambda^n)$ est bornée, ce qui implique nécessairement que $|\lambda| \leqslant 1$.

On suppose que $(f^n)$ converge. On appelle $g$ sa limite.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $f$ et $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé.
Alors $f^n(x) = \lambda^n x$ donc $(\lambda^n)$ converge.

$$\text{Ainsi, } \lambda \neq -1.$$

On suppose maintenant que $-1$ n'est pas valeur propre de $f$.
$\chi_f$ est de degré 2 à coefficients réels donc il est soit scindé sur $\mathbb{R}$ soit scindé à racines simples sur $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, où les deux racines sont conjuguées l'une de l'autre.

<u>1er cas :</u> $\chi_f$ est scindé à racines simples de module 1.
On note $\lambda, \overline{\lambda}$ les racines de $\chi_f$.
La suite $(\lambda_n)$ est contenue dans le compact $C$ donc admet une sous-suite $\lambda^{\varphi(n)}$ convergente.
Alors, $(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers 1 donc $(A^n \sim \text{diag}(\lambda^n, \overline{\lambda}^n))$ converge vers $I_2$ et $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ vers Id.
Soit $x \in C\backslash f(C)$. La suite $(f^{\varphi(n+1)-\varphi)n}(x))$ converge vers $x$ et $C$ est stable par $f$ donc $x$ est adhérent à $f(C)$.
Pourtant, $f$ est continue et $C$ est fermé donc $f(C)$ l'est également.
C'est absurde donc ce cas est impossible.

<u>$2^e$ cas :</u> $\chi_f$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, de racines de module strictement inférieur à 1.
Alors $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ : $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ et comme $|\lambda|, |\mu| < 1$, les suites $(\lambda^n)$ et $(\mu^n)$ convergent et la suite $(D^n)$ également.
Le produit matriciel étant continu, $(A^n)$ converge et $(f^n)$ aussi.
C'est absurde, donc ce cas n'est pas possible.

<u>$3^e$ cas :</u> $\chi_f$ admet une racine double, nécessairement réelle, qu'on note $\lambda$.
Alors, $\lambda \in ]-1, 1]$. On trigonalise $f$ pour obtenir $f = \lambda\mathrm{Id} + v$ où $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ nilpotente.
$\lambda$ ne peut être égal à 1, sinon $f = \mathrm{Id}$ et $f(C) = C$.
Comme Id et $v$ commutent, on a $f^n = \lambda^n\mathrm{Id} + n\lambda^{n-1}v$ et $f$ converge vers 0.

Dans tous les cas, $(f^n)$ converge.