

Soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C|R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\operatorname{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\operatorname{Re}(iC)(A) = 0$

Or C est unitaire donc $\operatorname{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).

Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\operatorname{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C , ce qui est absurde.

Ainsi, C est réel et $R|C$.

Finalement,

$$R = C$$