Exercice 255 :

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition M admet-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

1$^{\text{er}}$ cas : Si $M = \lambda I_2$.

Si $\lambda \geqslant 0$ alors $M = (\sqrt{\lambda} I_2)^2$. Sinon $M = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-\lambda} \\ -\sqrt{\lambda} & 0 \end{pmatrix}^2$

2$^{\text{ème}}$ cas : Si $\chi_M = (X-a)(X-b)$, avec $a \neq b \in \mathbb{R}$.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.
On a $(N^2 - aI_2)(N^2 - bI_2) = 0$.
Donc N est annulée par un polynôme scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ donc N est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ de valeurs propres α et β.
Tout vecteur propre de N est vecteur propre de M donc en notant E_M, F_M, E_N et F_N les sous-espaces propres respectifs de M et N, on a $E_N \subset E_M$ et $F_N \subset F_M$. Comme tous ces sous-espaces sont de dimension 1, ces inclusions sont des égalités.
Or M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ donc admet au moins un vecteur propre réel pour chaque valeur propre. Donc il en est de même de N.
En prenant ces vecteurs propres, on diagonalise simultanément M et N dans $\mathbb{R}$.
On note P la matrice de passage qui est réelle.
On a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ donc α et β sont réels.
De plus, $\alpha^2 = a$ et $\beta^2 = b$.
Donc $a, b \geqslant 0$.

Synthèse : On suppose que $a, b \geqslant 0$.
On diagonalise M dans $\mathbb{R}$ et on note P la matrice de passage.
Alors en posant $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.

3$^{\text{ème}}$ cas : Si $\chi_M = (X-a)^2$, avec $a \in \mathbb{R}$ et M non diagonalisable.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.
Comme précédemment, il existe un vecteur propre de N qui soit réel (on prend le sous-espace propre de A associé à a qui est de dimension 1).
En prenant un deuxième vecteur réel libre avec le premier, et en notant P la matrice de passage associée (qui est réelle), on a $\begin{pmatrix} a & y \\ 0 & a \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ où $y \in \mathbb{R}$ et $x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
Donc $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ car N est réelle.
De plus, $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = a$ et $2\alpha x = y$.
Donc $a \geqslant 0$.
Enfin, si $a = 0$, N est trigonalisable dans $\mathbb{C}$ et a toutes ses valeurs propres nulles donc est nilpotente.
Or elle est de taille 2 donc $M = N^2 = 0$. C' est absurde donc $a > 0$.

Synthèse : On suppose que $a > 0$.
On trigonalise M dans $\mathbb{R}$ et on note P la matrice de passage.
Alors en posant $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \dfrac{y}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.
On remarquera que de cette manière, on peut traiter aussi le cas M diagonalisable. Ce cas a été traité à part pour plus de clarté.

4$^{\text{ème}}$ cas : Enfin, si $\chi_M = (X-z)(X-\overline{z})$, avec $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, on note $z = re^{i\theta}$.
On pose $\alpha = \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Si $\alpha + \overline{\alpha} = 0$, alors $\alpha \in i\mathbb{R}$ donc $z = \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Absurde. Donc $\alpha + \overline{\alpha} \neq 0$.
On pose $N = \dfrac{1}{\alpha + \overline{\alpha}}(M + \alpha\overline{\alpha}I_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On a $N^2 - M = \dfrac{1}{4r\cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2 I_2 + (2r - 4r\cos^2(\frac{\theta}{2}))M)$.
Donc $N^2 - M = \dfrac{1}{4r\cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2 I_2 - 2r\cos(\theta)M) = \dfrac{\chi_M(M)}{4r\cos^2(\frac{\theta}{2})}$.
Donc $N^2 - M = 0$ par théorème de Cayley-Hamilton et $N^2 = A$.

M admet une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $M = \lambda I_2$ ou M diagonalisable dans $\mathbb{C}$ à valeurs propres distinctes dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$ ou M trigonalisable non diagonalisable à valeurs propres strictement positives.