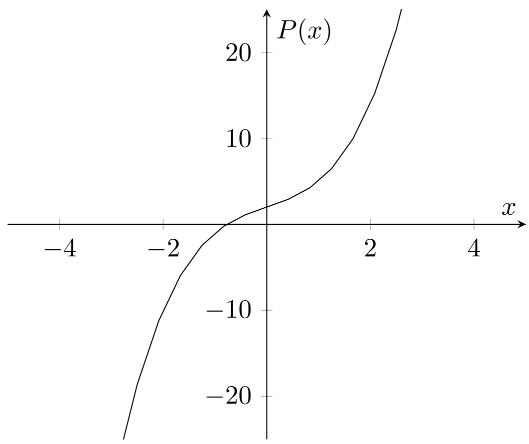
Exercice 254 :

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tel qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$.
Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, On note $P = X^3 + 2X + 2$. On obtient $P' = 3X^2 + 2$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	
$P(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



Ainsi, par théorème de la bijection, P n'admet qu'une seule racine réel α. On note β et $\overline{\beta}$ ses racines complexes conjuguées.
Pour $n \leqslant 3$, il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant P comme polynôme minimal (Théorème de Caley-Hamilton).
Pour $n = 3$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_A = P$.
P est un polynôme annulateur de A (théorème de Caley-Hamilton), et P est scindé à racines simples donc P est le polynôme minimal de A.
Pour $n \geqslant 3$, la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-3} & \\ & A \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_B = (X - \alpha)^{n-3} P$.
P est un polynôme annulateur de B et tout polynôme annulateur de B divise P donc P est le polynôme minimal de B.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, On suppose par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ t.q. $p \wedge q = 1$.
$P(\alpha) = 0 \implies \left(\dfrac{p}{q}\right)^3 + 2 \cdot \dfrac{p}{q} + 2 = 0 \implies p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$ donc par théorème de Gauss, $p|2$ et $q|2$ donc $\alpha \in \left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2, -\dfrac{1}{2}, -1, -2,\right\}$ Absurde. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et P, de degré 3 , est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $n \in 3\mathbb{N}$, la matrice $C = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ admet bien comme polynôme minimal P.

Pour $n \notin 3\mathbb{N}$, par l'absurde on suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ayant P comme polynôme minimal.
χ_C et P ont même racines, donc $\chi_C = (X - \alpha)^p \left((X - \beta)(X - \overline{\beta})\right)^q$ avec $p + 2q = n$ donc $p \neq q$ car $n \notin 3\mathbb{N}$.

- Si $p > q$, $\chi_C = (X - \alpha)^{p-q} P^q$ donc $(X - \alpha)^{p-q} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $p - q - 1$ de $(X - \alpha)^{p-q}$ est $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Absurde.
- Si $q > p$, $\chi_C = \left((X - \beta)(X - \overline{\beta})\right)^{q-p} P^p$ donc $\left((X - \beta)(X - \overline{\beta})\right)^{q-p} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $q - p - 1$ de $\left((X - \beta)(X - \overline{\beta})\right)^{q-p}$ est $2\mathrm{Re}(\beta)$. Par relation coefficient racines sur P, $\alpha + 2\mathrm{Re}(\beta) = 0$ donc $2\mathrm{Re}(\beta) \notin \mathbb{Q}$. Absurde.