Exercice 275 :

Soient $C = [-1,1]^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Étudier la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous les hypothèses suivantes :
i) $f(C) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$
ii) $f(C) \subset]-1,1[^2$
iii) $f(C) \subsetneq C$

i) On travaille avec la norme infinie : $\|\cdot\| : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(x,y)$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
On a $\|f(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2}$ car $\dfrac{1}{\|(x,y)\|}(x,y) \in [-1,1]^2$.
Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2^n}$.
Alors $\dfrac{2^n}{\|(x,y)\|} f(x,y) \in [-1,1]^2$ donc $f(\frac{2^n}{\|(x,y)\|} f^n(x,y)) \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2^{n+1}}$.
Ainsi, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{2^n}$.

$$\text{Par encadrement, pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \|f^n(x,y)\| = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f^n(x,y) = 0.$$

ii) La boule unité $C = [-1,1]^2$ est compacte et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est continue donc elle atteint un maximum en norme sur C, atteint en (x_0, y_0).
Comme $f(C) \subset]-1,1[^2$, $M = \|(x_0,y_0)\| < 1$.
Ainsi, $f(C) \subset [-M,M]^2$ et on se retrouve dans un cas similaire à la question précédente :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x,y)\| \leqslant \dfrac{\|(x,y)\|}{M^n}$.

$$\text{Par encadrement, pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lim_{n\to+\infty} \|f^n(x,y)\| = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} f^n(x,y) = 0.$$

iii) On cherche à montrer que la suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de f.
On note A la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Montrons d'abord que les valeurs propres de f dans $\mathbb{C}$ sont de module inférieur à 1.
Soit donc λ une valeur propre de f. Alors $\exists X \in \mathbb{C}^2\backslash\{0\}, AX = \lambda X$.
Comme $f(C) \subset C$ et que f est linéaire, $(f^n(X))$ est bornée par $\|X\|$ donc $(A^n X)$ également.
Donc (λ^n) est bornée, ce qui implique nécessairement que $|\lambda| \leqslant 1$.

On suppose que (f^n) converge. On appelle g sa limite.
Si f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ un vecteur propre associé.
Alors $f^n(x) = \lambda^n x$ donc (λ^n) converge.

$$\text{Ainsi, } \lambda \neq -1.$$

On suppose maintenant que -1 n'est pas valeur propre de f.
χ_f est de degré 2 à coefficients réels donc il est soit scindé sur $\mathbb{R}$ soit scindé à racines simples sur $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, où les deux racines sont conjuguées l'une de l'autre.

<u>1^er cas :</u> χ_f est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ de module 1.
On note $\lambda, \overline{\lambda}$ les racines de χ_f.
La suite (λ_n) est contenue dans le compact C donc admet une sous-suite $\lambda^{\varphi(n)}$ convergente.
Alors, $(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers 1.
Comme $A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \sim \mathrm{diag}(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, \overline{\lambda}^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$, $(A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers I_2.
Donc $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers Id.

Soit $x \in C \backslash f(C)$. La suite $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x))$ converge vers x et C est stable par f donc x est adhérent à $f(C)$.
Pourtant, f est continue et C est fermé donc $f(C)$ l'est également.
C'est absurde donc ce cas est impossible.

<u>2e cas :</u> χ_f est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, de racines de module strictement inférieur à 1.
Alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{diag}(\lambda, \mu)$ et $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}$ et comme $|\lambda|, |\mu| < 1$, les suites (λ^n) et (μ^n) convergent et la suite (D^n) également.
Le produit matriciel étant continu, (A^n) converge et (f^n) aussi.
C'est absurde, donc ce cas n'est pas possible.

<u>3e cas :</u> χ_f admet 1 et $\lambda \in]-1, 1[$ comme racines.
Alors (λ^n) converge vers 0 et f est diagonalisable donc $A \sim \mathrm{diag}(1, \lambda)$.
Donc (A^n) converge vers $B \sim \mathrm{diag}(1, 0)$ et (f^n) converge vers g de matrice canoniquement associée B.

<u>4e cas :</u> χ_f admet une racine double, nécessairement réelle, qu'on note λ.
Alors, $\lambda \in]-1, 1]$. On trigonalise f pour obtenir $f = \lambda \mathrm{Id} + v$ où $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ nilpotente.
λ ne peut être égal à 1, sinon $f = \mathrm{Id}$ et $f(C) = C$.
Comme Id et v commutent, on a $f^n = \lambda^n \mathrm{Id} + n\lambda^{n-1} v$ et f converge vers 0.

Dans tous les cas, (f^n) converge.