Corrigés RMS 2019

Exercice 228 :

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\overline{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$ la classe de conjugaison de x. On dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \overline{x}$.
a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.
b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tel que $g^2 = x$. Montrer que $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G.

a) Soit C une classe de conjugaison et $x \in C$ ambivalent. On a $x^{-1} \in \overline{x} = C$ donc $C = \overline{x^{-1}}$. Soit $y \in \overline{x}$. Il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$. Or on a aussi $C = \overline{y}$ donc $y^{-1} \in \overline{y}$, ce qui conclut.

b) Notons Γ l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{x \in G} \rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|}\sum_{x \in G}\left(\sum_{l \in G} \delta(l^2 = x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x \in G}\left(\sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = x)\delta(h^2 = x)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = h^2) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{(u,h) \in G^2} \delta(huhu = h^2) \text{ car } u \to hu \text{ est une bijection} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma \in \Gamma}\sum_{u \in \gamma}\sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1})
\end{aligned}$$

Or $\forall u \in \gamma$ considérons la fonction $\Phi_u : h \in G \to hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \overline{u}$. Elle est surjective.
On a alors:

$$\sum_{u \in \gamma}\sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant, $\Phi_u^{-1}(\{u\})$ et $\Phi_x^{-1}(\{u\})$ sont en bijection pour tout $x \in \gamma$.
En effet, si $x \in \gamma$ alors il existe $g \in G$ tel que $x = gu^{-1}g^{-1}$ et comme u est ambivalent il existe $h \in G$ tel que $u = hu^{-1}h^{-1}$.
x est aussi ambivalent donc il existe $k \in G$ tel que $x^{-1} = kxk^{-1}$.
On a alors en regroupant $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$.
On peut donc définir $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \to hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{u\})$. C'est alors clairement une bijection.
Finalement, on a :

$$\sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |G|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est G.)

D'où $\dfrac{1}{|G|}\displaystyle\sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison de G.

Exercice 235 :

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinces et tel que P'' divise P.
a) Montrer que P est à racines simples.
b) Montrer que les racines de P sont alignées.

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que $P''|P$.

a) Montrer que P est à racines simples.
Écrivons P sous la forme : $P = \lambda\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)\prod_{i=1}^{q}(X-b_i)^{m_i}$ avec $p \geq 1$ et les $m_i \geq 2$ et les a_i, b_i distincts.
L'objectif est de montrer $q = 0$.
Par hypothèse, P'' s'écrit $P'' = Q\prod_{i=1}^{q}(X-b_i)^{m_i-2}$ avec $Q|\prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.
On note n le degré de P et en regardant les degrés on a : $n-2 = \deg Q + \sum_{i=1}^{q}(m_i-2) = p + \sum_{i=1}^{q}(m_i) - 2$ d'où $2 = p - \deg Q + 2q$ avec $p \geq \deg Q$. Ainsi $q = 0$ ou $q = 1$. Par l'absurde supposons $q = 1$.
On pose $T = \prod_{i=1}^{p}(X-a_i)$.
On a $T'' = \lambda n(n-1)T(X-b_1)^{m_1-2} = \lambda(X-b_1)^{m_1-2}((X-b_1)^2T'' + 2m_1(X-b_1)T' + m_1(m_1-1)T)$
En divisant par $(X-b_1)^{m_1-2}$ et en évaluant en b_1, on a $n(n-1)T(b_1) = m_1(m_1-1)T(b_1)$. Or $T(b_1) \neq 0$ et $n > m_1$ car $p > 0$.

C'est absurde donc $q = 0$ et P est à racines simples.

b) Montrer que les racines de P sont alignées.
On rappelle le théorème de Gauss-Lucas : Si $P \in \mathrm{C}[X]$ alors les racines de P' sont des barycentres à coefficients strictement positifs de celles de P.
D'après la question précédente, P admet n racines distinctes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et P'' en a $n-2$ parmi celles ci. Les racines de P forment un polygone G dont on note, quitte à renuméroter, $a_1, ..., a_s$ les sommets. Par l'absurde on suppose $s \geq 3$, c'est-à-dire que G n'est pas un segment.
Par théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'intérieur de G et celles de P'' aussi. Or au moins une des racines de P'' n'est pas dans l'intérieur de G puisque une d'entre elle est un sommet ($k \geq 3$), ce qui est absurde.

Finalement $k = 2$ (deux racines distinctes) et les racines de P sont alignées.

Exercice 237 :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^{d}(X-\lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^{d}\lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

$$\sum_{i=1}^{d}\lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j\right)\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^{n-2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k}\right)\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(-1)^k \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n-k$ du polynôme P donc appartient à $\mathbb{Z}$.
Finalement,

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geqslant d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{d} \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}\right)\right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in [\![-d, d]\!]$.
Comme $[\![-d, d]\!]^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in [\![0, d-1]\!], f(n+k) = f(n'+k)$.
Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

$$\text{la suite } (f(n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est } (n'-n)\text{-périodique}$$

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(mr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r)\frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x} \end{aligned}$$

Donc $d - f(r) + \dfrac{f(r)}{1-x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x}$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$

Exercice 249 :

a) Calculer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1+\omega)$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, calculer $\det(I_n + P_\sigma)$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$.

d) Donner une formule simple pour T_n.

a) On note $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}} (-X+\omega) = (-1)^n(X^n - 1)$. Ainsi, $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1+\omega) = P(-1) = 1 + (-1)^{n+1}$.

b) σ se décopose en produit de cycles à support disjoint. $\sigma = c_1 \dots c_p$ où $c_i = (a_1^i \dots a_{n_i}^i)$.

Si on permute les éléments de la base canonique, alors P_σ devient semblable à $P_\sigma = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{pmatrix}$

Il y a p blocs C_i où chaque C_i est de taille n_i on a alors $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{C_i} = \det(XI_n - C_i) = X^{n_i} - 1$ donc $\chi_{P_\sigma} = \prod_{i=1}^{p} (X^{n_i} - 1)$ et $\det(I_n + P_\sigma) = (-1)^n \cdot \chi_{P_\sigma}(-1) = \prod_{i=1}^{p} (1 - (-1)^{n_i})$

c) On pose E_k l'ensemble des σ tel que l'orbite de $n+1$ soit de longueur k.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \det(I_{n+1} + P_\sigma) \\
&= \sum_k \sum_{\sigma \in E_k} \det(I_{n+1} + P_\sigma) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S_{n+1-k}} (1 - (-1)^k) \frac{n!}{(n+1-k)!} \det(I_{n+1-k} + P_\sigma)
\end{aligned}$$

Donc $|E_k| = \dfrac{n!}{(n+1-k)!}|S_{n+1-k}|$ donc $\binom{n}{k-1}(k-1)!(n+1-k)! = \dfrac{n!}{(n+1-k)!}(n+1-k)!$
Donc $n! = \dfrac{n!}{(n+1-k)!}(n+1-k)!$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k+1}^{n+1} (1 - (-1^k)) \frac{n!}{(n+1-k)!} T_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (1 + (-1)^{n-k}) \frac{n!}{k!} T_k \\
&= 2T_n + n(n-1) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + (-1)^{n-2-k}) \frac{(n-2)!}{k!} T_k \\
&= 2T_n + n(n-1)T_{n-1}
\end{aligned}$$

d) Déjà, on a $T_0 = 0$ et $T_1 = 2$.
On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.
Alors,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2T_n + n(n-1)T_{n-1}}{n!} x^n + 2 \\
&= 2 + 2f(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{T_{n-1}}{(n-2)!} x^n \\
&= \frac{2}{1-x^2} f(x) + \frac{2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Donc f vérifie l'équation différentielle

$$y' = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) y + \frac{2}{1-x^2}$$

Solution générale : $y_0(x) = \lambda \exp\left(\ln \dfrac{1+x}{1-x} \right) = \lambda \dfrac{1+x}{1-x}$.
Méthode de variation de la constante : $\lambda'(x) = \dfrac{1-x}{1+x} \dfrac{2}{(1-x)(1+x)} = \dfrac{2}{(1+x)^2}$ donc on prend $\lambda(x) = -\dfrac{2}{1+x}$
et $y_1(x) = -\dfrac{2}{1+x} \dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{2}{1-x}$

Ainsi, $f(x) = \lambda\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{2}{1-x}$

Comme de plus $f(0) = 0 = \lambda - 2$, on a $f(x) = \dfrac{2+2x-2}{1-x} = \dfrac{2x}{1-x} = 2\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n!}{n!}x^n$

$$\text{Finalement, } T_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2n!$$

> **Exercice 251 :**
>
> Soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C|R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\mathrm{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\mathrm{Re}(iC)(A) = 0$
Or C est unitaire donc $\mathrm{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).
Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\mathrm{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C, ce qui est absurde.
Ainsi, C est réel et $R|C$.

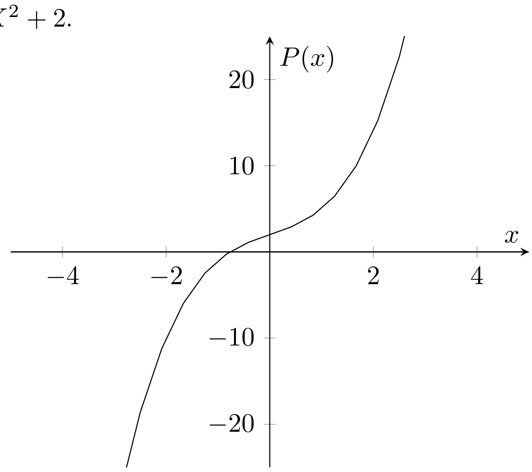
Finalement,

$$R = C$$

> **Exercice 254 :**
>
> Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tel qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$.
> Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: On note $P = X^3 + 2X + 2$. On obtient $P' = 3X^2 + 2$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		$+$	
$P(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



Ainsi, par théorème de la bijection, P n'admet qu'une seule racine réel α. On note β et $\overline{\beta}$ ses racines complexes conjuguées.
Pour $n < 3$, il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant P comme polynôme minimal (Théorème de Caley-Hamilton).
Pour $n = 3$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_A = P$.
P est un polynôme annulateur de A (théorème de Caley-Hamilton), et P est scindé à racines simples donc P est le polynôme minimal de A.

Pour $n > 3$, la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha\, I_{n-3} & \\ & A \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_B = (X-\alpha)^{n-3}P$.
P est un polynôme annulateur de B et tout polynôme annulateur de B divise P donc P est le polynôme minimal de B.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$: On suppose par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ t.q. $p \wedge q = 1$.
$P(\alpha) = 0 \implies \left(\dfrac{p}{q}\right)^3 + 2 \cdot \dfrac{p}{q} + 2 = 0 \implies p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$ donc par théorème de Gauss, $p|2$ et $q|2$ donc $\alpha \in \left\{\dfrac{1}{2}, 1, 2, -\dfrac{1}{2}, -1, -2,\right\}$ Absurde. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et P, de degré 3 , est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $n \in 3\mathbb{N}$, la matrice $C = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ admet bien comme polynôme minimal P.

Pour $n \notin 3\mathbb{N}$, par l'absurde on suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ayant P comme polynôme minimal.
χ_C et P ont même racines, donc $\chi_C = (X-\alpha)^p \left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^q$ avec $p + 2q = n$ donc $p \neq q$ car $n \notin 3\mathbb{N}$.

- Si $p > q$, $\chi_C = (X-\alpha)^{p-q}P^q$ donc $(X-\alpha)^{p-q} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $p-q-1$ de $(X-\alpha)^{p-q}$ est $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Absurde.
- Si $q > p$, $\chi_C = \left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^{q-p} P^p$ donc $\left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^{q-p} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $q-p-1$ de $\left((X-\beta)(X-\overline{\beta})\right)^{q-p}$ est $2\mathrm{Re}(\beta)$. Par relation coefficient racines sur P, $\alpha + 2\mathrm{Re}(\beta) = 0$ donc $2\mathrm{Re}(\beta) \notin \mathbb{Q}$. Absurde.

Exercice 260 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.
a) Montrer que pour tout $u \in \mathrm{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.
b) Étudier la continuité de $u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

a) Soient $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $\mu = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \mu_i X^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $r = \deg \lambda \leqslant n$ son polynôme minimal.

On a alors $0 = \mu(u) = \displaystyle\sum_{i=0}^{r} \mu_i u^i$ où $\mu_0 \neq 0$ (sinon μ n'est pas minimal).

Ainsi, $\mathrm{Id} = -\dfrac{1}{\mu_0} \displaystyle\sum_{i=1} \mu_i u^i = u \left(\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i\right)$ où $\lambda_i = -\dfrac{\mu_{i+1}}{\mu_0}$

Ainsi, en posant $I_u = \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i X^i$, comme u et $I_u(u)$ commutent, on a $u^{-1} = I_u(u)$

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{r-1} \nu_i X^i$ de degré inférieur ou égal à celui de I_u tel que $u^{-1} = P(u)$.
Alors $\mathrm{Id} - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \nu_{i-1} u^i = 0$ donc un polynome non nul de degré inférieur à celui du polynôme minimal de u annule ce dernier. Donc $X - \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \nu_{i-1} u^i = N\lambda$ où $N \in \mathbb{C}$.
Donc I_u et P sont associés. Comme $I_u(u) = u^{-1} = P(u)$, $P = I_u$.

$$\text{Ainsi, il existe un unique polynôme } I_u \in \mathbb{C}[X] \text{ de degré minimal tel que } u^{-1} = I_u(u).$$
$$\text{De plus, } \deg I_u = r - 1 < n.$$

b) On pose la suite $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(E)^{\mathbb{N}}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{A_n} = 2 - X$. Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = I_n$ et $I_{I_n} = 1$

$$\text{L'application } u \in \mathrm{GL}(E) \mapsto I_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \text{ n'est pas continue.}$$

Exercice 273 :

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

$\boxed{\Longleftarrow}$ On suppose que M est diagonalisable.
Il existe donc $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale tels que $M = Q^{-1}DQ$.
Soit $A = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(M)$.

Dans un premier temps, on suppose que $\det PQ$ et $\det Q$ sont de même signe, tous deux positifs par symétrie.
Par pivot de Gauss, il existe $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{GL}(\mathbb{R})$ telles que

$$P = T_1 \times \cdots \times T_n \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & 0 & & \det Q \end{pmatrix} = T_1 \times \cdots \times T_n \times B$$

On pose alors $\gamma_1 : t \in [0,1] \mapsto \prod\limits_{i=1}^{n} (I_2 + t(T_i - I_2))B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est continue, $\gamma_1(0) = I_2$ et $\gamma_1(1) = P$
$\forall t \in [0,1], \forall i \in [\![1,n]\!], \det(I_2 + t(T_i - I_2)) = 1$ et $\det \gamma_1(t) > 0$ donc $\gamma_1(t) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\gamma_1([0,1]) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
De même, on trouve $\gamma_2 : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $\gamma_2(0) = PQ$ et $\gamma_2(1) = I_2$.
Ainsi, $\gamma = \gamma_1\gamma_2 : [0,1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est continue et $\gamma(0) = PQ$ et $\gamma(1) = Q$.
Finalement, $\mu : t \in [0,1] \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathcal{C}(M)$ est continue car $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On a $\mu(0) = PQD(PQ)^{-1} = A$ et $\mu(1) = QPQ^{-1} = M$

Si $\det PQ$ et $\det Q$ sont de signes opposés, $A = (PQ)D(PQ)^{-1} = (PQC)D(PQC)^{-1}$ où $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut -1.
Comme $\det PQC$ et $\det QC$ sont de même signe, on revient au premier cas.

$$\text{Ainsi, la classe de similitude de } M \text{ est connexe par arcs.}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ On suppose que la classe de similitude de M est connexe par arcs.
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.
La fonction $f : (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto a_{12} - a_{21} \in \mathbb{R}$ est continue et $f(M) = -f(M')$.
Comme $\mathcal{C}(M)$ est connexe par arcs, on peut y trouver N telle que $f(N) = 0$, c'est-à-dire que N est symétrique.
Elle est donc diagonalisable.
Comme N et M sont semblables,

$$M \text{ est diagonalisable}$$