

# Corrigés RMS 2019

## Exercice 228 :

Soit  $G$  un groupe fini. Pour  $x \in G$ , on note  $\bar{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$  la classe de conjugaison de  $x$ . On dit que  $x$  est ambivalent si  $x^{-1} \in \bar{x}$ .

**a)** Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.

**b)** Pour  $x \in G$ , soit  $\rho(x)$  le nombre de  $g \in G$  tel que  $g^2 = x$ . Montrer que  $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2$  est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de  $G$ .

**a)** Soit  $C$  une classe de conjugaison et  $x \in C$  ambivalent. On a  $x^{-1} \in \bar{x} = C$  donc  $C = \overline{x^{-1}}$ . Soit  $y \in \bar{x}$ . Il existe  $g \in G$  tel que  $y = gxg^{-1}$ . Alors  $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$ . Or on a aussi  $C = \bar{y}$  donc  $y^{-1} \in \bar{y}$ , ce qui conclut.

**b)** Notons  $\Gamma$  l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left( \sum_{l \in G} \delta(l^2 = x) \right)^2 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left( \sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = x) \delta(h^2 = x) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = h^2) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(u,h) \in G^2} \delta(huh^{-1}u = h^2) \text{ car } u \rightarrow hu \text{ est une bijection} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) \end{aligned}$$

Or  $\forall u \in \gamma$  considérons la fonction  $\Phi_u : h \in G \rightarrow hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \bar{u}$ . Elle est surjective.

On a alors :

$$\sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant,  $\Phi_u^{-1}(\{u\})$  et  $\Phi_x^{-1}(\{x\})$  sont en bijection pour tout  $x \in \gamma$ .

En effet, si  $x \in \gamma$  alors il existe  $g \in G$  tel que  $x = gu^{-1}g^{-1}$  et comme  $u$  est ambivalent il existe  $h \in G$  tel que  $u = hu^{-1}h^{-1}$ .

$x$  est aussi ambivalent donc il existe  $k \in G$  tel que  $x^{-1} = kxk^{-1}$ .

On a alors en regroupant  $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$ .

On peut donc définir  $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \rightarrow hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{x\})$ . C'est alors clairement une bijection.

Finalement, on a :

$$\sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |\gamma|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est  $G$ .)

$$\text{D'où } \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 \text{ est le nombre de classes de conjugaison de } G.$$

**Exercice 235 :**

Soit  $P$  un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que  $P''$  divise  $P$ .

- a) Montrer que  $P$  est à racines simples.  
 b) Montrer que les racines de  $P$  sont alignées.

Soit  $P$  un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que  $P''|P$ .

- a) Montrer que  $P$  est à racines simples.

Écrivons  $P$  sous la forme :  $P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - a_i) \prod_{i=1}^q (X - b_i)^{m_i}$  avec  $p \geq 1$  et les  $m_i \geq 2$  et les  $a_i, b_i$  distincts.

L'objectif est de montrer  $q = 0$ .

Par hypothèse,  $P''$  s'écrit  $P'' = Q \prod_{i=1}^q (X - b_i)^{m_i-2}$  avec  $Q = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$ .

On note  $n$  le degré de  $P$  et en regardant les degrés on a :  $n - 2 = \deg Q + \sum_{i=1}^q (m_i - 2) = p + \sum_{i=1}^q (m_i) - 2$  d'où  $2 = p - \deg Q + 2q$  avec  $p \geq \deg Q$ . Ainsi  $q = 0$  ou  $q = 1$ . Par l'absurde supposons  $q = 1$ .

On pose  $T = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$ .

On a  $T'' = \lambda n(n-1)T(X - b_1)^{m_1-2} = \lambda(X - b_1)^{m_1-2}((X - b_1)^2 T'' + 2m_1(X - b_1)T' + m_1(m_1 - 1)T)$

En divisant par  $(X - b_1)^{m_1-2}$  et en évaluant en  $b_1$ , on a  $n(n-1)T(b_1) = m_1(m_1 - 1)T(b_1)$ . Or  $T(b_1) \neq 0$  et  $n > m_1$  car  $p > 0$ .

C'est absurde donc  $q = 0$  et  $P$  est à racines simples.

- b) Montrer que les racines de  $P$  sont alignées.

On rappelle le théorème de Gauss-Lucas : Si  $P \in \mathbb{C}[X]$  alors les racines de  $P'$  sont des barycentres à coefficients strictement positifs de celles de  $P$ .

D'après la question précédente,  $P$  admet  $n$  racines distinctes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  et  $P''$  en a  $n - 2$  parmi celles-ci. Les racines de  $P$  forment un polygone  $G$  dont on note, quitte à renuméroter,  $a_1, \dots, a_s$  les sommets. Par l'absurde on suppose  $s \geq 3$ , c'est-à-dire que  $G$  n'est pas un segment.

Par théorème de Gauss-Lucas, les racines de  $P'$  sont dans l'intérieur de  $G$  et celles de  $P''$  aussi. Or au moins une des racines de  $P''$  n'est pas dans l'intérieur de  $G$  puisque une d'entre elle est un sommet ( $k \geq 3$ ), ce qui est absurde.

Finalement  $k = 2$  (deux racines distinctes) et les racines de  $P$  sont alignées.

**Exercice 237 :**

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_d$  des nombres complexes de module au plus 1,  $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$ . On suppose que  $P \in \mathbb{Z}[X]$ .

- a) Montrer que  $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$   
 b) Montrer que  $f$  est périodique à partir d'un certain rang.  
 c) Montrer que, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\lambda_i$  est nul ou racine de l'unité.

- a) On procède par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

Initialisation :  $n = 0$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ , que  $\forall k < n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{i=1}^d \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \lambda_i^n &= \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\ &= \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j \right) \left( \sum_{k=1}^d \lambda_k^{n-2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=1}^n \left( (-1)^{k+1} \left( \sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \right) \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence,  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}$  est le coefficient de degré  $n - k$  du polynôme  $P$  donc appartient à  $\mathbb{Z}$ .

Finalement,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

**b)** Pour  $n \geq d$ , on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^d \left( (-1)^{k+1} f(n-k) \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right)$$

Or,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f(n) \in \llbracket -d, d \rrbracket$ .

Comme  $\llbracket -d, d \rrbracket^d$  est fini, il existe  $n < n' \in \mathbb{N}$  tels que  $n' - n > d$  et  $\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ ,  $f(n+k) = f(n'+k)$ .

Et comme  $f(n)$  dépend des  $d$  termes précédents,

la suite  $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$  est  $(n' - n)$ -périodique

c)  $f$  est périodique à partir d'un certain rang donc  $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nr) = f(r)$

On pose  $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$ . Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r) \frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^d \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^d (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d - f(r) + \frac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x}$$

Par unicité de la DES, tous les  $\lambda_i$  sont nuls ou tels que  $\lambda_i^{-r} = 1$

**Exercice 249 :**

a) Calculer  $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1 + \omega)$

b) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\sigma \in \mathcal{S}_n$ , calculer  $\det(I_n + P_\sigma)$

c) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$ .

d) Donner une formule simple pour  $T_n$ .

a) On note  $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}} (-X + \omega) = (-1)^n (X^n - 1)$ . Ainsi,  $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1 + \omega) = P(-1) = 1 + (-1)^{n+1}$ .

b)  $\sigma$  se décompose en produit de cycles à support disjoint.  $\sigma = c_1 \dots c_p$  où  $c_i = (a_1^i \dots a_{n_i}^i)$ .

Si on permute les éléments de la base canonique, alors  $P_\sigma$  devient semblable à  $P_\sigma = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{pmatrix}$

Il y a  $p$  blocs  $C_i$  où chaque  $C_i$  est de taille  $n_i$  on a alors  $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_{C_i} = \det(XI_{n_i} - C_i) = X^{n_i} - 1 \text{ donc } \chi_{P_\sigma} = \prod_{i=1}^p (X^{n_i} - 1) \text{ et } \det(I_n + P_\sigma) = (-1)^n \cdot \chi_{P_\sigma}(-1) = \prod_{i=1}^p (1 - (-1)^{n_i})$$

c) On pose  $E_k$  l'ensemble des  $\sigma$  tel que l'orbite de  $n+1$  soit de longueur  $k$ .

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \det(I_{n+1} + P_\sigma) \\
&= \sum_k \sum_{\sigma \in E_k} \det(I_{n+1} + P_\sigma) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S_{n+1-k}} (1 - (-1)^k) \frac{n!}{(n+1-k)!} \det(I_{n+1-k} + P_\sigma)
\end{aligned}$$

Donc  $|E_k| = \frac{n!}{(n+1-k)!} |S_{n+1-k}|$  donc  $\binom{n}{k-1} (k-1)! (n+1-k)! = \frac{n!}{(n+1-k)!} (n+1-k)!$

Donc  $n! = \frac{n!}{(n+1-k)!} (n+1-k)!$ .

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (1 - (-1)^k) \frac{n!}{(n+1-k)!} T_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^n (1 + (-1)^{n-k}) \frac{n!}{k!} T_k \\
&= 2T_n + n(n-1) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + (-1)^{n-2-k}) \frac{(n-2)!}{k!} T_k \\
&= 2T_n + n(n-1)T_{n-1}
\end{aligned}$$

**d)** Déjà, on a  $T_0 = 0$  et  $T_1 = 2$ .

On pose  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$ .

Alors,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2T_n + n(n-1)T_{n-1}}{n!} x^n + 2 \\
&= 2 + 2f(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{T_{n-1}}{(n-2)!} x^n \\
&= \frac{2}{1-x^2} f(x) + \frac{2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Donc  $f$  vérifie l'équation différentielle

$$y' = \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) y + \frac{2}{1-x^2}$$

Solution générale :  $y_0(x) = \lambda \exp\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) = \lambda \frac{1+x}{1-x}$ .

Méthode de variation de la constante :  $\lambda'(x) = \frac{1-x}{1+x} \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{(1+x)^2}$  donc on prend  $\lambda(x) = -\frac{2}{1+x}$

et  $y_1(x) = -\frac{2}{1+x} \frac{1+x}{1-x} = -\frac{2}{1-x}$

Ainsi,  $f(x) = \lambda \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{1-x}$

Comme de plus  $f(0) = 0 = \lambda - 2$ , on a  $f(x) = \frac{2+2x-2}{1-x} = \frac{2x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n!}{n!} x^n$

Finalement,  $T_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2n!$

**Exercice 251 :**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$ . Comparer ses polynômes minimaux dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Soient  $R \in \mathbb{R}[X]$  et  $C \in \mathbb{C}[X]$  les polynômes minimaux de  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  respectivement.

On a bien sur  $C|R$ .

$C(A) = 0$  donc  $iC(A) = 0$  donc  $\operatorname{Re}(iC(A)) = 0$  donc  $\operatorname{Re}(iC)(A) = 0$

Or  $C$  est unitaire donc  $\operatorname{Re}(iC)$  est de degré strictement inférieur à  $C$  (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).

Ainsi, si  $C$  n'est pas à coefficients réels,  $\operatorname{Re}(iC)$  est un polynôme non-nul, annulant  $A$  et de degré strictement inférieur à celui de  $C$ , ce qui est absurde.

Ainsi,  $C$  est réel et  $R|C$ .

Finalement,

$$R = C$$

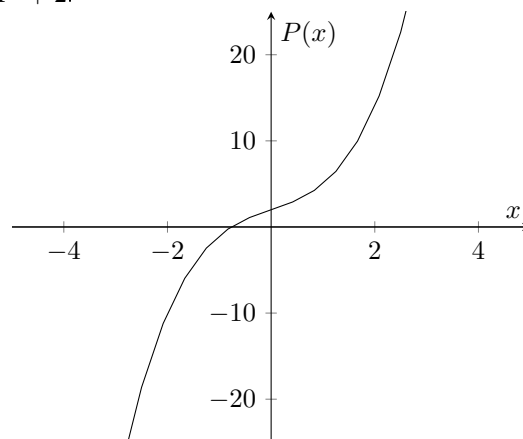
**Exercice 254 :**

Déterminer les  $n \in \mathbb{N}$  tel qu'existe  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de polynôme minimal  $X^3 + 2X + 2$ .

Même question dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ .

**Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :** On note  $P = X^3 + 2X + 2$ . On obtient  $P' = 3X^2 + 2$ .

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$P'(x)$		+	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$+\infty$



Ainsi, par théorème de la bijection,  $P$  n'admet qu'une seule racine réel  $\alpha$ . On note  $\beta$  et  $\bar{\beta}$  ses racines complexes conjuguées.

Pour  $n < 3$ , il n'existe pas de matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  admettant  $P$  comme polynôme minimal (Théorème de Caley-Hamilton).

Pour  $n = 3$ , la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$  admet comme polynôme caractéristique  $\chi_A = P$ .

$P$  est un polynôme annulateur de  $A$  (théorème de Caley-Hamilton), et  $P$  est scindé à racines simples donc  $P$  est le polynôme minimal de  $A$ .

Pour  $n > 3$ , la matrice  $B = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-3} & \\ & A \end{pmatrix}$  admet comme polynôme caractéristique  $\chi_B = (X - \alpha)^{n-3} P$ .

$P$  est un polynôme annulateur de  $B$  et tout polynôme annulateur de  $B$  divise  $P$  donc  $P$  est le polynôme minimal de  $B$ .

**Dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  :** On suppose par l'absurde que  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , donc il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  t.q.  $p \wedge q = 1$ .

$P(\alpha) = 0 \implies \left(\frac{p}{q}\right)^3 + 2 \cdot \frac{p}{q} + 2 = 0 \implies p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$  donc par théorème de Gauss,  $p|2$  et  $q|2$  donc  $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, -\frac{1}{2}, -1, -2, \right\}$  Absurde. Donc  $\alpha \notin \mathbb{Q}$  et  $P$ , de degré 3, est irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ .

Pour  $n \in 3\mathbb{N}$ , la matrice  $C = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  admet bien comme polynôme minimal  $P$ .

Pour  $n \notin 3\mathbb{N}$ , par l'absurde on suppose qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$  ayant  $P$  comme polynôme minimal.

$\chi_C$  et  $P$  ont même racines, donc  $\chi_C = (X - \alpha)^p ((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^q$  avec  $p + 2q = n$  donc  $p \neq q$  car  $n \notin 3\mathbb{N}$ .

- Si  $p > q$ ,  $\chi_C = (X - \alpha)^{p-q} P^q$  donc  $(X - \alpha)^{p-q} \in \mathbb{Q}[X]$ . Or le coefficient de degré  $p - q - 1$  de  $(X - \alpha)^{p-q}$  est  $\alpha \notin \mathbb{Q}$ . Absurde.
- Si  $q > p$ ,  $\chi_C = ((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p} P^p$  donc  $((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p} \in \mathbb{Q}[X]$ . Or le coefficient de degré  $q - p - 1$  de  $((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p}$  est  $2\operatorname{Re}(\beta)$ . Par relation coefficient racines sur  $P$ ,  $\alpha + 2\operatorname{Re}(\beta) = 0$  donc  $2\operatorname{Re}(\beta) \notin \mathbb{Q}$ . Absurde.

#### Exercice 255 :

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . A quelle condition  $M$  admet-elle une racine carrée dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ?

- Si  $\chi_M = (X - a)(X - b)$  et  $M$  diagonalisable, avec  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Analyse : On suppose qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $N^2 = M$ .

Si  $a = b$  alors  $N^2 - aI_2 = 0$  et sinon  $(N^2 - aI_2)(N^2 - bI_2) = 0$ .

Donc  $N$  est annulée par un polynôme scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$  donc  $N$  est diagonalisable dans  $\mathbb{C}$  de valeurs propres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Tout vecteur propre de  $N$  est vecteur propre de  $M$  donc en notant  $E_M, F_M, E_N$  et  $F_N$  les sous-espaces propres respectifs de  $M$  et  $N$ ,

on a  $E_N \subset E_M$  et  $F_N \subset F_M$ . Comme tous ces sous-espaces sont de dimension 1, ces inclusions sont des égalités.

Or  $M$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}$  donc admet au moins un vecteur propre réel pour chaque valeur propre. Donc il en est de même de  $N$ .

En prenant ces vecteurs propres, on diagonalise simultanément  $M$  et  $N$  dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $P$  la matrice de passage qui est réelle.

On a  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = PMP^{-1}$  et  $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$  donc  $\alpha$  et  $\beta$  sont réels.

De plus,  $\alpha^2 = a$  et  $\beta^2 = b$ .

Donc  $a, b \geq 0$ .

Synthèse : On suppose que  $a, b \geq 0$ .

On diagonalise  $M$  dans  $\mathbb{R}$  et on note  $P$  la matrice de passage.

Alors en posant  $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P$ , on a  $N^2 = M$ .

- Si  $\chi_M = (X - a)^2$ , avec  $a \in \mathbb{R}$  et  $M$  non diagonalisable.

Analyse : On suppose qu'il existe  $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que  $N^2 = M$ .

Comme précédemment, il existe un vecteur propre de  $N$  qui soit réel (on prend le sous-espace propre de  $A$  associé à  $a$  qui est de dimension 1).

En prenant un deuxième vecteur réel libre avec le premier, et en notant  $P$  la matrice de passage associée (qui est réelle), on a  $\begin{pmatrix} a & y \\ 0 & a \end{pmatrix} = PMP^{-1}$  et  $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$  où  $y \in \mathbb{R}$  et  $x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ .

Donc  $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  car  $N$  est réelle.

De plus,  $\alpha^2 = a$ ,  $\beta^2 = a$  et  $2\alpha x = y$ .

Donc  $a \geq 0$ .

Synthèse : On suppose que  $a \geq 0$ .

On trigonalise  $M$  dans  $\mathbb{R}$  et on note  $P$  la matrice de passage.

Alors en posant  $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{y}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} P$ , on a  $N^2 = M$ .

On remarquera que de cette manière, on peut traiter aussi le cas  $M$  diagonalisable. Ce cas a été traité à part pour plus de clarté.

- Enfin, si  $\chi_M = (X - z)(X - \bar{z})$ , avec  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , on note  $z = re^{i\theta}$ .

On pose  $\alpha = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ .

Si  $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ , alors  $\alpha \in i\mathbb{R}$  donc  $z = \alpha^2 \in \mathbb{R}$ . Absurde. Donc  $\alpha + \bar{\alpha} \neq 0$ .

On pose  $N = \frac{1}{\alpha + \bar{\alpha}}(M + \alpha\bar{\alpha}I_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

On a  $N^2 - M = \frac{1}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 + (2r - 4r \cos^2(\frac{\theta}{2}))M)$ .

Donc  $N^2 - M = \frac{1}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 - 2r \cos(\theta)M) = \frac{\chi_M(M)}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}$ .

Donc  $N^2 - M = 0$  par théorème de Cayley-Hamilton et  $N^2 = A$ .

$M$  admet une racine carrée dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  si et seulement si  $Sp(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_*$ .

#### Exercice 256 :

Quelles sont les  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M$  soit semblable à  $2M$  ?

**Analyse** : Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $M \sim 2M$ .

1<sup>ère</sup> méthode : En trigonalisant  $M$ , on remarque que les valeurs propres de  $2M$  sont le double de celles de  $M$ . Or  $M$  et  $2M$  sont semblables donc ont les mêmes valeurs propres. Ces dernières sont donc toutes nulles.

Donc  $M$  est nilpotente.

2<sup>ème</sup> méthode : Il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $PM = 2MP$ . Ainsi,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $PM^n = 2^n M^n P$ .

La famille  $(I_n, M)$  est libre tandis que  $I_n, M, \dots, M^{n^2}$  est liée.

Il existe donc  $p \in \llbracket 1, n^2 \rrbracket$  tel que  $(I, \dots, M^p)$  est libre et  $(I, \dots, M^{p+1})$  est liée.

On peut donc trouver  $a_0, \dots, a_{p+1}$  non tous nuls tels que  $\sum_{i=0}^{p+1} a_i M^i = 0$ .

Donc  $P \sum_{i=0}^{p+1} a_i M^i = 0$  donc  $\left( \sum_{i=0}^{p+1} a_i 2^i M^i \right) P = 0$  donc  $\sum_{i=0}^{p+1} a_i 2^i M^i = 0$ .

Donc  $2^{p+1} \sum_{i=0}^{p+1} a_i M^i - \sum_{i=0}^{p+1} a_i 2^i M^i = 0$  donc  $\sum_{i=0}^p (2^{p+1} - 2^i) a_i M^i = 0$ .

Par liberté de  $(I, \dots, M^p)$ , les  $(2^{p+1} - 2^i) a_i$  sont nuls donc les  $a_i$  sont nuls pour  $i \in \llbracket 0, p \rrbracket$ .

Donc  $a_{p+1} \neq 0$  et  $a_{p+1} M^{p+1} = 0$  donc  $M^{p+1} = 0$



Donc  $M$  est nilpotente.

**Synthèse :** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  nilpotente.

*Lemme :* Montrons que  $M$  étant nilpotente, elle est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & J_p & \\ & & & (0) \end{pmatrix} \text{ où les } J_i \text{ sont des blocs de Jordan : } J_i = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit  $p$  l'ordre de nilpotence de  $M$ . Alors  $M^{p-1} \neq 0$  donc il existe  $x \in \mathbb{C}^n$  tel que  $M^{n-1}x \neq 0$ .

Alors la famille  $(x, Mx, \dots, M^{p-1}x)$  est libre, on en note  $E_1$  l'espace engendré et  $J_1$  la matrice de l'induit de  $M$  sur cet espace. C'est un bloc de Jordan de coefficient 0.

Le supplémentaire de  $E_1$  dans  $E$ , qu'on note  $\tilde{E}_1$ , est stable par  $M$ . On note  $M_1$  l'induit, qui est toujours nilpotent.

Soit  $M_1$  est nulle, auquel cas on a fini, soit son ordre de nilpotence  $p_1$  est non nul. On recommence alors le procédé précédent.

On itère cela jusqu'à tomber sur un induit nul ou un supplémentaire égal à  $\{0\}$ .  $\square$

On prend

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 2^{n-1} & \end{pmatrix}$$

Alors, pour  $N$  de la forme donnée par le lemme,  $PN = 2NP$  donc  $N \sim 2N$ .

Comme  $M$  et  $N$  sont semblables,

$M$  est semblable à  $2M$ .

**Exercice 260 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$ .

**a)** Montrer que pour tout  $u \in \text{GL}(E)$  il existe un unique polynôme  $I_u \in \mathbb{C}[X]$  de degré minimal tel que  $u^{-1} = I_u(u)$ , et justifier que  $\deg I_u < n$ .

**b)** Étudier la continuité de  $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

**a)** Soient  $u \in \text{GL}(E)$  et  $\mu = \sum_{i=0}^r \mu_i X^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  où  $r = \deg \lambda \leq n$  son polynôme minimal.

On a alors  $0 = \mu(u) = \sum_{i=0}^r \mu_i u^i$  où  $\mu_0 \neq 0$  (sinon  $\mu$  n'est pas minimal).

Ainsi,  $\text{Id} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^r \mu_i u^i = u \left( \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i \right)$  où  $\lambda_i = -\frac{\mu_{i+1}}{\mu_0}$

Ainsi, en posant  $I_u = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i X^i$ , comme  $u$  et  $I_u(u)$  commutent, on a  $u^{-1} = I_u(u)$

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre polynôme  $P = \sum_{i=0}^{r-1} \nu_i X^i$  de degré inférieur ou égal à celui de  $I_u$  tel que  $u^{-1} = P(u)$ .

Alors  $\text{Id} - \sum_{i=1}^r \nu_{i-1} u^i = 0$  donc un polynôme non nul de degré inférieur à celui du polynôme minimal de  $u$  annule

ce dernier. Donc  $X - \sum_{i=1}^r \nu_{i-1} u^i = N\lambda$  où  $N \in \mathbb{C}$ .

Donc  $I_u$  et  $P$  sont associés. Comme  $I_u(u) = u^{-1} = P(u)$ ,  $P = I_u$ .

Ainsi, il existe un unique polynôme  $I_u \in \mathbb{C}[X]$  de degré minimal tel que  $u^{-1} = I_u(u)$ .

De plus,  $\deg I_u = r - 1 < n$ .

b) On pose la suite  $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(E)^{\mathbb{N}}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{A_n} = 2 - X$ . Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = I_n$  et  $I_{I_n} = 1$

L'application  $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$  n'est pas continue.

### Exercice 273 :

Soit  $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Montrer que la classe de similitude de  $M$  est connexe par arcs si et seulement si  $M$  est diagonalisable.

$\Leftarrow$  On suppose que  $M$  est diagonalisable.

Il existe donc  $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  diagonale tels que  $M = Q^{-1}DQ$ .

Soit  $A = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(M)$ .

Dans un premier temps, on suppose que  $\det PQ$  et  $\det Q$  sont de même signe, tous deux positifs par symétrie. Par pivot de Gauss, il existe  $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{GL}(\mathbb{R})$  telles que

$$P = T_1 \times \dots \times T_n \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & 0 & \det Q \end{pmatrix} = T_1 \times \dots \times T_n \times B$$

On pose alors  $\gamma_1 : t \in [0, 1] \mapsto \prod_{i=1}^n (I_2 + t(T_i - I_2))B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Elle est continue,  $\gamma_1(0) = I_2$  et  $\gamma_1(1) = P$

$\forall t \in [0, 1], \forall i \in [1, n], \det(I_2 + t(T_i - I_2)) = 1$  et  $\det \gamma_1(t) > 0$  donc  $\gamma_1(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  donc  $\gamma_1([0, 1]) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

De même, on trouve  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  continue telle que  $\gamma_2(0) = PQ$  et  $\gamma_2(1) = I_2$ .

Ainsi,  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$  est continue et  $\gamma(0) = PQ$  et  $\gamma(1) = Q$ .

Finalement,  $\mu : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathcal{C}(M)$  est continue car  $A \mapsto A^{-1}$  est continue sur  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ .

On a  $\mu(0) = PQD(PQ)^{-1} = A$  et  $\mu(1) = QPQ^{-1} = M$

Si  $\det PQ$  et  $\det Q$  sont de signes opposés,  $A = (PQ)D(PQ)^{-1} = (PQC)D(PQC)^{-1}$  où  $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  dont le déterminant vaut  $-1$ .

Comme  $\det PQC$  et  $\det QC$  sont de même signe, on revient au premier cas.

Ainsi, la classe de similitude de  $M$  est connexe par arcs.

$\Rightarrow$  On suppose que la classe de similitude de  $M$  est connexe par arcs.

Soit  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On pose  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$ .

La fonction  $f : (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto a_{12} - a_{21} \in \mathbb{R}$  est continue et  $f(M) = -f(M')$ .

Comme  $\mathcal{C}(M)$  est connexe par arcs, on peut y trouver  $N$  telle que  $f(N) = 0$ , c'est-à-dire que  $N$  est symétrique.

Elle est donc diagonalisable.  
Comme  $N$  et  $M$  sont semblables,

$M$  est diagonalisable

**Exercice 275 :**

Soient  $C = [-1, 1]^2$  et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Étudier la suite  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  sous les hypothèses suivantes :

- i)  $f(C) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$
- ii)  $f(C) \subset ]-1, 1[^2$
- iii)  $f(C) \subsetneq C$

i) On travaille avec la norme infinie :  $\|\cdot\| : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(x, y)$ . Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

On a  $\|f(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2}$  car  $\frac{1}{\|(x, y)\|}(x, y) \in [-1, 1]^2$ .

Par récurrence, on suppose que pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$  on ait  $\|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2^n}$ .

Alors  $\frac{2^n}{\|(x, y)\|} f(x, y) \in [-1, 1]^2$  donc  $f(\frac{2^n}{\|(x, y)\|} f^n(x, y)) \leq \frac{1}{2}$  donc  $\|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2^{n+1}}$ .

Ainsi,  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2^n}$ .

Par encadrement, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(x, y)\| = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x, y) = 0$ .

ii) La boule unité  $C = [-1, 1]^2$  est compacte et  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  est continue donc elle atteint un maximum en norme sur  $C$ , atteint en  $(x_0, y_0)$ .

Comme  $f(C) \subset ]-1, 1[^2$ ,  $M = \|(x_0, y_0)\| < 1$ .

Ainsi,  $f(C) \subset [-M, M]^2$  et on se retrouve dans un cas similaire à la question précédente :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{M^n}$ .

Par encadrement, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(x, y)\| = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x, y) = 0$ .

iii) On cherche à montrer que la suite  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si  $-1$  n'est pas valeur propre de  $f$ .  
On note  $A$  la matrice de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}$ .

Montrons d'abord que les valeurs propres de  $f$  dans  $\mathbb{C}$  sont de module inférieur à 1.

Soit donc  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . Alors  $\exists X \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, AX = \lambda X$ .

Comme  $f(C) \subset C$  et que  $f$  est linéaire,  $(f^n(X))$  est bornée par  $\|X\|$  donc  $(A^n X)$  également.

Donc  $(\lambda^n)$  est bornée, ce qui implique nécessairement que  $|\lambda| \leq 1$ .

On suppose que  $(f^n)$  converge. On appelle  $g$  sa limite.

Si  $f$  admet une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Soit  $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé.

Alors  $f^n(x) = \lambda^n x$  donc  $(\lambda^n)$  converge.

Ainsi,  $\lambda \neq -1$ .

On suppose maintenant que  $-1$  n'est pas valeur propre de  $f$ .

$\chi_f$  est de degré 2 à coefficients réels donc il est soit scindé sur  $\mathbb{R}$  soit scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ , où les deux racines sont conjuguées l'une de l'autre.

1<sup>er</sup> cas :  $\chi_f$  est scindé à racines simples dans  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  de module 1.

On note  $\lambda, \bar{\lambda}$  les racines de  $\chi_f$ .

La suite  $(\lambda_n)$  est contenue dans le compact  $C$  donc admet une sous-suite  $\lambda^{\varphi(n)}$  convergente.

Alors,  $(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$  converge vers 1.

Comme  $A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \sim \text{diag}(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, \bar{\lambda}^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ ,  $(A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$  converge vers  $I_2$ .

Donc  $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$  converge vers Id. Soit  $x \in C \setminus f(C)$ . La suite  $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x))$  converge vers  $x$  et  $C$  est stable par  $f$  donc  $x$  est adhérent à  $f(C)$ .

Pourtant,  $f$  est continue et  $C$  est fermé donc  $f(C)$  l'est également.

C'est absurde donc ce cas est impossible.

2<sup>e</sup> cas :  $\chi_f$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , de racines de module strictement inférieur à 1.

Alors  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  :  $A = PDP^{-1}$  où  $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$  et  $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$  et comme  $|\lambda|, |\mu| < 1$ , les suites  $(\lambda^n)$  et  $(\mu^n)$  convergent et la suite  $(D^n)$  également.

Le produit matriciel étant continu,  $(A^n)$  converge et  $(f^n)$  aussi.

C'est absurde, donc ce cas n'est pas possible.

3<sup>e</sup> cas :  $\chi_f$  admet 1 et  $\lambda \in ]-1, 1[$  comme racines.

Alors  $(\lambda^n)$  converge vers 0 et  $f$  est diagonalisable donc  $A \sim \text{diag}(1, \lambda)$ .

Donc  $(A^n)$  converge vers  $B \sim \text{diag}(1, 0)$  et  $(f^n)$  converge vers  $g$  de matrice canoniquement associée  $B$ .

4<sup>e</sup> cas :  $\chi_f$  admet une racine double, nécessairement réelle, qu'on note  $\lambda$ .

Alors,  $\lambda \in ]-1, 1]$ . On trigonalise  $f$  pour obtenir  $f = \lambda \text{Id} + v$  où  $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$  nilpotente.

$\lambda$  ne peut être égal à 1, sinon  $f = \text{Id}$  et  $f(C) = C$ .

Comme Id et  $v$  commutent, on a  $f^n = \lambda^n \text{Id} + n\lambda^{n-1}v$  et  $f$  converge vers 0.

Dans tous les cas,  $(f^n)$  converge.