

Corrigés RMS 2019

Exercice 228 :

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\bar{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$ la classe de conjugaison de x . On dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \bar{x}$.

a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.

b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tel que $g^2 = x$. Montrer que $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G .

a) Soit C une classe de conjugaison et $x \in C$ ambivalent. On a $x^{-1} \in \bar{x} = C$ donc $C = \overline{x^{-1}}$. Soit $y \in \bar{x}$. Il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$. Or on a aussi $C = \bar{y}$ donc $y^{-1} \in \bar{y}$, ce qui conclut.

b) Notons Γ l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{l \in G} \delta(l^2 = x) \right)^2 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = x) \delta(h^2 = x) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = h^2) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(u,h) \in G^2} \delta(huh^{-1}u = h^2) \text{ car } u \rightarrow hu \text{ est une bijection} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) \end{aligned}$$

Or $\forall u \in \gamma$ considérons la fonction $\Phi_u : h \in G \rightarrow hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \bar{u}$. Elle est surjective.

On a alors :

$$\sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant, $\Phi_u^{-1}(\{u\})$ et $\Phi_x^{-1}(\{x\})$ sont en bijection pour tout $x \in \gamma$.

En effet, si $x \in \gamma$ alors il existe $g \in G$ tel que $x = gu^{-1}g^{-1}$ et comme u est ambivalent il existe $h \in G$ tel que $u = hu^{-1}h^{-1}$.

x est aussi ambivalent donc il existe $k \in G$ tel que $x^{-1} = kxk^{-1}$.

On a alors en regroupant $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$.

On peut donc définir $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \rightarrow hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{x\})$. C'est alors clairement une bijection.

Finalement, on a :

$$\sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |\gamma|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est G .)

$$\text{D'où } \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 \text{ est le nombre de classes de conjugaison de } G.$$

Exercice 237 :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

- a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
 b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
 c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j \right) \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k^{n-2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n - k$ du polynôme P donc appartient à \mathbb{Z} .

Finalement,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geq d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^d \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \llbracket -d, d \rrbracket$.

Comme $\llbracket -d, d \rrbracket^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $f(n+k) = f(n'+k)$.

Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $(n' - n)$ -périodique

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r) \frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^d \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^d (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d - f(r) + \frac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x}$$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$

Exercice 251 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C \mid R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\text{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\text{Re}(iC)(A) = 0$

Or C est unitaire donc $\text{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).

Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\text{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C , ce qui est absurde.

Ainsi, C est réel et $R \mid C$.

Finalement,

$$R = C$$