Corrigés RMS 2019

Exercice 237 :

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^{d}(X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$
$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i\right)\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant d} \lambda_i \lambda_j\right)\left(\sum_{k=1}^{d} \lambda_k^{n-2}\right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant i \neq j \neq k \leqslant d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\
&= \cdots \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k}\right)\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n - k$ du polynôme P donc appartient à $\mathbb{Z}$.
Finalement,

$$\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geqslant d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^{d}\left((-1)^{k+1} f(n-k)\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \prod_{j=1}^{k} \lambda_{i_j}\right)\right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) \in [\![-d, d]\!]$.
Comme $[\![-d, d]\!]^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in [\![0, d-1]\!], f(n+k) = f(n'+k)$.
Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

$$\text{la suite } (f(n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est } (n'-n)\text{-périodique}$$

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(mr) = f(r)$
On pose $S(x) = \sum_{0}^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r)\frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{d} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d}\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^{d} \frac{1}{1-\lambda_i^r x} \end{aligned}$$

Donc $d - f(r) + \dfrac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^{d} \dfrac{1}{1-\lambda_i^r x}$

$$\text{Par unicité de la DES, tous les } \lambda_i \text{ sont nuls ou tels que } \lambda_i^{-r} = 1$$

Exercice 251 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C|R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\mathrm{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\mathrm{Re}(iC)(A) = 0$
Or C est unitaire donc $\mathrm{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).
Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\mathrm{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C, ce qui est absurde.
Ainsi, C est réel et $R|C$.

Finalement,

$$R = C$$