Exercice 228 :

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\overline{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$ la classe de conjugaison de x. On dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \overline{x}$.
a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.
b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tel que $g^2 = x$. Montrer que $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G.

a) Soit C une classe de conjugaison et $x \in C$ ambivalent. On a $x^{-1} \in \overline{x} = C$ donc $C = \overline{x^{-1}}$. Soit $y \in \overline{x}$. Il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$. Or on a aussi $C = \overline{y}$ donc $y^{-1} \in \overline{y}$, ce qui conclut.

b) Notons Γ l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_{l\in G}\delta(l^2=x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\left(\sum_{(l,h)\in G^2}\delta(l^2=x)\delta(h^2=x)\right) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{(l,h)\in G^2}\delta(l^2=h^2) \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{(u,h)\in G^2}\delta(huhu=h^2) \text{ car } u \to hu \text{ est une bijection} \\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{u\in\gamma}\sum_{h\in G}\delta(u=hu^{-1}h^{-1})
\end{aligned}$$

Or $\forall u \in \gamma$ considérons la fonction $\Phi_u : h \in G \to hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \overline{u}$. Elle est surjective.
On a alors:

$$\sum_{u\in\gamma}\sum_{h\in G}\delta(u=hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u\in\gamma}|\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant, $\Phi_u^{-1}(\{u\})$ et $\Phi_x^{-1}(\{u\})$ sont en bijection pour tout $x \in \gamma$.
En effet, si $x \in \gamma$ alors il existe $g \in G$ tel que $x = gu^{-1}g^{-1}$ et comme u est ambivalent il existe $h \in G$ tel que $u = hu^{-1}h^{-1}$.
x est aussi ambivalent donc il existe $k \in G$ tel que $x^{-1} = kxk^{-1}$.
On a alors en regroupant $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$.
On peut donc définir $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \to hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{u\})$. C'est alors clairement une bijection.
Finalement, on a :

$$\sum_{u\in\gamma}|\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r\in\gamma}|\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |G|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est G.)

$$\text{D'où } \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho(x)^2 \text{ est le nombre de classes de conjugaison de } G.$$