

Corrigés RMS 2019

Exercice 228 :

Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\bar{x} = \{gxg^{-1}/g \in G\}$ la classe de conjugaison de x . On dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \bar{x}$.

a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent alors tous ses éléments le sont.

b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tel que $g^2 = x$. Montrer que $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G .

a) Soit C une classe de conjugaison et $x \in C$ ambivalent. On a $x^{-1} \in \bar{x} = C$ donc $C = \overline{x^{-1}}$. Soit $y \in \bar{x}$. Il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$. Alors $y^{-1} = gx^{-1}g^{-1} \in \overline{x^{-1}} = C$. Or on a aussi $C = \bar{y}$ donc $y^{-1} \in \bar{y}$, ce qui conclut.

b) Notons Γ l'ensemble des classes ambivalentes. Par le calcul, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{l \in G} \delta(l^2 = x) \right)^2 \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \left(\sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = x) \delta(h^2 = x) \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(l,h) \in G^2} \delta(l^2 = h^2) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{(u,h) \in G^2} \delta(huh^{-1}u = h^2) \text{ car } u \rightarrow hu \text{ est une bijection} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{\gamma \in \Gamma} \sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) \end{aligned}$$

Or $\forall u \in \gamma$ considérons la fonction $\Phi_u : h \in G \rightarrow hu^{-1}h^{-1} \in \gamma = \bar{u}$. Elle est surjective.

On a alors :

$$\sum_{u \in \gamma} \sum_{h \in G} \delta(u = hu^{-1}h^{-1}) = \sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})|$$

Cependant, $\Phi_u^{-1}(\{u\})$ et $\Phi_x^{-1}(\{x\})$ sont en bijection pour tout $x \in \gamma$.

En effet, si $x \in \gamma$ alors il existe $g \in G$ tel que $x = gu^{-1}g^{-1}$ et comme u est ambivalent il existe $h \in G$ tel que $u = hu^{-1}h^{-1}$.

x est aussi ambivalent donc il existe $k \in G$ tel que $x^{-1} = kxk^{-1}$.

On a alors en regroupant $u = (hg^{-1}k^{-1})x^{-1}(hg^{-1}k^{-1})^{-1}$.

On peut donc définir $f : h \in \Phi_u^{-1}(\{u\}) \rightarrow hg^{-1}k^{-1} \in \Phi_x^{-1}(\{x\})$. C'est alors clairement une bijection.

Finalement, on a :

$$\sum_{u \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{u\})| = \sum_{r \in \gamma} |\Phi_u^{-1}(\{r\})| = |\gamma|$$

(La dernière somme est le cardinal de l'ensemble des antécédents des images qui est G .)

$$\text{D'où } \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2 \text{ est le nombre de classes de conjugaison de } G.$$

Exercice 235 :

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P .

- a) Montrer que P est à racines simples.
 b) Montrer que les racines de P sont alignées.

Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que $P''|P$.

- a) Montrer que P est à racines simples.

Écrivons P sous la forme : $P = \lambda \prod_{i=1}^p (X - a_i) \prod_{i=1}^q (X - b_i)^{m_i}$ avec $p \geq 1$ et les $m_i \geq 2$ et les a_i, b_i distincts.

L'objectif est de montrer $q = 0$.

Par hypothèse, P'' s'écrit $P'' = Q \prod_{i=1}^q (X - b_i)^{m_i-2}$ avec $Q = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$.

On note n le degré de P et en regardant les degrés on a : $n - 2 = \deg Q + \sum_{i=1}^q (m_i - 2) = p + \sum_{i=1}^q (m_i) - 2$ d'où $2 = p - \deg Q + 2q$ avec $p \geq \deg Q$. Ainsi $q = 0$ ou $q = 1$. Par l'absurde supposons $q = 1$.

On pose $T = \prod_{i=1}^p (X - a_i)$.

On a $T'' = \lambda n(n-1)T(X - b_1)^{m_1-2} = \lambda(X - b_1)^{m_1-2}((X - b_1)^2 T'' + 2m_1(X - b_1)T' + m_1(m_1 - 1)T)$

En divisant par $(X - b_1)^{m_1-2}$ et en évaluant en b_1 , on a $n(n-1)T(b_1) = m_1(m_1 - 1)T(b_1)$. Or $T(b_1) \neq 0$ et $n > m_1$ car $p > 0$.

C'est absurde donc $q = 0$ et P est à racines simples.

- b) Montrer que les racines de P sont alignées.

On rappelle le théorème de Gauss-Lucas : Si $P \in \mathbb{C}[X]$ alors les racines de P' sont des barycentres à coefficients strictement positifs de celles de P .

D'après la question précédente, P admet n racines distinctes a_1, a_2, \dots, a_n et P'' en a $n - 2$ parmi celles ci. Les racines de P forment un polygone G dont on note, quitte à renuméroter, a_1, \dots, a_s les sommets. Par l'absurde on suppose $s \geq 3$, c'est-à-dire que G n'est pas un segment.

Par théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans l'intérieur de G et celles de P'' aussi. Or au moins une des racines de P'' n'est pas dans l'intérieur de G puisque une d'entre elle est un sommet ($k \geq 3$), ce qui est absurde.

Finalement $k = 2$ (deux racines distinctes) et les racines de P sont alignées.

Exercice 237 :

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

- a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$
 b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.
 c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

- a) On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $n = 0$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^0 = d \in \mathbb{Z}$$

Hérédité : On suppose, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, que $\forall k < n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^k \in \mathbb{Z}$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^d \lambda_i^n &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j^{n-1} \\ &= \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \right) \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-1} \right) - \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \neq j \leq d} \lambda_i \lambda_j \right) \left(\sum_{k=1}^d \lambda_k^{n-2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \neq k \leq d} \lambda_i \lambda_j \lambda_k^{n-2} \\ &= \dots \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \right) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right) \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence, $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^d \lambda_i^{n-k} \in \mathbb{Z}$

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $(-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j}$ est le coefficient de degré $n - k$ du polynôme P donc appartient à \mathbb{Z} .

Finalement,

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i^n \in \mathbb{Z}$$

Cela conclut la récurrence.

b) Pour $n \geq d$, on a :

$$f(n) = \sum_{k=1}^d \left((-1)^{k+1} f(n-k) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \prod_{j=1}^k \lambda_{i_j} \right) \right)$$

Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \in \llbracket -d, d \rrbracket$.

Comme $\llbracket -d, d \rrbracket^d$ est fini, il existe $n < n' \in \mathbb{N}$ tels que $n' - n > d$ et $\forall k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$, $f(n+k) = f(n'+k)$.

Et comme $f(n)$ dépend des d termes précédents,

la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $(n' - n)$ -périodique

c) f est périodique à partir d'un certain rang donc $\exists r \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(nr) = f(r)$

On pose $S(x) = \sum_0^{+\infty} f(nr)x^n$. Alors :

$$\begin{aligned} S(x) &= d + f(r) \frac{x}{1-x} \\ &= d + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^d \lambda_i^{rn} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=1}^d (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_i^r x)^n \\ &= \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x} \end{aligned}$$

Donc $d - f(r) + \frac{f(r)}{1-x} = \sum_{i=1}^d \frac{1}{1 - \lambda_i^r x}$

Par unicité de la DES, tous les λ_i sont nuls ou tels que $\lambda_i^{-r} = 1$

Exercice 249 :

a) Calculer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1 + \omega)$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma \in \mathcal{S}_n$, calculer $\det(I_n + P_\sigma)$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$.

d) Donner une formule simple pour T_n .

a) On note $P = \prod_{\omega \in \mathbb{U}} (-X + \omega) = (-1)^n (X^n - 1)$. Ainsi, $\prod_{\omega \in \mathbb{U}} (1 + \omega) = P(-1) = 1 + (-1)^{n+1}$.

b) σ se décompose en produit de cycles à support disjoint. $\sigma = c_1 \dots c_p$ où $c_i = (a_1^i \dots a_{n_i}^i)$.

Si on permute les éléments de la base canonique, alors P_σ devient semblable à $P_\sigma = \begin{pmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_p \end{pmatrix}$

Il y a p blocs C_i où chaque C_i est de taille n_i on a alors $C_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_{C_i} = \det(XI_{n_i} - C_i) = X^{n_i} - 1 \text{ donc } \chi_{P_\sigma} = \prod_{i=1}^p (X^{n_i} - 1) \text{ et } \det(I_n + P_\sigma) = (-1)^n \cdot \chi_{P_\sigma}(-1) = \prod_{i=1}^p (1 - (-1)^{n_i})$$

c) On pose E_k l'ensemble des σ tel que l'orbite de $n+1$ soit de longueur k .

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{n+1}} \det(I_{n+1} + P_\sigma) \\
&= \sum_k \sum_{\sigma \in E_k} \det(I_{n+1} + P_\sigma) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S_{n+1-k}} (1 - (-1)^k) \frac{n!}{(n+1-k)!} \det(I_{n+1-k} + P_\sigma)
\end{aligned}$$

Donc $|E_k| = \frac{n!}{(n+1-k)!} |S_{n+1-k}|$ donc $\binom{n}{k-1} (k-1)! (n+1-k)! = \frac{n!}{(n+1-k)!} (n+1-k)!$

Donc $n! = \frac{n!}{(n+1-k)!} (n+1-k)!$.

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} (1 - (-1)^k) \frac{n!}{(n+1-k)!} T_{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^n (1 + (-1)^{n-k}) \frac{n!}{k!} T_k \\
&= 2T_n + n(n-1) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + (-1)^{n-2-k}) \frac{(n-2)!}{k!} T_k \\
&= 2T_n + n(n-1) T_{n-1}
\end{aligned}$$

d) Déjà, on a $T_0 = 0$ et $T_1 = 2$.

On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n$.

Alors,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{T_n}{(n-1)!} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_{n+1}}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2T_n + n(n-1)T_{n-1}}{n!} x^n + 2 \\
&= 2 + 2f(x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{T_{n-1}}{(n-2)!} x^n \\
&= \frac{2}{1-x^2} f(x) + \frac{2}{1-x^2}
\end{aligned}$$

Donc f vérifie l'équation différentielle

$$y' = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) y + \frac{2}{1-x^2}$$

Solution générale : $y_0(x) = \lambda \exp\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) = \lambda \frac{1+x}{1-x}$.

Méthode de variation de la constante : $\lambda'(x) = \frac{1-x}{1+x} \frac{2}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{(1+x)^2}$ donc on prend $\lambda(x) = -\frac{2}{1+x}$

et $y_1(x) = -\frac{2}{1+x} \frac{1+x}{1-x} = -\frac{2}{1-x}$

Ainsi, $f(x) = \lambda \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{1-x}$

Comme de plus $f(0) = 0 = \lambda - 2$, on a $f(x) = \frac{2+2x-2}{1-x} = \frac{2x}{1-x} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n!}{n!} x^n$

Finalement, $T_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_n = 2n!$

Exercice 251 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n[\mathbb{R}]$. Comparer ses polynômes minimaux dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $R \in \mathbb{R}[X]$ et $C \in \mathbb{C}[X]$ les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ respectivement.

On a bien sur $C \mid R$.

$C(A) = 0$ donc $iC(A) = 0$ donc $\operatorname{Re}(iC(A)) = 0$ donc $\operatorname{Re}(iC)(A) = 0$

Or C est unitaire donc $\operatorname{Re}(iC)$ est de degré strictement inférieur à C (le coefficient de plus haut degré est imaginaire pur).

Ainsi, si C n'est pas à coefficients réels, $\operatorname{Re}(iC)$ est un polynôme non-nul, annulant A et de degré strictement inférieur à celui de C , ce qui est absurde.

Ainsi, C est réel et $R \mid C$.

Finalement,

$$R = C$$

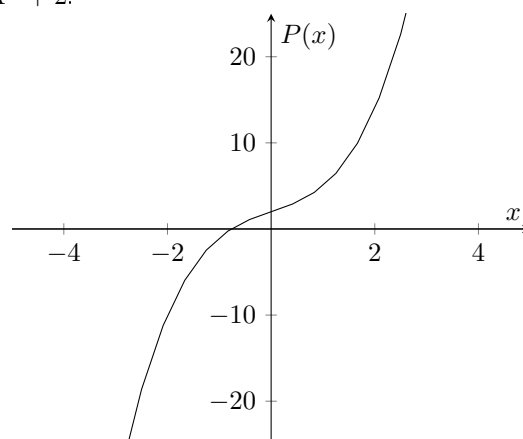
Exercice 254 :

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tel qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$.

Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: On note $P = X^3 + 2X + 2$. On obtient $P' = 3X^2 + 2$.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P'(x)$		+	
$P(x)$	$-\infty$	$\nearrow 0$	$+\infty$



Ainsi, par théorème de la bijection, P n'admet qu'une seule racine réel α . On note β et $\bar{\beta}$ ses racines complexes conjuguées.

Pour $n < 3$, il n'existe pas de matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admettant P comme polynôme minimal (Théorème de Caley-Hamilton).

Pour $n = 3$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_A = P$.

P est un polynôme annulateur de A (théorème de Caley-Hamilton), et P est scindé à racines simples donc P est le polynôme minimal de A .

Pour $n > 3$, la matrice $B = \begin{pmatrix} \alpha I_{n-3} & \\ & A \end{pmatrix}$ admet comme polynôme caractéristique $\chi_B = (X - \alpha)^{n-3} P$.

P est un polynôme annulateur de B et tout polynôme annulateur de B divise P donc P est le polynôme minimal de B .

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$: On suppose par l'absurde que $\alpha \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ t.q. $p \wedge q = 1$.

$P(\alpha) = 0 \implies \left(\frac{p}{q}\right)^3 + 2 \cdot \frac{p}{q} + 2 = 0 \implies p^3 + 2pq^2 + 2q^3 = 0$ donc par théorème de Gauss, $p|2$ et $q|2$ donc $\alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1, 2, -\frac{1}{2}, -1, -2, \right\}$ Absurde. Donc $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et P , de degré 3, est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Pour $n \in 3\mathbb{N}$, la matrice $C = \begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ admet bien comme polynôme minimal P .

Pour $n \notin 3\mathbb{N}$, par l'absurde on suppose qu'il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ ayant P comme polynôme minimal.

χ_C et P ont même racines, donc $\chi_C = (X - \alpha)^p ((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^q$ avec $p + 2q = n$ donc $p \neq q$ car $n \notin 3\mathbb{N}$.

- Si $p > q$, $\chi_C = (X - \alpha)^{p-q} P^q$ donc $(X - \alpha)^{p-q} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $p - q - 1$ de $(X - \alpha)^{p-q}$ est $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Absurde.
- Si $q > p$, $\chi_C = ((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p} P^p$ donc $((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p} \in \mathbb{Q}[X]$. Or le coefficient de degré $q - p - 1$ de $((X - \beta)(X - \bar{\beta}))^{q-p}$ est $2\operatorname{Re}(\beta)$. Par relation coefficient racines sur P , $\alpha + 2\operatorname{Re}(\beta) = 0$ donc $2\operatorname{Re}(\beta) \notin \mathbb{Q}$. Absurde.

Exercice 255 :

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. A quelle condition M admet-elle une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

- Si $\chi_M = (X - a)(X - b)$ et M diagonalisable, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

Si $a = b$ alors $N^2 - aI_2 = 0$ et sinon $(N^2 - aI_2)(N^2 - bI_2) = 0$.

Donc N est annulée par un polynôme scindé à racines simples dans \mathbb{C} donc N est diagonalisable dans \mathbb{C} de valeurs propres α et β .

Tout vecteur propre de N est vecteur propre de M donc en notant E_M, F_M, E_N et F_N les sous-espaces propres respectifs de M et N ,

on a $E_N \subset E_M$ et $F_N \subset F_M$. Comme tous ces sous-espaces sont de dimension 1, ces inclusions sont des égalités.

Or M est diagonalisable dans \mathbb{R} donc admet au moins un vecteur propre réel pour chaque valeur propre. Donc il en est de même de N .

En prenant ces vecteurs propres, on diagonalise simultanément M et N dans \mathbb{R} .

On note P la matrice de passage qui est réelle.

On a $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ donc α et β sont réels.

De plus, $\alpha^2 = a$ et $\beta^2 = b$.

Donc $a, b \geq 0$.

Synthèse : On suppose que $a, b \geq 0$.

On diagonalise M dans \mathbb{R} et on note P la matrice de passage.

Alors en posant $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & \sqrt{b} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.

- Si $\chi_M = (X - a)^2$, avec $a \in \mathbb{R}$ et M non diagonalisable.

Analyse : On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$.

Comme précédemment, il existe un vecteur propre de N qui soit réel (on prend le sous-espace propre de A associé à a qui est de dimension 1).

En prenant un deuxième vecteur réel libre avec le premier, et en notant P la matrice de passage associée (qui est réelle), on a $\begin{pmatrix} a & y \\ 0 & a \end{pmatrix} = PMP^{-1}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & x \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = PNP^{-1}$ où $y \in \mathbb{R}$ et $x, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Donc $x, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ car N est réelle.

De plus, $\alpha^2 = a$, $\beta^2 = a$ et $2\alpha x = y$.

Donc $a \geq 0$.

Synthèse : On suppose que $a \geq 0$.

On trigonalise M dans \mathbb{R} et on note P la matrice de passage.

Alors en posant $N = P^{-1} \begin{pmatrix} \sqrt{a} & \frac{y}{2\sqrt{a}} \\ 0 & \sqrt{a} \end{pmatrix} P$, on a $N^2 = M$.

On remarquera que de cette manière, on peut traiter aussi le cas M diagonalisable. Ce cas a été traité à part pour plus de clarté.

- Enfin, si $\chi_M = (X - z)(X - \bar{z})$, avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on note $z = re^{i\theta}$.

On pose $\alpha = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Si $\alpha + \bar{\alpha} = 0$, alors $\alpha \in i\mathbb{R}$ donc $z = \alpha^2 \in \mathbb{R}$. Absurde. Donc $\alpha + \bar{\alpha} \neq 0$.

On pose $N = \frac{1}{\alpha + \bar{\alpha}}(M + \alpha\bar{\alpha}I_2) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a $N^2 - M = \frac{1}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 + (2r - 4r \cos^2(\frac{\theta}{2}))M)$.

Donc $N^2 - M = \frac{1}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}(M^2 + r^2I_2 - 2r \cos(\theta)M) = \frac{\chi_M(M)}{4r \cos^2(\frac{\theta}{2})}$.

Donc $N^2 - M = 0$ par théorème de Cayley-Hamilton et $N^2 = A$.

M admet une racine carrée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $Sp(A) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

Exercice 260 :

Soit E un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

a) Montrer que pour tout $u \in \text{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.

b) Étudier la continuité de $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$

a) Soient $u \in \text{GL}(E)$ et $\mu = \sum_{i=0}^r \mu_i X^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ où $r = \deg \lambda \leq n$ son polynôme minimal.

On a alors $0 = \mu(u) = \sum_{i=0}^r \mu_i u^i$ où $\mu_0 \neq 0$ (sinon μ n'est pas minimal).

Ainsi, $\text{Id} = -\frac{1}{\mu_0} \sum_{i=1}^r \mu_i u^i = u \left(\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i u^i \right)$ où $\lambda_i = -\frac{\mu_{i+1}}{\mu_0}$

Ainsi, en posant $I_u = \sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i X^i$, comme u et $I_u(u)$ commutent, on a $u^{-1} = I_u(u)$

On suppose par l'absurde qu'il existe un autre polynôme $P = \sum_{i=0}^{r-1} \nu_i X^i$ de degré inférieur ou égal à celui de I_u tel que $u^{-1} = P(u)$.

Alors $\text{Id} - \sum_{i=1}^r \nu_{i-1} u^i = 0$ donc un polynôme non nul de degré inférieur à celui du polynôme minimal de u annule

ce dernier. Donc $X - \sum_{i=1}^r \nu_{i-1} u^i = N\lambda$ où $N \in \mathbb{C}$.

Donc I_u et P sont associés. Comme $I_u(u) = u^{-1} = P(u)$, $P = I_u$.

Ainsi, il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$.

De plus, $\deg I_u = r - 1 < n$.

b) On pose la suite $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}(E)^{\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{A_n} = 2 - X$. Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = I_n$ et $I_{I_n} = 1$

L'application $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_n \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ n'est pas continue.

Exercice 273 :

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

\Leftarrow On suppose que M est diagonalisable.

Il existe donc $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonale tels que $M = Q^{-1}DQ$.

Soit $A = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(M)$.

Dans un premier temps, on suppose que $\det PQ$ et $\det Q$ sont de même signe, tous deux positifs par symétrie. Par pivot de Gauss, il existe $T_1, \dots, T_n \in \mathcal{GL}(\mathbb{R})$ telles que

$$P = T_1 \times \dots \times T_n \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \\ & & 0 & \det Q \end{pmatrix} = T_1 \times \dots \times T_n \times B$$

On pose alors $\gamma_1 : t \in [0, 1] \mapsto \prod_{i=1}^n (I_2 + t(T_i - I_2))B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est continue, $\gamma_1(0) = I_2$ et $\gamma_1(1) = P$

$\forall t \in [0, 1], \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \det(I_2 + t(T_i - I_2)) = 1$ et $\det \gamma_1(t) > 0$ donc $\gamma_1(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $\gamma_1([0, 1]) \subset \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

De même, on trouve $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ continue telle que $\gamma_2(0) = PQ$ et $\gamma_2(1) = I_2$.

Ainsi, $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{R})$ est continue et $\gamma(0) = PQ$ et $\gamma(1) = Q$.

Finalement, $\mu : t \in [0, 1] \mapsto \gamma(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathcal{C}(M)$ est continue car $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On a $\mu(0) = PQD(PQ)^{-1} = A$ et $\mu(1) = QPQ^{-1} = M$

Si $\det PQ$ et $\det Q$ sont de signes opposés, $A = (PQ)D(PQ)^{-1} = (PQC)D(PQC)^{-1}$ où $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant vaut -1 .

Comme $\det PQC$ et $\det QC$ sont de même signe, on revient au premier cas.

Ainsi, la classe de similitude de M est connexe par arcs.

\Rightarrow On suppose que la classe de similitude de M est connexe par arcs.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On pose $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M' = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

La fonction $f : (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto a_{12} - a_{21} \in \mathbb{R}$ est continue et $f(M) = -f(M')$.

Comme $\mathcal{C}(M)$ est connexe par arcs, on peut y trouver N telle que $f(N) = 0$, c'est-à-dire que N est symétrique.

Elle est donc diagonalisable.

Comme N et M sont semblables,

M est diagonalisable

Exercice 275 :

Soient $C = [-1, 1]^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Étudier la suite $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ sous les hypothèses suivantes :

- i) $f(C) \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$
- ii) $f(C) \subset]-1, 1[^2$
- iii) $f(C) \subsetneq C$

i) On travaille avec la norme infinie : $\|\cdot\| : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(x, y)$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On a $\|f(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2}$ car $\frac{1}{\|(x, y)\|}(x, y) \in [-1, 1]^2$.

Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$ on ait $\|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2^n}$.

Alors $\frac{2^n}{\|(x, y)\|} f(x, y) \in [-1, 1]^2$ donc $f(\frac{2^n}{\|(x, y)\|} f^n(x, y)) \leq \frac{1}{2}$ donc $\|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2^{n+1}}$.

Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{2^n}$.

Par encadrement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(x, y)\| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x, y) = 0$.

ii) La boule unité $C = [-1, 1]^2$ est compacte et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ est continue donc elle atteint un maximum en norme sur C , atteint en (x_0, y_0) .

Comme $f(C) \subset]-1, 1[^2$, $M = \|(x_0, y_0)\| < 1$.

Ainsi, $f(C) \subset [-M, M]^2$ et on se retrouve dans un cas similaire à la question précédente :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \|f^n(x, y)\| \leq \frac{\|(x, y)\|}{M^n}$.

Par encadrement, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f^n(x, y)\| = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(x, y) = 0$.

iii) On cherche à montrer que la suite $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si -1 n'est pas valeur propre de f . On note A la matrice de f dans la base canonique \mathcal{B} .

Montrons d'abord que les valeurs propres de f dans \mathbb{C} sont de module inférieur à 1.

Soit donc λ une valeur propre de f . Alors $\exists X \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, AX = \lambda X$.

Comme $f(C) \subset C$ et que f est linéaire, $(f^n(X))$ est bornée par $\|X\|$ donc $(A^n X)$ également.

Donc (λ^n) est bornée, ce qui implique nécessairement que $|\lambda| \leq 1$.

On suppose que (f^n) converge. On appelle g sa limite.

Si f admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé.

Alors $f^n(x) = \lambda^n x$ donc (λ^n) converge.

Ainsi, $\lambda \neq -1$.

On suppose maintenant que -1 n'est pas valeur propre de f .

χ_f est de degré 2 à coefficients réels donc il est soit scindé sur \mathbb{R} soit scindé à racines simples sur \mathbb{C}/\mathbb{R} , où les deux racines sont conjuguées l'une de l'autre.

1^{er} cas : χ_f est scindé à racines simples dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de module 1.

On note $\lambda, \bar{\lambda}$ les racines de χ_f .

La suite (λ_n) est contenue dans le compact C donc admet une sous-suite $\lambda^{\varphi(n)}$ convergente.

Alors, $(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers 1.

Comme $A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)} \sim \text{diag}(\lambda^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}, \bar{\lambda}^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$, $(A^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers I_2 .

Donc $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)})$ converge vers Id. Soit $x \in C \setminus f(C)$. La suite $(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x))$ converge vers x et C est stable par f donc x est adhérent à $f(C)$.

Pourtant, f est continue et C est fermé donc $f(C)$ l'est également.

C'est absurde donc ce cas est impossible.

2^e cas : χ_f est scindé à racines simples sur \mathbb{C} , de racines de module strictement inférieur à 1.

Alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda, \mu)$ et $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et comme $|\lambda|, |\mu| < 1$, les suites (λ^n) et (μ^n) convergent et la suite (D^n) également.

Le produit matriciel étant continu, (A^n) converge et (f^n) aussi.

C'est absurde, donc ce cas n'est pas possible.

3^e cas : χ_f admet 1 et $\lambda \in]-1, 1[$ comme racines.

Alors (λ^n) converge vers 0 et f est diagonalisable donc $A \sim \text{diag}(1, \lambda)$.

Donc (A^n) converge vers $B \sim \text{diag}(1, 0)$ et (f^n) converge vers g de matrice canoniquement associée B .

4^e cas : χ_f admet une racine double, nécessairement réelle, qu'on note λ .

Alors, $\lambda \in]-1, 1]$. On trigonalise f pour obtenir $f = \lambda \text{Id} + v$ où $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ nilpotente.

λ ne peut être égal à 1, sinon $f = \text{Id}$ et $f(C) = C$.

Comme Id et v commutent, on a $f^n = \lambda^n \text{Id} + n\lambda^{n-1}v$ et f converge vers 0.

Dans tous les cas, (f^n) converge.