

Modelagem em Espaço de Estados de um Alto-Falante e Rejeição de Perturbações de Sinal de Entrada

Vicente Cunha

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Resumo—O modelo em espaço de estados é descrito para um alto-falante comum. Um controlador foi projetado para a rejeição de perturbações de sinal de entrada **TODO: concluir resumo com detalhes do projeto de controle e resultados**

Palavras-chave—Alto-falante, espaço de estados, rejeição de perturbações

I. INTRODUÇÃO

Alto-falantes são transdutores eletromagnéticos utilizados para a conversão de sinais elétricos em sons [1]. Trata-se de um sistema bem conhecido e de longa data, sendo que o princípio de operação de um transdutor de bobina móvel foi primeiramente descrito por Ernst W. Siemens em patente de 1874 [2]. Um dos primeiros usos relevantes deste tipo de transdutor para emissão de sinais sonoros foi o telefone, em patente de 1876 concedida a Alexander G. Bell [3]. Nos dias atuais, alto-falantes são dispositivos amplamente difundidos, presentes em dispositivos como celulares, televisores e aparelhos auditivos, além de serem fundamentais para concertos musicais e a música contemporânea de forma geral.

Neste trabalho, toma-se um modelo linear em espaço de estados para um alto-falante de radiação direta (i.e. a superfície vibratória do transdutor emite som diretamente ao ar, sem o acoplamento acústico de uma corneta). Este tipo de alto-falante foi concebido inicialmente por Chester W. Rice e Edward W. Kellogg em 1925 [4], sendo considerada a primeira versão dos alto-falantes contemporâneos [5].

Um controlador foi projetado para rejeição de perturbações no sinal de entrada do sistema **TODO: concluir introdução, mais detalhes sobre o projeto de controle.**

II. MODELO DO ALTO-FALANTE

A. Aspectos Construtivos

Fig. 1 apresenta a vista de corte de um alto-falante montado em uma superfície acusticamente defletora, conhecida por seu termo em inglês *baffle*. Uma superfície vibrante conhecida como “diafragma” é conectada fisicamente a uma bobina imersa no campo magnético permanente de um ímã. O diafragma pode ser feito de diversos materiais, desde papel a ligas metálicas, sendo fixado por suspensões em suas extremidades externas e internas.

O comportamento do alto-falante pode ser equacionado tomando-se a análise separada de seus aspectos eletromagnéticos (bobina imersa no campo magnético), mecânicos

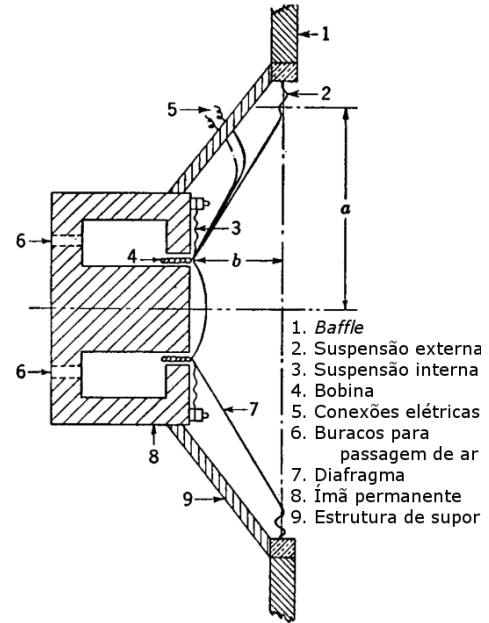


Figura 1. Vista em corte indicando os elementos construtivos de um alto-falante. Fonte: adaptado de [1].

(suspensões e massa do diafragma) e acústicos (impedância de radiação e massa de ar movimentada) [6].

B. Aspectos Eletromagnéticos

O circuito elétrico da Fig. 2 representa a resistência e indutância da bobina do alto-falante (R_b e L_b), uma fonte de sinal com respectiva resistência de saída (v_s e R_s) e uma queda de tensão relacionada à força contra-eletromotriz ($Bl u_d$, onde B é a densidade de campo magnético do ímã permanente em webers por metro quadrado, l é o comprimento da bobina imerso no campo magnético e u_d é a velocidade do diafragma). É prática comum o uso de filtro passivo entre a fonte de sinal e o alto-falante, inserido neste modelo como um par RC (R_f e C_f).

C. Aspectos Mecânicos e Acústicos

Fig. 3 representa um sistema massa-mola análogo ao sistema mecânico de um alto-falante, onde x_d é o deslocamento do diafragma com relação à sua posição de repouso. A força eletromotriz f_{em} é dada pelo produto $\Phi_0 l_b$, onde i_b é a

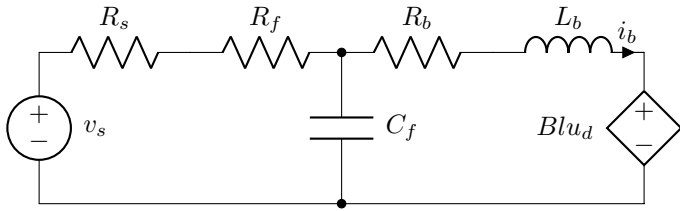


Figura 2. Circuito que modela os aspectos eletromagnéticos do sistema.

corrente na bobina e $\Phi_0 = Bl$. As características de resistência e conformidade mecânica das suspensões do diafragma são modeladas por R_d e C_d , respectivamente. m_d é a massa total do diafragma e da bobina. A impedância generalizada Z representa a carga acústica do alto-falante.

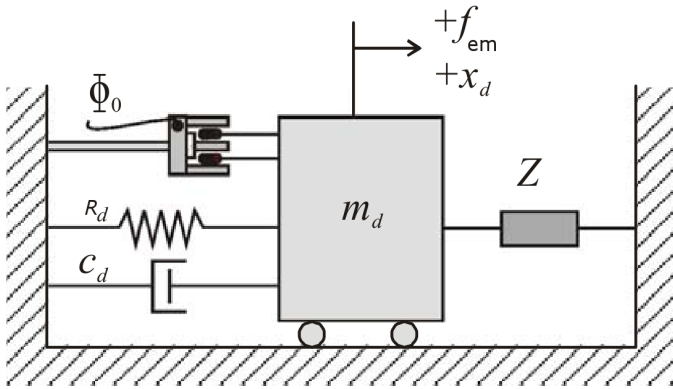


Figura 3. Sistema massa-mola análogo ao sistema mecânico de um alto-falante. Fonte: adaptado de [5].

O circuito elétrico da Fig. 4 é análogo ao sistema da Fig. 3, no qual a velocidade de diafragma u_d é considerada uma tensão elétrica e forças atuantes no sistema são correntes.

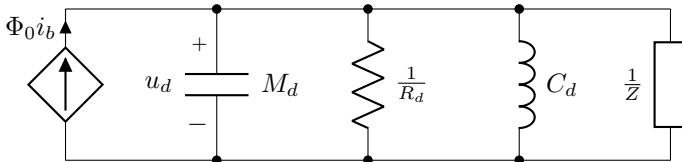


Figura 4. Circuito que modela os aspectos mecânicos e acústicos do sistema, onde forças são representadas por correntes e velocidades por tensões.

D. Modelo Completo

A combinação dos circuitos das Figs. 2 e 4, substituindo as fontes dependentes por um transformador ideal, resulta no circuito da Fig. 5. O lado esquerdo do transformador representa os aspectos eletromagnéticos do sistema, enquanto o lado direito representa os aspectos mecânicos e acústicos. A Fig. 6 apresenta o circuito equivalente, onde as quantidades eletromagnéticas do lado esquerdo foram referenciadas ao lado direito do transformador.

O equivalente dual do circuito da Fig. 6 é apresentado na Fig. 7, obtido ao interpretar-se forças como tensões elétricas e velocidades como correntes. A impedância acústica total Z

pode ser aproximada por um indutor de valor $Z = 5.34a^3\rho_0$, onde a é o raio do diafragma e ρ_0 é a densidade do ar movimentado pelo diafragma, quando as seguintes condições são assumidas: [1]

- O comprimento do *baffle* onde o alto-falante está montado é infinito. Isto significa que variações de pressão na parte dianteira do diafragma não afetam a pressão na parte traseira do diafragma, e vice-versa.
- As frequências assumidas pelo sinal de áudio, ω , são tais que $\omega a/c < 0.5$, onde c é a velocidade do som no meio.
- A parte imaginária (reatância) da impedância acústica é muito maior que sua parte real.

E. Espaço de Estados e Exemplo de Sistema

As equações do modelo de espaço de estados são apresentadas em (1), onde o vetor de estados \mathbf{x} é dado por (2), onde u_d é a velocidade de deslocamento do diafragma, u_f é uma grandeza com dimensão de velocidade relacionada ao capacitor de filtro, f_d é uma força relacionada à conformidade mecânica das suspensões do alto-falante e f_{em} é a força eletromagnética produzida pela corrente na bobina. A saída do sistema, y , é considerada como a velocidade de deslocamento do diafragma u_d .

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}v_s \quad (1)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}$$

$$\mathbf{x} = [u_d \ u_f \ f_d \ f_{em}]^T \quad (2)$$

As equações para derivadas de estados (3), (4), (5) e (6) são obtidas a partir da análise do circuito da Fig. 7. A Tabela I apresenta parâmetros físicos associados ao modelo de um alto-falante comum, tomados de um exemplo contido em [1].

$$\frac{d}{dt}u_d = \frac{1}{M_d + 5.34a^3/\rho_0} (-R_d u_d - f_d + f_{em}) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt}u_f = \frac{1}{C_f \Phi_0^2} \left(\frac{\Phi_0 v_s}{R_s + R_f} - \frac{\Phi_0^2}{R_s + R_f} u_f - f_{em} \right) \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}f_d = \frac{u_d}{C_d} \quad (5)$$

$$\frac{d}{dt}f_{em} = \frac{\Phi_0^2}{L_b} \left(-u_d + u_f - \frac{R_b}{\Phi_0^2} f_{em} \right) \quad (6)$$

Os valores de componentes do filtro passivo (R_f e C_f) foram calculados tendo em mente a restrição utilizada para a aproximação de impedância acústica - a frequência do sinal é tal que $\omega a/c < 0.5$. É sensata a escolha de um filtro com frequência uma oitava abaixo (i.e. metade do valor) da frequência máxima segundo esta restrição, como dado em (7), de modo a evitar que o comportamento da carga acústica do alto-falante não desvie significativamente das aproximações realizadas.

$$\frac{1}{4\pi R_f C_f} \frac{a}{c} = 0.5 \quad (7)$$

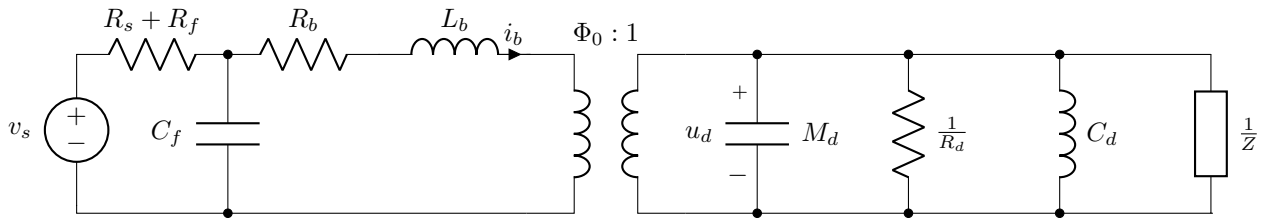


Figura 5. Circuito para o modelo completo de um alto-falante com filtro passivo RC.

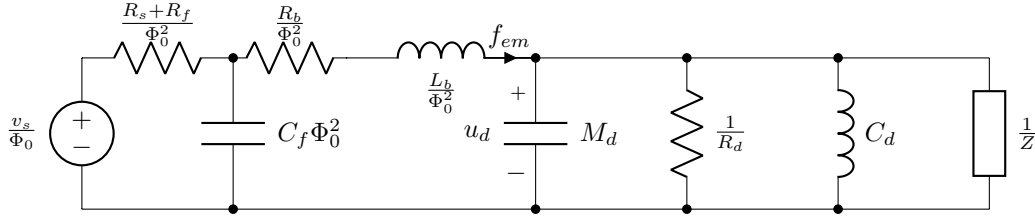


Figura 6. Circuito equivalente, referenciado ao lado mecânico/acústico. Forças são representadas por correntes e velocidades por tensões.

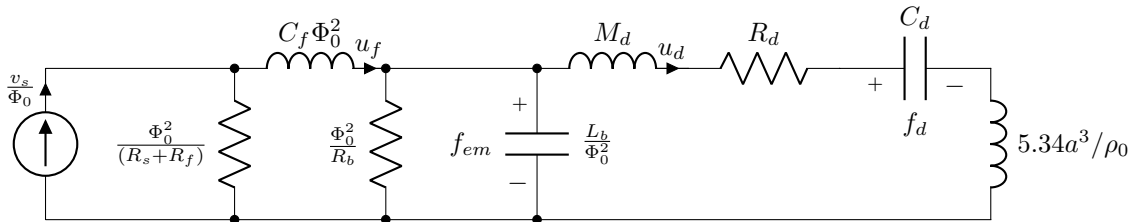


Figura 7. Circuito equivalente dual, onde forças são representadas por tensões e velocidades por correntes.

Tabela I
PARÂMETROS DE EXEMPLO DE UM ALTO-FALANTE COMUM

Parâmetro	Valor
Φ_0	9 Wb/m
L_b	700 μH
R_b	8 ohms
R_s	2 ohms
a	0.13 m
ρ_0	1.18 kg/m ³
c	344.8 m/s
M_d	0.011 kg
R_d	0.5 Ns/m
C_d	179 $\mu m/N$

Determinando um valor de capacitor de filtro $C_f = 100nF$, a resistência de filtro calculada vale aproximadamente $R_f = 600\Omega$. A frequência de corte associada à estes valores é aproximadamente $\omega_c = 2653$ rad/s, ou $f_c = 422.2$ Hz. As matrizes de de espaços de estado A e B de (8) e (9) são

obtidas substituindo os valores de parâmetros da Tabela I e do filtro calculado nas equações (3), (4), (5) e (6).

$$A = \begin{bmatrix} -23.875 & 0 & -47.750 & 47.750 \\ 0 & -16611 & 0 & -123457 \\ 5587 & 0 & 0 & 0 \\ -115714 & 115714 & 0 & 11429 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B = [0 \quad 1846 \quad 0 \quad 0]^T \quad (9)$$

A função de transferência $H(s)$ para as equações de espaço de estados de (1) que relaciona velocidade de deslocamento do diafragma e tensão de entrada pode ser obtida utilizando (10). A função de transferência resultante para as matrizes A e B de (8) e (9) é dada em (11).

$$H(s) = \frac{Y(s)}{V_s(s)} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] (sI - A)^{-1} B \quad (10)$$

$$H(s) = \frac{1.02 \times 10^{10} s}{s^4 + 2.806 \times 10^4 s^3 + 1.448 \times 10^{10} s^2 + 4.449 \times 10^{11} s + 3.862 \times 10^{15}} \quad (11)$$

Os polos e zeros da função de transferência $H(s)$ são dados em (12). Percebe-se que o par de polos p_1 e p_2 apresentam módulo muito maior que o par de polos p_3 e p_4 .

$$\begin{aligned} p_1 &= -14017 + j \times 119520 \\ p_2 &= -14017 - j \times 119520 \\ p_3 &= -15.102 + j \times 516.19 \\ p_4 &= -15.102 - j \times 516.19 \\ z_1 &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

A Fig. 8 mostra o resultado de simulação de regime transitório da velocidade do diafragma u_d quando o sinal de entrada v_s é um degrau unitário. O diagrama de Bode do sistema do alto-falante é apresentado na Fig. 9.

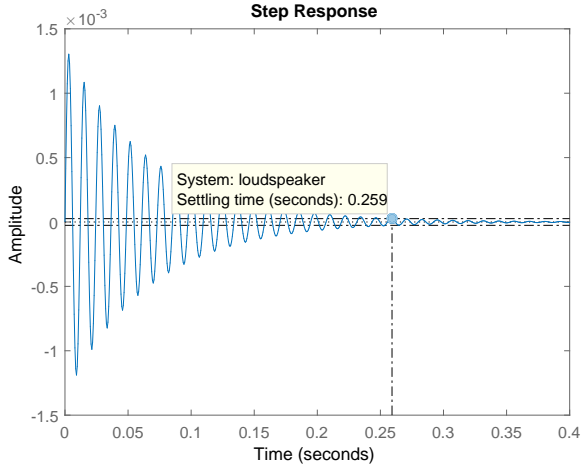


Figura 8. Simulação de regime transitório da saída quando a entrada é um degrau unitário de tensão, com tempo de estabilização indicado.

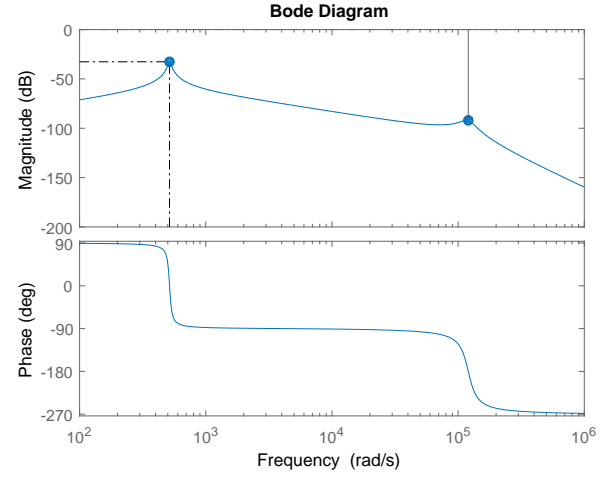


Figura 9. Diagrama de bode do sistema com picos de ressonância indicados.

A matriz P composta pelos autovetores de A , dada em (13), pode ser utilizada de acordo com para obter a matriz diagonal $\bar{A} = PAP^{-1}$, similar a A , dada em (14).

$$P = \begin{bmatrix} -0.0003 & -0.003 & -0.0027 + j \times 0.0916 & -0.0027 - j \times 0.0916 \\ 0.7184 & 0.7184 & -0.0026 + j \times 0.904 & -0.0026 - j \times 0.904 \\ 0 & 0 & 0.9916 & 0.9916 \\ -0.0151 - j \times 0.6955 & -0.0151 + j \times 0.6955 & 0.0007 - j \times 0.0121 & 0.0007 + j \times 0.0121 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -14017 + j \times 119520 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14017 - j \times 119520 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15.102 + j \times 516.19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -15.102 - j \times 516.19 \end{bmatrix} \quad (14)$$

REFERÊNCIAS

- [1] L. Beranek, *Acoustics*, ser. McGraw-Hill electrical and electronic engineering series. McGraw-Hill, 1954.
- [2] E. Siemens, "Improvement in magneto-electric apparatus," Apr. 14 1874, uS Patent 149,797. [Online]. Available: <https://www.google.com/patents/US149797>
- [3] B. Graham, "Improvement in telegraphy," Mar. 7 1876, uS Patent 174,465. [Online]. Available: <https://www.google.com/patents/US174465>
- [4] C. W. Rice and E. W. Kellogg, "Notes on the development of a new type of hornless loud speaker," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. XLIV, pp. 461–480, Jan 1925.
- [5] A. Bright and D. T. U. Ørsted-DTU., *Active Control of Loudspeakers: An Investigation of Practical Applications*, ser. Report: Institut for Akustisk Teknologi. Ørsted DTU, Acoustic Technology, Technical University of Denmark, 2002.
- [6] K. Øyen, "Compensation of loudspeaker nonlinearities - dsp implementation," Master's thesis, Norwegina University of Science and Techonology, 8 2007.