

**Questão 1.** Sejam as matrizes:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T \text{ e } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efetue as seguintes operações:

- a)  $\mathbf{AE}$
- b)  $2\mathbf{A} - \mathbf{E}^T$
- c)  $\mathbf{BE}$
- d)  $(3\mathbf{B})\mathbf{C}$
- e)  $\mathbf{CC}^T$
- f)  $\mathbf{DB}$
- g)  $\mathbf{DD}^T$
- h)  $\mathbf{F}^n = \underbrace{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} \cdots \mathbf{F}}_{n \text{ vezes}}.$

**Questão 2.** Classifique os itens a seguir em *verdadeiro* ou *falso* e forneça uma demonstração para os itens *verdadeiros* ou um contra-exemplo, no caso contrário.

- a)  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T + \mathbf{A}^T.$
- b) Se  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  ou  $\mathbf{B} = \mathbf{0}.$
- c) Se  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ , então  $\mathbf{BA} = \mathbf{0}.$
- d)  $(-\mathbf{A})(-\mathbf{B}) = -(\mathbf{AB}).$
- e) Se  $\mathbf{AA}^T = \mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}$ , então  $\mathbf{A}$  é uma matriz diagonal.
- f) Se o produto  $\mathbf{AA}$  estiver bem definido, então  $\mathbf{A}$  é simétrica.
- g) Em geral, temos  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2.$
- h) Também em geral, temos  $(\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \neq \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2.$

**Questão 3.** Determine o número de inversões das seguintes permutações de  $(1, 2, 3, 4, 5)$ :

- a)  $(4, 5, 3, 1, 2)$
- b)  $(3, 2, 4, 5, 1)$
- c)  $(3, 2, 5, 4, 1)$
- d)  $(5, 4, 3, 2, 4)$

**Questão 4.** Quantas inversões são necessárias para obter a permutação  $(n, n-1, \dots, 2, 1)$  a partir de  $(1, 2, \dots, n-1, n)$ ?

**Questão 5.** Sejam  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  duas matrizes quadradas de ordem  $n$ . Classifique os itens a seguir em *verdadeiro* ou *falso* e apresente uma demonstração que justifique cada uma de suas respostas.

- a)  $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{BA}$ .
- b)  $\det \mathbf{A}^2 = (\det \mathbf{A})^2$ .
- c) Se  $\det \mathbf{A} = 1$ , então  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}$ .

**Questão 6.** Calcule os determinantes das matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{F}$  da Questão 1.

**Questão 7.** Calcule as inversas das matrizes  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{F}$  da Questão 1. O que você poderia concluir sobre a inversa da matriz  $\mathbf{C}$ ? Qual nome é dado a matrizes que se comportam como  $\mathbf{C}$ ?

**Questão 8.** Dada uma matriz  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{4 \times 4}$ , onde:

$$a_{ij} = \begin{cases} i^j & \text{se } i > j, \\ 2^i & \text{se } i = j, \\ j^i & \text{se } i < j, \end{cases}$$

calcule o que se pede:

- a)  $\text{adj } \mathbf{A}$
- b)  $\det \mathbf{A}$
- c)  $\mathbf{A}^{-1}$