Faculdade Paraíso do Ceará
SI004 – Matemática Discreta
Prof. Vicente H. F. Batista

Lista de Exercícios 2A

prazo de entrega até 14 de novembro de 2011

Questão 1. Mostre, por demonstração direta, que a soma de dois inteiros pares também é par. Em seguida, demonstre o mesmo resultado por contradição.

Questão 2. Mostre que a soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3.

Questão 3. Prove ou forneça um contraexemplo para a seguinte proposição: a soma de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

Questão 4. Aplique o primeiro princípio de indução matemática para demonstrar a seguinte identidade:

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \frac{5n(n+1)}{2}.$$

Questão 5. Seja a um número natural, $a \neq 0$ e $a \neq 1$. Então, mostre que:

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

Questão 6. Mostre que $2 + 6 + 18 + \cdots + 2 \cdot 3^{n-1} = 3^n - 1$.

Questão 7. Use a indução matemática para mostrar que $n^2 \geq 2n + 3$, para $n \geq 3$.

Questão 8. Prove que $n^2 < 2^n < n!$, para $n \geq 5$.

Questão 9. Prove que qualquer quantia em selos maior ou igual a 64 centavos pode ser obtida usando-se apenas selos de 5 e 17 centavos.

Questão 10. Em qualquer grupo de k pessoas, $k \geq 1$, cada pessoa cumprimenta, com um aperto de mão, todas as outras pessoas. Encontre uma fórmula para o número de apertos de mão e demonstre-a por indução.

Questão 11. Prove as identidades a seguir sobre os números de Fibonacci, para $n \geq 6$, utilizando o método indicado entre colchetes:

a) $F(n+3) = 2F(n+1) + F(n)$ [demonstração direta]

b) $F(2) + F(4) + \cdots + F(2n) = F(2n+1) - 1$ [indução fraca]

c) $F(n) > \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ [indução forte]

Questão 12. Uma quantia de R$ 500,00 foi investida em uma aplicação que paga juros de 10% a cada ano. Com base nesta informação, faça o que se pede.

a) Escreva a definição recorrente para $P(n)$, a quantia na conta no início do n-ésimo ano.

b) Depois de quantos anos o saldo será maior do que R$ 700,00?

Lista de Exercícios 2A

prazo de entrega até 14 de novembro de 2011

Questão 13. Resolva as relações de recorrência a seguir empregando o método indicado entre colchetes:

a) $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 3 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$ ["expandir, conjecturar e verificar"]

b) $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ n\,T(n-1) + n! & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$ ["expandir, conjecturar e verificar"]

c) $T(n) = \begin{cases} 5 & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + 5 & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$ ["equação característica"]

d) $T(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ T(n-1) + n & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$ ["equação característica"]

Questão 14. Uma pessoa sobe uma escada composta de n degraus com passos que podem alcançar entre 1 e 2 degraus. Forneça a equação de recorrência que representa o número de modos distintos de a pessoa subir a escada. Resolva a equação de recorrência obtida.