

# Filtro FIR: Estudo, Projeto e Simulação

Fabrício Simões

IFBA

28 de Novembro de 2011

## 1 Filtro FIR : Características

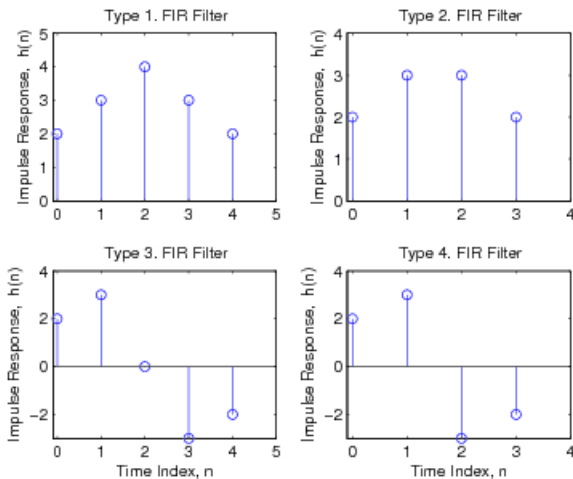
## 2 Projeto de um Filtro FIR

- Método de Projeto Usando Janelas
- Janela de Kaiser
- Projeto de Filtros FIR com Banda de Transição Especificada

# Filtro FIR - Características

- 1 Filtro FIR é sempre estável. Os pólos do filtro FIR estão localizados em  $z=0$ ;
- 2 Filtros FIR são empregados em problemas de filtragem onde exigem resposta de fase linear;
- 3 É possível projetar filtro FIR causal com fase linear se sua resposta ao impulso satisfaz a condição  $h(n) = \pm h(N - n)$  para  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , ou seja,  $h[n]$  é simétrico ou antisimétrico
- 4 Comparando ao filtro IIR, a ordem do filtro FIR para atender as especificações desejadas é maior.

# Tipos de Filtro FIR - Resposta ao Impulso



# Tipos de Filtro FIR

Resposta em Frequência Desejada:

$$H(\omega) = D(\omega)e^{-jM\omega},$$

onde  $D(\omega)$  é magnitude e  $-M\omega$ , a fase.  $M = N/2$  para  $N$  par e ímpar

A depender da ordem  $N$  do filtro (par ou ímpar) e dos coeficientes  $b_m$  (simétrico e anti-simétrico), os filtros FIR podem ser classificados como:

- **Filtro Tipo I:**  $N$  é par e os coeficientes  $b_m$  são simétricos.

$$h[n] = h[N - n]$$

# Tipos de Filtro FIR - Continuação

- **Filtro Tipo II:**  $N$  é ímpar, o atraso  $M = N/2$  não é inteiro e os coeficientes  $b_m$  são simétricos.

$$h[n] = h[N - n]$$

**Zeros:**  $z=-1$ . Qual a influência desse zero na resposta em frequência  $H(\omega)$ ?

- **Filtro Tipo III:**  $N$  é par e os coeficientes  $b_m$  são anti-simétricos.

$$h[n] = -h[N - n]$$

**zeros:**  $z=\pm 1$ . Qual a influência desse zero na resposta em frequência  $H(\omega)$ ?

# Tipos de Filtro FIR - Continuação

- **Filtro Tipo IV:**  $N$  é ímpar,  $M = N/2$  não é inteiro e os coeficientes  $b_m$  são anti-simétricos.

$$h[n] = -h[N - n]$$

zeros:  $z=1$ .

Qual a influência desse zero na resposta em frequência  $H(\omega)$ ?

# Projeto de um Filtro FIR : Considerações

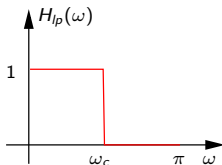
São baseados em uma aproximação direta da resposta em frequência desejada

O método mais simples é chamado de *window method*. Esse método geralmente começa com uma resposta em frequência ideal desejada,  $H_d(\omega)$ .

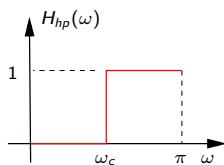


# Resposta em Frequência Desejada.

- 1 Considere as respostas em frequência IDEAIS a seguir:



$$h_{lp}[n] = \frac{\text{sen}((n-M)\omega_c)}{\pi(n-M)}$$



$$h_{hp}[n] = \delta(n-M) - \frac{\text{sen}((n-M)\omega_c)}{\pi(n-M)}$$

- 2  $h_d[n]$  é a resposta ao impulso de um sistema IIR e não-causal.

# Como Obter um Filtro FIR Causal ?

- 1 Podemos obter um filtro FIR e causal  $h[n]$  de ordem  $N$ , usando uma versão truncada da resposta  $h_d[n]$

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & n = 0, 1, \dots, N \\ 0, & n < 0 \text{ e } n > N \end{cases} \quad (1)$$

- 2 O **truncamento** pode ser matematicamente escrito por

$$h[n] = h_d[n]w_r[n], \quad (2)$$

em que  $w_r[n]$  é uma janela retangular.

# Qual o Efeito do Truncamento ?

- 1 Considere a resposta em frequência desejada.

$$H_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n} \quad (3)$$

- 2 Como  $H_d(\omega)$  é uma função periódica e contínua de  $\omega$ , então

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d[n]e^{-j\omega n}$$

É uma representação em Série de *Fourier* de  $H_d(\omega)$

# Fenômeno de *Gibbs*

Problema de convergência não-uniforme da Série de *Fourier*.

A Série de *Fourier* não converge uniformemente para funções com descontinuidade.

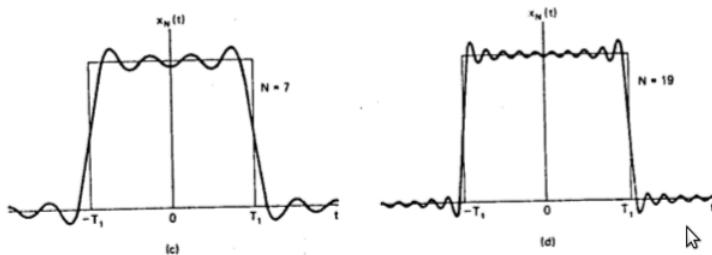


Figura 1 : Ilustração do Fenômeno de *Gibbs* (OPPENHEIM, 1998)

# Resposta em Frequência do Filtro FIR e Causal

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^N h_d[n] e^{-j\omega n}, \quad (4)$$

em que  $h[n] = h_d[n]$  para  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ .

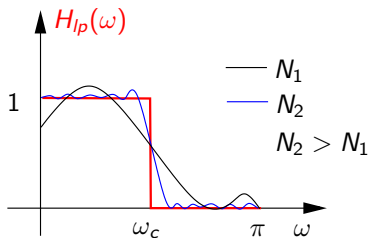
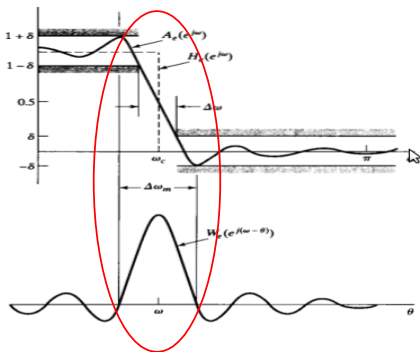


Figura 2 : Efeito do truncamento sobre a resposta em frequência do filtro

# Observando o Efeito do Truncamento a partir da Convolução

$$H(\omega) = \frac{H_d(\omega) \otimes W_r(\omega)}{2\pi}$$

$$|W_r(\omega)| = \frac{\text{sen}(\omega(N+1)/2)}{\text{sen}(\omega/2)}$$



Efeito da largura do lobulo principal

**Figura 3 :** Efeito do truncamento sobre a resposta em frequência do filtro.

# Como Reduzir o Efeito do Truncamento ?

- Para reduzir o efeito do fenômeno de *Gibbs*, deve-se usar janelas com **truncamento menos abrupto**.

Tabela 1 : Janelas : Equações

Tipo de Janela	Equação
Triangular	$w_2[n] = 1 - \frac{2 n-N/2 }{N}$
Hamming	$w_3[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/N)$
Blackman	$w_4[n] = 0,42 - 0,5 \cos(2\pi n/N) + 0,08 \cos(4\pi n/N)$

# Características Desejadas

- Lóbulo principal estreito: A largura do lóbulo principal afeta a largura da banda de transição;
- Intensidade dos lóbulos laterais: Quanto maior, maior é a intensidade dos *ripples* na bandas de passagem e de rejeição.



# Comparação entre as Janelas

Tabela 2 : Janelas : Comparação

Tipo de Janela	Amplitude (dB) (lóculo lateral)	Largura Aproximada (lóculo principal)
Retangular	-13	$4\pi/(M + 1)$
Triangular	-25	$8\pi/M$
Hamming	-41	$8\pi/M$
Blackman	-57	$12\pi/M$

# Exemplo de Projeto

- Considere o sinal  $x(t) = \cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 1500t)$ .  
Projete um filtro passa-baixa de **ordem  $N=4$**  para eliminar a frequência de 1,5kHz.
- Considerando a frequência máxima igual a 1500Hz, adotou-se  $f_a = 3\text{kHz}$  (tempo de amostragem  $T = 0,33\text{ms}$ ).
- As frequências devem ser normalizadas no intervalo  $\omega \sim [-\pi, \pi]$ .

# Exemplo de Projeto

## 1 Frequências normalizadas:

- $2\pi 1000 \Rightarrow 2,09 \text{ rad}$
- $2\pi 1500 \Rightarrow \pi \text{ rad}$
- $\omega_c = 2,61 \text{ rad}$

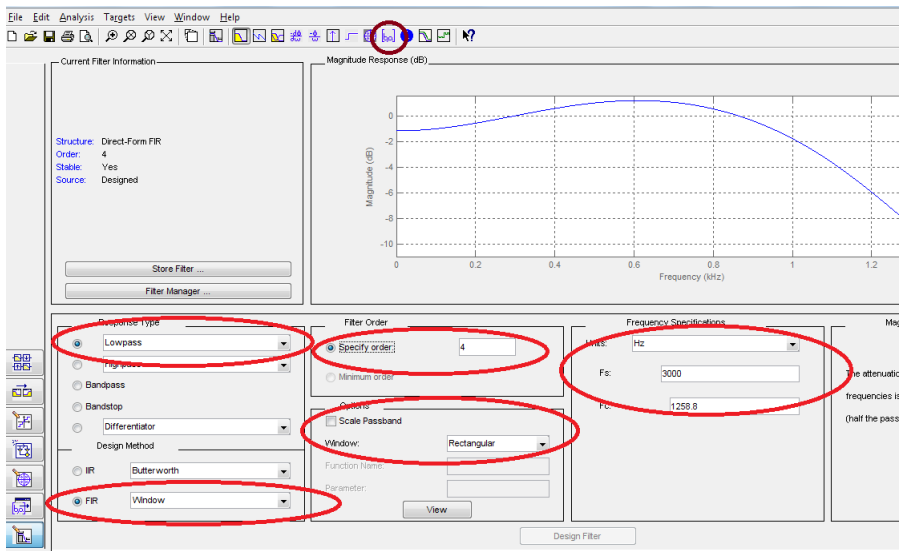
## 2 Resposta ao impulso do filtro

$$h[n] = h_d[n] = \frac{\text{sen}((n-2)2,61)}{\pi(n-2)} \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots, 4$$

## 3 Equação de Diferenças :

$$\begin{aligned} y[n] = & -0,14(x[n] + x[n-4]) + 0,16(x[n-1] \\ & + x[n-3]) + 0,83x[n-2] \end{aligned} \quad (5)$$

# Usando o Fdatool - Matlab



# Usando a Janela de Hamming

- Aplicando a janela de *Hamming*.

$$w_h[n] = 0,54 - 0,46 \cos(2\pi n/4)$$

$$h_h[n] = h[n]w_h[n] \text{ para } n = 0, 1, 2, 3, 4$$

- Equação de Diferenças

$$\begin{aligned} y(n) &= -0,011(x[n] + x[n-4]) + 0,087(x[n-1] \\ &+ x[n-3]) + 0,83x[n-2] \end{aligned} \quad (6)$$

# Resposta em Frequência dos Filtros

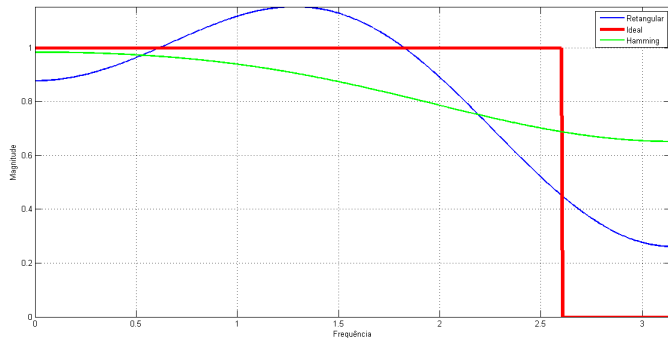


Figura 4 : Resposta em frequência usando janelas retangular e de *Hamming*.

# Janela de Kaiser

- Diferentemente dos métodos anteriores, usando a janela kaiser é possível especificar os parâmetros do filtro. Não existe tentativa e erro;
- A equação da janela para  $n = 0, 1, 2, \dots, N$  é dada por

$$w_5[n] = \frac{J_0(0,5N\beta\sqrt{(0,5N)^2 - (n - 0,5N)^2})}{J_0(0,5N\beta)}$$

em que  $\beta$  controla a relação entre a largura do lóbulo principal e a intensidade dos lóbulos laterais.

$$\beta = \begin{cases} 0,1102(R_s - 8,7), & 50 < R_s \\ 0,5842(R_s - 21)^{0,4} + 0,07886(R_s - 21), & 21 \leq R_s \leq 50 \\ 0, & R_s < 21 \end{cases}$$

# Equações de Projeto do Filtro Usando Janela de Kaiser

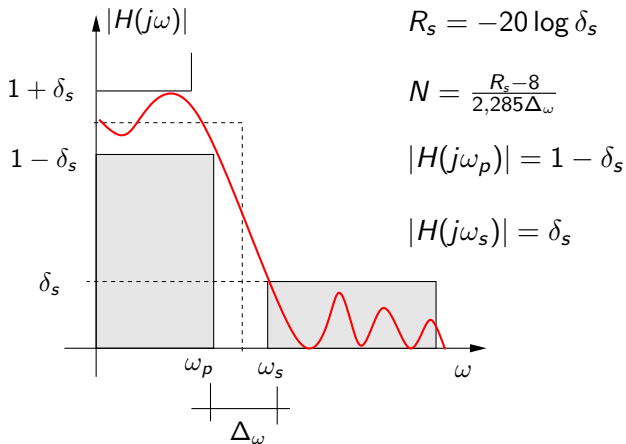


Figura 5 : Equações de Projeto e Gabarito do Filtro Passa-Baixa.



# Exemplo de Projeto de um Filtro Passa-Baixa

1 Exemplo 7.8 - Oppenheim. Projeto de um filtro FIR passa-baixa com as especificações a seguir :

- $\omega_p = 0,4\pi$ ;
- $\omega_s = 0,6\pi$
- $\delta_s = 0,001$

2 Definição dos parâmetros da janela de Kaiser.

$$\Delta_\omega = \omega_s - \omega_p = 0,2\pi$$

$$R_s = -20\log(\delta_s) = 60$$

3 Frequência de corte do filtro passa-baixa ideal.

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0,5\pi$$

# Exemplo de Projeto : Continuação

4 Parâmetros  $\beta$  e  $N$  da janela de Kaiser.

$$\beta = 5,653 \quad N = 37$$

5 Determinando  $h[n]$ .

$$h[n] = \frac{\text{sen}((n - M)0,5\pi)}{\pi(n - M)} \frac{J_0(0,5N\beta\sqrt{(0,5N)^2 - (n - 0,5N)^2})}{J_0(0,5N\beta)}$$

# A Janela de Kaiser e o RESTO

Tabela 3 : Obtendo outras janelas usando a de Kaiser

Tipo de Janela	$R_s = -20 \log(\delta_s)(dB)$	$\beta$	$\Delta_\omega$
Retangular	-21	0	$1,81 \pi/M$
Triangular	-25	1,33	$2,37 \pi/M$
Hamming	-53	4,86	$6,27 \pi/M$
Blackman	-74	7,04	$9,19 \pi/M$

# Projeto de um Filtro Passa-Alta Usando Janela de Kaiser

- ❶ Exemplo 7.9 - Oppenheim. Resposta em frequência do filtro passa-alta ideal

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_c \\ e^{-j\omega N/2}, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

- ❷ Resposta ao impulso de um filtro passa-alta ideal

$$h_{hp}[n] = \frac{\text{sen}(\pi(n - M/2))}{\pi(n - M/2)} - \frac{\text{sen}(\omega_c(n - M/2))}{\pi(n - M/2)}$$

# Gabarito de Projeto do Filtro Passa-Alta

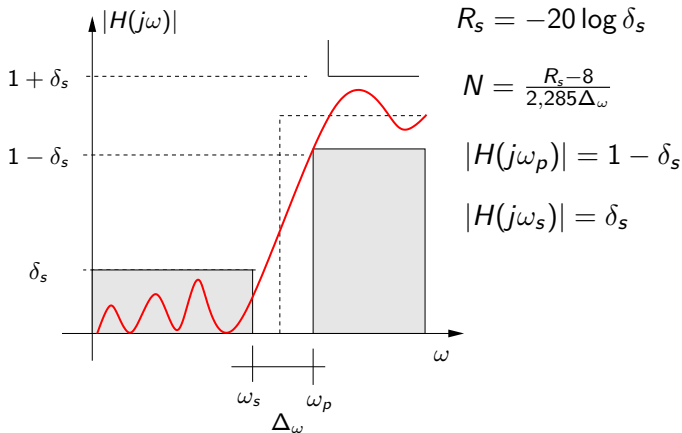


Figura 6 : Equações de Projeto e Gabarito do Filtro Passa-Baixa.

# Continuação

## 1 Especificações do Filtro:

$$|H(j\omega)| \leq \delta_2 \text{ para } |\omega| \leq \omega_s$$

$$1 - \delta_s \leq |H(\omega)| \leq 1 + \delta_s,$$

em que  $\delta_s = 0,021$

## 2 Parâmetros da Janela :

$$R_s = -20 \log \delta_s = 33,56$$

$$N = \frac{33,56 - 8}{2,2850,15\pi} = 23,73 \cong 24$$

# Continuação

- ❶ Como  $21 \geq R_s \leq 50$ , então

$$\beta = 0,5842(33,56-21)^{0,4} + 0,07886(33,56-21) = 2,5980 \cong 2,6$$

- ❷ Resposta ao impulso do filtro

$$h[n] = h_{hp}[n] \frac{J_0(0,5N\beta\sqrt{(0,5N)^2 - (n-0,5N)^2})}{J_0(0,5N\beta)},$$

para  $\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2}$

# Porque o Filtro FIR tem Fase Linear ?

- 1 Note que as janelas são simétricas em torno de  $n = N/2$ , ou seja,

$$w[n] = \begin{cases} w[N - n], & 0 \leq n \leq N \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

- 2 Como a janela é simétrica, a sua transformada de *Fourier* pode ser representada por

$$W(j\omega) = W_e(j\omega)e^{-j\omega N/2},$$

em que  $W_e(j\omega)$  é a transformada de Fourier de uma janela de duração  $N$  e simétrica em torno de  $n = 0$



# Porque o Filtro FIR tem Fase Linear ?

- 1 A resposta ao impulso desejada  $h_d[n]$  pode ser simétrica ou antisimétrica, portanto

$$H_d(\omega) =$$

$$H_d(\omega) =$$

- 2 Resposta em frequência do filtro obtido

$$H(\omega) = \frac{W(j\omega) \otimes H_d(j\omega)}{2\pi}$$

$$H(j\omega) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} H_e(j\theta) e^{-j\theta N/2} W_e(j(\omega - \theta)) e^{-j(\omega - \theta)N/2} d\theta}{2\pi}$$

# Porque o Filtro tem Fase Linear ?

- 1 Resposta em frequência do filtro

$$H(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overbrace{H_e(j\theta) W_e(j(\omega - \theta)) d\theta}^{D(j\omega)} \underbrace{e^{-j(\omega N/2)}}_{\text{Fase Linear}}$$

- 2 Reescrevendo

$$H(j\omega) = D(j\omega) e^{-j\omega N/2}$$

- 3 Usando  $h_d[n]$  simétrico (tipos I e II) ou anti-simétrico (tipos III e IV) e janelas simétricas é possível obter um filtro FIR com fase linear.

# Banda de Transição Especificada

- 1 Eliminação do fenômeno de Gibbs. Considere a resposta em frequência

$$H(j\omega) = D(j\omega)e^{-jN/2\omega},$$

em que  $D(j\omega)$  é dado por

$$D(j\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \frac{(\omega_s - \omega_p)}{\omega_s - \omega_p}, & \omega_p < \omega < \omega_s \\ 0, & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases}$$

# Determinação de $h[n]$

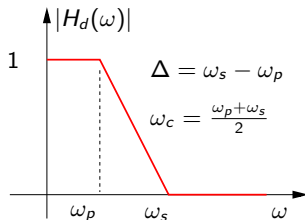


Figura 7 : Resposta em frequência desejada com banda de transição

- Resposta ao Impulso Desejada;

$$h_d[n] = 2\pi \left( \frac{\text{sen}\omega_c n}{\pi n} \right) \left( \frac{\text{sen}0.5\Delta n}{\Delta\pi n} \right),$$

- A resposta  $h_d[n]$  é IIR e não-causal.

# Exemplo

Uma janela retangular trunca a resposta  $h_d[n]$  para obter um filtro FIR e Causal. Para ilustrar o método, considere o exemplo abaixo:

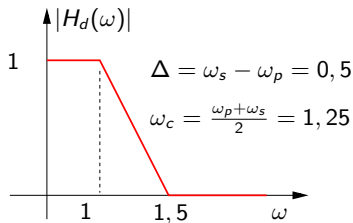


Figura 8 : Resposta desejada.

- 1 Considere uma resposta em frequência desejada com  $\omega_p = 1$  e  $\omega_s = 1.5$ .

# Resposta em Frequência: Resultado.

