

Disciplina: Processamento Digital de Sinais

Aula 03 - Filtros Digitais

Prof. Eduardo Simas
(eduardo.simas@ufba.br)

Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal da Bahia

Conteúdo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático Médio

1 Introdução

2 Filtros Analógicos

- Aproximação de Butterworth
- Aproximação de Chebyshev

3 Filtros Digitais

- Estruturas Básicas de Filtros Digitais
- Projeto de Filtros Digitais
- Aproximações para Filtros FIR
- Aproximações para Filtros IIR
- Filtros Lineares de Mínimo Erro Quadrático Médio

Introdução

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Filtros são sistemas lineares invariantes no tempo capazes de modificar as características dos sinais conectados em sua entrada, de modo que, apenas uma parcela específica dos componentes de frequência do sinal chega à saída do filtro.
- Considerando sinais analógicos $x(t)$ e $y(t)$ e um filtro com função de resposta ao impulso $h(t)$, temos:

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

- No domínio da frequência pode-se escrever:

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

Filtros Analógicos Ideais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Os filtros analógicos podem ser classificados quando ao modo como atuam no domínio da frequência em:

- Passa-Baixas (FPB): $|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

- Passa-Altas (FPA): $|H(j\omega)| = \begin{cases} 0, & |\omega| \leq \omega_c \\ 1, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$

- Passa-Faixa (FPF): $|H(j\omega)| = \begin{cases} 1, & \omega_1 < |\omega| \leq \omega_2 \\ 0, & \omega_1 \leq |\omega| \text{ e } |\omega| > \omega_2 \end{cases}$

- Rejeita-Faixa (FRF):

$$|H(j\omega)| = \begin{cases} 0, & \omega_1 < |\omega| \leq \omega_2 \\ 1, & \omega_1 \leq |\omega| \text{ e } |\omega| > \omega_2 \end{cases}$$

- Onde $|H(j\omega)|$ representa as respostas de módulo ideais para os filtros acima (mostradas graficamente na figura a seguir).

Filtros Analógicos Ideais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

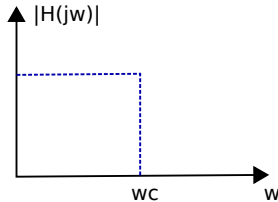
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

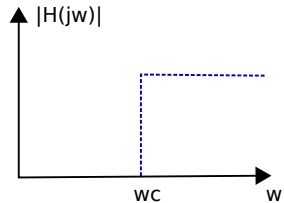
Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

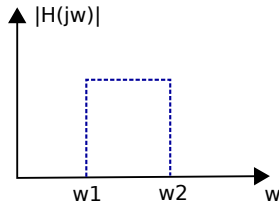
Passa-Baixas



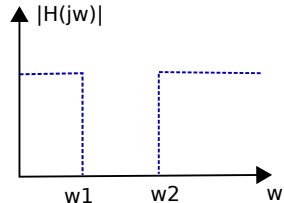
Passa-Altas



Passa-Faixa



Rejeita-Faixa



Filtros Analógicos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

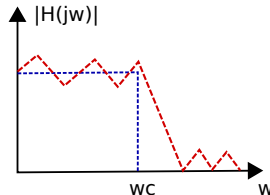
Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Na prática não é possível realizar um filtro ideal e as transições entre as bandas de passagem e de corte são mais suaves:

Passa-Baixas



- Quanto maior a complexidade (ordem) do filtro, mais próximo estamos da resposta ideal, porém maior e mais complexo será o circuito analógico necessário para realizá-lo.
- A ordem de um filtro está diretamente ligada à quantidade de polos da função de transferência, que por sua vez, depende do número de elementos armazenadores de energia (capacitores e indutores) do circuito analógico.

Filtros Analógicos - Exemplo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Considerando que um sinal de interesse $x(t) = \sin(20\pi t)$ está contaminado por um ruído de alta frequência $r(t) = \sin(100\pi t)$, de modo que o sinal medido é $s(t) = x(t) + r(t)$.
- Uma aproximação $\hat{x}(t)$ do sinal $x(t)$ pode ser obtida a partir da utilização de um filtro passa-baixas com frequência de corte $\omega_c \approx 20\pi$ rad/s.
- Quanto maior a ordem do filtro, melhor é a aproximação obtida, conforme pode-se observar nas figuras a seguir.
- Quando a ordem do filtro é suficientemente grande, uma aproximação satisfatória é obtida.

Filtros Analógicos - Exemplo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

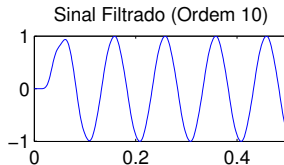
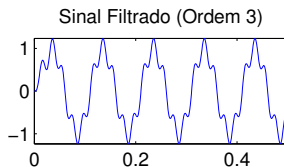
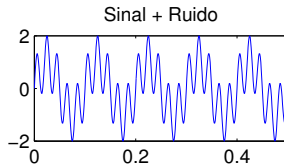
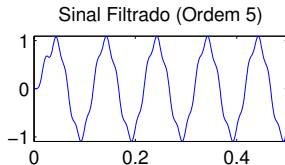
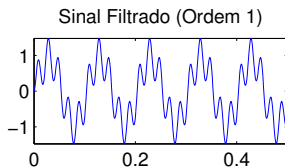
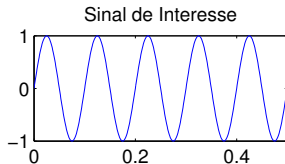
Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio



Filtros Analógicos - Exemplo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

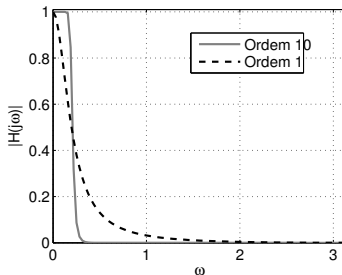
Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Resposta em frequência \times ordem dos filtros:



- Percebe-se que com o aumento da ordem, a resposta do filtro “tende” para a resposta ideal.
- Em contrapartida, os filtros analógicos de alta ordem são de montagem complexa e altamente dependentes dos valores dos elementos do circuito.
- Já os filtros digitais de alta ordem demandam maior capacidade de processamento, devido ao maior número de operações necessárias.

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Projeto de Filtros Analógicos

Projeto de Filtros Passa-Baixas Analógicos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Existem diversas técnicas utilizadas para o projeto de filtros passa-baixas analógicos.
- A seguir iremos apresentar duas das principais abordagens (aproximações de *Butterworth* e de *Chebyshev*) e apresentar exemplos de projeto com o auxílio do MATLAB.
- Os filtros passa-baixas analógicos normalizados podem ser convertidos em outros tipos de filtros (passa-altas, passa-faixa e rejeita-faixa).
- Os filtros digitais serão estudados após essa introdução aos filtros analógicos
- Uma forma de projeto de filtros digitais envolve a conversão da função de transferência do filtro analógico para o domínio digital.

Especificações do Filtro

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

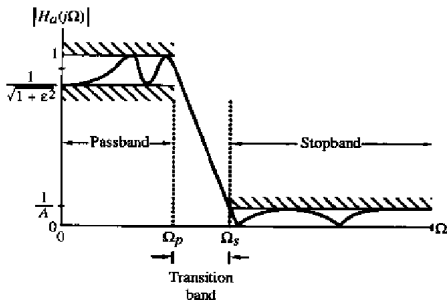
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O primeiro passo no projeto de um FPB é definir as especificações do filtro, que podem ser associadas à figura abaixo:



Ω_P - frequência limite da banda de passagem;

Ω_S - frequência limite da banda de rejeição;

$\frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}$ - atenuação máxima da banda de passagem;

$\frac{1}{A}$ - atenuação mínima da banda de rejeição.

Aproximação de *Butterworth*

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Na aproximação de *Butterworth* considera-se que a função de transferência do filtro de ordem N é tal que:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- O ganho de um filtro de *Butterworth* é definido por:

$$G(\Omega) = 10 \log_{10} |H_a(j\Omega)|^2 \text{ dB}$$

- Observa-se que:

- Para um sinal DC ($\Omega = 0$) temos: $G(0) = 1$.
- Para $\Omega = \Omega_c$: $G(\Omega_c) = 10 \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right) \cong -3 \text{ dB}$.

- É possível provar que a resposta de magnitude o filtro de *Butterworth* é maximamente plana em $\Omega = 0$ e não apresenta oscilações.

Aproximação de *Butterworth*

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

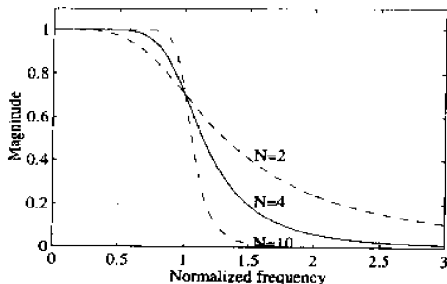
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Exemplos de resposta de magnitude para filtros de *Butterworth*:



- A ordem do filtro pode ser calculada considerando-se que:

$$|Ha(j\Omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$$

$$|Ha(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c}\right)^{2N}} = \frac{1}{A^2}$$

Aproximação de *Butterworth*

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Resolvendo para N temos:

$$N = \frac{1}{2} \frac{\log_{10}[(A^2 - 1)/\varepsilon^2]}{\log_{10}(\Omega_s/\Omega_p)}$$

- O valor de Ω_c (frequência de corte de -3 dB) pode ser obtido por substituição nas expressões de $|H_a(j\Omega_p)|^2$ e $|H_a(j\Omega_s)|^2$.
- Se for feita a substituição de N na expressão de $|H_a(j\Omega_s)|^2$ garante-se exatamente a especificação para Ω_s (banda de rejeição) e consegue-se exceder a especificação para Ω_p , garantindo uma margem de segurança na banda de passagem (e vice-versa).
- Com os valores de N e de Ω_c é possível determinar $H_a(s) = \frac{C}{D_N(s)}$, onde os coeficientes do polinômio de *Butterworth* de ordem N ($D_N(s)$) podem ser calculados ou obtidos de tabelas.
- No exemplo a seguir será utilizado o Matlab para auxílio ao projeto de um FPB usando a aproximação de *Butterworth*.

Projeto em Matlab de um FBP usando aproximação de *Butterworth*

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Inicialmente determina-se N (ordem do filtro) e W_n (freq. de corte de -3 dB) usando o comando "*buttord*" e em seguida determina-se a função de transferência do filtro usando o comando "*butter*":

- O comando *buttord* tem a sintaxe:

$[N, W_n] = \text{buttord}(W_p, W_s, R_p, R_s, 's')$

sendo W_p a frequência limite da banda de passagem (em rad/s), W_s a frequência limite da banda de rejeição (em rad/s), R_p a máxima atenuação da banda de passagem (em dB) e R_s a mínima atenuação na banda de rejeição (em dB).

- O comando *butter* tem a sintaxe:

$[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, W_n)$

Exemplo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Projetar, usando o Matlab, um filtro de *Butterworth* com as especificações a seguir:
 - frequência limite da banda de passagem 100 Hz;
 - frequência limite da banda de rejeição 300 Hz;
 - máxima atenuação na banda de passagem 0,5 dB;
 - mínima atenuação na banda de rejeição 20 dB;
- Neste caso, a sequência de comandos a ser utilizada é:
 $[N, W_n] = \text{buttord}(100, 300, 0.5, 20, 's')$;
- Assim obtemos: $N = 4$ e $W_n = 168.9145$.
- Os polinômios do numerador e do denominador da função de transferência do filtro (no domínio de Laplace) podem ser obtidas de:
 $[\text{num}, \text{den}] = \text{butter}(N, W_n, 's')$;

Exemplo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

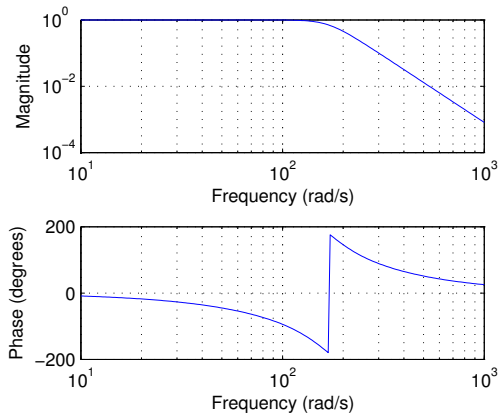
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- As respostas de módulo e fase do filtro podem ser obtidas por:
`freqs(num,den)`
- O resultado encontrado é:



Aproximação de *Chebyshev*

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A aproximação de *Chebyshev* tenta minimizar a diferença entre a resposta do filtro e a resposta ideal em uma das bandas de frequência (de passagem ou de rejeição).
- Existem dois tipos de filtros de *Chebyshev*, que variam quanto à localização da ondulação na resposta de módulo:
 - **Tipo 1:** Ondulação na banda de passagem e monotônico na banda de rejeição;
 - **Tipo 2:** Monotônico na banda de passagem e ondulação na banda de rejeição;
- As aproximações de *Chebyshev* produzem filtros de menor ordem para um mesmo problema se comparadas à aproximação de *Butterworth*. Em contrapartida, as respostas de amplitude dos filtros produzidos apresentam oscilações.

Aproximação de *Chebyshev* do Tipo 1

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

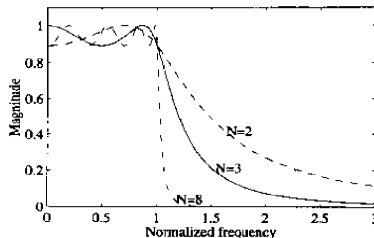
- Para o Tipo 1 temos:

$$|Ha(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)}$$

- Sendo T_N^2 o polinômio de *Chebyshev* de ordem N :

$$T_N^2 = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \Omega), & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} \Omega), & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

- Exemplos de resposta de módulo para filtros de *Chebyshev* do tipo 1.



Aproximação de *Chebyshev* do Tipo 2

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

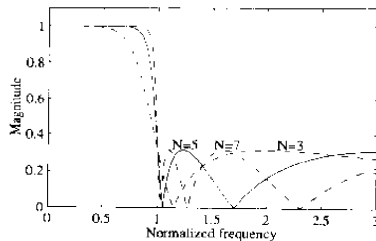
Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Para o Tipo 2 temos:

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \left[\frac{T_N(\Omega_s/\Omega_p)}{T_N(\Omega_s/\Omega)} \right]^2}$$

- Exemplos de resposta de módulo para filtros de *Chebyshev* do tipo 2.



- Comparando com o Tipo 1, percebe-se que as regiões onde ocorrem as oscilações se alternam (Tipo 1→Banda de Passagem e Tipo 2→Banda de Rejeição).

Projeto de Filtros de *Chebyshev* usando o Matlab

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- De modo semelhante ao realizado para os filtros de *Butterworth*, pode-se utilizar funções do Matlab para calcular a ordem do filtro, a frequência de -3 dB e os coeficientes da função de transferência.

- Utilizando o mesmo exemplo anterior, para o Tipo 1:
 $[Nc1, Wnc1] = \text{cheb1ord}(100, 300, 0.5, 20, 's')$

como resultado obtemos: $Nc1 = 3$ e $Wnc1 = 100$.

- Para o Tipo 2:
 $[Nc2, Wnc2] = \text{cheb2ord}(100, 300, 0.5, 20, 's')$

agora: $Nc2 = 3$ e $Wnc2 = 205.3656$

- As funções de transferência podem ser obtidas de:
 $[\text{numC1}, \text{denC1}] = \text{cheby1}(Nc1, Rs, Wnc1, 's')$ e
 $[\text{numC2}, \text{denC2}] = \text{cheby2}(Nc2, Rp, Wnc2, 's');$

Projeto de Filtros de *Chebyshev* usando o Matlab

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

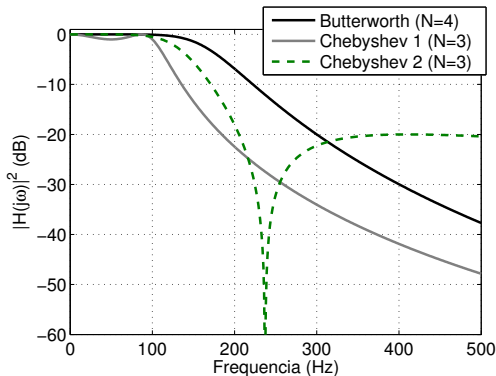
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A figura a seguir apresenta uma comparação entre as respostas de módulo ($|H(j\omega)|^2$ em dB) para os três tipos de filtros estudados até aqui.



- Percebe-se que as especificações do projeto são atendidas nos três casos, porém os filtros de *Chebyshev* apresentam respostas mais seletivas, mesmo com uma ordem menor.

Projeto de Outros Tipos de Filtros

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Até agora foi abordado apenas o projeto de filtros Passa-Baixas.
- Utilizando as funções do Matlab é simples projetar filtros Passa-Altas, Passa-Faixa e Rejeita-Faixa, para isso é necessário:
 - especificar corretamente as frequências limite das bandas de passagem e rejeição (que no caso do FRF e do FPF são agora vetores com dois elementos);
 - definir o “tipo” do filtro para o FPA ('high') e para o FRF ('stop') nos comandos utilizados anteriormente.

Exemplo:

```
[N,Wn]=buttord([100,600],[300,400],0.5,20,'stop','s');  
[numB,denB]=butter(Nb,Wnb,'stop','s');
```


Projeto de Outros Tipos de Filtros

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

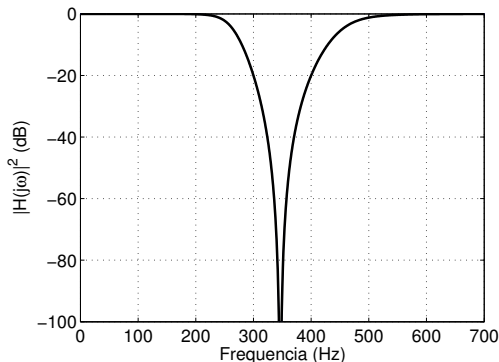
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Com os comandos do slide anterior estamos especificando um FRF com banda de rejeição para $\omega < 100$ rad/s e $\omega > 600$ rad/s, e banda de passagem para $300 < \omega < 400$. As atenuações permitidas são $R_p=0.5$ dB e $R_s=20$ dB.
- A resposta de módulo do filtro obtido é:



PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Filtros Digitais

Filtros Digitais - Introdução

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Um filtro digital é a implementação de um algoritmo matemático em *hardware* ou *software* que opera sobre sinal $x[n]$ aplicado em sua entrada gerando na saída uma versão filtrada $y[n]$ de $x[n]$.
- Considerando que o filtro está implementado num Processador Digital de Sinais (PDS) e que o objetivo é processar um sinal analógico $x(t)$, temos:



- Se os sinais a serem processados forem digitais o diagrama se resume a:



Filtros Digitais × Filtros Analógicos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Entre as principais **vantagens dos filtros digitais** podemos listar:
 - Filtros digitais podem apresentar a fase perfeitamente linear.
 - O desempenho dos filtros analógicos não depende de componentes do circuito, ou seja, sua resposta não é influenciada por mudanças ambientais (temperatura, umidade).
 - A resposta em frequência do filtro digital pode ser mais facilmente modificada (caso esteja implementada em *software* ou *hardware programável*).
 - Com o avanço da tecnologia de fabricação eletrônica os filtros digitais podem ser implementados em dispositivos cada vez menores e mais econômicos.
 - Filtros digitais podem ser utilizados em sinais de frequência muito baixa (como é o caso de algumas aplicações biomédicas).

Filtros Digitais × Filtros Analógicos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Entre as principais **desvantagens dos filtros digitais** pode-se mencionar:
 - Considerando as etapas de conversão AD e DA e o processamento propriamente dito, os filtros digitais tem uma velocidade de resposta inferior aos analógicos.
 - Os filtros digitais estão sujeitos aos erros inerentes ao processo de quantização (na conversão AD) e também aos erros de aproximação devido ao uso de palavras digitais de comprimento finito. Em filtros recursivos de alta ordem esses fenômenos podem levar à instabilidade.

Tipos de Filtros Digitais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Os filtros digitais são classificados quanto ao comprimento da sua sequência de resposta ao impulso como:
 - Filtros de resposta ao impulso finita (FIR - *Finite Impulse Response*);
 - Filtros de resposta ao impulso infinita (IIR - *Infinite Impulse Response*);
- As saídas dos filtros podem ser calculadas usando:

$$\text{Filtro FIR: } y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k];$$

$$\text{Filtro IIR: } y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k];$$

Tipos de Filtros Digitais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A saída de um filtro IIR do modo como foi definida anteriormente não pode ser obtida na prática.
- Utiliza-se, então, uma representação recursiva do tipo:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k];$$

sendo a_k e b_k os coeficientes do filtro.

- Aplicando-se a transformada z , obtemos as funções de transferência $H(z) = Y(z)/X(z)$ dos filtros digitais:

- **FIR:**
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$$
 e **IIR:**
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^M a_k z^{-k}}$$

Etapas para o Projeto de um Filtro Digital

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O projeto e a construção de um filtro digital envolvem as etapas a seguir:
 - ① Especificação das características do filtro;
 - ② Cálculo dos coeficientes da função de transferência;
 - ③ Representação do filtro por uma estrutura adequada (realização);
 - ④ Análise dos efeitos do comprimento finito da palavra digital no desempenho do filtro;
 - ⑤ Implementação do filtro em *software* ou *hardware*.

FIR ou IIR ?

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A escolha entre os filtros FIR e IIR depende da aplicação específica e deve considerar as características do dois tipos como:
 - Os filtros FIR tem resposta de fase linear. Isso implica que nenhuma distorção de fase é produzida no sinal filtrado. Essa característica é importante em diversas aplicações como processamento de áudio e imagem, biomedicina e transmissão de dados.
 - Filtros FIR são realizados de modo não-recursivo, e assim são sempre estáveis. O mesmo não pode ser garantido para os filtros IIR.
 - Os efeitos da precisão finita e dos erros de quantização são menos severos para os filtros FIR.

FIR ou IIR ?

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Filtros IIR, em geral, necessitam de menos coeficientes que os FIR para atender a uma mesma especificação de projeto. Um filtro de menor ordem tem menor tempo de execução.
- Filtros analógicos podem ser facilmente convertidos em filtros digitais IIR equivalentes
- De modo geral pode-se usar as indicações abaixo:
 - Utilize um filtro IIR sempre que for importante uma resposta bem seletiva no domínio da frequência ou quando for necessário realizar a conversão das especificações de um filtro analógico;
 - Utilize um filtro FIR quando o número de coeficientes não é grande (pois a estabilidade da estrutura FIR é garantida) e especialmente quando a distorção de fase desejada for pequena.

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

**Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais**

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Estruturas Básicas de Filtros Digitais

Estruturas Básicas de Filtros Digitais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

**Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais**

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Os algoritmos computacionais de filtros lineares e invariantes no tempo (LTI) podem ser representados em forma de diagrama de blocos utilizando estruturas básicas como:

- atrasos unitários;
- ganhos (multiplicadores);
- somadores
- realimentações (para filtros recursivos).

- Estruturas Canônicas e Não-Canônicas:

Uma estrutura é dita canônica se o número de atrasos no diagrama de blocos é igual à ordem da equação a diferenças (ou da função de transferência) do filtro.

Estruturas de Filtros FIR (Não-recursivos)

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Um filtro FIR pode ser descrito por: $y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n - k]$.
- Uma modo simples de realizar um filtro FIR é utilizar estruturas na **forma direta**, conforme mostrado na figura a seguir.

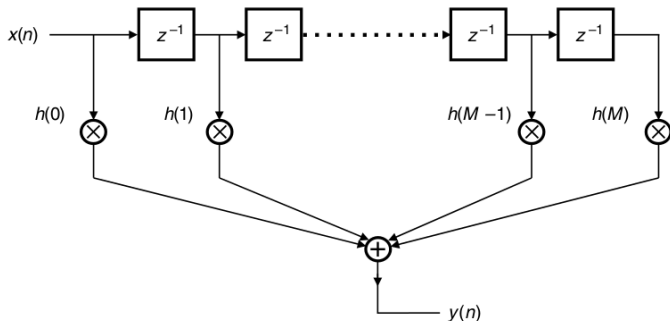


Figure : Estrutura FIR na forma direta

Estruturas de Filtros FIR (Não-recursivos)

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Existem diversas implementações digitais para um mesmo problema, sendo elas equivalentes quando ao cálculo da saída do filtro.
- A seguir é apresentada a estrutura de um filtro FIR na forma direta alternativa:

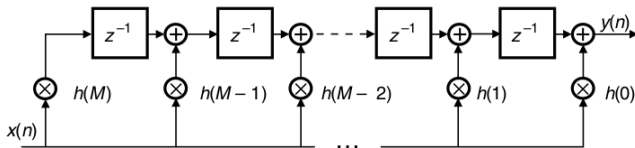


Figure : Estrutura FIR na forma direta alternativa

- As implementações na forma direta tem a vantagem de utilizarem os coeficientes da função de resposta ao impulso do filtro ($h(k)$) como multiplicadores no diagrama.

Filtros FIR na Forma Cascata

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

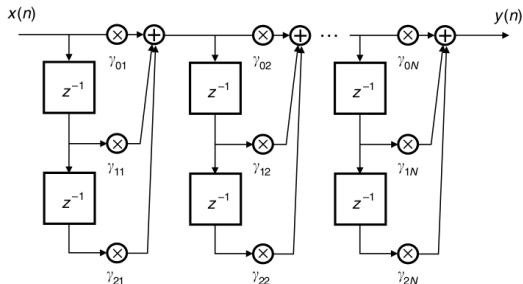
Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A implementação na forma cascata é obtida pela conexão em cascata de uma série de filtros FIR de segunda ordem:



- A função de transferência associada a essa realização é da forma:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N (\gamma_{0k} + \gamma_{1k}z^{-1} + \gamma_{2k}z^{-2})$$

os coeficientes γ_{ik} precisam ser determinados em função dos $h(k)$ da função de resposta ao impulso do filtro.

Filtros FIR com fase linear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Uma importante classe de filtros FIR é aquela que apresenta fase linear.
- Esses filtros tem resposta em frequência do tipo:

$$H(e^{j\omega}) = B(\omega)e^{-j\omega\tau+j\phi}$$

onde $B(j\omega)$ é real, τ e ϕ são constantes.

- Calculando a sequência de resposta ao impulso temos:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = e^{j\phi}b[n - \tau]$$

- Após algumas manipulações algébricas e considerando que o filtro deve ser causal e ter duração finita, então chega-se a:

$$h[n] = e^{2j\phi}h^*[M - n], \text{ sendo que o filtro existe para } 0 \leq n \leq M.$$

Filtros FIR com fase linear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Considerando o caso onde todos os coeficientes são reais, então:

$$h[n] = h^*[n] \text{ e}$$

$$e^{2j\phi} \in \mathbb{R} \rightarrow \phi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

- Então chega-se a:

$$h[n] = (-1)^k h[M - n], k \in \mathbb{Z}.$$

- Na prática, basta considerarmos os casos abaixo (todas as outras combinações de k e M serão equivalentes):
 - Tipo I: $k = 0$ e M é par.
 - Tipo II: $k = 0$ e M é ímpar.
 - Tipo III: $k = 1$ e M é par.
 - Tipo IV: $k = 1$ e M é ímpar.

Filtros FIR com fase linear - Características

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Type	M	$h(n)$	$H(e^{j\omega})$	$\Theta(\omega)$	τ
I	Even	Symmetric	$e^{-j\omega M/2} \sum_{m=0}^{M/2} a(m) \cos(\omega m)$ $a(0) = h(M/2); a(m) = 2h[(M/2) - m]$	$-\omega \frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$
II	Odd	Symmetric	$e^{-j\omega M/2} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} b(m) \cos[\omega(m - \frac{1}{2})]$ $b(m) = 2h[(M+1)/2] - m$	$-\omega \frac{M}{2}$	$\frac{M}{2}$
III	Even	Antisymmetric	$e^{-j[\omega(M/2) - (\pi/2)]} \sum_{m=1}^{M/2} c(m) \sin(\omega m)$ $c(m) = 2h[(M/2) - m]$	$-\omega \frac{M}{2} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{M}{2}$
IV	Odd	Antisymmetric	$e^{-j[\omega(M/2) - (\pi/2)]} \sum_{m=1}^{(M+1)/2} d(m) \sin[\omega(m - \frac{1}{2})]$ $d(m) = 2h[(M+1)/2] - m$	$-\omega \frac{M}{2} + \frac{\pi}{2}$	$\frac{M}{2}$

Filtros FIR com fase linear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

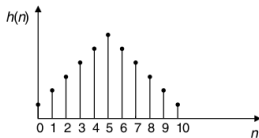
Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

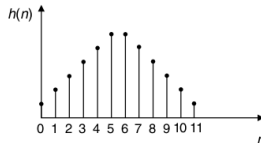
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

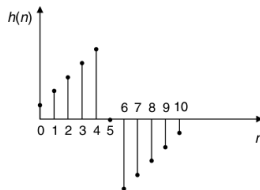
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio



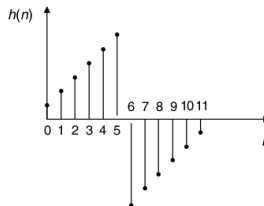
(a)



(b)



(c)



(d)

Exemplos de resposta ao impulso de filtros FIR de fase linear dos tipos (a) I, (b) II, (c) III e (d) IV.

Estruturas Eficientes para Filtros FIR com fase linear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

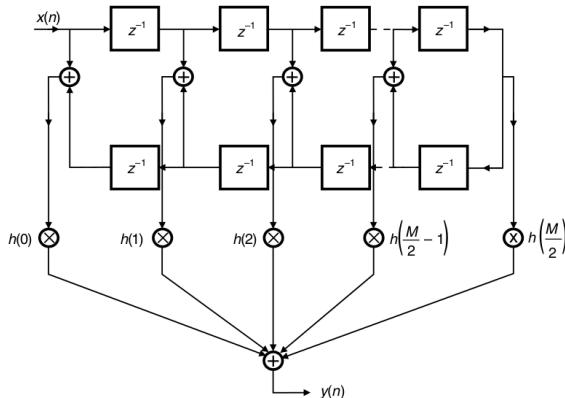
Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Uma propriedade interessante de filtros FIR com fase linear é que eles podem ser realizados através de estruturas eficientes que exploram suas características de simetria e anti-simetria.



Realização de filtro de fase linear com resposta ao impulso simétrica e ordem par.

Estruturas de Filtros IIR (Recursivos)

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

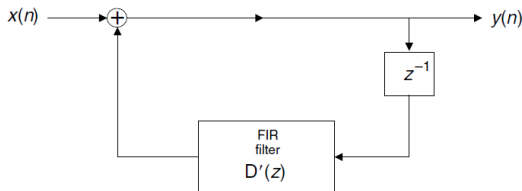
Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A função de transferência de um filtro recursivo é do tipo:

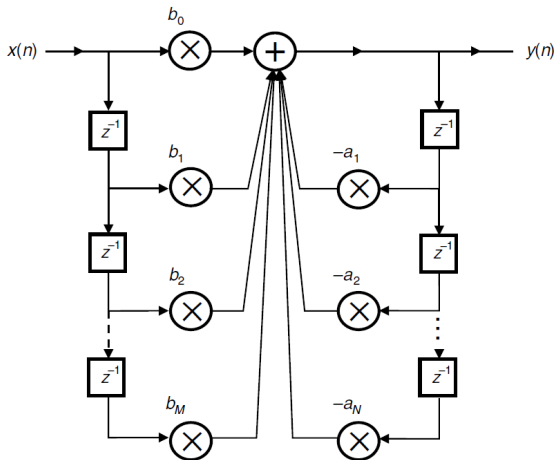
$$H(z) = \left(\sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \right) / \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right)$$

- Pode-se considerar que $H(z)$ é obtido da composição em cascata de $N(z)$ e $1/D(z)$.
- O polinômio $N(z)$ pode ser realizado por qualquer estrutura FIR mostrada anteriormente e $1/D(z)$ por uma realimentação do filtro FIR descrito por $D'(z) = z(1 - D(z)) = -z \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}$:



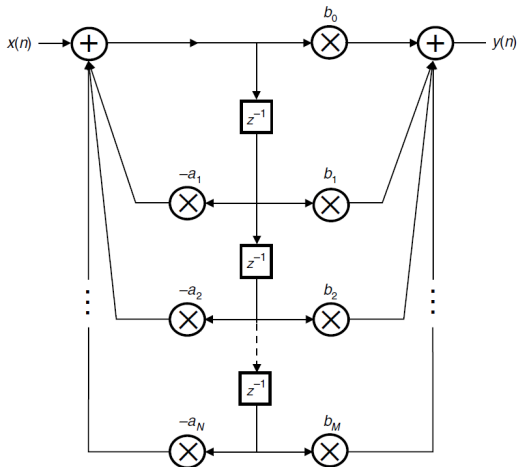
Filtros IIR na Forma Direta

- Representando ao mesmo tempo $N(z)$ e $1/D(z)$ temos uma realização do filtro IIR na forma direta (na qual os coeficientes do filtro estão explícitos na estrutura realizada):



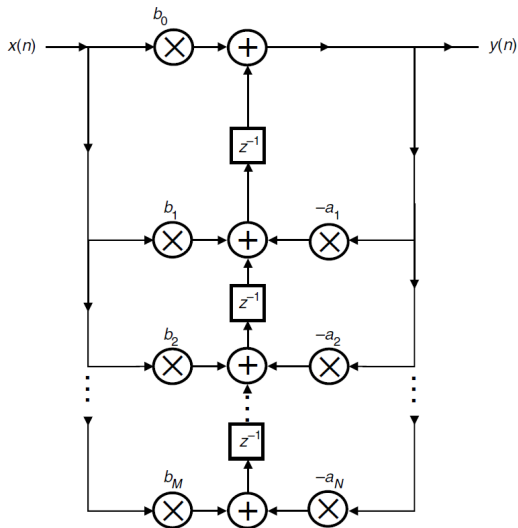
Filtros IIR na Forma Canônica

- A estrutura anterior pode ser modificada de modo a obter uma realização equivalente, porém na forma canônica:



Filtros IIR na Forma Canônica

- Outra estrutura também na forma canônica:



Outras Realizações de Filtros IIR

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

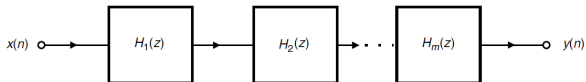
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

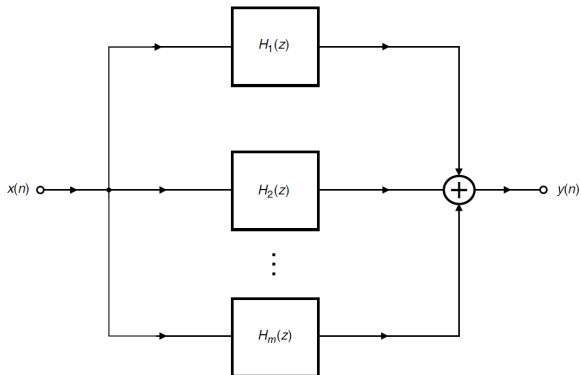
Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Existem ainda outras realizações utilizadas para filtros IIR como:
 - Cascata:



- Paralela:



Outras Realizações de Filtros IIR

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Nos casos mostrados no slide anterior, os blocos $H_i(z)$ apresentam funções de transferência simples, de primeira ou segunda ordem.
- Como veremos futuramente, as diferentes realizações de filtros digitais apresentam diferentes propriedades quando se consideram uma implementação prática com precisão finita.
- É preciso avaliar o comportamento da realização utilizada quando ocorre quantização dos coeficientes e das operações aritméticas envolvidas.
- A análise dos efeitos da precisão finita é uma etapa importante para o projeto de filtros digitais.

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

**Projeto de
Filtros Digitais**

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Projeto de Filtros Digitais

Projeto de Filtros Digitais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O projeto de filtros digitais consiste na determinação da função de transferência (ou da sequência de resposta ao impulso) que atenda (pelo menos de modo aproximado) às especificações da resposta em frequência necessárias para uma dada aplicação.
- Considerando os 4 tipos de filtros abordados até aqui (FPB, FPA, FPF e FRF), as respostas ao impulso das funções de transferência ideais não são realizáveis digitalmente, pois apresentam comprimento infinito e são não-causais.
- Para os filtros FIR, uma abordagem bastante utilizada é o truncamento da resposta ao impulso dos filtros ideais.
- Para os filtros IIR, pode-se mapear para o domínio z funções de transferência projetadas para filtros analógicos.
- Como veremos a seguir, existem ainda outras metodologias para projeto de filtros digitais, que não tem uma ligação direta tão forte com o domínio analógico.

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

**Aproximações
para Filtros FIR**

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Aproximações para Filtros FIR

Aproximações para Filtros FIR

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analgógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

**Aproximações
para Filtros FIR**

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Conforme visto anteriormente, a implementação de um filtro é realizada a partir da sua função de transferência:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

- Porém, seu comportamento é melhor caracterizado por sua resposta em frequência:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n}$$

- sendo que $h[n]$ pode ser descrita por:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

- A seguir serão apresentados os pares $H(e^{j\omega})$ e $h[n]$ para os filtros ideais.

Características de Filtros Ideais

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

	Filter type	Magnitude response $ H(e^{j\omega}) $	Impulse response $h(n)$
	Lowpass	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0, & \text{for } \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n} \sin(\omega_c n), & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$
	Highpass	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq \omega < \omega_c \\ 1, & \text{for } \omega_c \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ -\frac{1}{\pi n} \sin(\omega_c n), & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$
	Bandpass	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq \omega < \omega_{c1} \\ 1, & \text{for } \omega_{c1} \leq \omega \leq \omega_{c2} \\ 0, & \text{for } \omega_{c2} < \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n} [\sin(\omega_{c2} n) - \sin(\omega_{c1} n)], & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$
	Bandstop	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_{c1} \\ 0, & \text{for } \omega_{c1} < \omega < \omega_{c2} \\ 1, & \text{for } \omega_{c2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n} [\sin(\omega_{c1} n) - \sin(\omega_{c2} n)], & \text{for } n \neq 0 \end{cases}$

Aproximações para filtros FIR usando Funções-Janela

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Um modo de contornar as limitações para realização da função de resposta ao impulso dos filtros ideais $h[n]$ é definir uma sequencia auxiliar $h'(n)$ de comprimento finito de ordem M da forma:

$$h'[n] = \begin{cases} h[n]w[n], & |n| \leq \frac{M}{2} \\ 0, & |n| > \frac{M}{2} \end{cases}$$

- Essa resposta, embora de comprimento finito, ainda é não-causal.
- Porém ela pode ser transformada em causal através da multiplicação por $z^{-M/2}$, sem distorcer a resposta de módulo e sem destruir a propriedade de fase linear.
- A sequência $w[n]$ é conhecida como “função janela”.

Filtros FIR usando Janela Retangular

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Para a janela retangular temos:

$$w[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M/2 \\ 0, & |n| > M/2 \end{cases}$$

- Na verdade a janela retangular representa o simples truncamento da resposta ao impulso do filtro ideal.
- Considerando, então, o projeto de um filtro passa-faixa com as características a seguir:
 - $M=50$
 - $\Omega_{c1} = \pi/4 \text{ rad/s}$
 - $\Omega_{c2} = \pi/2 \text{ rad/s}$
 - $\Omega_s = 2\pi \text{ rad/s}$

Filtros FIR usando Janela Retangular

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Considerando uma janela retangular, $h'[n]$ é obtido pelo script:

```
M = 49;
```

```
wc1 = pi/4; wc2 = pi/2; ws = 2*pi;
```

```
n = 1:M/2;
```

```
h0 = 1 - (wc2 - wc1)/pi;
```

```
haux = (sin(wc1.*n) - sin(wc2.*n))./(pi.*n);
```

```
h = [fliplr(haux) h0 haux];
```

- Os 25 coeficientes do filtro são mostrados a seguir (os demais 24 são obtidos por rebatimento):

$h(0) = -0.0037$	$h(7) = 0.0177$	$h(14) = 0.0494$	$h(21) = 0.0000$
$h(1) = 0.0000$	$h(8) = -0.0055$	$h(15) = 0.0318$	$h(22) = 0.1811$
$h(2) = 0.0041$	$h(9) = 0.0000$	$h(16) = -0.0104$	$h(23) = 0.1592$
$h(3) = -0.0145$	$h(10) = 0.0062$	$h(17) = 0.0000$	$h(24) = -0.0932$
$h(4) = -0.0259$	$h(11) = -0.0227$	$h(18) = 0.0133$	$h(25) = 0.7500$
$h(5) = 0.0000$	$h(12) = -0.0418$	$h(19) = -0.0531$	
$h(6) = 0.0286$	$h(13) = 0.0000$	$h(20) = -0.1087$	

Filtros FIR usando Janela Retangular

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

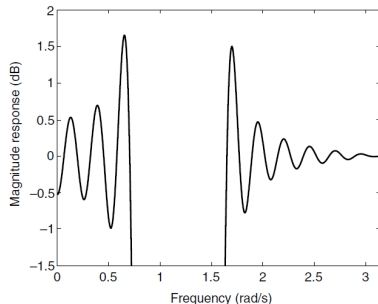
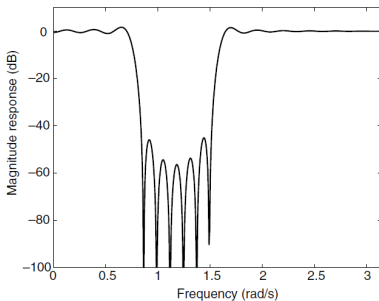
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A resposta em frequência obtida é:



- Observa-se que aparecem ondulações nas extremidades da faixa de passagem chamadas “Oscilações de Gibbs”, que surgem devido à descontinuidade imposta pela janela da sequência $h[n]$.
- O aumento da ordem do filtro torna a resposta mais seletiva, mas não modifica a amplitude das oscilações.

Filtros FIR usando Janelas Triangulares

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O uso de janelas sem descontinuidade diminuem as oscilações de Gibbs.
- Uma opção simples é utilizar janelas de formato triangular como:

$$w[n] = \begin{cases} -\frac{2|n|}{M+2} + 1, & |n| \leq M/2 \\ 0, & |n| > M/2 \end{cases}$$

- Adicionando-se uma amostra igual a zero nas extremidades da janela triangular obtemos a janela de *Bartlett*.
- Em alguns casos é necessário a utilização de janelas mais sofisticadas, que reduzem ainda mais as oscilações. Algumas destas janelas serão apresentadas a seguir.

Filtros FIR usando Janelas de Hamming e Hanning

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A janela de *Hamming* generalizada pode ser definida por:

$$w[n] = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos(2\pi n/M), & |n| \leq M/2 \\ 0, & |n| > M/2 \end{cases}$$

- Para a janela de *Hanning* ou *Hann*, faz-se: $\alpha = 0,50$.
- Para termos a janela de *Hamming* propriamente dita, usamos $\alpha = 0,54$:
- As janelas do tipo *Hamming* apresentam maior atenuação das oscilações de Gibbs se comparadas às janelas triangulares.

Filtros FIR usando Janela de Blackman

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A janela de *Blackman* é obtida a partir de modificações na janela de *Hamming*, sendo definida por:

$$w[n] = \begin{cases} 0,42 + 0,5 \cos(2\pi n/M) + 0,08 \cos(4\pi n/M), & |n| \leq M/2 \\ 0, & |n| > M/2 \end{cases}$$

- Comparada com as janelas anteriores, a de *Blackman* apresenta características como:
 - Menor ondulação na faixa de passagem;
 - Maior atenuação na banda de rejeição.

Comparação entre Janelas

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Nos próximos slides será apresentada uma comparação entre algumas das funções janelas apresentadas considerando os domínios do tempo e da frequência.
- No domínio do tempo, pode-se observar que, a menos da janela retangular (*boxcar*), as demais tem características semelhantes.
- No slide do domínio da frequência temos as respostas para janelas (a) retangular, (b) *Hamming*, (c) *Hann* e (d) *Blackman*.
- Percebe-se que com a evolução das janelas há uma diminuição das oscilações de Gibbs.

Comparação entre Janelas - Domínio do Tempo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

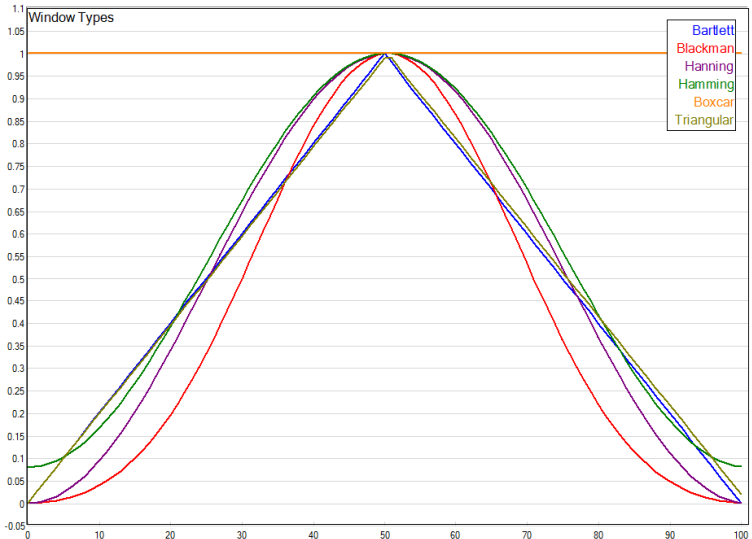
Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

**Aproximações
para Filtros FIR**

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio



Comparação entre Janelas - Domínio da Frequência

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

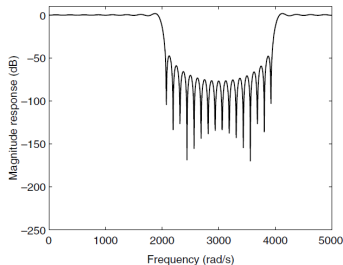
Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

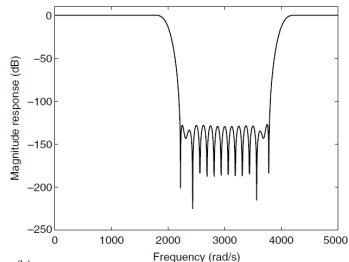
**Aproximações
para Filtros FIR**

Aproximações
para Filtros IIR

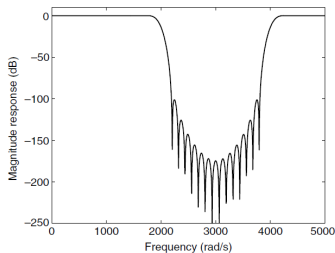
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio



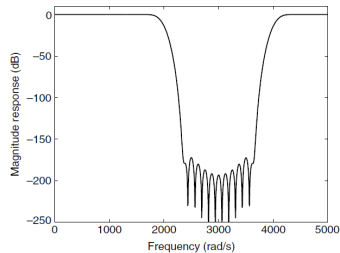
(a)



(b)



(c)



(d)

Comparação entre Janelas

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Janela	$\Delta\omega$ ($p/\omega_s = 2\pi$)	AP (dB)	AR (dB)	$w[n]$, $ n \leq (N-1)/2$
Retangular	$0,9\pi/N$	0,7416	20,9	1
Hanning	$3,11\pi/N$	0,0546	43,9	$0,5 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3,32\pi/N$	0,0194	54,5	$0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5,56\pi/N$	0,0017	75,3	$0,42 + 0,5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$ $+ 0,08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$

Filtros FIR usando Janela “Ajustáveis”

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Conforme visto anteriormente, o uso de janelas produz oscilações de Gibbs que, para as janelas estudadas até aqui, não podem ser controladas.
- O uso de janelas mais sofisticadas (Ex. *Blackman*) contribui para a redução das oscilações, porém sua amplitude é independente da ordem do filtro.
- Em muitos casos práticos, as especificações dos filtros consideram valores limitados para as oscilações tanto na banda de passagem como na banda de rejeição.
- Para atingir esse propósito é preciso utilizar janelas que possuam parâmetros ajustáveis associados às oscilações como:
 - Janela de *Kaiser*
 - Janela de *Dolph-Chebyshev*

Filtros FIR usando Janela de Kaiser

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A janela de Kaiser é definida por:

$$w[n] = \begin{cases} \frac{I_0 \left[\beta \sqrt{1 - \left(\frac{2n}{M} \right)^2} \right]}{I_0(\beta)}, & |n| \leq M/2 \\ 0, & |n| > M/2 \end{cases}$$

Sendo $I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$ a função de Bessel modificada de primeira classe de ordem zero.

- O parâmetro β pode ser utilizado para controlar as características da resposta em frequência do filtro.
- Os filtros projetados usando a janela de Kaiser também apresentam a mesma ondulação tanto na banda de passagem como na de rejeição, porém a amplitude das ondulações pode ser ajustada através do parâmetro β .

Filtros FIR usando Janela de Kaiser

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

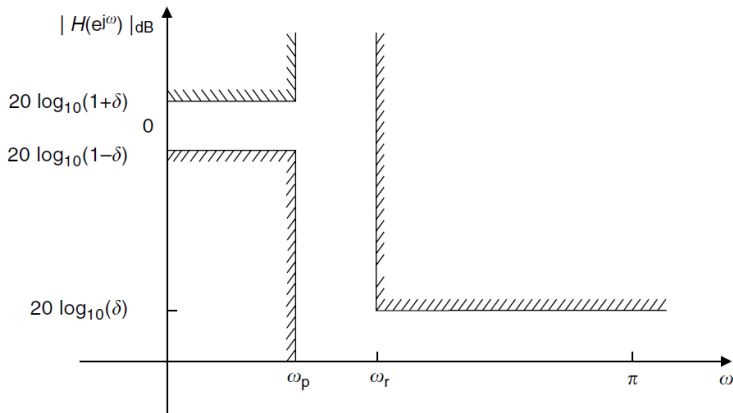
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Considerando um filtro com as seguintes especificações:



- O projeto usando a janela de Kaiser envolve os passos a seguir.

Etapas de Projeto usando Janela de Kaiser

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- ① Determine a resposta ao impulso ideal. Para FPB e FPA faça $\Omega_c = (\Omega_p + \Omega_r)/2$.

- ② Dadas as ondulações A_p e A_r em dB encontre seus valores usando:

$$\delta_p = \frac{10^{0.05A_p} - 1}{10^{0.05A_p} + 1} \text{ e } \delta_r = 10^{-0.05A_p}.$$

- ③ Fazendo $\delta = \min(\delta_p, \delta_r)$ recalcule as ondulações resultantes em dB:

$$A_p = 20 \log \frac{1 + \delta}{1 - \delta} \text{ e } A_r = -20 \log \delta.$$

- ④ Calcule a faixa de transição: $T_r = \Omega_r - \Omega_p$.

- ⑤ Determine β usando (expressão empírica de Kaiser):

$$\beta = \begin{cases} 0, & A_r \leq 21 \\ 0,5842(A_r - 21)^{0,4} + 0,07886(A_r - 21), & 21 < A_r \leq 50 \\ 0,1102(A_r - 8,7), & A_r > 50 \end{cases}$$

Etapas de Projeto usando Janela de Kaiser

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- ⑥ O comprimento da janela M é definido como o menor número par que satisfaz:

$$M \geq \frac{\Omega_s D}{T_r},$$

sendo Ω_s a frequência de amostragem e D calculado por:

$$D = \begin{cases} 0,9222, & A_r \leq 21 \\ \frac{A_r - 7,95}{14,36}, & 21 < A_r \end{cases}$$

- ⑦ Uma vez determinados M e β pode-se determinar $w[n]$ (usando a expressão do slide 67) e formar a sequência $h'[n] = w[n]h[n]$, sendo $h[n]$ a função de transferência do filtro ideal calculada na Etapa 1.
- ⑧ A função de transferência do filtro projetado é obtida de:

$$H(z) = z^{-M/2} Z\{h'[n]\},$$

sendo $Z\{\cdot\}$ o operador da transformada z .

Etapas de Projeto usando Janela de Kaiser

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O procedimento descrito nos slides anteriores se aplica a filtros passa baixas e passa altas.
- Se for necessário projetar filtros passa faixa ou rejeita faixa deve-se acrescentar o seguinte:
 - Calcular a faixa de transição T_r mais estreita que será dada por:
$$T_r = \Omega_{r1} - \Omega_{p1} \text{ ou } T_r = \Omega_{r2} - \Omega_{p2}.$$
 - As duas frequências centrais são determinadas usando:
$$\Omega_{c1} = \left(\Omega_{p1} + \frac{T_r}{2} \right) \text{ e } \Omega_{c2} = \left(\Omega_{p2} - \frac{T_r}{2} \right)$$
- Uma especificação típica de um filtro rejeita faixa é mostrada no próximo slide.

Etapas de Projeto usando Janela de Kaiser

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

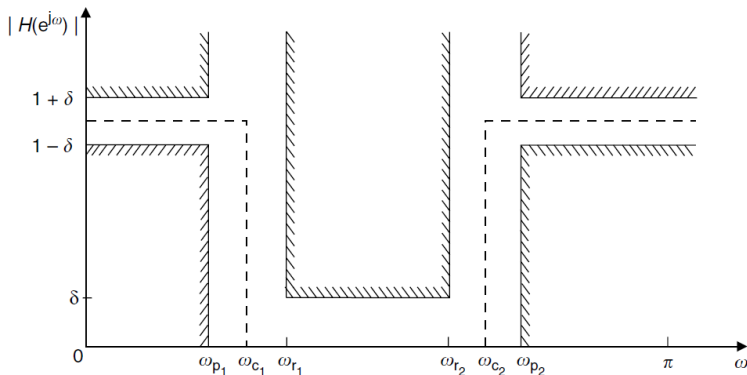
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Especificação típica de um filtro rejeita faixa:



- O projeto usando Janela de Dolph-Chebyshev é realizado de modo semelhante ao descrito para a janela de Kaiser, sendo que a janela é definida com base no polinômio de Chebyshev de ordem M .

Aproximações de Filtros FIR usando Métodos Numéricos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Embora o projeto de filtros FIR utilizando janelas seja relativamente simples e direto, ele tem limitações, principalmente quando deseja-se obter uma resposta na frequência com características pré-definidas.
- O método baseado em janelas não é eficiente para o projeto de filtros com amplitudes diferentes das ondulações nas faixas de passagem e rejeição e também não são capazes de produzir FPF e FRF assimétricos
- Para esses casos pode-se utilizar métodos baseados em otimização numérica, que são capazes de projetar filtros com função de transferência mais genérica.
- Entre os métodos numéricos utilizados para o projeto de filtros FIR pode-se destacar:
 - Método WLS (*Weighted Least Squares* ou Mínimos Quadrados Ponderados);
 - Método Ótimo de Chebyshev.

Filtros FIR usando Métodos Numéricos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Para o desenvolvimento dos métodos numéricos de projeto de filtros FIR é preciso considerar os quatro tipos de filtro com resposta de fase linear (Tipos I, II, III e IV vistos anteriormente).
- Visando uma apresentação unificada destes filtros define-se uma função auxiliar:

$$P(\omega) = \sum_{l=0}^L p(l) \cos(\omega l)$$

- Com base nessa função pode-se expressar a resposta em frequência dos quatro tipos de filtros FIR com fase linear.
- É definida então uma função de erro:

$$E(\omega) = W_q(\omega)[D_q(\omega) - P(\omega)]$$

sendo $W_q(\omega) = W(\omega)Q(\omega)$, $D_q(\omega) = D(\omega)/Q(\omega)$, $W(\omega)$ a função peso, $D(\omega)$ a resposta em amplitude ideal do filtro e $Q(\omega)$ uma função variável com o tipo do filtro.

Filtros FIR usando Métodos Numéricos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Temos então os valores de $Q(\omega)$ em função do tipo do filtro:
 - Tipo I: $Q(\omega) = 1$
 - Tipo II: $Q(\omega) = \cos(\omega/2)$
 - Tipo III: $Q(\omega) = \sin(\omega)$
 - Tipo VI: $Q(\omega) = \sin(\omega/2)$
- Os valores de $W(\omega)$ e $D(\omega)$ podem ser calculados da tabela no slide a seguir.
- Pela formulação obtida no slide anterior o problema de otimização para projeto dos filtros FIR pode ser definido como *determinar os coeficientes $p(l)$ que minimizam a função $E(\omega)$ em uma certa faixa de frequências.*

Filtros FIR usando Métodos Numéricos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

**Aproximações
para Filtros FIR**

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Filter type	Weight function $W(\omega)$	Ideal amplitude response $D(\omega)$
Lowpass	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \frac{\delta_p}{\delta_r}, & \text{for } \omega_r \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0, & \text{for } \omega_r \leq \omega \leq \pi \end{cases}$
Highpass	$\begin{cases} \frac{\delta_p}{\delta_r}, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_r \\ 1, & \text{for } \omega_p \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_r \\ 1, & \text{for } \omega_p \leq \omega \leq \pi \end{cases}$
Bandpass	$\begin{cases} \frac{\delta_p}{\delta_r}, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_{r1} \\ 1, & \text{for } \omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2} \\ \frac{\delta_p}{\delta_r}, & \text{for } \omega_{r2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_{r1} \\ 1, & \text{for } \omega_{p1} \leq \omega \leq \omega_{p2} \\ 0, & \text{for } \omega_{r2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$
Bandstop	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_{p1} \\ \frac{\delta_p}{\delta_r}, & \text{for } \omega_{r1} \leq \omega \leq \omega_{r2} \\ 1, & \text{for } \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \leq \omega \leq \omega_{p1} \\ 0, & \text{for } \omega_{r1} \leq \omega \leq \omega_{r2} \\ 1, & \text{for } \omega_{p2} \leq \omega \leq \pi \end{cases}$

Filtros FIR usando Métodos Numéricos

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

⇒ Filtros FIR pelo Método dos Mínimos Quadrados Ponderados (WLS)

- O método WLS busca a minimização do valor médio quadrático do erro.
- Ou seja, os coeficientes $p(l)$ do filtro são ajustados visando:

$$\min \left\{ \int_0^{\pi} |E(\omega)|^2 d\omega \right\}$$

⇒ Filtros FIR pelo Método Ótimo de Chebyshev

- O método ótimo de Chebyshev tem como objetivo a minimização do valor máximo do erro:

$$\min \{ \max \{ |E(\omega)| \} \}$$

Projeto de Filtros FIR com auxílio do Matlab

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O projeto de filtros FIR pode ser simplificado utilizando o Matlab (principalmente em termos dos cálculos que envolvem a obtenção dos coeficientes da função de resposta ao impulso).
- O Matlab possui funções na *Signal Processing Toolbox* dedicadas para filtros digitais. Entre elas podemos listar:
 - `fir1`: projeta filtros-padrão FIR (FPB, FPA, FPF e FRF) utilizando o método da janela.
 - `fir2`: projeta filtros FIR com resposta arbitrária utilizando o método da janela.
 - `boxcar`, `triang`, `bartlet`, `hamming`, `hanning`, `blackman` e `kaiser`: determinam as funções janela correspondentes.
 - `kaiserord`: determina a ordem do filtro FIR com janela Kaiser (para ser utilizado com o comando `fir1`).
 - `firls`: projeta filtros FIR com fase linear utilizando o método dos mínimos quadrados ponderados.
 - `filter`: realiza a filtragem de um sinal.
 - `freqz`: obtém a resposta em frequência do filtro.

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros

Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

**Aproximações
para Filtros IIR**

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Aproximações para Filtros IIR

Aproximações para Filtros IIR

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Os filtros de resposta ao impulso infinita (IIR) podem ser realizados a partir de uma estrutura recursiva (a saída atual depende de versões atrasadas dela mesma).
- A estrutura recursiva produz uma função de transferência com numerador e denominador (ou seja, com zeros e polos), diferente dos filtros FIR que não possuem polos.
- Conforme comentado anteriormente uma característica interessante de filtros digitais IIR é que eles podem ser obtidos a partir de estruturas analógicas correspondentes utilizando uma transformação de variáveis
- Os filtros analógicos podem ser projetados usando um dos métodos mostrados a partir do slide 10.

Filtros IIR pelo método da Transformação Bilinear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O método da transformação bilinear consiste basicamente em mapear o semi-plano s esquerdo no interior do ciclo unitário do plano z .

- O mapeamento bilinear é definido por:

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$$

- A função de transferência do filtro digital é obtida do domínio analógico fazendo:

$$H(z) = H_A(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}$$

- O mapeamento bilinear é não-linear para altas frequências, gerando uma distorção na resposta de módulo conhecida como *warping* (ou empenamento).

Filtros IIR pelo método da Transformação Bilinear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

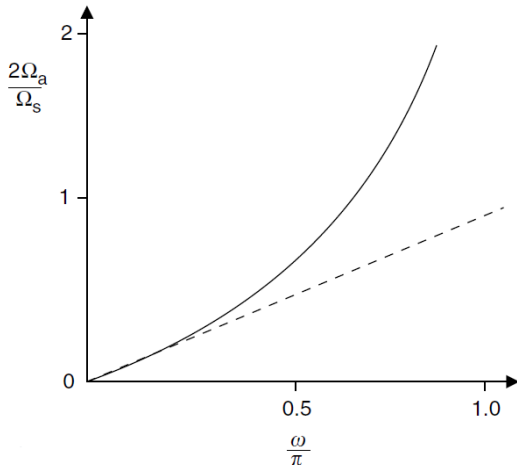
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

**Aproximações
para Filtros IIR**

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Mapeamento realizado pela transformação bilinear:



Filtros IIR pelo método da Transformação Bilinear

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

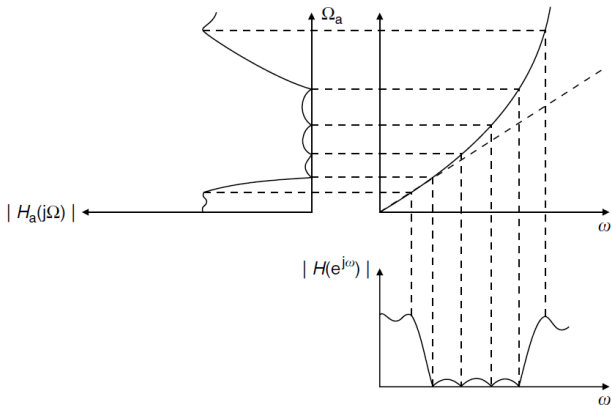
Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

**Aproximações
para Filtros IIR**

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- A característica não linear da transformação bilinear produz distorção na resposta de módulo do filtro digital:



- É possível compensar esse efeito gerando artificialmente uma “pré-distorção” adequada das especificações do filtro analógico.

Filtros IIR pela Aproximação de Módulo e Fase

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Assim como os filtros FIR, os filtros IIR podem ser projetados a partir de métodos numéricos de otimização que visam aproximar especificações de módulo e fase da resposta em frequência do filtro com mínimo erro.
- Considerando que $H(z)$ é a função de transferência de um filtro IIR, então $H(e^{j\omega})$ é função dos coeficientes do filtro (que podem ser agrupados no vetor \mathbf{c}) e da variável independente $\theta = \omega$ e pode ser expressa como: $F(\mathbf{c}, \theta)$.
- A resposta na frequência desejada é: $f(\theta)$.
- Assim, define-se uma função custo que busca o vetor de pesos \mathbf{c} que realiza a minimização do erro entre $F(\mathbf{c}, \theta)$ e $f(\theta)$.

Projeto de filtros IIR usando o Matlab

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- O projeto de filtros IIR utilizando o Matlab pode ser realizado com as mesmas funções utilizadas para o projeto dos filtros analógicos (conforme mostrado a partir do slide 10).
- Entre as funções úteis podemos destacar:
 - butter: projeta filtros analógicos e digitais IIR utilizando a aproximação de Butterworth.
 - buttord: estima a ordem necessária para o filtro de Butterworth a partir das especificações de projeto.
 - cheby1: projeta filtros analógicos e digitais IIR utilizando a aproximação de Chebyshev.
 - cheby1ord: estima a ordem necessária para o filtro de Chebyshev a partir das especificações de projeto.
 - lp2lp, lp2hp, lp2bp, lp2bs: realizam a conversão do filtro passa-baixas normalizado para filtros FPB não normalizado, FPA, FPF e FRF, respectivamente.

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

**Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio**

Filtros Lineares de Mínimo Erro Quadrático Médio

Filtragem Linear de Mínimo Erro Quadrático Médio

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analgógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Quando um sinal de interesse $S(t)$ é contaminado por ruído aditivo $N(t)$, de modo que o sinal observado é:

$X(t) = S(t) + N(t)$, surge o problema de obter uma estimação $\hat{S}(t)$ de $S(t)$ a partir do sinal observado $X(t)$.

- Este problema pode ser definido, de modo equivalente como:
 - Estimação de $S(t)$ a partir de $X(t)$;
 - Filtragem do ruído $N(t)$ existente no sinal medido $X(t)$.
- Entre os filtros Lineares de MMSE (*Minimum Mean Square Error*) podemos destacar:
 - Filtros de Wiener e Filtros de Kalman
 - Filtros Adaptativos
- Os filtros MMSE normalmente tem estrutura FIR e são obtidos a partir de uma análise estatística dos sinais disponíveis, sendo abordados com detalhes na disciplina:

ENG A83 - Processamento Estatístico de Sinais.

Exemplo de Filtragem MMSE

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

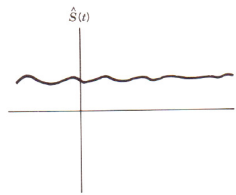
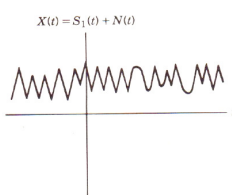
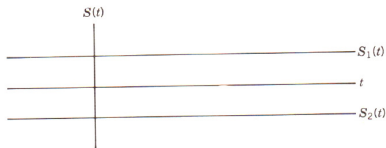
Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio



PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth

Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais

Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

**Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio**

Resumo

Resumo

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analogicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais

Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR

Aproximações
para Filtros IIR

Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

- Neste módulo foram abordados aspectos que envolvem o projeto e a implementação de filtros digitais.
- Inicialmente foram estudados os filtros analógicos.
- A seguir deu-se a apresentação de diversas estruturas digitais para a realização de filtros de resposta ao impulso finita (FIR) e infinita (IIR).
- As etapas que envolvem o projeto de filtros digitais foram abordadas separadamente para os filtros FIR e IIR.
- Exemplos práticos de projeto e teste de filtros digitais foram realizados em sala de aula com o auxílio do Matlab.

Bibliografia Consultada

PDS - Aula 03
Filtros Digitais

Eduardo
Simas

Introdução

Filtros
Analógicos

Aproximação de
Butterworth
Aproximação de
Chebyshev

Filtros Digitais

Estruturas
Básicas de
Filtros Digitais
Projeto de
Filtros Digitais
Aproximações
para Filtros FIR
Aproximações
para Filtros IIR
Filtros Lineares
de Mínimo Erro
Quadrático
Médio

Na elaboração destes slides foram utilizadas as fontes a seguir:

- DINIZ, P. S. R., da SILVA, E. A. B. e LIMA NETTO, S. Processamento Digital de Sinais. Bookman, 2004.
- MITRA, S., Digital Signal Processing, Bookman, 2005.
- WEEKS, M. Processamento Digital de Sinais, LTC, 2011.
- ANTONIOU, A., Digital Signal Processing, McGraw-Hill, 2006.

Algumas figuras foram retiradas na íntegra das referências acima.