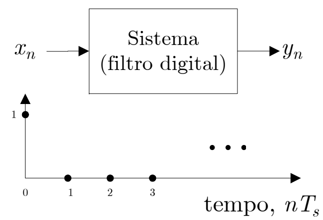
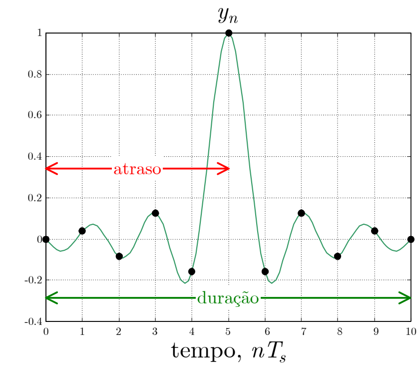
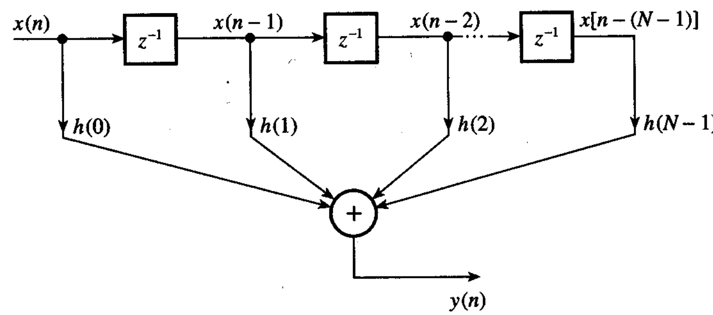
SPDS/PSC – FILTROS FIR I

- Excitando um filtro com a sequência unitária obtém-se na saída a resposta ao impulso
- Nesta figura, a resposta dura $10T_s$, o atraso do filtro é $5T_s$ e o sistema pode ser representado pelo filtro digital com resposta ao impulso finita FIR (*Finite Impulse Response*) cuja estrutura (transversal) é (N=11)







- A saída $y(n)$ só depende da entrada actual $x(n)$ e das N-1 entradas anteriores:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot x(n-i)$$

- A função de sistema é (aplicando a transformada Z)

$$Y(z) = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot X(z) \cdot z^{-i} \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{i=0}^{N-1} h(i) \cdot z^{-i}$$

SPDS/PSC – FILTROS FIR II

- Vantagens:
  1. Podem ser projectados com fase linear
  2. Podem ser realizados como recursivos ou não-recursivos
  3. Permite realizar qualquer função de filtragem através do dimensionamento dos coeficientes
  4. Os FIR não-recursivos são sempre estáveis ⇒ ideais para processamento de sinal adaptativo

$$H(z)=\sum_{i=0}^{N-1} h(i)\cdot z^{-i}=\frac{\sum_{i=0}^{N-1} h(i)\cdot z^{-i+N-1}}{z^{N-1}}=\frac{\sum_{j=0}^{N-1} h(N-1-j)\cdot z^{j}}{z^{N-1}}$$

polinómio em potências positivas de $z \Rightarrow N$-1 zeros

N-1 pólos em z=0, no interior do círculo unitário

  5. Erros numéricos são pequenos nos FIR não-recursivos
- Desvantagens:
  1. Baixa selectividade ⇒ necessário N muito grande
  2. Atraso nem sempre é um número inteiro de períodos de amostragem
- Característica de fase

$$H(z)\Big|_{z=e^{j\omega T_s}}=\left|H(j\omega)\right|e^{j\varphi(\omega)}=\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot e^{-j\omega n T_s}$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot \sin(\omega n T_s)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot \cos(\omega n T_s)}\right)$$

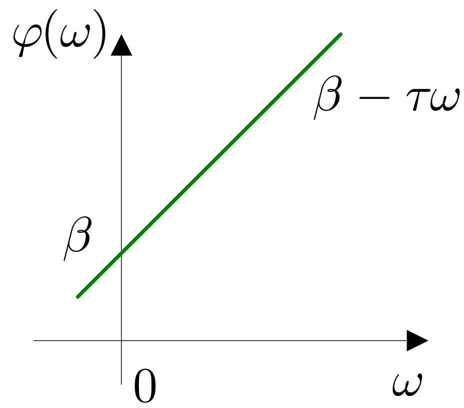
SPDS/PSC – FILTROS FIR III

- Característica de fase **linear**:

$$\varphi(\omega) = \beta - \tau\omega$$

- O atraso de grupo é dado por

$$\tau_g = -\frac{\partial \varphi(\omega)}{\partial \omega} = \tau$$



de forma que, combinando as equações

$$\frac{\sin(\beta - \tau\omega)}{\cos(\beta - \tau\omega)} = -\frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot \sin(\omega n T_s)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot \cos(\omega n T_s)}$$

o que equivale a verificar-se: $\sum_{n=0}^{N-1} h(n)\cdot \sin[\omega(nT_s - \tau) + \beta] = 0$

Soluções: (exercício…)

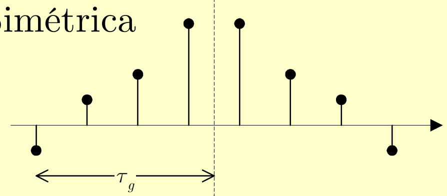
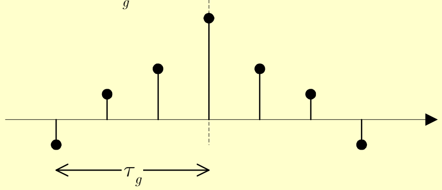
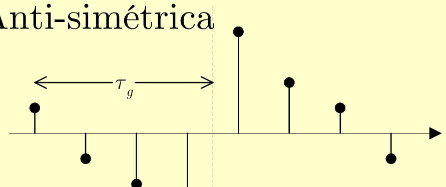
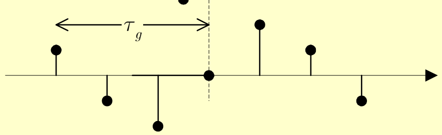
$$\tau = (N-1)\frac{T_s}{2} \quad \text{e} \quad \begin{cases} \beta{=}0 \text{ e } h(n) = h(N-1-n) \\ \beta{=}\pm\dfrac{\pi}{2} \text{ e } h(n) = -h(N-1-n) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Resposta simétrica

$\Rightarrow$ Resposta anti-simétrica

SPDS/PSC – FILTROS FIR IV

- Filtros FIR com fase linear: têm resposta impulsional simétrica ou anti-simétrica e atraso de grupo
$$\tau_g = (N-1)\frac{T_s}{2}$$
- Resposta em frequência dos filtros FIR com fase linear:

$h(n)$	Caso	N	$H(j\omega)$
Simétrica 	1	Par (8)	$e^{-j\omega\tau_g}\sum_{n=0}^{N/2-1} 2h_n \cos\left(\left[n-\frac{N-1}{2}\right]\omega T_s\right)$
	2	Ímpar (7)	$e^{-j\omega\tau_g}\left[h_{\frac{N-1}{2}} + 2\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n \cos\left(\left[n-\frac{N-1}{2}\right]\omega T_s\right)\right]$
Anti-simétrica 	3	Par (8)	$e^{-j\left(\omega\tau_g-\frac{\pi}{2}\right)}\sum_{n=0}^{N/2-1} 2h_n \sin\left(\left[n-\frac{N-1}{2}\right]\omega T_s\right)$
	4	Ímpar (7)	$e^{-j\left(\omega\tau_g-\frac{\pi}{2}\right)}\left[h_{\frac{N-1}{2}} + 2\sum_{n=0}^{(N-3)/2} h_n \sin\left(\left[n-\frac{N-1}{2}\right]\omega T_s\right)\right]$

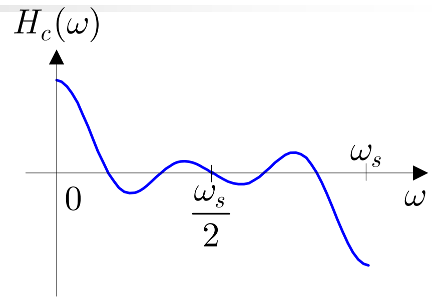
SPDS/PSC – FILTROS FIR V

- Particularidades da resposta em frequência:

$$H(0) = H(\omega_s) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)$$

$$H\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot (-1)^n$$

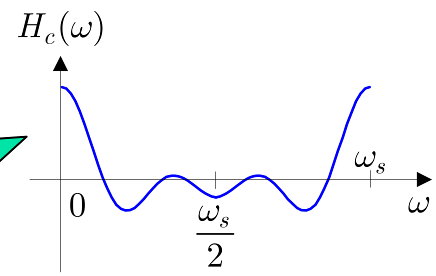
- **Caso 1:** resposta simétrica, N par



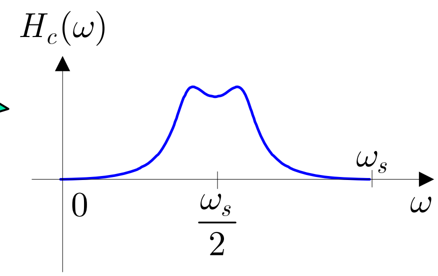
$$H\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 0$$

filtros passa-alto não podem ser realizados

- **Caso 2:** resposta simétrica, N ímpar



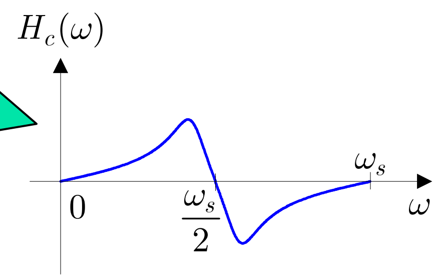
- **Caso 3:** resposta anti-simétrica, N par



$$H(0) = 0$$

$\Rightarrow$ fase constante de $\pi/2$-$\omega\tau$, útil na realização de diferenciadores e transformadores de Hilbert

- **Caso 4:** resposta anti-simétrica, N ímpar



$$H(0) = 0 \text{ e } H\left(\frac{\omega_s}{2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ fase constante $\pi/2$-$\omega\tau$: útil para diferenciadores e transformadores de Hilbert

- **Métodos:**
  1. Desenvolvimento em série de Fourier
  2. Amostragem da resposta em frequência (recursivo e não-recursivo)
  3. Métodos de optimização numérica

1. Desenvolvimento em série de Fourier

- $H(j\omega)$ é periódica em ω, com período ω_s e pode ser aproximada pela série de Fourier

$$H(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot e^{-j\omega n T_s} \quad \text{com} \quad h(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_s/2}^{\omega_s/2} H(j\omega) \cdot e^{j\omega n T_s} d\omega$$

- $H(j\omega)$ é não-causal e infinita logo origina um filtro **não-causal** com resposta impulsional **infinita**

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

- Truncando a série: $h(n)=0$ para $|n|>(N\text{-}1)/2$ com N ímpar, obtém-se

$$H(z) = h(0) + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \left[h(-n) \cdot z^{n} + h(n) \cdot z^{-n} \right]$$

de forma que a função de sistema

$$H'(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} H(z)$$

é causal.

Exemplo: Projecto de filtro FIR ideal passa-baixo

$$H_{ideal}(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \le \omega_c \\ 0, & \omega_c \le |\omega| \le \dfrac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

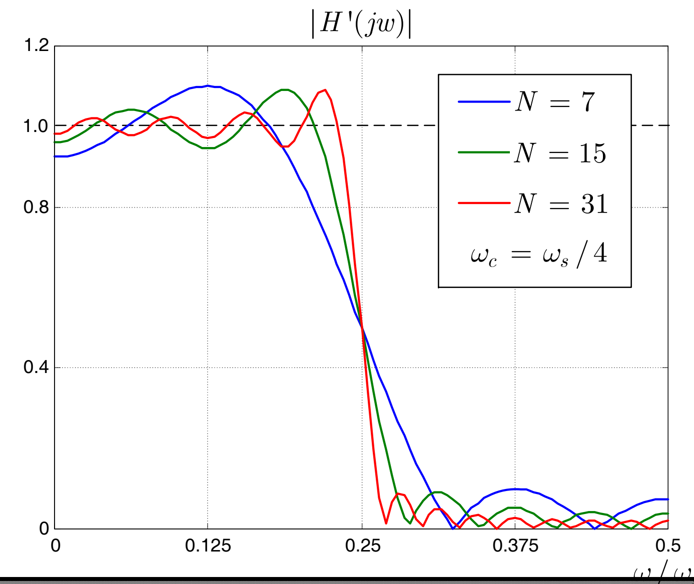
Os coeficientes obtêm-se de

$$h(n) = \frac{1}{\omega_s} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n T_s} d\omega = \frac{\sin(n\omega_c T_s)}{n\pi}$$

e a função de sistema é:

$$H'(z) = z^{-\frac{N-1}{2}} \left[\frac{\omega_c T_s}{\pi} + \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \frac{\sin(n\omega_c T_s)}{n\pi} (z^n + z^{-n}) \right]$$

- A ondulação na banda de passagem tem um valor máximo que é quase independente de $N \Rightarrow$ **fenómeno de *Gibbs***
- N elevado $\Rightarrow$ aumenta a frequência mas não reduz a amplitude da ondulação



Conclusão: método pouco eficiente

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR III

- Correcção da série de Fourier com janelas (*windowing*)
- A truncatura abrupta da série de Fourier provoca oscilações de grande amplitude na atenuação do filtro. É preferível reduzir os coeficientes de forma progressiva, através da multiplicação por janelas

$$\hat{h}(n) = h(n) \cdot w(n) \quad \text{com} \quad w(n) = \begin{cases} \neq 0, & n = 0,\ldots.N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases}$$

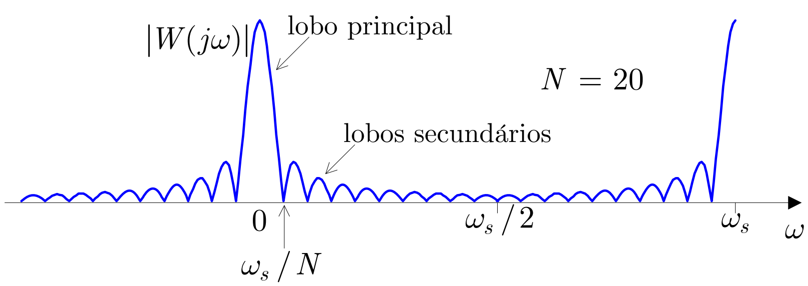
- A resposta em frequência do filtro inicial é modificada pois resulta da convolução na frequência de $H(j\omega)$ com $W(j\omega)$

$$\hat{H}(j\omega) = H(j\omega) \otimes W(j\omega) = \int_{-\omega_s/2}^{w_s/2} H(j\lambda) W(j\omega - j\lambda) d\lambda$$

Exemplo: (janela rectangular do exemplo anterior)

$$w(n) = \begin{cases} 1, & n = 0,\ldots,N-1 \\ 0, & \text{outros} \end{cases} \qquad W(j\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega T_s} = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega T_s} \frac{\sin(N\omega T_s/2)}{N\omega T_s/2}$$

Janela com lobo principal largo e lobos secundários grandes. A selectividade e a ondulação do filtro resultante dependem destes factores



SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR IV

- Janelas com inclinação (diferentes da janela rectangular)
- Permitem lobos secundários de menor amplitude mas lobo principal mais largo ⇒ ondulação devido ao fenómeno de *Gibbs* é reduzida mas a banda de transição é mais larga (filtro menos selectivo)
- O aumento de N torna os lobos mais estreitos mas com a mesma amplitude relativa
- A banda de transição (normalizada) é

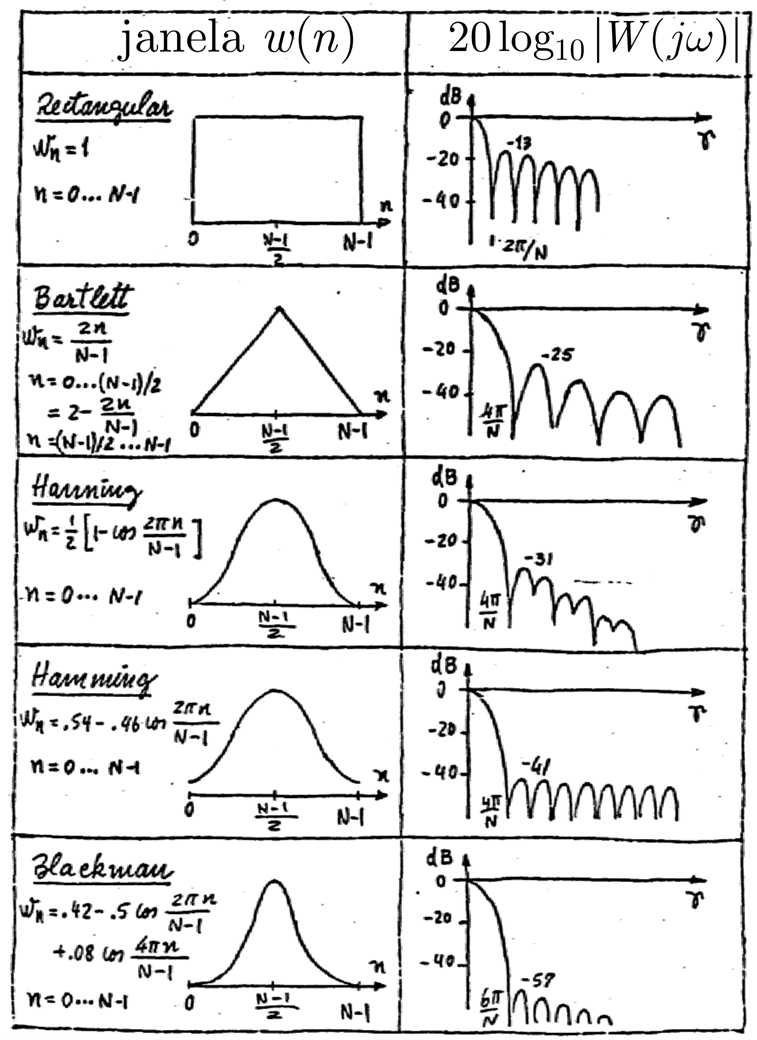
$$\frac{\Delta f}{f_s} = \frac{\text{Constante dependente da janela}}{N}$$

Name of window function	*Transition width* (Hz) (*normalized*)	*Passband ripple* (dB)	*Main lobe relative to side lobe* (dB)	*Stopband attenuation* (dB) (*maximum*)	*Window function* $w(n), \lvert n \rvert \leq (N-1)/2$
Rectangular	$0.9/N$	0.7416	13	21	1
Hanning	$3.1/N$	0.0546	31	44	$0.5 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Hamming	$3.3/N$	0.0194	41	53	$0.54 + 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$
Blackman	$5.5/N$	0.0017	57	75	$0.42 + 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$
	$2.93/N\ (\beta = 4.54)$	0.0274		50	$\frac{I_0(\beta\{1 - [2n/(N-1)]^2\}^{1/2})}{I_0(\beta)}$
Kaiser	$4.32/N\ (\beta = 6.76)$	0.002 75		70	
	$5.71/N\ (\beta = 8.96)$	0.000 275		90	

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR V

- Conclusões sobre o método: **desenvolvimento em série de Fourier com correcção por janela**

- Aplicação muito simples. O método é computacionalmente eficiente
- Falta de flexibilidade. Apenas a janela de Kaiser permite alguma flexibilidade na troca de banda de transição por ondulação na banda de passagem
- Devido à convolução entre $H(j\omega)$ e $W(j\omega)$, as frequências que definem a banda de passagem e de atenuação não podem ser especificadas com precisão
- O aumento de N torna os lobos mais estreitos mas com a mesma amplitude relativa
- Pode ser difícil obter $h(n)$ analiticamente, a partir da série de Fourier, o que torna inviável a aplicação do método

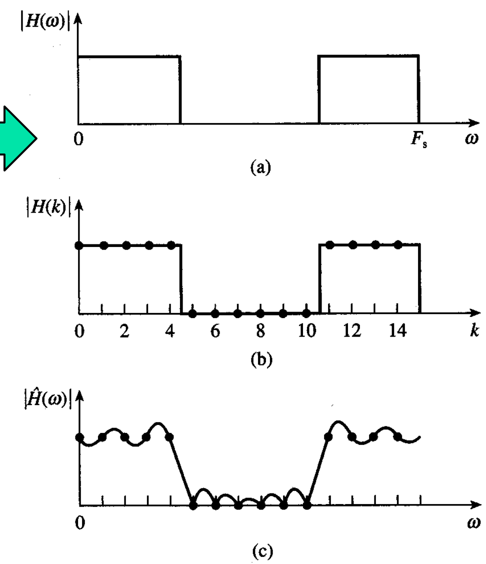


2. Amostragem da resposta em frequência: filtro FIR não-recursivo

- Especifica-se a amplitude e a fase da resposta em frequência pretendida, em N pontos igualmente espaçados no intervalo $\omega \in [0, \omega_s[$, nas frequências:

$$\omega_k = \omega_s \frac{k}{N} : \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$H(k) = H(z)_{|z=e^{j\omega_k Ts}}$$



- As amostras da resposta ao impulso podem obter-se a partir da Transformada discreta de Fourier (IDFT)

$$h(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

- A função de sistema sintetizada pelo filtro resultante vem dada por

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\right] z^{-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} H(k) \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}\right)^{n}}_{\text{série geométrica}}$$

$$= \frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{H(k)}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}$$

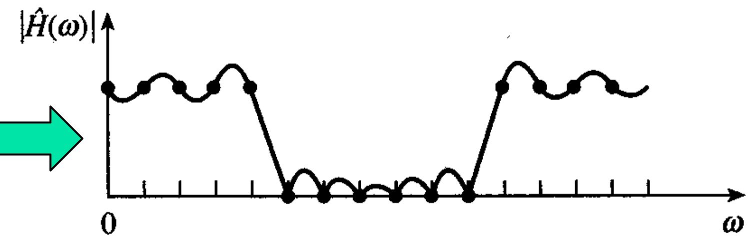
SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR VII

- A resposta em frequência é

$$\hat{H}(j\omega) = \frac{e^{-j\frac{\omega T_s (N-1)}{2}}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \cdot S(\omega, k)$$

com

$$S(\omega, k) = e^{-j\frac{\pi k}{N}} \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2} - \frac{\pi k}{N}\right)}$$



- **Nota:** quando $\omega \rightarrow \omega_k = \omega_s k/N$ pode mostrar-se que (exercício...)

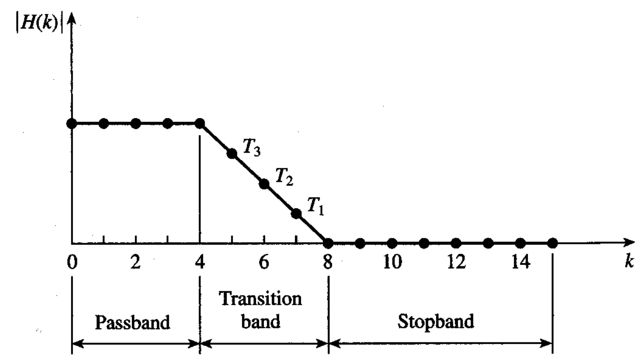
$$\lim_{w \to w_k = \frac{w_s k}{N}} S(\omega, k) = N e^{-j\pi k\left(\frac{1}{N} \pm 1\right)}$$

$$\lim_{w \to w_k = \frac{w_s k}{N}} \hat{H}(\omega) = H(k)$$

- Para $\omega = \omega_k$, $\hat{H}(j\omega_k) = H(k)$ tem o valor correcto, especificado. Quando $\omega \neq \omega_k$, $\hat{H}(j\omega)$ **interpola** continuamente as amostras $H(k)$ da resposta em frequência através da função $S(\omega,k)$ **que é muito selectiva**

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR VIII

- Devido à transição abrupta na especificação dos valores $H(k)$, a atenuação do filtro resultante não é muito elevada e a ondulação é grande. Este problema é semelhante ao que ocorre com o método do desenvolvimento em série de Fourier, com a truncatura dos coeficientes

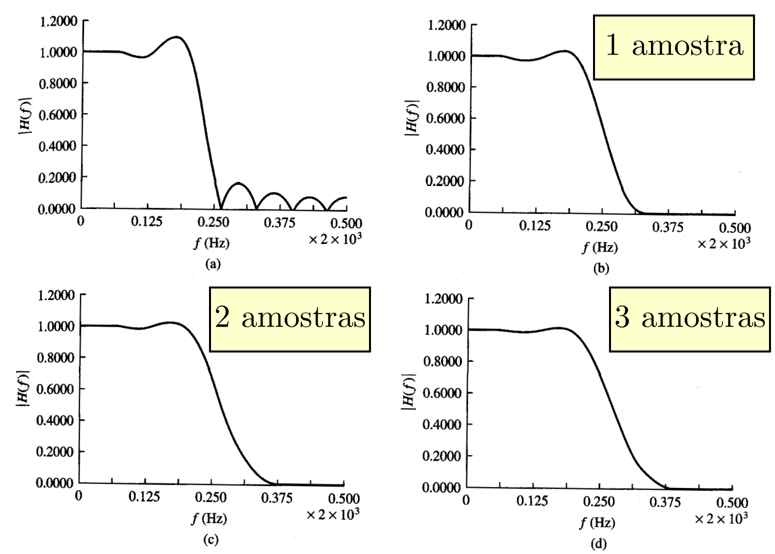


- Pode melhorar-se a atenuação especificando uma transição menos abrupta, com mais amostras

- No caso de um filtro passa-baixo, por cada amostra na banda de transição a atenuação aumenta de aproximadamente 20 dB e a largura da banda de transição de aproximadamente f_s/N (Hertz). Filtro de ordem N com M amostras de transição:

$$\text{Atenuação} \approx (25 + 20M)\ \text{dB}$$

$$\text{Banda de transição} \approx \frac{(M+1)}{N} f_s$$



- **Exemplo:** f_s=2kHz, filtro com 15 amostras

$$H(k) = \begin{cases} 1, & k = 0,1,2,3 \text{ e } 14,13,12,11 \\ 0, & k = 4 \text{ a } 10 \end{cases}$$

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR IX

2. Amostragem da resposta em frequência: filtro FIR recursivo

- Quando as banda de interesse do filtro (i.e., passagem de sinal) ocupam uma fracção pequena do intervalo $\omega \in [0, \omega_s/2[$, muitos dos N-1 valores de $H(k)$ (função especificada) são **nulos**. No entanto, em geral, os $h(n)$ **não são nulos** e têm de ser tidos em conta no cálculo não-recursivo do filtro de acordo com:

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$$

- A representação alternativa:

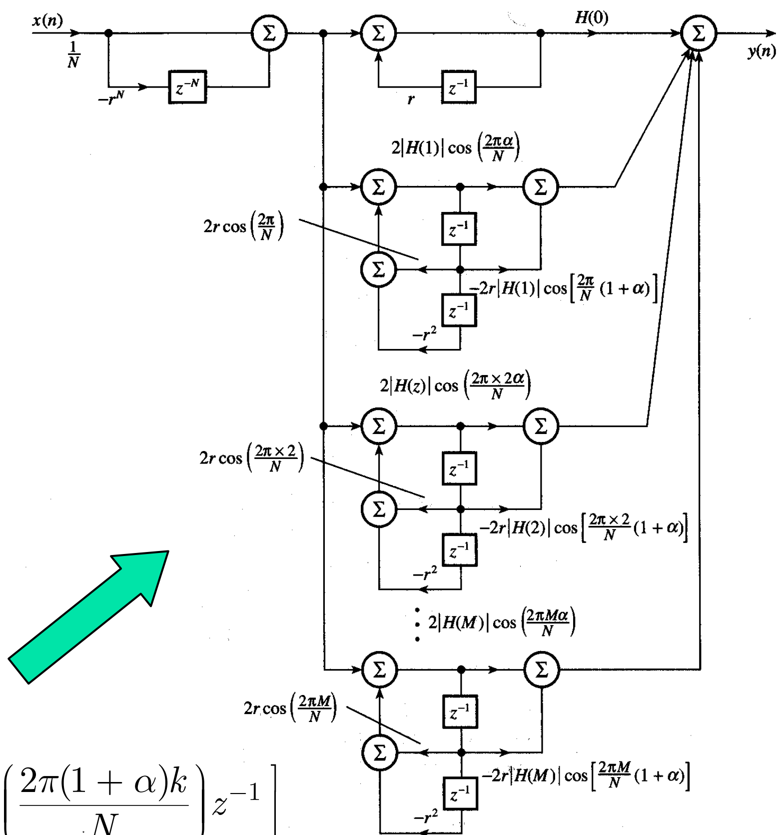
$$\hat{H}(z) = \underbrace{\frac{1 - z^{-N}}{N}}_{comb\ filter} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{H(k)}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}}_{\text{filtro recursivo}}$$

  permite concluir que o filtro pode ser realizado como a cascata de um filtro **pente** (*comb filter*) com um filtro que é a soma de N filtros recursivos de 1ª ordem, com coeficientes complexos $e^{j2\pi k/N}$
- Os N zeros do filtro pente **cancelam** os pólos do filtro recursivo de forma que de facto se tem um FIR
- Na prática, devido à utilização de palavras de comprimento finito, este cancelamento **não é perfeito** pelo que o filtro resultante é de facto um IIR (resposta impulsional infinita), potencialmente instável

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS FIR X

- Para evitar os problemas de instabilidade faz-se a amostragem da resposta em frequência com um raio r ligeiramente inferior a 1 e obtém-se

$$\hat{H}(z) = \underbrace{\frac{1 - r^N z^{-N}}{N}}_{\textit{comb filter}} \sum_{k=0}^{N-1} \underbrace{\frac{H(k)}{1 - re^{j\frac{2\pi}{N}k} z^{-1}}}_{\text{filtro recursivo}}$$



- Para um filtro com resposta impulsional **simétrica** pode mostrar-se que, com

$$M = \left\lfloor \frac{N-1}{2} \right\rfloor \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{N-1}{2}$$

se tem a função de sistema com coeficientes reais:

$$\hat{H}(z) = \frac{1 - r^N z^{-N}}{N} \left[\frac{|H(0)|}{1 - rz^{-1}} + \sum_{k=1}^{M} |H(k)| \frac{2\cos\left(\frac{2\pi\alpha k}{N}\right) - 2r\cos\left(\frac{2\pi(1+\alpha)k}{N}\right) z^{-1}}{1 - 2r\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \right]$$

3. **Outros métodos**

- Métodos de optimização numérica. Calculam o **erro** no domínio da frequência

$$E(j\omega) = W(j\omega)\left[H(j\omega) - \underbrace{\sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega T_s}}_{\hat{H}(j\omega)}\right]$$

função de peso

e determinam os coeficientes que minimizam funcional $F(\cdot)$ de custo deste erro

$$\mathbf{h}(n)_{\text{opt}} = \min_{h(n):n=0,\ldots,N-1} F[E(j\omega)]$$

- **Exemplos:**

$$F[E(j\omega)] = \max_{\omega\in[\text{Pass} \cup \text{Stop}]} |E(j\omega)|$$

Maximização na banda de passagem e de atenuação

- Esta funcional leva a um filtro-solução com igual ondulação na banda de passagem e de atenuação (*equiripple*)
- A resposta na banda de transição é arbitrária e pode ser insatisfatória...
- Será que a funcional

$$F[E(j\omega)] = \int_{D\omega} |E(j\omega)|^2 d\omega$$

que corresponde à minimização do erro quadrático médio, produz filtros com boas características ?

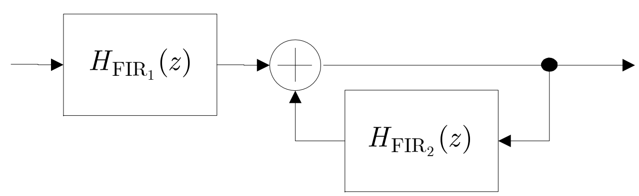
SPDS/PSC – FILTROS IIR I

- Equação às diferenças:

$$y(n) = \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot y(n-i) + \sum_{i=0}^{N} b_i \cdot x(n-i)$$

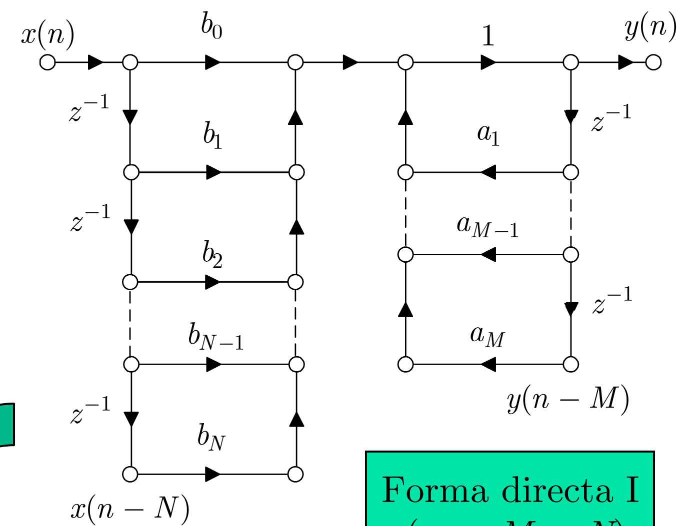
- A saída actual depende da entrada actual, das N entradas anteriores e das M saídas anteriores (filtro recursivo de ordem M)
- O filtro recursivo não tem resposta impulsional de duração finita e por isso se designa por IIR (*Infinite Impulse Response*)
- O filtro IIR tem realimentação da saída $\Rightarrow$ pode ser instável
- Um filtro IIR pode ser muito mais selectivo do que um filtro FIR (com a mesma complexidade computacional)
- Um filtro IIR pode calcular-se a partir de dois filtros FIR
- **Função de sistema:**

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} b_i \cdot z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot z^{-i}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{N} b_i \cdot z^{-i}}_{H_{\mathrm{FIR}_1}(z)} \cdot \frac{1}{\underbrace{1 - \sum_{i=1}^{M} a_i \cdot z^{-i}}_{H_{\mathrm{FIR}_2}(z)}}$$

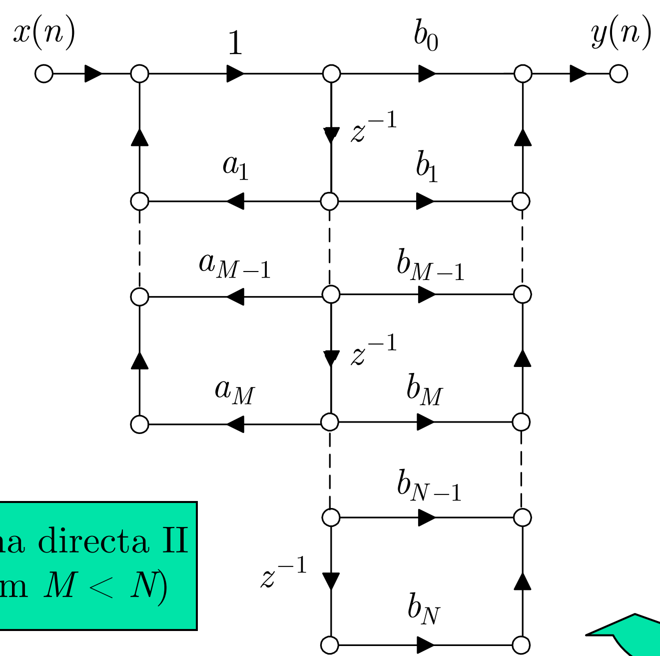


SPDS/PSC – FILTROS IIR II

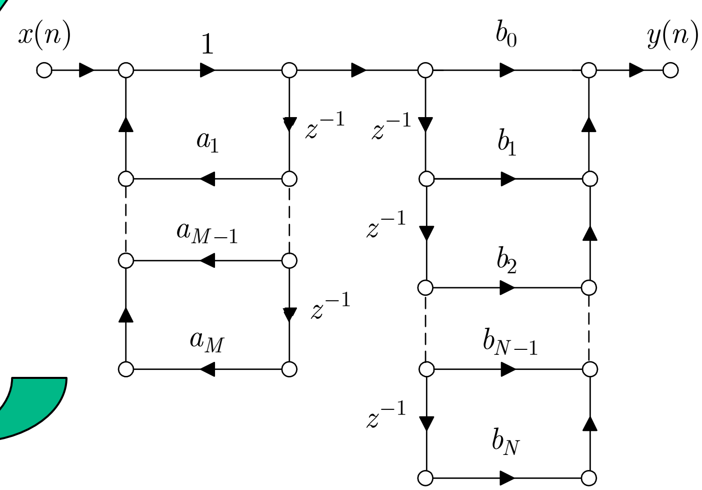
- **Diagrama de fluxo de sinal:**
- Por inspecção de $H(z)$ obtém-se a **forma directa I**
- Trocando a ordem da ligação em cadeia e associando as variáveis na linha de atraso obtém-se a **forma directa II** (número mínimo de atrasos)



Forma directa I (com $M < N$)



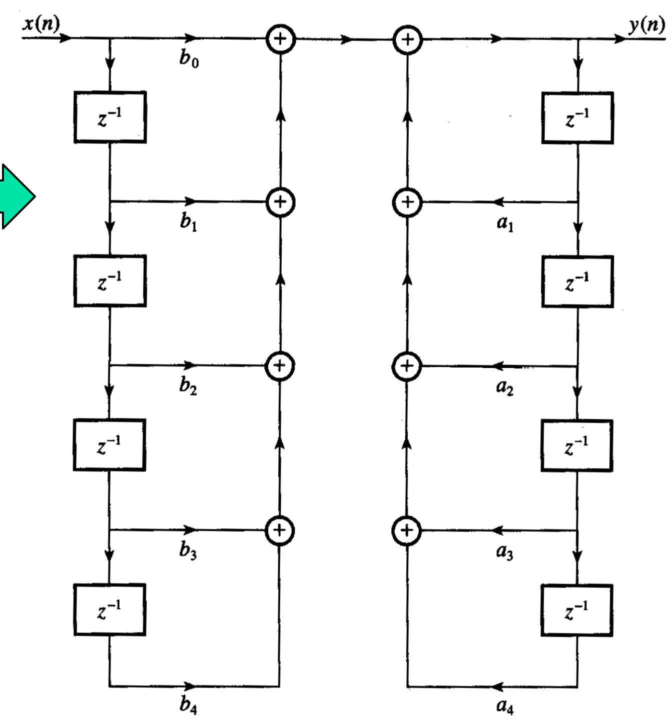
Forma directa II (com $M < N$)



SPDS/PSC – FILTROS IIR III

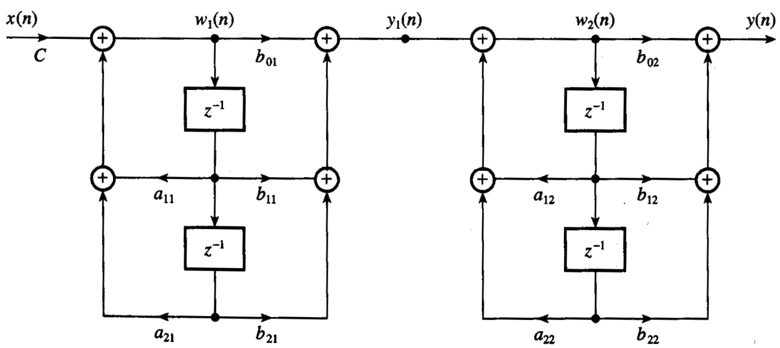
- Realização do filtro IIR: 3 formas
  1. Com as formas directas I e II. Pouco usadas devido à grande sensibilidade destas formas aos erros numéricos.
  2. Com secções de 2ª ordem (biquadráticas) na forma directa II, **em cascata**
  3. Com secções de 2ª ordem (biquadráticas) na forma directa II, **em paralelo**
- Exemplo: filtro IIR com $M = N = 4$ (4ª ordem)

Realização	Função de sistema $H(z)$
Directa	$H(z) = \dfrac{\sum_{i=0}^{4} b_i \cdot z^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^{4} a_i \cdot z^{-i}}$
Cascata	Factorização: $H(z) = C\prod_{i=1}^{2}\dfrac{1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 - a_{1i}z^{-1} - a_{2i}z^{-2}}$
Paralelo	Expansão em fracções parciais: $H(z) = C + \sum_{i=1}^{2}\dfrac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1}}{1 - a_{1i}z^{-1} - a_{1i}z^{-2}}$

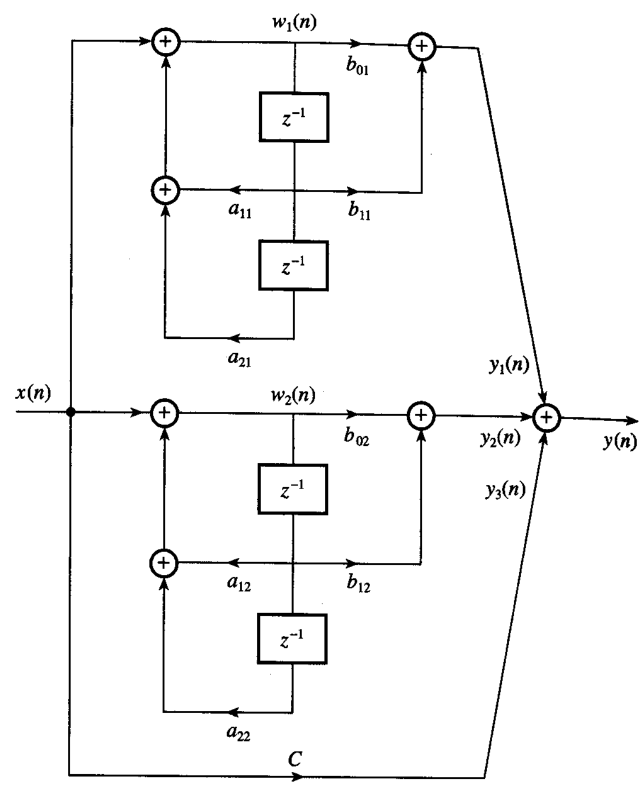


SPDS/PSC – FILTROS IIR IV

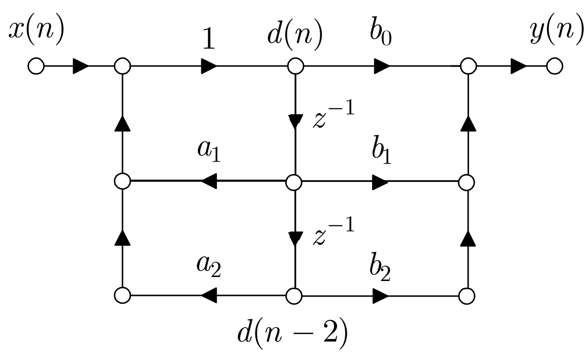
cascata



Paralelo



- Realização de secção biquadrática:



- Equações:

$$
\begin{array}{|ll|}
\hline
d(n) = x(n) + a_1 \cdot d(n-1) + a_2 \cdot d(n-2) & \rightarrow \text{ sequência auxiliar} \\
y(n) = b_0 \cdot d(n) + b_1 \cdot d(n-1) + b_2 \cdot d(n-2) & \rightarrow \text{ saída} \\
\hline
\end{array}
$$

- **Métodos:**
  1. Conservação da resposta ao impulso
  2. Transformada Z adaptada
  3. Transformação bilinear

1. Conservação da resposta ao impulso

a) Determinar a resposta ao impulso do filtro **analógico** pretendido (protótipo)

b) Amostrar esta resposta com período T_s e obter a resposta $h(n)$ para $n>0$

c) Obter a função de transferência como a transformada Z de $h(n)$

- Se o filtro analógico tiver apenas pólos simples (P pólos)

$$H_A(s) = \sum_{i=1}^{P} \frac{A_i}{s - s_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = \sum_{i=1}^{P} A_i e^{s_i t} \xrightarrow{t=nT_s} h(n) = T_s \sum_{i=1}^{P} A_i e^{s_i n T_s}$$

Necessário para manter a energia!

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = T_s \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{P} A_i e^{s_i n T_s} \right) \cdot z^{-n} = T_s \sum_{i=1}^{P} \frac{A_i}{1 - e^{s_i T_s} z^{-1}}$$

- Se houver pólo complexo então:

$$s_i = \sigma_i + j\omega_i \quad \rightarrow \quad z_i = e^{s_i T_s} = e^{(\sigma_i + j\omega_i) T_s}$$

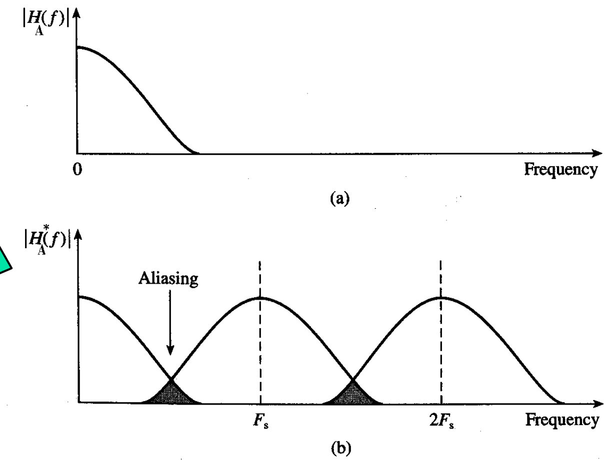
$$\text{analógico estável: } \sigma_i < 0 \ \rightarrow \ |z_i| < 1 \ \rightarrow \ \text{digital estável}$$

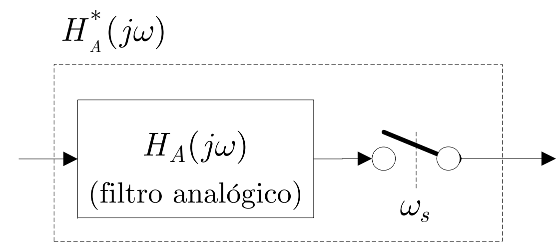
SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS IIR II

- **Problema:** *aliasing* pode modificar significativamente a resposta em frequência do filtro
- A resposta do filtro analógico é repetida em todos os múltiplos da frequência de amostragem
- Para não existir *aliasing* é necessário que

$$H_A(j\omega) = 0, \quad |\omega| \geq \frac{\omega_s}{2}$$

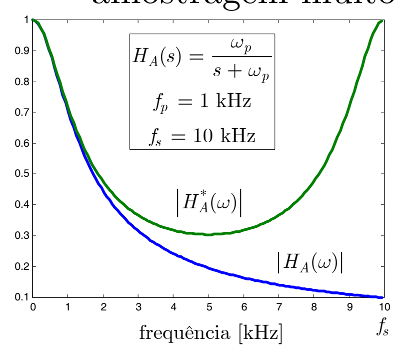
- **Conclusão:** o método da conservação da resposta ao impulso
  - Não pode ser usado para sintetizar filtros passa-alto ou rejeita-banda
  - É adequado para filtros muito selectivos ou quando se pode ter a frequência de amostragem muito elevada

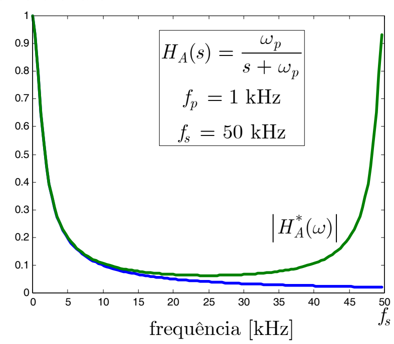




$$H_A^*(j\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_A(j\omega - jk\omega_s)$$

Resposta em frequência do filtro equivalente





2. **Transformada Z adaptada** (MZT-*Matched Z Transform*)

- O método da transformada Z adaptada transforma directamente os pólos e os zeros do filtro analógico $H_A(s)$ em pólos e zeros do filtro digital $H(z)$

a) Determinar os pólos e zeros do filtro analógico pretendido

b) Transformar os pólos e zeros de acordo com:

Pólo/zero real:

$$s+\alpha \longrightarrow 1-e^{-\alpha T_s}z^{-1}$$

Pólos/zeros complexos conjugados:

$$(s+\alpha)^2+\beta^2 \longrightarrow 1-2e^{-\alpha T_s}\cos(\beta T_s)z^{-1}+e^{-2\alpha T_s}z^{-2}$$

Exemplo: Calcular o filtro digital equivalente em termos da MZT ao filtro de *Butterworth* de 2ª ordem com frequência de corte ω_p a -3dB

Filtro de *Butterworth* de 2ª ordem normalizado: $H_B(\hat{s})=\hat{s}^2+\sqrt{2}\hat{s}+1 \rightarrow s_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1\pm j)$

O filtro analógico desnormalizado é:

$$H_A(s)=\left.\frac{1}{H_B(\hat{s})}\right|_{\hat{s}=\frac{s}{\omega_p}}=\frac{\omega_p^2}{s^2+\sqrt{2}\omega_p s+\omega_p^2}$$

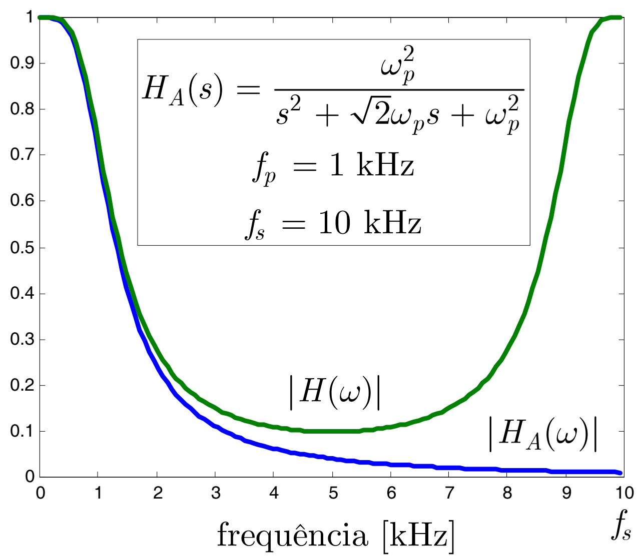
Então:

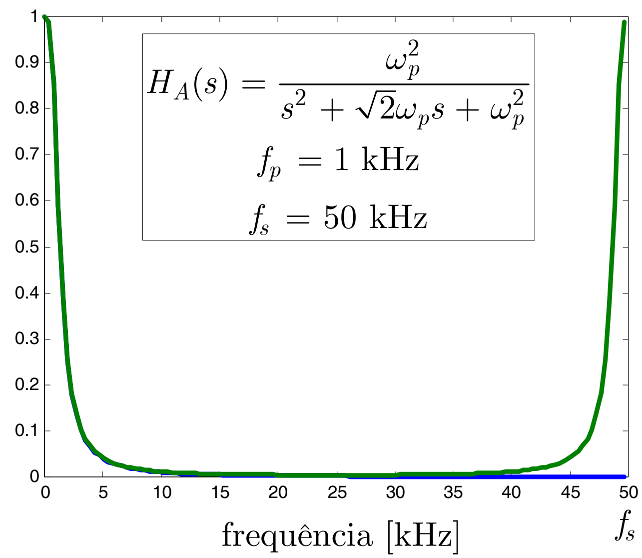
$$s^2+\sqrt{2}\omega_p s+\omega_p^2=(s+\alpha)^2+\beta^2 \rightarrow \alpha=\beta=\frac{\omega_p}{\sqrt{2}}$$

Pela MZT, o filtro digital vem:

$$H(z)=\frac{\omega_p^2}{1-2e^{-\frac{\omega_p T_s}{\sqrt{2}}}\cos\left(\frac{\omega_p T_s}{\sqrt{2}}\right)z^{-1}+e^{-\sqrt{2}\omega_p T_s}z^{-2}}$$

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS IIR IV





- **Conclusões:**
- O método MZT e o método da conservação da resposta ao impulso conduzem a filtros digitais $H(z)$ com o mesmo denominador (mesmos pólos)
- Tal como o método da conservação da resposta ao impulso, o eixo de frequências $0 \leq f < \infty$ (no domínio analógico) é comprimido ao intervalo de frequências de interesse $0 \leq f < f_s/2$ o que leva a distorção da resposta em frequência do filtro digital (devido a *aliasing*)
- O filtro digital tende a ser menos selectivo do que o analógico
- O método é também sensível aos problemas de *aliasing* e não pode ser utilizado para filtros passa-alto e rejeita-banda

3. Transformação bilinear

- Considere-se um integrador analógico $H_I(s)=1/s$ cuja resposta ao sinal $x(t)$ é

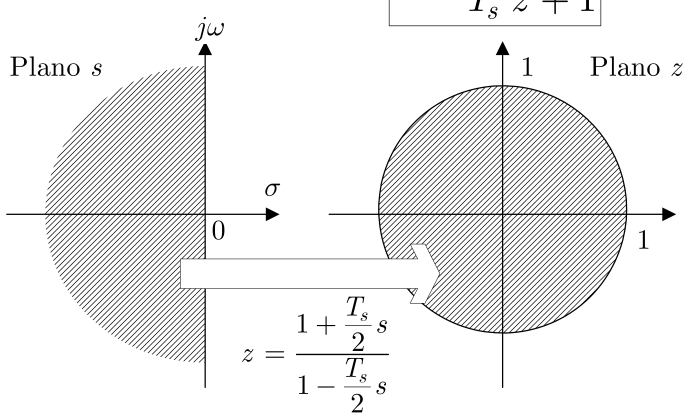
$$y(t)=y(t_0)+\int_{t_0}^{t}x(\tau)d\tau \xrightarrow[t_0=nT_s-T_s]{t=nT_s} y(n)-y(n-1)=\frac{T_s}{2}[x(n-1)+x(n)]$$

Integrador trapezoidal

- Obtém-se o integrador digital com função

$$H_I(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{T_s}{2}\frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow H_I(s)=\frac{1}{s}$$

pelo que $\boxed{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$ → Transformação bilinear



$$s=\sigma+j\omega \rightarrow |z|^2=\frac{\left(1+\frac{\sigma T_s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{\sigma T_s}{2}\right)^2+\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)^2}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \sigma<0 \rightarrow |z|<1 \\ \sigma=0 \rightarrow |z|=1 \\ \sigma>0 \rightarrow |z|>1 \\ \hline\end{array}$$

a) Seleccionar filtro analógico $H_A(s)$ com características pretendidas

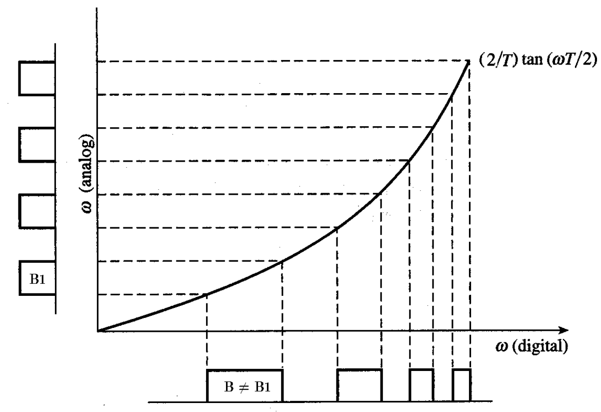
b) Obter o filtro digital como $H(z)=H_A(s)\big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}}$

SPDS/PSC – PROJECTO DE FILTROS IIR VI

- **Propriedades da transformação bilinear:**
- Como o SPCE é mapeado no interior do círculo unitário, um filtro analógico estável origina sempre um filtro digital estável
- Deforma a escala de frequências (*frequency warping*) e consequentemente não preserva as larguras de banda

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} \rightarrow j\omega_a = \frac{2}{T_s}\frac{e^{j\omega_d T_s}-1}{e^{j\omega_d T_s}+1}$$

$$\boxed{\omega_a = \frac{2}{T_s}\tan\left(\frac{\omega_d T_s}{2}\right)}$$



- Aparte a deformação de frequência, a característica de atenuação (amplitude) é preservada
- A característica de fase (e de atraso de grupo) não é preservada
- **Pré-distorção da escala de frequências:** compensa a distorção introduzida pela transformação bilinear. Para obter filtro digital com bandas de atenuação ou de passagem com frequências $\omega_{d1}, \omega_{d2}, \ldots$ deve projectar-se o filtro analógico com as frequências $\omega_{a1}, \omega_{a2}, \ldots$