GppCom

Grupo de Pesquisa em Prototipagem Rápida de Soluções para Comunicação.

DCO Departamento de Engenharia de Comunicações

UFRN UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Filtros Digitais

Vicente Sousa

GppCom/DCO/UFRN

Natal, 19/10/2016

Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN)

1

Objetivos

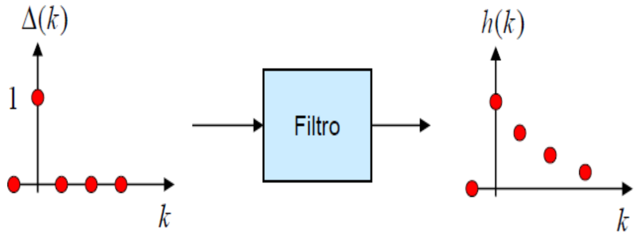
- Explicar algumas propriedades importantes usadas em projetos de filtros digitais;
- Conceituar Filtro Digital;
- Diferenciar filtros FIR e IIR;
- Discutir sobre ferramentas utilizadas para projetar filtros digitais.

2

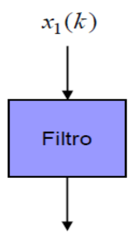
Resposta ao Impulso

$$\Delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

Função Impulso Digital



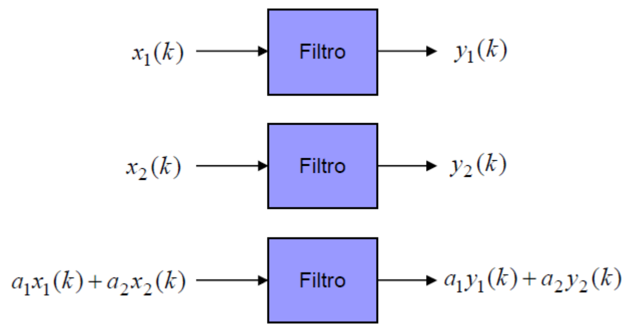
Causalidade



$$y_1(k) = f[x_1(k), x_1(k-1), x_1(k-2) \ldots x_1(k-m)] \qquad m > 0$$

- **Realizável em tempo real;**
- **Em um dado tempo *m*, produz uma saída que é dependente somente das entradas presentes e passadas (*k*≤*m*) e das saídas passadas (*k*<*m*);**
- **Não depende de valores futuros de entrada e saída. Em um sistema prático, a saída não pode se antecipar.**

Linearidade



- **Atende o princípio da superposição:** a resposta do sistema da combinação linear de duas entradas x_1 e x_2 é a combinação linear de suas saídas y_1 e y_2, quando a entrada é aplicada individualmente;

- **Para um sistema linear ser causal é necessário e suficiente que a resposta ao impulso *h*(*t*) seja zero para *t* < 0.**

Estabilidade

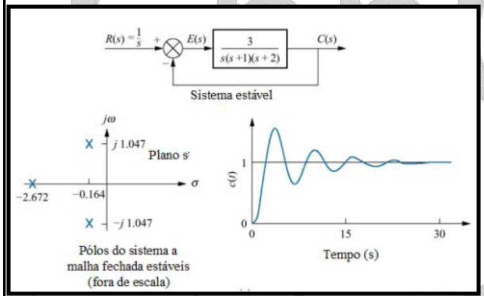
- Um sistema é **BIBO estável** se para qualquer entrada limitada em amplitude, a saída também for limitada em amplitude, independente do estado interno do sistema;
  - BIBO: bounded input – bounded output;
  - Do ponto de vista prático, sistema instáveis não tem utilidade.

- **Determinação da BIBO estabilidade:** está associada à localização dos pólos (raízes da equação característica da função de transferência do sistema). Se todos os pólos estiverem no semiplano esquerdo, então o sistema é BIBO-estável.

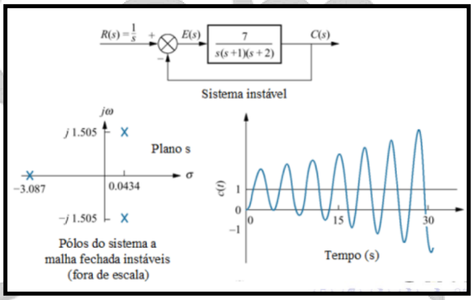
Grupo de Pesquisa em Prototipagem Rápida de Soluções para Comunicação.

Estabilidade

Sistema estável



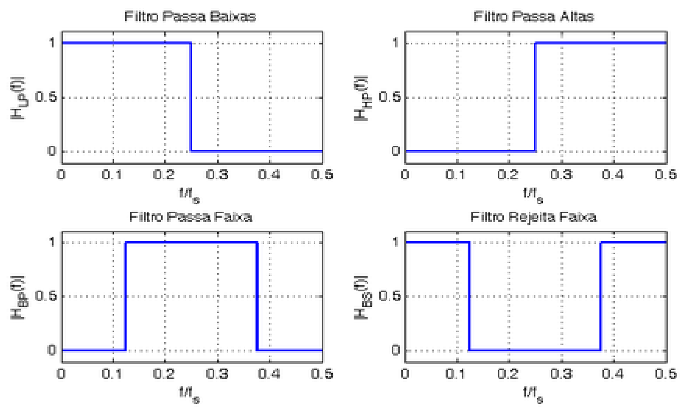
Sistema instável



- Enquanto as oscilações nos sistemas estáveis diminuem, nos instáveis elas aumentam sem limite;
- A presença de pólos no semiplano direito vai fazer com que a resposta aumente exponencialmente, de forma monotônica ou oscilatória.

Filtros ideais

- **Ganho unitário** (deixa passar o sinal sem distorção) em uma faixa de frequências e **ganho zero** (impede a passagem do sinal) em outras.



Filtros ideais

- Filtros digitais são descritos pela seguinte equação

entrada atual e de valores passados de entrada

valores passados da saída

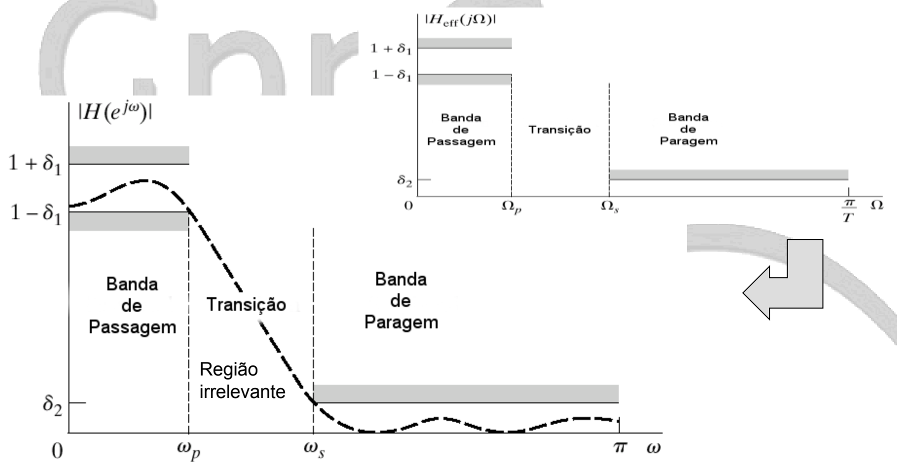
$$y(n)=\sum_{k=0}^{N}b[k]x[n-k]-\sum_{k=1}^{M}a[k]y[n-k]$$

Saída do filtro

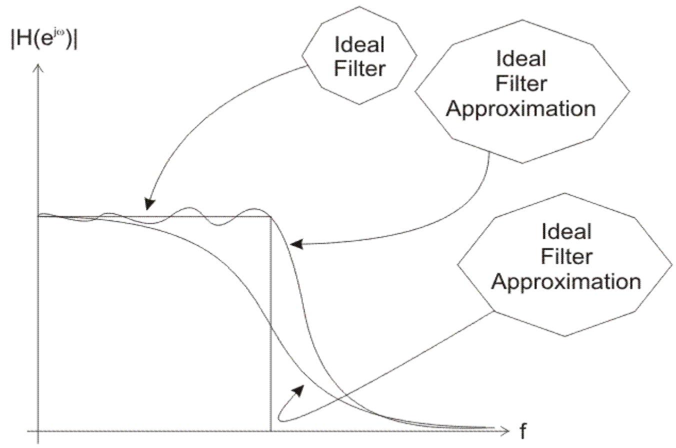
pesos

Soma pesada da entrada atual e de valores passados de entrada e saída!!!

Filtros Reais



Filtros Ideais x Reais



Ordem dos filtros (1/2)

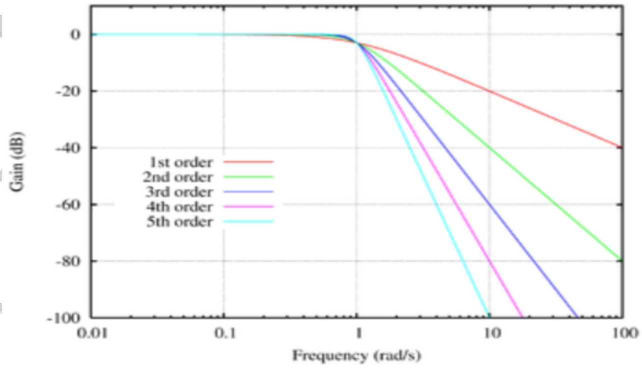
- A **ordem de um filtro digital** é o número de contribuições previamente armazenadas na memória do processador utilizadas para calcular a próxima componente. Todos os filtros digitais podem ser escritos da seguinte maneira:

Ordem zero	$y_n=a_0x_n$
Primeira ordem	$y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}$
Segunda ordem	$y_n=a_0x_n+a_1x_{n-1}+a_2x_{n-2}$

- ***Taps* ou coeficientes do filtro (filtros FIR)**: a_0, a_1, a_2,..., a_n;
- **Ordem do filtro =** número de *taps - 1*.

Ordem dos filtros (2/2)

- Com o aumento da ordem, a resposta do filtro tende para a resposta ideal.



Resposta em frequência de filtros Butterworth em diferentes ordens.

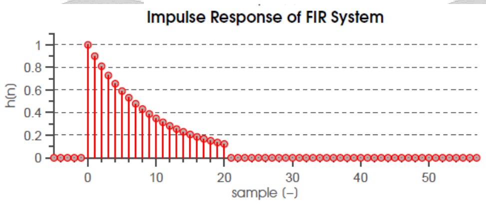
Vantagens dos filtros digitais

- Reutilizável;
- Podem ser testados e implementados em um computador;
- São extremamente estáveis, obtendo resultados mais precisos;
- O desempenho dos filtros digitais não depende dos componentes do circuito, ou seja, sua resposta não é influenciada por mudanças ambientais.

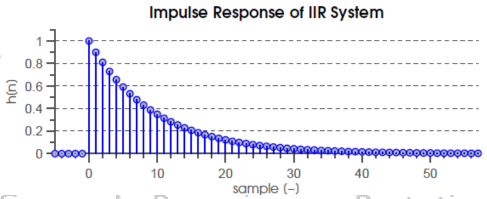
Tipos de filtros digitais

- Filtros digitais podem ser divididos em dois tipos:
  - **Filtros FIR:** Finite Impulsional Response
    - São sempre estáveis;
    - Permitem facilmente fase linear: nenhuma distorção de fase é produzida no sinal filtrado (importante para processamento de áudio e imagem, biomedicina e transmissão de dados);
    - Podem necessitar de ordem elevada;
  - **Filtros IIR:** Infinite Impulsional Response
    - Menos taps para atender as mesma especificicações de um filtro FIR (menor peso computacional);
    - Filtros analógicos podem ser facilmente convertidos em filtros digitais IIR equivalentes;

Tipos de filtros digitais



$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} h[k]x[n-k]$$



$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Tipos de filtros digitais

- De modo geral pode-se usar as indicações abaixo:
  - Utilize um filtro FIR:
    - quando o número de coeficientes não é grande (pois a estabilidade da estrutura FIR é garantida);
    - quando a distorção de fase desejada for pequena;
  - Utilizar filtro IIR:
    - sempre que for importante uma resposta bem seletiva no domínio da frequência
    - quando for necessário realizar a conversão das especificações de um filtro analógico;

17

Filtros FIR (Finite Impulsional Response)

- É completamente caracterizado por seus coeficientes;
- Possui memória finita (transitório tem duração limitada);
- São sempre BIBO estáveis;
- **Representado matematicamente como:**

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N}h[k]x[n-k]$$ sendo *N* a ordem do filtro.

- Sua função de transferência é:

$$Y(z)=\sum_{k=0}^{N}h[k]X(z)z^{-k} \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{k=0}^{N}h[n]z^{-k}$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N}h[k]z^{-k}=\frac{\sum_{k=0}^{N}h[k]z^{N-k}}{z^{N}}$$

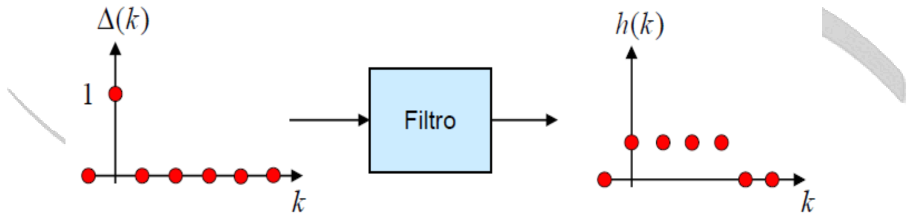
Polinômio com potências positivas.

***N* polos com valor zero**

18

Ilustração de um filtro FIR

$$h(k)=\begin{cases}1/4 & \text{para } k=0,1,2,3\\ 0 & \text{para } k>3\end{cases}$$



Filtros FIR

- **Exemplo:** Filtro Média Móvel.

$$h(k)=\frac{1}{4}\Delta(k)+\frac{1}{4}\Delta(k-1)+\frac{1}{4}\Delta(k-2)+\frac{1}{4}\Delta(k-3)$$

$$H(z)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}$$

$$H(z)=\frac{z^3+z^2+z+1}{4z^3}$$

Conclusão: todos os polos dos filtros FIR estão situados na origem do plano Z, portanto **TODO** filtro FIR é BIBO estável!

Filtros IIR - Infinite Impulsional Response

- Não é necessariamente estável BIBO;
- Utiliza recursividade: as saídas atuais dependem de saídas passadas;
- **Representado matematicamente como:**

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{N}b_k x[n-k]-\sum_{k=0}^{M}a_k y[n-k]$$

a_k e b_k são os coeficientes do filtro IIR;

- Sua função de transferência é:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$

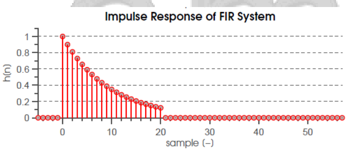
21

Filtros FIR vs IIR

- **Filtros FIR**

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N}h[k]x[n-k]$$

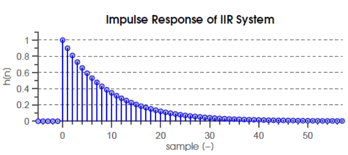
$$H(z)=\sum_{k=0}^{N}h[k]z^{-k}=\frac{\sum_{k=0}^{N}h[k]z^{N-k}}{z^{N}}$$



- **Filtros IIR**

$$y[n]=\sum_{k=0}^{N}h[k]x[n-k]=\sum_{k=0}^{N}b_k x[n-k]+\sum_{k=0}^{N}a_k y[n-k]$$

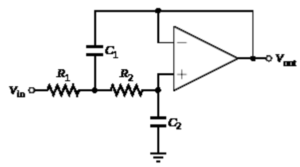
$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{N}b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=0}^{N}a_k z^{-k}}$$



22

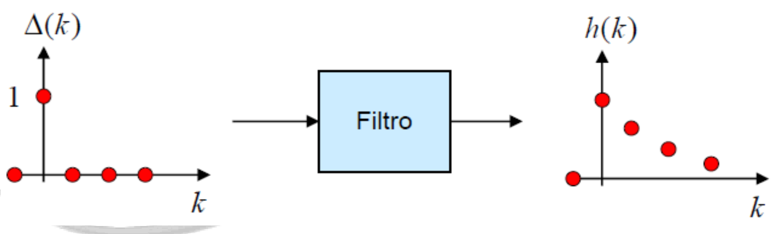
Filtros IIR

- Possui zeros e polos;
- Normalmente são obtidos a partir de estruturas analógicas, utilizando-se a conversão AD;
  - Transformar filtros analógicos bem conhecidos em filtros digitais;
- Protótipos largamente usados na prática: Butterworth, Chebyshev (tipo I e II) e elíptico;



Filtros IIR – Infite Impulsional Response

$$h(k) = 0{,}8^k$$



Filtros IIR – Infite Impulsional Response

- Exemplo: Filtro Recursivo

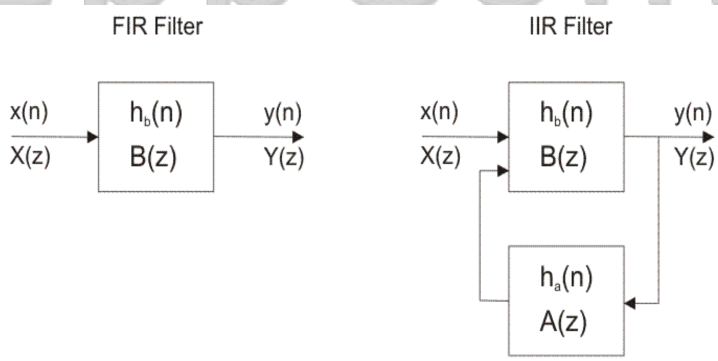
$$H(z)=\frac{z}{z-0{,}8} \Rightarrow H(z^{-1})=\frac{1}{1-0{,}8z^{-1}}$$

$$y(k)=x(k)+0{,}8y(k-1)$$

- **Conclusão:** A equação exibe natureza recursiva, ou seja, **a saída depende de saídas anteriores**. Filtros cuja resposta ao impulso apresenta duração infinita.

Filtros FIR x IIR

- **Estrutura**



Grupo de Pesquisa em Prototipagem Rápida de Soluções para Comunicação.

Projeto de Filtros Digitais

- **Consistem em:**
  - Determinar a **sequência de resposta ao impulso** (ou função de transferência) **que atenda** (pelo menos de modo aproximado) às especificações da **resposta em frequência necessária para uma dada aplicação**;
  - Filtros ideais não são realizáveis digitalmente, pois apresentam comprimento infinito (e são não-causais);
- Estratégias clássicas de projetos de filtros:
  - **Filtros FIR:** truncamento da resposta ao impulso dos filtros ideais + janelamento;
  - **Filtros IIR:** mapear para o domínio z funções de transferência de filtros analógicos.

Projetos de Filtros FIR

- Projeto usando janela
  - **Passo 01**: selecionar um filtro seletor de frequências ideal apropriado (quase sempre não-causal e de resposta ao impulso infinita);
  - **Passo 02:** truncar sua resposta ao impulso em uma janela para obter um filtro FIR causal e de fase linear.

- Escolha um filtro de comprimento M e uma função janela w[n] para estreitar a largura do lóbulo principal e a diminuir a atenuação nos lóbulos laterais o máximo possível

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

Filtros ideais

$$h(n) = \boxed{h_d(n)} w(n)$$

Filter type	Magnitude response $\lvert H(e^{j\omega})\rvert$	Impulse response $h(n)$
Lowpass	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \le \lvert\omega\rvert \le \omega_c \\ 0, & \text{for } \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n), & \text{for } n \ne 0 \end{cases}$
Highpass	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \le \lvert\omega\rvert < \omega_c \\ 1, & \text{for } \omega_c \le \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \frac{\omega_c}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ -\frac{1}{\pi n}\sin(\omega_c n), & \text{for } n \ne 0 \end{cases}$
Bandpass	$\begin{cases} 0, & \text{for } 0 \le \lvert\omega\rvert < \omega_{c_1} \\ 1, & \text{for } \omega_{c_1} \le \lvert\omega\rvert \le \omega_{c_2} \\ 0, & \text{for } \omega_{c_2} < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n}\left[\sin(\omega_{c_2} n) - \sin(\omega_{c_1} n)\right], & \text{for } n \ne 0 \end{cases}$
Bandstop	$\begin{cases} 1, & \text{for } 0 \le \lvert\omega\rvert \le \omega_{c_1} \\ 0, & \text{for } \omega_{c_1} < \lvert\omega\rvert < \omega_{c_2} \\ 1, & \text{for } \omega_{c_2} \le \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$	$\begin{cases} 1 - \frac{\omega_{c2} - \omega_{c1}}{\pi}, & \text{for } n = 0 \\ \frac{1}{\pi n}\left[\sin(\omega_{c_1} n) - \sin(\omega_{c_2} n)\right], & \text{for } n \ne 0 \end{cases}$

Janelas

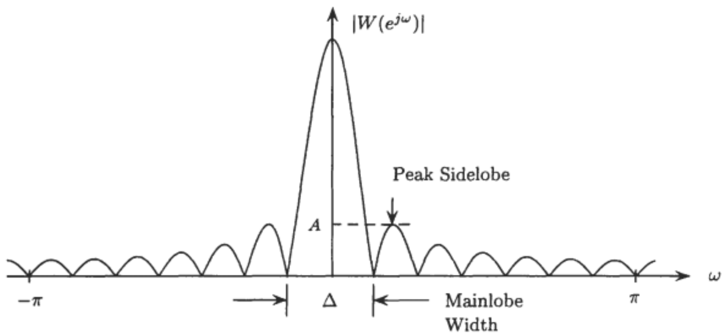
$$h(n) = h_d(n) \boxed{w(n)}$$

Rectangular	$w(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
Hanning[1]	$w(n) = \begin{cases} 0.5 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & 0 \le n \le N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
Hamming	$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) & 0 \le n \le N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$
Blackman	$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) + 0.08\cos\left(\frac{4\pi n}{N}\right) & 0 \le n \le N \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

Window	Side-Lobe Amplitude (dB)	Transition Width (Δf)	Stopband Attenuation (dB)
Rectangular	−13	$0.9/N$	−21
Hanning	−31	$3.1/N$	−44
Hamming	−41	$3.3/N$	−53
Blackman	−57	$5.5/N$	−74

Efeitos da janela

- **Largura do *mainlobe:*** diminui com o tamanho *N* da janela;
- ***Peak side-lobe:*** determinado pelo formato da janela e não tem relação com o tamanho da mesma;
- **Não tem almoço grátis**: diminuir o *peak side-lobe,* aumenta com a largura do *mainlobe.*



Projetos de Filtros IIR

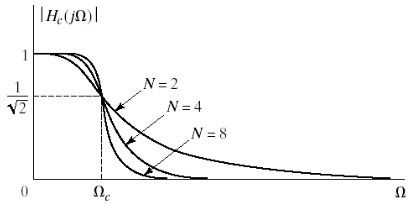
- **Passo 01**: Projetar FPB analógicos (protótipos);
- **Passo 02**: Aplicar transformações no filtro para obter FPB (transformação bilinear).
  - mapear o semi-plano s (Laplace) esquerdo no interior do ciclo unitário do plano z
  - **lembre**: a transformada z é o equivalente da transformada de Laplace para sistemas discretos (versão discreta da transformada de Laplace);
- Protótipos largamente usados na prática: Butterworth, Chebyshev (tipo I e II) e elíptico.

Filtro de Butterworth

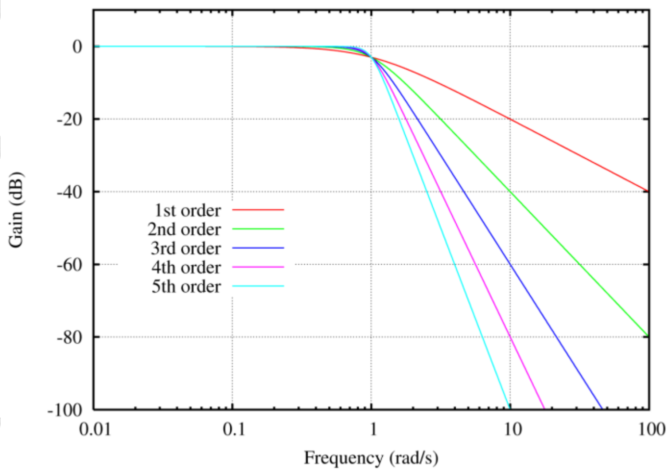
- A principal característica desse filtro é que a **resposta em magnitude** é ***plana (flat) na banda de passagem e de corte***;
- A resposta quadrática de magnitude de um FPB de N-ésima ordem é dada por:

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(j\Omega/j\Omega_c)^{2N}}$$

sendo N é a ordem do filtro e Ω_c é a frequência de corte.



Filtro de Butterworth



Quanto maior a ordem, menor a região de transição.

Filtro de Chebyshev

- Tenta **minimizar a diferença** entre as **resposta real e ideal** do filtro na banda de passagem ou rejeição;
- Para as mesma especificações, necessita de uma ordem menor do que os filtros Butterworth, contudo oscilam mais;
- Possui dois tipos:
  - **Tipo 1:** Ondulação na banda de passagem e monotônico na banda de rejeição;

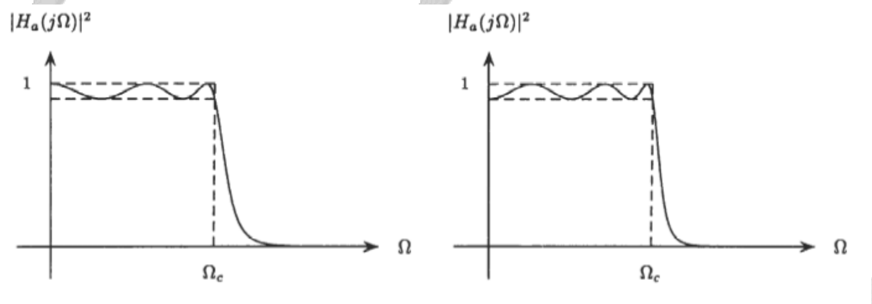
$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)}$$

ε é o fator de ondulação da banda de passagem

  - **Tipo 2:** Ondulação na banda de rejeição e monotônico na banda de passagem.

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left[\varepsilon^2 V_N^2(\Omega/\Omega_c)\right]^{-1}} \qquad V(x) = \begin{cases} \cos(N\cos^{-1}(x)), & 0 \le x \le 1 \\ \cosh(N\cosh^{-1}(x)), & 1 \le x \le \infty \end{cases}$$

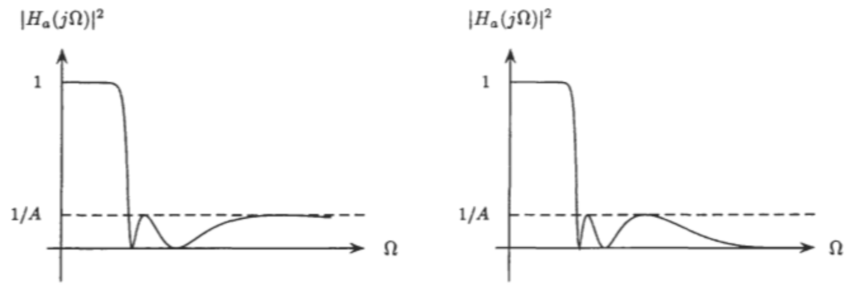
Filtro Chebyshev – Tipo 1



(*a*) Odd order ($N = 5$). (*b*) Even order ($N = 6$).

© Prof. Dr. Vicente Angelo de Sousa Junior @ GppCom - UFRN
vicente.sousa@ct.ufrn.br

Filtro Chebyshev – Tipo 2



(a) Odd order ($N = 5$).   (b) Even order ($N = 6$).

Filtro Elíptico

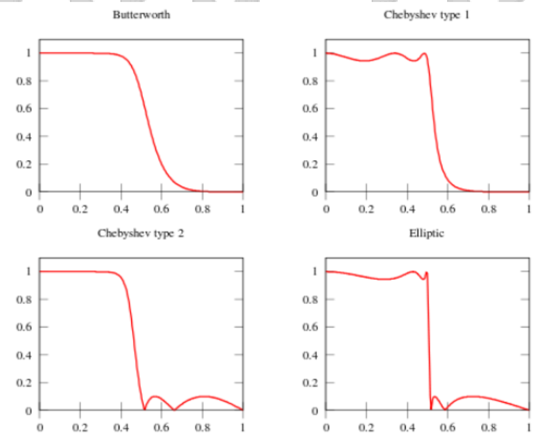
- É um filtro **com ripple** na **banda passante e na banda de rejeição**. Isto significa que ele **minimiza o erro máximo em ambas as bandas**, ao contrário do Chebyshev;
- **São filtros mais complexos de projetar**, exigindo um maior custo computacional, porém obtém o melhor desempenho para aplicações de filtros IIR;
- A magnitude da resposta em frequência é dada por:

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2 R_n^2(\omega)}}$$

sendo R_n é a função racional de Chebyshev da ordem n.

Filtro Elíptico

- Resposta em frequência do filtro elíptico comparado com os outros filtros, **para o mesmo número de Taps**:



O filtro elíptico possui a queda mais acentuada.

Bibliografia

[1] Modern Communication Systems Using MATLAB, Third International Edition- John G. Proakis, Masoud Selehi, Gerhard Bauch

[2]http://www.univasf.edu.br/~edmar.nascimento/topicos1/com_digital_aula02.pdf

[3] Schaum's Outline of Theory and Problems of Digital Signal Processing – M. Hayes

[4] http://www.ece.ufrgs.br/~eng04006/aulas/aula24.pdf

[] Técnicas de Projeto de Filtros IIR, Carlos Alexandre Mello, http://www.cin.ufpe.br/~cabm/pds/PDS_Aula05%20Projeto%20de%20Filtros%20IIR.pdf

Sobre o GppCom

- A meta do GppCom é criar na UFRN um ambiente de P&D&I através de prototipagem rápida baseada em simulação via software e hardware nas áreas de sistemas de comunicação e processamento digital de sinais e imagens. O Grupo é formado pelos professores: Vicente Angelo de Sousa Junior (coordenador), Luiz Gonzaga de Queiroz Silveira Junior (vice-coordenador), Luiz Felipe de Queiroz Silveira, Marcio Eduardo da Costa Rodrigues, Adaildo Gomes D'Assunção (pesquisador associado), Cláudio Rodrigues Muniz da Silva (pesquisador associado), Cristhianne de Fátima Linhares de Vasconcelos (pesquisador associado). O GppCom está de portas abertas para novas parcerias, conheça o portifolio do grupo.

Grupo de Pesquisa em Prototipagem Rápida de Soluções para Comunicação.