UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Matemáticas

Conjuntos con dimensión fraccionaria

Realizado por:

Víctor Galilea Martín

Tutelado por:

Francisco Javier Pérez Lázaro

Logroño, 5 de Junio de 2018

Índice general

Capítulos **Página**

1. Medida y dimensión de Hausdorff **5**
1.1. Preliminares 5
1.2. Construcción de la medida de Hausdorff 7
1.3. Caracterización de la dimensión de Hausdorff 11
1.3.1. Teorema del contenido 12
1.3.2. Teorema de la unión 13

2. Autosemejanza **15**

3. Dimensión topológica **19**
3.1. Orden de una familia de conjuntos 19
3.2. Espacios de dimensión cero 21
3.3. Dimensión de cubrimientos 22
3.3.1. Teoremas de suma 27
3.3.2. Teorema de subconjunto 29

4. Ejemplos de fractales **31**
4.1. Conjunto de cantor 31
4.1.1. Introducción 31
4.1.2. Calculo dimensión fraccionaria del conjunto de Cantor 32
4.1.3. Caracterización de los elementos del conjunto de Cantor 33
4.2. Conjuntos de Julia 35
4.2.1. Conjunto de Julia para la familia cuadrática 37

Capítulo 1

Medida y dimensión de Hausdorff

1.1. Preliminares

Definición 1 Sea X un conjunto arbitrario, Σ una colección de subconjuntos de X. Se dice que Σ es una σ-álgebra en X si:
1- $\emptyset \in \Sigma$
2- $A \in \Sigma \Longrightarrow A^c \in \Sigma$
3- $\{A_i\}_{i\in\mathbb{R}} \subseteq \Sigma \Rightarrow \cup_{i\in\mathbb{N}}\{A_i\} \in \Sigma$

Al par (X,Σ) se le llama espacio medible.

Definición 2 Sea X un conjunto arbitrario.$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ se le dice semianillo, si cumple.
1- A, B$\in \mathcal{A}_0 \Rightarrow$ A$\cap$ B $\in X$
2- A, B$\in \mathcal{A}_0 \Rightarrow \exists\{A_i\}_{i=1}^k$ t.q. $A - B = \cup_{i=1}^k A_i$

Definición 3 Sea (X,Σ) un espacio medible. Una medida positiva sobre un semianillo $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}(X)$ es una función: $\mu : \mathcal{A}_0 \longmapsto [0,\infty]$ tal qué,

- $\mu(\emptyset) = 0$
- Si $\{A_i\}_{i=1..n}$ son disjuntos dos a dos, y su unión se encuentra en el semianillo, entonces:
$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n}\{A_i\}) = \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)$$

Notar que la estructura de semianillo no garantiza que la unión de dos elementos del semianillo, esté en él semianillo.

Definición 4 Sea (X,Σ) un espacio medible. Una medida positiva en este espacio es una función:
$\mu : \Sigma \longmapsto [0,\infty]$ tal qué,
1-$\mu(\emptyset) = 0$
2-Si $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos, entonces $\Rightarrow \mu(\cup_{i\in\mathbb{N}}\{A_i\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\mu(A_i)$

A la terna (X, Σ, μ) se le llama espacio de medida. Y este es completo sii:

$$B \in \Sigma : \mu(B) = 0 \Rightarrow \forall A \in \Sigma \wedge A \subset B, \mu(A) = 0$$

Frecuentemente, hay definida una medida μ sobre un conjunto pequeño de conjuntos y queremos extenderla a una familia más grande de conjuntos. Esta situación motiva la definición de medida exterior.

Definición 5 Sea X y el conjunto de partes de X, p(X), una medida exterior en X es una función del tipo:

$$\mu^* : p(X) \longmapsto [0, \infty]$$

tal que:
1-$\mu(\emptyset) = 0$
2-Si $A \subseteq B \Rightarrow \mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$
3-Si $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de subconjuntos, entonces $\Rightarrow \mu^*(\cup_{i \in \mathbb{N}}\{A_i\}) \leqslant \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu^*(A_i)$

Proposición 1 *Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X), \emptyset \in \mathcal{C}$ y $\rho : \mathcal{C} \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $\rho(\emptyset) = 0, \forall B \subseteq X$ se define:*

$$\mu^*(B) := inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \rho(A_n) : A_n \in \mathcal{C}, B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}$$

Entonces:
1-μ^* es una medida exterior tal qué $\mu^*(A) \leq \rho(A), \forall A \in \mathcal{C}$, que la llamaremos medida exterior generada por ρ.
2-Si $\mathcal{C}$ es un semianillo y ρ una medida generada por el semianillo, ρ y μ^* coinciden en $\mathcal{C}$.

Notar que una medida exterior no tiene restricciones en cuanto a los subconjuntos sobre los que está definida, mientras que la medida positiva necesitaba estar definida sobre una σ-algebra. Aunque la medida exterior es más débil que la positiva en el sentido de que no es numerablemente aditiva. Ahora el objetivo es encontrar una σ-algebra, donde las medidas exteriores, si sean numerablemente aditivas.

Definición 6 Sea μ^* una medida exterior en X. A⊆X diremos que es μ^*-medible si $\forall B \subseteq X$

$$\mu^*(B) = \mu(B \cap A)^* + \mu(B \cap A^c) \tag{1.1}$$

Denotaremos M_{μ^*} a la familia de conjuntos μ^*-medibles.

Teorema 1 (De extensión de Caratheodory) *Sea X un conjunto y μ^* una medida exterior en X. Entonces:*
a)M_{μ^*} es una σ-algebra.
b)La restricción de μ a M_{μ^*} es una medida.
c)(X, M_{μ^*}, μ^*) es completo.
d)Si μ^* es la medida exterior generada por la medida sobre un semianilllo ρ de un semianillo $\mathcal{A}_0 \Rightarrow \mathcal{A}_0 \subset M_{\mu^*}$

Teorema 2 (Teorema de Hahn) *Toda medida σ-finita en un semianillo $\mathcal{A}_0$ se extiende de forma única a cada σ-álgebra entre A_0 y M_{μ^*}.*

Ejemplo 1 (Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$) *Sea $\mathcal{C} = \{(a,b] : a \leq b\}$ y $\rho(a,b] = b - a$,*

Veamos que $\mathcal{C}$ cumple las propiedades de semianillo:

1-Dados dos intervalos semi-abiertos A, B su intersección o es vacía o es otro intervalo semi-abierto.

2-La resta de intervalos semi-abiertos es otro intervalo semi-abierto

Se puede ver que ρ es una medida sobre el semianillo. Ahora definamos la medida exterior de Lebesgue:

$$m^*(A) = inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_a n) : a_n \leq b_n \in \mathbb{R}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n]$$

Qué es una medida exterior. Por el teorema de Caratheodory, sabemos que si restringimos la medida exterior a la σ-álgebra de los medibles, tenemos una medida, y además al estar generada por la medida ρ del semianillo de los intervalos semiabiertos, estos mismos son conjuntos medibles.

Ya que los conjuntos abiertos se pueden expresar cómo uniones numerables de intervalos semi-abiertos, se tiene que la medida de Lebesgue mide a los abiertos, por lo tanto mide a la menor σ-álgebra que los contiene, los Borelianos.

1.2. Construcción de la medida de Hausdorff

Definición 7 Sea un espacio métrico (X,d), A$\subset X$, el diámetro de A se define cómo:

$$diam(A) = \sup_{x,y \in A}\{d(x,y) : x,y \in A\}$$

Para $\delta > 0$ y $p > 0$ definamos una función de conjunto $H^T_\delta : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$, que tiene cómo valor:

$$H^T_\delta(A) = inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} diam(U_i)^t : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, diam(U_i) < \delta\} \tag{1.2}$$

Observemos que la única restricción que tienen los conjuntos que cubren a A es el diámetro.

Gracias a la proposición 1, las anteriores funciones son medidas exteriores.Observemos que cuando $\delta < \epsilon$:

$$inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} diam(U_i)^t : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, diam(U_i) < \delta\} \geq inf\{\sum_{i \in \mathbb{N}} diam(U_i)^t : A \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, diam(U_i) < \epsilon\}$$

$$H^t_\delta(A) > H^t_\epsilon(A) \tag{1.3}$$

Observemos que, $\delta < \epsilon$, la familia de conjuntos con diámetro menor que δ, está contenida en la familia de conjuntos con radio menor que ϵ, por lo tanto al ser una familia más grande el ínfimo será menor para, la familia de conjuntos con radio menor que ϵ

Definición 8 Llamamos medida exterior t-dimensional de Hausdorff a:

$$H^t = \lim_{\delta\to 0} H^t_\delta \tag{1.4}$$

Proposición 2 *La medida exterior t-dimendional de Hausdorff es una medida exterior*

Demostración:

Comprobemos que H^t cumple con la definición de medida exterior, partiendo de que H^t_δ lo es:

- $$H^t(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0} H^t_\delta(\emptyset) = \lim_{\delta\to 0} 0 = 0$$
- $$A \subseteq B \Rightarrow H^t_\delta(A) \leq H^t_\delta(B).$$
  Entonces, por la regla del sandwich sabemos que:
  $$\lim_{\delta\to 0} H^t_\delta(A) \leq H^t_\delta(B) \Rightarrow H^t(A) \leq H^(B)$$
- Subaditividad, sabemos que:
  $$H^t(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \lim_{\delta\longrightarrow 0} H^t_\delta(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \lim_{\delta\longrightarrow 0} \sum_{i\in\mathbb{N}} H^t(A_i),$$
  por 1.3 y sabeindo que $0 \leq \delta$ se tiene:
  $$\sum_{i\in\mathbb{N}} H^t_\delta(A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} H^t(A_i)$$
  Por lo tanto llegamos a la conclusión de:
  $$H^t(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq sum_{i\in\mathbb{N}} H^t(A_i)$$

■

De a cuerdo con el teorema de Caratheodory, sabemos que si restringimos la medida exterior de Hausdorff a la familia de sus conjuntos medibles obtenemos una medida, veamos ahora que los borelianos están contenidos en M_{H_p}

Definición 9 Sea (X, d) un espacio métrico, diremos qué una medida exterior μ^* es métrica, si dades A,B⊂X tales que d(A,B)≥0, la medida exterior de la unión es la suma de medidas exteriores

Proposición 3 (pg 40 UNEX) *Si μ^* es una medida exterior métrica en un espacio métrico (X,d), entonces:*

$$\mathcal{B}(X) \subset M_{\mu^*}$$

Demostración:
Basta demostrar que todos los abiertos en X son conjuntos μ^*-medibles, es decir si U es abierto, $\forall A \subseteq X$:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$$

Sea A t.q. $\mu^*(A) < \infty$, probaremos qué:

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c)$$

, ya que, $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap U) + \mu^*(A \cap U^c$ es una propiedad de la medida exterior, y el caso para infinito es trivial.

Definamos la familia de conjuntos:

$$U_n = \{x \in X : d(x, U^c) \geq \frac{1}{n}\}$$

Notemos qué al ser U_n abierto, $U_n \uparrow U$. Y por lo tanto, $A \cap U_n \uparrow A \cap U$ y:

$$d(A \cap U_n, A \cap U^c) \geq d(U_n, U^c) \geq \frac{1}{n} \Rightarrow A \supseteq (A \cap U_n) \cup (A \cap U^c)$$

De la definición de medida exterior y de medida exterior métrica deducimos que:

$$\forall n, \quad \mu^*(A) \geq \mu^*((A \cap U_n) \cup (A \cap U^c)) = \mu^*(A \cap U_n) + \mu^*(A \cap U^c)$$

Si consideramos la familia de conjuntos

$$B_n = A \cap U_n \uparrow B = A \cap U.$$

Basta demostrar que $\mu^*(B_n) \uparrow \mu^*(B)$.

Sea la familia de conjuntos disjuntos

$$C_1 = B_1, n \geq 2, C_n = B_n - B_{n-1}$$

$$B = B_n \cup \bigcup_{i=n}^{\infty}\{C_i\} \Rightarrow \mu^*(B) = \mu^*(B_n \cup \bigcup_{i=n}^{\infty}\{C_i\}) \leq \mu^*(B_n) + \sum_{i=n}^{\infty}(C_i)$$

$$\Rightarrow \mu^*(B) - \mu^*(B_n) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty}(C_i)$$

Por lo tanto ahora tenemos que ver qué: $\sum_{i=n}^{\infty}(C_i) \longmapsto 0$, así qué basta demostrar qué: $\sum_{i=0}^{\infty}(C_i)$ converge,
Para ello veamos que si

$$x \in B_{n-1} \quad \wedge \quad y \in C_{n+1} \Rightarrow d(x,y) \geq d(B_{n-1}, C_{n+1})$$

ya que sabemos que:

$$d(B_{n-1},U^c) \geq \frac{1}{n-1} \quad \wedge \quad d(C_{n+1},U^c) \geq \frac{1}{n}$$

Por lo tanto:

$$d(B_{n-1},C_{n+1}) \geq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > 0$$

Ahora de las definiciones de medida exterior y de medida exterior métrica:

$$\mu^*(B_{n-1}) + \mu^*(C_{n+1}) = \mu^*(B_{n-1} \cup C_{n+1}) \leq \mu^*(B_{n+1})$$

De modo que:

$$\mu^*(C_{n+1}) \leq \mu^*(B_{n+1}) - \mu^*(B_{n-1}),$$

$$\mu^*(C_1) + \mu^*(C_3) + ... + \mu^*(C_{2n-1}) \leq \mu^*(B_1) + \mu^*(B_3) - \mu^*(B_1) + .. = \mu^*(B_{2n-1}),$$

(Notar que a $B_{n-1} \cup C_{n+1}$ le falta C_n para cubrir a B_{n+1})
Haciendo lo propio para los pares e impares:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(C_{2i-1}) \leq \mu^*(B_{2n-1}) \leq \mu^*(A)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^*(C_{2i}) \leq \mu^*(B_{2n}) \leq \mu^*(A)$$

Y cómo por hipótesis $\mu^*(A) \leq \infty$ la serie $\sum \mu^*(C_n)$ converge.

■

Teorema 3 $H_p : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0,\infty]$ *es una medida exterior métrica*

Demostración:
Sean A, B t.q. d(A,B)>0. Ahora sea $d(A,B) > \delta > 0$.
Sea una sucesión de conjuntos

$$\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad diam(C_n) < \delta, \quad A \cup B \subset \cup C_n$$

Ahora notar que al tomar δ lo suficientemente pequeño es imposible que un C_n interseque al mismo tiempo con A y B, ya que la distancia entre A y B es mayor que el diámetro de estos conjuntos, teniendo este concepto en cuenta definamos dos familias de índices disjuntas:

$$I = \{i \in \mathbb{N} : C_n \cap A \neq \emptyset\} \qquad J = \{j \in \mathbb{N} : C_n \cap B \neq \emptyset\}$$

Se cumple que $A \subseteq \cup_{i\in I} C_i$ y $B \subseteq \cup_{j\in J} C_i$. Por la definición de medida exterior:

$$H^t_\delta(A \cup B) \leqslant H^t_\delta(A) + H^t_\delta(B)$$

Y ya que H^t_δ, está definida sobre el ínfimo de los cubrimientos y hemos tomado uno cualquiera:

$$H^t_\delta(A) + H^t_\delta(B) \leqslant \sum_{i\in I}(diam(C_i))^t) + \sum_{j\in J}(diam(C_j))^t) \leqslant \sum_{i\in \mathbb{N}}(diam(C_i))^t)$$

Ahora tomando ínfimo

$$H^t_\delta(A) + H^t_\delta(B) \leqslant inf \sum_{i\in \mathbb{N}}(diam(C_i))^t) = H^t_\delta(A \cup B)$$

Y por el lema del sandwich concluimos que:

$$H^t_\delta(A \cup B) = H^t_\delta(A) + H^t_\delta(B)$$

■

Por lo tanto ya hemos llegado a la conclusión de que la medida exterior de Hausdorff restringida a sus medibles es una medida positiva y que los Borelianos son conjuntos H_p-medibles.

1.3. Caracterización de la dimensión de Hausdorff

El siguiente resultado nos dará pie a poder definir la dimensión de Hausdorff, así como el poder asegurar su existencia.

Teorema 4 *Sea $A \subset X$ y sean $0 \leqslant p < q$, entonces se tiene que:*

- $$Si \quad H_p(A) < \infty \quad \Rightarrow \quad H_q(A) = 0,$$
- $$Si \quad H_q(A) > 0 \quad \Rightarrow \quad H_q(A) = \infty.$$

Demostración:
Basta con probar solo la primera sentencia, ya que la segunda es la contrarecíproca de la primera, es decir si la primera fuera ($A \Rightarrow B$), se tiene que:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})$$

Ya que la medida de Hausdorff es una función positiva, se tiene que negar que $H_q(A) = 0$, es decir que $H_q(A) > 0$, y negar que $H_p(A) < \infty$, es decir que $H_p(A) = \infty$.
Ahora sea $\delta > 0$ y B_n un cubrimiento de A, con d$(B_n) < \delta$, se tiene que:

$$H_\delta^q(A) \leq \sum d(B_n)^q,$$

y ya que:

$$d(B_n)^q = d(B_n)^p d(B_n)^{q-p} \leqslant d(B_n)^p \delta^{q-p},$$

se tiene que:

$$H_\delta^q(A) \leq \sum d(B_n)^q < \delta^{q-p} \sum d(B_n)^p.$$

Ahora tomando el ínfimo, se tiene que, $H_\delta^q(A) \leqslant \delta^{q-p} H_\delta^p(A)$, ahora si hacemos δ tender a 0, $H^p(A) < \infty$. ■

Definición 10 *De este teorema deducimos que existe un valor crítico $s_0 \in [0, ,\infty]$, tal que :*

- $$\forall s < s_0, \quad H^s(A) = \infty,$$
- $$\forall s > s_0, \quad H^s(A) = 0.$$

A este valor s_0, le llamaremos la dimensión de Hausdorff del conjunto A. Denotaremos dim(A)=s_0.

Nota 1 *Si para todo s mayor que 0, $H^s(A) = 0$, entonces dim(A)=0. Y si para todo s mayor que 0 también, $H^s(A) = \infty$, entonces dim(A)=∞.*

1.3.1. Teorema del contenido

Teorema 5 (Teorema del contenido) *Sean A, B conjuntos Borelianos, entonces si $A \subseteq B$, se tiene que:*

$$dim(A) \leqslant dim(B).$$

Demostración:
Supongamos que, $A \subseteq B$. Veamos entonces que $dim(A) \leqslant dim(B)$.
La dimensión de Hausdorff de B es ese valor s_0, tal que $\forall s > s_0$, la medida de Hausdorff de B es 0, sea $s > s_0$, entonces:

$$H^s(A) \leqslant H^s(B) = 0,$$

Por lo tanto diam(A)⩽dim(B). ■

1.3.2. Teorema de la unión

Teorema 6 (Teorema de la unión) *Sean A, B conjuntos Borelianos, entonces*

$$dim(A \cup B) = max\{dim(A),\ dim(B)\}.$$

Demostración:
Por el teorema 1.3.1 sabemos que dim($A \cup B$)$\geqslant$max$\{dim(A), dim(B)\}$. Por lo tanto hay que probar que dim($A \cup B$)$\leqslant$max$\{dim(A), dim(B)\}$.
Sea $s > max\{dim(A),\ dim(B)\}$, por lo tanto $H^s(A) = 0$ y $H^s(B) = 0$. Entonces

$$H^s(A \cup B) \leqslant H^s(A) + H^s(B) = 0.$$

Por lo tanto $\forall s >$max$\{dim(A), dim(B)\}$, dim($A \cup B$)$\leqslant$ s. Así que

$$dim(A \cup B) \leqslant max\{dim(A), dim(B)\}$$

■

Capítulo 2

Autosemejanza

Definición 11 Una semejanza (o similitud) es una aplicación entre dos espacios métricos,(X_1, d_1) y (X_2, d_2) que modifica las distancias entre dos puntos cualesquiera multiplicándolas por un factor fijo, r. En el caso de los espacios euclídeos, por ejemplo, es la composición de una isometría y una homotecia. Intuitivamente, es una transformación que puede cambiar el tamaño y la orientación de una figura pero no altera su forma.

Una lista de radios, es una lista finita de números positivos $(r_1, r_2, ..., r_n)$. Si $\forall i$ r_i¡1 la lista de radios se dice contractiva o hiperbólica

Definición 12 En un espacio métrico (X,d), un sistema de funciones iterado, relativa a la lista de radios$(r_1, r_2, .., r_n)$, es una lista $(f_1, f_2, ..., f_n)$, con f_i una semejanza de radio $r_i > 0$

Sea $K \subset X$ se dice que es invariante o atractor por el sistema de funciones iterado $(f_1, f_2, ..., f_n)$ sii

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} f_i[k]$$

Definición 13 El valor de semejanza de una lista de radios $(r_1, r_2, .., r_n)$, es un número positivo s tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^s = 1$$

Teorema 7 (pg117Edgar) *Si $(r_1, r_2, .., r_n)$ es una lista de radios contractiva, entonces existe un único valor de semejanza s. Se tiene que s=0 sii n=1.*

Al número s, se le llama dimensión de semejanza de un conjunto K que sea invariante por un conjunto iterado de funciones relativa a la lista de radios $(r_1, r_2, .., r_n)$, es decir:

Sea la lista de radios $(r_1, r_2, .., r_n)$ tal que,

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^s = 1,$$

con la lista iterada de funciones relativa a ella $(f_1, f_2, ..., f_n)$, cada f_i es una semejanza con radio r_i, entonces si el conjunto K es invariante por $(f_1, f_2, ..., f_n)$, es decir:

$$K = \bigcup_{i=1}^{n} f_i[k],$$

se dice que K tiene dimensión de semejanza s.

Intuitivamente la dimensión de semejanza, debería coincidir con la de Hausdorff y esta es única pero sin las caracterizaciones adecuadas el conjunto K puede admitir dos dimensiones de semejanza, así que esta mas que una característica del conjunto K es una característica del conjunto iterado de funciones $(f_1, f_2, ..., f_n)$.

Ejemplo 2 *Veamos un ejemplo para comprobar que efectivamente un conjunto puede admitir más de una dimensión de semejanza.*
Sea el intervalo [0,1], este conjunto es invariante por las semejanzas: $f_1(x) = \frac{x}{2}$ *y* $f_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$, *que tienen radio* $\frac{1}{2}$ *cada una, ya que*

$$2 * \frac{1}{2}^s = 1 \Leftrightarrow s = 1,$$

se tiene que según esta lista de funciones la dimensión de semejanza de [0,1] es 1.
En cambio si ahora tomamos las semejanzas $f_3(x) = \frac{2x}{3}$ *y* $f_4(x) = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$, *igualmente [0,1] es invariante por la lista de funciones, pero en este caso la dimensión de semejanza sale mayor que 1.*

De este ejemplo podemos intuir que habrá que evitar el solapamiento de los conjuntos imagen.

Definición 14 *Se dice que el sistema iterado de funciones* $(f_1, f_2, ..., f_n)$*, cumple la condición de conjunto abierto de Moran si y solo si existe un conjunto abierto no vacío U, tal que:*

$$Si \quad i \neq j, \quad f_i[U] \cap f_j[U] \neq \emptyset, \quad y \quad \forall\, i, \quad f_i[U] \subseteq U$$

Si ese conjunto abierto U existe, se le llama conjunto abierto de Moran para el sistema iterado de funciones.

Teorema 8 *Sea* $(r_e)_{e \in E}$*, una lista de radios contractivos, sea s su valor de similaridad, y* $(f_e)_{e \in E}$ *su sistema iterado de funciones asociado en* R^d*. Sea K el conjunto invariante para el sistema iterado de funciones.*
Si se satisface la función de conjunto abierto, la dimensión de Hausdorff de K es igual a s, dimk=s.

Demostración:

La demostración de este teorema se encuentra en el libro 4, es el teorema 6.5.4, en la página 193. ■

Capítulo 3

Dimensión topológica

Para este capítulo todos los espacios que consideremos serán espacios métricos.
Los conjuntos de la geometría elemental llevan asociados una dimensión, por ejemplo, puntos aislados tienen dimensión 0, curvas 1, superficies 2. En este capítulo trataremos la dimensión como una propiedad topológica, es decir, si dos conjuntos son topológicamente homeomorfos, estos tendrán igual dimensión topológica.

3.1. Orden de una familia de conjuntos

Definición 15 Para un $n \in \mathbb{Z}$, con $n \geq -1$, el orden de una familia de conjuntos distintos $\mathcal{A}$ será menor o igual que n si cualquiera n+2 conjuntos de la familia tienen intersección vacía.
Se dice que $\mathcal{A}$ tiene orden exactamente $n \geqslant 0$ si tiene orden menor o igual que n pero no menor o igual que n-1.

Nota 2 *Se dice que una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ tiene orden exáctamente -1 si tiene orden $n \geqslant -1$*

Nota 3 *Una familia de conjuntos $\mathcal{A}$ tendrá orden ∞, si $\forall n \in \mathbb{N}$, existen n conjuntos distintos pertenecientes a la familia $\mathcal{A}$, con intersección distinta del vacío. Es decir:*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists A_i \in \mathcal{A},\ i = 1,\ldots,n : \bigcap_{i=1}^{n} A_i \neq \emptyset$$

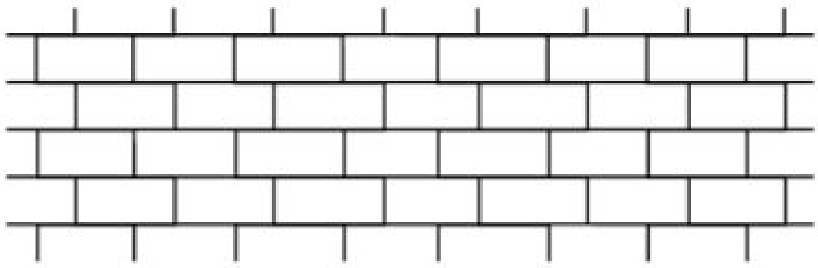

Figura 3.1: Ladrillos

Ejemplo 3 *Para entender mejor la definición de orden de una familia de conjuntos, fijémonos en la figura 3.1 y veamos cual es su orden.*

Supongamos que cada ladrillo y su frontera son un conjunto de la familia, entonces la familia de ladrillos ¿tendrá orden menor o igual que 1? Obviamente no ya que existen grupos de 3 ladrillos que intersecan en un punto dentro de la familia. ¿Y orden menor o igual que 2? Sí ya que cualquier grupo de 4 ladrillos que tomemos dentro de la familia tiene intersección vacía. Por lo tanto, ya que los ladrillos de la figura 3.1 tiene orden menor o igual que dos pero no menor o igual que uno, la familia tiene orden 2.

El concepto de orden de un conjunto va a ser muy importante en el desarrollo del trabajo, ya que es algo estrechamente ligado con la dimensión topológica, veamos otro ejemplo para afianzar el entendimiento de esta idea.

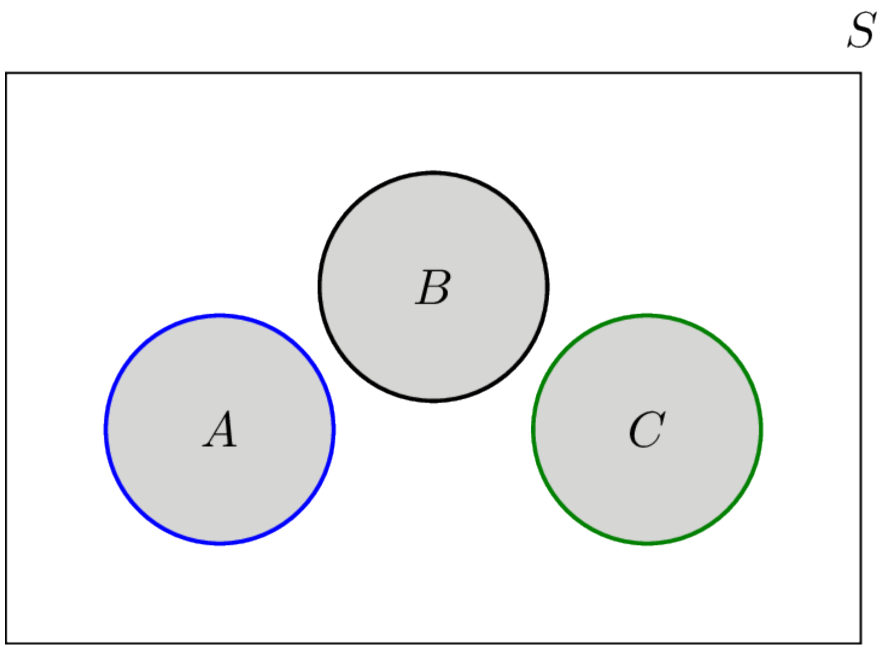

Figura 3.2: Familia de conjuntos disjuntos

Ejemplo 4 *En la figura 3.2, podemos apreciar una familia de 3 conjuntos disjuntos A,B,C, sobre un espacio S. ¿Cuál será el orden de esta familia? Démonos cuenta que al ser conjuntos disjuntos cualquiera 2 conjuntos que tomemos de la familia tienen intersección vacía por lo tanto el orden de esta familia será menor o igual que cero. ¿Puede ser menor o igual que -1? No, ya que cualquiera conjunto de la familia que coja (A, B o C) su intersección con sigo mismo es distinto del vacío. Por lo tanto el orden de una familia de conjuntos disjuntos es 0.*

3.2. Espacios de dimensión cero

Esta sección estará dedicada a entender un poco mejor y caracterizar brevemente los espacios de dimensión cero.

Antes de nada, será indispensable para el desarrollo de la teoría que sigue, conocer el concepto de cubrimiento.

Definición 16 Se dice que una familia de conjuntos $\mathcal{A}$, es un cubrimiento del espacio métrico S, que $\mathcal{A}$ cubre a S, si y solo si S está contenido en la unión de todos los elementos de $\mathcal{A}$.

Definición 17 Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos colecciones de conjuntos, entonces se dice que $\mathcal{B}$ está subordinado a $\mathcal{A}$ si y solo si:

$$\forall B \in \mathcal{B}, \quad \exists A \in \mathcal{A} : \quad B \subseteq A.$$

Si $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto del espacio métrico S, un refinamiento de $\mathcal{A}$ es un cubrimiento abierto $\mathcal{B}$ de S que es subordinado a $\mathcal{A}$.

Definición 18 Sea un espacio métrico S. $A \subseteq S$ es un conjunto clopen, si es cerrado y abierto al mismo tiempo. En particular S y $\emptyset$ son conjuntos clopen.

Definición 19 Sea el espacio métrico S. Una partición clopen de S se le dice a una familia de conjuntos en cuya unión está contenido S, son disjuntos dos a dos (partición) y cada uno de ellos es clopen.

Definición 20 Un espacio S es de dimensión cero si y solo si todo cubrimiento abierto y finito de S tiene un refinamiento que es una partición clopen.

En la siguiente sección veremos la relación que existe entre los conceptos de orden de una familia de conjuntos y de dimensión topológica (dimensión de cubrimientos).

3.3. Dimensión de cubrimientos

Sea S un espacio métrico, y n un número entero ≥ -1. Se dice que S tiene dimensión de cubrimiento menor o igual que n si y solo si todo cubrimiento con cardinal finito de S posee un refinamiento de orden menor o igual que n.
La dimensión de cubrimiento de S será exactamente n, para $n \geqslant 0$ si y solo si es menor o igual que n pero no menor o igual que n-1. Y se escribe Cov(S)=n.
Esta también llamada dimensión de Lebesgue.

Nota 4 *Al igual que pasaba con el orden de un conjunto, la dimendión de cubrimientos de un conjunto diremos que es exactamente igual a -1 si y solo si es menor o igual que -1.*

De las definiciones de orden de un conjunto y dimensión de cubrimientos, podemos deducir que:

$$Cov(S) = -1 \Longleftrightarrow S = \emptyset \vee S = \{\emptyset\},$$

$Cov(S) = 0 \Longleftrightarrow$ S es un espacio de dimensión cero ya que se puede cubrir por una partición de conjuntos disjuntos dos a dos, que además estos conjuntos serán clopen en S.

A continuación los siguientes resultados nos servirán como herramienta para probar los teoremas de suma y contenido de dimensión de cubrimientos.

Nota 5 *Sean F cerrado, U un abierto y $F \subseteq U$ entonces:*

$$\exists V : F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U,$$

con V abierto

Este resutado, nota 5, fué visto en la asignatura de topología por lo que prenscindiremos de demostración.

Teorema 9 *Sea S un espacio métrico y n un número entero* ≥ -1, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $Cov(S \leq n)$

2. *Si* $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, .., U_k\}$ *es un cubrimiento abierto y finito de S entonces, existe un cubrimiento* $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, .., B_k\}$ *que refina a* $\mathcal{U}$, *tal que* $U_i \supseteq B_i$, $i = 1, ..., k$, *tiene su mismo número de elementos y cubre a S con orden menor o igual que n.*

3. *Si* $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, .., U_{n+2}\}$ *es un cubrimiento abierto y finito de S entonces, existe un refinamiento de* $\mathcal{U}$, $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, .., B_{n+2}\}$, *tal que* $U_i \supseteq B_i$, $i = 1, ..., n+2$, *que también tiene n+2 elementos, sigue cubriendo a S y:*

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset.$$

4. *Si* $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, .., U_{n+2}\}$ *es un cubrimiento abierto de S entonces, existen conjuntos cerrados* $\{F_i \subseteq U_i\}_{i=1}^{n+2}$ *que sigue cubriendo a S y:*

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset.$$

Demostración:

(2)⇒(3) es claro ya que (2) es una generalización de (3) y (2)⇒(1) también por definición de dimensión de cubrimiento.

1. (1)⇒(2)

   Supongamos que Cov(S)≤n. Sea un cubrimiento abierto de S, $\mathcal{U} = \{U_1, ..., U_k\}$.
   Por definición de dimensión de cubrimientos, $\mathcal{U}$ posee un refinamiento al que llamaremos $\mathcal{W}$ que tiene orden ≤ n, ahora para probar (2) debemos ser capaces de construir uno, que lo haremos a partir de $\mathcal{W}$ y con exáctamente k elementos.
   Fijémonos en que:

$$\forall W \in \mathcal{W}, \quad \exists U_i \in \mathcal{U} : \ W \subseteq U$$

   .
   Definamos la familia de conjuntos $\mathcal{B}$ de la siguiente forma :

$$B_i = \bigcup \{W \in \mathcal{W} : \quad W \subseteq U_i\},$$

   ya que $\mathcal{W}$ cubría ya a S, los $B_i \subseteq U_i$ por como están construidos también cubren a S, además hemos restringido su cardinal a k, ahora, ¿siguen teniendo orden ≤ n?

Supongamos que x∈S, x como mucho puede estar simultáneamente en n+1 elementos de $\mathcal{W}$ y x $\in B_i$ solo si x$\in W$ para algún W$\subseteq U_i$ por lo tanto x pertenece como mucho a n+1 B_i's, lo que quiere decir que el orden de $\mathcal{B}$ es n.

2. (3)⇒(2)
Supongamos que se cumple (3). Sea el cubrimiento abierto de S, $\{U_1, U_2, .., U_k\}$, si k$\leq n+1$ entonces el cubrimiento ya tendría orden $\leq n$ y no habría nada que probar.
Supongamos entonces que k$\geq n+2$. Sea la familia de conjuntos $\{W_i\}_{i=1}^{n+2}$, definida como, $W_i = U_i$, i=1,...,n+1 y $W_{n+2} = \bigcup_{i=n+2}^{k} U_i$. Ya que los U_i's cubren a S, los W_i's también lo cubren.
Por (3):
$$\forall i \quad \exists V_i : \quad V_i \subseteq W_i, \quad \bigcap_{i=1}^{n+2} V_i = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i = S,$$
para probar (2) solo nos queda ajustar el número de elementos de n+2 a k, para ello definiremos los B_i's tales que:
$$B_i = V_i, \quad i = 1, .., n+1, \quad B_j = V_{n+2} \cap U_j, \quad j \geq n+2,$$
entonces por construcción los B_i's cumplen que:
$$\bigcap_{i=1}^{k} B_i = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{k} B_i = S \quad y \quad \forall i, B_i \subseteq U_i.$$

3. (3) $\Longrightarrow$ (4)

Supongamos cierto (3), es decir, dado el cubrimiento abierto de S:
$$\{U_1, U_2, ..., U_{n+2}\}, \quad \forall i = 1, ..., n+2, \quad \exists B_i \subseteq U_i :$$
$$\bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset \quad y \quad \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i = S,$$
Con cada B_i conjunto abierto en S.
Dado que la unión de todos los B_i's es S se tiene que:
$$S \setminus B_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i,$$
Ahora usando la nota 5 y que la unión finita de conjuntos abiertos es a su vez un conjunto abierto, deducimos que $\exists\ V_1$, tal que:

$$S \setminus B_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i.$$

Si definimos el conjunto $F_1 = S \setminus V_1$, podemos apreciar que cumple con las siguientes propiedades:

$$S \setminus B_1 \subseteq V_1 \Longrightarrow S \setminus V_1 = F_1 \subseteq B_1 \Longrightarrow F_1 \cap \bigcap_{i=2}^{n+2} B_i = \emptyset \quad y$$

$$V_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i \Longrightarrow S \setminus V_1 = F_1 \supseteq S \setminus \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i \Longrightarrow F_1 \cup \bigcup_{i=2}^{n+2} B_i = S.$$

Siguiendo el mismo procedimiento existe un conjunto abierto V_2, tal que:

$$S \setminus B_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq (S \setminus \overline{V_1}) \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i.$$

Ahora si $F_2 = S \setminus V_2$, se tiene que:

$$F_1 \cup F_2 \cup \bigcup_{i=3}^{n+2} B_i = S \quad y \quad F_1 \cap F_2 \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} B_i = \emptyset,$$

Continuando con este procedimiento acabaremos definiendo todos los F_i's.

4. (4)⇒(3)
Suponemos cierto (4).Tenemos que:

$$F_1 \subseteq (U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)),$$

Esto es cierto ya que $F_1 \subseteq U_1$, por la propia definición de los $F_i's$ y que $F_1 \subseteq S/\bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)$, también es cierto porque $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$.
Usando el resultado correspondiente a la nota 5, existe un conjunto abierto B_1 tal que:

$$F_1 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq (U_1 \cap (S \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i)),$$

Por como está definido B_1, se tiene que $\overline{B_1} \subseteq U_1$ y que $\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i = \emptyset$.
Luego también existe un conjunto abierto B_2, tal que,

$$F_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq (U_2 \cap (S \setminus (\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i))),$$

por lo tanto, $\overline{B_2} \subseteq U_2$ y $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i = \emptyset$, continuando la demostración de esta forma al final llegamos a que existe una familia de conjuntos abiertos, B_i's i=1,...,n+2, tales que:

$$B_i \subseteq U_i, \quad S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i \quad y \quad \bigcap_{i=1}^{n+2} B_i = \emptyset.$$

■

Se denomina ancho de red de un cubrimiento al mayor de los diámetros de los conjuntos que lo forman.

Proposición 4 *Sea S un espacio métrico con $Cov(S) \leq 1$. Tomemos A, B, C subconjuntos cerrados de S tales que, A∩B∩C= ∅, entonces existen conjuntos abiertos U,V,W cumpliendo que:*

$$U \supseteq A, V \supseteq B, W \supseteq C, \quad U \cap W \cap W = \emptyset \quad U \cup V \cup W = S.$$

Demostración:
Si A,B,C son cerrados, entonces sus complementarios A', B' y C' son abiertos y además, aplicando las Leyes De Morgan:

$$(A \cap B \cap C)' = \emptyset' \Rightarrow A' \cup B' \cup C = S,$$

cubren a S, A'∪B'∪C'= S, entonces por el teorema 9, existen conjuntos cerrados F,G,H, F⊆A', G⊆B' y H⊆C', que cubren a S y tienen intersección vacía. Ahora sus complementarios F',G',H', son conjuntos abiertos en S tales que, por coonstrucción: A⊆F', B⊆G' y C⊆H', $F' \cap G' \cap H' = \emptyset$ y $F' \cup G' \cup H' = S$ ■

Proposición 5 *Sea S un espacio métrico con $Cov(S) \leq 1$. Tomemos A, B, C subconjuntos cerrados de S tales que, A∩B∩C= ∅, entonces existen conjuntos cerrados U,V,W cumpliendo que:*
U⊇A, V⊇B, W⊇C, U∩V∩W= ∅ y U∪V∪W= S

Demostración:
Usando la proposición 4 y 4 en el teorema 9, la demostración es trivial. ■

Proposición 6 *Sean A_1, A_2, A_3 subconjuntos cerrados de S tales que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$. Entonces existen U_1, U_2, U_3 abiertos tales que:*

$$i = 1, 2, 3, \quad U_i \supseteq A_i, \quad \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3} = \emptyset.$$

Demostración:
Para i=1,2,3, definamos las funciones $d_i = d(x, A_i)$. Ya que $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset$, $\forall x \in S$, $\quad d_1(x) + d_2(x) + d_3(x) > 0$. Ahora para i=1,2,3, definamos los conjuntos:

$$U_i = \{x \in S : d_i(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x))\}.$$

Los U_i's son abiertos y además $U_i \supset A_i$, ya que si $x \in A_i \Rightarrow d_i(x) = 0$.
Ahora ¿$\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3} = \emptyset$? Supongamos que $x \in \overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \overline{U_3}$, entonces:

$$i = 1, 2, 3, \qquad d_i(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)),$$

Si $d_1(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)) \Rightarrow d_1(x) < \frac{d_2(x)+d_3(x)}{3}$.
$d_2(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x)) \Rightarrow d_2(x) < \frac{d_3(x)}{2}$ y como también $d_3(x) < \frac{1}{4}(d_1(x) + d_2(x) + d_3(x))$ llegamos a la conclusión que, $d_3(x) < \frac{d_2(x)}{2}$, lo cual es absurdo ya que contradice lo anterior. ■

3.3.1. Teoremas de suma

Teorema 10 *Sea S un espacio métrico, sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de S tales que $Cov(F_1) \leq 1$ y $Cov(F_2) \leq 1$. Entonces $Cov(F_1 \cup F_2) \leq 1$*

Demostración:
Para probar el teorema debemos ver que todo cubrimiento de $F_1 \cup F_2$ posee un refinamiento de orden ≤ 1 Sean A, B, C, conjuntos cerrados en $F_1 \cup F_2$ tales que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Sus intersecciones con F_1, A$\cap F_1$, B$\cap F_1$, C$\cap F_1$, son cerrados en F_1, y con intersección vacía, $A \cap B \cap C \cap F_1 = \emptyset$, entonces por (Proposición 5), existen conjuntos cerrados K, L, M que contienen a los anteriores, K$\supseteq$ $(A \cap F_1)$, L$\supseteq$ $(B \cap F_1)$, M$\supseteq$ $(C \cap F_1)$, cubren a F_1, $F_1 = K \cup L \cup M$ y su intersección es vacía $K \cap L \cap M = \emptyset$.
Podemos definir los conjuntos:

$$(K \cup A) \cap F_2, (L \cup B) \cap F_2, (M \cup C) \cap F_2,$$

que por construcción sabemos que también tienen intersección vacía y son cerrados en F_2 y están contenidos en F_2, por el mismo argumento de antes transladado a F_2 existen conjuntos cerrados P, Q, R, tales que: $(K \cup A) \cap F_2 \subseteq P$, $(L \cup B) \cap F_2 \subseteq Q$,$(M \cup C) \cap F_2 \subseteq R$, $P \cap Q \cap R = \emptyset$ y $P \cup Q \cup R = F_2$. Ya estamos en condiciones de construir un cubrimiento de $F_1 \cup F_2$ con orden menor o igual que 1, este es $E = P \cup K$, $F = Q \cup L$ y $G = R \cup M$ que por como están construidos estos conjuntos sabemos que :

1. E, F, G son cerrados.

2. $E \cap F \cap G = \emptyset$,

3. $E \cup F \cup G = F_2$,

ya hemos econtrado para un cubrimiento cualquiera de $F_1 \cup F_2$ tiene un refinamiento con orden menor o igual que 1. Por lo que acabamos de promar que Cov($F_1 \cup F_2$)≤ 1 ■

Corolario 1 *Sea S un espacio métrico, sean F_1 y F_2 subconjuntos cerrados de S tales que $Cov(F_1) \leq n$ y $Cov(F_2) \leq n$. Entonces $Cov(F_1 \cup F_2) \leq n$*

Demostración:
La prueba de este corolario es similar a la del teorema anterior con la diferencia de en vez de coger 3 conjuntos A,B,C hay que tener en cuenta n+2 conjuntos $A_1, ..., A_{n+2}$ y a partir de ahí seguir los mismos pasos. ■

Teorema 11 *Sea S un espacio métrico, sean $\forall\ i \in \mathbb{N}$ los conjuntos $F_i \subseteq S$ cerrados de S con Cov(F_i)≤ 1, entonces Cov($\cup_{i \in \mathbb{N}} F_i$)≤ 1*

Demostración:
Debemos probar que la unión numerable de conjuntos cerrados con dimensión Cov menor o igual que uno tiene también dimensión Cov menor o igual que uno, para ello la estrategia a seguir será similar a la del teorema anterior, encontrar un cubrimiento de la unión que tenga orden menor o igual que 1. Procedamos entonces a construir ese cubrimiento. Asumiremos que S=$\cup F_i$
Sean los conjuntos cerrados en S, A, B, C con intersección vacía, $A \cap B \cap C = \emptyset$ entonces por (Proposición 6) existen conjuntos abiertos $A \subseteq U_0, B \subseteq V_0, C \subseteq W_0$,tales que:

$$\overline{U_0} \cap \overline{V_0} \cap \overline{W_0} = \emptyset,$$

Definiremos recursivamente:

1. $$\overline{U_i} \supseteq \overline{U_{i-1}}, \quad \overline{V_i} \supseteq \overline{V_{i-1}}, \quad \overline{W_i} \supseteq \overline{W_{i-1}},$$

2. $$\overline{U_i} \cap \overline{V_i} \cap \overline{W_i} = \emptyset$$

3. $$F_i \subseteq U_i \cup V_i \cup W_i$$

Usaremos el procedimiento de inducción para probar que esas tres propiedades se cumplen para todo i. Si suponemos que $F_0 = \emptyset$, la base de la inducción queda probada, así que ahora asumamos que 1),2) y 3) se cumplen $\forall i < k$, los conjuntos $\overline{U_{k-1}} \cap F_k$, $\overline{V_{k-1}} \cap F_k$, $\overline{W_{k-1}} \cap F_k$, por como están construidos son cerrados y con intersección vacía.Usando la Proposición 5 y ya que Cov(F_k)≤1, existen subconjuntos de F_k cerrados $K_k \supseteq \overline{U_{k-1}} \cap F_k, L_k \supseteq \overline{V_{k-1}} \cap F_k, M_k \supseteq \overline{W_{k-1}} \cap F_k$, que tienen intersección vacía y unión exactamente todo F_k. $K_k \cap L_k \cap M_k = \emptyset$, F_k, $K_k \cup L_k \cup M_k = F_k$. Ahora los conjuntos $\overline{U_{k-1}} \cup K_k$, $\overline{V_{k-1}} \cup L_k$, $\overline{W_{k-1}} \cup M_k$, son cerrados y con intersección vacía, así que por (Proposición 4) existen conjuntos abiertos en S:

$$U_k \supseteq \overline{U_{k-1}} \cup K_k, \quad V_k \supseteq \overline{V_{k-1}} \cup L_k, \quad W_k \supseteq \overline{W_{k-1}} \cup M_k,$$

tales que cubren a F_k y la intersección de sus clausuras es vacía, con lo que quedaría probada la inducción.
Ahora si definimos los conjuntos:

$$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \quad V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i \quad W = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} W_i,$$

Por como están construidos estos conjuntos son abiertos en $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ lo cubren y tienen intersección vacía, por lo tanto hemos demostrado que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$ tiene un cubrimiento con orden 1 entonces Cov($\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k$) ≤ 1

■

Corolario 2 *Sea S un espacio métrico, sean $\forall\ i \in \mathbb{N}$ los conjuntos $F_i \subseteq S$ cerrados de S con Cov(F_i)$\leq n$, entonces Cov($\cup_{i\in\mathbb{N}} F_i$)$\leq n$*

Demostración:
La prueba de este corolario es similar a la del teorema anterior con la diferencia de en vez de coger 3 conjuntos A,B,C hay que tener en cuenta n+2 conjuntos $A_1, ..., A_{n+2}$ y a partir de ahí seguir los mismos pasos. ■

3.3.2. Teorema de subconjunto

Teorema 12 *Sea S un espacio métrico y T un subconjunto de S, $T \subseteq S$. Entonces $Cov(T) \leq Cov(S)$*

Demostración:
Si Cov(S)=∞, no hay nada que probar ya que $\infty \geq \infty$.
Así que supongamos que Cov(S)=$n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto debemos ver que Cov(T)$\leq n$, para ver esto distinguiremos 3 casos, T cerrado, T abierto, T subconjunto cualquiera de S, ni cerrado ni abierto.

1. Supongamos primero que T es cerrado. Sea $\mathcal{A}$ un cubrimiento abierto de T, ya que T$\subseteq$S, $\forall A \in \mathcal{A}, \exists E \subseteq S : A = E \cap T$, con E un abierto en S.
   Ya que T es cerrado E$\setminus$T, es abierto. Por lo tanto podemos definir un cubrimiento abierto en S de la forma:

   $$\mathcal{A}_1 = \{E \subseteq S : E \cap T \in \mathcal{A},\ E\ abierto\} \cup \{S/T\},$$

   ya que Cov(S)=n, existe un refinamiento de $\mathcal{A}_1$ al que llamaremos $\mathcal{A}_2$ que tiene orden$\leq$n.
   Ahora sea $\mathcal{A}_3 = \{E \cap T : E \in \mathcal{A}_2\}$, $\mathcal{A}_3$ por construcción está subordinado a $\mathcal{A}$, y es, un cubrimiento abierto de T con orden $\leq$ n, por lo tanto, Cov(T)$\leq n$.

2. Ahora si T es abierto, T puede escribirse como la unión contable de conjuntos cerrados, $T = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_j$, de la forma:

$$F_j = \{x \in S : d(x, S/T) \geq \frac{1}{j}\},$$

ahora por (1), $\forall j$ Cov(F_j)≤n y entonces basándonos en el corolario 2, Cov(T)≤n.

3. Supongamos ahora T un subconjunto general de S, no tiene por qué ser ni cerrado ni abierto, sea $\{U_1,..,U_{n+2}\}$ un cubrimiento abierto de T. Sean los conjuntos V_i, abiertos de S, tales que $\forall i$, $U_i = V_i \cap T$, ya que unión numerable de abiertos es un abierto,

$$V = \bigcup_{i=1}^{n+2} V_i,$$

es un conjunto abierto en S, por (2) Cov(V)≤n, entonces existe un refinamiento de $\{V_1,..,V_{n+2}\}$, $\{W_1,..,W_{n+2}\}$ tal que $\forall i$, $W_i \subseteq V_i$, W_i abiertos y

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} W_i = \emptyset, \quad \bigcup_{i=1}^{n+2} W_i = V,$$

y ya que $W_i \cap T$ son abiertos en T, cubren a T y ,

$$\bigcap_{i=1}^{n+2} (W_i \cap T) = \emptyset.$$

Entonces $W_i \cap T$ forman un refinamiento de orden ⩽ n, y en consecuencia, podemos asegurar que Cov(T)≤ n.

■

¿?¿?MOTIVAR TEOREMAS DE SUMA Y CONTENIDO¿?¿?

Capítulo 4

Ejemplos de fractales

4.1. Conjunto de cantor

4.1.1. Introducción

El Conjunto de Cantor, también llamado en inglés "the Cantor Dust ", polvo de Cantor, dust (polvo) es el término que en inglés se utiliza para denominar a los conjuntos con dimensión topológica igual a cero.
Es un subconjunto de la recta real, comprendido entre el intervalo [0,1].
Al estar contenido en $\mathbb{R}$ es un ejemplo de fractal muy sencillo de entender y comprenderlo viene muy bien para interiorizar conceptos clave en este tipo de conjuntos, como el de autosemejanza.
Recursivamente se puede construir de la siguiente manera, empiezas por el intervalo $[0,1]=C_0$. Luego este lo divides en 3 partes iguales, y te quedas con los extremos derecho e izquierdo, eliminas la parte del medio. Así queda:

$$C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1].$$

Aplicaremos esta idea de dividir en 3 y quitar la parte central a los subintervalos que van quedando, así:

$$C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1].$$

Estos conjuntos, los C_k son una secuencia decreciente, es decir,

$$\forall\ i \in \mathbb{N}: \quad C_i \subseteq C_{i+1},$$

El conjunto de Cantor se define como:

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k \tag{4.1}$$

Cada conjunto C_k está compuesto por 2^k intervalos cerrados y disjuntos entre ellos, que miden $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ cada uno.
La longitud total de cada C_k, es la suma de las longitudes de cada intervalo disjunto que contiene, esto es: $\left(\frac{2}{3}\right)^k$.

Así que la longitud total de todo el conjunto de cantor será:

$$\lim_{k\longrightarrow\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 0.$$

Que la medida 1-dimensional del cnjunto de Cantor sea 0 da a entender que la dimensión de este conjunto se va a encontrar entre 0 y 1, procedamos pues a calcular su dimensión de fraccionaria.

Proposición 7 *No hay dentro del conjunto de Cantor intervalos con longitud mayor que 0*

Demostración:
La demostración de este hecho se basa en como está construido el conjunto de Cantor, teniendo en cuenta 4.1. Cada C_k está formado por 2^k intervalos, cada uno con longitud $\frac{1}{3}^k$. Por lo tanto $\mathcal{C}$ estará formado por $\lim_{k\longrightarrow\infty} 2^k = \infty$ intervalos cada uno con longitud, $\lim_{k\longrightarrow\infty} \frac{1}{3}^k = 0$ ■

El proceso de construcción del conjunto de cantor se ilustra muy bien en esta imagen:

4.1.2. Calculo dimensión fraccionaria del conjunto de Cantor

El conjunto de Cantor, $\mathcal{C}$, puede ser construido recursivamente utilizando el siguiente sistema iterado de funciones:

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(\frac{x+2}{3})$$

De la siguiente forma:

$$C_0 = [0, 1], \quad C_1 = f_1[C_0] \cup f_2[C_0], ..., \quad C_k = f_1[C_{k-1}] \cup f_2[C_{k-1}]$$

La siguiente imagen ilustra el proceso de construcción del conjunto de Cantor mediante las funciones iteradas.

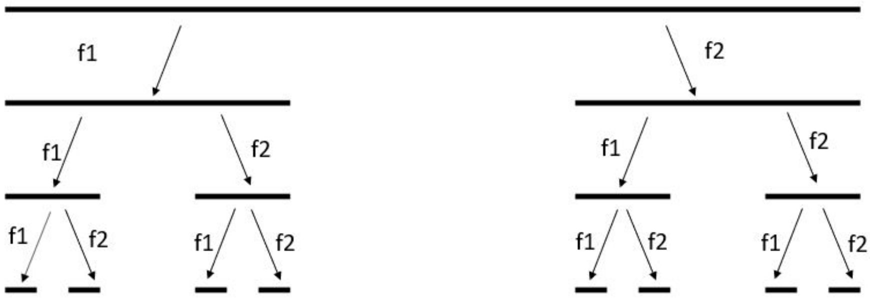

Figura 4.1: Construcción del Conjunto de Cantor

La lista de radios asociada al anterior conjunto de funciones iteradas es, $\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\}$, Por lo tanto su dimensión de autosemejanza será un número natural s tal que:

$$\frac{1}{3}^{s} + \frac{1}{3}^{s} = 1,$$

resolviendo la ecución queda, $s = \frac{lg(2)}{lg(3)}$. Que es la dimensión de autosemejanza del conjunto de Cantor.
VER QUE CUMPLE CON LA CONDICIÓN DE CONJUNTO ABIERTO–¿DIM AUTOSEMEJANZA=DIM HAUSDORFF

4.1.3. Caracterización de los elementos del conjunto de Cantor

En este apartado nos dispondremos a caracterizar los elementos del conjunto Cantor en base a su representación en base 3, lo que nos ayudará a deducir propiedades importantes del mismo, como su cardinalidad.

Teorema 13 *Sea $x \in [0, 1]$. Entonces x pertenece al conjunto de Cantor $x \in \mathcal{C}$ si y solo si se puede expresar en base 3 usando solo los dígitos 0 y 2.*

Demostración:
Los números que en base 3 tienen un 1 en la primera posición decimal se encuentran dentro del intervalo:

$$[0{,}1_{(3}, \ 0{,}122222.._{(3}] = \left[\frac{1}{3}_{(10}, \frac{2}{3}_{(10}\right]$$

Así quedarían fuera los elementos que no están en C_1.
Notemos que los propios $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, también tienen una representación en base 3 sin utilizar el dígito "1", estas son:

$$\frac{1}{3}_{(10} = 0{,}02222..._{(3}, \quad \frac{2}{3}_{(10} = 0{,}2_{(3}$$

Ahora seguimos el proceso con los números que tienen un 1 en la segunda posición decimal, que se encuentran entre 3 intervalos:

- $$[0{,}01_{(3}, \ 0{,}0122222.._{(3}] = \left[\frac{1}{9}_{(10}, \ \frac{2}{9}_{(10}\right],$$

  Con lo que hemos eliminado los puntos del intervalo $\left[\frac{1}{9}_{(10}, \ \frac{2}{9}_{(10}\right]$, menos los extremos que al igual que antes también tienen representación en base 3 sin usar el dígito 1

- $$[0{,}11_{(3}, \ 0{,}1122222.._{(3}] = \left[\frac{4}{9}_{(10}, \ \frac{5}{9}_{(10}\right],$$

  Este intervalo en el paso anterior lo hemos dejado fuera.

- $$[0{,}21_{(3}, \ 0{,}2122222.._{(3}] = \left[\frac{7}{9}_{(10}, \ \frac{8}{9}_{(10}\right],$$

  Con lo que hemos eliminado los puntos del intervalo $\left[\frac{7}{9}_{(10}, \ \frac{8}{9}_{(10}\right]$, menos los extremos que al igual que antes también tienen representación en base 3 sin usar el dígito 1

Con lo que hemos eliminado los puntos que quedan fuera de C_2.
Siguiendo con esta construcción quedaría que los elementos del conjunto de Cantor son aquellos que tienen represenación en base 3 sin usar el dígito 1. ■

Esta demostración es muy intuitiva viéndola desde el punto de vista de como está estructurado el conjunto de cantor. En sí este se construye empezando por el intervalo [0, 1], dividiéndolo recursivamente en 3 partes iguales y eliminando del conjunto la parte central.
Un método gráfico para representar los números del intervalo [0, 1] en base 3, es divides el intervalo en 3 partes iguales,

$$\left[0, , \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

Si el número esta en la primera parte empezará a escribirse 0.0, si está en la segunda 0.1 y en la tercera 0.2. Luego habrá que repetir el proceso recursivamente para encontrar el resto de cifras decimales.
Por ejemplo si queremos representar el número 0.5 en base 3, según el método, su representación será 0.111111111... ya que por muchas veces que dividas en 3, esté siempre se va a encontrar en el centro.

El proceso se ilustra en la siguiente imagen:

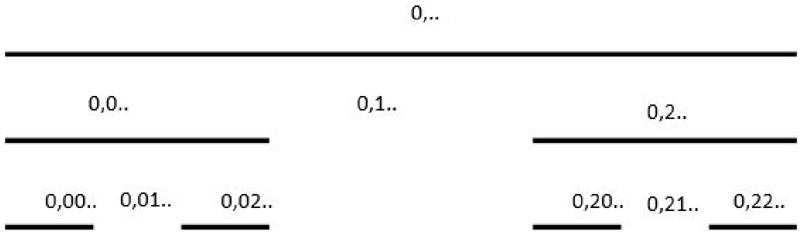

Figura 4.2: Coordenadas en base 3.

En la figura 4.2 se puede apreciar bastante bien que los números que en su representación en base 3, cuentan con un algún dígito 1, quedan fuera del conjunto de Cantor.

Una consecuencia inmediata de esta caracterización de los elementos del conjunto de Cantor, es que se puede establecer una biyección entre los elementos de $\mathcal{C}$, y el intervalo (0, 1).
Esta biyección consistiría en asignarle a cada elemento de $\mathcal{C}$ en base 3, el mismo número cambiándole los 2's por 1's, y así obtendríamos todos los elementos del intervalo (0,1) expresados en base 2. Y al ser este intervalo a su vez biyectivo con la recta real $\mathbb{R}$, estamos en condiciones de afirmar que $\mathcal{C}$ es biyectivo con $\mathbb{R}$ y por lo tanto su cardinal es el mismo.

Nota 6 *Al aplicar la función* $f_1(x) = \frac{x}{3}$ *a un* $x \in [0, 1]$, *expresado en base 3, lo que haces es añadirle un 0 al inicio de la expresión decimal. Y al aplicar la función* $f_2(x) = \frac{x+2}{3}$ *a un* $x \in [0, 1]$, *expresado en base 3, lo que haces es añadirle un 2 al inicio de la expresión decimal.*

Ejemplo 5 *En este ejemplo vamos a ver que lo que dice la nota 6 es cierto.*
$f_1(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}$, *y* $\frac{1}{3}$ *tiene expresión en base 3 0.1 y* $\frac{1}{9}$, *0.01 .*
$f_2(\frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$, *y* $\frac{1}{3}$ *tiene expresión en base 3 0.1 y* $\frac{7}{9}$, *0.21 .*

4.2. Conjuntos de Julia

Este tipo de conjuntos, que en las condiciones óptimas se tratan de fractales, deben su nombre al matemático francés Gaston Julia, (3 de febrero de 1893, Sidi Bel Abes, Argelia - 19 de marzo de 1978, París, Francia), pionero en el estudio de fractales.

Este tipo e conjuntos corresponden a la frontera de atracción de los puntos fijos de un polinomio f, con grado n$\geq$ 2 y coeficientes en $\mathbb{C}$ (plano complejo). En función del valor de la derivada de la función en el punto fijo, hay 3 tipos de puntos fijos, sea z_0 tal que f(z_0)=z_0 y λ=f'(z_0).

- Si $|\lambda| > 1$, el punto fijo z_0 es repulsor.

- Si $|\lambda| < 1$, el punto fijo z_0 es atractor.
- Si $|\lambda| = 0$, el punto fijo z_0 es superatractor.
- Si $|\lambda| = 1$, el punto fijo z_0 es indiferente.

Definición 21 *Sea f un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ y grado n≥ 2. Se define el Conjunto de Julia completo de f, K(f) como:*

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : \quad f^k(z) \nrightarrow \infty\}$$

Definición 22 *Se define el Conjunto de Julia f, J(f) como la frontera del conjunto de Julia completo, $\delta(K(f)) = J(f)$.*

Por lo tanto si $z \in J(f)$, en todo entorno de z hay puntos v y w tales que,

$$f^k(w) \longrightarrow \infty, \quad f^k(v) \nrightarrow \infty.$$

Ejemplo 6 *Sea la función, f:$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $f(z) = z^2$. se tiene que:*

$$f^k(z) = z^{2^k},$$

por lo tanto:

- *Si $|z| < 1, \Rightarrow \quad f^k(z) \longrightarrow 0$.*
- *Si $|z| = 1$, cuando k tienda a infinito, z prebalecerá en la circunferencia de radio 1.*
- *Si $|z| > 1, \Rightarrow \quad f^k(z) \longrightarrow \infty$.*

Se puede ver que $f(z) = z^2$, tiene 2 puntos fijos, z=0 y z=1, pero mientras que el 0 es superatractor, $f'(0) = 0$, el 1 es repulsor $f'(1) = 2$.

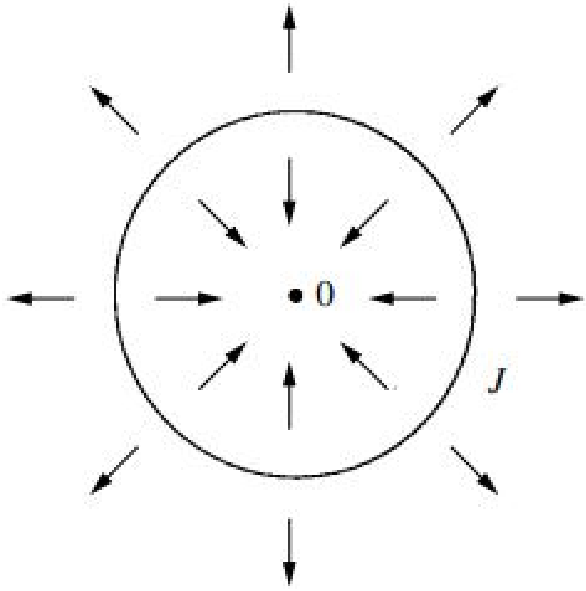

Figura 4.3: Conjunto de Julia para f(z)=z^2

como se puede apreciar en la figura 4.3, en este caso partícular el conjunto de Julia no es un fractal, es la circunferencia centrada en el 0 y de radio 1.

Mas ejemplos

4.2.1. Conjunto de Julia para la familia cuadrática

Llamaremos familia al conjunto de funciones con la forma:

$$f_c(z) = z^2 + c, \quad c \in \mathbb{C}.$$

Estas familias de funciones tienen dos puntos fijos,

- $z_0 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$,
- $z_1 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$.

Ya que $f_c'(z) = 2z$, se tiene que $|f_c'(z_0)| > 1$ y que $|f_c'(z_1)| < 1$, por lo tanto z_0 es repulsor y z_1 atractor.

Proposición 8 *El conjunto de Julia completo para la familia cuadrática de funciones está incluido en la bola de centro en 0 y radio máximo entre $|c|$ y 2.*

Demostración:

Tenemos que probar que si $|z| > max\{2, |c|\}$ entonces:

$$f_c^k(z)_{k\longrightarrow\infty} \longrightarrow \infty.$$

Sea $\epsilon > 0$ y z$\in \mathbb{C}$ tal que, $|z| > 2 + \epsilon$.

$$|f_c(z)| = |z^2 + c| \geqslant |z^2| - |c| \geqslant |z^2| - |z| = |z|(|z| - 1)$$

ya que $|z| > 2 + \epsilon \Rightarrow |z| - 1 > 1 + \epsilon$, por lo tanto,

$$|z|(|z| - 1) \geqslant |z|(1 + \epsilon) \Rightarrow |f_c(z)| \geqslant |z|(1 + \epsilon), \quad |f_c^k(z)| \geqslant |z|(1 + \epsilon)^k \longrightarrow \infty$$

■

Bibliografía

[1] DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA *Apuntes de teoría de la medida*, volumen 2, Badajoz, 22 de Enero de 2018 http://matematicas.unex.es/~ricarfr/librotmed.pdf

[2] C.SWARTZ *Measure integration and function spaces* ,world scientific, 1994

[3] KENNETH FALCONER *Fractal Geometry*, second edition, University of St Andrews, Uk, 2003.

[4] GERALD EDGAR *Measure, topology and Fractal Geometry*, second edition, Springer.

[5] *Sistemas dinámicos complejos*, http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/introduccion-a-los-sistemas-dinamicos/contenidos/sdcomplejos.html#.