donde E_m es la familia definida en (3) y φ_m es una función acotada en la raíz α que depende únicamente de f y sus derivadas.

Schröder escribió un artículo más sobre encontrar raíces de ecuaciones, o más bien sobre iteración de funciones (véase [116]), y luego dirigió su atención hacia otros temas.

Vista la forma en que Schröder construye esta familia de métodos, es probable que en algún momento Schröder haya tenido contacto con el trabajo de Chebyshev, y ya sabemos que a la inversa no pudo ocurrir.

1.4. Construcciones del método de Chebyshev

El método de Chebyshev es un conocido método iterativo para aproximar las raíces de una ecuación $f(x)$, su expresión clásica es

$$x_{n+1} = x_n - \left(1 + \frac{f(x_n)f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right)\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad n \geq 0. \tag{1.3}$$

Este método, junto con sus mejoras, aplicaciones y modificaciones ha llamado la atención de muchos investigadores. Por ejemplo, desde el punto de vista histórico, podemos encontrar una forma equivalente para escribir (1.3) conocida como fórmula de Schröder, véase [116]. Como muestra de recientes publicaciones sobre este tema, podemos citar por ejemplo [3], [4], [38], [40], [39], [62], [85] o [93].

El método de Chebyshev, puede deducirse de diferentes maneras. Por ejemplo, puede ser obtenido por la interpolación cuadrática de la función inversa de $f(x)$ con el fin de aproximar $f^{-1}(0)$, véase [3], [64] y [124]. Admite también una derivación geométrica, en términos de la parábola osculadora

$$ay(x)^2 + y(x) + bx + c = 0, \tag{1.4}$$

que satisface las condiciones de tangencia

$$y(x_n) = f(x_n), \quad y'(x_n) = f'(x_n) \quad y \quad y''(x_n) = f''(x_n).$$

Dedicamos este apartado a las distintas formas en que se ha podido obtener la construcción del método de Chebyshev, teniendo como punto de partida ideas diferentes, véase [93].

En primer lugar, usaremos una forma clásica de construcción de métodos iterativos, que consiste en la aproximación de la función inversa de $f(x)$. Esta forma se conoce como «interpolación cuadrática inversa», la misma ha sido estudiada por autores como [1], [93] y [124]. Otra forma de deducción del método de Chebyshev que presentamos en esta sección es el método de la parábola tangente, véase [112], [113] y [133]. Dicho método consiste en tomar una parábola que tenga algún punto de tangencia respecto a la función $f(x)$, y a continuación con un poco de manipulación algebraica se obtiene la función iterativa del método de Chebyshev.

Otra forma en la que se puede deducir el método de Chebyshev, que también es un tipo de deducción geométrica, es por medio de la interpolación exponencial. A diferencia de la interpolación cuadrática inversa y del método de las parábolas tangentes, aquí consideramos la curva de aproximación dada por la expresión

$$y(x) = e^{a(y-y(x_n))}(b(x-x_n)+c),$$

y procedemos de manera similar a como lo han hecho V. Kanwar, S. Singh y S. Bakshi en [81] o R. Behl, V. Kanwar y K. K. Sharma en [19].

Finalmente, presentamos una forma muy particular de deducir una familia de métodos iterativos, entre los cuales está el método de Chebyshev, para encontrar ceros de ecuaciones, que tiene como base, los métodos de Obreshkov, que son métodos para resolver ecuaciones diferenciales, véase [63] y [95].

1.4.1. Interpolación cuadrática inversa

Dada la función $y = f(x)$, llamaremos $x = \phi(y)$ a la función inversa de f. Haciendo el desarrollo en series de Taylor, en torno a un punto, digamos y_0, entonces tenemos

$$\phi(y) \approx \phi(y_0) + \phi'(y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y-y_0)^2.$$

Encontrar la raíz α de la ecuación $f(x) = 0$, es lo mismo que encontrar la imagen del cero por medio de la función ϕ, es decir calcular $\phi(0)$. Así, si x_0 es un valor próximo a α y $f(x_0) = y_0$, entonces,

$$\phi(0) \approx \phi(y_0) - \phi'(y_0)y_0 + \frac{1}{2}\phi''(y_0)(y_0)^2.$$

De aquí podemos deducir una nueva aproximación a α, que denotamos x_1:

$$x_1 = x_0 - \phi'(y_0)f(x_0) + \frac{1}{2}\phi''(y_0)f(x_0)^2. \tag{1.5}$$

Ahora calculamos $\phi'(y)$ y $\phi''(y)$ para sustituirlo en (1.5). Sabemos que $x = \phi(y)$, $y' = f'(x)$ e $y'' = f''(x)$, de modo que ahora, por el teorema de la función inversa,

$$\phi'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'} = \frac{1}{f'(x)}, \tag{1.6}$$

y

$$\phi''(y) = \frac{d\phi'(y)}{dy} = \frac{d(1/f'(x))}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{(y')^3}. \tag{1.7}$$

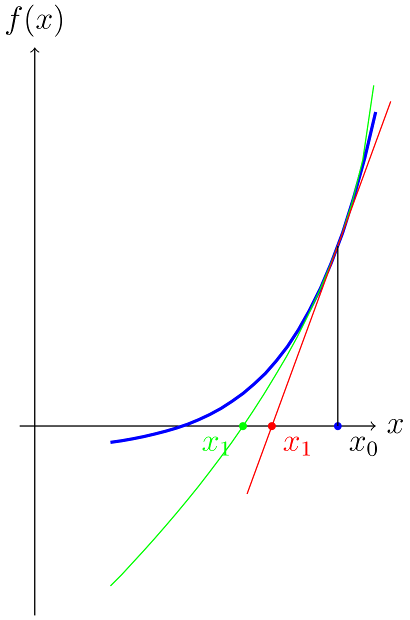

Figura 1.13: Interpretación geométrica del método de Chebyshev.

Sustituyendo (1.6) y (1.7) en (1.5) se obtiene

$$x_1 = x_0 - \Big(1 + \frac{1}{2}L_f(x_0)\Big)\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Repitiendo el mismo proceso para el punto x_1, conseguimos la nueva aproximación x_2 y por recurrencia obtenemos la expresión (1.3) que representa el algoritmo iterativo del método de Chebyshev.

1.4.2. Método de las parábolas tangentes

Una forma sencilla de obtener el método iterativo de Chebyshev, es por medio de una derivación geométrica a partir de una parábola tangente a la gráfica de la función cuya raíz se desea aproximar, como ilustramos en la Figura 1.13.

Consideremos una parábola de la forma

$$ay^2 + y + bx + c = 0, \tag{1.8}$$

la idea consiste en aproximar la función $f(x)$ eligiendo como semilla un punto x_0 suficientemente próximo a la raíz $f(x) = 0$. Si ahora tomamos en cuenta que la función debe cumplir las condiciones de tangencia siguientes

$$y(x_n) = f(x_n), \tag{1.9}$$
$$y'(x_n) = f'(x_n), \tag{1.10}$$
$$y''(x_n) = f''(x_n), \tag{1.11}$$

podemos escribir la parábola (1.8) de la forma conveniente

$$a(y - f(x_n))^2 + (y - f(x_n)) + b(x - x_n) = 0, \tag{1.12}$$

de modo que si $x = x_n$, entonces $y(x_n) = f(x_n)$, este hecho cumple la condición de tangencia (1.9).

Ahora determinamos los parámetros a y b para que se cumplan las condiciones

$$y'(x_n) = f'(x_n), \qquad y''(x_n) = f''(x_n).$$

Si derivamos la expresión (1.12), nos queda

$$2a(y(x_n) - f(x_n))y'(x_n) + y'(x_n) + b = 0, \tag{1.13}$$

luego evaluando en el punto $(x_n,\, f(x_n))$ nos queda

$$y'(x_n) + b = 0,$$

es decir

$$b = -y'(x_n) = -f'(x_n).$$

Como podemos observar, ahora falta derivar la expresión (1.13) y despejar a, como sigue

$$2a(y'(x_n))^2 + 2a(y(x_n) - f(x_n))y''(x_n) + y''(x_n) = 0,$$

esta expresión, evaluada en el punto de intersección $(x_n,\, f(x_n))$ queda reducida a la expresión

$$2a(y'(x_n))^2 + y''(x_n) = 0.$$

Si ahora despejamos a, se tiene que

$$a = -\frac{y''(x_n)}{2y'(x_n)^2} = -\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}.$$

Luego sustituyendo los valores encontrados para a y b en la expresión (1.12), obtenemos

$$-\frac{f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}(y - f(x_n))^2 + y - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n) = 0.$$

La intersección de esta curva con el eje OX, es decir cuando $y = 0$, nos daría la siguiente iteración del método de Chebyshev

$$\begin{aligned}
0 &= -\tfrac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n) - f'(x_n)(x - x_n)\\
f'(x_n)(x - x_n) &= -\tfrac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^2} - f(x_n)\\
x - x_n &= -\tfrac{f(x_n)^2 f''(x_n)}{2f'(x_n)^3} - \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}\\
x &= x_n - \left(1 + \tfrac{f(x_n) f''(x_n)}{2f'(x_n)^2}\right) \tfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}.
\end{aligned}$$

Como puede verse en (1.3), esta es la expresión del método de Chebyshev.

La Figura 1.13 es la interpretación geométrica del método de Chebyshev por medio de la parábola tangente, donde la línea recta en color rojo representa la recta tangente de la primera iteración del método de Newton, la curva verde es la parabola aproximante que emplea el método de Chebyshev y la curva azul es la función cuyas raíces queremos aproximar.

Ejemplo 1.1. *La Figura 1.13 representa la aproximación a una raíz de la función $f(x) = e^x - 7$, aplicando el método de Chebyshev y el método de Newton. La primera aproximación del método de Newton está dada por la recta tangente (roja) dada por la expresión*

$$2.3799075 + 7299075(x - 4) = 0.$$

Sin embargo, la primera aproximación del método de Chebyshev, representada por la parábola (verde), cuya expresión es

$$-2.3799075 - 2.7299075(x - 4) - 0.18315638888734(y - 2.3799075)^2 + y = 0,$$

es mejor aproximación, como habría de esperarse.

1.4.3. Interpolación exponencial

Para continuar con esta colección de las formas geométricas en que podemos obtener la expresión del método de Chebyshev, emplearemos el método de la interpolación exponencial, este procedimiento aproxima la función $f(x)$ por medio de una curva osculadora $y(x)$, de manera que cumpla con la condición

$$y^{(j)}(x_n) = f^{(j)}(x_n), \qquad j = 0,\ 1,\ 2.$$

En este caso, la curva de aproximación está dada por la expresión siguiente, véase [19] y [81],

$$y(x) = e^{a(y - y(x_n))}(b(x - x_n) + c), \tag{1.14}$$

donde a, b y c son tres parámetros a determinar. Partiendo de la curva de aproximación (1.14), e imponiendo condiciones de tangencia, se deducen las siguientes expresiones para los parámetros b y c:

$$\begin{aligned} y(x_n) = &\ f(x_n) \Rightarrow c = f(x_n) \\ y'(x_n) = &\ f'(x_n) \Rightarrow b = f'(x_n)(1 - af(x_n)). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Queda por determinarse el parámetro a. Las condiciones (1.15) aseguran que el método (1.14) tiene convergencia cuadrática, pero debemos afinar un poco, debido a que el método de Chebyshev es cúbicamente convergente.

Conocidos b y c, ahora la familia de nuevos métodos iterativos de la forma

$$x_{n+1} = x_n - c/b,$$

se convierten en

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{1 - af(x_n)} \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{1.16}$$

Para que la familia de métodos iterativos (1.14) asegure la convergencia cúbica debe cumplir, además, la condición

$$y''(x_n) = f''(x_n),$$

y esto implica que

$$a^2 f(x_n) f'(x_n)^2 - a(f(x_n)f''(x_n) + 2f'(x_n)^2) + f''(x_n) = 0. \tag{1.17}$$

Observemos que para valores de a muy próximos a cero y despreciando el término que contiene a^2 en (1.17), obtenemos

$$a = \frac{f''(x_n)}{f(x_n)f''(x_n) + 2f'(x_n)^2}, \tag{1.18}$$

si ahora sustituimos (1.18) en (1.16), obtenemos la misma expresión conseguida en los casos presentados anteriormente y que también coincide con el método de Chebyshev.

1.4.4. Siguiendo los métodos de Obreshkov

Los métodos de Obreshkov fueron introducidos con el objetivo de combinar ciertas propiedades que tienen los métodos multipaso y los métodos de derivadas múltiples, utilizados para la resolución de ecuaciones diferenciales, véase [88] y [95], como puede verse en [63] también el método de Chebyshev puede obtenerse en este contexto. En efecto, dada una ecuación autónoma con $m \geq 1$, definimos los operadores diferenciales lineales $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$:

$$\mathcal{L}(x(y); h, h_1, \ldots, h_{m-1}) = x(y+h) - x(y) - h \sum_{k=1}^{m} [\beta_k D(x)(y_k)$$
$$+ \gamma_k H_k D^2(x)(y_k)]$$

y

$$\mathcal{M}(x(y); h, h_1, \ldots, h_{m-1}) = x(y+h) - x(y) - h \left[\sum_{k=1}^{m} \beta_k D(x)(y_k) \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{m-1} \gamma_k H_k D^2(x)(y_k) \right],$$

donde

$$y_k = y - \sum_{\ell=1}^{k-1} h_\ell, \beta_k \quad \text{y} \quad \gamma_k, 1 \leq k \leq m$$

son constantes reales a determinar, y H_k está definida por

$$\begin{cases} H_k = h, & \text{si} \quad k = 1, \\ \sum_{\ell=1}^{k-1} h_\ell, & \text{si} \quad k > 1. \end{cases}$$

Consideremos una función $x(y)$ suficientemente diferenciable en torno a y. Entonces al desarrollar en series $x(y+h)$, $x'(y_k)$ y $x''(y_k)$ en un entorno de y, obtenemos el siguiente tipo de serie:

$$\sum_{q \geq 0} C_q x^{(q)}(y) \mathcal{H}^q,$$

donde la C_q es una constante real y

$$\mathcal{H}^q = h^{q_0} h_1^{q_1} \cdots h_{m-1}^{q_{m-1}},$$

con $q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} = q$. Decimos que el proceso desarrollado es de orden d cuando $C_0 = C_1 = \cdots = C_d = 0$ y $C_{d+1} \neq 0$.

Por otra parte, se dice que una función que depende de m variables $x_0, \cdots, x_{m-1}$ es de la forma

$$O_q(x_0, \cdots),$$

si resulta que

$$O\left(x_0^{q_0} x_1^{q_1} \cdots x_{m-1}^{qm-1}\right),$$

donde
$$q_0 + q_1 + \cdots + q_{m-1} = q, \quad q_i \geq 0, i = 0, 1, \ldots, m-1.$$
En este punto, una elección adecuada de β y γ nos permite encontrar el máximo orden de convergencia.

La clave en el desarrollo de esta idea es la siguiente. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función con una raíz simple α, es decir, $f(\alpha) = 0$ y $f'(\alpha) \neq 0$ en un entorno de I_α de α. Entonces, la función inversa $x = g(y)$ está bien definida en $J_0 \subseteq f(I_\alpha)$ y satisface la relación $g(0) = \alpha$. Al derivar la función $x(y)$ con respecto a la variable y, obtenemos
$$\frac{dx}{dy} = g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{1.19}$$

La ecuación (1.19) puede ser escrita como
$$D(x)(y) = x'(y) = F(x),$$
donde
$$F(x) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{1.20}$$
Si x_0 es una primera aproximación de α, a la raíz simple de f, y denotamos $y_0 = f(x_0)$.

Definimos ahora el operador $\mathcal{L}$ como
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x(y); h, h_1, \ldots, h_{m-1}) \ &= x(y+h) - x(y) - h \textstyle\sum_{k=1}^{m} \left[\beta_k D(x)(y_k)\right. \\ &\left. +\gamma_k H_k D^2(x)(y_k)\right]. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Siguiendo la técnica planteada, deducimos el método de Chebyshev en términos del operador $\mathcal{L}$ definido en (1.21). Para $m = 1$, la ecuación (1.21) se convierte en
$$\mathcal{L}(x(y); h) = x(y+h) - x(y) - h\left(\beta_1 D(x)(y) + h\gamma_1 D^2(x)(y)\right), \tag{1.22}$$

donde β_1 y γ_1 son las constantes reales a determinar.

Desarrollando $\mathcal{L}(x(y),\, h)$ en series de Taylor en torno a y se obtiene
$$\mathcal{L}(x(y); h) = (1-\beta)hD(x)(y) + \left(\frac{1}{2} - \gamma_1\right) h^2 D^{(2)}(x)(y) O_3(h).$$

Si en la ecuación anterior hacemos $\beta = 1$ y $\gamma = \frac{1}{2}$, entonces encontramos el máximo orden de convergencia para $x(y+h)$. Sustituyendo este valor en (1.22) llegamos al método iterativo de la forma
$$x^+ = x_n + h\left(D(x)(y) + \frac{h}{2} D^{(2)}(x)(y)\right).$$

En otras palabras, iniciando con x_0, la secuencia obtenida es definida por

$$x_{n+1} = x_n + h\left(F(x_n) + \frac{h}{2}F(x_n)F'(x_n)\right).$$

Hemos tomado en cuenta el hecho de que $D(x)(y) = F(x)$ y $D^{(2)}(x)(y) = F'(x)F(x)$, con $F(x)$ definida en (1.20).

Es importante observar que la clave de este aporte consiste en la elección del paso de integración h. En este caso, consideramos $h = -f(x_n)$. Como $F(x_n) = \frac{1}{f'(x_n)}$ y $F'(x_n) = -\frac{f''(x_n)}{f'(x_n)^2}$, el método derivado correspondiente es el método de Chebyshev (1.3).