

# **Estudio dinámico de diversos métodos iterativos para resolver ecuaciones no lineales**

Víctor Galilea

José Manuel Gutiérrez Jiménez



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>3</b>
<b>3. Método de Newton en el plano complejo</b>	<b>5</b>
3.1. Antecedentes: el problema de Cayley . . . . .	5
3.2. Propiedades del método de Newton en $\mathbb{C}$ . . . . .	7
3.2.1. El método de Newton para polinomios cuadráticos (Con dos raíces) . . . . .	9
3.2.2. El método de Newton para polinomios cúbicos con raíces múltiples . . . . .	10
3.2.3. El método de Newton para polinomios cúbicos . . . . .	13
3.2.4. El método de Newton para polinomios de grados 4 y 5 . . . . .	16
<b>4. Método de Schröder en el plano complejo</b>	<b>19</b>
4.1. Introducción: Método de Schröder y conceptos fundamentales . . . . .	19
4.1.1. Definición del método de Schröder . . . . .	19
4.2. Polinomios con dos raíces de multiplicidades arbitrarias . . . . .	20
4.2.1. Reducción al caso canónico mediante conjugación . . . . .	20
4.2.2. Análisis dinámico de $R_{m,n}$ . . . . .	20
4.2.3. Teoremas principales: caracterización del conjunto de Julia . . . . .	21
4.2.4. Cuencas de atracción . . . . .	21
4.2.5. Análisis paramétrico: influencia de la razón de multiplicidades . . . . .	22
4.2.6. Comportamiento asintótico . . . . .	22
4.2.7. Ilustraciones: cuencas de atracción . . . . .	23
4.2.7.1. Caso: $p = m/n$ creciente . . . . .	23
4.2.7.2. Caso: $p = m/n$ próximo a 1 . . . . .	25
4.2.7.3. Caso: razón constante $p = 2$ . . . . .	27
4.2.7.4. Caso: raíces no reales . . . . .	27
4.2.8. Comparación con el método de Newton . . . . .	28
4.2.8.1. Naturaleza del conjunto de Julia . . . . .	28
4.2.8.2. Distribución de las cuencas de atracción . . . . .	28
4.2.8.3. Coste computacional y orden de convergencia . . . . .	29
4.3. Polinomios cúbicos: estudio del plano de parámetros . . . . .	29
4.3.1. Polinomios cúbicos con tres raíces simples . . . . .	29

4.3.2.	Puntos críticos y el teorema de Fatou-Julia . . . . .	30
4.3.3.	Reducción a una familia uniparamétrica . . . . .	31
4.3.4.	Análisis de puntos críticos . . . . .	31
4.3.5.	El plano de parámetros . . . . .	31
4.3.6.	Comparación con el método de Newton . . . . .	32
4.3.7.	Caso especial: raíces formando un triángulo equilátero . . . . .	33
4.3.8.	Observaciones dinámicas adicionales . . . . .	34
4.4.	El punto del infinito en el método de Schröder . . . . .	34
4.4.1.	Grado del método de Schröder . . . . .	34
4.4.2.	El infinito en el plano complejo extendido . . . . .	37
4.4.3.	Comportamiento del infinito para polinomios cúbicos . . . . .	37
4.4.4.	Plano de parámetros del infinito . . . . .	37
4.4.5.	Raíces dominantes . . . . .	38
4.4.6.	Casos excepcionales: ausencia de raíz dominante . . . . .	39
4.4.6.1.	Caso del triángulo equilátero: $\lambda = \sqrt{3}i$ . . . . .	39
4.4.6.2.	Otros valores especiales . . . . .	39
4.4.7.	Extensión a polinomios con raíces múltiples . . . . .	39
4.4.8.	Comparación con el teorema de Hubbard . . . . .	40
4.4.9.	Implicaciones dinámicas del comportamiento del infinito . . . . .	40
4.5.	Conclusiones del capítulo . . . . .	41
4.5.1.	Síntesis: polinomios con dos raíces . . . . .	41
4.5.2.	Síntesis: polinomios cúbicos . . . . .	41
4.5.3.	Síntesis: comportamiento del infinito . . . . .	42
4.5.4.	Implicaciones para la práctica numérica . . . . .	42
4.5.5.	Direcciones de investigación futura . . . . .	43
<b>5.</b>	<b>Análisis detallado del método de Schröder</b>	<b>45</b>
<b>6.</b>	<b>Dinámica de la familia Chebyshev-Halley</b>	<b>47</b>
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y líneas futuras de investigación</b>	<b>49</b>
<b>Anexo 1:</b>	<b>Desarrollo de un framework en Python para el análisis dinámico</b>	<b>51</b>
<b>Bibliografía</b>		<b>51</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Antecedentes y marco teórico sobre métodos iterativos [146] y nociones de dinámica, tanto real como compleja. 1.1. Motivación y relevancia del estudio 1.2. Antecedentes históricos de los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones no lineales 1.3. Dinámica compleja y métodos iterativos: una conexión interdisciplinaria (topología, análisis numérico, etc.) 1.4. Objetivos de la tesis 1.5. Estructura y organización del trabajo



# Capítulo 2

## Fundamentos teóricos

- 2.1. Métodos iterativos para la resolución de ecuaciones ( $f(x) = 0$ )
- 2.2. Teoría de la iteración de funciones racionales
- 2.3. Conceptos de dinámica compleja: conjuntos de Julia y Fatou
- 2.4. Conjugación topológica y equivalencia dinámica
- 2.5. Plano de parámetros y bifurcaciones
- 2.6. Consideraciones numéricas: convergencia local y global



# Capítulo 3

## Dinámica del método de Newton en el plano complejo

### 3.1. Antecedentes: el problema de Cayley

El estudio de la dinámica del método de Newton en el campo complejo tiene una importancia histórica, desde que E. Schröder (1870) y A. Cayley (1879) propusieran usar el método de Newton para resolver ecuaciones definidas en el plano complejo:

$$f(z) = 0, \quad f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

El que se conoce como *problema de Cayley* consiste en estudiar las cuencas de atracción del método de Newton cuando es aplicado para aproximar las raíces del polinomio complejo  $p(z)$ . En palabras del propio Cayley, el problema se puede formular como sigue:

«...the problem is to determine the regions of the plane, such that  $P$  [initial point] being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point  $A$  [a root of the polynomial]...»

Con la notación actual, si  $z^*$  es una solución de (3.1), y

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (3.2)$$

es la sucesión generada por el método de Newton a partir de un cierto  $z_0 \in \mathbb{C}$ , se trata de caracterizar la región

$$A(z^*) = \{z_0 \in \mathbb{C} : z_n \rightarrow z^*\},$$

conocida como *cuenca de atracción* de la raíz  $z^*$ . Cayley ([28], [29]) consiguió caracterizar los cuencas de atracción de las raíces de un polinomio cuadrático, en concreto del polinomio  $p(z) = z^2 - 1$ , aunque fracasó en su intento de extender el estudio al caso cúbico y a grados superiores. Después de un tiempo tratando de resolver el problema para el polinomio cúbico  $p(z) = z^3 - 1$ , concluye sus artículos con las siguientes sentencias:

«The solution is easy and elegant in the case of a quadratic equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty (1879).»

«The division into regions is made without difficulty in the case of a quadratic equation; but in the next succeeding case, that of a cubic equation, it is anything but obvious what the division is: and the author had not succeeded in finding it. (1880)»

**Desiderata and Suggestions.**

By PROFESSOR CAYLEY, Cambridge, England.

No. 3.—THE NEWTON-FOURIER IMAGINARY PROBLEM.

THE Newtonian method as completed by Fourier, or say the Newton-Fourier method, for the solution of a numerical equation by successive approximations, relates to an equation  $f(x) = 0$ , with real coefficients, and to the determination of a certain real root thereof  $a$  by means of an assumed approximate real value  $\xi$  satisfying prescribed conditions: we then, from  $\xi$ , derive a nearer approximate value  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ ; and thence, in like manner,  $\xi_2, \xi_3, \dots$  approximating more and more nearly to the required root  $a$ .

In connexion herewith, throwing aside the restrictions as to reality, we have what I call the Newton-Fourier Imaginary Problem, as follows.

Take  $f(u)$ , a given rational and integral function of  $u$ , with real or imaginary coefficients;  $\xi$ , a given real or imaginary value, and from this derive  $\xi_1$  by the formula  $\xi_1 = \xi - \frac{f(\xi)}{f'(\xi)}$ , and thence  $\xi_2, \xi_3, \dots$  each from the preceding one by the like formula.

A given imaginary quantity  $x + iy$  may be represented by a point the coordinates of which are  $(x, y)$ : the roots of the equation are thus represented by given points  $A, B, C, \dots$ , and the values  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$  by points  $P, P_1, P_2, \dots$  the first of which is assumed at pleasure, and the others each from the preceding one by the like given geometrical construction. The problem is to determine the regions of the plane, such that  $P$  being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point  $A$ ; anywhere within another region at the point  $B$ ; and so for the several points representing the roots of the equation.

The solution is easy and elegant in the case of a quadric equation, but the next succeeding case of the cubic equation appears to present considerable difficulty.

CAMBRIDGE, March 5<sup>th</sup>, 1870.

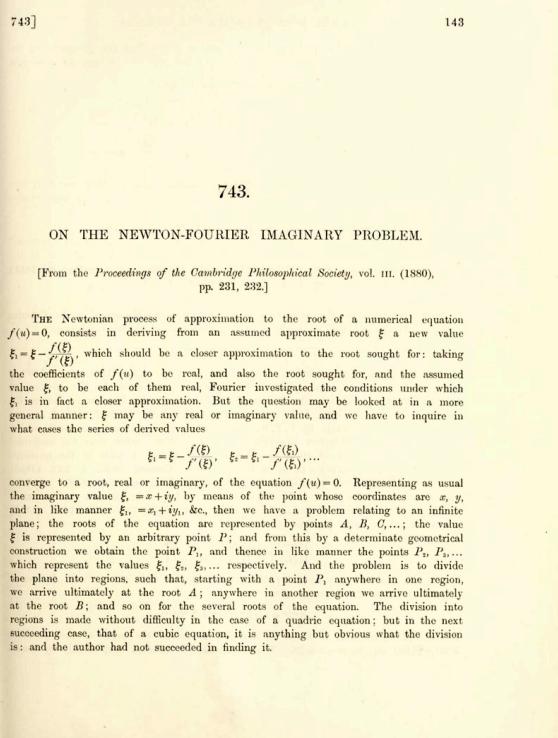


Figura 3.1: Los artículos originales de Cayley, de 1879 y 1880 respectivamente, en los que se pone de manifiesto la dificultad para caracterizar las cuencas de atracción del método de Newton aplicado a polinomios cúbicos.

En la figura 3.2 mostramos las cuencas de atracción de los polinomios  $p(z) = z^2 - 1$  y  $p(z) = z^3 - 1$ . En el primer caso vemos que los puntos de partida situados en el semiplano  $\mathbb{C}^- = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0\}$  convergen a la raíz  $z^* = -1$ , mientras que los puntos de partida situados en el semiplano  $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$  convergen a la raíz  $z^* = 1$ . En la separación de ambas regiones, el eje imaginario, en donde el método de Newton presenta un comportamiento caótico. Sin embargo, como vemos en la segunda gráfica de la figura 3.2, la situación para el polinomio  $p(z) = z^3 - 1$  es mucho más complicada. La separación entre las cuencas de atracción de las tres raíces,  $1, (-1 + \sqrt{3}i)/2$  y  $(-1 - \sqrt{3}i)/2$ , no es tan diáfana y tiene una estructura mucho más enrevesada.

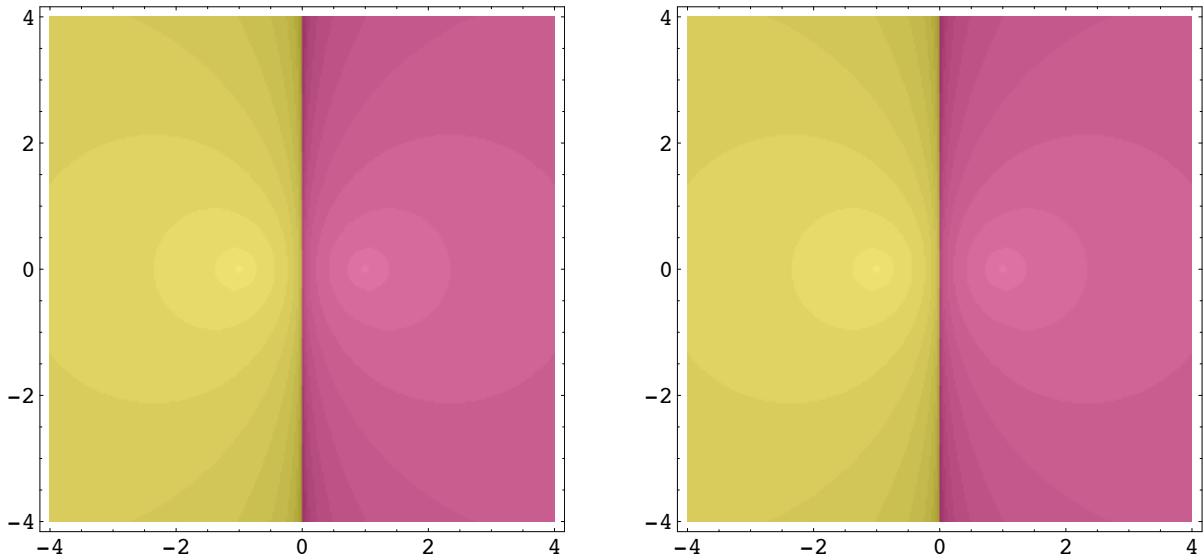


Figura 3.2: A la izquierda se muestran las cuencas de atracción del polinomio  $p(z) = z^2 - 1$  y a la derecha las del polinomio  $p(z) = z^3 - 1$ . Las regiones pintadas con el mismo color están formadas por puntos de partida para los cuales el método de Newton converge a la misma raíz del polinomio correspondiente.

No es de extrañar, por tanto, que Cayley, que no disponía de los potentes programas de dibujo y cálculo simbólico que tenemos en la actualidad, encontrara dificultades al intentar pasar de una ecuación cuadrática a una cúbica.

Posteriormente, G. Julia y P. Fatou consideran funciones racionales en una forma más general, obteniendo resultados significativos y sientan el estudio de iteraciones de funciones racionales en el plano complejo extendido, también conocido como la esfera de Riemann. En otras palabras, con sus trabajos comienza en forma sistemática el estudio de los sistemas dinámicos complejos. La base de sus trabajos fue el estudio realizado por Montel sobre familias normales.

### 3.2. Algunas propiedades del método de Newton en el plano complejo

Sea  $p(z) = a_d z^d + \cdots + a_1 z + a_0$ , con  $a_d \neq 0$ , un polinomio de grado  $d$  en  $\mathbb{C}$ , y sea

$$N_p(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)},$$

su método de Newton.

Veamos algunas propiedades elementales de la dinámica de  $N_p$ :

- (1)  $N_p(z_0) = z_0$  si y sólo si  $p(z_0) = 0$ , es decir, los puntos fijos de  $N_p$  son las raíces de  $p$ .

- (2)  $z = \infty$  es siempre un punto fijo de  $N_p$ , y como  $N'_p(\infty) = \frac{d}{d-1}$  este punto fijo es repulsor. Por lo tanto, si el método de Newton produce un punto cerca de  $\infty$ , sus sucesivas iteraciones se aproximan a una parte compacta de  $\mathbb{C}$ .
- (3) Puesto que  $N'_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{(p(z))^2}$ , si  $z_0$  es una raíz simple de  $p$ , se tiene que  $N'_p(z_0) = 0$ , esto es,  $z_0$  es un punto fijo superatractor de  $N_p$ , lo cual implica que  $N_p$  es conjugada a la aplicación  $z \rightarrow z^k$ , para algún  $k > 1$  en una vecindad de  $z_0$ .
- (4) Las raíces múltiples de  $p$  son puntos fijos atractores, pero no superatractores, de  $N_p$ , pues si  $z_0$  tiene multiplicidad  $m > 1$ , entonces  $N'_p(z_0) = \frac{m-1}{m} < 1$ .
- (5) Para polinomios genéricos de grado  $d$ , esto es, tienen todas sus raíces distintas, el método de Newton es una función racional de grado  $d$ . Cuando el polinomio tiene raíces múltiples,  $N_p$  tiene grado menor que  $d$ .
- (6) Los puntos críticos de  $N_p$  son las raíces simples y los puntos de inflexión de  $p$ . Los puntos críticos de  $N_p$  que no son raíces de  $p$  los llamaremos *puntos críticos libres*. Recuerde que vimos en la sección anterior que las propiedades del conjunto de Julia de una función analítica en  $\overline{\mathbb{C}}$  son frecuentemente determinadas por las órbitas de sus puntos críticos.
- (7) Los puntos críticos de  $p$ , es decir, las raíces de  $p'(z) = 0$ , son los polos de  $N_p$ .

Las propiedades anteriores caracterizan completamente al método de Newton, es decir, tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.** *Una función racional  $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  de grado  $d \geq 2$  es la función de Newton de un polinomio de grado mayor o igual que 2 si y sólo si el punto  $z = \infty$  es el único punto fijo repulsor y para todos los otros puntos fijos  $\xi_1, \dots, \xi_d \in \mathbb{C}$  existe un número  $n_j \in \mathbb{N}$ , tal que  $R'(\xi_j) = \frac{n_j-1}{n_j} < 1$ .*

Este resultado fue probado por G. Saunder en 1984 ([132]). También se le atribuye a J. Head ([63]) en 1987 y a K. Nishizawa y M. Fujimura en 1992 (véase [106]). En particular, ese resultado contiene el caso del método de Newton para polinomios con raíces simples. Para otros métodos, no se tiene una tal resultado, aún en el caso de polinomios con raíces simples.

El primer resultado acerca de la ubicación de los puntos críticos de un polinomio es el teorema clásico de Gauss-Lucas, que enunciamos a continuación.

**Teorema 3.2** (Gauss-Lucas, [92]). *Los puntos críticos de un polinomio no constante  $p$  están contenidos en la envoltura convexa de sus raíces.*

El siguiente teorema es importante para la descripción global de las posible conducta de los iterados por el método de Newton.

**Teorema 3.3** (Shishikura, [138]). *Sea  $R$  un función racional que posee un único punto fijo repulsor o racionalmente indiferente con multiplicador  $\lambda = 1$ , entonces  $\mathcal{J}(R)$  es conexo.*

Como  $z = \infty$  es el único punto fijo repulsor para la función de iteración del método de Newton,  $N_p$ , deducimos la siguiente consecuencia.

**Corolario 3.4.** *Sea  $p(z)$  un polinomio complejo, entonces el conjunto de Julia de  $N_p$  es conexo.*

*Nota 3.5.* Esta propiedad del conjunto de Julia del método de Newton cuando es aplicado a polinomios es una parte fundamental en la demostración del teorema ?? de Hubbard, Schleicher y Sutherland y que en esencia dice que el método de Newton es un algoritmo eficiente para el cálculo de raíces de polinomios. Este teorema, junto con el resultado de Schleicher (véase el teorema ??), nos permite concluir que el método de Newton es, por tanto, un algoritmo iterativo.

### 3.2.1. El método de Newton para polinomios cuadráticos (Con dos raíces)

$$p(z) = (z - a)^m(z - b)^n$$

Como ya se puso de manifiesto al enunciar el problema de Cayley en los antecedentes de este capítulo, el estudio dinámico del método de Newton aplicado a polinomios de la forma  $p(z) = (z - a)(z - b)$  es relativamente sencillo. En el teorema ?? se vio que  $N_p(z)$  es conjugado con la aplicación  $g(z) = z^2$ . Veamos ahora una nueva demostración de este resultado, poniendo de manifiesto que el conjunto de Julia  $J(N_p)$  es la recta que equidista de los puntos  $a$  y  $b$ .

**Teorema 3.6.** *Sea  $N_p$  la aplicación de Newton para el polinomio  $p(z) = (z - a)(z - b)$ , con  $a, b \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq b$ . Entonces  $N_p$  es conjugada con la aplicación  $z^2$  mediante la transformada de Möbius  $M(z) = (z - a)/(z - b)$ . Además  $J(N_p)$  es una circunferencia en la esfera compleja que pasa por el punto del infinito, o equivalentemente,  $J(N_p)$  es la recta que equidista de los puntos  $a$  y  $b$  en el plano complejo.*

**Demostración.** Se puede comprobar por sustitución directa que  $R(z) = M \circ N_p \circ M^{-1}(z) = z^2$ , aunque el cálculo puede resultar un poco tedioso. Veamos una demostración alternativa que puede resultar más interesante desde el punto de vista matemático. Lo primero, es observar que

$$\begin{aligned} N_p(a) &= a & M(a) &= 0 \\ N_p(b) &= b & M(b) &= \infty \\ N_p(\infty) &= \infty & M(\infty) &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que:

$$R : \begin{array}{ccccccc} z & \rightarrow & M^{-1}(z) & \rightarrow & N_p(M^{-1}(z)) & \rightarrow & M(N_p(M^{-1}(z))) \\ 0 & \rightarrow & a & \rightarrow & a & \rightarrow & 0 \\ \infty & \rightarrow & b & \rightarrow & b & \rightarrow & \infty \end{array}$$

$R(z)$  es una aplicación racional de grado 2 (como  $N_p(z)$ ) que fija el 0, el  $\infty$  y el 1. Además,

$$\begin{aligned} R'(z) &= M'(N_p(M^{-1}(z)))N'_p(M^{-1}(z))(M^{-1})'(z) \\ &= \frac{M'(N_p(M^{-1}(z)))N'_p(M^{-1}(z))}{M'(M^{-1}(z))}. \end{aligned}$$

Como  $M'(z) = (a - b)/(z - b)^2$  y  $N'_p(z) = L_p(z) = p(z)p''(z)/p'(z)^2$ , se tiene que

$$R'(0) = \frac{M'(N_p(a))N'_p(a)}{M'(a)} = N'_p(a) = 0 \quad (M'(a) \neq 0).$$

Por otra parte, como  $M'(b) = \infty$ ,

$$R'(\infty) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{M'(N_p(x))N'_p(x)}{M'(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{(x - b)^2}{(N_p(x) - b)^2} N'_p(x) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{1}{N'_p(x)} = \infty.$$

Así,  $R(z)$  tiene una raíz doble en  $z = 0$ , luego es de la forma

$$R(z) = \frac{z^2}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}.$$

Como  $R(\infty) = \infty$ ,  $\alpha = 0$ . Como  $R'(\infty) = \infty$  y

$$R'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{2z(\beta z + \gamma) - \beta z^2}{(\beta z + \gamma)^2} = \frac{1}{\beta},$$

se sigue que  $\beta = 0$ . Por último, como  $R(1) = 1$ ,  $\gamma = 1$  y  $R(z) = z^2$ . ■

### 3.2.2. El método de Newton para polinomios cúbicos con raíces múltiples

Una ligera variante del estudio realizado en la sección anterior nos permite obtener algunas conclusiones acerca del comportamiento del método de Newton cuando aparecen raíces múltiples. Lo primero observación general que podemos hacer es que cuando se aplica el método de Newton a un polinomio de grado  $d$ , la función de iteración resultante tiene grado  $d$  cuando las raíces son simples. Sin embargo, cuando las raíces son múltiples, el grado de la función de iteración es menor estrictamente que  $d$ . Consideraremos en esta sección el caso del polinomio

$$p(z) = (z - a)^2(z - b). \quad (3.3)$$

En este caso, particularmente sencillo, el polinomio tiene una raíz doble y una raíz simple. Analizaremos las dinámicas del método de Newton y estudiaremos cómo son las cuencas de atracción de las raíces de  $p$ . Veremos que el comportamiento es totalmente distinto a cuando las raíces del polinomio son simples.

En primer lugar, mediante cambios de variable afines, el estudio del método de Newton aplicado a polinomios de la forma (3.3), puede reducirse al estudio del polinomio  $p(z) = (z - 1)^2(z + 1)$ . En este caso, la función de iteración del método de Newton es de la forma

$$N_p(z) = \frac{2z^2 + z + 1}{1 + 3z}.$$

Esta función tiene un punto fijo superatractor en  $z = -1$  y un punto fijo atractor en  $z = 1$ , con multiplicador asociado  $1/2$ . Además, el punto del infinito es un punto fijo repulsor con

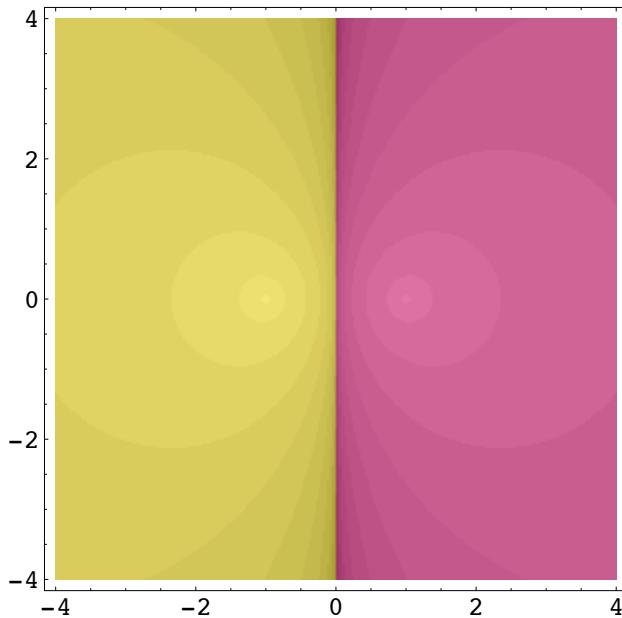


Figura 3.3: Cuencas de atracción de las raíces,  $z = -1$  y  $z = 1$  para el método de Newton aplicado al polinomio  $p(z) = (z - 1)^2(z + 1)$ .

multiplicador asociado  $3/2$ . En la figura 3.3 se muestran las cuencas de atracción de las dos raíces,  $z = -1$  y  $z = 1$ . Como se puede apreciar en la figura, la cuenca de atracción de la raíz múltiple, en este caso,  $z = 1$ , «invade» la cuenca de atracción de la otra raíz,  $z = -1$ . En este caso, la presencia de dos raíces, una múltiple y otra simple, hace que se pierda la simetría a la que hace referencia el teorema 3.6.

Por otra parte, para el caso de polinomios con raíces múltiples de la forma (3.3) la iteración de Newton,  $N_p(z)$ , es conjugada mediante la transformada de Möbius  $M(z) = (z - a)/(z - b)$  con la aplicación  $z(z + 1)/2$  definida en el plano complejo ampliado  $\hat{\mathbb{C}}$ . El correspondiente conjunto de Julia se muestra en la figura 3.4.

Si se conoce la multiplicidad  $m$  de la raíz a aproximar, el conocido como método de Newton para raíces múltiples,

$$N_m(z) = z - m \frac{p(z)}{p'(z)} \quad (3.4)$$

tiene la ventaja de que recupera el orden de convergencia cuadrático al aproximar la raíz múltiple. El estudio de la dinámica del método (3.4) para polinomios de la forma (3.3) lo realizó Gilbert [55]. En ese trabajo, se prueba que la correspondiente función de iteración para polinomios de la forma (3.3) es

$$N_2(z) = z - 2 \frac{p(z)}{p'(z)} = \frac{z^2 + az - 2ab}{3z - a - 2b}. \quad (3.5)$$

Esta función racional es conjugada con la aplicación  $z^2 - 3/4$  mediante la transformada de Möbius

$$M(z) = \frac{3z + a - 4b}{2(z - a)}.$$

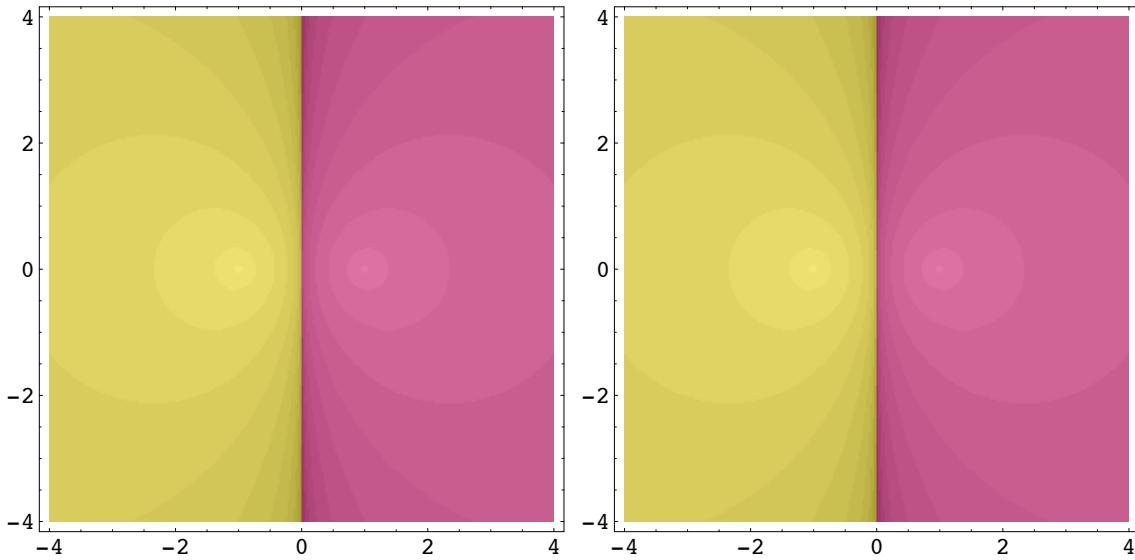


Figura 3.4: Cuencas de atracción asociadas a las funciones de iteración  $z(z+1)/2$  y  $z^2 - 3/4$ , relacionadas respectivamente con el método de Newton y el método de Newton para raíces múltiples.

El comportamiento dinámico de la función polinómica  $z^2 - 3/4$  es bien conocido (véase [16], por ejemplo). En el segundo gráfico de la figura 3.4 se muestra el conjunto de Julia para  $z^2 - 3/4$ , que es la frontera de la región de negro. Nótese que en este caso, las raíces  $a$  y  $b$  del polinomio (3.3) se transforman por  $M$  en los puntos

$$M(a) = \infty, \quad M(b) = -\frac{1}{2}.$$

Estos dos puntos  $\infty$  y  $-1/2$ , junto con el punto  $3/2$ , son los puntos fijos del polinomio  $z^2 - 3/4$ .  $\infty$  es un punto fijo superatractor,  $-1/2$  es un punto fijo indiferente y  $3/2$  es un punto fijo repulsor. Deshaciendo los cambios se concluye que el método de Newton para raíces múltiples (3.5) ha transformado la raíz múltiple  $a$  en un punto fijo superatractor. Como contrapartida, la otra raíz,  $b$ , pasa a ser un punto fijo indiferente. Por último  $\infty$  es un punto fijo repulsor para (3.5).

El segundo gráfico de la figura 3.4 muestra la cuenca de atracción de  $\infty$  como punto fijo de  $z^2 - 3/4$ . Los puntos de la región de negro convergen al punto fijo indiferente  $-1/2$ , aunque, en este caso la convergencia es extremadamente lenta.

Otra variante del método de Newton para ecuaciones con raíces múltiples viene dada por

$$\hat{N}_p(z) = z - \frac{1}{1 - L_p(z)} \frac{p(z)}{p'(z)}, \quad L_p(z) = \frac{p(z)p''(z)}{p'(z)^2}. \quad (3.6)$$

$\hat{N}_p(z)$  se obtiene aplicando el método de Newton a la función racional  $p(z)/p'(z)$ . Para polinomios de la forma (3.3), el método 3.6 es conjugado con la aplicación  $-z^2$  mediante la transformada de Möbius  $M(z) = (z - a)/(z - b)$ . Por lo tanto, su conjunto de Julia es la circunferencia unidad y sus dinámicas son similares al método de Newton para raíces simples (véase el teorema 3.6).

### 3.2.3. El método de Newton para polinomios cúbicos

Sea  $p(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$  un polinomio cúbico con sus tres raíces  $a, b$  y  $c$  distintas, las cuales suponemos ordenadas por sus módulos, es decir,  $0 \leq |a| \leq |b| \leq |c|$ .

Pongamos  $T^{-1}(z) = \alpha z + \beta$ , y encontremos los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  de modo que  $T^{-1}(a) = 0$  y  $T^{-1}(c) = 1$ . Tenemos entonces que  $\alpha = \frac{1}{c-a}$  y  $\beta = -\frac{a}{c-a}$ , por lo tanto,  $T^{-1}(z) = \frac{z}{c-a} - \frac{a}{c-a}$ , y en consecuencia  $T(z) = (c-a)z + a$ . Aplicando esta transformación  $T$  en el teorema de reescalamiento anterior (teorema ??), obtenemos

$$q(z) = p \circ T(z) = p((c-a)z + a) = (c-a)^3 z \left( z - \frac{b-a}{c-a} \right) (z-1).$$

Haciendo,  $\lambda = (c-a)^3$  y  $\rho = (b-a)/(c-a)$ , obtenemos

$$q(z) = \lambda^3 z(z-1)(z-\rho).$$

Por otra parte, es fácil ver que si  $f(z) = \alpha g(z)$ , entonces  $N_f(z) = N_g(z)$ .

En consecuencia, haciendo

$$p_\rho(z) = z(z-1)(z-\rho) \tag{3.7}$$

y denotando por  $N_\rho$  a su correspondiente función de iteración para el método de Newton,

$$N_\rho(z) = z - \frac{z(z-1)(z-\rho)}{3z^2 - 2\rho z - 2z + \rho}, \tag{3.8}$$

tenemos probado el siguiente resultado, que establece que para conocer la dinámica de la método de Newton de un polinomio cúbico debemos conocer la dinámica de la función racional  $N_\rho$ , donde  $\rho \in \mathbb{C}$  es un parámetro.

**Teorema 3.7.** *Sea  $p(z)$  un polinomio cúbico con sus tres raíces distintas. Entonces,  $N_p$  es conjugado topológicamente con  $N_\rho$  definida en (3.8).*

Notemos que el caso  $\rho = 0$  se reduce al estudio del método de Newton aplicado al polinomio  $p_0(z) = z^2(z-1) = z^3 - z^2$ . Este polinomio tiene en 0 una raíz doble y su comportamiento dinámico es similar al del polinomio que aparece en la figura 3.3.

En este caso, tenemos

$$N_\rho(z) = z - \frac{z^3 - (\rho+1)z^2 + \rho z}{3z^2 - 2(\rho+1)z + \rho} = \frac{2z^3 - (\rho+1)z^2}{3z^2 - 2(\rho+1)z + \rho}$$

y

$$N'_\rho(z) = \frac{(z^3 - (\rho+1)z^2 + \rho z)(6z - 2(\rho+1))}{(3z^2 - 2(\rho+1)z + \rho)^2}.$$

Un estudio sobre de familia fue hecho por Curry, Garnett y Sullivan [37].

En este caso,  $N'_\rho(z) = 0$  si y sólo si  $p_\rho(z) = 0$  o  $p''_\rho(z) = 0$ . En consecuencia, el conjunto de puntos críticos de  $N_\rho$  está formado por las tres raíces de  $p_\rho$  junto con el punto  $z = \frac{\rho+1}{3}$ . Los puntos críticos de  $N_\rho$  que no son raíces de  $p_\rho$  se llaman *puntos críticos libres*.

El estudio de las órbitas de los puntos críticos libres da mucha información sobre el comportamiento dinámico de un método. En concreto, para determinar si existen órbitas periódicas atractoras para  $N_\rho$ , distintas de las raíces de  $p_\rho$ , debemos responder a la pregunta siguiente: ¿para qué valores de  $\rho$ , la órbita del punto crítico libre,

$$N_\rho^n \left( \frac{\rho+1}{3} \right)$$

es una órbita periódica atractora?

En la pregunta anterior debemos excluir los casos  $\rho = -1$ ,  $\rho = 2$  y  $\rho = 1/2$  para los cuales el punto fijo extraño coincide con alguna de las raíces del polinomio  $p_\rho$ .

Una manera de responder a la pregunta anterior es colorear el espacio de parámetros  $\rho \in \mathbb{C}$  de acuerdo a la convergencia del punto crítico libre  $(\rho+1)/3$ , tal y como se hace en la figura 3.5. Si la órbita de  $(\rho+1)/3$  converge a 0, 1 o  $\rho$ , el valor del correspondiente parámetro  $\rho$  se colorea en amarillo, cian o magenta respectivamente.

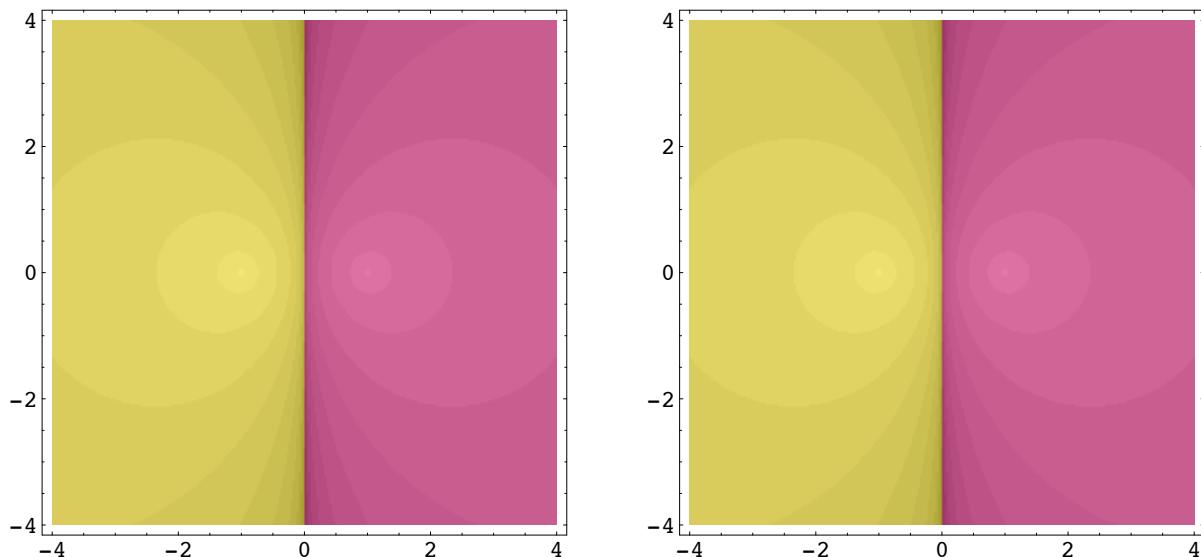


Figura 3.5: Representación gráfica del espacio de parámetros asociado a la función de iteración  $N_\rho(z)$  definida en (3.8) y asociada a los polinomios de la forma  $p_\rho(z) = z(z-1)(z-\rho)$ . La figura de la derecha muestra una ampliación de una zona negra en la que se aprecia un conjunto de tipo Mandelbrot.

Como se aprecia en la figura 3.5, existen regiones abiertas en el *espacio de parámetros* tales que, si  $\rho$  pertenece a estas regiones entonces existen regiones abiertas en el plano complejo de forma que  $N_\rho(z)$  definida en (3.8) no converge a ninguna de las raíces del polinomio  $p_\rho(z)$  definido en (3.7). Las regiones coloreadas en negro en el espacio de parámetros están formadas por los valores de  $\rho$  para los cuales la sucesión

$$N_\rho^n \left( \frac{\rho+1}{3} \right)$$

va a parar a un ciclo atractor.

La parametrización de los polinomios cúbicos considerada en (3.7) no es la única. Otra parametrización muy habitual (véase [125]) es la siguiente:

$$p_\mu(z) = (z^2 - 1)(z - \mu), \quad \mu \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

La correspondiente función de iteración para el método de Newton es

$$N_\mu(z) = \frac{2z^3 - \mu z^2 - \mu}{3z^2 - 2\mu z - 1}. \quad (3.10)$$

En este caso, el punto crítico libre asociado al método de Newton es la única raíz de  $p_\mu''(z) = 0$ , es decir,  $z = \mu/3$ . Podemos realizar una reflexiones similares al caso anterior y colorear el espacio de parámetros conforme a la convergencia del punto crítico libre, amarillo, cian o magenta si la órbita de  $\mu/3$  converge a  $\mu$ , 1 o  $-1$  respectivamente, tal y como se muestra en la figura 3.6. De nuevo, las regiones coloreadas en negro en el espacio de parámetros están formadas por los valores de  $\mu$  para los cuales la sucesión

$$N_\mu^n\left(\frac{\mu}{3}\right)$$

va a parar a un ciclo atractor.

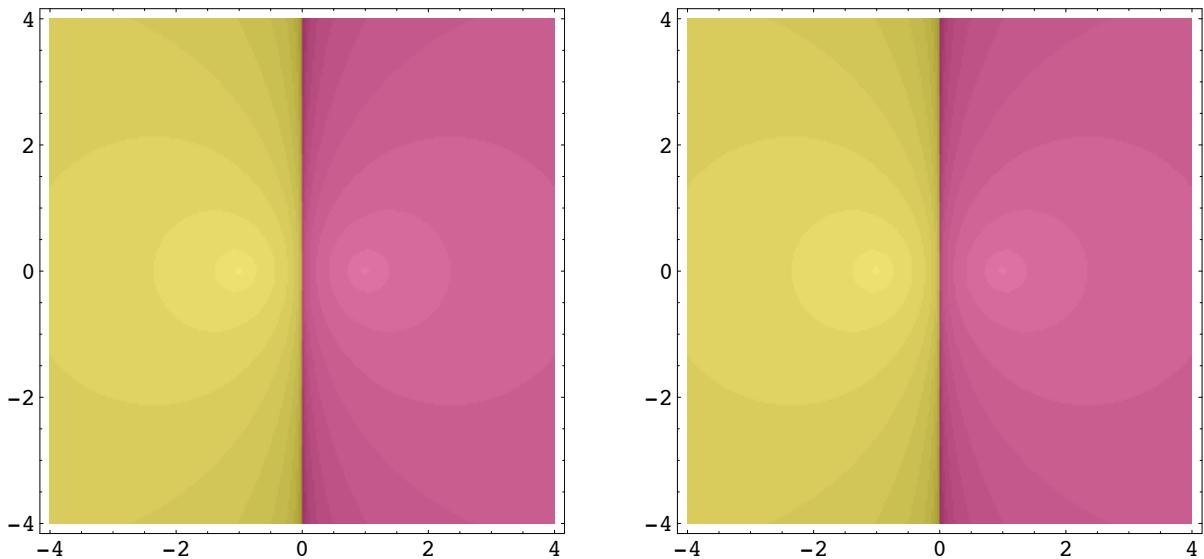


Figura 3.6: Representación gráfica del espacio de parámetros asociado a la función de iteración del método de Newton para los polinomios (3.9). La figura de la derecha muestra una ampliación de una zona negra en la que se aprecia un conjunto de tipo Mandelbrot similar al de la figura 3.5.

Por último, consideramos otra parametrización muy conocida (véase [118]), como es la siguiente:

$$p_\lambda(z) = z^3 + (\lambda - 1)z - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.11)$$

Denotamos  $N_\lambda(z)$  a la función de iteración del método de Newton aplicado a los polinomios de la forma (3.11):

$$N_\lambda(z) = \frac{2z^3 + \lambda}{3z^2 + \lambda - 1}. \quad (3.12)$$

En este caso, el punto crítico libre asociado al método de Newton es la única raíz de  $p''_\lambda(z) = 0$ , es decir,  $z = 0$ .

Las regiones coloreadas en negro en el espacio de parámetros de la figura 3.7 están formadas por los valores de  $\lambda$  para los cuales la sucesión

$$N_\lambda^n(0)$$

va a parar a un ciclo atractador.

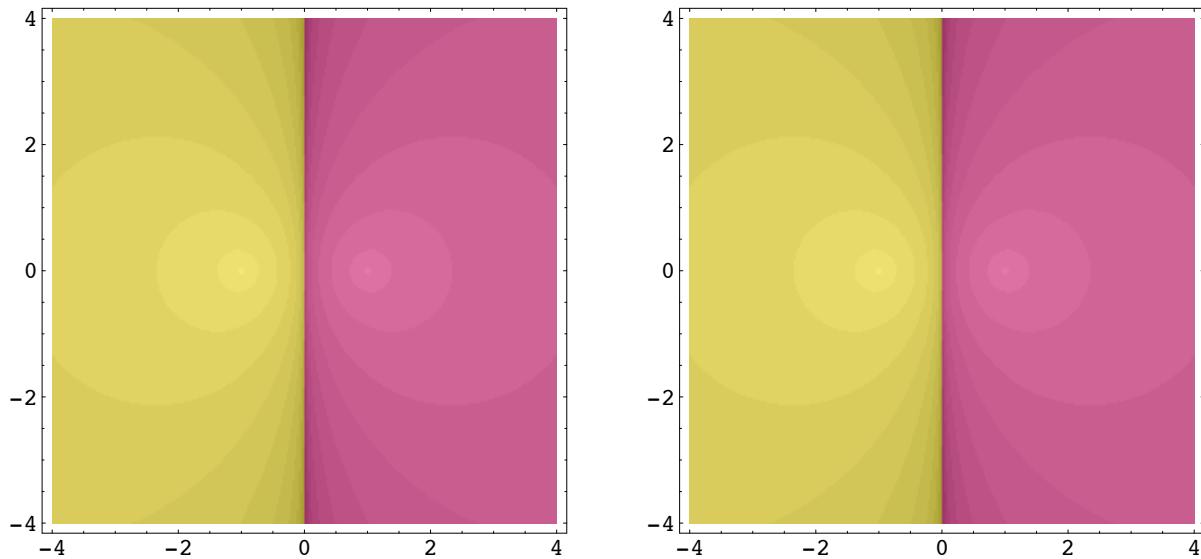


Figura 3.7: Representación gráfica del espacio de parámetros asociado a la función de iteración  $N_\lambda(z)$  definida en (3.12) y la correspondiente ampliación mostrando un conjunto de tipo Mandelbrot.

La figura 3.8 muestra las cuencas de atracción del método de Newton para un polinomio  $p_\lambda(z)$  definido en (3.11) y tomando  $\lambda$  en una de las zonas negras del espacio de parámetros. Como vemos aparecen «agujeros negros» originados por la presencia de ciclos atractores. En concreto, en este caso se tiene que la órbita del punto crítico libre  $z = 0$  es atraída por el 3-ciclo

$$\{1.02169 - 1.04136i, 0.620968 - 0.632698i, -0.00204529 + 0.00527748i\}.$$

### 3.2.4. El método de Newton para polinomios de grados 4 y 5

Como hemos visto en el apartado anterior, el estudio dinámico del método de Newton aplicado a polinomios de tercer grado se reduce al estudio de una función racional dependiente

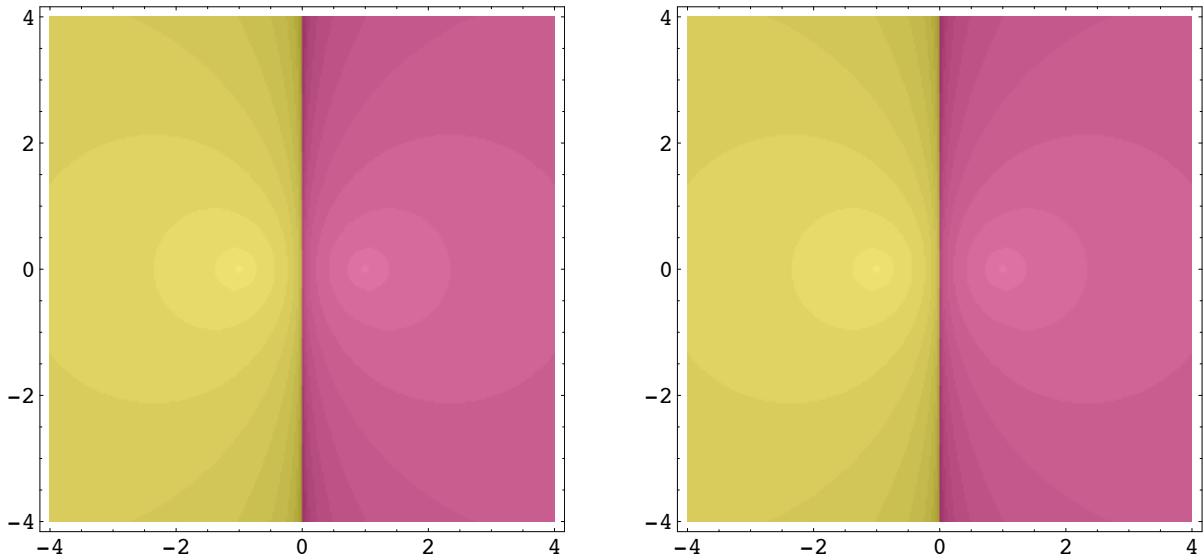


Figura 3.8: Cuencas de atracción del método de Newton aplicado al polinomio  $p_\lambda(z) = z^3 + (\lambda - 1)z - \lambda$  con  $\lambda = 1.02 + 0.96i$  y una ampliación de la zona negra que se genera entorno al punto crítico libre  $z = 0$ .

de un parámetro, en concreto (3.8). Evidentemente, al aumentar el grado de los polinomios también lo hará el número de parámetros involucrados en la correspondiente función racional asociada al método de Newton.

No obstante, existen algunas manipulaciones algebraicas que permiten reducir el número de coeficientes que aparecen en una ecuación polinómica. En concreto, la conocida como *transformación de Tschirnhaus* ([44]) permite transformar la ecuación

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0 = 0, \quad n > 2,$$

en otra ecuación polinómica donde no aparecen los términos en  $z^{n-1}$  y  $z^{n-2}$ , es decir,

$$z^n + b_{n-3}z^{n-3} + \cdots + b_1z + b_0 = 0, \quad n > 2.$$

El resultado original de Tschirnhaus apareció publicado en *Acta Eruditorum* en 1683. Más adelante, en 1786, E. S. Bring probó que una ecuación polinómica de grado 5 puede reducirse a una del tipo

$$z^5 + az + b = 0.$$

Finalmente, en 1834 G. B. Jerrard demostró que en ecuaciones polinómicas de grado mayor que 3 se puede encontrar una transformación de Tschirnhaus en la que no aparecen los términos en  $z^{n-1}$ ,  $z^{n-2}$  y  $z^{n-3}$ , es decir, del tipo

$$z^n + c_{n-4}z^{n-4} + \cdots + c_1z + c_0 = 0, \quad n > 3.$$

Estas transformaciones se basan en complicadas manipulaciones algebraicas sobre las raíces de la ecuación (véase [155]). Estas manipulaciones no conservan las propiedades dinámicas. En efecto, como se vio en el ejemplo (??), el método de Newton aplicado al polinomio

$z^3 - 2z + 2$  tiene un 2-ciclo atractador de la forma  $\{0, 1\}$ . Dicho polinomio puede ser transformado en uno de la forma  $p(z) = z^3 - \lambda^3$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ , por la correspondiente transformación de Tschirnhaus. A su vez, el método de Newton aplicado al polinomio anterior,

$$N_p(z) = z - \frac{z^3 - \lambda^3}{3z^2} = \frac{2z^3 + \lambda^3}{3z^2}$$

es conjugado topológicamente, mediante la aplicación afín  $h(z) = z/\lambda$ , con el método de Newton aplicado al polinomio  $q(z) = z^3 - 1$ ,

$$N_q(z) = z - \frac{z^3 - 1}{3z^2} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}.$$

En efecto,

$$h \circ N_p(z) = \frac{2z^3 + \lambda^3}{3\lambda z^2} = N_q \circ h(z).$$

Pero como se aprecia en las figuras 3.2 y ??, el comportamiento dinámico del método de Newton aplicado a los polinomios  $q(z) = z^3 - 1$  y  $z^3 - 2z + 2$  es muy diferente. De hecho, en el primer caso no aparecen  $n$ -ciclos atractores con  $n \geq 2$ , luego su dinámica no puede ser equivalente a la del método de Newton aplicado al polinomio  $z^3 - 2z + 2$ , que sí presenta un 2-ciclo atractador.

Para ver que  $N_p(z)$  no tiene 2-ciclos atractores, calculamos los puntos fijos de

$$N_p^2(z) = \frac{16z^9 + 51z^6 + 12z^3 + 2}{9z^2(2z^3 + 1)^2}.$$

Tenemos que  $N_p^2(z) = z$  si y sólo si  $z^3 = 1$  o  $20z^6 + 5z^3 + 2 = 0$ . Los 2-ciclos aparecen entre las raíces  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, 6$  de la segunda ecuación. Pero en todas ellas se cumple que

$$|N'_p(\xi_j)| \approx 2.45 > 1,$$

luego ningún 2-ciclo es atractador.

Las expresiones simplificadas de polinomios de cuarto y quinto grado que aparecen después de aplicar las transformaciones de Tschirnhaus o de Bring-Jerrard, motivan el estudio del método de Newton para ecuaciones de la forma  $z^4 + az + b^4 = 0$  o  $z^5 + az + b^5 = 0$  como casos particulares de ecuaciones polinómicas de cuarto y quinto grado respectivamente. En concreto, para la ecuación de quinto grado anterior puede verse un estudio detallado de la dinámica del método de Newton en [8].

# Capítulo 4

## Método de Schröder en el plano complejo

En este capítulo presentamos un estudio completo de la dinámica del método de Schröder en el plano complejo. Comenzamos introduciendo el método y sus propiedades fundamentales, para después analizar su comportamiento aplicado a polinomios con dos raíces de multiplicidades arbitrarias y, finalmente, extender el estudio a polinomios cúbicos mediante el análisis del plano de parámetros. Los resultados teóricos se ilustran mediante diagramas de cuencas de atracción que revelan la estructura fractal subyacente.

### 4.1. Introducción: Método de Schröder y conceptos fundamentales

#### 4.1.1. Definición del método de Schröder

El método de Schröder fue introducido por Ernst Schröder en su trabajo seminal de 1870 [?] sobre la resolución de ecuaciones no lineales. Schröder construyó este método aplicando el método de Newton a la ecuación  $\frac{f(z)}{f'(z)} = 0$ , obteniendo el esquema iterativo

$$z_{k+1} = S_f(z_k) = z_k - \frac{f(z_k)f'(z_k)}{f'(z_k)^2 - f(z_k)f''(z_k)}, \quad k \geq 0, \quad z_0 \in \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Una ventaja importante del método de Schröder, señalada por el propio autor, es que converge cuadráticamente incluso para raíces múltiples, a diferencia del método de Newton que reduce su orden de convergencia en presencia de multiplicidad.

Para mayor comodidad, podemos escribir el iterador de Schröder en términos de la función

$$L_f(z) = \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} \quad (4.2)$$

como

$$S_f(z) = z - \frac{1}{1 - L_f(z)} \frac{f(z)}{f'(z)}. \quad (4.3)$$

El coste computacional del método de Schröder es superior al de Newton: requiere evaluar no solo  $f$  y  $f'$ , sino también  $f''$ , lo que lo sitúa en un nivel de coste comparable a los métodos de la familia Chebyshev-Halley.

## 4.2. Polinomios con dos raíces de multiplicidades arbitrarias

Consideramos ahora el caso más general de polinomios con dos raíces complejas de multiplicidades distintas:

$$f(z) = (z - a)^m(z - b)^n, \quad a, b \in \mathbb{C}, \quad a \neq b, \quad m \geq n \geq 1. \quad (4.4)$$

Este caso es significativamente más interesante que el de raíces simples, pues la presencia de multiplicidades distintas rompe la simetría y produce conjuntos de Julia con geometría circular no trivial.

### 4.2.1. Reducción al caso canónico mediante conjugación

Para simplificar el análisis, realizamos una conjugación afín que traslada las raíces  $a$  y  $b$  a 1 y  $-1$  respectivamente. Definimos la transformación afín

$$A(z) = 1 + 2\frac{z - a}{a - b} \quad (4.5)$$

y consideramos la función conjugada

$$T_{m,n}(z) = A \circ S_f \circ A^{-1}(z) = \frac{(m-n)z^2 + 2(m+n)z + m-n}{(m+n)z^2 + 2(m-n)z + m+n}. \quad (4.6)$$

Esta función  $T_{m,n}$  representa la dinámica del método de Schröder aplicado a  $(z-1)^m(z+1)^n$  y depende únicamente de las multiplicidades  $m$  y  $n$ .

Mediante una segunda conjugación con la transformación de Möbius

$$M(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad (4.7)$$

llegamos a una función racional extremadamente simple:

$$R_{m,n}(z) = M \circ T_{m,n} \circ M^{-1}(z) = -\frac{n}{m}z^2. \quad (4.8)$$

### 4.2.2. Análisis dinámico de $R_{m,n}$

La función  $R_{m,n}(z) = -\frac{n}{m}z^2$  tiene una dinámica completamente caracterizada. El círculo

$$C_{m,n} = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| = \frac{m}{n} \right\}$$

es invariante bajo  $R_{m,n}$ . Los puntos con  $|z_0| < m/n$  convergen al origen bajo iteración, mientras que los puntos con  $|z_0| > m/n$  divergen a infinito. Por tanto,  $C_{m,n}$  es el conjunto de Julia de  $R_{m,n}$ .

### 4.2.3. Teoremas principales: caracterización del conjunto de Julia

Los siguientes dos teoremas constituyen los resultados principales de este capítulo, caracterizando completamente el conjunto de Julia del método de Schröder para polinomios con dos raíces.

**Teorema 4.1** (Conjunto de Julia en el caso canónico). *Sea  $T_{m,n}(z)$  la función racional definida por (4.6) y sea  $J_{m,n}$  su conjunto de Julia. Entonces:*

1. *Si  $m = n$ , entonces  $J_{m,m}$  es el eje imaginario.*

2. *Si  $m > n \geq 1$ , entonces  $J_{m,n}$  es el círculo*

$$J_{m,n} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z + \frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} \right| = \frac{2mn}{m^2 - n^2} \right\}. \quad (4.9)$$

**Demostración.** La demostración se sigue inmediatamente del análisis de la dinámica de  $R_{m,n}$ . El conjunto de Julia  $J_{m,n}$  es la preimagen del círculo  $C_{m,n} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = m/n\}$  bajo la transformación de Möbius  $M(z) = (z - 1)/(z + 1)$ .

Para el caso  $m = n$ , tenemos  $C_{m,m} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  y su preimagen por  $M$  es el eje imaginario.

Para  $m > n$ , la preimagen del círculo  $|z| = m/n$  por  $M$  es un círculo en el plano  $z$  cuyo centro y radio se calculan mediante transformación conforme. Distinguendo los casos según las distintas configuraciones del círculo de partida, se obtiene la expresión explícita (4.9). ■

**Teorema 4.2** (Conjunto de Julia para raíces arbitrarias). *Sea  $S_f(z)$  la función iterativa del método de Schröder aplicado a polinomios (4.4) y sea  $J_{m,n,a,b}$  su conjunto de Julia. Entonces:*

1. *Si  $m = n$ , entonces  $J_{m,m,a,b}$  es la recta equidistante entre los puntos  $a$  y  $b$ .*

2. *Si  $m > n \geq 1$ , entonces  $J_{m,n,a,b}$  es el círculo*

$$J_{m,n,a,b} = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z + \frac{bm^2 - an^2}{m^2 - n^2} \right| = \frac{mn|a - b|}{m^2 - n^2} \right\}. \quad (4.10)$$

**Demostración.** Este resultado se deduce calculando la preimagen de  $J_{m,n}$  bajo la transformación afín  $A(z)$  definida en (4.5). La transformación afín preserva círculos y rectas, y traslada y escala el conjunto de Julia canónico al caso general con raíces  $a$  y  $b$ . Los parámetros del círculo se obtienen aplicando la transformación afín a los parámetros del caso canónico. ■

### 4.2.4. Cuencas de atracción

La caracterización del conjunto de Julia permite determinar completamente las cuencas de atracción:

- En el caso  $m = n$ , la cuenca de atracción de cada raíz es un semiplano delimitado por la recta equidistante entre ambas raíces.

- En el caso  $m > n$ , el interior del círculo  $J_{m,n,a,b}$  constituye la cuenca de atracción de la raíz de menor multiplicidad  $b$ , mientras que el exterior (incluyendo el infinito) es la cuenca de atracción de la raíz de mayor multiplicidad  $a$ .

Este resultado muestra un fenómeno interesante: la cuenca de atracción de la raíz de mayor multiplicidad “rodea” a la cuenca de la raíz de menor multiplicidad, que queda confinada en un disco.

#### 4.2.5. Análisis paramétrico: influencia de la razón de multiplicidades

Introduciendo el parámetro  $p = m/n$ , que representa la razón entre las multiplicidades, podemos expresar los círculos  $J_{m,n}$  como

$$J_p = \left\{ z \in \mathbb{C}; \left| z + \frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \right| = \frac{2p}{p^2 - 1} \right\}. \quad (4.11)$$

Esta expresión muestra que todos los polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$  con el mismo cociente  $p = m/n$  tienen el mismo conjunto de Julia para el método de Schröder. Esto simplifica considerablemente el análisis paramétrico.

#### 4.2.6. Comportamiento asintótico

Podemos esquematizar la dinámica del método de Schröder aplicado a polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$ ,  $m > n$  de la siguiente manera:

- **Cuando  $p = m/n \rightarrow \infty$ :** Los centros de los círculos  $J_p$  tienden a  $-1$  (la raíz de menor multiplicidad) y los radios tienden a cero. Es decir, el conjunto de Julia se colapsa en un punto coincidente con la raíz simple. La cuenca de atracción de la raíz múltiple domina casi todo el plano complejo.
- **Cuando  $p = m/n \rightarrow 1^+$ :** Los centros

$$-\frac{p^2 + 1}{p^2 - 1} \rightarrow -\infty \text{ cuando } p \rightarrow 1^+$$

y los radios

$$\frac{2p}{p^2 - 1} \rightarrow \infty \text{ cuando } p \rightarrow 1^+.$$

Por tanto, los círculos crecen indefinidamente y tienden a “explotar” en el caso límite  $p = 1$ , recuperando el eje imaginario que corresponde al caso de multiplicidades iguales.

Si consideramos la presencia de raíces arbitrarias  $a$  y  $b$ , la dinámica del método de Schröder aplicado a polinomios  $(z - a)^m(z - b)^n$ ,  $m > n$  puede resumirse como un “viaje”: partiendo de un círculo concentrado en la raíz de menor multiplicidad  $b$  (cuando  $p \rightarrow \infty$ ), pasando por círculos con centro en la línea que conecta las raíces  $a$  y  $b$  y radio creciente, hasta la “explosión” en la bisectriz de ambas raíces cuando  $p = 1$ .

#### 4.2.7. Ilustraciones: cuencas de atracción

A continuación presentamos diagramas de cuencas de atracción que ilustran los resultados teóricos obtenidos. En todas las figuras se compara el comportamiento del método de Schröder con el del método de Newton aplicados a los mismos polinomios. Las regiones de color corresponden a las cuencas de atracción de cada raíz.

##### 4.2.7.1. Caso: $p = m/n$ creciente

En la Figura 4.1 se muestra el comportamiento cuando la razón  $p = m/n$  aumenta. Se aplican ambos métodos a polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$  con  $n = 1$  fijo y  $m$  creciente.

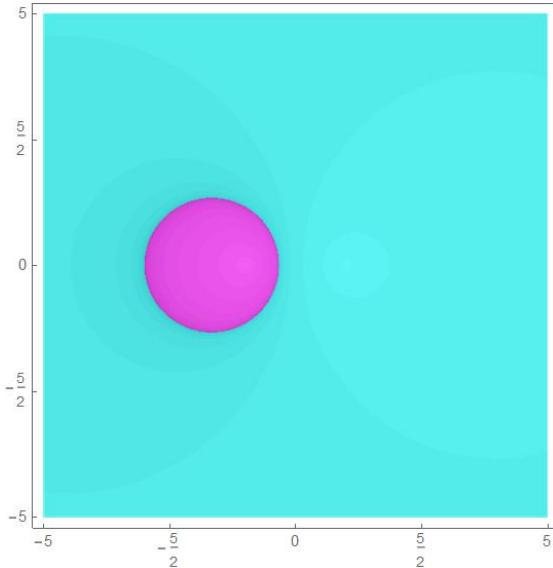
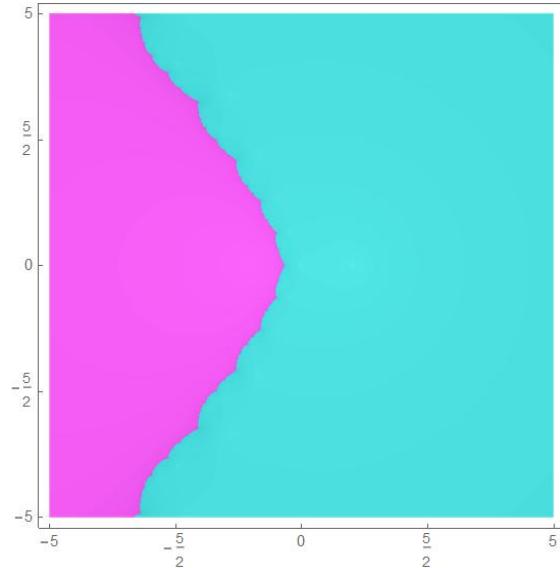
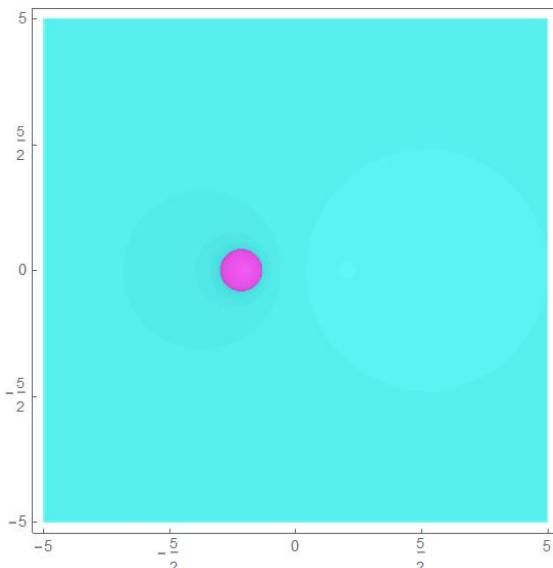
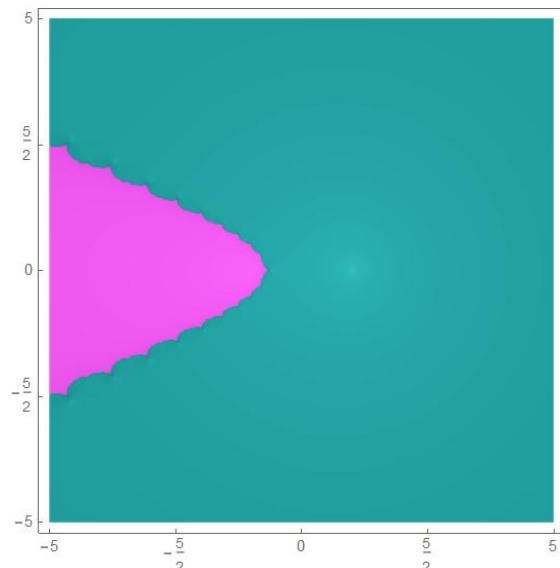
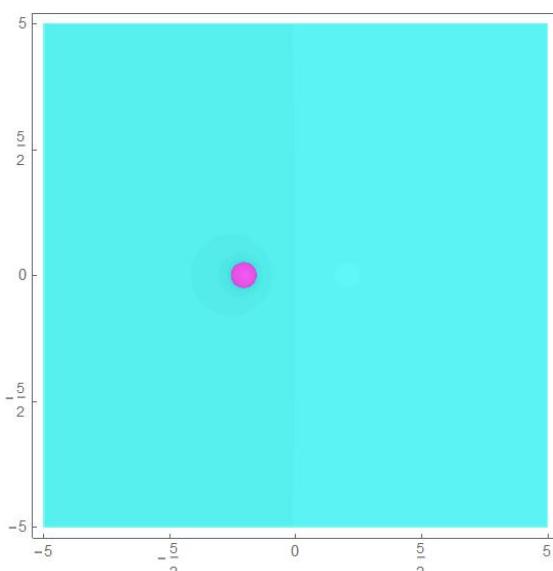
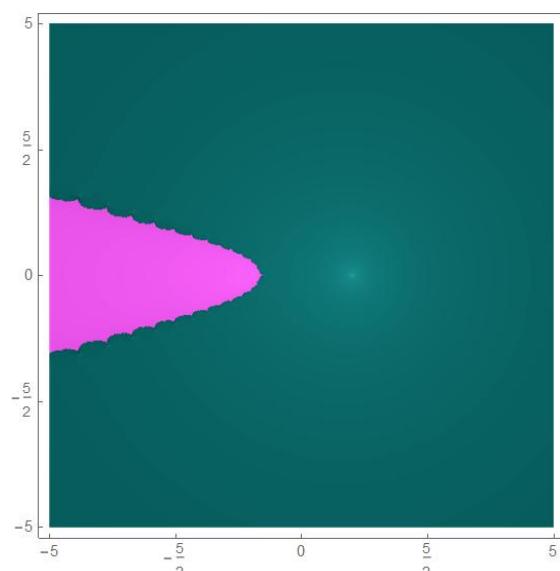
Schröder:  $m = 2, n = 1.$ Newton:  $m = 2, n = 1.$ Schröder:  $m = 5, n = 1.$ Newton:  $m = 5, n = 1.$ Schröder:  $m = 8, n = 1.$ Newton:  $m = 8, n = 1.$ 

Figura 4.1: Cuencas de atracción de los métodos de Schröder y Newton aplicados a polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$  para  $n = 1$  y  $m = 2, 5, 8$ . Se aprecia cómo el conjunto de Julia del método de

**4.2.7.2. Caso:  $p = m/n$  próximo a 1**

En la Figura 4.2 se muestra qué ocurre cuando  $p = m/n \approx 1$ , es decir, cuando las multiplicidades son similares. Se consideran polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$  con  $n = 6$  y  $m = 6, 7, 8$ .

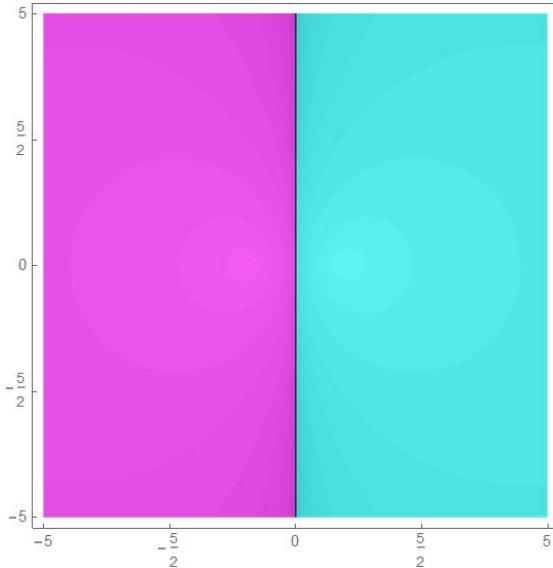
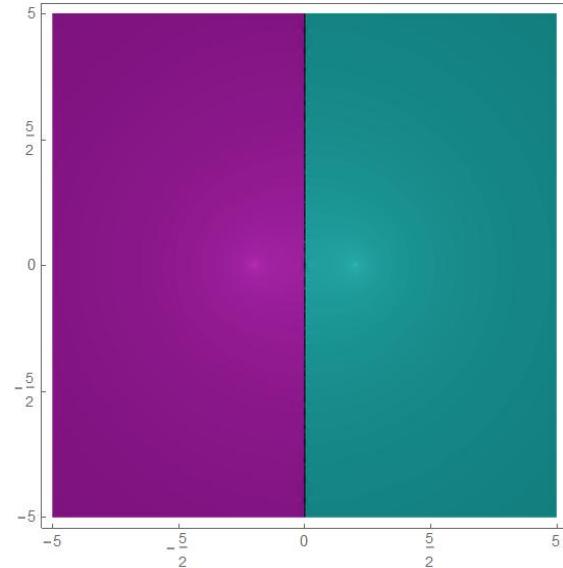
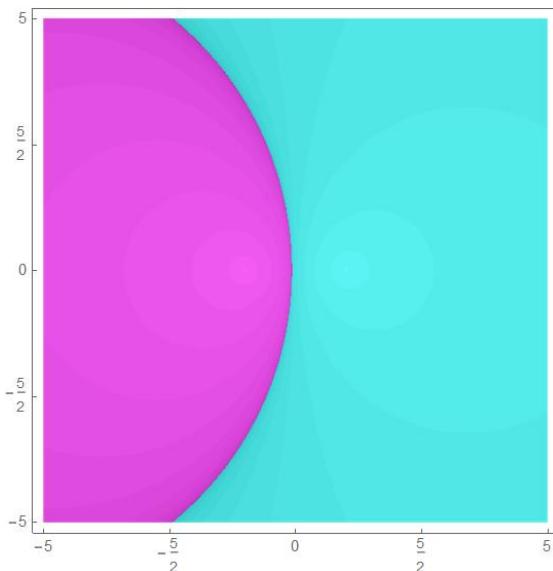
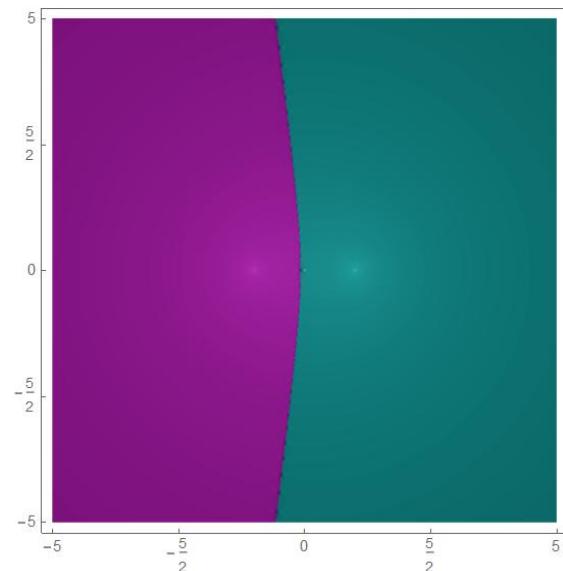
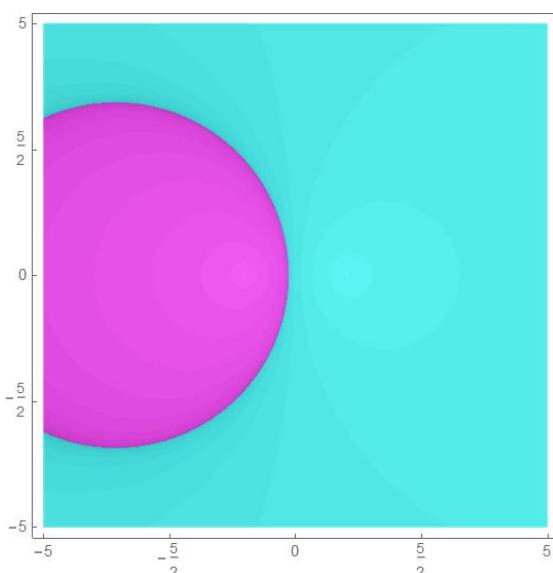
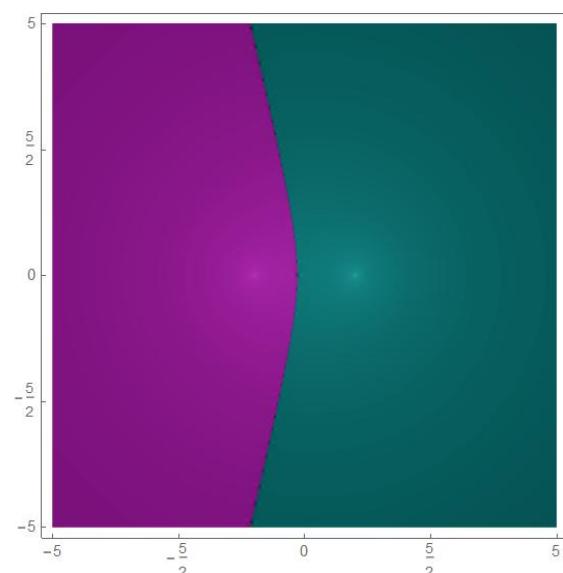
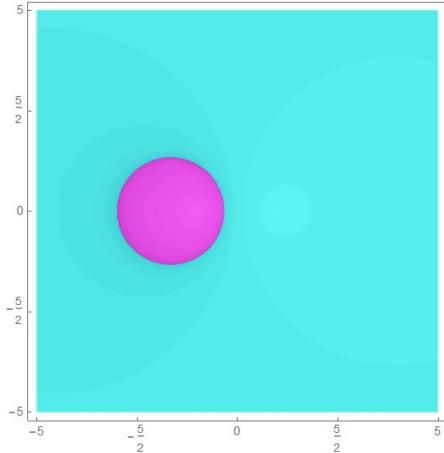
Schröder:  $m = 6, n = 6$ .Newton:  $m = 6, n = 6$ .Schröder:  $m = 7, n = 6$ .Newton:  $m = 7, n = 6$ .Schröder:  $m = 8, n = 6$ .Newton:  $m = 8, n = 6$ .

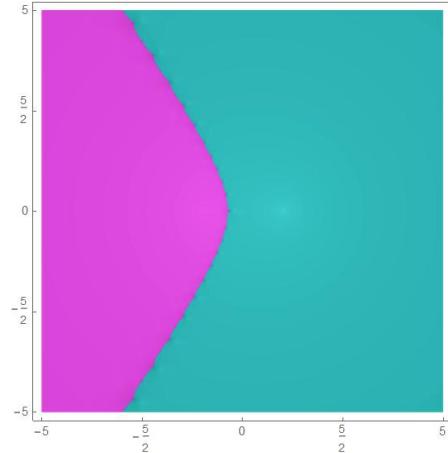
Figura 4.2: Cuencas de atracción de los métodos de Schröder y Newton aplicados a polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$  para  $n = 6$  y  $m = 6, 7, 8$ . El conjunto de Julia del método de Schröder son

#### 4.2.7.3. Caso: razón constante $p = 2$

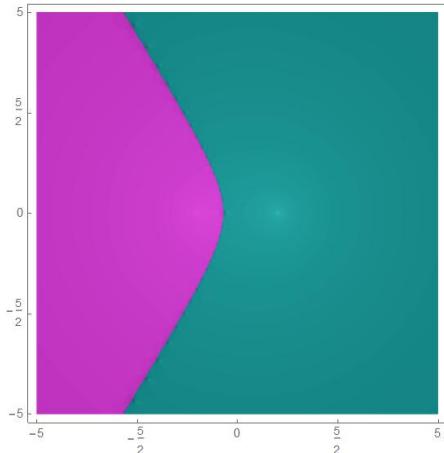
La Figura 4.3 muestra el círculo correspondiente al conjunto de Julia del método de Schröder para polinomios con  $p = m/n = 2$ , independientemente de los valores específicos de  $m$  y  $n$ . También se aprecia que para Newton, aunque los valores absolutos de  $m$  y  $n$  influyen en la suavidad del Julia, la estructura general permanece similar para la misma razón  $p$ .



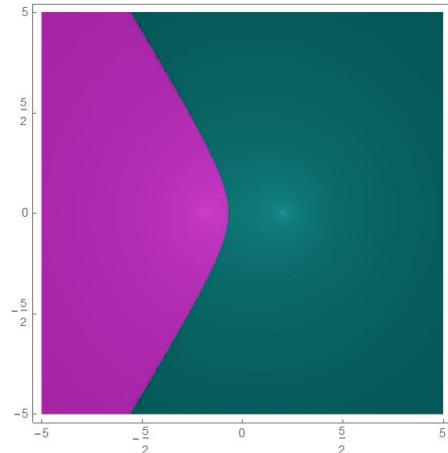
Schröder:  $p = m/n = 2$ .



Newton:  $m = 4, n = 2$ .



Newton:  $m = 6, n = 3$ .



Newton:  $m = 8, n = 4$ .

Figura 4.3: La primera imagen muestra la cuenca de atracción del método de Schröder aplicado a polinomios  $(z - 1)^m(z + 1)^n$  con  $p = m/n = 2$ . El conjunto de Julia es el mismo círculo para todos los pares  $(m, n)$  con esta razón. Las otras imágenes muestran las cuencas del método de Newton para distintos valores de  $m$  y  $n$  con  $p = m/n = 2$ . Se observa que la “parábola deformada” tiende a ser más suave conforme aumentan  $m$  y  $n$ .

#### 4.2.7.4. Caso: raíces no reales

Finalmente, en la Figura 4.4 se muestra un ejemplo con raíces no reales:  $(z - 1)^2(z - i)$ . Se aprecia la pérdida de simetría respecto al eje imaginario, siendo ahora la recta equidistante entre las raíces la que juega el papel de eje de referencia.

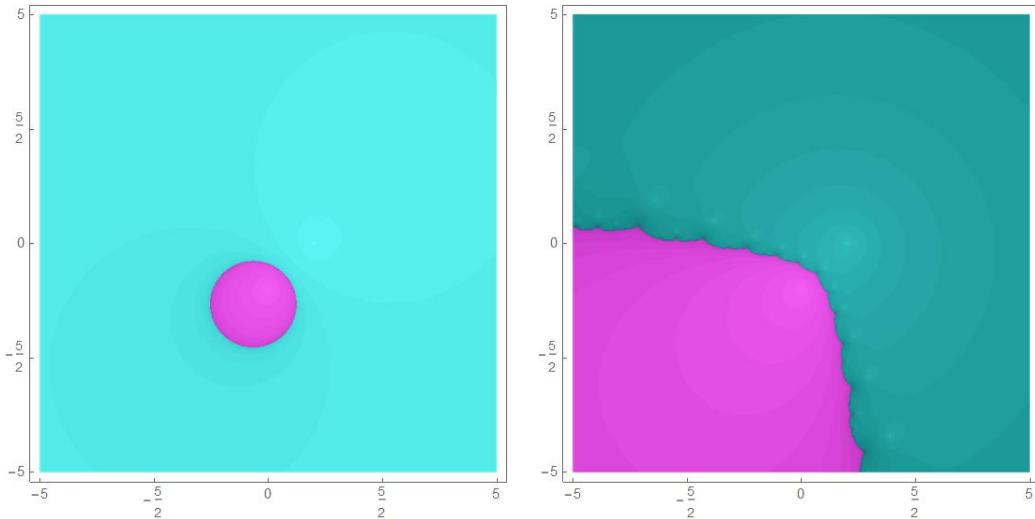


Figura 4.4: Cuencas de atracción de los métodos de Schröder (izquierda) y Newton (derecha) aplicados al polinomio  $(z - 1)^2(z - i)$ . El conjunto de Julia del método de Schröder sigue siendo un círculo dado por el Teorema 4.2, pero ahora desplazado y sin la simetría respecto al eje imaginario. La frontera es ahora la perpendicular a la recta que une las raíces  $z = 1$  y  $z = i$ .

#### 4.2.8. Comparación con el método de Newton

El análisis anterior permite establecer una comparación sistemática entre los métodos de Schröder y Newton para polinomios con dos raíces de multiplicidades arbitrarias.

##### 4.2.8.1. Naturaleza del conjunto de Julia

- **Schröder:** El conjunto de Julia es siempre un círculo (o una recta en el caso límite  $m = n$ ), cuya posición y radio están dados explícitamente por el Teorema 4.2. Esta geometría simple facilita el análisis teórico y la predicción del comportamiento.
- **Newton:** El conjunto de Julia tiene forma de “parábola deformada” cuya caracterización exacta es más compleja. Su forma depende no solo de la razón  $p = m/n$  sino también de los valores absolutos de  $m$  y  $n$ .

##### 4.2.8.2. Distribución de las cuencas de atracción

- **Caso  $m = n$ :** Ambos métodos tienen el mismo conjunto de Julia (la bisectriz entre las raíces) y las mismas cuencas de atracción (los dos semiplanos correspondientes).
- **Caso  $m > n$ :**
  - Para Schröder, la cuenca de la raíz de menor multiplicidad está completamente contenida en un disco, rodeada por la cuenca de la raíz de mayor multiplicidad.

- Para Newton, la cuenca de la raíz de menor multiplicidad tiene una estructura más compleja en forma de franja acotada por la “parábola deformada”, pero que se extiende hasta el infinito en ciertas direcciones.

#### 4.2.8.3. Coste computacional y orden de convergencia

- **Newton:** Orden de convergencia 2 para raíces simples, lineal para raíces múltiples.  
Coste: 1 evaluación de  $f$  y 1 de  $f'$  por iteración.
- **Schröder:** Orden de convergencia 2 incluso para raíces múltiples (ventaja importante).  
Coste: 1 evaluación de  $f$ , 1 de  $f'$  y 1 de  $f''$  por iteración (coste similar a métodos de orden 3 de la familia Chebyshev-Halley).

El método de Schröder resulta especialmente ventajoso cuando se sabe de antemano que existen raíces múltiples, ya que mantiene convergencia cuadrática sin necesidad de conocer la multiplicidad.

### 4.3. Polinomios cúbicos: estudio del plano de parámetros

Extendemos ahora el estudio a polinomios cúbicos con tres raíces distintas. Este caso presenta una complejidad considerablemente mayor y revela fenómenos dinámicos inesperados que no aparecen en el caso de dos raíces.

#### 4.3.1. Polinomios cúbicos con tres raíces simples

Consideramos ahora polinomios de la forma

$$p(z) = (z - a)(z - b)(z - c), \quad a, b, c \in \mathbb{C}, \quad a \neq b \neq c. \quad (4.12)$$

A diferencia del caso de dos raíces, donde las cuencas de atracción estaban delimitadas por círculos y rectas, en el caso cúbico aparecen estructuras fractales y regiones de no convergencia. En la Figura 4.5 se muestran las cuencas de atracción del polinomio  $(z^2 - 1)(z - 3 - i)$ .

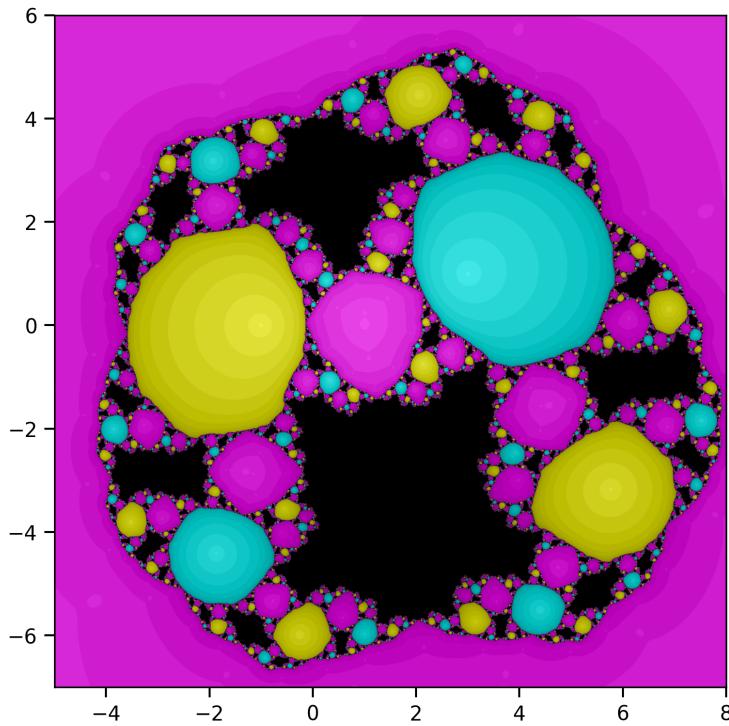


Figura 4.5: Cuencas de atracción del método de Schröder aplicado a  $p(z) = (z^2 - 1)(z - 3 - i)$ . En cyan la cuenca de atracción de  $z = 1$ , en magenta la de  $z = -1$  y en amarillo la de  $z = 3 + i$ . Las zonas blancas representan puntos que no convergen a ninguna raíz tras un número determinado de iteraciones.

Observamos dos fenómenos importantes:

1. Existen regiones extensas (en negro) donde el método no converge a ninguna raíz.
2. La cuenca de atracción de la raíz  $z = 1$  (en cyan) domina ampliamente el plano, un comportamiento distinto al del método de Newton donde todas las cuencas se extienden hasta el infinito.

### 4.3.2. Puntos críticos y el teorema de Fatou-Julia

Para entender el comportamiento observado, es fundamental analizar los puntos críticos de la función de iteración.

Un punto  $\zeta \in \mathbb{C}$  se dice **punto crítico** de una función racional  $R$  si la inyectividad de  $R$  falla en un entorno de  $\zeta$ . Equivalentemente,  $\zeta$  es punto crítico si  $R'(\zeta) = 0$  o si  $R$  no está definida en  $\zeta$ .

**Teorema 4.3** (Teorema de Fatou-Julia). *Todo ciclo atractor de una función racional atrae al menos un punto crítico de ésta.*

Este resultado es clave: las zonas blancas en la Figura 4.5 indican la presencia de ciclos atractores que no son las raíces del polinomio. Estos ciclos atraen alguno de los puntos críticos libres (aquellos que no son raíces).

### 4.3.3. Reducción a una familia uniparamétrica

Similar al análisis del caso cuadrático, podemos simplificar el estudio mediante una transformación afín.

**Teorema 4.4.** *Sea  $p(z) = (z - a)(z - b)(z - c)$  un polinomio cúbico con raíces distintas. Existe una transformación afín  $A(z) = \alpha z + \beta$  tal que el polinomio transformado tiene la forma  $q(z) = (z^2 - 1)(z - \lambda)$  con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Además, la función de iteración  $S_p$  es conjugada a  $S_q$  mediante  $A$ :*

$$A \circ S_q \circ A^{-1} = S_p.$$

Los parámetros de la transformación están dados por:

$$\alpha = \frac{a - b}{2}, \quad \beta = \frac{a + b}{2}, \quad \lambda = \frac{2c - a - b}{a - b}.$$

Este resultado reduce el estudio dinámico de todos los polinomios cúbicos con tres raíces distintas al estudio de la familia uniparamétrica

$$P_\lambda = \{(z^2 - 1)(z - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

### 4.3.4. Análisis de puntos críticos

La función de iteración de Schröder para  $p_\lambda(z) = (z^2 - 1)(z - \lambda)$  es:

$$S_{p_\lambda}(z) = \frac{4\lambda^2 z + \lambda(z^4 - 10z^2 + 1) + 4z^3}{2\lambda^2(z^2 + 1) - 4\lambda(z^3 + z) + 3z^4 + 1}.$$

Su derivada es:

$$S'_{p_\lambda}(z) = -\frac{4(z^2 - 1)(z - \lambda)(-2\lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2 z^3 + 3z^3 - 12\lambda z^2 + 9\lambda^2 z + 3z)}{(2\lambda^2 + 3z^4 - 4\lambda z^3 + 2\lambda^2 z^2 - 4\lambda z + 1)^2}.$$

Las raíces  $-1$ ,  $1$  y  $\lambda$  son puntos críticos que convergen a sí mismas. Los puntos críticos libres son las raíces del numerador:

$$-2\lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2 z^3 + 3z^3 - 12\lambda z^2 + 9\lambda^2 z + 3z = 0.$$

Esta ecuación cúbica en  $z$  tiene tres soluciones  $\zeta_1(\lambda)$ ,  $\zeta_2(\lambda)$  y  $\zeta_3(\lambda)$  (expresiones complejas que se pueden calcular explícitamente mediante las fórmulas de Cardano).

### 4.3.5. El plano de parámetros

Hay que entender el punto de que cuando al menos uno de los puntos críticos libres converja a algo diferente de una raíz, entonces van a existir ciclos atractores para ese valor de  $\lambda$ .

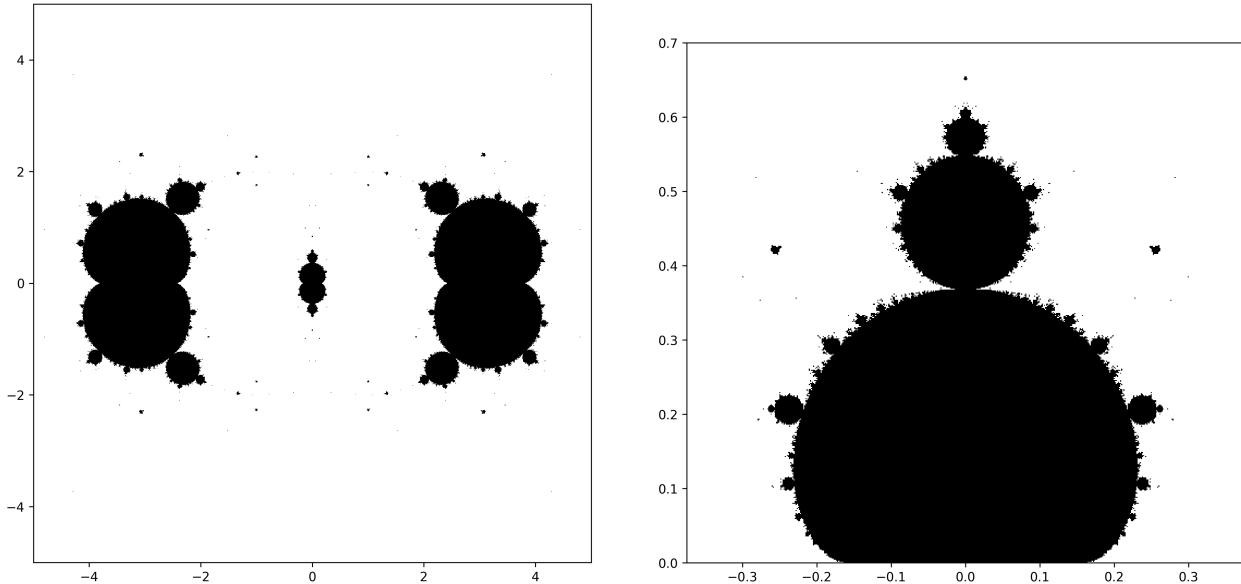


Figura 4.6: Planos de parámetros del método de Schröder para los puntos críticos libres.

Las zonas negras del plano de parámetros corresponden a valores de  $\lambda$  para los cuales al menos un punto crítico libre asociado no converge a ninguna raíz, indicando la presencia de ciclos atractores adicionales. Numéricamente se ha comprobado que si coges valores  $\lambda$  de los sucesivos lóbulos autosemejantes del conjunto de tipo Mandelbrot central, se obtienen  $2^n$  ciclos.

#### 4.3.6. Comparación con el método de Newton

El método de Newton aplicado al mismo polinomio  $p_\lambda(z) = (z^2 - 1)(z - \lambda)$  tiene función de iteración:

$$N_{p_\lambda}(z) = \frac{-\lambda + 2z^3 - \lambda z^2}{3z^2 - 2\lambda z - 1}.$$

Su derivada es:

$$N'_{p_\lambda}(z) = \frac{2(z^2 - 1)(z - \lambda)(3z - \lambda)}{(3z^2 - 2\lambda z - 1)^2}.$$

El método de Newton tiene un único punto crítico libre:  $\zeta = \lambda/3$ . Su plano de parámetros se muestra en la Figura ??.

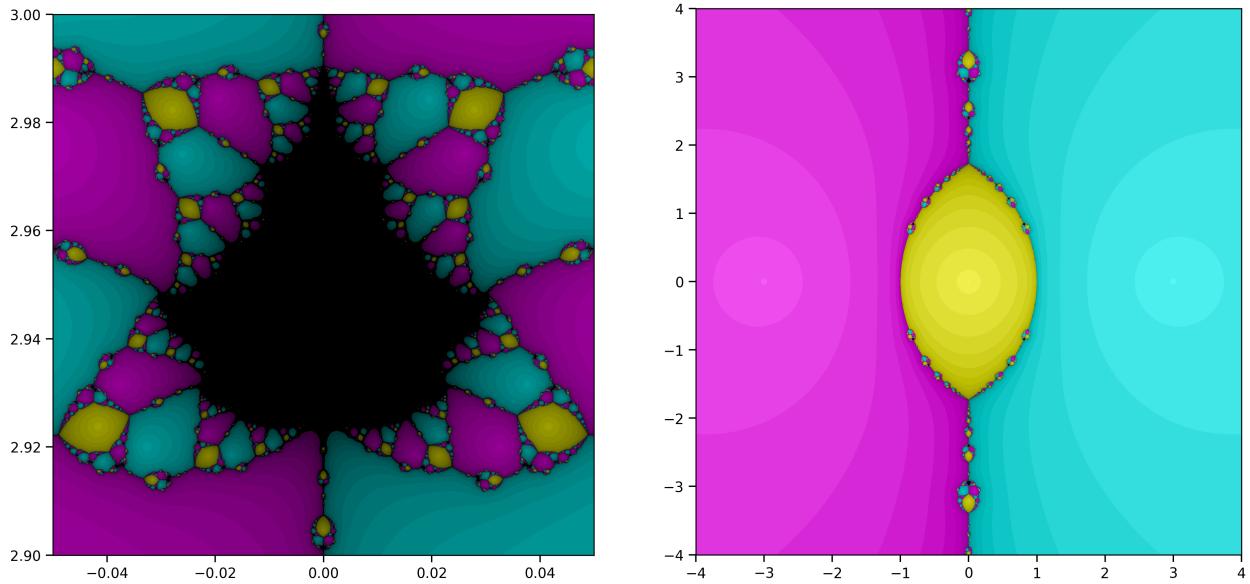


Figura 4.7: Planos de parámetros del método de Schröder para los puntos críticos libres.

Comparando con las Figuras ??–??, observamos que:

- Newton tiene un solo punto crítico libre, Schröder tiene tres.
- Las zonas negras (no convergencia) son mucho más extensas en Schröder que en Newton.
- La estructura del plano de parámetros es más simple para Newton.

#### 4.3.7. Caso especial: raíces formando un triángulo equilátero

Un caso particularmente interesante ocurre cuando  $\lambda = \sqrt{3}i$ , pues las tres raíces  $1, -1$  y  $\sqrt{3}i$  forman un triángulo equilátero en el plano complejo.

Para este valor, la derivada de la función de iteración se simplifica a:

$$S'_{p\sqrt{3}i}(z) = -\frac{16(z-1)(z+1)(z-\sqrt{3}i)}{(3iz^3 + 3\sqrt{3}z^2 - 3iz + 5\sqrt{3})^2}.$$

En este caso, los únicos puntos críticos son las propias raíces. Por el Teorema 4.3, no pueden existir ciclos atractores extraños, y por tanto todas las órbitas convergen a alguna de las tres raíces. Las cuencas de atracción para este caso se muestran en las Figuras 4.8 y 4.9.

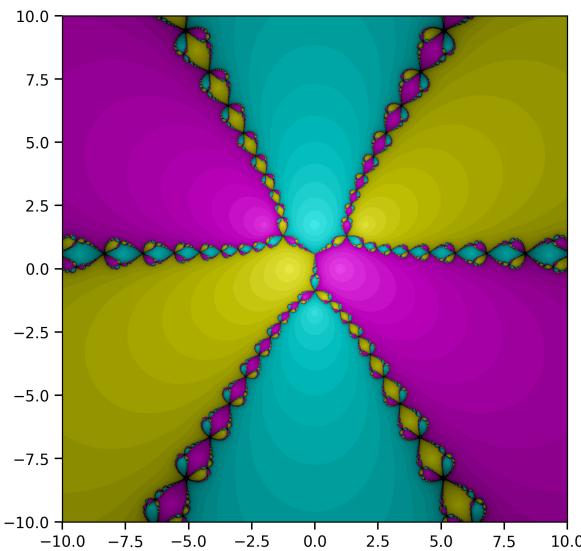


Figura 4.8: Cuencas de atracción para  $\lambda = \sqrt{3}i$  en la región  $[-10, 10] \times [-10i, 10i]$ .

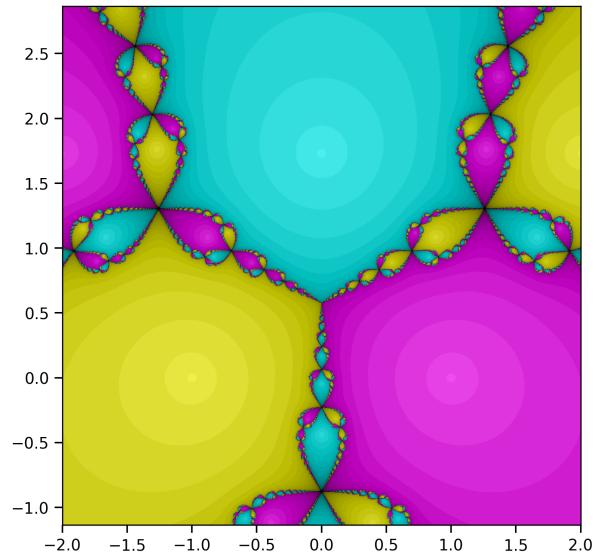


Figura 4.9: Mismo caso en la región  $[-2, 2] \times [-2i, 2i]$ .

#### 4.3.8. Observaciones dinámicas adicionales

Los casos especiales analizados ( $\lambda = \sqrt{3}i$  y  $\lambda = 0$ ) revelan la riqueza del espacio de parámetros. Mientras que para algunos valores de  $\lambda$  todas las órbitas convergen a raíces (caso  $\lambda = \sqrt{3}i$ ), para otros valores aparecen ciclos atractores que no son raíces (caso  $\lambda = 0$  con el 2-ciclo  $\{i, -i\}$ ).

Este comportamiento contrasta notablemente con el caso de dos raíces, donde todos los puntos del plano complejo (excepto el conjunto de Julia) convergen necesariamente a una de las raíces. La presencia de tres puntos críticos libres en el caso cúbico, frente a ninguno en el caso de dos raíces, explica esta mayor complejidad dinámica.

### 4.4. El punto del infinito en el método de Schröder

Una característica distintiva del método de Schröder, que lo diferencia de otros métodos iterativos como Newton, Halley o Chebyshev, es el comportamiento del punto del infinito. Mientras que en estos últimos métodos el infinito es un punto fijo repulsor, en el método de Schröder el infinito no es punto fijo, lo que introduce fenómenos dinámicos únicos que merecen un análisis detallado.

#### 4.4.1. Grado del método de Schröder

En el estudio del comportamiento dinámico de métodos iterativos para resolver ecuaciones polinómicas, uno de los primeros pasos consiste en determinar el grado de la aplicación racional asociada. Si bien es relativamente sencillo establecer cotas superiores para este grado, el cálculo del valor exacto requiere la introducción del concepto de *punto crítico especial*, tal

como fue empleado por Nayak y Pal en su análisis de la aplicación racional asociada al método de Chebyshev.

[Punto crítico especial] Dado un polinomio complejo  $p(z)$ , un punto crítico  $c \in \mathbb{C}$  se denomina especial si  $p(c) \neq 0$  pero  $p''(c) = 0$ .

Para mayor comodidad, escribimos la aplicación de iteración del método de Schröder de la forma equivalente

$$S_p(z) = z - \frac{p(z)p'(z)}{p'(z)^2 - p(z)p''(z)}. \quad (4.13)$$

**Teorema 4.5.** *Sea  $S_p(z)$  la aplicación de iteración del método de Schröder para resolver ecuaciones polinómicas, escrita como en (4.13). Entonces el grado de la aplicación racional  $S_p(z)$  es*

$$\deg(S_p(z)) = 2r + s - C - 2,$$

donde

- $r$  es el número de raíces distintas de  $p(z)$ .
- $s$  es el número de puntos críticos especiales de  $p(z)$ .
- $C = c_1 + \dots + c_k$  es la suma de multiplicidades de todos los puntos críticos especiales.

**Demostración.** Comenzamos observando que  $\deg(\text{Num}(S_p(z))) \leq \deg(\text{Den}(S_p(z))) \leq 2d - 2$ . En efecto, para un polinomio mónico general de la forma  $p(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots$  es fácil demostrar, tras algunas manipulaciones algebraicas, que

$$\text{Num}(S_p(z)) = zp'(z)^2 - zp(z)p''(z) - p(z)p'(z) = -a_{d-1}z^{2d-2} + P_{2d-3}(z),$$

$$\text{Den}(S_p(z)) = p'(z)^2 - p(z)p''(z) = -dz^{2d-2} + Q_{2d-3}(z),$$

donde  $P_{2d-3}(z)$  y  $Q_{2d-3}(z)$  son polinomios de grado  $2d - 3$ .

Consecuentemente,  $\deg(S_p(z)) \leq 2d - 2$ . Además,  $\deg(S_p(z)) < 2d - 2$  si  $\text{Num}(S_p(z))$  y  $\text{Den}(S_p(z))$  tienen raíces comunes. Para calcular el grado exacto de  $S_p(z)$ , debemos analizar  $\deg(\text{Den}(S_p(z)))$ .

La demostración se basa en las siguientes factorizaciones de los polinomios  $p(z)$ ,  $p'(z)$  y  $p''(z)$ :

$$p(z) = \prod_{i=1}^m (z - \alpha_i) \prod_{j=1}^n (z - \beta_j)^{b_j}, \quad b_j \geq 2,$$

con  $\deg(p) = m + B$ ,  $B = \sum_{j=1}^n b_j$ . Teniendo en cuenta que una raíz de  $p(z)$  con multiplicidad  $k \geq 1$  es raíz de  $p'(z)$  con multiplicidad  $k - 1$  (y un criterio similar para  $p''(z)$ ), tenemos

$$p'(z) = g(z) \prod_{j=1}^n (z - \beta_j)^{b_j - 1},$$

$$p''(z) = h(z) \prod_{j=1}^n (z - \beta_j)^{b_j - 2},$$

donde  $g(z)$  y  $h(z)$  son polinomios que satisfacen  $g(\alpha_i) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $g(\beta_j) \neq 0$  y  $h(\beta_j) \neq 0$  para  $j = 1, \dots, n$ .

Además,  $\deg(g) = \deg(p') - B + n = m + n - 1$  y el coeficiente líder de  $g(z)$  es  $d$ ;  $\deg(h) = \deg(p'') - B + 2n = m + 2n - 2$  y el coeficiente líder de  $h(z)$  es  $d(d-1)$ .

Sean  $\gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, s$  los puntos críticos especiales de  $p(z)$ , con multiplicidades  $c_j$ . Entonces los polinomios  $g(z)$  y  $h(z)$  pueden factorizarse de la siguiente manera:

$$g(z) = \tilde{g}(z) \prod_{k=1}^s (z - \gamma_k)^{c_k},$$

$$h(z) = \tilde{h}(z) \prod_{k=1}^s (z - \gamma_k)^{c_k-1},$$

donde  $\tilde{g}(z)$  y  $\tilde{h}(z)$  son polinomios que satisfacen  $\tilde{g}(\alpha_i) \neq 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $\tilde{g}(\beta_j) \neq 0$  y  $\tilde{h}(\beta_j) \neq 0$  para  $j = 1, \dots, n$ ;  $\tilde{h}(\gamma_k) \neq 0$  para  $k = 1, \dots, s$ .

Además,  $\deg(\tilde{g}) = \deg(g) - C = m + n - C - 1$  y el coeficiente líder de  $\tilde{g}(z)$  es  $d$ ;  $\deg(\tilde{h}) = \deg(h) - C + s = m + 2n - 2 - C + s$  y el coeficiente líder de  $h(z)$  es  $d(d-1)$ .

Por tanto, podemos simplificar las raíces comunes en el siguiente cociente

$$\frac{p(z)p'(z)}{p'(z)^2 - p(z)p''(z)} = \frac{\prod_{i=1}^m (z - \alpha_i) \prod_{j=1}^n (z - \beta_j) \prod_{k=1}^s (z - \gamma_k) \tilde{g}(z)}{\prod_{k=1}^s (z - \gamma_k)^{(c_k+1)} \tilde{g}(z)^2 - \prod_{i=1}^m (z - \alpha_i) \tilde{h}(z)}.$$

El grado de  $S_p(z)$  coincide con el denominador del cociente anterior (nótese que no hay más raíces comunes entre el numerador y el denominador de  $S_p(z)$ ). El coeficiente líder del polinomio en el denominador del cociente anterior

$$\prod_{k=1}^s (z - \gamma_k)^{(c_k+1)} \tilde{g}(z)^2 - \prod_{i=1}^m (z - \alpha_i) \tilde{h}(z)$$

es  $d^2 - d(d-1) = d$ , y su grado es  $2m + 2n + s - C - 2 = 2r + s - C - 2$ , siendo  $r = m + n$  el número de raíces distintas de  $p(z)$ . Así queda demostrado el resultado. ■

**Corolario 4.6.** *Si  $p(z)$  es un polinomio sin puntos críticos especiales, entonces el grado de la aplicación racional  $S_p(z)$  es*

$$\deg(S_p(z)) = 2r - 2,$$

donde  $r$  es el número de raíces distintas de  $p(z)$ .

Teniendo en cuenta la demostración del Teorema 4.5, podemos caracterizar el comportamiento del punto del infinito para el método de Schröder. Como veremos, este comportamiento es diferente al de los procesos iterativos más conocidos (Newton, Halley y Chebyshev), para los cuales el infinito es un punto fijo repulsor.

**Corolario 4.7.** *El punto en el infinito no es un punto fijo para el método de Schröder.*

**Demostración.** Siguiendo la demostración del Teorema 4.5, y con las mismas notaciones, tenemos

$$S_p(\infty) = -\frac{a_{d-1}}{d},$$

por lo que  $\infty$  no es un punto fijo para  $S_p(z)$ . ■

Este resultado fundamental establece una diferencia crucial entre el método de Schröder y otros métodos iterativos clásicos, y motiva el estudio detallado del comportamiento del infinito que desarrollamos en las subsecciones siguientes.

#### 4.4.2. El infinito en el plano complejo extendido

Consideremos el plano complejo extendido  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . El comportamiento del infinito bajo una aplicación racional  $R_1(z)$  puede estudiarse mediante conjugación con la transformación de Möbius  $1/z$ . De este modo, el comportamiento de  $\infty$  para  $R_1(z)$  es el mismo que el comportamiento del origen para la aplicación

$$R_2(z) = \frac{1}{R_1(1/z)}.$$

Para el método de Newton y otros métodos iterativos estándar, el infinito es un punto fijo repulsor. Sin embargo, en el método de Schröder, el infinito no es punto fijo, como se puede verificar mediante cálculo directo.

#### 4.4.3. Comportamiento del infinito para polinomios cúbicos

Consideremos la familia de polinomios cúbicos

$$p_\lambda(z) = (z^2 - 1)(z - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4.14)$$

que, como vimos anteriormente, permite estudiar la dinámica de todos los polinomios cúbicos con tres raíces simples mediante conjugación afín.

El comportamiento de  $\infty$  para la aplicación de Schröder  $S_\lambda(z)$  aplicada a  $p_\lambda(z)$  es equivalente al comportamiento de 0 para la aplicación

$$T_\lambda(z) = \frac{1}{S_\lambda(1/z)} = \frac{(2\lambda^2 + 1)z^4 - 4\lambda z^3 + 2\lambda^2 z^2 - 4\lambda z + 3}{\lambda z^4 + 4\lambda^2 z^3 - 10\lambda z^2 + 4z + \lambda}. \quad (4.15)$$

Como 0 no es punto fijo de  $T_\lambda(z)$ , concluimos que  $\infty$  no es punto fijo de  $S_\lambda(z)$ . Esto motiva el estudio de las órbitas del infinito bajo iteración de Schröder.

#### 4.4.4. Plano de parámetros del infinito

Una herramienta visual poderosa para comprender el comportamiento del infinito es el *plano de parámetros del infinito*, que se construye de la siguiente manera:

Para cada  $\lambda \in \mathbb{C}$ , estudiamos la órbita de  $z = 0$  bajo la aplicación  $T_\lambda(z)$  definida en (4.15). Como  $T_\lambda(z)$  tiene tres puntos fijos atractores correspondientes a las tres raíces de  $p_\lambda(z)$ , coloreamos cada  $\lambda$  según el siguiente código:

- **Rosa:** la órbita de  $z = 0$  por  $T_\lambda(z)$  converge al punto fijo  $z = 1$ .
- **Púrpura:** la órbita de  $z = 0$  por  $T_\lambda(z)$  converge al punto fijo  $z = -1$ .

- **Verde:** la órbita de  $z = 0$  por  $T_\lambda(z)$  converge al punto fijo  $z = 1/\lambda$ .

El plano de parámetros resultante exhibe simetría respecto al eje real, como establece el siguiente resultado:

**Teorema 4.8.** *Sea  $T_\lambda^n(z)$  la composición  $n$ -ésima de la aplicación  $T_\lambda(z)$  definida en (4.15). Entonces*

$$T_{\bar{\lambda}}^n(0) = \overline{T_\lambda^n(0)},$$

y, consecuentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_{\bar{\lambda}}^n(0) = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda^n(0)}.$$

#### 4.4.5. Raíces dominantes

Una consecuencia directa del comportamiento del punto del infinito es la aparición de *raíces dominantes* en las cuencas de atracción de los polinomios (4.14). La órbita del infinito converge a esta raíz dominante:

- Para valores de  $\lambda$  en la región rosa del plano de parámetros del infinito, la raíz dominante es  $z = 1$ .
- Para  $\lambda$  en la región púrpura, la raíz dominante es  $z = -1$ .
- Para  $\lambda$  en la región verde, la raíz dominante es  $z = \lambda$ .

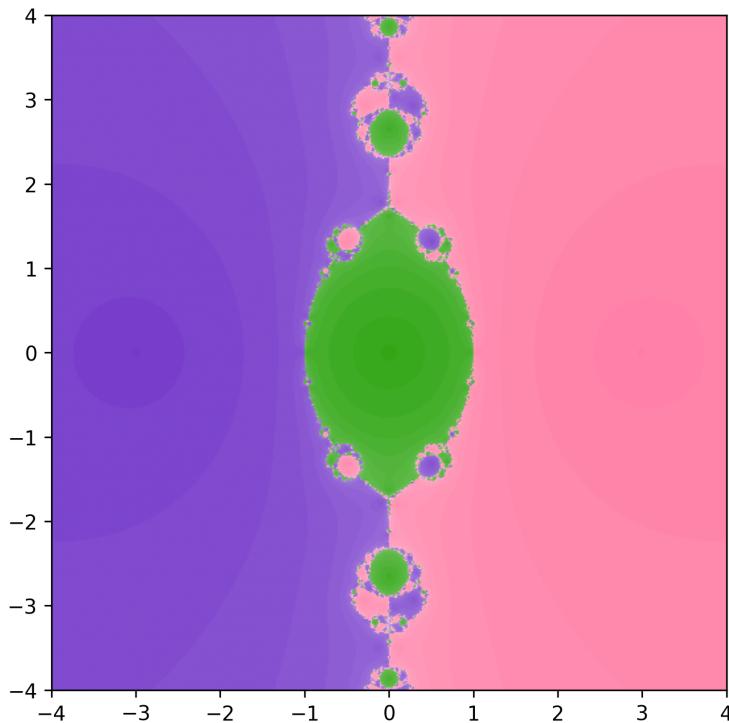


Figura 4.10: Plano de parámetros del método de Schröder en el infinito. La imagen muestra a que raíz va a converger el  $\infty$  haciendo que esta sea la raíz dominante.

Este fenómeno contrasta significativamente con el método de Newton, donde todas las raíces tienen cuencas de atracción que se extienden hasta el infinito. En el caso de Schröder, la cuenca de la raíz dominante invade<sup>el</sup> el plano complejo, mientras que las cuencas de las otras raíces quedan confinadas a regiones acotadas.

#### 4.4.6. Casos excepcionales: ausencia de raíz dominante

Existen casos particulares en los que el método de Schröder no exhibe raíces dominantes, es decir, la cuenca inmediata de atracción de cada raíz permanece conectada con el punto del infinito.

##### 4.4.6.1. Caso del triángulo equilátero: $\lambda = \sqrt{3}i$

Un caso particularmente interesante ocurre cuando  $\lambda = \sqrt{3}i$ , configuración en la que las tres raíces  $1, -1$  y  $\sqrt{3}i$  forman un triángulo equilátero en el plano complejo.

Para este valor, la aplicación  $T_{\sqrt{3}i}(z)$  definida en (4.15) se simplifica a

$$T_{\sqrt{3}i}(z) = -\frac{5\sqrt{3}z^3 - 3iz^2 + 3\sqrt{3}z + 3i}{3iz^3 - 9\sqrt{3}z^2 - 3iz + \sqrt{3}}.$$

En este caso,  $0$  es una preimagen del punto fijo repulsor  $z = -\sqrt{3}i$ , es decir,  $T_{\sqrt{3}i}(0) = -\sqrt{3}i$ . Por esta razón, no existe raíz dominante para el método de Schröder en este caso, y las cuencas de atracción presentan tres accesos al infinito (uno para cada raíz).

##### 4.4.6.2. Otros valores especiales

Es posible encontrar otros valores de  $\lambda$  para los cuales las cuencas de atracción no presentan raíz dominante. Estos valores satisfacen que la órbita de  $0$  por  $T_\lambda(z)$  alcanza uno de los dos puntos fijos repulsores  $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 3}$ , es decir,

$$T_\lambda^n(0) = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 3}$$

para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

Por ejemplo, numéricamente se puede determinar que  $\lambda = \sqrt{\tau}i \approx 5.58299i$ , donde  $\tau$  es la única raíz positiva de  $15t^3 - 459t^2 - 243t - 729 = 0$ , produce cuencas de atracción con dos accesos al infinito.

#### 4.4.7. Extensión a polinomios con raíces múltiples

El análisis del plano de parámetros del infinito puede extenderse a familias de polinomios con raíces múltiples, como

$$p_{\lambda,n}(z) = (z^2 - 1)(z - \lambda)^n, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad n \geq 2. \quad (4.16)$$

Para estos polinomios, la aplicación conjugada es

$$T_{\lambda,n}(z) = \frac{1}{S_{\lambda,n}(1/z)} = \frac{(n + 2\lambda^2)z^4 - 4\lambda z^3 + 2(\lambda^2 - n + 1)z^2 - 4\lambda z + n + 2}{\lambda n z^4 + 4\lambda^2 z^3 - 2\lambda(n + 4)z^2 + 4z + \lambda n}. \quad (4.17)$$

Siguiendo las órbitas de  $z = 0$  bajo  $T_{\lambda,n}(z)$  y aplicando el mismo código de colores, se obtienen planos de parámetros del infinito que revelan patrones interesantes:

- Cuando una raíz múltiple está presente, tiende a ser dominante en el sentido de que atrae la órbita del punto del infinito.
- Para polinomios con  $\lambda$  en la región verde del plano de parámetros, la raíz múltiple  $z = \lambda$  aparece como raíz dominante.
- En contraste, para  $\lambda$  en las regiones rosa o púrpura, una de las raíces simples ( $z = 1$  o  $z = -1$ ) es la raíz dominante.

#### 4.4.8. Comparación con el teorema de Hubbard

El fenómeno de raíces dominantes podría parecer contradecir un resultado de Hubbard et al., que establece que cada raíz está conectada con el punto del infinito. Sin embargo, no existe tal contradicción.

El resultado de Hubbard se refiere específicamente al método de Newton aplicado a polinomios. En particular, se demuestra que la cuenca inmediata de una raíz —es decir, la componente conexa de la cuenca de atracción que contiene la raíz— tiene un cierto número de accesos al infinito.

En el caso del método de Schröder, la existencia de accesos al infinito no está garantizada. Sin embargo, esto no contradice el resultado de Hubbard, ya que el método de Schröder corresponde a aplicar el método de Newton a la función racional  $p(z)/p'(z)$  y no a un polinomio.

#### 4.4.9. Implicaciones dinámicas del comportamiento del infinito

El comportamiento único del punto del infinito en el método de Schröder tiene varias implicaciones importantes:

1. **Estructura de las cuencas de atracción:** La existencia de raíces dominantes altera fundamentalmente la topología de las cuencas de atracción. Mientras que en Newton todas las raíces tienen cuencas que se extienden al infinito, en Schröder típicamente una raíz domina el plano.
2. **Sensibilidad a condiciones iniciales alejadas:** Para condiciones iniciales con  $|z_0|$  muy grande, el método de Schröder tiende a converger a la raíz dominante, independientemente de la dirección en el plano complejo. Esto contrasta con Newton, donde la dirección también importa.
3. **Interacción con multiplicidades:** Cuando existe una raíz múltiple, ésta tiende a atraer la órbita del infinito, reforzando su carácter dominante. Esto es consistente con la ventaja de Schröder en la convergencia a raíces múltiples.

4. **Casos excepcionales y simetrías:** Los casos donde no hay raíz dominante (como  $\lambda = \sqrt{3}i$ ) están asociados con configuraciones geométricas especiales de las raíces o con órbitas del infinito que alcanzan puntos fijos repulsores.

## 4.5. Conclusiones del capítulo

El estudio dinámico del método de Schröder en el plano complejo revela una riqueza de comportamientos que dependen tanto del número de raíces como de sus multiplicidades. Los resultados obtenidos pueden organizarse en tres grandes áreas: polinomios con dos raíces, polinomios cúbicos, y el comportamiento del punto del infinito.

### 4.5.1. Síntesis: polinomios con dos raíces

Para polinomios  $(z - a)^m(z - b)^n$  con  $m \geq n \geq 1$ :

- El conjunto de Julia tiene una geometría excepcionalmente simple: un círculo (o recta cuando  $m = n$ ) caracterizado explícitamente por los Teoremas 4.1 y 4.2.
- La razón  $p = m/n$  es el parámetro fundamental: todos los polinomios con la misma razón tienen el mismo Julia (salvo transformaciones afines).
- Existen comportamientos límite bien definidos: colapso del Julia en la raíz simple cuando  $p \rightarrow \infty$ , explosión hacia la bisectriz cuando  $p \rightarrow 1^+$ .
- La comparación con Newton muestra geometrías de Julia más simples para Schröder (círculos vs. parábolas deformadas), aunque ambos métodos mantienen la misma complejidad topológica esencial.
- La ventaja principal de Schröder es mantener convergencia cuadrática para raíces múltiples, a costa de mayor coste computacional por evaluación de  $f''(z)$ .

### 4.5.2. Síntesis: polinomios cúbicos

Para polinomios  $(z - a)(z - b)(z - c)$  con tres raíces simples:

- La presencia de tres puntos críticos libres (frente a cero en el caso de dos raíces y uno para Newton) introduce complejidad dinámica fundamental.
- Aparecen regiones extensas de no convergencia en las cuencas de atracción, correspondientes a ciclos atractores que no son raíces.
- El plano de parámetros revela una estructura fractal compleja, con zonas negras indicando existencia de atractores extraños.
- Casos excepcionales como  $\lambda = \sqrt{3}i$  (triángulo equilátero) no presentan puntos críticos libres y todas las órbitas convergen a raíces.

- El método de Newton, con un solo punto crítico libre, resulta más robusto y con menos zonas de no convergencia para polinomios con raíces simples.

#### 4.5.3. Síntesis: comportamiento del infinito

El punto del infinito exhibe características únicas que distinguen a Schröder de otros métodos iterativos:

- A diferencia de Newton, Halley y Chebyshev, el infinito no es punto fijo en el método de Schröder.
- El plano de parámetros del infinito revela la existencia de raíces dominantes: una raíz cuya cuenca invade el plano complejo mientras las demás quedan confinadas.
- Para  $(z^2 - 1)(z - \lambda)$ , la raíz dominante depende de  $\lambda$ : puede ser  $z = 1$  (región rosa),  $z = -1$  (región púrpura), o  $z = \lambda$  (región verde).
- Configuraciones excepcionales (triángulo equilátero, órbitas que alcanzan puntos fijos repulsores) no presentan raíz dominante.
- Cuando existe raíz múltiple, ésta tiende a atraer el infinito, reforzando su dominancia.
- Este comportamiento no contradice el teorema de Hubbard, pues Schröder aplica Newton a  $p(z)/p'(z)$  (función racional) y no a  $p(z)$  (polinomio).

#### 4.5.4. Implicaciones para la práctica numérica

Los resultados tienen consecuencias directas para el uso del método:

- **Raíces múltiples conocidas:** Schröder es superior a Newton, manteniendo convergencia cuadrática sin necesidad de conocer la multiplicidad exacta.
- **Raíces simples múltiples:** Newton puede ser más robusto debido a menor número de puntos críticos libres y ausencia de raíces dominantes.
- **Selección de condiciones iniciales:** Para dos raíces, la geometría circular del Julia facilita la predicción. Para raíces múltiples o lejanas, la raíz dominante atrae mayoría de órbitas.
- **Detección de no convergencia:** En polinomios cúbicos, implementar criterios de detección es esencial ante posibilidad de ciclos atractores extraños.

#### 4.5.5. Direcciones de investigación futura

Como trabajo futuro, sería de interés:

1. Caracterizar analíticamente las regiones del plano de parámetros donde aparecen ciclos atractores extraños.
2. Estudiar la dimensión fractal y propiedades topológicas de los conjuntos de Julia en casos con estructuras fractales.
3. Extender sistemáticamente el análisis del infinito a polinomios de grado arbitrario, investigando patrones generales.
4. Comparar el comportamiento del infinito en toda la familia Chebyshev-Halley, identificando métodos con características similares a Schröder.
5. Relacionar matemáticamente el plano de parámetros del infinito con el plano de parámetros de puntos críticos libres.
6. Desarrollar algoritmos adaptativos que exploten el conocimiento de raíces dominantes para mejorar eficiencia.
7. Investigar aplicaciones donde la estructura de raíces dominantes sea ventajosa (por ejemplo, encontrar raíz de mayor multiplicidad).



# Capítulo 5

## Análisis detallado del método de Schröder

6.1. Derivación teórica y orden de convergencia  
6.2. Estudio del caso  $(x - a)^m(x - b)^n$   
6.3. Estudio del caso cúbico  
6.4. El método de Schröder y el punto en el infinito  
6.5. Visualización y análisis gráfico de los resultados



## Capítulo 6

# Dinámica de la familia Chebyshev-Halley



# **Capítulo 7**

## **Conclusiones y líneas futuras de investigación**

9.1. Principales conclusiones teóricas 9.2. Contribuciones al estudio de la dinámica de métodos iterativos 9.3. Aportaciones computacionales 9.4. Posibles extensiones y trabajos futuros



# **Anexo 1: Desarrollo de un framework en Python para el análisis dinámico**

8.1. Motivación y objetivos del framework 8.2. Arquitectura y diseño del software 8.3. Implementación de las funciones iterativas y visualización del plano complejo 8.4. Herramientas para el análisis numérico y visual de la convergencia 8.5. Casos de estudio y validación de resultados 8.6. Posibles extensiones futuras del framework



# Bibliografía

- [1] F. AGUILÓ Y A. MIRALLES: Consideraciones geométricas acerca del método de Newton, *La Gaceta de la RSME* **7** (2004), n.<sup>o</sup> 1, 247–260.
- [2] L. AHLFORDS: *Complex Analysis*, MacGraw-Hill, Nueva York, 1979.
- [3] K. ALLIGOOD, T. SAUER Y J. YORKE: *Chaos: an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1997.
- [4] S. AMAT, S. BUSQUIER Y J. M. GUTIÉRREZ: Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations, *J. Comput. Appl. Math.* **157** (2003), 197–205.
- [5] I. K. ARGYROS Y F. SZIDAROVSKY: *The theory and application of iteration methods*, C.R.C. Press Inc., Boca Raton, Florida, 1993.
- [6] I. K. ARGYROS Y J. M. GUTIÉRREZ: A unified approach for enlarging the radius of convergence for Newton's method and applications, *Nonlinear Functional Analysis and Applications* **10** (2005), 555–563.
- [7] D. F. BAILEY: A Historical Survey of Solution by Functional Iteration, *Math. Magazine* **62** (1989), n.<sup>o</sup> 3, 155–166.
- [8] F. BALIBREA, J. O. FREITAS Y J. SOUSA RAMOS: Newton maps for quintic polynomials, *arXiv:math.DS/0501327* (2005), 1–17.
- [9] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires*, Monografie Matematyczne, Varsovia, 1932.
- [10] J. BANKS, J. BROOKS, G. CAIRNS, G. DAVIS Y P. STACEY: On Devaney's definition of chaos, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 332–334.
- [11] B. BARNA: Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischer Gleichungen. I, *Publ. Math. Debrecen* **3** (1953), 109–118.
- [12] B. BARNA: Über die Divergenzpunkte des Newtonschen Verfahrens zur Bestimmung von Wurzeln algebraischen Gleichungen. II, *Publ. Math. Debrecen* **4** (1956), 384–397.
- [13] B. BARNA: Über die divergenzpunkte des Newtonschen verfahrens zur bestimmung von wurzeln algebraischer gleichungen. III, *Publ. Math. Debrecen* **8** (1961), 193–207.

- [14] B. BARNA: Über die divergenzpunkte des Newtonschen verfahrens zur bestimmung von wurzeln algebraischer gleichungen. IV, *Publ. Math. Debrecen* **14** (1967), 91–97.
- [15] M. BARNSLEY: *Fractals everywhere*, Academic Press, Boston, 1988.
- [16] A. F. BEARDON: *Iteration of rational functions*, Springer-Verlag, Nueva York, 1991.
- [17] A. BEN-ISRAEL: Newton's method with modified functions, *Contemporary Mathematics* **204** (1997), 30–50.
- [18] M. BENITO Y J. J. GUADALUPE: Dibujando mediante iteraciones, *Números* **42** (2000), 15–28.
- [19] M. BENITO, J. M. GUTIÉRREZ Y V. LANCHARES: El fractal de Chicho, *Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández*, Serv. Publicaciones Univ. La Rioja, Logroño (2001), 247–254.
- [20] W. BERGWEILER: Iteration of meromorphic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), n.º 2, 151–188.
- [21] P. BLANCHARD: Complex Analytic Dynamics on the Riemann sphere, *Bull. Amer. Math. Soc.* **11** (1984), n.º 1, 85–141.
- [22] P. BLANCHARD Y A. CHIU: *Complex Dynamics: an informal discussion*, Fractal Geometry and Analysis, Eds. J. Bélair & S. Dubuc, Kluwer Academic Publishers (1991), 45–98.
- [23] L. E. BÖTTCHER: The principal laws of convergence of iterates and their application to Analysis, *Izv. Kasan. Fiz.-Mat. Obshch* **14** (1904), 155–234.
- [24] B. BRANNER: The Mandelbrot set, *Proc. Symp. Applied Math.* (1989), 75–105.
- [25] F. CAJORI, Historical note on the Newton-Raphson method of approximation, *Amer. Math. Monthly* **18** (1910), 29–33.
- [26] L. CARLESON Y T. GAMELIN: *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1993.
- [27] B. CASSELMAN: YBC 7289, a precursor of the Euclid's Elements of Geometry, <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/ybc.html>
- [28] A. CAYLEY: The Newton-Fourier imaginary problem, *Amer. J. Math.* **2** (1879), 97–97.
- [29] A. CAYLEY: Application of the Newton-Fourier method to an imaginary root of an equation, *Quarterly J. Pure Appl. Math.* **16** (1879), 179–185.
- [30] A. CAYLEY: Sur les racines d'une équation algébrique, *Comptes Rendus Acad. Sci.* **110** (1890), 215–218.

- [31] J. L. CHABERT ET AL.: *A History of Algorithms: from the Pebble to the Microchip*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1999.
- [32] S. CHANDRASEKHAR: *Radiative transfer*, Dover, Nueva York, 1960.
- [33] E. D. CHARLES Y J. B. TATUM: The convergence of Newton-Raphson iteration with Kepler's equation, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **69** (1998), 357–372.
- [34] P. COLWELL: *Solving Kepler's equation over three centuries*, Willmann-Bell, Inc., Richmond, VA, 1993.
- [35] B. A. CONWAY: An improved algorithm due to Laguerre for the solution of Kepler's equation, *Celest. Mech.* **39** (1986), 199–211.
- [36] M. COSNARD Y C. MASSE: Convergence presque partout de la méthode de Newton, *C. R. Acad. Sc. Paris* **297** (1983), 549–552.
- [37] J. H. CURRY, L. GARNETT Y D. SULLIVAN: On the iteration of rational functions: Computer experiments with Newton's method, *Commun. Math. Phys.* **91** (1983), 267–277.
- [38] J. M. A. DANBY Y T. M. BURKARDT: The solution of Kepler equation I, *Celestial Mechanics* **40** (1983), 95–107.
- [39] J. M. A. DANBY Y T. M. BURKARDT: The solution of Kepler equation III, *Celestial Mechanics* **31** (1987), 303–312.
- [40] J. P. DEDIEU: *Points fixes, zéros et la Méthode de Newton*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 2006.
- [41] J. E. DENNIS Y R. B. SCHNABEL: *Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations*, Classics in Applied Mathematics, Vol. 16, SIAM, Filadelfia, 1996.
- [42] R. L. DEVANEY: *A first course in Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley, Redwood City (CA), 1992.
- [43] R. L. DEVANEY: *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second Edition*, Westview Press, Cambridge, 2003.
- [44] L. E. DICKSON: *Modern Algebraic Theories*, H. Sanborn and Co., Chicago, 1926.
- [45] A. DOUADY Y J. HUBBARD: On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4<sup>e</sup> series* **18** (1985), 287–343.
- [46] J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ, N. ROMERO Y M. J. RUBIO: El método de Newton: de Newton a Kantorovich, *La Gaceta de la RSME* **13** (2010), n.<sup>o</sup> 1, 53–76.

- [47] J. A. EZQUERRO, J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ, N. ROMERO Y M. J. RUBIO: Relaciones de recurrencia en el método de Newton-Kantorovich, *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez*, Serv. Publicaciones Univ. La Rioja, Logroño, (2010), 319–333.
- [48] N. FAGELLA: Invariants en dinàmica complexa, *Bull. Soc. Mat. Cat.* **23** (2007), n.<sup>o</sup> 1, 29–51.
- [49] N. FAGELLA Y X. JARQUE: *Iteración compleja y fractales*, Vicens Vives, Barcelona, 2007.
- [50] J. D. FAIRES Y R. L. BURDEN: *Métodos Numéricos*, 3<sup>a</sup> Ed., Thomson, Madrid, 2004.
- [51] P. FATOU: Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France* **47** (1919), 161–271.
- [52] P. FATOU: Sur les équations fonctionnelles, *Bull. Soc. Math. France* **48** (1920), 208–314.
- [53] M. FRAME Y B. B. MANDELBROT: *Fractals, graphics and mathematics education*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002.
- [54] GALlica-MATH: OEUVRES COMPLÈTES: Biblioteca numérica Gallica de la Bibliothèque Nationale de France, <http://mathdoc.emath.fr/OEUVRES/>
- [55] W. J. GILBERT: The complex dynamics of Newton’s method for a double root, *Computers Math. Applic.* **22** (1991), n.<sup>o</sup> 10, 115–119.
- [56] A. GIRALDO Y M. A. SASTRE: *Sistemas dinámicos discretos y caos. Teoría, ejemplos y algoritmos*, Fundación General de la Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, 2002.
- [57] D. GULICK: *Encounter with chaos*, McGraw Hill, Nueva York, 1992.
- [58] J. M. GUTIÉRREZ, M. A. HERNÁNDEZ Y M. A. SALANOVA: Calculus of  $n$ th roots and third order iterative methods, *Nonlinear Analysis* **47** (2001), 2875–2880.
- [59] J. M. GUTIÉRREZ, Á. A. MAGREÑÁN Y J. L. VARONA: The “Gauss-Seidelization” of iterative methods for solving nonlinear equations in the complex plane, *Appl. Math. Comput.* **218** (2011), 2467–2479.
- [60] M. DE GUZMÁN, M. Á. MARTÍN, M. MORÁN Y M. REYES: *Estructuras fractales y sus aplicaciones*, Editorial Labor, Barcelona, 1993.
- [61] J. M. HAWKINS: McMullen’s root-finding algorithm for cubic polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **130** (2002), n.<sup>o</sup> 9, 2583–2592.
- [62] M. HARUTA: Newton’s method on the complex exponential function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), 2499–2513.

- [63] J. HEAD: *The combinatorics of Newton's method for cubic polynomials*, Ph. D. Thesis, Cornell Univ., Ithaca (N. Y.), 1987.
- [64] P. HENRICI: *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1964.
- [65] M. A. HERNÁNDEZ Y M. A. SALANOVA: *La convexidad en la resolución de ecuaciones no lineales*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja, 1996.
- [66] R. A. HOLMGREN: *A first course in discrete dynamical systems, second edition*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1996.
- [67] P. HORTON: No fooling! Newton's method can be fooled, *Math. Magazine* **80** (2007), 383–387.
- [68] A. S. HOUSEHOLDER: *The numerical treatment of a single nonlinear equation*, McGraw-Hill, Nueva York, 1970.
- [69] J. H. HUBBARD Y B. WEST: *Differential equations: a dynamical systems approach*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1991.
- [70] J. H. HUBBARD, D. SCHLEICHER Y S. SUTHERLAND: How to find all roots of complex polynomials by Newton's method, *Inv. Math.* **146** (2001), 1–33.
- [71] H. HURLEY: Multiple attractors in Newton's method, *Erg. Theory and Dyn. Systems* **6** (1984), 561–569.
- [72] G. JULIA: Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, *J. de Math. pures et appliquées* **8:1** (1918), 47–215.
- [73] B. KALANTARI: *Polynomial root-finding and polyomigraphy*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2009.
- [74] L. V. KANTOROVICH: On Newton's method for functional equations, *Dokl Akad. Nauk SSSR* **59** (1948), 1237–1240 (en ruso).
- [75] L. V. KANTOROVICH: The majorant principle and Newton's method, *Dokl Akad. Nauk SSSR* **76** (1951), 17–20 (en ruso).
- [76] L. V. KANTOROVICH: *Functional Analysis in Normed Spaces*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
- [77] L. V. KANTOROVICH Y G. P. AKILOV: *Functional Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1982.
- [78] C. T. KELLEY: *Iterative methods for linear and nonlinear equations*, Frontiers in Applied Mathematics, Vol. 16, SIAM, Filadelfia, 1995.

- [79] H. B. KELLER: *Numerical solution of two point boundary value problem*, SIAM, Filadelfia, 1976.
- [80] D. KINCAID Y W. CHENEY: *Análisis Numérico. Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.
- [81] R. F. KING: Improving the Van de Vel root-finding method Algorithm, *Computing* **30** (1983), 373–378.
- [82] K. KNEISL: Julia sets for the super-Newton method, Cauchy’s method and Halley’s method, *Chaos* **11** (2001), n.º 2, 359–370.
- [83] R. J. KNILL: A Modified Babylonian Algorithm, *Amer. Math. Monthly* **99** (1992), 734–737.
- [84] N. KOLLERSTROM: Thomas Simpson and ‘Newton’s method of approximation’: an enduring myth, *British J. Hist. Science* **25** (1992), 347–354.
- [85] G. KÖNIGS: Recherches sur les équationes fonctionnelles, *Ann. l’Ecole Norm.* **1** (1884), Suplement.
- [86] P. KRAVANJA Y A. HAEGEMANS: A modification of Newton’s method for analytic mappings having multiple zeros, *Computing* **62** (1999), 129–145.
- [87] V. LANCHARES Y I. L. PÉREZ-BARRÓN: The dynamics of Kepler equation, en *Analytic and numerical techniques in orbital dynamics*, *Monogr. Real Acad. Ci. Exact. Fís.-Quím. Nat. Zaragoza* **22** (2002), 75–82.
- [88] P. LANCASTER Y L. RODMAN: *Algebraic Riccati equations*, Oxford University Press, Oxford, 1995.
- [89] M. S. LATTÈS: Sur l’iteration de Substitutions Rationnelles et Fonctions de Poincaré, *Comptes Rendus Acad. Sci.* **166** (1918), 26–28.
- [90] R. LAUBENBACHER, G. MCGRATH Y D. PENGELLEY: Lagrange and the solution of numerical equations, *Historia Math.* **28** (2001), **3**, 220–231.
- [91] T. LI Y J. YORKE: Period three implies chaos, *Amer. Math. Monthly* **82** (1975), 985–993.
- [92] F. LUCAS: Sur une application de la Mécanique rationnelle à la théorie des équations, *C. R. Hebdomadaires Séances Acad. Sci.* **89** (1879), 224–226.
- [93] B. MANDELBROT: *The fractal geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., Nueva York, 1982.
- [94] M. MARTELLI: *Introduction to discrete dynamical systems and chaos*, Wiley-Interscience Publ., Nueva York, 1999.

- [95] J. H. MATHEWS: Bibliography for Newton's method, <http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/Newton'sMethodBib.html>
- [96] MATLAB: Repositorio del entorno de programación Matlab, <http://www.mathworks.es/products/matlab/>
- [97] R. MAY: Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261** (1976), 459–467.
- [98] M. MCCLURE: Newton's method for complex polynomials, *Mathematica in Education and Research* **11** (2006), n.º 2, 2–15.
- [99] C. McMULLEN: Families of rational maps and iterative root-finding algorithms, *Annals of Mathematics* **125** (1987), 467–493.
- [100] C. McMULLEN: *Complex dynamics and renormalization*, Annals of Mathematics Studies **135**, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.
- [101] J. M. MCNAMEE: A bibliography on roots of polynomials: Newton's method, <http://www1.elsevier.com/homepage/sac/cam/mcnamee/02.htm>
- [102] J. MILNOR: *Dynamics in one complex variable: Introductory lectures. Third edition*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2006.
- [103] S. MOROSAWA, Y. NISHIMURA, M. TANIGUCHI Y T. UEDA: *Holomorphic Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [104] NETLIB: Software repository at the University of Tennessee, <http://www.netlib.org/minpack/>
- [105] O. NEUGEBAUER Y A. SACHS: *Mathematical cuneiform texts*, American Oriental Society, New Haven, Conn., 1945.
- [106] K. NISHIZAWA Y M. FUJIMURA: Families of rational maps and convergence basins of Newton's method, *Proc. Japan Acad.* **68** Ser. A, (1992), 143–147.
- [107] J. J. O'CONNOR Y E. F. ROBERTSON: The MacTutor History of Mathematics archive: Nine Chapters on the Mathematical Art, [http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Nine\\_chapters.html](http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Nine_chapters.html)
- [108] OCTAVE: Repositorio del programa libre de cálculo numérico Octave, <http://www.gnu.org/software/octave/>
- [109] J. M. ORTEGA Y W. C. RHEINBOLDT: *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, Nueva York, 1970.
- [110] A. OSTROWSKI: Über die Konvergenz und die Abrundungsfestigkeit des Newtonschen Verfahrens, *Rec. Math.* **2** (1937), 1073–1095.

- [111] A. OSTROWSKI: Über einen Fall der Konvergenz des Newtonschen Näherungsverfahrens, *Rec. Math.* **3** (1938), 254–258.
- [112] A. OSTROWSKI: *Solution of equations and systems of equations*, Academic Press, Nueva York, 1966.
- [113] M. PALACIOS: Kepler equation and accelerated Newton method, *J. Comput. Appl. Math.* **138** (2002), 335–346.
- [114] H. O. PEITGEN Y P.H. RICHTER: *The beauty of fractals*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg, 1986.
- [115] H. O. PEITGEN, D. SAUPE Y H. JÜRGENS: *Fractals on the classroom. Vol. I: Introduction to fractals and chaos.*, Springer-Verlag, Nueva York, 1992.
- [116] PETSc: Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation, <http://www.mcs.anl.gov/petsc/petsc-as/>
- [117] S. PLAZA: *Fractales y generación computacional de imágenes*, Monografía número 16, Instituto de Matemáticas y Ciencias Afines, IMCA, Perú, 2000.
- [118] S. PLAZA Y N. ROMERO: Attracting cycles for the relaxed Newton's method, *J. Comput. Appl. Math.* **235** (2011), 3238–3244.
- [119] S. PLAZA Y V. VERGARA: Existence of periodic orbit for Newton method, *Scientia, Series A, Mathematical Sciences* **7** (2001), 31–36.
- [120] B. T. POLYAK: Newton-Kantorovich method and its global convergence, *J. Math. Sciences* **133** (2006), n.<sup>o</sup> 4, 1513–1523.
- [121] F. A. POTRA Y V. PTÁK: *Nondiscrete induction and iterative processes*, Pitman, Londres, 1984.
- [122] L. B. RALL: Convergence of Newton process to multiple solutions, *Numer. Math.* **9** (1966), n.<sup>o</sup> 1, 23–37.
- [123] L. B. RALL: *Computational solution of nonlinear operator equations*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, Nueva York, 1979.
- [124] W. C. RHEINBOLDT: An adaptice continuation process for solving systems of nonlinear equations, *Polish Acad. Sci. Banach Center Publ.* **3** (1977), 129–142.
- [125] G. ROBERTS Y J. HORGAN-KOBELSKI: Newton's versus Halley's method: a dynamical systems approach, *Intern. J. Bifurcation Chaos* **14** (2004), n.<sup>o</sup> 10, 3459–3475.
- [126] R. C. ROBINSON: *Dynamical systems: Stability, Symbolic Dynamics and Chaos. Second Edition*, CRC Press, Nueva York, 1999.

- [127] R. C. ROBINSON: *An introduction to dynamical systems: continuous and discrete*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, 2004.
- [128] F. M. RODRÍGUEZ-VÁSQUEZ: *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*, Tesis Doctoral, Univ. Salamanca, 2010.
- [129] J. RÜCKERT Y D. SCHLEICHER: On the Newton's method for entire functions, *J. London Math. Soc.* **75** (2007), n.<sup>o</sup> 2, 659–676.
- [130] SAGE: Repositorio del programa de cálculo matemático Sage, <http://www.sagemath.org/>
- [131] D. A. SÁNCHEZ: An alternative to the shooting method for a certain class of boundary value problems, *Amer. Math. Monthly* **108** (2001), n.<sup>o</sup> 6, 552–555.
- [132] G. SAUNDER: *Iteration of rational function of one complex variable and basins of attractive fixed points*, Ph. D. Thesis, Univ. of California, Berkeley, 1984.
- [133] F. SCHEID: *2000 Solved Problems in Numerical Analysis*, Schaum's Solved Problem Series, McGraw–Hill, Nueva York, 1990.
- [134] D. SCHLEICHER: Newton's method as a dynamical system: efficient root finding of polynomial and the Riemann  $\zeta$  function, *Fields Institute Communications* **53** (2008), 1–12.
- [135] E. SCHRÖDER: Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen., *Math. Ann.* **2** (1870), 317–365. (Traducido por G. W. Stewart como *On Infinitely Many Algorithms for Solving Equations* en 1992 (revisado en enero de 1993), disponible vía ftp en <ftp://thales.cs.umd.edu> en el directorio pub/reports.)
- [136] SCILAB: The Scilab Consortium, <http://www.scilab.org/>
- [137] W. T. SHAW: *Complex Analysis with Mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.
- [138] M. SHISHIKURA: The connectivity of the Julia set and fixed points, en “*Complex dynamics: families and friends*” (Ed. by D. Schleicher), A. K. Peters (2009), 257–276.
- [139] S. SMALE: On the efficiency of algorithms of analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **13** (1985), n.<sup>o</sup> 4, 87–121.
- [140] I. STEWART: *Historia de las Matemáticas en los últimos 10000 años*, Crítica, Barcelona, 2008.
- [141] S. STROGATZ: *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1994.

- [142] D. SULLIVAN: Quasi conformal homeomorphisms and dynamics. I. Solution of Fatou-Julia problem wandering domains, *Ann. Math.* **122** (1985), n.<sup>o</sup> 2, 401–418.
- [143] THE 2000 WIEWPOINTS GROUP: Proof without words: geometric series, *Mathematics Magazine* **74** (2001), 320.
- [144] H. THUNBERG: Periodicity versus chaos in one-dimensional dynamics, *SIAM Review* **43** (2000), 3–30.
- [145] P. TOUEY: Yet another definition of chaos, *Amer. Math. Monthly* **104** (1997), 411–415.
- [146] J. F. TRAUB: *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.
- [147] H. VAN DE VEL: A method for computing a root of a single nonlinear equation, including its multiplicity, *Computing* **14** (1975), 167–171.
- [148] M. VANDER STRAETEN Y H. VAN DE VEL: Multiple root-finding methods, *J. Comput. Appl. Math.* **40** (1992), 105–114.
- [149] J. L. VARONA: Graphic and numerical comparison between iterative methods, *Math. Intelligencer* **24** (2002), n.<sup>o</sup> 1, 37–46.
- [150] YALE UNIVERSITY: The Yale Babylonian Collection, <http://www.yale.edu/nelc/babylonian.html>
- [151] T. YAMAMOTO: Historical developments in convergence analysis for Newton's and Newton-like methods, *J. Comput. Appl. Math.* **124** (2000), 1–23.
- [152] L. YAU Y A. BEN-ISRAEL: The Newton and Halley methods for complex roots, *Amer. Math. Monthly* **105** (1998), n.<sup>o</sup> 9, 806–818.
- [153] T. J. YPMA: Historical development of the Newton-Raphson method, *SIAM Review* **37** (1995), n.<sup>o</sup> 4, 531–551.
- [154] J. WALSH: The dynamics of Newton's method for cubic polynomials, *College Mathematics Journal* **26** (1995), n.<sup>o</sup> 1, 22–28.
- [155] E. W. WEISSTEIN: Bring-Jerrard Quintic Form. From MathWorld, A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Bring-JerrardQuinticForm.html>
- [156] ZUSE INSTITUTE BERLIN: Software repository for Peter Deuflhard's Book "Newton Methods for Nonlinear Problems – Affine Invariance and Adaptive Algorithms", <http://www.zib.de/Numerik/numsoft/NewtonLib/index.en.html>