Hjemmeopgave 4 - Matematik 1a

Victor Jonathan Hald

s183710

01-12-2024

Opgave a)

Lad V være det komplekse vektorrum $\mathbb{C}^{2\times 4}$ bestående af 2×4 matricer med komplekse koefficienter. Har V et komplekst underrum af dimension 9?

$$V = \begin{bmatrix} z_1 & z_5 \\ z_2 & z_6 \\ z_3 & z_7 \\ z_4 & z_8 \end{bmatrix}$$

Lad os betragte det komplekse vektorrum V som er defineret som $\mathbb{C}^{2\times 4}$, hvilket består af alle 2×4 matricer med komplekse koefficienter. Vi ønsker at undersøge, om der findes et underrum W i V med en dimension på 9.

Først beregner vi den totale dimension af V:

$$V = \mathbb{C}^{2\times 4}$$

Da hver indgang i matricen er kompleks, har vi:

$$\text{Dimension af } V = 2 \times 4 = 8$$

Nu skal vi finde ud af, om der kan eksistere et underrum W i V med en dimension på 9. Men siden dimensionen af V kun er 8, hvilket er mindre end 9, så er det umuligt at have et underrum med en dimension større end 8.

Derfor kan der ikke eksistere noget underrum W i V med en dimension på 9 eller mere, fordi den maksimale dimension af et underrum i V er 8.

Opgave b)

Lad W være udspændt af følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Angiv en basis for W og beregn $dim_{\mathbb{R}}(W)$.

For at finde en basis skal vi undersøge om vektorerne er lineært uafhængige. Hvis der findes lineært **afhængige** vektorer skal vi fjerne dem for at få en basis.

Vi undersøger dette ved at sætte vektorerne ind i en matrix og reducere den til reduced row echelon form.

$$\begin{gathered}
A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \\
R2 + R1, \quad R4 - 2 \cdot R1 \\
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & -6 & 6 \end{bmatrix} \\
\frac{R1}{2}, \quad \frac{R2}{7}, \quad \frac{R3}{5}, \quad \frac{R4}{-6} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\
R1 - \frac{3}{2} \cdot R2, \quad R3 - R2, \quad R4 + R2 \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{gathered}$$

Sætter vi det op som ligningssystemet

$$\begin{aligned}
2a + 3b &= 0 \\
-2a + 4b &= -7 \\
0a + 5b &= -5 \\
4a + 0b &= 6
\end{aligned}$$

Har vi altså fundet ud af, at

$$a = \frac{3}{2} \quad og \quad b = -1$$

Vi kan tjekke ved at skrive v_3 som en linearkombination af v_1 og v_2:

$$v_3 = \frac{3}{2}v_1 - v_2$$

$$\frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \cdot 2 - 3 \\ \frac{3}{2} \cdot -2 - 4 \\ \frac{3}{2} \cdot 0 - 0 \\ \frac{3}{2} \cdot 4 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 3 \\ -3 - 4 \\ 0 - 0 \\ 6 - 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Vi ser altså at vi får v_3 igen, og v_1 og v_2 udgør dermed en basis for W.

Desuden ser vi på den reducerede matrice at rangen er 2. Derfor er $dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$

Opgave c)

Lad $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ være defineret som følger:

$$L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \quad v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}.$$

Der gives de ordnede baser

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad for \quad \mathbb{C}^2 \quad og \quad \gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad for \quad \mathbb{C}^3$$

Beregn afbildningsmatricen ${}_\beta[L]_\gamma$.

Vi starter med at udregne hvert billede af $L(\gamma_i)$ for $i = 1, 2, 3$:

$$L(\gamma_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(\gamma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$L(\gamma_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi vil nu udtrykke hver $L(\gamma_i)$ i henhold til basen β:

Basen β for $\mathbb{C}^2$:

$$\beta_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vi skal nu finde skalarerne a_{ij} for hver $L(\gamma_i)$ i henhold til β, dvs.

$$L(\gamma_i) = a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 \quad for \quad i = 1, 2, 3.$$

Vi starter med $L(\gamma_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} 6 = 2a_{11} + 1a_{12} \\ 2 = 1a_{11} + 1a_{12} \end{cases}$$

For at finde skalarerne trækker vi nu den anden ligning fra den første ligning, og får:

$$(6 - 2) = (2a_{11} - a_{11}) + (a_{12} - a_{12})$$

$$4 = a_{11} \Longrightarrow a_{11} = 4$$

$$a_{12} = 2 - a_{11} = 2 - 4 = -2$$

Vi kigger nu på $L(\gamma_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} 5 = 2a_{21} + 1a_{22} \\ 2 = 1a_{21} + 1a_{22} \end{cases}$$

For at finde skalarerne trækker vi nu igen den anden ligning fra den første ligning, og får:

$$(5 - 2) = (2a_{21} - a_{21}) + (a_{22} - a_{22})$$

$$3 = a_{21} \Longrightarrow a_{21} = 3$$

$$a_{22} = 2 - a_{21} = 2 - 3 = -1$$

Til sidst kigger vi på $L(\gamma_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{cases} 3 = 2a_{31} + 1a_{32} \\ 1 = 1a_{31} + 1a_{32} \end{cases}$$

$$(3 - 1) = (2a_{31} - a_{31}) + (a_{32} - a_{32})$$

$$2 = a_{31} \Longrightarrow a_{31} = 2$$

$$a_{32} = 1 - a_{31} = 1 - 2 = -1$$

Vi har altså at

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= 4 \\
a_{12} &= -2 \\
a_{21} &= 3 \\
a_{22} &= -1 \\
a_{31} &= 2 \\
a_{32} &= -1
\end{aligned}
$$

Vi kan nu repræsentere vores resultater på matrixformen ${}_{\beta}[L]_{\gamma}$:

$$
{}_{\beta}[L]_{\gamma} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Vi har nu bestemt afbildningsmatricen ${}_{\beta}[L]_{\gamma}$.

Opgave d)

Givet følgende matrix

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}
$$

Bestem matricens egenværdier og baser for de tilhørende egenrum. Kan matricen diagonaliseres? Hvis nej, forklar hvorfor ikke. Hvis ja, angiv en matrix $\mathbf{Q}$ og en diagonalmatrix Λ således at $\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \Lambda$.

Først skal vi finde egenværdierne ved at løse den karakteristiske ligning:

$$
det(A - \lambda I) = 0
$$

$$
det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0
$$

Vi udregner determinanten:

$$
-\lambda \cdot det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} - 0 + (-1) \cdot det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1-\lambda & 2 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{gathered}
-\lambda \cdot ((-1-\lambda) \cdot (2-\lambda)) \quad - \quad 1 \cdot (-(-1-\lambda)) \\
-\lambda \cdot (-1-\lambda)(2-\lambda) \quad - \quad 1 \cdot (1+\lambda) \\
\lambda \cdot (1+\lambda)(2-\lambda) \quad - \quad (1+\lambda) \\
(\lambda^2 + \lambda)(2-\lambda) \quad - \quad (1+\lambda) \\
2 \cdot \lambda^2 - \lambda^3 + 2 \cdot \lambda - \lambda^2 - 1 - \lambda \\
-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1
\end{gathered}
$$

Vi tester om $\lambda = 1$ er en egenværdi:

$$-1^3 + 1^2 + 1 - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

Vi har altså at $\lambda = 1$ er en egenværdi.

Vi bruger nu nedstigningssætningen til at finde resten af rødderne.

Vi bruger roden $\lambda = 1$:

$$a_3 = -1, \quad a_2 = -1, \quad a_1 = 1, \quad a_0 = -1$$

$$\begin{aligned} b_2 &= a_3 = -1 \\ b_1 &= a_2 + \lambda \cdot b_2 = -1 + 1 \cdot (-1) = -2 \\ b_0 &= a_1 + \lambda \cdot b_1 = 1 + 1 \cdot -2 = -1 \end{aligned}$$

Vi får altså andengradsligningen:

$$-\lambda^2 - 2\lambda - 1$$

Vi løser denne:

$$D = -2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4 - 4 = 0$$

$$\frac{2 \pm \sqrt{0}}{-2} = -1$$

Vi får altså endnu en egenværdi, $\lambda = -1$. Da vi nu kun får 1 egenværdi med multiplicitet 1 efter nedstigningen, må egenværdien $\lambda = 1$ have multiplicitet 2 for at vi rammer alle 3 reelle rødder.

Nu kan vi gå videre til at finde egenrummene. Disse vil fortælle os, om tricen kan diagonaliseres. Vi bestemmer et egenrum ved følgende formel:

$$(A - \lambda \cdot I)v = 0,$$

hvor I er identitetsmatricen.

Vi starter med $\lambda = -1$:

$(A - (-1)I)v = 0$:

$$(A + I)v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} v = 0$$

Vi ser at:

$$\begin{aligned} 2v_3 = 0 &\implies v_3 = 0 \\ v_1 + v_3 = 0 &\implies v_1 = 0 \end{aligned}$$

v_2 er en fri parameter.

Derfor er egenvektorerne til egenværdien $\lambda = -1$ skalarer af:

$$v_{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi går videre til $\lambda = 1$:

$(A - (1)I)v = 0$:

$$(A - I)v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} v = 0$$

Vi ser at:

$$-v_1 + v_3 = 0 \implies v_3 = v_1$$
$$-2v_2 + 2v_3 = 0 \implies v_2 = v_3 = v_1$$

Derfor er egenvektorerne til egenværdien $\lambda = 1$ skalarer af:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For at en matrix kan diagonaliseres, skal summen af dimensionerne af dens egenrum være lig med matricens dimension (her 3). Egenværdien $\lambda = 1$ har algebraisk multiplicitet 2, men geometrisk multiplicitet 1 (da dens egenrum er én-dimensionelt).

Dvs. da den gemetriske multiplicitet af egenværdien $\lambda = 1$ er mindre end dens algebraiske multiplicitet, kan vi ikke diagonalisere matricen. Dvs. den ikke har nok lineært uafhængige egenvektorer til at danne en basis for $\mathbb{R}^3$.

Opgave e)

Lad V betegne det reelle vektorrum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ bestående af 2×2 matricer med reelle koefficienter. Der vælges følgende ordnede basis for V:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Givet den lineære afbildning $M : V \to V$ defineret ved

$$M(A) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot A, \quad A \in V.$$

Beregn afbildningsmatricen ${}_\beta[M]_\beta$.

Vi finder afbildningen af hver basisvektor, dvs. $M(\beta_i)$, hvor $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Vi betegner de resulterende matricer med $R_{i,j}$.

Vi starter med $M(\beta_1)$:

$$M\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 0\\2 & 0\end{bmatrix}$$

Dvs. $(R_{1,1}=4,\quad R_{1,2}=0,\quad R_{2,1}=2,\quad R_{2,2}=0)$

$$\begin{bmatrix}4\\0\\2\\0\end{bmatrix}$$

Nu $M(\beta_2)$:

$$M\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 4\\0 & 2\end{bmatrix}$$

Dvs. $(R_{1,1}=0,\quad R_{1,2}=4,\quad R_{2,1}=0,\quad R_{2,2}=2)$

$$\begin{bmatrix}0\\4\\0\\2\end{bmatrix}$$

Nu $M(\beta_3)$:

$$M\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\3 & 0\end{bmatrix}$$

Dvs. $(R_{1,1}=6,\quad R_{1,2}=0,\quad R_{2,1}=3,\quad R_{2,2}=0)$

$$\begin{bmatrix}6\\0\\3\\0\end{bmatrix}$$

Nu $M(\beta_4)$:

$$M\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}4 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6\\0 & 3\end{bmatrix}$$

Dvs. $(R_{1,1}=0,\quad R_{1,2}=6,\quad R_{2,1}=0,\quad R_{2,2}=3)$

$$\begin{bmatrix}0\\6\\0\\3\end{bmatrix}$$

Afbildningsmatricen bliver derfor:

$$_\beta[M]_\beta = [\, M(\beta_1) \quad M(\beta_2) \quad M(\beta_3) \quad M(\beta_4)\,] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Beregn dimension af vektorrummene $ker(M)$ og $image(M)$.

Afbildningsmatricen $_\beta[M]_\beta$ har dimensionen 4×4 . For at finde dimensionen af kernen, reducerer vi den til en reduceret trappematrice:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$R4 - \frac{1}{2} \cdot R2, \quad R3 - \frac{1}{2} \cdot R1, \quad \frac{R1}{4}, \quad \frac{R2}{4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rangen af $_\beta[M]_\beta$ er altså 2.

Vi bruger nu dimensionsteoremet:

$$dim(ker(M)) + dim(image(M)) = dim(V) = 4$$

$dim(V) = 4$, da $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$

Dvs.:

$$4 = dim(ker(M)) + dim(image(M))$$

$$dim(ker(M)) = 4 - 2 = 2$$

Dvs. at også

$$dim(image(M)) = 2$$

Den lineære afbildning M afbilder det 4-dimensionale rum V ind i sig selv med en rang på 2. Derfor er kernen $ker(M)$ et 2-dimensionalt underrum af V, og billedet $image(M)$ er også et 2-dimensionalt underrum af V.