# Alle ugens test spørgsmål

## Uge 1: Komplekse tal

**<u>Spørgsmål 1:</u> (1)**

Givet to komplekse tal $w_1 = 4 + 6 \cdot I$ og $w_2 = 2 - 4 \cdot I$

Udregn længden af nedenstående kvotient.

$$\left|\frac{w_1}{w_2 + 1}\right|$$

**Svar:**

Længden af et komplekst tal udregnes således:

$$|z| = \sqrt{\left(Re(z)\right)^2 + \left(Im(z)\right)^2}$$

Svaret udregnes:

$$\left|\frac{w_1}{w_2 + 1}\right| = \left|\frac{4 + 6 \cdot I}{2 - 4 \cdot I + 1}\right| = \left|\frac{4 + 6 \cdot I}{3 - 4 \cdot I}\right| = \left|\frac{(4 + 6 \cdot I) \cdot (3 + 4 \cdot I)}{(3 - 4 \cdot I) \cdot (3 + 4 \cdot I)}\right| = \left|\frac{12 + 34 \cdot I + 24 \cdot I^2}{9 - 16 \cdot I^2}\right|$$

$$\left|\frac{-12 + 34 \cdot I}{25}\right| = \left|-\frac{12}{25} + \frac{34}{25} \cdot I\right| = \sqrt{\left(\frac{12}{25}\right)^2 + \left(\frac{34}{25}\right)^2} = \sqrt{\frac{12^2}{25^2} + \frac{34^2}{25^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{13}}{5}$$

**<u>Spørgsmål 2:</u> (2)**

Udregn absolutværdien af det komplekse tal.

$|2 + 3 \cdot I|$

**Svar:**

$$|z| = \sqrt{\left(Re(z)\right)^2 + \left(Im(z)\right)^2}$$

$$|2 + 3 \cdot I| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

**<u>Spørgsmål 3:</u> (3)**

Udregn nedenstående brøk mellem to komplekse tal, og angiv svaret på rektangulær form.

$$\frac{4-4\cdot I}{1-3\cdot I}$$

**Svar:**

Man skal forlænge med nævnerens konjugerede.

$$\frac{4-4\cdot I}{1-3\cdot I}=\frac{(4-4\cdot I)\cdot(1+3\cdot I)}{(1-3\cdot I)\cdot(1+3\cdot I)}=\frac{4+8\cdot I-12\cdot I^2}{1-9\cdot I^2}=\frac{16+8\cdot I}{10}=\frac{8+4\cdot I}{5}=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}\cdot I$$

**<u>Spørgsmål 4:</u> (4)**

Løs ligningen $(1+I)\cdot z=3$ , og angiv svaret på rektangulær form.

**Svar:**

$$(1+I)\cdot z=3\Leftrightarrow z=\frac{3}{1+I}=\frac{3\cdot(1-I)}{(1+I)\cdot(1-I)}=\frac{3-3\cdot I}{1-I^2}=\frac{3-3\cdot I}{2}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\cdot I$$

**<u>Spørgsmål 5:</u> (5)**

Reducer nedenstående potens af den imaginære enhed i:

$I^4$

**Svar:**

$$I^4=I^2\cdot I^2=-1\cdot(-1)=1$$

**<u>Spørgsmål 6:</u> (6)**

Konjuger tallet $3+5\cdot I$ , og angiv svaret på rektangulær form.

**Svar:**

Fortegnet ændres:

$$\overline{3+5\cdot I}=3-5\cdot I$$

**<u>Spørgsmål 7:</u> (7)**

Udregn produktet af de to komplekse tal, og angiv svaret på rektangulær form.

$(3\cdot I+3)\cdot(2-4\cdot I)$

**Svar:**

Parenteserne ganges sammen.

$$(3\cdot I+3)\cdot(2-4\cdot I)=6-12\cdot I+6\cdot I-12\cdot I^2=18-6\cdot I$$

**<u>Spørgsmål 8:</u> (8)**

Udregn summen af de to komplekse tal, og angiv svaret på rektangulær form.

$(3 \cdot I + 3) + (6 - 2 \cdot I)$

**Svar:**

Man kan helt simpelt ophæve parenteserne.

$$(3 \cdot I + 3) + (6 - 2 \cdot I) = 3 \cdot I + 3 + 6 - 2 \cdot I = 9 + I$$

**<u>Spørgsmål 9:</u> (9)**

Givet to komplekse tal $z_1 = 9 + 1 \cdot I$ og $z_2 = 5 - 3 \cdot I$

Udregn nedenstående differens af de to komplekse tal, og angiv svaret på rektangulær form.

$z_1 - z_2$

**Svar:**

$$z_1 - z_2 = (9 + 1 \cdot I) - (5 - 3 \cdot I) = 9 + I - 5 + 3 \cdot I = 4 + 4 \cdot I$$

**<u>Spørgsmål 10:</u> (10)**

Lad $z = 1 + 2 \cdot I$ være et komplekst tal.

Løs ligningen $|z|^2 \cdot w + \bar{z} = Re(z)$ , og angiv svaret på rektangulær form.

$w =$

**Svar:**

$|z|^2 = a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$\bar{z} = 1 - 2 \cdot I$

$Re(z) = 1$

$$|z|^2 \cdot w + \bar{z} = Re(z) \Leftrightarrow 5 \cdot w + 1 - 2 \cdot I = 1 \Leftrightarrow 5 \cdot w = 1 - (1 - 2 \cdot I)$$
$$\Leftrightarrow 5 \cdot w = 2 \cdot I \Leftrightarrow w = \frac{2 \cdot I}{5}$$

## Uge 2: Komplekse tal

**<u>Spørgsmål 1:</u> (11)**

Angiv værdien af *n* som gør nedenstående ligning sand:

$$\frac{9^6 \cdot \sqrt{9} \cdot 9^{-n}}{9^5} = 9^6$$

**Svar:**

Forkort brøken.

$$\frac{9^6 \cdot \sqrt{9} \cdot 9^{-n}}{9^5} = 9^6 \Leftrightarrow 9^6 \cdot \sqrt{9} \cdot 9^{-n} = 9^{11} \Leftrightarrow \sqrt{9} \cdot 9^{-n} = 9^5 \Leftrightarrow 9^{-n} = \frac{9^5}{\sqrt{9}} = \frac{9^5}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{5-\frac{1}{2}} = 9^{\frac{9}{2}}$$

$$\Leftrightarrow n = -\frac{9}{2}$$

**<u>Spørgsmål 2:</u> (12)**

Et komplekst tal *z* er givet ved nedenstående udtryk:

$$z = 5 \cdot \exp(-2 \cdot \ln(3) + 2 \cdot I)$$

Angiv nedenfor absolutværdien af tallet *z*:

$|z| =$

**Svar:**

Et tals eksponentielle form ser således ud:

$$z = |z| \cdot e^{iv}$$

Der foretages en omskrivning:

$$z = 5 \cdot \exp(-2 \cdot \ln(3) + 2 \cdot I) = 5 \cdot e^{-2 \cdot \ln(3)} \cdot e^{2 \cdot I}$$

$$5 \cdot e^{-2 \cdot \ln(3)} = 5 \cdot \left(e^{\ln(3)}\right)^{-2} = 5 \cdot 3^{-2} = 5 \cdot \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

**<u>Spørgsmål 3:</u> (13)**

To komplekse tal er givet ved deres eksponentielle form således: $z_1 = 5 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{4} \cdot I\right)$ og $z_2 = 3 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{3} \cdot I\right)$. Find den polære form af produktet $z_1 \cdot z_2$, og angiv svaret i de to bokse nedenfor:

$|z_1 \cdot z_2| =$

$Arg(z_1 \cdot z_2) =$

Angiv den rektangulære form af tallet:

$z_1 \cdot z_2 =$

**Svar:**

Brug reglerne:

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ og $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 15 \cdot \exp\left(\frac{7\pi}{12} \cdot I\right) = 15 \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{12} + I \cdot \sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

Her er der ikke nogen mere eksakt værdi af $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

**Spørgsmål 4:** **(14)**

Bestem følgende værdi af sinus:

$\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)$

**Svar:**

Her er det nødvendigt at kunne enhedscirklen i hovedet. Sinus aflæses på *y*-aksen.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Spørgsmål 5:** **(15)**

Nedenstående komplekse tal er givet ved deres polære koordinater, eksponentiel og rektangulær form, match de tal der er ens.

-- $5 \cdot \exp\left(I \cdot \frac{\pi}{3}\right)$ -- $\exp\left(I \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ -- $\sqrt{2} + I \cdot \sqrt{2}$

-- $-1$ -- 1+I

1. $\left(5, \frac{7}{3}\pi\right)$
2. $2 \cdot \exp\left(I \cdot \frac{\pi}{4}\right)$
3. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$
4. $(1, 5\ \pi)$
5. $I$

**Svar:**

Polære koordinater:

$z = (|z|, v)$ hvor $v$ er argumentet $v = \arg(z)$

Eksponentiel form:

$z = |z| \cdot e^{iv}$

Fra rektangulær form til polære koordinater:

$$z = 1 + I$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos(v) = \frac{a}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v = \frac{\pi}{4} \quad \text{eller} \quad v = -\frac{\pi}{4}$$

$$\sin(v) = \frac{b}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v = \frac{\pi}{4} \quad \text{eller} \quad v = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 1 + I = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Fra eksponentiel form til rektangulær form:

$e^{iv} = \cos(v) + i \cdot \sin\,(v)$

$$\exp\left(\frac{\pi}{2} \cdot I\right) = \cos\frac{\pi}{2} + I \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 0 + I \cdot 1 = I$$

Fra eksponentiel form til polære koordinater:

$$5 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{3} \cdot I\right) = \left(5, \frac{\pi}{3}\right) = \left(5, \frac{7\pi}{3}\right)$$

De andre udregnes:

$$\sqrt{2} + I \cdot \sqrt{2}$$

$$z = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos(v) = \frac{a}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v = \frac{\pi}{4} \quad \text{eller} \quad v = -\frac{\pi}{4}$$

$$sin(v) = \frac{b}{|z|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$v = \frac{\pi}{4} \quad \text{eller} \quad v = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2} + I \cdot \sqrt{2} = \left(2, \frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{4} \cdot I\right)$$

**<u>Spørgsmål 6:</u> (16)**

Et komplekst tal er givet på eksponentiel form $z = 6 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{3} \cdot I\right)$.

Angiv imaginærværdien af tallet *z*:

$Im(z) =$

**Svar:**

Tallet omskrives til rektangulær form:

$$e^{iv} = \cos(v) + I \cdot \sin(v) = 6 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + I \cdot \sin\frac{\pi}{3}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} + I \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 + 3\sqrt{3} \cdot I$$

$$Im(z) = 3\sqrt{3}$$

**<u>Spørgsmål 7:</u> (17)**

Et komplekst tals polære koordinater er givet ved $z = \left(3, \frac{\pi}{6}\right)$.

Angiv tallet på rektangulær form.

$z =$

**Svar:**

$$z = \left(3, \frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \exp\left(\frac{\pi}{6} \cdot I\right) = 3 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + I \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right) = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + I \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot I$$

**<u>Spørgsmål 8:</u> (18)**

Givet et komplekst tal $z = 4 \cdot \sqrt{3} - 4 \cdot I$.

Find absolutværdien af $|z|$ og hovedargumentet $Arg(z)$ for tallet z.

$|z| =$

$Arg(z) =$

**Svar:**

Hovedargumentet ligger i intervallet $[-\pi; \pi]$.

$$|z| = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{48 + 16} = \sqrt{64} = 8$$

$$cos(v) = \frac{a}{|z|} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$v = \frac{\pi}{6} \quad \text{eller} \quad v = -\frac{\pi}{6}$$

$$sin(v) = \frac{b}{|z|} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

$$v = -\frac{\pi}{6} \quad \text{eller} \quad v = \frac{7\pi}{6}$$

$$Arg(z) = -\frac{\pi}{6}$$

**<u>Spørgsmål 9:</u> (19)**

Marker de udsagn som er sande:

Tallet 2 er et komplekst tal

Det komplekse tal $z = 2 + 3 \cdot I$ , har imaginærdelen $Im(z) = 3 \cdot I$

Nulreglen gælder ikke for komplekse tal

Ligningen $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ har fire løsninger i intervallet $x \in [0,2\pi]$

Lad $a$ være et komplekst tal: Hvis $z_0$ er en løsning til den binome ligning $z^n = a$ , så er $\overline{z_0}$ (komplekst konjugeret $z_0$) også en løsning for alle værdier af $a$.

Lad $a$ være et reelt tal: Hvis $z_0$ er en løsning til den binome ligning $z^n = a$ , så er $\overline{z_0}$ (komplekst konjugeret $z_0$) også en løsning for alle værdier af $a$.

Ligningen $z^5 = 1$ har fem forskellige komplekse løsninger.

**Svar:**

Tallet 2 er et komplekst tal

Ligningen $\sin(2x) = \frac{2}{3}$ har fire løsninger i intervallet $x \in [0,2\pi]$

Lad $a$ være et reelt tal: Hvis $z_0$ er en løsning til den binome ligning $z^n = a$ , så er $\overline{z_0}$ (komplekst konjugeret $z_0$ også en løsning for alle værdier af $a$.

Ligningen $z^5 = 1$ har fem forskellige komplekse løsninger.

**<u>Spørgsmål 10:</u> (20)**

Følgende værdi af arcuscosinus, kan skrives som et rationelt tal *k*, multipliceret med $\pi$:

$\arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = k \cdot \pi$

Hvad er værdien af *k*?

**Svar:**

$$\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} = \frac{1}{6} \cdot \pi$$

$$k = \frac{1}{6}$$

## Uge 3: Komplekse tal

**<u>Spørgsmål 1:</u> (21)**

Lad *P* være et komplekst polynomium af en reel variabel med forskrift:

$$P(t) = (5 \cdot I - t) \cdot (2 + 6 \cdot I - t)$$

Bestem nedenstående differentialkvotient:

$P'(1) =$

**Svar:**

De to parenteser ganges sammen, og der udføres helt almindelig differentiation.

$$P(t) = (5 \cdot I - t) \cdot (2 + 6 \cdot I - t) = 10 \cdot I + 30 \cdot I^2 - 5 \cdot I \cdot t - 2t - 6 \cdot I \cdot t + t^2$$

$$= t^2 - 11 \cdot I \cdot t - 2t - 30 + 10 \cdot I$$

$$P'(t) = 2t - 11 \cdot I - 2$$

$$P'(1) = 2 \cdot 1 - 11 \cdot I - 2 = -11 \cdot I$$

**<u>Spørgsmål 2:</u> (22)**

Løs andengradsligningen:

$2z^2 - 8z + 16 = 0$

Angiv den løsning $z_0$ som har positiv imaginærværdi.

**Svar:**

Løses som en almindelig andengradsligning, men hvor man får en negativ diskriminant, som kan omskrives til et komplekst tal:

$$D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 64 - 128 = -64 = (8i)^2$$

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{(8i)^2}}{2 \cdot 2} = \frac{8 \pm 8i}{4} = 2 \pm 2i$$

$$z_0 = 2 + 2i$$

**<u>Spørgsmål 3:</u> (23)**

Den reelle funktion $f$ er givet ved forskriften:

$f(x) = x \cdot \sin(4x + 4)$

Bestem den afledede funktion:

$f'(x) =$

**Svar:**

Løses vha. produktreglen:

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$$

$$h(x) = \sin(4x + 4)$$

$h(x)$ differentieres som en sammensat funktion:

$$h'(x) = p'(q(x)) \cdot q'(x)$$

$$p(x) = \sin(x) \quad p'(x) = \cos(x)$$
$$q(x) = 4x + 4 \quad q'(x) = 4$$
$$h'(x) = \cos(4x + 4) \cdot 4$$

Det vil sige, at svaret er:

$$f'(x) = 1 \cdot \sin(4x + 4) + x \cdot 4 \cdot \cos(4x + 4)$$
$$\Leftrightarrow f'(x) = \sin(4x + 4) + 4x \cdot \cos(4x + 4)$$

**<u>Spørgsmål 4:</u> (24)**

En monoton funktion er givet ved:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

Bestem nedenstående differentialkvotient af den omvendte funktion $f^{-1}$:

$(f^{-1})'(10) =$

Vink: hvad bliver f(1)?

**Svar:**

$$f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 = 1 - 6 + 15 = 10$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 15 = 6$$

$$(f^{-1})'(10) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{6}$$

**<u>Spørgsmål 5:</u> (25)**

Lad $P(z)$ være et førstegradspolynomium med forskriften:

$P(z) = (4 - 2 \cdot I) \cdot z + 4$

Angiv nedenstående funktionsværdi på rektangulær form:

$P(5 \cdot I) =$

**Svar:**

$$P(5 \cdot I) = (4 - 2 \cdot I) \cdot 5 \cdot I + 4 = 20 \cdot I - 10 \cdot I^2 + 4 = 14 + 20 \cdot I$$

**<u>Spørgsmål 6:</u> (26)**

Lad *f* være en kompleks funktion af en reel variabel *t*.

$f(t) = I \cdot e^{(4+3 \cdot I) \cdot t} + t \cdot (3 - 2 \cdot I)$

Bestem nedenstående differentialkvotient:

$f'(0) =$

**Svar:**

$f(t)$ omskrives:

$$f(t) = I \cdot e^{(4+3\cdot I)\cdot t} + t \cdot (3 - 2 \cdot I) = I \cdot e^{(4+3\cdot I)\cdot t} + 3t - 2 \cdot I \cdot t$$

$f(t)$ differentieres led vist:

$$\left(I \cdot e^{(4+3\cdot I)\cdot t}\right)' = I \cdot e^{(4+3\cdot I)\cdot t} \cdot (4 + 3 \cdot I)$$

$$(3t - 2 \cdot I \cdot t)' = 3 - 2 \cdot I$$

$$f'(t) = I \cdot e^{(4+3\cdot I)\cdot t} \cdot (4 + 3 \cdot I) + 3 - 2 \cdot I$$

$f'(0)$ udregnes:

$$f'(0) = I \cdot e^{(4+3\cdot I)\cdot 0} \cdot (4 + 3 \cdot I) + 3 - 2 \cdot I = I \cdot (4 + 3 \cdot I) + 3 - 2 \cdot I$$
$$= 4 \cdot I + 3 \cdot I^2 + 3 - 2 \cdot I = 2 \cdot I$$

**<u>Spørgsmål 7:</u> (27)**

Lad $P(z)$ være et førstegradspolynomium med forskriften:

$P(z) = -4 \cdot I \cdot z$

En kompleks førstegradsligning er givet ved:

$P(z) = 16 + 24 \cdot I$

Angiv på rektangulær form løsningen til ligningen $z_0$:

$z_0 =$

**Svar:**

$$-4 \cdot I \cdot z = 16 + 24 \cdot I \Leftrightarrow z = \frac{16 + 24 \cdot I}{-4 \cdot I} = \frac{(16 + 24 \cdot I) \cdot 4 \cdot I}{-4 \cdot I \cdot 4 \cdot I} = \frac{64 \cdot I - 96}{-16 \cdot I^2}$$
$$= -\frac{96}{16} + \frac{64}{16} \cdot I = -6 + 4 \cdot I$$

**<u>Spørgsmål 8:</u> (28)**

Lad $a$ betegne et vilkårligt komplekst tal.

Lad $z^n = a$ være en binom ligning af grad $n$.

Hvilke af nedenstående udsagn er sande (Der er eventuelt flere korrekte svar)?

Lad $n = 4$: De 4 løsninger til den binome ligning udgør hjørnerne i et kvadrat.

Lad $n = 7$: Den binome ligning kunne have 2 forskellige reelle løsninger.

Hvis $z_0$ er en løsning til den binome ligning, er den konjugerede værdi af $z_0$ også altid en løsning.

Hvis $a$ er reel og $z_0$ er en løsning til den binome ligning, er den konjugerede værdi af $z_0$ også altid en løsning.

Lad $n = 3$: Hvis der findes en reel løsning til den binome ligning, så er de to øvrige løsninger hinandens komplekst konjugerede.

En binom ligning kan have 3 forskellige løsninger.

**Svar:**

Der er 3 sande udsagn:

Lad $n = 4$: De 4 løsninger til den binome ligning udgør hjørnerne i et kvadrat.

Hvis $a$ er reel og $z_0$ er en løsning til den binome ligning, er den konjugerede værdi af $z_0$ også altid en løsning.

Lad $n = 3$: Hvis der findes en reel løsning til den binome ligning, så er de to øvrige løsninger hinandens komplekst konjugerede.

**<u>Spørgsmål 9:</u> (29)**

Et polynomium har forskriften:

$P(z) = 3z^3 - 8z^2 - 13z - 12$

Det oplyses at $z_0 = 4$ er rod i $P(z)$.

Bestem et andengradspolynomium $Q(z) = az^2 + bz + c$ således $P(z) = (z - 4) \cdot Q(z)$.

Angiv nedenfor værdierne af $a$, $b$ og $c$.

$a =$

$b =$

$c =$

**Svar:**

Fra polynomiets forskrift har vi:

$$a_3 = 3$$

$$a_2 = -8$$

$$a_1 = -13$$

$$a_0 = -12$$

Dermed har vi:

$$b_2 = a_3 = 3$$

$$b_1 = a_2 + z_0 \cdot b_2 = -8 + 4 \cdot 3 = 4$$

$$b_0 = a_1 + z_0 \cdot b_1 = -13 + 4 \cdot 4 = 3$$

Det vil sige, at forskriften for $Q(z)$ er:

$$Q(z) = 3z^2 + 4z + 3$$

Altså er svarene:

$$a = 3, \quad b = 4 \quad \text{og} \quad c = 3$$

**<u>Spørgsmål 10:</u> (30)**

Et reelt polynomium af grad 2 er givet ved udtrykket:

$$P(z) = z^2 + az + b$$

Det oplyses at $z_1 = 8 + 8 \cdot I$ er rod i $P(z)$.

Angiv nedenfor værdierne af *a* og *b*:

$a =$

$b =$

**Svar:**

Man skal regne baglæns.

$$z = 8 \pm 8 \cdot I = \frac{16 \pm 16 \cdot I}{2} = \frac{16 \pm \sqrt{(16 \cdot I)^2}}{2}$$

$$b = -16$$

$$D = (-16)^2 - 4 \cdot 1 \cdot c = (16 \cdot I)^2 \Leftrightarrow 256 - 4c = -256 \Leftrightarrow 4c = 512 \Leftrightarrow c = 128$$

Man kan også udregne følgende:

$$\big(z - (8 + 8 \cdot I)\big) \cdot \big(z - (8 - 8 \cdot I)\big)$$

## Uge 4: Komplekse tal (Tema 1)

## Uge 5: Lineære ligninger og matricer

**<u>Spørgsmål 1:</u> (31)**

Løs nedenstående matrixligning:

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [12 \quad 9 \quad 5]$$

$x_1 =$

$x_2 =$

$x_3 =$

**Svar:**

Her står den ubekendte til venstre, og derfor er det nødvendigt at transponere matricerne:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Nu kan man opstille en totalmatrix og udføre GaussJordan-elimination:

$$T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 12 \\ 1 & 2 & 0 & 9 \\ 5 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \to trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 4 \quad \text{og} \quad x_3 = 2$$

**<u>Spørgsmål 2:</u> (32)**

Løsningsmængden til nogle lineære ligningssystemer er opskrevet på standardparameterform nedenfor. Sæt hak ud for de to standardparameterfremstillinger der angiver den samme løsningsmængde.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Svar:**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 3:</u> (33)**

Find differensen mellem nedenstående 2 matricer.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

**Svar:**

$$A - B = A + (-1) \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 4:</u> (34)**

En matrix er givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Find den transponerede matrix $A^T$.

**Svar:**

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 5:</u> (35)**

Et lineært ligningssystem består af 3 ligninger med 2 ubekendte:

$-x_1 + 8x_2 - 2 = 0$

$8x_1 + 5 = 8$

$x_1 = x_2 + 1$

Opskriv ligningssystemets koefficientmatrix $A$, når det oplyses at højresiden er givet ved:

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

**Svar:**

Først skal de ubekendte samles på venstre side af ligningerne og resten skal samles på højre side af ligningen:

$$-x_1 + 8x_2 = 2$$

$$8x_1 = 3$$

$$x_1 - x_2 = 1$$

Koefficientmatricen er:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 8 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 6:</u> (36)**

Givet nedenstående matrix *A* og søjlevektor *b*.

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

$b = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

Udregn matrix-vektorproduktet $A \cdot b$

**Svar:**

$$A \cdot b = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 7 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 + 1 - 28 \\ 5 + 3 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 7:</u> (37)**

En matrix er givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Find den inverse matrix $A^{-1}$.

**Svar:**

Metode 1:

$$A^{-1} = [A \quad E] = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -16 \end{bmatrix}$$

Metode 2:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det{(A)}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = 8 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{1}{2}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix} = -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -16 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 8:</u> (38)**

Bestem løsningen til nedenstående ligningssystem.

$-2x + 2y - 5z = -6$

$2x - y + 6z = 12$

$x - y + 3z = 4$

**Svar:**

$$T = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 & -6 \\ 2 & -1 & 6 & 12 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -5 & -7 \\ 2 & -1 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow trap(T) =$$

*Ligningen løses numerisk for T vha. CAS-værktøjet WordMat.*

$$fejlincorrectsyntax: Missing)6 \quad \vee \quad 3) \neq\neq (-7@9@4)\hat{}()$$

*Der blev fundet løsninger vha. numeriske metoder, men der findes muligvis flere.*

**<u>Spørgsmål 9:</u> (39)**

Find rangen af matricen A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Svar:**

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rangen af matricen er lig antallet af ledende 1-taller i *trap(T)*, hvilket betyder at:

$$\rho(A) = 3$$

**<u>Spørgsmål 10:</u> (40)**

Find produktet af nedenstående 2 matricer.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 2 & i \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

**Svar:**

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & i \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot i + 1 \cdot 0 \\ -i \cdot 2 + i \cdot 2 & -i \cdot i + i \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \cdot I \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## Uge 6: Determinanter og vektorer

**<u>Spørgsmål 1:</u> (41)**

Givet tre geometriske vektorer $\vec{a}, \vec{b}$ og $\vec{c}$.

Vektorernes koordinater med hensyn til standardbasis er angivet nedenfor:

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}$ og $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ x \end{bmatrix}$

Bestem *x* så de tre vektorer bliver lineært afhængige.

**Svar:**

Man skal finde den *x*-værdi, hvor determinanten bliver lig 0.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \\ 0 & -7 & x \end{bmatrix} = 7 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -7 & x \end{bmatrix} = -7 \cdot (5 \cdot x - (-7) \cdot 4)$$

$$-7 \cdot (5 \cdot x - (-7) \cdot 4) = 0 \Leftrightarrow -35x - 196 = 0 \Leftrightarrow -35x = 196 \Leftrightarrow x = -\frac{196}{35} = -\frac{28}{5}$$

**<u>Spørgsmål 2:</u> (42)**

En geometrisk vektor $\vec{b}$ kan skrives som en linearkombination af vektorerne $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$:

$\vec{b} = k_1 \cdot \vec{u} + k_2 \cdot \vec{v} + k_3 \cdot \vec{w}$

De 4 vektorer er med hensyn til standardbasen givet ved:

$\vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bestem konstanterne $k_1$, $k_2$ og $k_3$.

**Svar:**

$$\begin{bmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = k_1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hvis man ganger konstanterne sammen med vektorerne får man et lineært ligningssystem af 3 ligninger med 3 ubekendte:

$$2k_1 - 2k_2 + k_3 = 6$$

$$-k_2 + k_3 = -1$$

$$k_3 = 2$$

$$T = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Det vil sige at:

$$k_1 = 5, \qquad k_2 = 3 \quad \text{og} \quad k_3 = 2$$

**<u>Spørgsmål 3:</u> (43)**

Lad *A* være en matrix af typen $n\ x\ n$.

Det oplyses at $trap(A) = E$ hvor *E* er en enhedsmatrix.

Hvilke påstande er sande?

(Der er flere rigtige svar)

$$rang(A) < n$$

*A* er singulær

$$det(A) = 0$$

$$rang(A) = n$$

*A* er ikke invertibel

$$det(A) \neq 0$$

Det homogene ligningssystem som har *A* som koefficientmatrix, har kun en løsning.

*A* er invertibel

*A* er regulær

**Svar:**

$$rang(A) = n$$

$$det(A) \neq 0$$

Det homogene ligningssystem som har *A* som koefficientmatrix, har kun en løsning.

*A* er invertibel

*A* er regulær

**<u>Spørgsmål 4:</u> (44)**

To geometriske vektorer i rummet $\vec{a}$ og $\vec{b}$ , har koordinaterne med hensyn til standardbasen:

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

a) Find skalarproduktet:

$\vec{a} \cdot \vec{b} =$

b) Find længden af vektor $\vec{b}$:

$|\vec{b}| =$

c) Find projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$:

$proj(\vec{a}, \vec{b}) =$

**Svar:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 10 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 8 \cdot (-1) = 10 + 2 - 8 = 4$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}$$

$$proj(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{4}{\sqrt{6}^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{4}{6} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 5:</u> (45)**

To matricer *A* og *B* er givet ved:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

Find determinanten af produktet af de to matricer $A \cdot B$:

$\det(A \cdot B) =$

**Svar:**

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 5 = 2 + 10 = 12$$

**<u>Spørgsmål 6:</u> (46)**

Vi betragter vektorer i rummet afsat ud fra Origo.

Nedenstående 3 vektorer, udtrykt ved deres koordinater med hensyn til standardbasis, udspænder en plan i rummet som går gennem Origo.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ , $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -15 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$

En basis for vektorerne der ligger i denne plan er givet ved: $b = (\vec{u},\ \vec{v})$

Angiv nedenfor koordinaterne for $\vec{u}$ med hensyn til basis *b*:

$\vec{u}_b =$

Angiv nedenfor koordinaterne for $\vec{w}$ med hensyn til basis *b*:

$\vec{w}_b =$

**Svar:**

$$k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 1 \quad \text{og} \quad k_2 = 0$$

$$\vec{u}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -15 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = 1 \quad \text{og} \quad k_2 = 4$$

$$\vec{w}_b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 7:</u> (47)**

En matrix *A* er givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Angiv de 4 nedenstående determinanter:

$\det(A) =$

$\det(A^3) =$

$\det(A^T) =$

$\det(A^{-1}) =$

**Svar:**

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ -1 & -4 & -3 \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} = -1 \cdot (0 \cdot (-3) - 3 \cdot 3) = -1 \cdot (-9) = 9$$

$$\det(A^3) = 9^3 = 81 \cdot 9 = 729$$

$$\det(A^T) = \det(A) = 9$$

$$\det(A^{-1}) = 9^{-1} = \frac{1}{9}$$

**<u>Spørgsmål 8:</u> (48)**

Givet en 4x4 matrix $A$:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & 12 \\ 0 & -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Angiv snitmatricen $\hat{A}_{23}$:

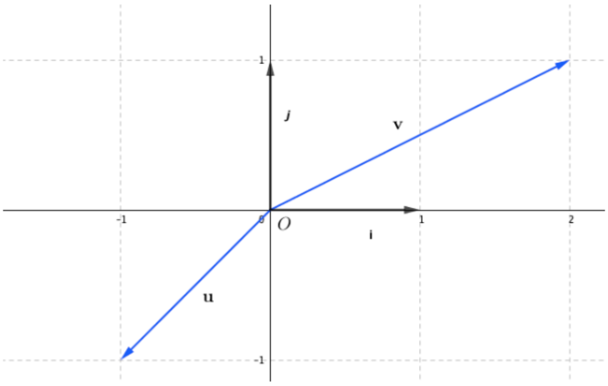
**Svar:**

Man opløser 2. række og 3. søjle.

$$\hat{A}_{23} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 12 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 9:</u> (49)**

Betragt nedenstående 4 geometrisk vektorer.




Lad en stedvektor $\overrightarrow{OP}$ ende i det punkt, som i det givne koordinatsystem har koordinaterne (3,1).

a) Angiv nedenfor koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{OP}$ med hensyn til basis $(i, j)$.

b) Angiv nedenfor koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{OP}$ med hensyn til basis $(u, v)$ (det er den basis der er angivet med blå pile på figuren).

**Svar:**

Koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{OP}$ med hensyn til standardbasis er:

$$(3{,}1)$$

Koordinaterne for vektoren $\overrightarrow{OP}$ med hensyn til basis $(u, v)$ er:

$$k_1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + k_2 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-k_1 + 2k_2 = 3 \Leftrightarrow k_1 = 2k_2 - 3$$

$$-k_1 + k_2 = 1 \Leftrightarrow k_2 = 1 + k_1 \Leftrightarrow k_2 = 1 + 2k_2 - 3 \Leftrightarrow k_2 = 2$$

$$k_1 = 2k_2 - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

$$(1{,}2)$$

<u>**Spørgsmål 10:**</u> **(50)**

Find determinanten af nedenstående matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$\det(A) =$

**Svar:**

Jeg opløser efter 2. række:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} = -1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= -1 \cdot (3 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1) + 2 \cdot (3 \cdot (-1) - 1 \cdot 3) = -1 \cdot (-9 + 1) + 2 \cdot (-3 - 3)$$

$$= 8 - 12 = -4$$

## Uge 7: Vektorrum (Tema 2)

## Uge 8: Lineære afbildninger

<u>**Spørgsmål 1:**</u> **(51)**

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har en afbildningsmatrix med hensyn til standardbasis givet ved:

$eFe = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Match vektorerne med udsagnene.

$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

1. Tilhører hverken kernen eller billedrummet for *f*.

2. Tilhører kernen for *f*.

3. Tilhører billedrummet for *f*.

**Svar:**

En vektor tilhører kernen, hvis vektoren og matricens prikprodukt giver 0-vektoren. Det er højst sandsynligt den vektor med flere negative tal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \\ 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 + 3 \\ -3 - 2 + 5 \\ -6 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tilhører kernen for } f$$

Den tredje vektor tilhører billedrummet, da den følger betingelsen for tredje søjle i afbildningsmatricen, hvor 3. koordinaten er dobbelt så stor som 1. koordinaten, det samme gælder for vektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ tilhører billedrummet for } f$$

Dermed betyder, at det er den anden vektor, der hverken tilhører kernen eller billedrummet.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ tilhører hverken kernen eller billedrummet for } f$$

**<u>Spørgsmål 2:</u> (52)**

Lad *V* være et vektorrum med basis $(b_1, b_2, \ldots, b_6)$, og lad *W* være et vektorrum med basis $(c_1, c_2, \ldots, c_8)$.

En lineær afbildning $f: V \to W$ har med hensyn til ovenstående baser afbildningsmatricen *F*.

Det oplyses at rangen af *F* er 2.

$\dim(V) =$

$\dim(f(V)) =$

Angiv nedenfor antallet af vektorer i en basis for kernen til $f$.

**Svar:**

Da $V$ har en basis bestående af 6 basisvektorer betyder det at:

$$\dim(V) = 6$$

Da dimensionen af billedrummet er lig rangen af afbildningsmatricen betyder det at:

$$\dim(f(V)) = \rho(F) = 2$$

Antallet af vektorer i en basis for kernen til $f$ bestemmes vha. dimensionssætningen:

$$dim(V) = \dim(kerf)) + \dim\big(f(V)\big)$$

$$\Leftrightarrow \dim(\text{ker }(f)) = \dim(V) - \dim\big(f(V)\big) = 6 - 2 = 4$$

**<u>Spørgsmål 3:</u> (53)**

En lineær afbildning mellem polynomiumsrum $f: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ er givet ved:

$$f(p(x)) = 3 \cdot p(1) - x^2 \cdot p(0) + (x-1) \cdot p'(1)$$

Angiv afbildningsmatricen med hensyn til monomiebasen $(1, x, x^2)$ :

Svaret indskrives som en matrix.

$mFm =$

**Svar:**

Afbildningsmatricens søjler er billederne af basisvektorerne. Først indsættes $p(x) = 1$:

$$p(1) = 1, \quad p(0) = 1, \quad p'(1) = 0$$

$$f(p(x)) = 3 \cdot 1 - x^2 \cdot 1 + (x-1) \cdot 0 = 3 - x^2$$

Det vil sige, at det første basisvektor-billede mht. monomiebasen er: $< 3{,}0,-1 >$

Nu indsættes $p(x) = x$:

$$p(1) = 1, \quad p(0) = 0, \quad p'(1) = 1$$

$$f(p(x)) = 3 \cdot 1 - x^2 \cdot 0 + (x-1) \cdot 1 = 3 + x - 1 = 2 + x$$

Det vil sige, at det andet basisvektor-billede mht. monomiebasen er: $< 2{,}1{,}0 >$

Til sidst indsættes $p(x) = x^2$:

$$p(1) = 1, \quad p(0) = 0, \quad p'(1) = 2$$

$$f(p(x)) = 3 \cdot 1 - x^2 \cdot 0 + (x-1) \cdot 2 = 3 + 2x - 2 = 1 + 2x$$

Det vil sige, at det sidste basisvektor-billede mht. monomiebasen er: $< 1{,}2{,}0 >$

Altså er afbildningsmatricen med hensyn til monomiebasen $(1, x, x^2)$:

$$mFm = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 4:</u> (54)**

Lad $v_1$ og $v_2$ være 2 forskellige vektorer i et n-dimensionelt vektorrum *V*.

Om en lineær afbildning $f: V \rightarrow V$ vides følgende:

$$f(v_1) = f(v_2)$$

Hvilke af nedenstående udsagn er sande?

Lad *F* betegne en afbildningsmatrix for *f*: Determinanten for *F* er forskellig fra nul.

Afbildningsmatricen for *f* er kvadratisk.

Billedrummet for *f* er hele *V*.

Hvis dim $(V)$ er ulige, kan billedrum og kernen have samme dimension.

Kernen for $f$ består kun af nulvektoren.

$$f(v_1 - v_2) = 0$$

Hvis ligningen $f(x) = b$ for et $b \in V$ har en løsning, så har den altid mere end en løsning.

**Svar:**

Afbildningsmatricen for *f* er kvadratisk.

$$f(v_1 - v_2) = 0$$

Hvis ligningen $f(x) = b$ for et $b \in V$ har en løsning, så har den altid mere end en løsning.

**<u>Spørgsmål 5:</u> (55)**

En lineær afbildning *f* mellem to vektorrum *V* og *W* udstyret med baser *a* og *c*, har afbildningsmatricen:

$$cFa = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

En vektor $x \in V$ har med hensyn til basis *a* koordinaterne:

$$a^x = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Angiv koordinaterne for vektoren $f(x)$ med hensyn til basis *c*:

Løsningen indskrives som vektor.

$cf(x) =$

**Svar:**

$$cf(x) = cFa \cdot a^x = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 6 \cdot 4 \\ 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \\ -1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 24 \\ 20 + 12 \\ -5 - 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 32 \\ -13 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 6:</u> (56)**

Afgør hvilke af nedenstående afbildninger der er lineære.

$f_1$: $\mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}$, $f_1\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$ (Denne afbildning kaldes sporet af matricen)

$f_2$: $V_g^2 \to \mathbb{R}$, (Hvor $V_g^2$ er mængden af geometriske vektorer i planen), $\mathrm{f}_2(\mathrm{v}) = |v|$.

$f_3$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = 2x + 3$

$f_4$: $P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, $f_4(p(x)) = x \cdot p'(x) + p(1) + x$

$f_5$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f_5\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$

**Svar:**

Følgende er lineære:

$$f_1 \quad \text{og} \quad f_5$$

**<u>Spørgsmål 7:</u> (57)**

En lineær afbildning $f$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, har afbildningsmatricen:

$$eFe = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En vektor $b \in \mathbb{R}^3$ har med hensyn til standardbasis koordinaterne:

$$e^b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Angiv koordinaterne med hensyn til standardbasis for vektoren *x* i ligningen $f(x) = b$:

Løsningen indskrives som en vektor.

$e^x =$

**Svar:**

Afbildningsmatricen skal prikkes sammen med en vektor for at give $e^x$. Altså ses det, at dette vil give et lineært ligningssystem, hvormed man kan opstille en totalmatrix.

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \to trap(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vektoren *x* i *e*-koordinater kan nu aflæses i trappematricen:

$$e^x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 8:</u> (58)**

En basis for $\mathbb{R}^2$ er givet ved $a = (a_1, a_2)$ hvor:

$a_1 = (1, -1)$ og $a_2 = (0,1)$

Om en lineær afbildning $f$: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vides:

$f(a_1) = -3 \cdot a_1$

$f(a_2) = 8 \cdot a_2$

Angiv nedenfor afbildningsmatricen for *f* men hensyn til *e*-standardbasen for $\mathbb{R}^2$.

**Svar:**

Man skal benytte følgende formel:

$$eFe = eMa \cdot aFa \cdot aMe$$

Hvoraf:

$$eMa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$aFa = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$aMe = (eMa)^{-1} = \frac{1}{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricerne ganges sammen:

$$eFe = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 9:</u> (59)**

Lad en basis *a* for $\mathbb{R}^2$ være givet ved $a = (a_1, a_2)$:

$a_1 = (4,5)$

$a_2 = (0,3)$

Angiv nedenfor de to basisskifte matricer $eMa$ og $aMe$ der skifter mellem *e*-standardbasis og *a*-basis.

$eMa =$

$aMe =$

**Svar:**

${}_eM_a$ er $a$-vektorernes $e$-koordinater. Denne er givet direkte i angivelsen af vektorerne til $a$-basis, og matricen er derfor som følgende:

$$eMa = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

${}_aM_e$ er den inverse af denne:

$$aMe = (eMa)^{-1} = \frac{1}{\det\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

**<u>Spørgsmål 10:</u> (60)**

Om en lineær afbildning $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vides:

$f(v_1 + v_2) = (10,2)$

$f(v_1 - v_2) = (0,10)$

Angiv nedenfor værdierne af vektorerne $f(v_1)$ og $f(v_2)$:

**Svar:**

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = (10,2)$$
$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = (0,10)$$

$$v_1 + v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - v_2$$
$$v_1 - v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - 2v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$$
$$v_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - v_2 = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Svaret er altså:

$$f(v_1) = (5,6)$$
$$f(v_2) = (5,-4)$$

## Uge 9: Differentialligninger (Tema 3)

## Uge 10: Egenværdi-problemet

**Spørgsmål 1:**

En matrix $A$ er givet ved:

$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

Find de to egenværdier $\lambda_1$ og $\lambda_2$ for matrix $A$ (vi antager at $\lambda_1 \leq \lambda_2$).

**Svar:**

Først bestemmes det karakteristiske polynomium:

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} \\ 6 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

$$D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$$

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 6}{2} = 1 \pm 3 = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 4$$

**Spørgsmål 2:**

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har mht. standardbasis, afbildningsmatricen $A$:

$A = \begin{bmatrix} -27 & 8 \\ -112 & 33 \end{bmatrix}$

Desuden oplyses at $\lambda = 5$ er egenværdi for $f$:

Angiv en egentlig egenvektor hørende til denne egenværdi:

$v =$

**Svar:**

$$\begin{bmatrix} -27-5 & 8 & 0 \\ -112 & 33-5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -32 & 8 & 0 \\ -112 & 28 & 0 \end{bmatrix} \to trap = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = \frac{1}{4} \cdot v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

**Spørgsmål 3:**

En 3x3 matrix $A$ er givet ved:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Angiv nedenfor koefficienterne til det karakteristiske polynomium *p*:

$p(\lambda) = -\lambda^3 + a \cdot \lambda^2 + b \cdot \lambda + c$

$a =$

$b =$

$c =$

**Svar:**

$$\det\begin{bmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & 2-\lambda & 0 \\ -4 & 0 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(2-\lambda)(6-\lambda) = (\lambda^2 - 7\lambda + 10)(6-\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda^2 - 42\lambda - 10\lambda + 60 = -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 52\lambda + 60$$

$$a = 13, \;\; b = -52 \;\; \text{og} \;\; c = 60$$

**Spørgsmål 4:**

En matrix *A* er givet nedenfor:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Hvilken er de 2 nedenstående matricer *B* og *C* er similær med *A*?

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 8 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**Svar:**

Her skal man sammenligne matricernes diagonaler. Hvis summen af tallene i diagonalen giver det samme, så er matricerne similære. Det vil sige, at *C* er similær med *A*, da de begge har summen 12 i diagonalen.

**Spørgsmål 5:**

Om en lineær afbildning $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ oplyses følgende:

$f(v_1) = v_2$ og $f(v_2) = 4 \cdot v_1$

Marker nedenfor den vektor som er en egenvektor for *f*.

$4 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$

$4 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2$

Angiv den tilhørende egenværdi nedenfor:

$\lambda =$

**Svar:**

Først opstilles en matrix med vektorernes billeder:

$$[f(v_1)\ \ f(v_2)] = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

De to vektorer ganges enkeltvist med matricen, og man undersøger, om der findes et tal, $\lambda$, der kan ganges med egenvektoren således at: $f(v) = \lambda \cdot v$. En anden måde at sige det på: givet en nxn matrix *A* findes der $\lambda$ og *v* således at: $A \cdot v = \lambda \cdot v$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Der undersøges for den anden vektor:

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dette er altså en egenvektor med den tilhørende egenværdi $\lambda = 2$

**Spørgsmål 6:**

Lad *A* være en vilkårlig singulær 2x2 matrix.

Hvilke af nedenstående påstande er sande?

- *A* er similær med en invertibel matrix.
- En af egenværdierne for *A* er lig med nul.
- Det homogene lineære ligningssystem som har *A* som koefficientmatrix har kun en løsning.
- Determinanten af *A* er lig nul $(\det(A) = 0)$.

**Svar:**

- En af egenværdierne for *A* er lig med nul.
- Determinanten af *A* er lig nul $(\det(A) = 0)$.

**Spørgsmål 7:**

Om en kvadratisk matrix oplyses at den har 3 forskellige egenværdier $(\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3)$ og en karakterligning som er givet ved:

$$\lambda^8 \cdot (\lambda - 7)^4 \cdot (\lambda + 7)^6 = 0$$

Angiv nedenfor egenværdierne samt deres algebraiske multipliciteter (am).

$\lambda_1 =$ og $am(\lambda_1) =$

$\lambda_2 =$ og $am(\lambda_2) =$

$\lambda_3 =$ og $am(\lambda_3) =$

**Svar:**

Man bruger nul-reglen og potensen angiver algebraisk multiplicitet:

$\lambda_1 = -7$ og $am(\lambda_1) = 6$

$\lambda_2 = 0$ og $am(\lambda_2) = 8$

$\lambda_3 = 7$ og $am(\lambda_3) = 4$

**Spørgsmål 8:**

En lineær afbildning $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har mht. Standardbasis, afbildningsmatricen *A*:

$A = \begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 18 & -4 \end{bmatrix}$

Desuden at nedenstående vektorer er egenvektorer for *f*:

$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ og $v_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$

Lad $v_1$ og $v_2$ være første og anden søjle i en matrix *V*.

Angiv en diagonalmatrix *D* således: $V^{-1} \cdot A \cdot V = D$

$D =$

**Svar:**

Diagonalmatricen har egenværdierne i diagonalen, derfor findes egenværdierne ved at gange de to vektorer på *A*:

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 18 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33-27 \\ 54-36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 11 & -3 \\ 18 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110-60 \\ 180-80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix} = 5 \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \lambda_2 = 5$$

Diagonalmatricen er dermed:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

**Spørgsmål 9:**

Givet en matrix *A* og en diagonalmatrix *D*:

$A = \begin{bmatrix} 7 & -10 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

Angiv en invertibel matrix *V* således: $V^{-1} \cdot A \cdot V = D$

$V =$

**Svar:**

Søjlerne i $V$ består af egenvektorerne, som findes ved at trække egenværdierne fra i diagonalen i $A$, og derefter udføre GaussJordan-elimination. Egenværdierne kan aflæses i diagonalmatricen $D$.

$\lambda_1 = 7$ og $\lambda_2 = 9$

$$\begin{bmatrix} 7-7 & -10 \\ 0 & 9-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7-9 & -10 \\ 0 & 9-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = -5x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det vil sige, at den invertible matrix $V$ er:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Spørgsmål 10:**

Lad $C^\infty(\mathbb{R})$ betegne mængden af glatte funktioner.

Vi betragter den lineære afbildning $f: C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, som er givet ved:

$f(x(t)) = x''(t)$

Match nedenstående egenfunktioner med tilhørende egenværdi?

$$\exp(2x), \quad \exp(-x), \quad \exp(2i \cdot x), \quad x^4, \quad 5x+1, \quad \cos(x)$$

1. 4
2. Er ikke egenfunktion for $f$
3. -4
4. 1
5. 0
6. -1

**Svar:**

Hver af funktionerne differentieres to gange:

$$(\exp(2x))' = 2 \cdot \exp(2x) \Longrightarrow (2 \cdot \exp(2x))' = 4 \cdot \exp(2x) \Leftrightarrow \lambda = 4$$

$$(\exp(-x))' = \exp(-x) \Longrightarrow (\exp(-x))' = \exp(-x) \Leftrightarrow \lambda = 1$$

$$(\exp(2i \cdot x))' = 2i \cdot \exp(2i \cdot x) \Longrightarrow (2i \cdot \exp(2i \cdot x))' = -4 \cdot \exp(2i \cdot x) \Leftrightarrow \lambda = -4$$

$$(x^4)' = 4x^3 \Longrightarrow (4x^3)' = 12x^2 \Leftrightarrow \text{er ikke en egenfunktion}$$
$$(5x+1)' = 5 \Longrightarrow (5)' = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$
$$(\cos(x))' = -\sin(x) \Longrightarrow (-\sin(x))' = -\cos(x) \Leftrightarrow \lambda = -1$$

## Uge 11: Symmetriske matricer

**Spørgsmål 1:**

Lad $v_1 = (9,1,-2,0)$ og $v_2 = (-1,2,5,12)$ være to vektorer i $\mathbb{R}^4$.

Angiv skalarproduktet af de to vektorer:

$v_1 \cdot v_2 =$

**Svar:**

$$v_1 \cdot v_2 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 12 \end{bmatrix} = 9 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 + 0 \cdot 12 = -9 + 2 - 10 = -17$$

**Spørgsmål 2:**

Lad $A$ være en symmetrisk matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & a & 8 \\ d & 2 & b & 6 \\ 4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 6 & c & 4 \end{bmatrix}$$

Angiv nedenfor værdierne af konstanterne $a$, $b$, $c$ og $d$:

**Svar:**

I en symmetrisk matrix er diagonalen et spejl.

$$a = 4, \qquad b = 2, \qquad c = 6, \qquad d = 6$$

**Spørgsmål 3:**

Lad $v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix}$ og $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ være to ortonormale vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Bestem den ukendte vektor $v_3$ i nedenstående krydsprodukt

$v_1 \times v_3 = v_2$

**Svar:**

$$v_1 \times v_3 = v_2 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \det \begin{bmatrix} 0 & x_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & x_3 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & x_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & x_1 \end{bmatrix} \\ \det \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & x_1 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \cdot x_3 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_3 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 - 0 \cdot x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Man har altså tre ligninger med tre ubekendte:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_3 = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{og} \quad x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

Altså ser $v_3$ således ud:

$$v_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

(Det er det rigtige svar, men testen vil ikke acceptere det).

**Spørgsmål 4:**

Lad $Q$ betegne en ortogonal nxn matrix.

Hvilke af nedenstående matricer er ortogonale?

- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$
- $Q + Q$
- $Q \cdot Q^T$

- $Q^2$

**Svar:**

- $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
- $Q \cdot Q^T$
- $Q^2$

**Spørgsmål 5:**

Lad $v_1 = (-5,4,27,1)$, $v_2 = (5,0,1,-1)$ og $v_3 = (-1,1,-1,1)$ være tre vektorer i $\mathbb{R}^4$.

Bestem længden af $v_2 + v_3$:

$|v_2 + v_3| =$

Bestem projektionen af vektor $v_1$ på $v_2$:

$proj(v_1, v_2) =$

**Svar:**

Længden bestemmes:

$$v_2 + v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$|v_2 + v_3| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

Herefter udregnes projektionen:

$$proj(v_1, v_2) = \frac{v_1 \cdot v_2}{|v_2|^2} \cdot v_2 = \frac{\begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ 27 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}{\sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}^2} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{27} \\ 0 \\ \frac{1}{27} \\ -\frac{1}{27} \end{bmatrix}$$

**Spørgsmål 6:**

Givet en symmetrisk matrix *A* og en diagonalmatrix *D*:

$A = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$ og $D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}$

Angiv en ortogonal matrix $Q$ således: $Q^T \cdot A \cdot Q = D$

**Svar:**

Søjlerne i den ortogonale matrix $Q$ består af egenvektorerne, og de skal derfor findes:

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \to trap = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-\frac{5}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1-\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \to trap = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad x_1 = -\sqrt{3} x_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det vil sige, at den ortogonale matrix er:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Spørgsmål 7:**

Lad $u_1$ og $u_2$ være to vektorer i $\mathbb{R}^4$.

$u_1 = (6,0,1,1), \;\; u_2 = (1,1,0,4)$

Angiv nedenfor en egentlig vektor *v* som både er ortogonal på $u_1$ og $u_2$.

**Svar:**

Hvis vektorer er ortogonale, skal deres prikprodukt være lig nul.

$$u_1 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6x_1 + x_3 + x_4 = 0$$

$$u_2 \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 4x_4 = 0$$

Man kan nu opstille en totalmatrix med de to ligninger (bemærk at de to rækker består af de to vektorer):

$$\begin{bmatrix}6 & 0 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 4 & 0\end{bmatrix} \rightarrow trap = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0\\0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{23}{6} & 0\end{bmatrix} \quad \begin{matrix}x_1 = -\frac{1}{6}x_3 - \frac{1}{6}x_4\\x_2 = \frac{1}{6}x_3 - \frac{23}{6}x_4\end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\\\frac{1}{6}\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\\-\frac{23}{6}\\0\\1\end{bmatrix}$$

Nu kan man bare vælge én af de to vektorer.

**Spørgsmål 8:**

Lad *A* være en symmetrisk 2x2 matrix.

Det oplyses at for to egentlige enhedsvektorer $v_1$ og $v_2$ gælder følgende:

$A \cdot v_1 = 9 \cdot v_1$ og $A \cdot v_2 = -v_2$

Hvilket tal kan nedenstående skalarprodukt reduceres til:

$(6 \cdot v_1 - 7 \cdot v_2) \cdot (A \cdot v_1 - A \cdot v_2) =$

**Svar:**

Ud fra de to enhedsvektorer får man at vide, at *A* i forhold til $v_1$ er 9, og at *A* ift. $v_2$ er -1. Dermed kan man udregne skalarproduktet:

$$\begin{bmatrix}6\\-7\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}9\\-(-1)\end{bmatrix} = 6 \cdot 9 - 7 \cdot 1 = 54 - 7 = 47$$

**Spørgsmål 9:**

Lad *v* være vektoren

$v = (5,3)$

Lad *Q* være nedenstående ortogonale matrix:

$$Q = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}$$

Desuden er der givet en diagonalmatrix:

$$\Lambda = \begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 4\end{bmatrix}$$

Bestem nedenstående vektor:

$Q \cdot \Lambda \cdot Q^T \cdot v =$

**Svar:**

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q \cdot \Lambda \cdot Q^T \cdot v = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Hurtig: byt om på tallene i diagonalen i Λ og gang med *v*.

**Spørgsmål 10:**

Lad $v_1 = (2,2,1)$ og $v_2 = (5,3,0)$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$.

Hvilke af nedenstående vektorer ligger i det ortogonale komplement til $span(v_1, v_2)$?

- $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}$

**Svar:**

Vi skal løse:

$x \cdot v_1 = 0 \quad \text{og} \quad x \cdot v_2 = 0$

Vi opstiller en totalmatrix, hvor rækkerne består af de to vektorer, og udfører GaussJordan-elimination:

$$T = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow trap(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = \frac{3}{4} x_3 \\ x_2 = -\frac{5}{4} x_3 \end{matrix}$$

Det ortogonale komplement er:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{5}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Det vil sige, at svaret er $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$, da man får denne vektor for $t = -4$. Man kan også hurtigt se det på fortegnene.

## Uge 12: Differentialligninger (Tema 4)

## Uge 13: 2. ordens differentialligninger, repetition

**Spørgsmål 1:**

Givet nedenstående homogene andenordens differentialligning:

$x''(t) - 9 \cdot x'(t) + 20 \cdot x(t) = 0$

Den fuldstændige reelle løsning er på formen:

$x(t) = k_1 \cdot e^{a \cdot t} + k_2 \cdot e^{b \cdot t}$

Angiv konstanterne *a* og *b* når det oplyses $a < b$.

**Svar:**

Man opstiller karakterligningen:

$$\lambda^2 - 9\lambda + 20 = 0$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot 20 = 81 - 80 = 1$$

$$\lambda = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm 1}{2} = 4 \ \vee \ 5$$

**Spørgsmål 2:**

Givet nedenstående homogene andenordens differentialligning:

$x''(t) - 8 \cdot x'(t) + 20 \cdot x(t) = 0$

Den fuldstændige reelle løsning er på formen:

$x(t) = k_1 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \cos(b \cdot t) + k_2 \cdot e^{a \cdot t} \cdot \sin(b \cdot t)$

Angiv konstanterne *a* og *b* når det oplyses $b > 0$.

**Svar:**

Løsningen står på formen:

$x(t) = k_1 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) + k_2 \cdot e^{\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$

Det vil sige, at $\alpha = a$ og $\beta = b$.

Jeg opstiller karakterligningen:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 20 = 0$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot 20 = 64 - 80 = -16 = (4i)^2$$

$$\lambda = \frac{8 \pm 4i}{2} = 4 \pm 2i$$

$$a = 4 \quad \text{og} \quad b = 2$$

**Spørgsmål 3:**

Om en homogen lineær andenordens differentialligning med konstante koefficienter oplyses at den fuldstændige reelle løsning er:

$x(t) = k_1 \cdot e^t \cdot \cos(t) + k_2 \cdot e^t \cdot \sin(t)$

Angiv konstanterne $k_1$ og $k_2$ i den partikulære løsning som opfylder:

$x(0) = 5$ og $x'(0) = 3$

**Svar:**

Først udregnes $x(0) = 5$.

$$x(0) = k_1 \cdot 1 \cdot 1 + k_2 \cdot 1 \cdot 0 = k_1 = 5$$

Nu skal den differentieres:

$$x'(t) = k_1 \cdot (e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sin(t)) + k_2 \cdot (e^t \cdot \sin(\mathrm{t}) + \mathrm{e}^{\mathrm{t}} \cdot \cos(t))$$

Nu udregnes $x'(0) = 3$.

$$x'(0) = k_1 \cdot (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) + k_2 \cdot (1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = k_1 + k_2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 5 + k_2 = 3 \Leftrightarrow k_2 = -2$$

**Spørgsmål 4:**

Givet nedenstående inhomogene andenordens differentialligning:

$x''(t) + x'(t) - 2 \cdot x(t) = 4 \cdot t + 3$

Det oplyses at en partikulær løsning er på formen:

$x_0 = a \cdot t + b$

Angiv konstanterne $a$ og $b$.

**Svar:**

Den partikulære løsning indsættes i differentialligningen:

$$(a \cdot t + b)'' + (a \cdot t + b)' - 2 \cdot (a \cdot t + b) = a - 2at - 2b = -2at + (a - 2b) = 4t + 3$$

Det vil sige at:

$$-2a = 4 \Leftrightarrow a = -2$$

$$a - 2b = 3 \Leftrightarrow -2 - 2b = 3 \Leftrightarrow -2b = 5 \Leftrightarrow b = -\frac{5}{2}$$

**Spørgsmål 5:**

Givet nedenstående homogene andenordens differentialligning med konstante koefficienter:

$x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = 0$

Det oplyses at den fuldstændige løsning er:

$x(t) = k_1 \cdot e^{4t} \cdot \cos(6t) + k_2 \cdot e^{4t} \cdot \sin(6t)$

Angiv konstanterne *a* og *b*:

**Svar:**

Det aflæses af løsningen, at egenværdierne er:

$$\lambda = 4 \pm 6 \cdot i$$

Det vil sige at:

$$(\lambda - 4 + 6i) \cdot (\lambda - 4 - 6i) = \lambda^2 - 4\lambda - 6i\lambda - 4\lambda + 16 + 24i + 6i\lambda - 24i + 36$$
$$= \lambda^2 - 8\lambda + 52$$

Altså er:

$$a = -8 \text{ og } b = 52$$

**Spørgsmål 6:**

Vi betragter en homogen andenordens differentialligning med konstante koefficienter.

Karakterligningen for differentialligningen er givet ved:

$\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$

Det oplyses at den fuldstændige løsning er:

$x(t) = k_1 \cdot e^{4t} + k_2 \cdot t \cdot e^{4t}$

Angiv konstanterne *a* og *b*.

**Svar:**

Det aflæses af løsningen, at 4 er dobbeltrod i karakterligningen. Det vil sige at:

$$(\lambda - 4)(\lambda - 4) = \lambda^2 - 8\lambda + 16$$
$$a = -8 \text{ og } b = 16$$

**Spørgsmål 7:**

Givet nedenstående homogene andenordens differentialligning.

$x''(t) - 6 \cdot x'(t) + 9 \cdot x(t) = 0$

Angiv den partikulære løsning $x_0(t)$, som tilfredsstiller $x(0) = 3$ og $x'(0) = 1$.

$x_0(t) =$

**Svar:**

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$$

$$\lambda = \frac{6}{2} = 3 \text{ (dobbeltrod)}$$

Den fuldstændige løsning er:

$$x(t) = k_1 \cdot e^{3t} + k_2 \cdot t \cdot e^{3t}$$

Den differentieres:

$$x'(t) = k_1 \cdot 3e^{3t} + k_2 \cdot (e^{3t} + t \cdot 3e^{3t})$$

Begyndelsesbetingelserne indsættes:

$$x(0) = k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 = k_1 = 3$$

$$x'(0) = k_1 \cdot 3 + k_2 \cdot (1 + 0) = 3k_1 + k_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 3 + k_2 = 1 \Leftrightarrow 9 + k_2 = 1 \Leftrightarrow k_2 = -8$$

Den partikulære løsning er:

$$x_0(t) = 3 \cdot e^{3t} - 8t \cdot e^{3t}$$

**Spørgsmål 8:**

Givet nedenstående inhomogene komplekse differentialligning med reelle koefficienter:

$z''(t) + a \cdot z'(t) + b \cdot z(t) = e^{(t+i \cdot t)} \quad (*)$

Det oplyses at en partikulær løsning til (*) er:

$z_0 = (3 + 4i) \cdot e^{(t+i \cdot t)}$

Vi betragter nu en reel differentialligning med de samme koefficienter som ovenfor:

$x''(t) + a \cdot x'(t) + b \cdot x(t) = e^t \cdot \sin(t) \quad (**)$

Bestem en partikulær løsning til (**) på formen:

$x_0(t) = k_1 \cdot e^t \cdot \cos(t) + k_2 \cdot e^t \cdot \sin(t)$

Angiv konstanterne $k_1$ og $k_2$.

**Svar:**

$$k_1 = Im(3 + 4i) = 4 \text{ og } k_2 = Re(3 + 4i) = 3$$

**Spørgsmål 9:**

Givet differentialligningen:

$x''(t) + x(t) = 0$

For hvilke af nedenstående begyndelsesværdier findes der løsninger:

$x(0) = 1$ og $x''(0) = -1$

$x(0) = 1$ og $x(2\pi) = 2$

$x(0) = 1$ og $x'(0) = 3$

$x(0) = 1$ og $x''(0) = 1$

**Svar:**

$x(0) = 1$ og $x''(0) = -1$

$x(0) = 1$ og $x'(0) = 3$

**Spørgsmål 10:**

Givet den homogene differentialligning:

$x''(t) + 4 \cdot x'(t) + 5 \cdot x(t) = 0$

Desuden oplyses:

$x(0) = 1$ og $x''(0) = -2$

Angiv $x'(0)$.

**Svar:**

De kendte oplysninger indsættes i differentialligningen og ligningen løses:

$$-2 + 4 \cdot x'(0) + 5 \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot x'(0) = -3 \Leftrightarrow x'(0) = -\frac{3}{4}$$