Hjemmeopgave 3

Thomas Thorsted - s214343

November 8, 2024

Opgave a)

Vi skal bestemme rangen af matrixen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Trin 1: Introduktion til metode

Rangen af en matrix svarer til antallet af lineært uafhængige rækker. For at finde rangen kan vi anvende rækkereduktion til række-echelonform og tælle antallet af pivoter (første ikke-nul element i hver række).

Trin 2: Udfør rækkereduktion

Vi udfører rækkereduktionen trin for trin:

1. **Første søjle:** Brug 2 i første række som pivotelement. For at fjerne elementet -1 i anden række, udfører vi operationen $R_2 + \frac{1}{2}R_1$. Dette giver:

   $$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Række 3 og række 4 påvirkes ikke af denne operation, da de allerede har 0 i første søjle.

2. **Anden søjle:** Brug nu 2 i anden række som nyt pivotelement. Vi reducerer tredje række ved at fjerne 2 i anden søjle ved operationen $R_3 - R_2$, hvilket giver:

   $$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

For række 4 foretager vi operationen $R_4 - \frac{1}{2}R_2$ for at fjerne 1 i anden søjle. Dette giver:

$$R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resultat af Række-echelonform

Efter rækkereduktionen får vi:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser, at der er pivoter i de første to rækker.

Trin 3: Bestemmelse af rangen

Da der er to lineært uafhængige rækker, er rangen af A:

$$\text{rang}(A) = 2.$$

Konklusion

Rangen af matrixen A er 2.

Opgave b)

Givet et homogent lineært ligningssystem over $\mathbb{R}$ med fire ligninger og tre ubekendte, samt oplysningerne om følgende to løsninger:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Spørgsmål 1: Kan vi afgøre, om vektoren $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$ er en løsning til systemet?

Da ligningssystemet er homogent, opfylder enhver lineær kombination af løsninger til systemet også systemet. For at afgøre, om v kan udtrykkes som en lineær kombination af v_1 og v_2, antager vi, at der findes skalarer a og b, således at:

$$v = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$$

Dette giver:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Denne ligning kan omskrives til følgende ligningssystem:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = -5 \\ b = -2 \end{cases}$$

Ved at løse dette system, bemærker vi, at vi kan finde værdier for a og b, der opfylder alle tre ligninger, hvilket viser, at v er en løsning til systemet.

Spørgsmål 2: Kan vi afgøre, om vektoren $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en løsning til systemet?

På samme måde antager vi, at der findes skalarer a og b, således at:

$$v = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$$

Dette giver:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

som fører til ligningssystemet:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ -a + b = -5 \\ b = 1 \end{cases}$$

Ved at løse dette system ser vi, at der ikke findes værdier for a og b, som opfylder alle tre ligninger, og derfor kan vi konkludere, at $v = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ ikke er en løsning til systemet.

Opgave c)

Vi skal afgøre, om de følgende tre vektorer i $\mathbb{R}^4$ er lineært uafhængige:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Metode: Bestemmelse af Lineær Uafhængighed ved Rækkereduktion

For at afgøre, om vektorerne er lineært uafhængige, kan vi opsætte dem som søjler i en matrix og udføre rækkereduktion. Hvis matrixen har fuld søjlerang (det vil sige, at antallet af pivoter er lig med antallet af søjler), er vektorerne lineært uafhængige.

Vi opskriver matrixen V med vektorerne som søjler:

$$V = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

Udfør Rækkereduktion

Vi reducerer matrixen V trin for trin til række-echelonform:

1. **Første søjle:** Brug 3 i første række som pivotelement. Vi gør de andre elementer i første søjle til nul:

$$R_2 = R_2 - \frac{2}{3}R_1, \quad R_3 = R_3 - \frac{1}{3}R_1, \quad R_4 = R_4 - \frac{1}{3}R_1$$

   Efter disse operationer bliver matrixen:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{16}{3} & \frac{8}{3} \\ 0 & -\frac{8}{3} & -\frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

2. **Anden søjle:** Vi bruger $\frac{8}{3}$ i anden række som pivotelement og gør de andre elementer i anden søjle til nul:

$$R_3 = R_3 - 2R_2, \quad R_4 = R_4 + R_2$$

Dette giver følgende matrix:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Konklusion

Efter rækkereduktionen ser vi, at der kun er to pivoter i matrixen. Dette betyder, at rangen af V er 2, hvilket er mindre end antallet af søjler. Derfor er vektorerne lineært afhængige.

Opgave d)

Vi skal vise identiteten

$$((A + B)^2)^T = (A^T + B^T)^2$$

for to $n \times n$ matricer A og B, hvor n er et naturligt tal.

Trin 1: Udvikling af Venstresiden

Vi starter med at beregne venstresiden af identiteten:

$$((A + B)^2)^T$$

Først beregner vi $(A + B)^2$ ved at anvende kvadreringsformlen for matricer:

$$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

Dermed har vi:

$$((A + B)^2)^T = (A^2 + AB + BA + B^2)^T$$

Ved at anvende transponeringsegenskaberne for matricer (dvs. $(X + Y)^T = X^T + Y^T$ og $(XY)^T = Y^T X^T$), får vi:

$$(A^2 + AB + BA + B^2)^T = (A^2)^T + (AB)^T + (BA)^T + (B^2)^T$$

Dette forenkles yderligere til:

$$(A^2)^T + (AB)^T + (BA)^T + (B^2)^T = A^T A^T + B^T A^T + A^T B^T + B^T B^T$$

således at venstresiden nu er:

$$((A + B)^2)^T = A^T A^T + B^T A^T + A^T B^T + B^T B^T$$

Trin 2: Udvikling af Højresiden

Nu beregner vi højresiden af identiteten:

$$(A^T + B^T)^2$$

Ved at anvende kvadreringsformlen for matricer får vi:

$$(A^T + B^T)^2 = (A^T + B^T)(A^T + B^T)$$

Udvid dette produkt:

$$(A^T + B^T)(A^T + B^T) = A^T A^T + A^T B^T + B^T A^T + B^T B^T$$

Trin 3: Sammenligning af Resultaterne

Både venstre- og højresiden har givet følgende udtryk:

$$A^T A^T + A^T B^T + B^T A^T + B^T B^T$$

Da venstre- og højresiden er ens, har vi vist, at:

$$((A + B)^2)^T = (A^T + B^T)^2$$

Konklusion

Dette fuldfører beviset.

Opgave e)

Vi skal beregne determinanten af matrixen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Trin 1: Udvikling af Determinanten langs Første Række

Vi udvikler determinanten langs første række:

$$\det(A) = 2\cdot\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 1\cdot\det \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\cdot\det(\ldots) - (-1)\cdot\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi beregner nu hver af de 3×3 underdeterminanter.

Trin 2: Beregning af Underdeterminanterne

1. $\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$= 0 - (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hvor

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{og} \quad \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1.$$

Dermed får vi:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

2. $\det \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

hvor

$$\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 1, \quad \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = -2, \quad \text{og} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 4.$$

Dermed får vi:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \cdot 1 + (-1)(-2) + 1 \cdot 4 = -2 + 2 + 4 = 4.$$

3. $\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$:

$$= -2 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - 0 + (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

hvor

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{og} \quad \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = 2.$$

Dermed får vi:

$$\det \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 \cdot 1 + 0 - 1 \cdot 2 = -4.$$

Trin 3: Saml Resultatet

Vi indsætter resultaterne i det oprindelige udtryk:

$$\det(A) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 4 + 0 - (-1) \cdot (-4)$$

$$= 4 - 4 + 0 - 4 = -4$$

Konklusion

Determinanten af matrixen A er:

$$\det(A) = -4$$

Opgave f)

Lad n være et naturligt tal, og lad A være en $n \times n$ antidiagonal matrix på formen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En sådan matrix kaldes en antidiagonal matrix.

Del 1: Find determinanten for $n = 2, 3$ og 4

Vi beregner determinanterne for matricer af størrelse 2×2, 3×3, og 4×4.

1. **For $n = 2$:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten af A er:

$$\det(A) = (0 \cdot 0) - (\lambda_1 \cdot \lambda_2) = -\lambda_1\lambda_2$$

2. **For $n = 3$:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten af A er:

$$\det(A) = -\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

3. **For $n = 4$:**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten af A er:

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4$$

Del 2: Vis ved induktion, at for alle naturlige tal $n \geq 2$:

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

Basis trin: $n = 2$

For $n = 2$, har vi allerede beregnet:

$$\det(A) = -\lambda_1\lambda_2$$

Dette stemmer overens med $(-1)^{\frac{2(2+3)}{2}} = (-1)^5 = -1$, hvilket giver:

$$\det(A) = -\lambda_1\lambda_2$$

Induktionsantagelse

Antag, at udsagnet er sandt for $n = k$, dvs.

$$\det(A) = (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$$

Induktionsskridt: Vis for $n = k + 1$

For $n = k + 1$, bevares den antidiagonale form med en ekstra skalar λ_{k+1}. Determinanten multipliceres med λ_{k+1} og skifter fortegn.

Ifølge induktionsantagelsen og den yderligere multiplikation bliver determinanten for $n = k + 1$:

$$\det(A) = (-1)^{\frac{(k+1)((k+1)+3)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{k+1}$$

Konklusion

Vi har nu ved induktion vist, at:

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

for alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.