Hjemmeopgave 1 - Matematik 1a

Victor Jonathan Hald

s183710

29-09-2024

Opgave a)

Afgør om følgende to logiske udsagn er logisk ækvivalente:

$(P \wedge Q) \Rightarrow R$ **og** $\neg P \vee (Q \Rightarrow R)$

Vi opstiller vores sandhedstabel.

P	Q	R	¬P	P∧Q	Q⇒R	(P∧Q)⇒R	¬P∨(Q⇒R)
1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

Som vi kan se, er de sidste to søjler identiske, og derfor logisk ækvivalente.

Opgave b)

Find alle reelle tal x som opfylder ligningen $|x-1|^2 = x^2 + |x|$.

For at løse ligningen $|x-1|^2 = x^2 + |x|$, deler vi problemet op i to tilfælde baseret på værdien af x.

Tilfælde 1: $x \geq 0$

Når $x \geq 0$, er $|x| = x$ og $|x-1| = x - 1$ (da $x \geq 1$ eller $0 \leq x < 1$).

Ligningen bliver:

$$(x-1)^2 = x^2 + x$$

Udvider venstresiden:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x$$

Trækker x^2 fra begge sider:

$$-2x + 1 = x$$

Løser for x:

$$1 = 3x \implies x = \frac{1}{3}$$

Da $x = \frac{1}{3}$ opfylder $x \geq 0$, er det en gyldig løsning i dette tilfælde.

Tilfælde 2: $x < 0$

Når $x < 0$, er $|x| = -x$ og $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$.

Ligningen bliver:

$$(-x + 1)^2 = x^2 + (-x)$$

Udvider venstresiden:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - x$$

Trækker x^2 fra begge sider:

$$-2x + 1 = -x$$

Løser for x:

$$1 = x$$

Men $x = 1$ opfylder ikke $x < 0$, så der er ingen løsning i dette tilfælde.

Samlet resultat

Den eneste løsning, der opfylder alle betingelserne, er $x = \frac{1}{3}$.

Derfor er den entydige løsning:

$$\boxed{x = \frac{1}{3}}$$

Opgave c)

Givet funktionen f : $R \to R$ med forskriften

$$f(x) = 4x2 + 4|x - 1|.$$

1. Beregn funktionens værdimængde.

Vi skal beregne $Vm(f)$.

For at finde værdimængden af funktionen $f(x) = 4x^2 + 4|x-1|$, betragter vi først, hvordan funktionen opfører sig for forskellige værdier af x.

- For $x \geq 1$:

  $$f(x) = 4x^2 + 4(x-1) = 4x^2 + 4x - 4$$

  Dette er en parabel, der åbner opad med toppunkt i $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$. Men da vi kun betragter $x \geq 1$, vil funktionen stige uden grænse.

- For $x < 1$:

  $$f(x) = 4x^2 + 4(1-x) = 4x^2 - 4x + 4$$

  Dette er også en parabel, der åbner opad med toppunkt i $x = \frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. I dette interval vil funktionen stige uden grænse.

Da begge dele af funktionen er kontinuerte og voksende, når x går mod uendelig, så vil værdimængden også være fra 0 (for $x = 1$) til uendeligt.

Således er værdimængden for funktionen $f(x) = 4x^2 + 4|x-1|$ givet ved:

$$\boxed{Vm(f) = [0, \infty[}$$

2. Afgør om funktionen er injektiv

En funktion er injektiv, hvis der for to vilkårlige punkter x_1 og x_2 i definitionsmængden gælder:

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$$

Men da funktionen består af to dele, der begge er kontinuerte og voksende for henholdsvis $x \geq 1$ og $x < 1$, vil der altid findes to forskellige x-værdier, der giver samme $f(x)$.

Således er funktionen **ikke** injektiv.

Opgave d)

Der opgives for et komplekst tal z at $\arg(z) = -\pi/3$ og $|z| = 2$.

1. Beregn de polære koordinater for det komplekse tal z^7.

2. Skriv tallet z^7 på rektangulær form.

For at løse opgaven, skal vi først konvertere det givne komplekse tal z til polære koordinater og derefter beregne z^7.

Trin 1: Konvertering til polære koordinater

Det givne komplekse tal z har en vinkel på $-\frac{\pi}{3}$ og en størrelse (modulus) på 2. Polære koordinater for et komplekst tal er givet ved:

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

hvor $|z| = 2$ og $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Dette giver os:

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Beregning af cos og sin:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Så:

$$z = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$

Trin 2: Beregning af z^7

For at beregne z^7 bruger vi DeMoivres formel, som siger:

$$(r \cdot (cos\theta + i \cdot sin\theta))^n = r^n \cdot (cos(n\theta) + i \cdot sin(n\theta))$$

Dvs.

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$$

hvor $n = 7$, $|z| = 2$, og $\theta = -\frac{\pi}{3}$.

Beregning af z^7:

$$z^7 = 2^7\left(\cos\left(7 \cdot (-\frac{\pi}{3})\right) + i\sin\left(7 \cdot (-\frac{\pi}{3})\right)\right)$$

Vi kan reducere vinklen:

$$-\frac{7\pi}{3} + 2\pi = -\frac{7\pi}{3} + \frac{6\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$$

Så det er den samme vinkel, som vi startede med.

Beregning af cos og sin:

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Så:

$$z^7 = 2^7\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 128\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Trin 3: Skriv z^7 på rektangulær form

Vi multiplicerer koefficienterne med cos og sin:

$$z^7 = 128\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 64 - 64i\sqrt{3}$$

Så det komplekse tal z^7 på rektangulær form er:

$$z^7 = 64 - 64i\sqrt{3}$$

Svar:

1. De polære koordinater for z^7 er givet ved:

$$z^7 = \boxed{64\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}$$

2. Det komplekse tal z^7 på rektangulær form er:

$$z^7 = \boxed{64 - 64i\sqrt{3}}$$

Løs den binome ligning $z^3 = i$. Svarene ønskes givet på rektangulær form samt indtegnet i den komplekse talplan.

Løsningen til ligningen kan findes ved at isolere z. Vi starter med at skrive i på polær form, hvilket er $i = e^{i\pi/2}$. Således har vi:

$$z^3 = e^{i\pi/2}$$

Løsningen til denne ligning kan findes ved at tage 3. rod på begge sider:

$$z = e^{i(\pi/2+2k\pi)/3}, \quad \text{for} \quad k = 0, 1, 2$$

Dette giver tre forskellige løsninger:

1. For $k = 0$:

$$z_0 = e^{i(\pi/6)} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}}$$

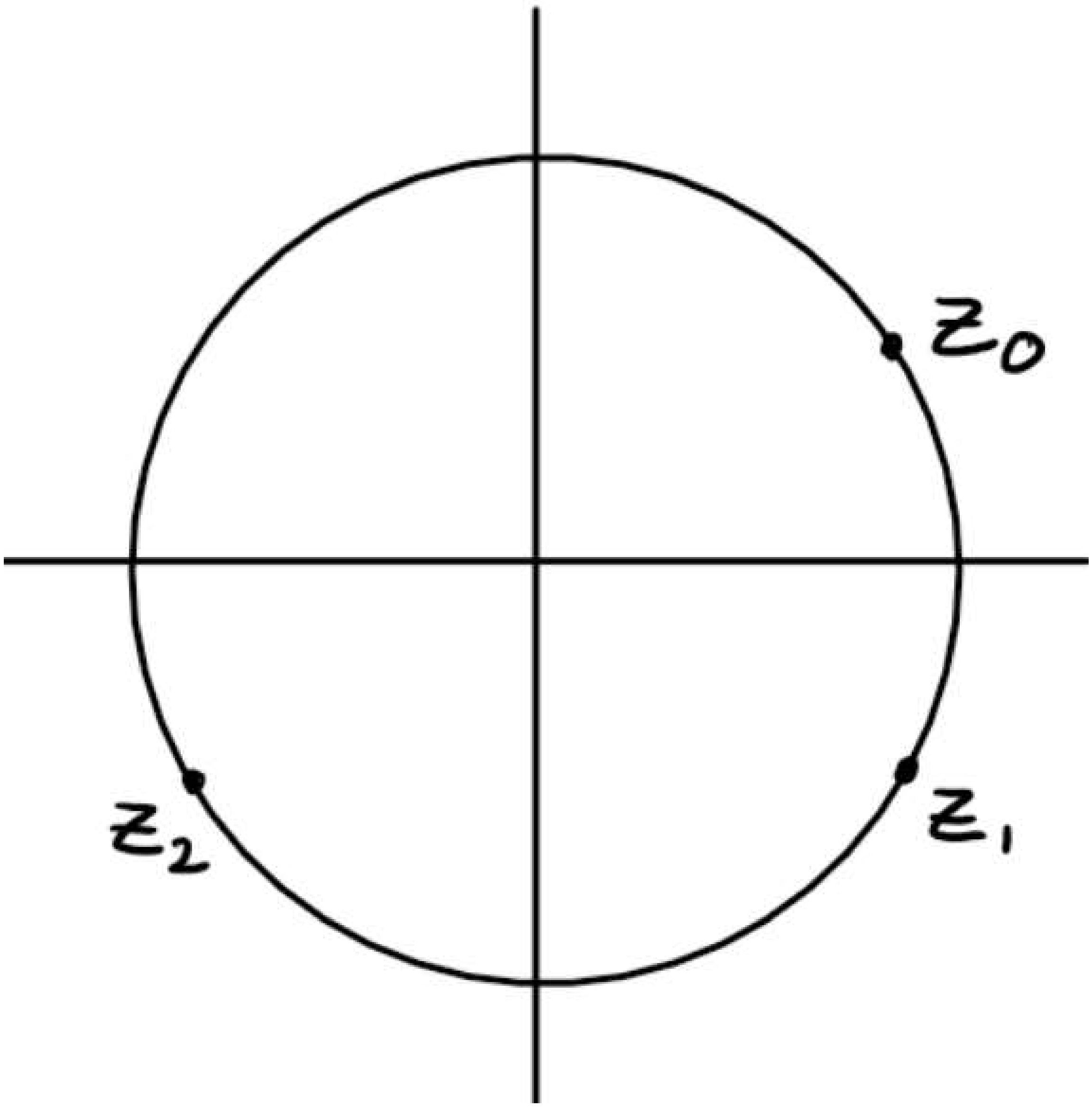
2. For $k = 1$:

$$z_1 = e^{i((\pi/2)+(2\pi/3))} = \cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6) = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}}$$

3. For $k = 2$:

$$z_2 = e^{i((\pi/2)+(4\pi/3))} = \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}}$$

Disse løsninger kan nu indtegnes i den komplekse talplan.



Som sædvanligt betegnes hovedargument af et komplekst tal z med $Arg(z)$. Afgør om følgende udsagn er sande:

1. $\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z) > 0$

For at afgøre om dette udsagn er sandt, skal vi overveje definitionen af den imaginære del og argumentet for et komplekst tal. Hvis $z = a + bi$ (hvor a og b er reelle tal), så er $\mathrm{Im}(z) = b$.

- Hvis $b > 0$, så er $\mathrm{Im}(z) > 0$.
- Argumentet for z, $\mathrm{Arg}(z)$, er vinklen mellem den positive reelle akse og linjen fra origo til punktet (a, b) i det komplekse plan.

For at $\mathrm{Arg}(z) > 0$, skal punktet (a, b) befinde sig i første kvadrant eller øverst på den positive imaginære akse. Hvis $b > 0$, så er dette tilfældet.

Derfor er udsagnet $\mathrm{Im}(z) > 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z) > 0$ sandt, da hvis den imaginære del af z er positiv, så ligger z i første kvadrant eller øverst på den positive imaginære akse.

2. $\mathrm{Arg}(z) \leq 0 \Rightarrow \mathrm{Im}(z) \leq 0$

Dette udsagn siger, at hvis argumentet for z er mindre end eller lig med nul, så er den imaginære del af z mindre end eller lig med nul. Vi skal overveje de mulige vinkler, som $\mathrm{Arg}(z)$ kan have:

- Hvis $\mathrm{Arg}(z) = 0$, så ligger z på den reelle akse, og $\mathrm{Im}(z) = 0$.
- Hvis $\mathrm{Arg}(z) < 0$, så ligger z i fjerde kvadrant eller nederst på den negative imaginære akse. I disse tilfælde er $\mathrm{Im}(z) \leq 0$.

Men hvis $\mathrm{Arg}(z) = -\pi$ (hvilket svarer til at ligge på den positive imaginære akse med negativt fortegn), så er $\mathrm{Im}(z) > 0$. Derfor kan udsagnet ikke være sandt, da der findes eksempler hvor $\mathrm{Arg}(z) < 0$ og $\mathrm{Im}(z) > 0$.

3. $\mathrm{Im}(z) = 0 \Rightarrow \mathrm{Arg}(z) = 0$

Dette udsagn siger, at hvis den imaginære del af z er nul, så er argumentet for z nul. Men dette er ikke korrekt, da en reel akse vil give et argument på $\mathrm{Arg}(z) = 0$, mens en negativ imaginær akse vil give $\mathrm{Arg}(z) = -\pi$.

Derfor kan udsagnet ikke være sandt, da der findes eksempler hvor $\mathrm{Im}(z) = 0$ og $\mathrm{Arg}(z) \neq 0$.

Konklusion

Kun det første udsagn er sandt. De to andre udsagn er falske.