Hjemmeopgave 3 - Matematik 1a

Victor Jonathan Hald

s183710

10-11-2024

Opgave a)

Beregn rangen af følgende matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi sætter på reduceret trappeform:

Vi starter med at dividere række 1 og række 3 med 2, og derefter lægge række 1 til række 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Nu dividerer vi række 2 med 2, og trækker række 2 fra række 3 og 4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi har nu 2 ledende 1-taller og to nulrækker. Derfor er $\boxed{rang(A) = 2}$.

Opgave b)

Givet et homogent lineært ligningssystem over $\mathbb{R}$ med fire ligninger med tre ubekendte. Det oplyses at nedenstående to vektorer

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er løsninger til systemet.

1.

Kan det afgøres om vektoren

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

er en løsning til systemet?

Vi bruger v_1 og v_2 til at tjekke:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= -5 \\ x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Vi ser at $x_2 = -2$. Dette kan vi indsætte i ligning 1:

$$x_1 + (-2) = 1 -> x_1 = 3$$

Vi tjekker nu ligning 2:

$$-x_1 + x_2 = -3 + (-2) = -5$$

Vi tester:

$$3 \cdot v_1 - 2 \cdot v_2 = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

Vi har altså en løsning, da vi får den samme vektor igen.

2.

Kan det afgøres om vektoren

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

er en løsning til systemet?

Vi bruger v_1 og v_2 til at tjekke:

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$-x_1 + x_2 = -5$$

$$x_2 = 1$$

Vi ser at $x_2 = 1$. Dette kan vi indsætte i ligning 1:

$$x_1 + 1 = 1 -> x_1 = 0$$

Vi tjekker nu ligning 2:

$$-x_1 + x_2 = 0 + 1 = 1$$

Vi tester:

$$0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Vi har altså ikke en løsning, da vi ikke får den samme vektor igen.

Opgave c)

Bestem om følgende 3 vektorer i $\mathbb{R}^4$ er lineært uafhængige:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Vi sætter totalmatricen på reduceret trappeform:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R1 - 3 \cdot R4, \quad R2 - 2 \cdot R4, \quad R3 - R4$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 8 & 4 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R1 - R2, \quad R3 - R2, \quad R2/8$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R4 + 3R2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$R1 \leftrightarrow R4$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser, at rangen af A er 2. Da rangen af matricen er mindre end antallet af søjler, er de tre vektorer lineært afhængige.

Opogave d)

Lad n være et naturligt tal og lad A og B være to $n \times n$ matricer.

Vis identiteten $((A+B)^2)^T = (A^T + B^T)^2$

Lad bruge et eksempel til at vise identiteten.

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\
A^T &= \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\
B^T &= \begin{bmatrix} e & g \\ f & h \end{bmatrix} \\
A+B &= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)^2 &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+e \\ b+f \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c+g \\ d+h \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (a+e)^2 + (b+f)(c+g) & (c+g)(a+d+h+e) \\ (b+f)(a+d+h+e) & (b+f)(c+g) + (d+h)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
A^T + B^T = \begin{bmatrix} a+e & c+g \\ b+f & d+h \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
(A^T + B^T)^2 &= \begin{bmatrix} (a+e)^2 + (b+f)(c+g) & (b+f)(a+d+h+e) \\ (c+g)(a+d+h+e) & (b+f)(c+g) + (d+h)^2 \end{bmatrix} \\
((A+B)^2)^T &= \begin{bmatrix} (a+e)^2 + (b+f)(c+g) & (b+f)(a+d+h+e) \\ (c+g)(a+d+h+e) & (b+f)(c+g) + (d+h)^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi kan altså se at de to sidste matricer er ens, og derfor er

$$
\boxed{((A+B)^2)^T = (A^T + B^T)^2}.
$$

Opgave e)

Beregn determinanten af følgende matrix:

$$
\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.
$$

For at gøre det så nemt som mulig for os selv, omformer vi matricen til en trekantmatrix, og udregner deraf determinanten af matricen.

$$R2 + R1, \quad R3 - R1, \quad R4 + R1$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R4 - R2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R4 - 2 \cdot R3$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Vi tager nu determinanten:

$$Determinant = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = \boxed{-2}$$

Vi kan også teste vores svar ved at regne determinanten på traditionel vis udfra opløsning af rækker og søjler:

Vi opløser efter række 4, der er flest 0'er.

$$\begin{aligned} det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} &= -(-2) \cdot det \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 0 - 1 \cdot det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} + 0 \\ &= 2 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)) - 1 \cdot (2 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 \\ &= \boxed{-2} \end{aligned}$$

Vi får altså det samme resultat ved begge regnemetoder.

Opgave f)

Lad n være et naturligt tal og lad A være en n ×n matrix på formen:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \lambda_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En sådan matrix kaldes en antidiagonal matrix.

1. Find determinanten for $n = 2, 3$ og 4.

Vi starter med at kigge for $n = 2$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten er:

$$det(A) = \boxed{-\lambda_2 \cdot \lambda_1}$$

Vi ser nu for $n = 3$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten er:

$$\begin{aligned} det(A) &= 0 \cdot det \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - 0 \cdot det \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \cdot det \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_3 \cdot det \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_3 \cdot (-\lambda_2 \cdot \lambda_1) = \boxed{-\lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1} \end{aligned}$$

Vi ser nu for $n = 4$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determinanten er:

$$det(A) = -\lambda_4 \cdot det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\lambda_4 \cdot (-\lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1) = \boxed{\lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1}$$

2. Vis for alle naturlige tal $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ at $det(A) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

Vi ved at at $n = 2$ er:

$$det(A) = -\lambda_2 \cdot \lambda_1$$

Vi kan tjekke om udregningen passer:

$$(-1)^{\frac{2(2+3)}{2}} = (-1)^5 = -1$$

Fortegnet passer altså til $det(A)$ for $n = 2$.

Vi kan for sjov tjekke både $n = 5$, $n = 6$ og $n = 7$:

$$\begin{aligned} n = 5: &\quad \lambda_5 \cdot (\lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1) = \lambda_5 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 \\ n = 6: &\quad -\lambda_6 \cdot (\lambda_5 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1) = -\lambda_6 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 \\ n = 7: &\quad \lambda_7 \cdot (-\lambda_6 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1) = -\lambda_7 \cdot \lambda_6 \cdot \lambda_5 \cdot \lambda_4 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_1 \end{aligned}$$

Hvis vi nu antager, at det også gælder for $n = k$, så er:

$$det(A) = (-1)^{\frac{k(k+3)}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

Vi ser nu, om det vil gælde for alle naturlige tal, dvs. $n = k + 1$:

$$det(A) = (-1)^{\frac{(k+1)((k+1)+3)}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_{k+1}$$

Vi ser, at for $n = k + 1$ bevares den antidiagonale form. Hver gang k øges med 1, multipliceres determinanten med λ_{k+1} og skifter fortegn for hver anden iteration.

Vi har derfor vist, at

$$det(A) = (-1)^{\frac{n(n+3)}{2}} \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

for alle naturlige tal $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.