Hjemmeopgave 2 - Matematik 1a

Victor Jonathan Hald

s183710

27-10-2024

Opgave a)

Find samtlige komplekse løsninger til ligningen $e^{2z} = 2 + i$.

For at finde alle komplekse løsninger z til ligningen

$$e^{2z} = 2 + i$$

kan vi gøre følgende:

Vi starter med at tage den naturlige logaritme på begge sider:

$$2z = \ln(2 + i)$$

Derfor,

$$z = \frac{\ln(2 + i)}{2}$$

Vi konverterer $2 + i$ til polær form:

Et komplekst tal $w = a + bi$ kan skrives i polær form som

$$w = re^{i\theta}$$

hvor modulus er

$$r = |w| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

og argumentet

$$\theta = \arg(w) = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

For $2 + i$:

Modulus:

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Argument:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Derfor er de polære koordinater til $2+i$:

$$2+i=\sqrt{5}\,e^{i\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Vi beregner den naturlige logaritme:

Logaritmen af et komplekst tal i polær form er givet ved:

$$\ln(re^{i\theta})=\ln r+i(\theta+2k\pi)$$

Anvender vi dette på $2+i$:

$$\ln(\sqrt{5}\,e^{i\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)})=\ln(\sqrt{5})+i\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi\right)$$

Løs for z:

Sæt det tilbage i udtrykket for z:

$$z=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5})+\frac{i}{2}\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2k\pi\right)$$

Vi simplificerer:

$$z=\frac{1}{4}\ln 5+i\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+k\pi\right)$$

Endeligt svar:

Alle komplekse løsninger er givet ved

$$\boxed{z=\frac{1}{4}\ln 5+i\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+k\pi\right)}$$

hvor k er vilkårligt helt tal.

Opgave b)

Givet to komplekse tal z_1 og z_2. Det oplyses at $Arg(z_1)=\pi/4$ og $Arg(z_2)=3$. Bestem $Arg(-2z_1^4/z_2^{10})$.

Vi bruger Sætning 3.6.2 som siger at argumentet til en brøk er argumentet til tælleren minus argumentet til nævneren, og at argumentet til et produkt er summen af argumenterne.

$$Arg(-2z_1^4/z_2^{10})=Arg(-2)+Arg(z_1^4)-Arg(z_2^{10})$$

Vi ved at $Arg(-2)=\pi$, og vi bruger reglen om at argumentet til en potens er eksponenten gange argumentet til grundtallet.

$$=\pi+4\cdot Arg(z_1)-10\cdot Arg(z_2)$$

Vi indsætter de givne værdier for argumenterne: $Arg(z_1)=\pi/4$ og $Arg(z_2)=3$

$$= \pi + 4 \cdot \frac{\pi}{4} - 10 \cdot 3$$

Vi regner ud at $4 \cdot \pi/4 = \pi$ og $10 \cdot 3 = 30$

$$= \pi + \pi - 30$$

$$= 2\pi - 30$$

Da hovedargumentet ligger i intervallet $[-\pi, \pi]$, kan vi lægge 2π til indtil vi er inde i intervallet:

$$\begin{align} 2\pi - 30 + 2\pi &= 4\pi - 30 < -\pi \tag{1} \\ 4\pi - 30 + 2\pi &= 6\pi - 30 < -\pi \tag{2} \\ 6\pi - 30 + 2\pi &= 8\pi - 30 < -\pi \tag{3} \\ 8\pi - 30 + 2\pi &= 10\pi - 30 > -\pi \tag{4} \end{align}$$

Det endelige hovedargument er derfor:

$$\boxed{10\pi - 30 \approx 1.416}$$

Opgave c)

Afgør ved hjælp af divisionsalgoritmen om polynomiet $d(Z) = Z^2 - 3Z + 2$ går op i polynomiet $p(Z) = Z^5 - 3Z^4 + Z^3 + 4$.

$$Z^2 - 3Z + 2 \,\big)\, Z^5 - 3Z^4 + Z^3 \qquad + 4 \,\big|\, Z^3 - Z - 3$$

$$\underline{Z^5 - 3Z^4 + 2Z^3}$$

$$-Z^3 \qquad + 4$$

$$\underline{-Z^3 + 3Z^2 - 2Z}$$

$$-3Z^2 + 2Z + 4$$

$$\underline{-3Z^2 + 9Z - 6}$$

$$7Z + 10$$

Når vi dividerer $p(Z)$ med $d(Z)$, får vi: $p(Z) = q(Z) \cdot (Z^2 - 3Z + 2) + (-7Z + 10)$ hvor $q(Z)$ er kvotienten.

Resten af divisionen er:

$$-7Z + 10$$

Da resten ikke er nul, kan vi konkludere, at:

$$\boxed{Z^2 - 3Z + 2 \text{ går ikke op i } Z^5 - 3Z^4 + Z^3 + 4}$$

Opgave d)

1. Vis at tallet −3 er en rod i polynomiet $Z^3 - Z^2 + 36$. Hvad er rodens multiplicitet?
2. Bestem samtlige rødder i $Z^3 - Z^2 + 36$.

1.

Vi udfører igen divisionsalgoritmen:

$$
\begin{array}{l|llll|l}
\underline{-3} & Z^3 & -Z^2 & & +36 & \underline{-\frac{1}{3}Z^3 + \frac{1}{2}Z^2 - 12} \\
 & \underline{Z^3} & & & & \\
 & & -Z^2 & & +36 & \\
 & & \underline{-Z^2} & & & \\
 & & & & +36 & \\
 & & & & \underline{36} & \\
 & & & & 0 &
\end{array}
$$

Den nemmeste måde at se om -3 er rod i denne opgave havde været at indsætte -3 på Z's plads i polynomiet og udregnede det:

$$-3^3 - (-3)^2 + 36 = -27 - 9 + 36 = 0$$

Det er i dette tilfælde ligetil, da $deg(d(Z) = -3) = 0$.

Når vi har en rod r, så er $(Z - r)$ en faktor i polynomiet. I dette tilfælde er $r = -3$, så faktoren bliver $(Z - (-3)) = (Z + 3)$.

For at finde multipliciten skal vi undersøge hvor mange gange $(Z + 3)$ går op i polynomiet. Vi kan bruge polynomisk division til at dividere $Z^3 - Z^2 + 36$ med $(Z + 3)$. Vi får:

$$
\begin{array}{r|l}
Z+3 & Z^3 - Z^2 \qquad + 36 \;\big|\; Z^2 - 4Z - 12 \\
 & Z^3 + 3Z^2 \\ \hline
 & -4Z^2 \qquad + 36 \\
 & -4Z^2 + 12Z \\ \hline
 & \qquad -12Z + 36 \\
 & \qquad -12Z - 36 \\ \hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Da divisionen går op uden rest, er multipliciteten mindst 1. Vi undersøger videre for at afgøre om multiplicitetten skulle være højere.

Vi kan tjekke om $(Z+3)$ går op i $Z^2 - 4Z - 12$:

Vi indsætter $Z = -3$ i $Z^2 - 4Z - 12$:

$$(-3)^2 - 4(-3) - 12$$

$$9 + 12 - 12$$

$$9 \neq 0$$

Da $(Z+3)$ ikke går op i $Z^2 - 4Z - 12$, betyder det at -3 kun er rod én gang.

Derfor er multipliciten af roden -3 lig med $\boxed{1}$.

2.

Bestem samtlige rødder i $Z^3 - Z^2 + 36$.

Da vi allerede kender en rod, kan vi tjekke om der er andre.

Vi deler polynomiet med $Z+3$, og får:

$$Z^3 - Z^2 + 36 = (Z+3)(Z^2 - 4Z + 12)$$

For at finde de resterende rødder løser vi ligningen:

$$Z^2 - 4Z + 12 = 0$$

$$D = -4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 16 - 40 = -32$$

$$Z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{32}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm i\sqrt{8} = 2 \pm 2i\sqrt{2}$$

Der findes altså også to komplekse rødder:

$$Z_2 = 2 + 2i\sqrt{2} \text{ og } Z_3 = 2 - 2i\sqrt{2}$$

Derfor er de samtlige rødder

$$\boxed{Z_1 = -3, Z_2 = 2 + 2i\sqrt{2} \text{ og } Z_3 = 2 - 2i\sqrt{2}}$$

Opgave e)

Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ opfylder at

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{hvis } n = 1 \\ f(n-1)^2 - (n-1)^2 & \text{hvis } n \geq 2 \end{cases}$$

Beregn $f(n)$ for $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vi beregner:

$$\begin{align} f(1) &= 2 \tag{5} \\ f(2) &= f(1)^2 - (2-1)^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 \tag{6} \\ f(3) &= f(2)^2 - (3-1)^2 = 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5 \tag{7} \\ f(4) &= f(3)^2 - (4-1)^2 = 5^2 - 3^2 = 25 - 9 = 16 \tag{8} \\ f(5) &= f(4)^2 - (5-1)^2 = 16^2 - 4^2 = 256 - 16 = 240 \tag{9} \end{align}$$

Sammenfattende er værdierne for $f(n)$ som følger:

$$\boxed{f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 5,\ f(4) = 16,\ f(5) = 240}$$

Opgave f)

Lad r og s være to forskellige komplekse tal. Vis ved hjælp af induktion efter n at

$$r^n + r^{n-1} \cdot s + r^{n-2} \cdot s^2 + \ldots + r \cdot s^{n-1} + s^n = \frac{r^{n+1} - s^{n+1}}{r - s}$$

for alle $n \in \mathbb{N}$.

Lad os løse dette induktionsbevis trin for trin.

Først tjekker vi, at formlen holder for $n = 1$:

For $n = 1$ har vi venstre side:

$$r + s$$

Højre side:

$$(\frac{r^2 - s^2}{r - s} = \frac{(r+s)(r-s)}{r - s} = r + s)$$

Så formlen holder for $n = 1$.

Vi antager nu at formlen holder for et vilkårligt $k \in \mathbb{N}$ (induktionsantagelsen):

$$r^k + r^{k-1}s + r^{k-2}s^2 + \ldots + rs^{k-1} + s^k = \frac{r^{k+1} - s^{k+1}}{r - s}$$

Vi skal vise at formlen så også holder for $k + 1$.

Venstre side for $k + 1$ er:

$$r^{k+1} + r^k s + r^{k-1}s^2 + \ldots + rs^k + s^{k+1}$$

Dette kan omskrives til:

$$r(r^k + r^{k-1}s + r^{k-2}s^2 + \ldots + rs^{k-1} + s^k) + s^{k+1}$$

Ved at bruge induktionsantagelsen får vi:

$$r\left(\frac{r^{k+1} - s^{k+1}}{r - s}\right) + s^{k+1}$$

$$= \frac{r^{k+2} - rs^{k+1}}{r - s} + s^{k+1}$$

$$= \frac{r^{k+2} - rs^{k+1} + s^{k+1}(r - s)}{r - s}$$

$$= \frac{r^{k+2} - s^{k+2}}{r - s}$$

Dette er netop formlen for $k + 1$, så induktionsbeviset er fuldført.

Derfor gælder formlen for alle $n \in \mathbb{N}$.