Hjemmeopgave 4

Thomas Thorsted - s214343

December 1, 2024

Opgave a)

Vi ønsker at undersøge dimensionen af vektorrummet $V = \mathbb{C}^{2\times 4}$, som består af alle komplekse 2×4-matricer. For at gøre dette følger vi nedenstående ræsonnement.

1. Definition af V

Vektorrummet V består af alle komplekse 2×4-matricer, altså matricer af formen:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{C}.$$

Antallet af elementer i matricen M er:

$$2 \cdot 4 = 8.$$

2. Basis for V

En basis for V kan dannes ved at tage en samling af matricer, hvor hver matrix har én indgang lig med 1 og resten lig med 0. For eksempel:

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{osv.}$$

Der er præcis én basisvektor for hver af de 8 positioner i en 2×4-matrix.

3. Dimensionen af V

Dimensionen af V svarer til antallet af basisvektorer. Da vi har 8 uafhængige basisvektorer, er:

$$\dim(V) = 8.$$

Konklusion

Vektorrummet $V = \mathbb{C}^{2\times 4}$ har dimension:

$$\boxed{\dim(V) = 8}.$$

Derfor har V ikke et komplekst underrum af dimension 9.

Opgave b)

Lad W være udspændt af følgende vektorer i $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Vi skal finde en basis for W og bestemme dimensionen $\dim(W)$.

Løsning

Trin 1: Opskrivning af vektormatrix
For at undersøge lineær uafhængighed af $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$, opstiller vi matrixen med disse vektorer som søjler:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Trin 2: Rækkereduktion for at finde rang
Vi udfører Gauss-elimination på A for at finde rangen, der svarer til antallet af lineært uafhængige søjler:

$$R_2 \to R_2 + R_1, \quad R_4 \to R_4 - 2R_1,$$
$$R_3 \to R_3 - \frac{5}{7}R_2, \quad R_4 \to R_4 + \frac{6}{7}R_2.$$

Efter rækkereduktion fås:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Trin 3: Fortolkning af resultater
Den reducerede matrix viser, at A har to ikke-nul rækker. Det betyder, at $\dim(W) = 2$. Derfor er der to lineært uafhængige søjler, som kan vælges som en basis for W.

Trin 4: Valg af basis
De lineært uafhængige søjler i den oprindelige matrix A svarer til en basis for W. Vi vælger derfor:

$$\text{Basis for } W : \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

Konklusion

Dimensionen af underrummet W er:

$$\dim(W) = 2,$$

og en basis for W er givet ved:

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}.$$

Opgave c)

Vi skal finde afbildningsmatricen $\beta[L]_\gamma$ for den lineære afbildning $L : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, som er givet ved:

$$L\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix},$$

samt de ordnede baser:

$$\beta = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{for } \mathbb{C}^2,$$

og

$$\gamma = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \quad \text{for } \mathbb{C}^3.$$

Trin 1: Udtryk L i basen γ

Vi beregner $L(\mathbf{w}_i)$, hvor $\mathbf{w}_i$ er basisvektorerne fra γ.

- For $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$L(\mathbf{w}_1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- For $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$L(\mathbf{w}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- For $\mathbf{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$L(\mathbf{w}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Trin 2: Koordinatsæt i β

De fundne billeder $L(\mathbf{w}_i)$ udtrykkes i basen $\beta = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$. For hver vektor løses systemet:

$$L(\mathbf{w}_i) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- For $L(\mathbf{w}_1) = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}.$$

  Løsning:

$$c_1 = 4, \quad c_2 = -2.$$

- For $L(\mathbf{w}_2) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}.$$

  Løsning:

$$c_1 = 3, \quad c_2 = -1.$$

- For $L(\mathbf{w}_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 + c_2 \\ c_1 + c_2 \end{bmatrix}.$$

  Løsning:

$$c_1 = 2, \quad c_2 = -1.$$

Trin 3: Afbildningsmatricen $\beta[L]_\gamma$

De fundne koordinater opstilles som søjler i matricen:

$$\beta[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Konklusion

Afbildningsmatricen er:

$$\beta[L]_\gamma = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Opgave d

Givet matricen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vi skal finde matricens egenværdier, baser for de tilhørende egenrum og afgøre, om matricen kan diagonalisere.

Trin 1: Det karakteristiske polynomium

Egenværdierne findes ved at løse ligningen

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Vi beregner determinanten:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Ved ekspansion får vi:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 0 & -1-\lambda \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}.$$

Første determinant:

$$\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-1-\lambda)(2-\lambda).$$

Anden determinant:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1-\lambda \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(-1)(-1-\lambda) = -1-\lambda.$$

Indsættelse giver:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda((-1-\lambda)(2-\lambda)) - 1 - \lambda.$$

Udvid og forenkl:

$$\det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Trin 2: Egenværdier

Egenværdierne findes ved at løse ligningen:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0.$$

Vi faktoriserer:

$$-\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 2\lambda + 1).$$

Løs den kvadratiske faktor:

$$-\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

hvor $a = -1, b = 2, c = 1$:

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

Egenværdierne er derfor:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 1 - \sqrt{2}.$$

Trin 3: Egenvektorer

For hver egenværdi λ_i løser vi $(A - \lambda_i I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Egenvektor til $\lambda_1 = 1$:

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rækkereduktion giver:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor til $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$:

$$A - (1+\sqrt{2})I = \begin{bmatrix} -1-\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -2-\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Løsning giver:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1+\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Egenvektor til $\lambda_3 = 1 - \sqrt{2}$:

$$A - (1-\sqrt{2})I = \begin{bmatrix} -1+\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & -2+\sqrt{2} & 2 \\ -1 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Løsning giver:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Trin 4: Diagonalisering

Da vi har tre lineært uafhængige egenvektorer, kan matricen diagonalisere.

Trin 5 og konklusion: Matricer Q og Λ

Diagonaliseringsmatricen og diagonalmatricen er:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Opgave e)

Vi betragter det reelle vektorrum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ bestående af 2×2 matricer med reelle koefficienter. Der er givet en ordnet basis for V:

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Afbildningen $M : V \to V$ er defineret ved:

$$M(A) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot A, \quad A \in V.$$

Trin 1: Beregning af afbildningsmatricen $_\beta[M]_\beta$

Vi finder afbildningen af hver basisvektor i β under M og udtrykker resultatet i basis β:

$$M\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

Koordinater: $(4, 0, 2, 0)$.

$$M\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

Koordinater: $(0, 6, 0, 3)$.

$$M\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

Koordinater: $(0, 0, 4, 0)$.

$$M\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}4 & 6\\2 & 3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 6\\0 & 3\end{bmatrix},$$

Koordinater: $(0, 0, 0, 6)$.

Afbildningsmatricen $\beta[M]_\beta$ er:

$$\beta[M]_\beta = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0 & 0\\2 & 0 & 4 & 0\\0 & 3 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

Trin 2: Dimension af ker(M) og im(M)

Afbildningsmatricen $\beta[M]_\beta$ har dimension 4×4. Vi reducerer den til rækkeeselonform for at finde rang og kernedimension.

$$\begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0 & 0\\2 & 0 & 4 & 0\\0 & 3 & 0 & 6\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Rang af $\beta[M]_\beta = 4$.
Fra dimensionsteoremet:

$$\dim(\ker(M)) + \dim(\mathrm{im}(M)) = \dim(V) = 4.$$

Her er $\dim(\mathrm{im}(M)) = \mathrm{rang}(\beta[M]_\beta) = 4$, så:

$$\dim(\ker(M)) = 4 - 4 = 0.$$

Konklusion

1. Afbildningsmatricen er:

$$\beta[M]_\beta = \begin{bmatrix}4 & 0 & 0 & 0\\0 & 6 & 0 & 0\\2 & 0 & 4 & 0\\0 & 3 & 0 & 6\end{bmatrix}.$$

2. Dimensionerne af kern- og billederummet er:

$$\dim(\ker(M)) = 0, \quad \dim(\mathrm{im}(M)) = 4.$$

Dette viser, at M er en injektiv og surjektiv transformation.