Hjemmeopgave 1 - Matematik 1a

Victor Jonathan Hald

s183710

29-09-2024

Opgave a)

Afgør om følgende to logiske udsagn er logisk ækvivalente:

$(P \wedge Q) \Rightarrow R$ **og** $\neg P \vee (Q \Rightarrow R)$

Vi opstiller vores sandhedstabel.

P	Q	R	¬P	P∧Q	Q⇒R	(P∧Q)⇒R	¬P∨(Q⇒R)
1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1

Som vi kan se, er de sidste to søjler identiske, og derfor logisk ækvivalente.

Opgave b)

Find alle reelle tal x som opfylder ligningen $|x-1|^2 = x^2 + |x|$**.**

For at løse ligningen $ |x-1|^2 = x^2 + |x| $, deler vi problemet op i to tilfælde baseret på værdien af x.

Tilfælde 1: $x \geq 0$

Når $x \geq 0$, er $ |x| = x $ og $ |x-1| = x-1 $ (da $x \geq 1$ eller $0 \leq x < 1$).

Ligningen bliver:

$$(x-1)^2 = x^2 + x$$

Udvider venstresiden:

$$x^2-2x+1=x^2+x$$

Trækker x^2 fra begge sider:

$$-2x+1=x$$

Løser for x:

$$1=3x\Longrightarrow x=\frac{1}{3}$$

Da $x=\frac{1}{3}$ opfylder $x\geq 0$, er det en gyldig løsning i dette tilfælde.

Tilfælde 2: $x<0$

Når $x<0$, er $ |x| = -x $ og $ |x-1| = -(x-1) = -x+1 $.

Ligningen bliver:

$$(-x+1)^2=x^2+(-x)$$

Udvider venstresiden:

$$x^2-2x+1=x^2-x$$

Trækker x^2 fra begge sider:

$$-2x+1=-x$$

Løser for x:

$$1=x$$

Men $x=1$ opfylder ikke $x<0$, så der er ingen løsning i dette tilfælde.

Samlet resultat

Den eneste løsning, der opfylder alle betingelserne, er $x=\frac{1}{3}$.

Derfor er den entydige løsning:

$$x=\frac{1}{3}$$

Opgave c)

Givet funktionen f : $R\rightarrow R$ med forskriften

$$f(x)=4x^2+4|x-1|.$$

1. Beregn funktionens værdimængde.

Vi skal beregne $Vm(f)$.

For at finde værdimængden af funktionen $ f(x) = 4x^2 + 4|x - 1| $, betragter vi først, hvordan funktionen opfører sig for forskellige værdier af $ x $.

- For $ x \geq 1 $:

  $$f(x) = 4x^2 + 4(x-1) = 4x^2 + 4x - 4$$

  Dette er en parabel, der åbner opad med toppunkt i $ x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} $. Men da vi kun betragter $ x \geq 1 $, vil funktionen stige uden grænse.

- For $ x < 1 $:

  $$f(x) = 4x^2 + 4(1-x) = 4x^2 - 4x + 4$$

  Dette er også en parabel, der åbner opad med toppunkt i $ x = \frac{b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} $. I dette interval vil funktionen stige uden grænse.

Da begge dele af funktionen er kontinuerte og voksende, når $ x $ går mod uendelig, så vil værdimængden også være fra 0 (for $ x = 1 $) til uendeligt.

Således er værdimængden for funktionen $ f(x) = 4x^2 + 4|x - 1| $ givet ved:

$$Vm(f) = ¿$$

2. Afgør om funktionen er injektiv

En funktion er injektiv, hvis der for to vilkårlige punkter $ x_1 $ og $ x_2 $ i definitionsmængden gælder:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

Men da funktionen består af to dele, der begge er kontinuerte og voksende for henholdsvis $ x \geq 1 $ og $ x < 1 $, vil der altid findes to forskellige $ x $-værdier, der giver samme $ f(x) $.

Således er funktionen **ikke** injektiv.

Opgave d)

Der opgives for et komplekst tal $ z $ at $ \arg(z) = -\pi/3 $ og $ |z|= 2 $.

1. Beregn de polære koordinater for det komplekse tal z^7.

2. Skriv tallet z^7 på rektangulær form.

For at løse opgaven, skal vi først konvertere det givne komplekse tal $ z $ til polære koordinater og derefter beregne $ z^7 $.

Trin 1: Konvertering til polære koordinater

Det givne komplekse tal $ z $ har en vinkel på $ -\frac{\pi}{3} $ og en størrelse (modulus) på 2. Polære koordinater for et komplekst tal er givet ved:

$$z=|z)\cdot(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$$

hvor $ |z| = 2 $ og $ \theta = -\frac{\pi}{3} $.

Dette giver os:

$$z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Beregning af cos og sin:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Så:

$$z=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$$

Trin 2: Beregning af $ z^7 $

For at beregne $ z^7 $ bruger vi DeMoivres formel, som siger:

$$(r\cdot(cos\theta+i\cdot sin\theta))^n=r^n\cdot(cos(n\theta)+i\cdot sin(n\theta))$$

Dvs.

$$z^n=|z)^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$$

hvor $ n = 7 $, $ |z| = 2 $, og $ \theta = -\frac{\pi}{3} $.

Beregning af $ z^7 $:

$$z^7=2^7\left(\cos\left(7\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(7\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)$$

Vi kan reducere vinklen:

$$Arg(z)=-\frac{7\pi}{3}+2\pi=-\frac{7\pi}{3}+\frac{6\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$$

Så det er den samme vinkel, som vi startede med.

Beregning af cos og sin:

$$\cos\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{7\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Så:

$$z^7=2^7\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=128\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Trin 3: Skriv $ z^7 $ på rektangulær form

Vi multiplicerer koefficienterne med cos og sin:

$$z^7=128\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=64-64i\sqrt{3}$$

Svar:

1. De polære koordinater for $ z^7 $ er givet ved:

$$z^7=\left(128,\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

2. Det komplekse tal $ z^7 $ på rektangulær form er:

$$z^7=64-64i\sqrt{3}$$

Opgave e)

Løs den binome ligning $z^3=i$. Svarene ønskes givet på rektangulær form samt indtegnet i den komplekse talplan.

Løsningen til ligningen kan findes ved at isolere $ z $. Vi starter med at skrive $ i $ på polær form, hvilket er $ i = e^{i\pi/2} $. Således har vi:

$$z^3=e^{i\pi/2}$$

Løsningen til denne ligning kan findes ved at tage 3. rod på begge sider:

$$z=e^{i(\pi/2+2p\pi)/3}, \text{for } p=0,1,2$$

Dette giver tre forskellige løsninger:

1. For $ p = 0 $:

$$z_1=e^{i((\pi/2)+(2\cdot 0\cdot\pi))/3}=e^{i(\pi/6)}=\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6)=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

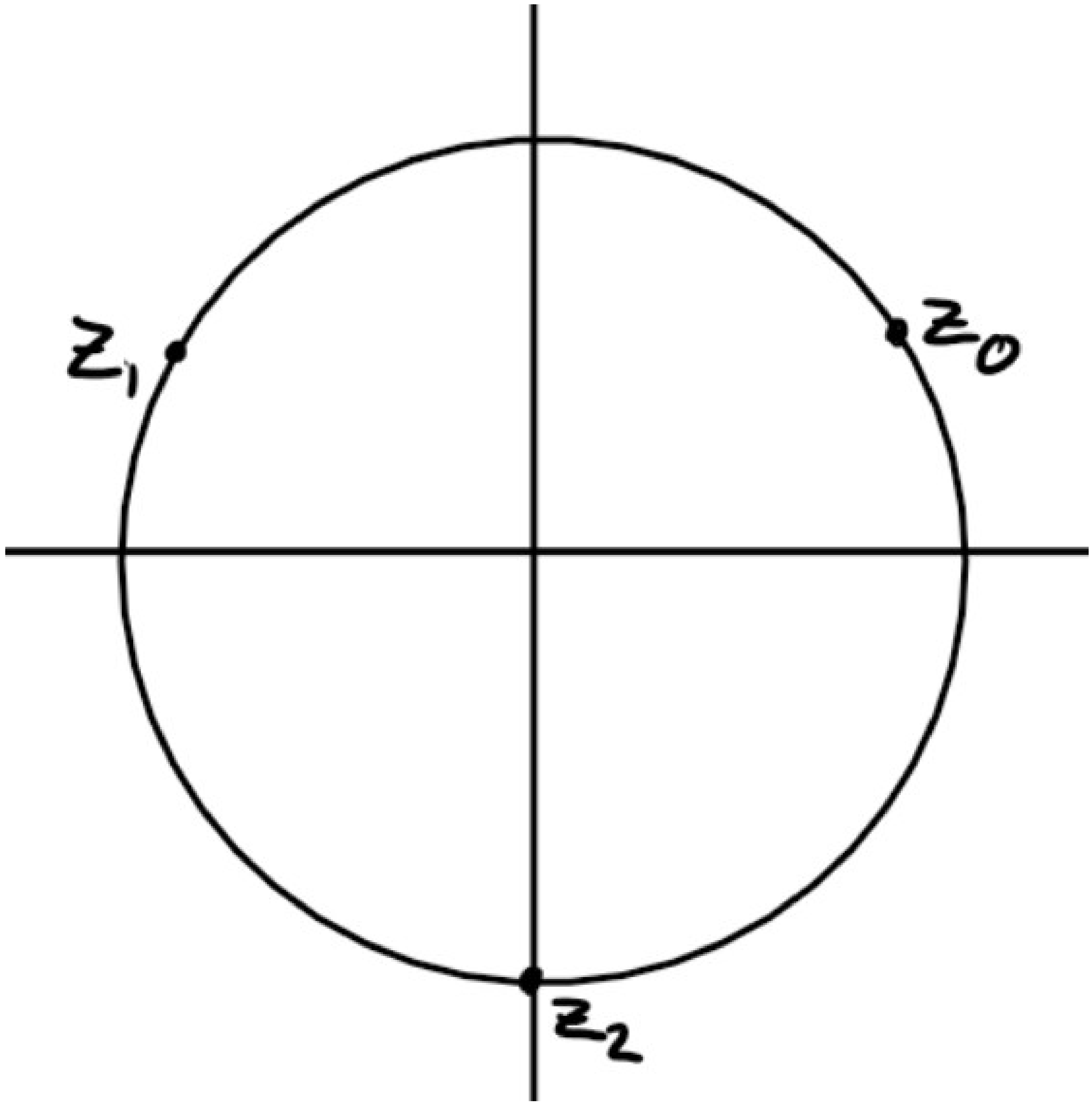
2. For $ p = 1 $:

$$z_2 = e^{i((\pi/2)+(2\cdot 1\cdot \pi))/3} = \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

3. For $ p = 2 $:

$$z_3 = e^{i((\pi/2)+(2\cdot 2\cdot \pi))/3} = e^{i((\pi/2)+(4\cdot \pi))/3} = \cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3) = -i$$

Disse løsninger kan nu indtegnes i den komplekse talplan.



Opgave f)

Som sædvanligt betegnes hovedargument af et komplekst tal z med $Arg(z)$. Afgør om følgende udsagn er sande:

1. $ \text{Im}(z) > 0 \Rightarrow \text{Arg}(z) > 0 $

For at afgøre om dette udsagn er sandt, skal vi overveje definitionen af den imaginære del og argumentet for et komplekst tal. Hvis $ z = a + bi $ (hvor $ a $ og $ b $ er reelle tal), så er $ \text{Im}(z) = b $.

- Hvis $ b > 0 $, så er $ \text{Im}(z) > 0 $.
- Argumentet for $ z $, $ \text{Arg}(z) $, er vinklen mellem den positive reelle akse og linjen fra origo til punktet $ (a, b) $ i det komplekse plan.

For at $ \text{Arg}(z) > 0 $, skal punktet $ (a, b) $ befinde sig i første eller anden kvadrant.

Udsagnet er altså sandt.

2. $ \text{Arg}(z) \leq 0 \Rightarrow \text{Im}(z) \leq 0 $

Dette udsagn siger, at hvis argumentet for $ z $ er mindre end eller lig med nul, så er den imaginære del af $ z $ mindre end eller lig med nul. Vi skal overveje de mulige vinkler, som $ \text{Arg}(z) $ kan have:

- Hvis $ \text{Arg}(z) = 0 $, så ligger $ z $ på den reelle akse, og $ \text{Im}(z) = 0 $.
- Hvis $ \text{Arg}(z) < 0 $, så ligger $ z $ i tredje eller fjerde kvadrant.

For at $ \text{Arg}(z) \leq 0 $, skal punktet $ (a, b) $ befinde sig i tredje eller fjerde kvadrant.

Udsagnet passer altså.

3. $ \text{Im}(z) = 0 \Rightarrow \text{Arg}(z) = 0 $

Dette udsagn siger, at hvis den imaginære del af $ z $ er nul, så er argumentet for $ z $ nul. Dette passer ikke, da $Arg(z)=\pi$ også gælder for et komplekst tal med $Im(z)=0$.

Konklusion

Kun de første to udsagn er sande. Det sidste passer ikke.