Giải tích số

Giải hệ phương trình tuyến tính bậc nhất bằng phương pháp lặp đơn - lặp Jacobi

Nhóm 3 - lớp 125001 - học kỳ 20202

Viện Toán ứng dụng và Tin học
Trường đại học Bách Khoa Hà Nội

Thành viên nhóm

1. Nguyễn Văn Đại - 20195847
2. Trương Đăng Thắng - 20195916
3. Lê Văn Thẩm - 20195914
4. Bùi Khương Duy - 20195864
5. Nguyễn Gia Giang - 20195867

Nội dung chính

1. Phương pháp lặp đơn
   - Cơ sở lý thuyết về chuẩn vector
   - Nội dung phương pháp lặp đơn
   - Sai số
   - Ví dụ
2. Phương pháp lặp Jacobi
   - Ý tưởng
   - Ma trận chéo trội hàng
   - Ma trận chéo trội cột
3. Thuật toán và mã giả
   - Phương pháp lặp đơn
   - Phương pháp lặp Jacobi
   - Đánh giá phương pháp

Đặt vấn đề

Đặt vấn đề

Vấn đề: Các phương pháp trực tiếp giải đúng hệ phương trình đại số tuyến tính thường phải thực hiện một số lượng tính toán khổng lồ. Khi thực hiện các phép tính, ta luôn phải thực hiện làm tròn số, tính toán với số gần đúng. Mà với hệ phương trình đại số tuyến tính, một chút thay đổi trong hệ số có thể dẫn tới nghiệm của hệ có sai số lớn.

Đặt vấn đề

Vấn đề: Các phương pháp trực tiếp giải đúng hệ phương trình đại số tuyến tính thường phải thực hiện một số lượng tính toán khổng lồ. Khi thực hiện các phép tính, ta luôn phải thực hiện làm tròn số, tính toán với số gần đúng. Mà với hệ phương trình đại số tuyến tính, một chút thay đổi trong hệ số có thể dẫn tới nghiệm của hệ có sai số lớn.

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2.01x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Đặt vấn đề

Vấn đề: Các phương pháp trực tiếp giải đúng hệ phương trình đại số tuyến tính thường phải thực hiện một số lượng tính toán khổng lồ. Khi thực hiện các phép tính, ta luôn phải thực hiện làm tròn số, tính toán với số gần đúng. Mà với hệ phương trình đại số tuyến tính, một chút thay đổi trong hệ số có thể dẫn tới nghiệm của hệ có sai số lớn.

Ví dụ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2.01x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Tuy nhiên

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ 2.01x_1 + 1.01x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Nội dung chính

Nội dung chính

Chuẩn của vector và ma trận

1.1 Định nghĩa chuẩn: Chuẩn là một ánh xạ $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ và có các tính chất như sau:

Chuẩn của vector và ma trận

1.1 Định nghĩa chuẩn: Chuẩn là một ánh xạ $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ và có các tính chất như sau:

+) $\|u\| \geq 0 \quad "=" \Leftrightarrow u = 0$

+) $\|ku\| = |k|\|u\| \quad \forall k \in \mathbb{R}$

+) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

Chuẩn của vector và ma trận

1.1 Định nghĩa chuẩn: Chuẩn là một ánh xạ $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ và có các tính chất như sau:

+) $\|u\| \geq 0 \quad "=" \Leftrightarrow u = 0$

+) $\|ku\| = |k|\|u\| \quad \forall k \in \mathbb{R}$

+) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

1.2 Chuẩn vector

+) $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{|x_i|\}$ <Chuẩn cực đại>

+) $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ <Chuẩn tuyệt đối>

+) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ <Chuẩn Euclid>

Chuẩn của vector và ma trận

1.1 Định nghĩa chuẩn: Chuẩn là một ánh xạ $\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ và có các tính chất như sau:

+) $\|u\| \geq 0 \quad "=" \Leftrightarrow u = 0$

+) $\|ku\| = |k|\|u\| \quad \forall k \in \mathbb{R}$

+) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

1.2 Chuẩn vector

+) $\|x\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}}\{|x_i|\}$ <Chuẩn cực đại>

+) $\|x\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ <Chuẩn tuyệt đối>

+) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ <Chuẩn Euclid>

Chuẩn của vector và ma trận

1.3 Sự hội tụ của dãy vector

+) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \|x_n - x^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow x_{n_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \ \forall i$

Chuẩn của vector và ma trận

1.3 Sự hội tụ của dãy vector

+) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \|x_n - x^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow x_{n_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \ \forall i$

+) Nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo một chuẩn nào đó thì $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo mọi chuẩn

Chuẩn của vector và ma trận

1.3 Sự hội tụ của dãy vector

+) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \|x_n - x^*\| \xrightarrow{\quad n\to\infty \quad} 0 \Leftrightarrow x_{n_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \ \ \forall i$

+) Nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo một chuẩn nào đó thì $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo mọi chuẩn

1.4 Chuẩn của ma trận

$$\|A\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{<Chuẩn theo hàng>}$$

Chuẩn của vector và ma trận

1.3 Sự hội tụ của dãy vector

+) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \|x_n - x^*\| \xrightarrow{\quad n\to\infty \quad} 0 \Leftrightarrow x_{n_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \ \ \forall i$

+) Nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo một chuẩn nào đó thì $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo mọi chuẩn

1.4 Chuẩn của ma trận

a) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo hàng>

$\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo cột>

Chuẩn của vector và ma trận

1.3 Sự hội tụ của dãy vector

+) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \|x_n - x^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow x_{n_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \ \forall i$

+) Nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo một chuẩn nào đó thì $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo mọi chuẩn

1.4 Chuẩn của ma trận

a) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo hàng>

b) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo cột>

$\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ <Chuẩn Euclid>

Chuẩn của vector và ma trận

1.3 Sự hội tụ của dãy vector

+) $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^* \Leftrightarrow \|x_n - x^*\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow x_{n_i} \xrightarrow{n\to\infty} x_i^* \;\; \forall i$

+) Nếu $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo một chuẩn nào đó thì $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ theo mọi chuẩn

1.4 Chuẩn của ma trận

a) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo hàng>

b) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo cột>

c) $\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ <Chuẩn Euclid>

d) $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(\alpha^T\alpha)}$ <Chuẩn theo trị riêng>

Chuẩn của vector và ma trận

+) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo hàng>

+) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo cột>

+) $\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ <Chuẩn Euclid>

Ví dụ: Xét với ma trận

Chuẩn của vector và ma trận

+) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo hàng>

+) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo cột>

+) $\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ <Chuẩn Euclid>

Ví dụ: Xét với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Chuẩn của vector và ma trận

+) $\|A\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo hàng>

+) $\|A\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ <Chuẩn theo cột>

+) $\|A\|_2 = \left[\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}$ <Chuẩn Euclid>

Ví dụ: Xét với ma trận

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \|A\|_\infty & = & 8 \\ \|A\|_1 & = & 9 \\ \|A\|_2 & = & 7 \end{cases}$$

Nội dung chính

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Xét nhóm phương trình tuyến tính: $Ax = B$ (1)

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Xét nhóm phương trình tuyến tính: $Ax = B$ (1)

Ta sẽ đưa (1) về dạng: $x = \alpha x + \beta$

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Xét nhóm phương trình tuyến tính: $Ax = B$ (1)

Ta sẽ đưa (1) về dạng: $x = \alpha x + \beta$ điển hình là cách biến đổi sau:

Cách 1: $Ax = B \Leftrightarrow x = Ax + x - B \Leftrightarrow x = (A + I)x - B$

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Xét nhóm phương trình tuyến tính: $Ax = B$ (1)

Ta sẽ đưa (1) về dạng: $x = \alpha x + \beta$ điển hình là cách biến đổi sau:

Cách 1: $Ax = B \Leftrightarrow x = Ax + x - B \Leftrightarrow x = (A + I)x - B$

Đặt $\begin{cases} \alpha & = A + I \\ \beta & = -B \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x = \alpha x + \beta$

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Xét nhóm phương trình tuyến tính: $Ax = B$ (1)

Ta sẽ đưa (1) về dạng: $x = \alpha x + \beta$ điển hình là cách biến đổi sau:

Cách 1: $Ax = B \Leftrightarrow x = Ax + x - B \Leftrightarrow x = (A + I)x - B$

Đặt $\begin{cases} \alpha & = A + I \\ \beta & = -B \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x = \alpha x + \beta$

Cách 2: Đặt $\begin{cases} \alpha = I - A \\ \beta = B \end{cases} \Rightarrow x = \alpha x + \beta$

Ý tưởng

Tương tự như phương pháp lặp đơn để giải lớp phương trình $f(x) = 0$ ta cũng có thể mở rộng ra các không gian khác có cấu trúc phức tạp hơn như $\mathbb{R}^n$

Xét nhóm phương trình tuyến tính: $Ax = B$ (1)

Ta sẽ đưa (1) về dạng: $x = \alpha x + \beta$ điển hình là cách biến đổi sau:

Cách 1: $Ax = B \Leftrightarrow x = Ax + x - B \Leftrightarrow x = (A + I)x - B$

Đặt $\begin{cases} \alpha & = A + I \\ \beta & = -B \end{cases} \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x = \alpha x + \beta$

Cách 2: Đặt $\begin{cases} \alpha = I - A \\ \beta = B \end{cases} \Rightarrow x = \alpha x + \beta$

Từ đó ta xây dựng được dãy lặp cho phương pháp: $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \leq q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \leq q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Chứng minh:

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \leq q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Chứng minh: Từ $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Leftrightarrow x_n = f(x_{n-1})$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \leq q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Chứng minh: Từ $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Leftrightarrow x_n = f(x_{n-1})$

$\Rightarrow \forall x_n, y_n$ thì $\|f(x_n) - f(y_n)\| = \|\alpha x_n + \beta - (\alpha y_n + \beta)\| = \|\alpha(x_n - y_n)\|$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \leq q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Chứng minh: Từ $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Leftrightarrow x_n = f(x_{n-1})$

$\Rightarrow \forall x_n, y_n$ thì $\|f(x_n) - f(y_n)\| = \|\alpha x_n + \beta - (\alpha y_n + \beta)\| = \|\alpha(x_n - y_n)\|$

$\Rightarrow \|f(x_n) - f(y_n)\| \leq \|\alpha\|.\|x_n - y_n\| \leq q.\|x_n - y_n\|$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \le q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Chứng minh: Từ $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Leftrightarrow x_n = f(x_{n-1})$

$\Rightarrow \forall x_n, y_n$ thì $\|f(x_n) - f(y_n)\| = \|\alpha x_n + \beta - (\alpha y_n + \beta)\| = \|\alpha(x_n - y_n)\|$

$$\Rightarrow \|f(x_n) - f(y_n)\| \le \|\alpha\|.\|x_n - y_n\| \le q.\|x_n - y_n\|$$

Ta xét: $\|x_{n+p} - x_n\| = \|f(x_{n+p-1}) - f(x_{n-1})\|$

$$\Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| \le q.\|x_{n+p-1} - x_{n-1}\| \le \cdots \le q^n\|x_p - x_0\|$$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.1 Sự hội tụ của phương pháp

Nếu $\|\alpha\| \leq q < 1 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ (với x^* là nghiệm của hệ)

Chứng minh: Từ $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Leftrightarrow x_n = f(x_{n-1})$

$\Rightarrow \forall x_n, y_n$ thì $\|f(x_n) - f(y_n)\| = \|\alpha x_n + \beta - (\alpha y_n + \beta)\| = \|\alpha(x_n - y_n)\|$

$\Rightarrow \|f(x_n) - f(y_n)\| \leq \|\alpha\|.\|x_n - y_n\| \leq q.\|x_n - y_n\|$

Ta xét: $\|x_{n+p} - x_n\| = \|f(x_{n+p-1}) - f(x_{n-1})\|$

$\Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| \leq q.\|x_{n+p-1} - x_{n-1}\| \leq \cdots \leq q^n\|x_p - x_0\|$

Vì $q < 1 \Rightarrow q^n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow x_n$ là dãy Cauchy $\Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.2 Sự duy nhất của x^*

Khi $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ thì x^* là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.2 Sự duy nhất của x^*

Khi $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ thì x^* là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ta có $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Rightarrow n \to \infty$ thì $\begin{cases} x_n \to x^* \\ x_{n-1} \to x^* \end{cases} \Rightarrow x^* = \alpha x^* + \beta$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.2 Sự duy nhất của x^*

Khi $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x^*$ thì x^* là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ta có $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Rightarrow n \to \infty$ thì $\begin{cases} x_n \to x^* \\ x_{n-1} \to x^* \end{cases} \Rightarrow x^* = \alpha x^* + \beta$

<u>C/m tính duy nhất:</u> Giả sử $\begin{cases} x^* &= \alpha x^* + \beta \Leftrightarrow x^* = f(x^*) \\ y^* &= \alpha y^* + \beta \Leftrightarrow y^* = f(y^*) \end{cases}$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.2 Sự duy nhất của x^*

Khi $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ thì x^* là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ta có $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Rightarrow n \to \infty$ thì $\begin{cases} x_n \to x^* \\ x_{n-1} \to x^* \end{cases} \Rightarrow x^* = \alpha x^* + \beta$

C/m tính duy nhất: Giả sử $\begin{cases} x^* & = \alpha x^* + \beta \Leftrightarrow x^* = f(x^*) \\ y^* & = \alpha y^* + \beta \Leftrightarrow y^* = f(y^*) \end{cases}$

$$\Rightarrow \|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq q.\|x^* - y^*\|$$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.2 Sự duy nhất của x^*

Khi $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ thì x^* là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ta có $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Rightarrow n \to \infty$ thì $\begin{cases} x_n \to x^* \\ x_{n-1} \to x^* \end{cases} \Rightarrow x^* = \alpha x^* + \beta$

C/m tính duy nhất: Giả sử $\begin{cases} x^* &= \alpha x^* + \beta \Leftrightarrow x^* = f(x^*) \\ y^* &= \alpha y^* + \beta \Leftrightarrow y^* = f(y^*) \end{cases}$

$\Rightarrow \|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq q.\|x^* - y^*\|$

$\Leftrightarrow (1-q)\|x^* - y^*\| \leq 0 \Rightarrow \|x^* - y^*\| = 0 \Rightarrow x^* = y^*$

Các vấn đề của phương pháp

1. **Sự hội tụ và duy nhất nghiệm**

1.2 Sự duy nhất của x^*

Khi $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x^*$ thì x^* là nghiệm duy nhất của phương trình (1)

Ta có $x_n = \alpha x_{n-1} + \beta \Rightarrow n \to \infty$ thì $\begin{cases} x_n \to x^* \\ x_{n-1} \to x^* \end{cases} \Rightarrow x^* = \alpha x^* + \beta$

C/m tính duy nhất: Giả sử $\begin{cases} x^* & = \alpha x^* + \beta \Leftrightarrow x^* = f(x^*) \\ y^* & = \alpha y^* + \beta \Leftrightarrow y^* = f(y^*) \end{cases}$

$\Rightarrow \|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq q.\|x^* - y^*\|$

$\Leftrightarrow (1-q)\|x^* - y^*\| \leq 0 \Rightarrow \|x^* - y^*\| = 0 \Rightarrow x^* = y^*$

Như vậy: Nghiệm x^* là duy nhất

$\Rightarrow$ **Ta có điều phải chứng minh**

Nội dung chính

Các vấn đề của phương pháp

2. **Sai số**

Trong phương pháp lặp , muốn có nghiệm đúng ta phân tích theo công thức $x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta$ với $k \to \infty$. Tuy nhiên điều đó là không thể thực hiện được nên ta phải dừng ở bước thứ k, khi mà $x^{(k)} \sim x^*$.

Các vấn đề của phương pháp

2. **Sai số**

Trong phương pháp lặp , muốn có nghiệm đúng ta phân tích theo công thức $x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta$ với $k \to \infty$. Tuy nhiên điều đó là không thể thực hiện được nên ta phải dừng ở bước thứ k, khi mà $x^{(k)} \sim x^*$.
$\Rightarrow$ Ta cần phải thiết lập công thức sai số cho phương pháp lặp.

Các vấn đề của phương pháp

2. **Sai số**

Ta có:

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$$
$$x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta$$
$$\Rightarrow x^{(k+1)} - x^{(k)} = \alpha\big(x^{(k)} - x^{(k-1)}\big)$$
$$\Rightarrow \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \|\alpha\|.\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Các vấn đề của phương pháp

2. **Sai số**

Ta có:

$$x^{(k+1)} = \alpha x^{(k)} + \beta$$
$$x^{(k)} = \alpha x^{(k-1)} + \beta$$
$$\Rightarrow x^{(k+1)} - x^{(k)} = \alpha(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$
$$\Rightarrow \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \|\alpha\|.\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}
x^{(k+m)} - x^{(k)} &= (x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}) + \cdots + (x^{(k+1)} - x^{(k)}) \\
\|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| &= \|x^{(k+m)} - x^{(k+m-1)}\| + \cdots + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq (1 + \|\alpha\| + \cdots + \|\alpha\|^{m-1}).\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \\
&\leq \sum_{i=o}^{m-1} \|\alpha\|^i \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| = \frac{1 - \|\alpha\|^m}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|
\end{aligned}$$

Các vấn đề của phương pháp

$$\Rightarrow \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| \leq \frac{1 - \|\alpha\|^m}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Các vấn đề của phương pháp

$$\Rightarrow \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| \leq \frac{1 - \|\alpha\|^m}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Cố định k ta cho $m \to \infty$. Vì $\|\alpha\| < 1$ nên $\|\alpha\|^m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ ta có:

Các vấn đề của phương pháp

$$\Rightarrow \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| \leq \frac{1 - \|\alpha\|^m}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Cố định k ta cho $m \to \infty$. Vì $\|\alpha\| < 1$ nên $\|\alpha\|^m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ ta có:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Các vấn đề của phương pháp

$$\Rightarrow \|x^{(k+m)} - x^{(k)}\| \leq \frac{1 - \|\alpha\|^m}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Cố định k ta cho $m \to \infty$. Vì $\|\alpha\| < 1$ nên $\|\alpha\|^m \xrightarrow{m\to\infty} 0$ ta có:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{1}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

Hay $$\boxed{\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|} \qquad (I)$$

Các vấn đề của phương pháp

Khai triển tiếp tục công thức (I) ta được:

Các vấn đề của phương pháp

Khai triển tiếp tục công thức (I) ta được:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|}.\|\alpha\|.\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|$$
$$\leq \ldots \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Các vấn đề của phương pháp

Khai triển tiếp tục công thức (I) ta được:

$$\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1-\|\alpha\|}.\|\alpha\|.\|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|$$
$$\leq \ldots \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

Vậy
$$\boxed{\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1-\|\alpha\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|} \qquad (II)$$

Các vấn đề của phương pháp

Công thức sai số hậu nghiệm (I) thuận lợi cho việc tính toán trên máy tính:

$$\boxed{\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}$$

Các vấn đề của phương pháp

Công thức sai số hậu nghiệm (I) thuận lợi cho việc tính toán trên máy tính:

$$\boxed{\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|}\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}$$

Công thức sai số tiên nghiệm (II) thuận lợi khi cần tìm phép lặp thứ k cần thiết để đạt được sai số mong muốn:

$$\boxed{\|x^* - x^{(k)}\| \leq \frac{\|\alpha\|^k}{1 - \|\alpha\|}\|x^{(1)} - x^{(0)}\|}$$

Nội dung chính

Ví dụ

Cho HPT

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & -0.3 \\ 0.3 & 1.1 & -0.3 \\ 0.2 & -0.1 & 1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

Giải bằng máy tính Casio ta có nghiệm: $\begin{cases} x_1 = 0.5027027027 \\ x_2 = 0.3598455598 \\ x_3 = 0.4888030888 \end{cases}$

Biến đổi ma trận thành $x = \alpha x + \beta$ với $\alpha = I - A$ ta có:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.4 & 0.3 \\ -0.3 & -0.1 & 0.3 \\ -0.2 & 0.1 & -0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$\|\alpha\|_\infty = 0.7 \Rightarrow$ có thể tiến hành lặp đơn cho phương trình

Nội dung chính

Nội dung chính

Ý tưởng

Phương pháp lặp Jacobi = Phương pháp lặp đơn cho $Ax = b$ với A là ma trận chéo trội

Ý tưởng

Phương pháp lặp Jacobi = Phương pháp lặp đơn cho $Ax = b$ với A là ma trận chéo trội

$Ax = b \Rightarrow x = Bx + d, \quad \|B\|_{(\infty,1,2)} = q < 1 \rightarrow$ lặp đơn

Ý tưởng

Phương pháp lặp Jacobi = Phương pháp lặp đơn cho $Ax = b$ với A là ma trận chéo trội

$Ax = b \Rightarrow x = Bx + d, \quad \|B\|_{(\infty,1,2)} = q < 1 \rightarrow$ lặp đơn

Định nghĩa chéo trội:

Giá trị tuyệt đối của các phần tử trên đường chéo chính lớn hơn tổng các giá trị tuyệt đối của các phần tử còn lại nằm cùng hàng (hoặc cột)

Ý tưởng

Phương pháp lặp Jacobi = Phương pháp lặp đơn cho $Ax = b$ với A là ma trận chéo trội

$Ax = b \Rightarrow x = Bx + d, \quad \|B\|_{(\infty,1,2)} = q < 1 \rightarrow$ lặp đơn

Định nghĩa chéo trội:

Giá trị tuyệt đối của các phần tử trên đường chéo chính lớn hơn tổng các giá trị tuyệt đối của các phần tử còn lại nằm cùng hàng (hoặc cột)

Chéo trội hàng

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.5 & 0.4 \\ 0,2 & 1.5 & 0.8 \\ 1 & 0.6 & 2 \end{bmatrix}$$

Chéo trội cột

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0.4 \\ 0.1 & 3.3 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Ma trận chéo trội không suy biến

Trường hợp trội hàng

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ có: } |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Chứng minh rằng: A không suy biến

Ma trận chéo trội không suy biến

Trường hợp trội hàng

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ có: } |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1,n}$$

Chứng minh rằng: A không suy biến

<u>Chứng minh:</u> Giả sử A không khả nghịch

Ma trận chéo trội không suy biến

Trường hợp trội hàng

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ có: } |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Chứng minh rằng: A không suy biến

Chứng minh: Giả sử A không khả nghịch

$\Rightarrow$Hệ thuần nhất: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm

Ma trận chéo trội không suy biến

Trường hợp trội hàng

$$A \in M_n(\mathbb{K}) \text{ có: } |a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Chứng minh rằng: A không suy biến

Chứng minh: Giả sử A không khả nghịch

$\Rightarrow$Hệ thuần nhất: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$ có vô số nghiệm

Trong đó có nghiệm không tầm thường, giả sư nghiệm đó là:
$X_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ và đặt $|x_i^0| = max\{|x_1^0|; |x_2^0|; \ldots; |x_n^0|\}$

Ma trận chéo trội không suy biến

Xét phương trình thứ i của hệ trên ta có:

Ma trận chéo trội không suy biến

Xét phương trình thứ i của hệ trên ta có:

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0 = 0 \\
\Leftrightarrow & a_{ii}x_i^0 \;= -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_i^0 \\
\Rightarrow & |a_{ii}x_i^0| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j^0| \\
\Leftrightarrow & |a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ (Vô lý)}
\end{aligned}
$$

Ma trận chéo trội không suy biến

Xét phương trình thứ i của hệ trên ta có:

$$
\begin{aligned}
& a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0 = 0 \\
\Leftrightarrow & a_{ii}x_i^0 \;= -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_i^0 \\
\Rightarrow & |a_{ii}x_i^0| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j^0| \\
\Leftrightarrow & |a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ (Vô lý)}
\end{aligned}
$$

Do đó A khả nghịch $\Rightarrow \det A \neq 0$

Ma trận chéo trội không suy biến

Xét phương trình thứ i của hệ trên ta có:

$$
\begin{aligned}
a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \cdots + a_{in}x_n^0 &= 0 \\
\Leftrightarrow a_{ii}x_i^0 &= -\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_i^0 \\
\Rightarrow |a_{ii}x_i^0| &\leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}||x_j^0| \\
\Leftrightarrow |a_{ii}| &\leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ (Vô lý)}
\end{aligned}
$$

Do đó A khả nghịch $\Rightarrow \det A \neq 0$
Tương tự với ma trận chéo trội cột ta đưa về A^T rồi xử lý tương tự như trên.

Nội dung chính

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Định nghĩa:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Định nghĩa:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Với giả thiết ma trận A có tính chéo trội khi đó $a_{ii} \neq 0$ ta xét ma trận bổ xung của hệ phương trình như sau:

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Định nghĩa:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Với giả thiết ma trận A có tính chéo trội khi đó $a_{ii} \neq 0$ ta xét ma trận bổ xung của hệ phương trình như sau:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Định nghĩa:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad i = \overline{1, n}$$

Với giả thiết ma trận A có tính chéo trội khi đó $a_{ii} \neq 0$ ta xét ma trận bổ xung của hệ phương trình như sau:

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{r_i}{a_{ii}} \to r_i} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} & \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 1 & \frac{b_n}{a_{nn}} \end{array}\right]$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Hệ được viết lại thành: $A^{'}x = d$ với

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Hệ được viết lại thành: $A^{'}x = d$ với

$$A^{'} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Hệ được viết lại thành: $A^{'}x = d$ với

$$A^{'} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = Bx + d \text{ với } B = I - A^{'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Hệ được viết lại thành: $A^{'}x = d$ với

$$A^{'} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 1 & \dots & \frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad d = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = Bx + d \text{ với } B = I - A^{'} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Như vậy ta luôn có: $\|B\|_\infty = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \left\{ \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{m} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right\} < 1$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 2 \\ 10 & 35 & -18 \\ 8 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 2 \\ 10 & 35 & -18 \\ 8 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ta có: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -5 & 2 & 7 \\ 10 & 35 & -18 & 12 \\ 8 & 4 & 15 & 5 \end{array}\right]$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 2 \\ 10 & 35 & -18 \\ 8 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ta có: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -5 & 2 & 7 \\ 10 & 35 & -18 & 12 \\ 8 & 4 & 15 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow [A'|d] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-5}{15} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ \frac{10}{35} & 1 & \frac{-18}{35} & \frac{12}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & 1 & \frac{5}{15} \end{array}\right]$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 2 \\ 10 & 35 & -18 \\ 8 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ta có: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -5 & 2 & 7 \\ 10 & 35 & -18 & 12 \\ 8 & 4 & 15 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow [A^{'}|d] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-5}{15} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ \frac{10}{35} & 1 & \frac{-18}{35} & \frac{12}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & 1 & \frac{5}{15} \end{array}\right]$

$$\Rightarrow x = (I - A^{'})x + d$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Ví dụ

$$\begin{bmatrix}15 & -5 & 2\\ 10 & 35 & -18\\ 8 & 4 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\ 12\\ 5\end{bmatrix}$$

Ta có: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c}15 & -5 & 2 & 7\\ 10 & 35 & -18 & 12\\ 8 & 4 & 15 & 5\end{array}\right] \Rightarrow [A^{'}|d] = \left[\begin{array}{ccc|c}1 & \frac{-5}{15} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15}\\ \frac{10}{35} & 1 & \frac{-18}{35} & \frac{12}{15}\\ \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & 1 & \frac{5}{15}\end{array}\right]$

$$\Rightarrow x = (I - A^{'})x + d = \begin{bmatrix}0 & \frac{5}{15} & \frac{-2}{15}\\ \frac{-10}{35} & 0 & \frac{18}{35}\\ \frac{-8}{15} & \frac{4}{15} & 0\end{bmatrix} x + \begin{bmatrix}\frac{7}{15}\\ \frac{12}{15}\\ \frac{5}{15}\end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 15 & -5 & 2 \\ 10 & 35 & -18 \\ 8 & 4 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Ta có: $[A|b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 15 & -5 & 2 & 7 \\ 10 & 35 & -18 & 12 \\ 8 & 4 & 15 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow [A^{'}|d] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{-5}{15} & \frac{2}{15} & \frac{7}{15} \\ \frac{10}{35} & 1 & \frac{-18}{35} & \frac{12}{15} \\ \frac{8}{15} & \frac{4}{15} & 1 & \frac{5}{15} \end{array}\right]$

$$\Rightarrow x = (I - A^{'})x + d = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{15} & \frac{-2}{15} \\ \frac{-10}{35} & 0 & \frac{18}{35} \\ \frac{-8}{15} & \frac{4}{15} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{7}{15} \\ \frac{12}{15} \\ \frac{5}{15} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow q = \|B\|_\infty = \max\left\{\frac{7}{15}; \frac{28}{35}; \frac{12}{15}\right\} = 0.8 < 1$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Với ý tưởng như trên ta có thể thực hiện đơn giản hơn như sau:

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Với ý tưởng như trên ta có thể thực hiện đơn giản hơn như sau:

Đặt $T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \ldots; \frac{1}{a_{nn}}\right)$ ta có:

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Với ý tưởng như trên ta có thể thực hiện đơn giản hơn như sau:

Đặt $T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \ldots; \frac{1}{a_{nn}}\right)$ ta có:

$Ax = b \Leftrightarrow TAx = Tb \Leftrightarrow x = (I - TA)x + Tb$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Với ý tưởng như trên ta có thể thực hiện đơn giản hơn như sau:

Đặt $T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \ldots; \frac{1}{a_{nn}}\right)$ ta có:

$Ax = b \Leftrightarrow TAx = Tb \Leftrightarrow x = (I - TA)x + Tb$

Với $B = I - TA,\ \ d = Tb$ ta đã xây dựng được dãy lặp:

$$x^{(n)} = Bx^{(n-1)} + d$$

Trường hợp ma trận chéo trội hàng

Với ý tưởng như trên ta có thể thực hiện đơn giản hơn như sau:

Đặt $T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \ldots; \frac{1}{a_{nn}}\right)$ ta có:

$Ax = b \Leftrightarrow TAx = Tb \Leftrightarrow x = (I - TA)x + Tb$

Với $B = I - TA,\ \ d = Tb$ ta đã xây dựng được dãy lặp:

$$x^{(n)} = Bx^{(n-1)} + d$$

Phương trình lặp trực tiếp cho x nên các công thức sai số áp dụng trực tiếp cho dãy lặp x_n

Nội dung chính

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Định nghĩa:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad j = \overline{1, n}$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Định nghĩa:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad j = \overline{1,n}$$

Ta tách hệ thành từng cột như sau:

$Ax = b \Leftrightarrow x_1[a_{i1}] + x_2[a_{i2}] + \cdots + x_n[a_{in}] = b$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Định nghĩa:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad j = \overline{1,n}$$

Ta tách hệ thành từng cột như sau:

$$Ax = b \Leftrightarrow x_1[a_{i1}] + x_2[a_{i2}] + \cdots + x_n[a_{in}] = b$$

$$\Leftrightarrow a_{11}x_1\frac{1}{a_{11}}[a_{i1}] + a_{22}x_2\frac{1}{a_{22}}[a_{i2}] + \cdots + a_{nn}x_n\frac{1}{a_{nn}}[a_{in}] = b$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Định nghĩa:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad j = \overline{1,n}$$

Ta tách hệ thành từng cột như sau:

$$Ax = b \Leftrightarrow x_1[a_{i1}] + x_2[a_{i2}] + \cdots + x_n[a_{in}] = b$$

$$\Leftrightarrow a_{11}x_1\frac{1}{a_{11}}[a_{i1}] + a_{22}x_2\frac{1}{a_{22}}[a_{i2}] + \cdots + a_{nn}x_n\frac{1}{a_{nn}}[a_{in}] = b$$

Đặt ẩn phụ: $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 \\ y_2 = a_{22}x_2 \\ \dots \\ y_n = a_{nn}x_n \end{cases}$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Định nghĩa:

$$|a_{jj}| > \sum_{i=1, i\neq j}^{n} |a_{ij}| \quad j = \overline{1,n}$$

Ta tách hệ thành từng cột như sau:

$$Ax = b \Leftrightarrow x_1[a_{i1}] + x_2[a_{i2}] + \cdots + x_n[a_{in}] = b$$

$$\Leftrightarrow a_{11}x_1\frac{1}{a_{11}}[a_{i1}] + a_{22}x_2\frac{1}{a_{22}}[a_{i2}] + \cdots + a_{nn}x_n\frac{1}{a_{nn}}[a_{in}] = b$$

Đặt ẩn phụ: $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 \\ y_2 = a_{22}x_2 \\ \dots \\ y_n = a_{nn}x_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + \frac{a_{12}}{a_{22}}y_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{nn}}y_n = b_1 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}}y_1 + y_2 + \cdots + \frac{a_{2n}}{a_{nn}}y_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{11}}y_1 + \frac{a_{n2}}{a_{22}}y_2 + \cdots + y_n = b_n \end{cases}$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Như vậy ta có thể viết lại hệ dưới dạng: $y = B_1 y + b$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Như vậy ta có thể viết lại hệ dưới dạng: $y = B_1 y + b$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{22}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{nn}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & \frac{-a_{n2}}{a_{22}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Như vậy ta có thể viết lại hệ dưới dạng: $y = B_1 y + b$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{22}} & \dots & \frac{-a_{1n}}{a_{nn}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{11}} & 0 & \dots & \frac{-a_{2n}}{a_{nn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{11}} & \frac{-a_{n2}}{a_{22}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Dễ dàng nhận thấy: $\|B_1\|_1 = \max\limits_{j=\overline{1,n}} \left\{ \sum\limits_{i=1, i\neq j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| \right\} < 1$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Cùng một ý tưởng như trên ta có cách thể hiện đơn giản như sau:

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Cùng một ý tưởng như trên ta có cách thể hiện đơn giản như sau:

$$T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \ldots; \frac{1}{a_{nn}}\right) \Rightarrow \begin{cases} D = T^{-1} = diag(a_{11}; a_{22}; \ldots; a_{nn}) \\ x = Ty \end{cases}$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Cùng một ý tưởng như trên ta có cách thể hiện đơn giản như sau:

$$T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \dots; \frac{1}{a_{nn}}\right) \Rightarrow \begin{cases} D = T^{-1} = diag(a_{11}; a_{22}; \dots; a_{nn}) \\ x = Ty \end{cases}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow ATy = b \Leftrightarrow y = (I - AT)y + b = B_1 y + b$$

Với sấp sỉ đầu $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ta xây dựng được dãy lặp:

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Cùng một ý tưởng như trên ta có cách thể hiện đơn giản như sau:

$$T = diag\left(\frac{1}{a_{11}}; \frac{1}{a_{22}}; \ldots; \frac{1}{a_{nn}}\right) \Rightarrow \begin{cases} D = T^{-1} = diag(a_{11}; a_{22}; \ldots; a_{nn}) \\ x = Ty \end{cases}$$

$$Ax = b \Leftrightarrow ATy = b \Leftrightarrow y = (I - AT)y + b = B_1 y + b$$

Với sấp sỉ đầu $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ta xây dựng được dãy lặp:

$$\boxed{y^{(n+1)} = B_1 y^{(n)} + b}$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 3 & -15 & 14 \\ -5 & 2 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 3 & -15 & 14 \\ -5 & 2 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = 10x_1 \\ y_2 = -15x_2 \\ y_3 = 24x_3 \end{cases}$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 3 & -15 & 14 \\ -5 & 2 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = 10x_1 \\ y_2 = -15x_2 \\ y_3 = 24x_3 \end{cases}$ hay $y = diag(10; -15; 24)x \Leftrightarrow x = Ty$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 3 & -15 & 14 \\ -5 & 2 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = 10x_1 \\ y_2 = -15x_2 \\ y_3 = 24x_3 \end{cases}$ hay $\quad y = diag(10; -15; 24)x \Leftrightarrow x = Ty$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{15} & \frac{-7}{14} \\ \frac{-3}{10} & 0 & \frac{-14}{24} \\ \frac{5}{10} & \frac{2}{15} & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Trường hợp ma trận chéo trội cột

Ví dụ

$$\begin{bmatrix} 10 & 8 & 7 \\ 3 & -15 & 14 \\ -5 & 2 & 24 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Đặt $\begin{cases} y_1 = 10x_1 \\ y_2 = -15x_2 \\ y_3 = 24x_3 \end{cases}$ hay $y = diag(10; -15; 24)x \Leftrightarrow x = Ty$

$$\Rightarrow y = \begin{bmatrix} 0 & \frac{8}{15} & \frac{-7}{14} \\ \frac{-3}{10} & 0 & \frac{-14}{24} \\ \frac{5}{10} & \frac{2}{15} & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|B_1\|_1 = \max\{0.8; 0.67; 0.875\} = 0.875 < 1$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C1: Sấp sỉ cho biến trung gian y_0 các công thức sai số chỉ áp dụng được cho y

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C1: Sấp sỉ cho biến trung gian y_0 các công thức sai số chỉ áp dụng được cho y

Ta có: $y = y^{(0)} \mapsto x^{(0)} = Ty^{(0)}$

$$y^{(1)} = B_1 y^{(0)} + d \mapsto x^{(1)} = Ty^{(1)}$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C1: Sấp sỉ cho biến trung gian y_0 các công thức sai số chỉ áp dụng được cho y

Ta có: $y = y^{(0)} \mapsto x^{(0)} = Ty^{(0)}$

$$y^{(1)} = B_1 y^{(0)} + d \mapsto x^{(1)} = Ty^{(1)}$$

$$\Rightarrow \|x^{(1)} - x^*\| \leq \|T\|.\|y^{(1)} - y^*\| \leq \|T\| \frac{q}{1-q} \|y^{(1)} - y^{(0)}\|$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C1: Sấp sỉ cho biến trung gian y_0 các công thức sai số chỉ áp dụng được cho y

Ta có: $y = y^{(0)} \mapsto x^{(0)} = Ty^{(0)}$

$$y^{(1)} = B_1 y^{(0)} + d \mapsto x^{(1)} = Ty^{(1)}$$

$$\Rightarrow \|x^{(1)} - x^*\| \leq \|T\|.\|y^{(1)} - y^*\| \leq \|T\| \frac{q}{1-q} \|y^{(1)} - y^{(0)}\|$$

$$y^{(2)} = B_1 y^{(1)} + d \mapsto x^{(2)} = Ty^{(2)}$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C1: Sấp sỉ cho biến trung gian y_0 các công thức sai số chỉ áp dụng được cho y

Ta có: $y = y^{(0)} \mapsto x^{(0)} = Ty^{(0)}$

$$y^{(1)} = B_1 y^{(0)} + d \mapsto x^{(1)} = Ty^{(1)}$$

$$\Rightarrow \|x^{(1)} - x^*\| \leq \|T\|.\|y^{(1)} - y^*\| \leq \|T\|\frac{q}{1-q}\|y^{(1)} - y^{(0)}\|$$

$$y^{(2)} = B_1 y^{(1)} + d \mapsto x^{(2)} = Ty^{(2)}$$

$$\Rightarrow \|x^{(2)} - x*\| \leq \|T\|\frac{q}{1-q}\|y^{(2)} - y^{(1)}\|$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C2: Xây dựng công thức lặp trực tiếp x và xây dựng sai số trực tiếp cho x mà không cần qua y

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C2: Xây dựng công thức lặp trực tiếp x và xây dựng sai số trực tiếp cho x mà không cần qua y

Xuất phát từ dãy lặp:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= B_1 y^{(n-1)} + b \\ \Leftrightarrow Ty^{(n)} &= TB_1 y^{(n-1)} + Tb \\ \Leftrightarrow Ty^{(n)} &= T(I - AT)T^{-1}Ty^{(n-1)} + Tb \\ \Leftrightarrow x^{(n)} &= (I - TA)x^{(n-1)} + Tb \\ \Leftrightarrow x^{(n)} &= Bx^{(n-1)} + Tb \end{aligned}$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

C2: Xây dựng công thức lặp trực tiếp x và xây dựng sai số trực tiếp cho x mà không cần qua y

Xuất phát từ dãy lặp:

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= B_1 y^{(n-1)} + b \\ \Leftrightarrow Ty^{(n)} &= TB_1 y^{(n-1)} + Tb \\ \Leftrightarrow Ty^{(n)} &= T(I - AT)T^{-1}Ty^{(n-1)} + Tb \\ \Leftrightarrow x^{(n)} &= (I - TA)x^{(n-1)} + Tb \\ \Leftrightarrow x^{(n)} &= Bx^{(n-1)} + Tb \end{aligned}$$

Vậy ta có: $x^{(n)} = Bx^{(n-1)} + d$ với $\begin{cases} B = I - TA \\ d = Tb \\ q = \|B_1\|_1 \end{cases}$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

Thiết lập công thức sai số:

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

Thiết lập công thức sai số: Ta có

$$\begin{aligned}
\|x^{(n)} - x^*\| &= \|Ty^{(n)} - Ty^*\| \le \|T\|.\|y^{(n)} - y^*\| \\
&\le \|T\|\frac{q}{1-q}\|y^{(n)} - y^{(n-1)}\| \\
&= \|T\|\frac{q}{1-q}\|T^{-1}x^{(n)} - T^{-1}x^{(n-1)}\| \\
&\le \|T\|.\|T^{-1}\|.\frac{q}{1-q}.\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\| \\
&\le \frac{\max|a_{ii}|}{\min|a_{ii}|}.\frac{q}{1-q}\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|
\end{aligned}$$

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

Sai số

Tương tự với khai triển của phương pháp lặp đơn ta có hai công thức sai số sau:

Phương pháp sấp sỉ nghiệm đầu và sai số cho ma trận chéo trội cột

Sai số

Tương tự với khai triển của phương pháp lặp đơn ta có hai công thức sai số sau:

Công thức hậu nghiệm:

$$\boxed{\|x^{(n)} - x^*\| \leq \frac{\max|a_{ii}|}{\min|a_{ii}|} \cdot \frac{q}{1-q} \|x^{(n)} - x^{(n-1)}\|}$$

Công thức tiên nghiệm:

$$\boxed{\|x^{(n)} - x^*\| \leq \frac{\max|a_{ii}|}{\min|a_{ii}|} \cdot \frac{q^n}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|}$$

Nội dung chính

Nội dung chính

Thuật toán

Lặp đơn

Thuật toán

Lặp đơn

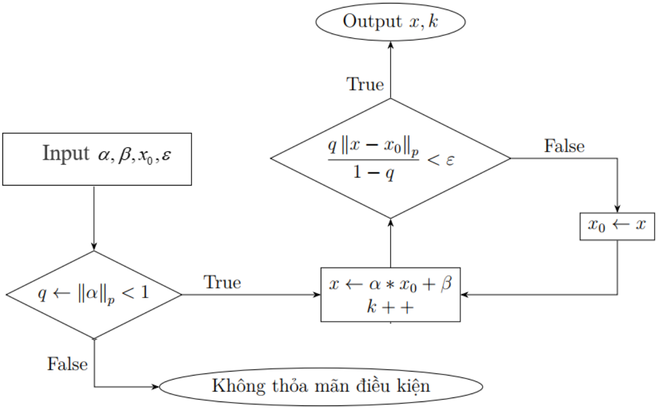
Trường hợp đầu vào thuần là $x = \alpha x + \beta$ với sai số hậu nghiệm:

```
STEP 1: Input alpha, beta, x0, epsilon
STEP 2: If: ||alpha|| < 1
              GO TO STEP 3
        ELSE:
              END.
STEP 3:
        x <-- alpha*x0 + beta
STEP 4: If: q.||x-x0|| < epsilon*(1-q)
              OUTPUT: x
        ELSE:
              x0 <-- x
              GO TO STEP 2
```

Thuật toán

Lặp đơn

Sơ đồ khối:



Thuật toán

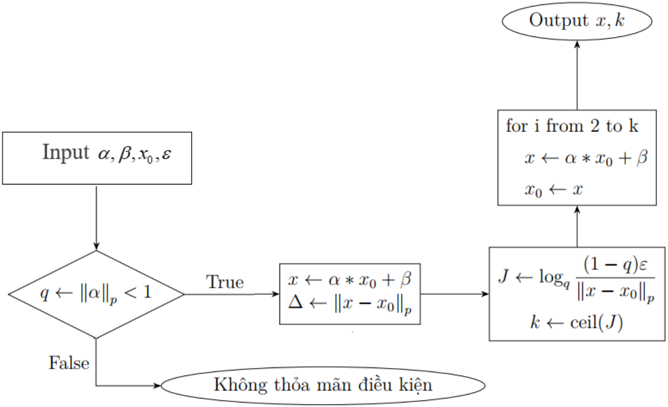
Lặp đơn

Trường hợp đầu vào là $x = \alpha x + \beta$ với sai số tiên nghiệm:

```
STEP 1: Input alpha, beta, x0, epsilon
STEP 2: If: ||alpha|| < 1
              GO TO STEP 3
        ELSE:
              END.
STEP 3: x <-- alpha*x0 + beta
        J <-- log_{q}[(1-q)*epsilon]/||x-x0||
        k <-- Ceil(J)
        FOR: i from 2 to k
              x  <-- alpha*x0 + beta
              x0 <-- x
STEP 4: OUTPUT x, k
```

Lặp đơn
Thuật toán

Sơ đồ khối:



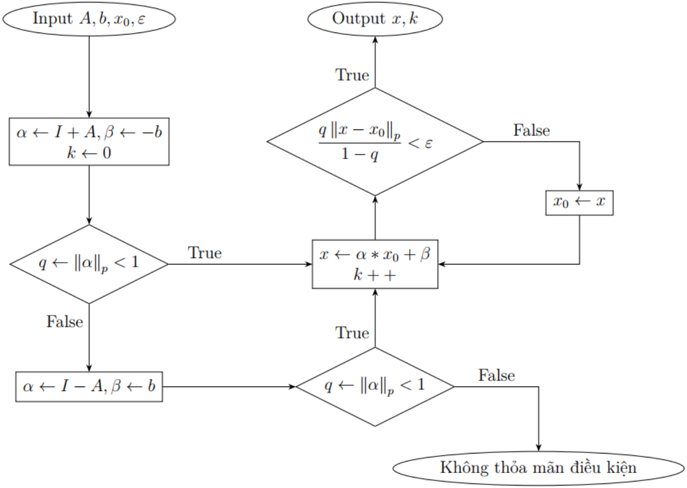
Lặp đơn

Thuật toán

Trường hợp đầu vào là $Ax = b$ với thuật toán hậu nghiệm:

Lặp đơn
Thuật toán

Trường hợp đầu vào là $Ax = b$ với thuật toán hậu nghiệm:



Lặp đơn

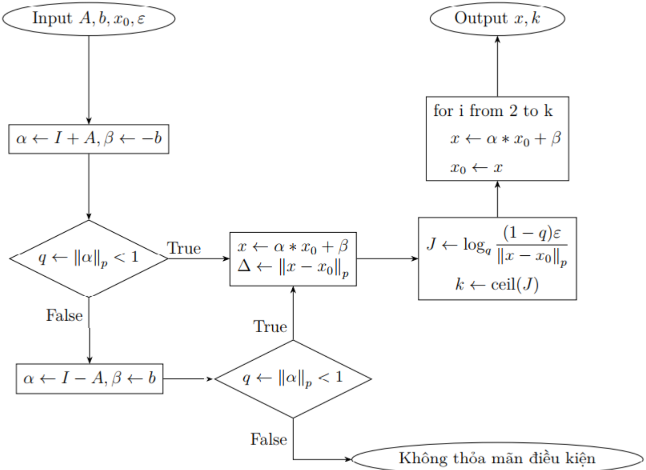
Thuật toán

Trường hợp đầu vào là $Ax = b$ với thuật toán tiên nghiệm:

Lặp đơn

Thuật toán

Trường hợp đầu vào là $Ax = b$ với thuật toán tiên nghiệm:



Thuật Toán

Lặp đơn

Cách khác để tìm được $x^{(n)}$:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= \alpha x^{(0)} + \beta \\ x^{(2)} &= \alpha x^{(1)} + \beta = \alpha(\alpha x^{(0)} + \beta) + \beta \\ &= \alpha^2 x^{(0)} + (\alpha + I)\beta \\ \ldots &= \ldots \\ x^{(n)} &= \alpha^n x^{(0)} + (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + I)\beta \end{aligned}$$

Có: $\begin{bmatrix} \alpha & I \\ O & I \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + I \\ O & I \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & I \\ O & I \end{bmatrix}^n \cdot \begin{bmatrix} x^{(0)} \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^n x^{(0)} + (\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} + \cdots + I)\beta \\ \beta \end{bmatrix}$

Nội dung chính

Thuật toán

Lặp Jacobi với ma trận chéo trội hàng

Thuật toán

Lặp Jacobi với ma trận chéo trội hàng

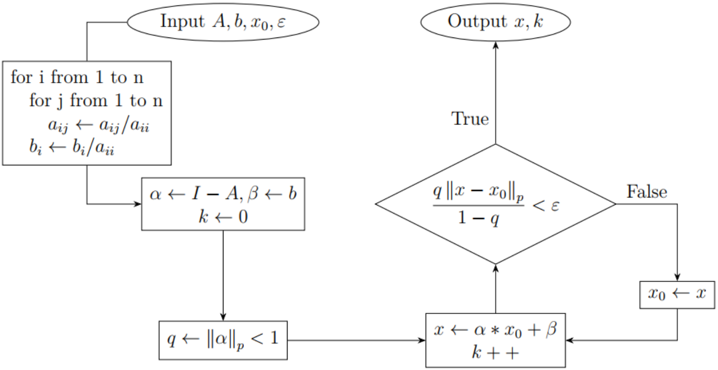
Đối với trường hợp ma trận mà $\nexists \|\alpha\|_p < 1$ ta cần thêm bước kiểm tra tính chéo trội để nghiệm lại điều kiện của phương pháp Jacoi:

```
#check if row diagonal diminance
Funtion:
checkrow(matrix):
    check = TRUE
    FOR i from 1 to len(matrix):
      max = matrix[i][i]
      FOR j from 1 to len(matrix):
         IF i = j: continue
         max = max - abs(matrix[i][j])
      IF max <= 0:
         check = FALSE
    return check
```

Thuật toán

Lặp Jacobi với ma trận chéo trội hàng

Thuật toán tìm nghiệm với ma trận chéo trội hàng:



Thuật toán

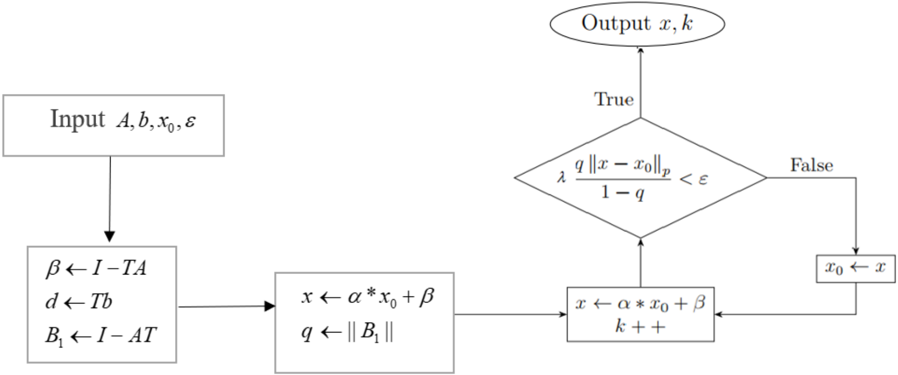
Lặp Jacobi với ma trận chéo trội cột

```
#check if column diagonal diminance
Funtion:
checkcol(matrix):
    check = TRUE
    FOR i from 1 to len(matrix):
        max = abs(matrix[i][i])
        FOR j from 1 to len(matrix):
            IF i = j: continue
            max = max - abs(matrix[j][i])
        IF max <= 0:
            check = FALSE
    return check
```

Thuật toán

Lặp Jacobi với ma trận chéo trội cột

Thuật toán tìm nghiệm với ma trận chéo trội cột:



Thuật toán

Lặp Jacobi

Trường hợp ma trận trội theo hàng, cột nhưng sắp xếp không trên đường chéo chính:

Ví dụ trội không đúng đường chéo

$$\begin{bmatrix} 3 & 7.2 & 19.5 & 2.4 \\ 4 & 15.7 & -2.5 & -6 \\ 1.9 & 12.4 & -3.7 & 36.6 \\ 8 & 1.4 & -2.5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Như vậy để mở rộng phạm vi bài toán ta sẽ xây dựng thuật toán để căn chỉnh lớp ma trận trên về ma trận chéo trội.

Thuật toán

Lặp Jacobi

Thuật toán sắp xếp lại ma trận trội hàng:

```
#INPUT: matrix
FOR i from 1 to len(matrix):
    a[i] = MAXROW(matrix(row_i))
IF SAME_CHECK(a[]):
    END
ELSE:
    FOR i from 1 to len(matrix):
      IF a[i] != i:
        FOR j from i to len(matrix):
          IF a[j] = i:
            TEMP[] = matrix(row_i)
            matrix(row_i) = matrix(row_j)
            matrix(row_j) = TEMP[]
```

Nội dung chính

Đánh giá

Đánh giá

- Phương pháp lặp đơn hội tụ phụ thuộc vào $q = \|\alpha\|$

Đánh giá

- Phương pháp lặp đơn hội tụ phụ thuộc vào $q = \|\alpha\|$
- Hai phương pháp chéo trội hàng và cột có số lần lặp xấp xỉ nhau

Đánh giá

- Phương pháp lặp đơn hội tụ phụ thuộc vào $q = \|\alpha\|$
- Hai phương pháp chéo trội hàng và cột có số lần lặp xấp xỉ nhau
- Lặp jacobi cung cấp phương pháp xử lý khi chuẩn của α không thỏa mãn điều kiện lặp đơn, bằng cách dựa trên tính chéo trội của ma trận.

Đánh giá

- Phương pháp lặp đơn hội tụ phụ thuộc vào $q = \|\alpha\|$
- Hai phương pháp chéo trội hàng và cột có số lần lặp xấp xỉ nhau
- Lặp jacobi cung cấp phương pháp xử lý khi chuẩn của α không thỏa mãn điều kiện lặp đơn, bằng cách dựa trên tính chéo trội của ma trận.

$\Rightarrow$ Vì vậy lớp hệ phương trình phương pháp xử lý được cũng tương đối hẹp.