

GIOVANNI ROMANO

**LIMITI DI COLLASSO RIGIDO PLASTICO
DI PIASTRE RETTANGOLARI SOGGETTE
A CARICHI SIMMETRICI RISPETTO ALLE MEDIANE**

LIMITI DI COLLASSO RIGIDO PLASTICO DI PIASTRE RETTANGOLARI SOGGETTE A CARICHI SIMMETRICI RISPETTO ALLE MEDIANE

*Bounds for the collapse Load of Rigid Plastic Rectangular Plates Loaded Symmetrically
With Respect to the Median Lines*

GIOVANNI ROMANO

SOMMARIO: La ricerca di limiti inferiori del carico di collasso di piastre rettangolari metalliche ed in cemento armato, appoggiate al contorno e caricate simmetricamente rispetto alle mediane è condotta mediante sviluppo in serie doppia di Fourier del carico. In appendice si riporta un metodo diverso basato su una distribuzione discontinua di momenti nella piastra. Alcuni risultati numerici ottenuti con entrambi i metodi sono riportati in tabelle e grafici.

Introduzione

Il problema della determinazione del valore esatto del carico di collasso rigido-plastico di piastre metalliche ed in cemento armato è stato risolto solo in un numero molto limitato di casi particolarmente semplici.

La esigenza di fornire comunque un valore approssimato di tale carico, accettabile sul piano tecnico, ha condotto alla ricerca di limitazioni superiori ed inferiori del carico di collasso che definiscano una fascia sufficientemente stretta in cui esso debba essere compreso.

Mentre la ricerca di limitazioni superiori condotta col metodo delle linee di frattura si presenta abbastanza agevole, ben più impegnativo è il calcolo di soddisfacenti limitazioni inferiori. Per una chiara panoramica del problema e dello stato della ricerca ed una accurata bibliografia si rimanda ai lavori di Capurso e D'Agostino [1], [2].

In questa tematica si inserisce il presente lavoro in cui si è affrontata la determinazione di limiti inferiori del carico di collasso per piastre rettangolari metalliche ed in cemento armato semplicemente appoggiate al contorno e soggette a carichi simmetrici rispetto alle mediane.

La ricerca dei limiti superiori è condotta secondo il ben noto metodo delle linee di frattura.

SUMMARY: Lower bounds of the collapse load for rectangular plates metallic and of reinforced concrete, supported on the boundary and loaded symmetrically with respect to the median lines are obtained by a double Fourier's expansion of the load. In the Appendix a different method based on a discontinuous distribution of moments in the plate is reported. Some numerical results obtained by both methods are given in tables and graphs.

Introduction

The problem of the determination of the exact collapse load of metallic and reinforced concrete rigid-plastic plates has been solved only in a few, very simple cases.

The technical requirement of an approximate value of the collapse load has lead to seek for upper and lower bounds between which the actual load must be contained.

The lines of fracture method supply a simple tool to obtain upper bounds. By far more difficult is the determination of lower bounds. A clear review of the subject and an accurate bibliography can be found in the papers by Capurso and D'Agostino [1], [2].

The present paper deals with the determination of lower bounds for the collapse load of rigid-plastic rectangular plates, metallic and of reinforced concrete, simply supported on the boundary and subjected to a load symmetric with respect to the median lines.

Upper bounds are found by the « lines of fracture » method.

Lower bounds are obtained by a double

Il problema della determinazione dei limiti inferiori viene affrontato mediante uno sviluppo in serie doppia di Fourier di soli coseni del carico. Stabilità dei limiti inferiori per i singoli termini della serie si ottiene un limite inferiore del carico somma sfruttando la convessità della superficie di plasticizzazione nello spazio dei carichi parziali.

Nel caso particolare di piastra quadrata in c.a. con carico a forma di doppia cosinusoida, annullatesi al contorno, si ottiene il valore esatto del carico di collasso.

Il caso di carico uniformemente distribuito su di una zona della piastra viene affrontato anche per via diretta, ottenendo limiti inferiori migliori per carichi interessanti quasi tutta la piastra. I risultati relativi a questo caso particolare sono riportati in tabelle e grafici.

La condizione di plasticizzazione assunta è quella di Mises per le piastre metalliche e quella di Johansen [3] per quelle in c.a.

Sviluppo del carico in serie doppia di Fourier

Si consideri la piastra rettangolare appoggiata al contorno mostrata in Fig. 1.

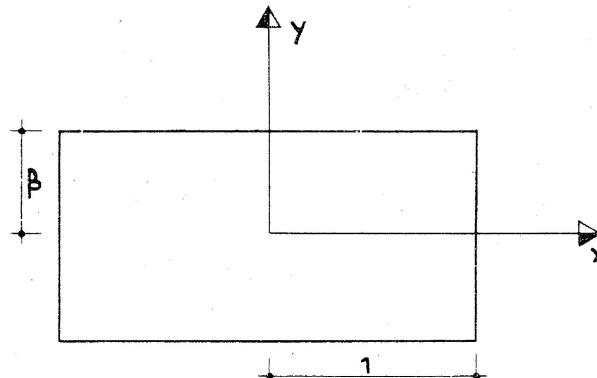


Fig. 1

Le misure sono adimensionaliizzate rispetto alla semidimensone maggiore⁽¹⁾.

Su di essa agisca un carico $p(x, y)$ simmetrico rispetto alle mediane, tale cioè che:

$$p(x, y) = p(-x, y) = p(x, -y) = p(-x, -y)$$

un tale carico, sotto condizioni molto generali è sviluppabile in serie doppia di Fourier di soli coseni:

$$p(x, y) = \sum_n \sum_s C_{ns} \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

⁽¹⁾ Nel seguito per rendere adimensionali le caratteristiche interne ed il carico, si porrà $m = \frac{M}{PL^2}$ e $P = \frac{M_0}{6M_0}$ ove M e P sono le grandezze dimensionali, M_0 il momento di piena plasticizzazione della sezione ed L la semidimensone maggiore della piastra.

Fourier expansion of the load containing only cosinusoidal terms. The property of convexity of the yield surface in the space of component loads allows to obtain a lower bound for the total load once lower bounds for each term of the expansion are found.

In the case of a square reinforced concrete plate with a double cosinusoidal load vanishing on the boundary, the exact collapse load is obtained.

By a direct method better lower bounds are found in the case of uniform load applied almost on the whole plate. Tables and graphs for the results of this particular case are given.

Yield conditions of Mises and Johansen [3] are assumed for metallic and reinforced concrete plates respectively.

Double Fourier expansion of the load

Let us consider a rectangular plate simply supported on the boundary as in Fig. 1.

Adimensional lengths are obtained by ratio with the greater semidimension⁽¹⁾.

The applied load is symmetric with respect to the median lines, i.e.:

$$p(x, y) = p(-x, y) = p(x, -y) = p(-x, -y)$$

Such a load, under very general assumptions, can be expanded in a double cosinusoidal Fourier series:

⁽¹⁾ In the following, to deal with adimensional parameters of the load and of the bending moment, we set: $m = \frac{M}{M_0}$ and $p = \frac{PL^2}{6M_0}$ where M and P are the dimensional quantities, M_0 is the full plastic bending moment of the cross section and L is the greater semidimension of the plate.

ov.

$$\alpha_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$$

con n ed s interi.

I coefficienti C_{ns} si ottengono con la formula:

$$C_{ns} = \frac{1}{\beta} \int_{-1}^1 dx \int_{-\beta}^{\beta} dy \left[p(x, y) \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta} \right]$$

come può facilmente mostrarsi moltiplicando ambo i membri della (1) per $\cos \alpha_n x$ $\cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$ ed integrando nel modo indicato, tenendo presente che:

$$\int_{-1}^1 \cos \alpha_n x \cos \alpha_m x dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \cos \alpha_s \frac{y}{\beta} \cos \alpha_r \frac{y}{\beta} dy = \begin{cases} \beta & s = r \\ 0 & s \neq r \end{cases}$$

Limitazioni inferiori per i singoli termini della serie

a) La piastra in cemento armato.

Sulla piastra di Fig. 1 agisca un carico dato da:

$$p_{ns} = \lambda_{ns} \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

Per determinare un limite inferiore del moltiplicatore λ_{ns} si assume la seguente distribuzione di momenti:

$$m_{xx} = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

$$m_{yy} = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

$$m_{xy} = -\sin \alpha_n x \sin \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

L'equazione di equilibrio (2):

$$m_{xx,xx} + m_{yy,yy} + 2m_{xy,xy} + 6p = 0$$

(2) Con una virgola si è indicata la derivazione rispetto alle variabili che la seguono.

where:

$$\alpha_s = (2s - 1) \frac{\pi}{2}$$

with n and s integers.

The coefficients C_{ns} can be obtained by the formula:

as can be easily shown multiplying both members of (1) by $\cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$ and integrating as before, remembering that:

$$\int_{-1}^1 \cos \alpha_n x \cos \alpha_m x dx = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

$$\int_{-\beta}^{\beta} \cos \alpha_s \frac{y}{\beta} \cos \alpha_r \frac{y}{\beta} dy = \begin{cases} \beta & s = r \\ 0 & s \neq r \end{cases}$$

Lower bounds for each term of the expansion

a) The reinforced concrete plate.

Let the load on the plate of Fig. 1 be given by:

$$y$$

$$p_{ns} = \lambda_{ns} \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

The distribution of bending moments assumed to find a lower bound is the following:

$$m_{xx} = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

$$m_{yy} = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

$$m_{xy} = -\sin \alpha_n x \sin \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

The equilibrium equation (2):

$$m_{xx,xx} + m_{yy,yy} + 2m_{xy,xy} + 6p = 0$$

(2) The comma means differentiation with respect to the variables after it.

nel caso in esame, tenendo conto delle (2), fornisce:

$$\alpha_n^2 + \frac{\alpha_s^2}{\beta^2} + 2 \frac{\alpha_n \alpha_s}{\beta} = 6 \lambda_{ns}$$

Si ottiene così il limite inferiore:

$$\lambda_{ns}^- = \frac{1}{6} \left(\alpha_n + \frac{\alpha_s}{\beta} \right)^2$$

Bisogna verificare che la distribuzione di momenti adottata soddisfi la condizione di plasticizzazione che è assunta essere, per il cemento armato:

$$|m_f| \leq 1$$

essendo:

$$m_f = m_{xx} \alpha_x^2 + 2 m_{xy} \alpha_x \alpha_y + m_{yy} \alpha_y^2$$

il momento flettente in un punto generico e sulla generica giacitura di normale $n = (\alpha_x, \alpha_y)$.

Ora si ha:

$$m_f = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta} - 2 \sin \alpha_n x \sin \alpha_s \frac{y}{\beta} \alpha_x \alpha_y$$

Il massimo valore di m_f , in un fissato punto ed al variare della giacitura su cui agisce, sarà nel primo e nel terzo quadrante trigonometrico:

$$m_f = \cos \left(\alpha_n x - \frac{\alpha_s}{\beta} y \right)$$

e si ottiene per $\alpha_x = -\alpha_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ mentre nel secondo e nel quarto sarà:

$$m_f = \left(\alpha_n x + \frac{\alpha_s}{\beta} y \right)$$

e si ottiene per

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Da tali relazioni si osserva facilmente come $|m_f| \leq 1$ in ogni punto della piastra e per ogni giacitura. La condizione di plasticizzazione è quindi rispettata.

Per determinare un limite superiore, la distribuzione di velocità di abbassamento, per ragioni di simmetria e di semplicità, si assume come in fig. 2:

in cui i parametri χ e ψ possono essere opportunamente calcolati in modo da minimizzare il valore del limite superiore. Detta $\dot{w}(x, y)$

substituting the expressions (2), gives:

and thus the lower bound:

It needs to verify that the yield condition for the reinforced concrete is satisfied by the chosen distribution of moments; i.e.:

where:

is the bending moment in an arbitrary point of the plate and on the element whose normal is: $n = (\alpha_x, \alpha_y)$.

Now it is:

Letting the normal free to vary, the maximum value of m_f , in a fixed point of the first and third trigonometric quadrant is:

and is got for $\alpha_n = -\alpha_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, while in the second and fourth quadrant it is:

when

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

From the previous result it is evident that the yield condition is fulfilled in every point and for every normal.

To find an upper bound the vertical displacement velocity field is assumed as shown in Fig. 2 for sake of symmetry and simplicity.

The parameters χ and ψ can be so determined to minimize the upper bound. If $\dot{w}(x, y)$ is the velocity field of the vertical

la funzione velocità di abbassamento, il limite superiore sarà dato da:

$$\lambda_{ns}^+ = \frac{D_i}{D_e} = \frac{4 \left[\frac{1}{\beta - \psi} + \frac{\beta}{1 - \chi} \right]}{\int_A \hat{w}(x, y) \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta} dA}$$

ove \hat{w} è adimensionalizzata rispetto al suo valore nell'origine, ed A è l'area della piastra.

displacement, the upper bound is:

where \hat{w} is a dimensionless quantity with reference to its value in the origin and A is the area of the plate.

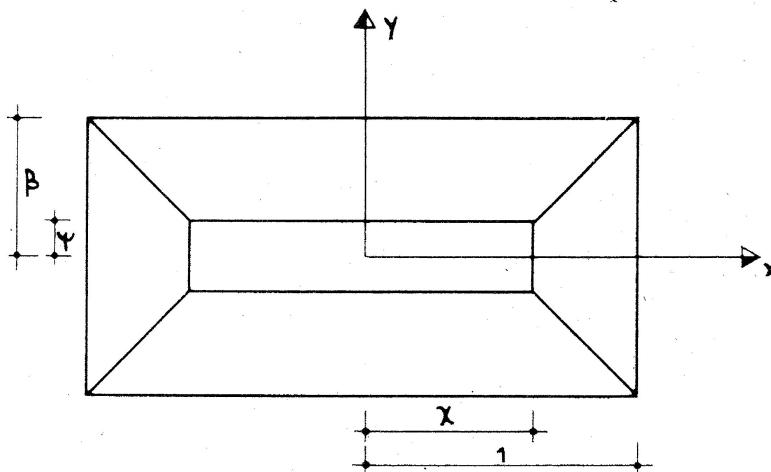


Fig. 2

Il Valore esatto del carico di collasso in un caso particolare

E' opportuno notare come, nel caso delle piastre quadrate in cemento armato, cioè per $\beta = 1$, per il carico:

$$p = \lambda \cos \frac{\pi}{2} x \cos \frac{\pi}{2} y$$

si giunge al valore esatto del carico di collasso ⁽³⁾:

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{6}$$

In tal caso infatti la condizione di plasticizzazione si scrive:

$|\cos(x - y)| \leq 1$ nel 1° e 3° quadrante
 $|\cos(x + y)| \leq 1$ nel 2° e 4° quadrante
 ed in tal caso i quadrati trigonometrici coincidono con quelli geometrici della piastra.

Per $x = y$ ed $x = -y$ si attinge così il valore di crisi del momento flettente ed è quindi ammissibile il cinematicismo di Fig. 3.

⁽³⁾ Ed in termini dimensionali:

$$P = \frac{6 p M_0}{L^2} = \frac{\pi^2 M_0}{L^2} = (2\pi)^2 \frac{M_0}{A}$$

dove P è l'intensità del carico nel centro della piastra.

The exact collapse load in a special case

It's worthwhile to note that for square reinforced concrete plate, i.e. $\beta = 1$, for a load intensity:

we find the exact collapse load ⁽³⁾:

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{6}$$

Indeed the yield condition for this case can be written as:

$|\cos(x - y)| \leq 1$ in the 1th and 3rd quadrant
 $|\cos(x + y)| \leq 1$ in the 2nd and 4th quadrant
 and now the trigonometric quadrants are the same as the geometric ones of the plate.

For $x = y$ and $x = -y$ the critical value of the bending moment is reached and the kinematicism of Fig. 3 is admissible.

⁽³⁾ And in dimensional form:

where P is the load intensity in the center of the plate.

Tale risultato è d'altronde confermato dal calcolo del limite superiore, che risulta coincidente con quello inferiore.

It can be easily checked that, as it needs to be, the upper bound is equal to the given lower bound.

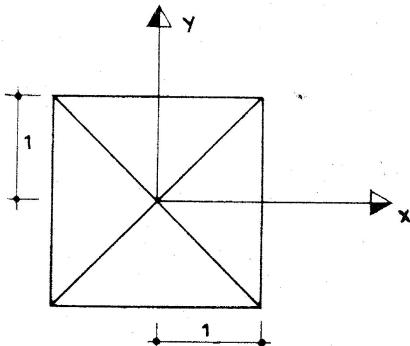


Fig. 3

La piastra metallica

Per le piastre metalliche può procedersi analogamente. In tal caso la distribuzione di momenti sarà:

$$m_{xx} = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

$$m_{yy} = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \alpha_n x \sin \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

ed il limite inferiore:

$$\lambda_{ns^-} = \frac{1}{6} \left(\alpha_n^2 + \frac{\alpha_s^2}{\beta^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\alpha_n \alpha_s}{\beta} \right)$$

Come condizione di plasticizzazione si assume quella di Mises che per le piastre si scrive:

$$m_{xx}^2 + m_{yy}^2 + 3 m_{xy}^2 - m_{xx} m_{yy} \leq 1$$

e nel caso in esame:

$$\left(\cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta} \right)^2 + \left(\sin \alpha_n x \sin \alpha_s \frac{y}{\beta} \right)^2 \leq 1$$

ma il primo membro può sciversi:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left\{ \left[\cos \left(\alpha_n x + \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) + \cos \left(\alpha_n x - \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) \right]^2 + \left[\cos \left(\alpha_n x - \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \left(\alpha_n x + \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) \right]^2 \right\} = \frac{1}{2} \left[\cos^2 \left(\alpha_n x + \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) + \cos^2 \left(\alpha_n x - \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) \right] \leq 1 \end{aligned}$$

La condizione di Mises è quindi rispettata in ogni punto. Il limite superiore è pari a

The metallic plate

For a metallic plate the procedure is the same; the moment distribution is:

and the lower bound:

The Mises yield condition can be written as:

and in this case:

the left side of the inequality can be written:

$$\begin{aligned} & \left[\cos \left(\alpha_n x + \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) + \cos \left(\alpha_n x - \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) \right]^2 + \left[\cos \left(\alpha_n x - \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) + \right. \\ & \left. - \cos \left(\alpha_n x + \alpha_s \frac{y}{\beta} \right) \right]^2 \leq 1 \end{aligned}$$

and this assures that the Mises condition is fulfilled in every point. The upper bound can

quello calcolato per la piastra in cemento armato moltiplicato per $\frac{2}{\sqrt{3}}$. Ciò perché, nel calcolare la dissipazione interna, bisogna tener conto, come è facile verificare, che sulle linee di frattura il momento flettente adimensionale non vale 1, come nel caso del c.a., ma $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Il calcolo di un limite inferiore per il carico somma

La ricerca di un limite inferiore per il carico

$$p(x, y) = \lambda \sum_n \sum_s C_{ns} \Phi_{ns}(x, y)$$

ove per brevità si è posto

$$\Phi_{ns}(x, y) = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

a partire dalla conoscenza dei limiti inferiori dei carichi componenti:

$$p_{ns} = \lambda_{ns} \Phi_{ns}$$

può essere condotto richiamandosi ad un risultato generale dovuto a P. G. Hodge e C. K. Sun [4].

Si consideri lo spazio a K^2 dimensioni delle funzioni Φ_{ns} :

per

$$n = 1, \dots, k$$

ed

$$s = 1, \dots, k$$

La condizione di plasticizzazione in tale spazio sarà rappresentata da una ipersuperficie di equazione:

$$f(\Phi_{ns}) = 0$$

Ora può mostrarsi che tale ipersuperficie gode delle stesse proprietà della superficie limite nello spazio delle componenti speciali di tensione.

Di tali proprietà interessa qui quella di convessità.

Si consideri nello spazio delle Φ_{ns} l'ipopoliedro convesso avente i vertici nei punti di coordinate:

$$(0, \dots, \lambda_{mr}, \dots, 0)$$

ove λ_{mr} è un limite inferiore del moltiplicatore di collasso del carico $\Phi_{mr}(x, y)$. Tale ipopoliedro risulta evidentemente interno alla ipersuperficie

$$f(\Phi_{ns}) = 0$$

Se si considera un carico

$$p(x, y) = \lambda \sum_n \sum_s C_{ns} \Phi_{ns}(x, y)$$

be obtained multiplying the corresponding bound for the reinforced concrete plate by the factor $\frac{2}{\sqrt{3}}$. It's why in this case the adimensional bending moment on the lines of fracture has the value $\frac{2}{\sqrt{3}}$ and so the internal dissipation must be multiplied by this factor.

The lower bound for the total load

A lower bound for the load:

where:

$$\Phi_{ns}(x, y) = \cos \alpha_n x \cos \alpha_s \frac{y}{\beta}$$

can be found if the lower bounds of the partial loads:

are known. We make use of a general result due to P. G. Hodge and C. K. Sun [4].

Let us consider the K^2 dimensions space of the functions Φ_{ns} :

with
and

The yield condition in this space is the hypersurface of equation:

$$f(\Phi_{ns}) = 0$$

Now it can be shown that such an hypersurface has the same properties of the yield surface in the space of the stress components.

We will make use of the convexity property.

Let us consider in the Φ_{ns} space the convex hyperpolyhedron with its vertex on the points:

$$(0, \dots, \lambda_{mr}, \dots, 0)$$

where λ_{mr} is a lower bound of the collapse multiplier of the load. The hyperpolyhedron is internal to the hypersurface

A load intensity:

$$C_{ns} \Phi_{ns}(x, y)$$

si avrà in corrispondenza una retta nello spazio delle Φ_{ns} di equazioni parametriche:

$$\lambda_{ns} = \lambda C_{ns} \quad (3)$$

Un limite inferiore per il moltiplicatore λ può ottersi determinando il punto di intersezione tra la retta (3) e l'iperpiano che costituisce la frontiera dell'iperpoliedro su definito nell'iperquadrante interessata dalla retta (3).

L'equazione dell'iperpiano si scrive:

$$\begin{vmatrix} \lambda_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{kk} & 1 \\ \lambda_{11}^- & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \lambda_{22}^- & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_{kk}^- & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

e sviluppando il determinante:

$$\sum_n \sum_s \frac{\lambda_{ns}}{\lambda_{ns}^-} = 1$$

Intersecando con la retta (3) si ha:

and expanding the determinant:

Intersecting with the straight line (3) we have:

$$\lambda^- \sum_n \sum_s \frac{C_{ns}}{\lambda_{ns}^-} = 1$$

da cui:

$$\frac{1}{\lambda^-} = \sum_n \sum_s \frac{C_{ns}}{\lambda_{ns}^-} \quad (5)$$

E' importante osservare che, poiché la retta (3) e l'iperpiano (4) interessano lo stesso iperquadrante dello spazio delle Φ_{ns} i rapporti $\frac{C_{ns}}{\lambda_{ns}^-}$ sono tutti positivi.

It's important to note that all the ratios $\frac{C_{ns}}{\lambda_{ns}^-}$ are positive because the line (3) and the hyperplane (4) are in the same hyperquadrant.

Un miglioramento del limite inferiore

Se si conosce per il carico di collasso un limite inferiore maggiore di quello ottenibile con la (5) per un carico

An improvement of the lower bound

If a lower bound greater than that obtainable by equation (5) is known for a load intensity:

$$p(x, y) = \lambda \sum_n \sum_s \alpha_{ns} \Phi_{ns}(x, y)$$

un limite inferiore migliore può ottersi per tutte le rette di carico giacenti nell'iperquadrante interessato dalla retta di equazioni parametriche:

a greater lower bound can be found for every loading path in the hyperquadrant in which lies the line:

$$\lambda_{ns} = \lambda \alpha_{ns}$$

Ciò si realizza intersecando la generica retta di carico con tutti gli iperpiani di equazione:

It can be obtained intersecting the generic loading line with the hyperplanes of equation:

$$\left| \begin{array}{ccccccccc} \lambda_{11} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda_{11} - 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{11} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccccccccc} \lambda_{mr} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda_{mr} - 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{mr} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \alpha_{mr} - 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda_{kk} & . & . & . & . & . & . & . & . \\ \lambda_{kk} - 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \end{array} \right| = 0 \quad (6)$$

ottenuti inserendo la riga delle α_{ns} via via in tutte le posizioni successive alla prima.

Sviluppando il determinante a primo membro della (6) ed intersecando con la (3) si ottiene:

$$\frac{1}{\lambda^-} = \frac{C_{mr}}{\lambda_{mr}^-} + \sum_n \sum_s \left(\frac{C_{mr}}{\alpha_{mr}} - \frac{\alpha_{ns}}{\lambda_{ns}^-} - \frac{C_{ns}}{\lambda_{ns}^-} \right)$$

Tra tutti i valori di λ^- ottenuti facendo variare m ed r nel campo di variazione di n ed s rispettivamente, bisogna scegliere il più piccolo.

E' facile verificare che nel caso che tutti gli α_{ns} sono nulli all'infuori di $\alpha_{mr} = \lambda_{mr}^-$, si ottiene il risultato precedente contenuto nella (5), come caso particolare.

E' importante ricordare che la (7) è applicabile solo se i rapporti C_{ns}/α_{ns} sono tutti positivi e che è necessario prendere i λ_{ns}^- della stessa segno dei C_{ns} .

Il calcolo di un limite superiore per il carico somma

Il calcolo di un limite superiore per il carico somma differisce da quello per i carichi parziali nell'espressione del lavoro esterno, che in tal caso è per piastra in c.a., è:

$$D_e = 6 \int_A w(x, y) \sum_n \sum_s C_{ns} \Phi_{ns}(x, y) dA$$

Poiché in pratica bisogna arrestare lo sviluppo in serie del carico ad un numero finito di termini, un'indicazione circa l'approssimazione introdotta, con la (7) può essere ottenuta dal confronto del valore di D_e con quello esatto fornito dalla formula:

$$D_e = 6 \int_A w(x, y) p(x, y) dA$$

Per piastre metalliche il coefficiente 6 va sostituito con $3\sqrt{3}$

obtained inserting the row of the α_{ns} successively in all the rows after the first.

Expanding the determinant on the left side of equation (6) and intersecting with the line (3) we have:

where, letting m and r free to vary in the field of values of n and s respectively, it needs to chose the least value obtained.

It's easy to verify that if all the α_{ns} are zero but $\alpha_{mr} = \lambda_{mr}^-$, we obtain the previous result of equation (5) as a special case.

It's worthwhile to recal that equation (7) is valid only if all the ratios C_{ns}/α_{ns} are positive and that it needs to choose the λ_{ns}^- with the same sign of the C_{ns} .

The upper bound for the total load

The computation of an upper bound for the total load is performed just in the same way as for each component load except for the external work that in this case and for the reinforced concrete plate is given by:

The approximation made in the numerical computation taking only a finite number of terms of the expansion in formula (7) can be evaluated by comparison with the exact value of D_e obtained by the following formula:

The coefficient $3\sqrt{3}$ must be substituted instead of 6 for a metallic plate.

AN EXAMPLE

Uniform load on a portion of the plate

Con riferimento alla Fig. 1, si consideri un carico del tipo:

$$p(x, y) = \begin{cases} \lambda & x, y/\beta \in [-\tau, \tau] \\ 0 & x, y/\beta \notin [-\tau, \tau] \end{cases}$$

con $0 \leq \tau \leq 1$.

Lo sviluppo in serie di Fourier fornisce i coefficienti:

$$C_{ns} = \frac{1}{\beta} \int_{-\tau}^{\tau} dx \int_{-\beta\tau}^{\beta\tau} dy [\Phi_{ns}(x, y)] = 4 \frac{\sin \alpha_n \tau}{\alpha_n} \frac{\sin \alpha_s \tau}{\alpha_s}$$

Il limite inferiore si calcola quindi con la formula:

$$\frac{1}{\lambda^-} = \sum_n \sum_s \frac{C_{ns}}{\lambda_{ns}^-}$$

ove:

$$\lambda_{ns}^- = \frac{1}{6} \left[\alpha_n + \frac{\alpha_s}{\beta} \right]^2$$

per piastra in c.a., oppure:

$$\lambda_{ns}^- = \frac{1}{6} \left[\alpha_n^2 + \frac{\alpha_s^2}{\beta^2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\alpha_n \alpha_s}{\beta} \right]$$

per piastra metallica.

Il calcolo del limite superiore si conduce con l'usuale formula:

$$\lambda^+ = \frac{D_i}{D_e}$$

Assumendo come meccanismo di collasso quello di Fig. 2, la dissipazione interna assume il valore:

$$D_i = 4 \left[\frac{1}{\beta - \psi} + \frac{\beta}{1 - \chi} \right]$$

e la dissipazione esterna:

$$D_e = 6 \cdot 4 \cdot \sum_n \sum_s C_{ns} \left\{ \int_0^1 dx \int_0^{\beta x} dy [(1-x) \Phi_{ns}] + \int_0^\beta dy \int_0^{y/\beta} dx \left[\left(1 - \frac{y}{\beta} \right) \Phi_{ns} \right] \right\}$$

Calcolati gli integrali e posto:

$$D_e = \sum_n \sum_s C_{ns} D_{ens}$$

UN ESEMPIO

Il caso di carico uniforme su di una zona della piastra

With reference to Fig. 1, let us consider a load:

$$x, y/\beta \in [-\tau, \tau]$$

$$x, y/\beta \in [-\tau, \tau]$$

where $0 \leq \tau \leq 1$.

The Fourier expansion gives the coefficients:

$$\sin \alpha_n \tau \quad \sin \alpha_s \tau$$

The lower bound is obtained by the formula:

where:

for a reinforced concrete plate, and:

for a metallic plate.

The upper bound is found by the well-known formula:

$$\frac{D_i}{D_e}$$

Assuming the collapse mechanism of Fig. 2 the internal dissipation is given by formula:

and the external dissipation:

Evaluating the integrals and set:

si ha:

$$D_{ens} = \begin{cases} 0 & n \neq s \\ 6 \cdot 2\beta \cdot \frac{1}{\alpha_n^2} & n = s \end{cases}$$

e quindi:

$$D_e = 6 \cdot 2\beta \sum_n \frac{1}{\alpha_n^2}$$

Nel caso di piastre metalliche il coefficiente 6 va sostituito da $3\sqrt{3}$.

Si riportano nel seguito i valori di

$$\lambda^+, \lambda^-, \lambda_{MED} = \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{\lambda^+ + \lambda^-}, \quad s\% = \frac{\lambda^+ - \lambda^-}{2} \times 100$$

per il caso di piastra quadrata ($\beta = 1$) e per τ variabile tra 0.1 ed 1 con passo 0.1.

we have:

$$0 \quad n \neq s \\ 6 \cdot 2\beta \cdot \frac{1}{\alpha_n^2} \quad n = s$$

whence:

For a metallic plate the coefficient 6 must be substituted by $3\sqrt{3}$

In the sequel the values of:

$$\lambda^+ - \lambda^- \\ 2$$

are given for a square plate ($\beta = 1$) and for τ variable from 0.1 to 1 with a step 0.1.

PIASTRA IN CEMENTO ARMATO

	λ^+	λ^-	λ_{MED}	s%
$\tau = .1$	35.86	18.08	26.97	32.96
$\tau = .2$	9.62	5.71	7.67	25.49
$\tau = .3$	4.63	3.15	3.89	19.02
$\tau = .4$	2.84	2.17	2.50	13.46
$\tau = .5$	2.00	1.60	1.80	11.17
$\tau = .6$	1.54	1.35	1.45	6.59
$\tau = .7$	1.28	1.17	1.22	4.43
$\tau = .8$	1.12	0.99	1.05	5.90
$\tau = .9$	1.03	0.86	0.94	8.99
$\tau = 1.0$	1.00	0.80	0.90	11.16

PIASTRA METALLICA

	λ^+	λ^-	λ_{MED}	s%
$\tau = .1$	41.41	14.78	28.09	47.38
$\tau = .2$	11.11	4.64	7.87	41.10
$\tau = .3$	5.35	2.54	3.94	35.56
$\tau = .4$	3.28	1.74	2.51	30.74
$\tau = .5$	2.31	1.28	1.79	28.68
$\tau = .6$	1.78	1.08	1.43	24.61
$\tau = .7$	1.47	0.93	1.20	22.69
$\tau = .8$	1.29	0.79	1.04	24.07
$\tau = .9$	1.19	0.69	0.94	26.81
$\tau = 1.0$	1.15	0.64	0.90	28.68

APPENDICE 1

Limiti inferiori del moltiplicatore di collasso, nel caso di carico uniforme su una zona della piastra, possono essere determinati per altra via.

a) *La piastra metallica.*

Si consideri la piastra di Fig. 4 ove i para-

APPENDIX 1

Lower bounds of the collapse multiplier, for a uniform load distributed on a portion of the plate can be found with a different procedure.

a) *The metallic plate.*

Let us consider the plate in Fig. 4 where

metri ξ ed η definiscono la zona rettangolare soggetta al carico uniforme.

the parameters ξ and η define the rectangular zone on which the uniform load is applied.

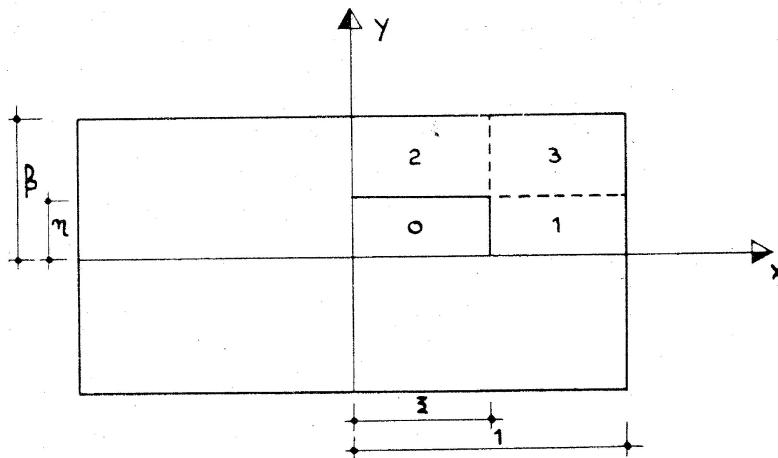


Fig. 4

Nelle quattro zone del primo quadrante della piastra mostrate in fig. 4 si assumono le seguenti distribuzioni di momento flettente:

ZONA 0:

$$m_{xx} = 1 - \frac{x^2}{\lambda^2}$$

$$m_{yy} = 1 - \frac{y^2}{\mu^2}$$

$$m_{xy} = - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x y}{\lambda \mu}$$

con

$$\lambda = \sqrt{2\xi - \xi^2} \quad \text{e} \quad \mu = \sqrt{2\beta\eta - \eta^2}$$

La condizione di equilibrio fornisce:

The equilibrium condition gives:

$$-\frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\mu^2} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\lambda \mu} + 6p = 0$$

da cui:

whence:

$$p^- = \frac{\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{3 \lambda^2 \mu^2} \lambda \mu$$

e la condizione di plasticizzazione si scrive:

and the yield condition can be written as:

$$\left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{y^2}{\mu^2}\right)^2 + \frac{x^2 y^2}{\lambda^2 \mu^2} - \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{\mu^2}\right) \leq 1$$

cioè

i.e.

$$\left(\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{\mu^4}\right) \leq \left(\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2}\right)$$

che essendo:

That, being:

$$\begin{aligned} x &\leq \xi \leq \lambda \leq 1 \\ y &\leq \eta \leq \mu \leq \beta \end{aligned}$$

è evidentemente soddisfatta.

is obviously satisfied.

ZONA 1:

ZONE 1:

$$m_{xx} = \frac{2\xi}{\lambda^2} (1 - x)$$

$$m_{yy} = 0$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\xi y}{\lambda \mu}$$

risultano verificate le condizioni ai limiti con la zona 0, e la equazione d'equilibrio è identicamente soddisfatta.

La condizione di plasticità si scrive:

$$\frac{4\xi^2}{\lambda^4} (1 - x)^2 + \frac{\xi^2 y^2}{\lambda^2 \mu^2} \leq 1$$

e tenendo presente le limitazioni

The boundary conditions with the zone 0 are fulfilled and the equilibrium equation is identically satisfied.

The yield condition became:

and taking into account the inequalities:

$$\xi \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq \eta$$

si ha:

we have:

$$\frac{4\xi^2}{\lambda^4} (1 - \lambda^2) + \frac{\xi^2}{\lambda^2} \leq 1$$

da cui ricordando che:

whence, remembering that:

$$\lambda^2 = 2\xi - \xi^2$$

si ottiene in definitiva:

finally we have:

$$\xi \leq 1$$

che è ovviamente soddisfatta.

that's obviously verified.

ZONA 2:

ZONE 2:

$$m_{xx} = 0$$

$$m_{yy} = \frac{2\eta}{\mu^2} (\beta - y)$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{x y}{\lambda \mu}$$

ZONA 3:

ZONE 3:

$$m_{xx} = 0$$

$$m_{yy} = 0$$

$$m_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\xi \eta}{\lambda \mu}$$

Le condizioni ai limiti, la condizione d'equilibrio e quella di plasticizzazione sono soddi-

The fulfilment of boundary conditions, equilibrium equation and yield inequality are

sfatte, in entrambi i casi, come è facile verificare.

b) *Piastra in cemento armato:*

ZONA 0:

$$m_{xx} = 1 - \frac{x^2}{\lambda^2}$$

$$m_{yy} = 1 - \frac{y^2}{\mu^2}$$

$$m_{xy} = - \frac{xy}{\lambda \mu}$$

L'equazione d'equilibrio porge:

$$p^+ = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda \mu}{3 \lambda^2 \mu^2}$$

la condizione di Johansen diventa:

$$\begin{aligned} |m_f| &= \left| \left(1 - \frac{x^2}{\lambda^2}\right) \alpha_x^2 + \left(1 - \frac{y^2}{\mu^2}\right) \alpha_y^2 - \frac{2xy}{\lambda \mu} \alpha_x \alpha_y \right| = \\ &= \left| 1 - \left(\frac{x \alpha_x}{\lambda} + \frac{y \alpha_y}{\mu} \right)^2 \right| \leq 1 \end{aligned}$$

ovviamente soddisfatta.

easily verified in both cases.

b) *The reinforced concrete plate:*

ZONE 0:

The equilibrium equation gives:

$$p^+ = \frac{\lambda^2 + \mu^2 + \lambda \mu}{3 \lambda^2 \mu^2}$$

The Johansen yield condition becomes:

obviously verified.

ZONA 1:

$$m_{xx} = \frac{2\xi}{\lambda^2} (1 - x)$$

$$m_{yy} = 0$$

$$m_{xy} = - \frac{\xi y}{\lambda \mu}$$

Scrivendo la condizione di Johansen $|m_f| \leq 1$ sotto la forma [3]:

Writing the yield condition $|m_f| \leq 1$ in the following way [3]:

$$\begin{cases} m_{xy}^2 - (1 - m_{xx})(1 - m_{yy}) \leq 0 \\ m_{xy}^2 - (1 + m_{xx})(1 - m_{yy}) \leq 0 \end{cases}$$

Si ha nel caso in esame la disequaglianza: it reduces to the inequality:

$$m_{xy}^2 \leq (1 - m_{xx})$$

e cioè:

i.e.:

$$\frac{2\xi}{\lambda^2} (1 - x) + \frac{\xi^2 y^2}{\lambda^2 \mu^2} \leq 1$$

e cioè, tenendo presente che $\xi \leq x$, $y \leq \mu$

and, taking into account that: $\xi \leq x$, $y \leq \mu$,

$$\frac{2\xi (1 - \xi)}{\lambda^2} + \frac{\xi^2}{2} \leq 1$$

che è immediatamente verificabile.

That's easily verified.

ZONA 2:

$$m_{xx} = 0$$
$$m_{yy} = \frac{2 \eta}{\mu^2} (\beta - y)$$
$$m_{xy} = - \frac{x \eta}{\lambda \mu}$$

Si procede analogamente alla zona 1.

ZONE 2:

All the proofs go on as for the Zone 1.

ZONA 3:

$$m_{xx} = 0$$
$$m_{yy} = 0$$
$$m_{xy} = - \frac{\xi \eta}{\lambda \mu}$$

La condizione $|m_f| \leq 1$ diventa:

$$\xi^2 \eta^2 \leq \lambda^2 \mu^2$$

ovviamente verificata.

ZONE 3:

All the proofs go on as for the Zone 1.

The yield condition $|m_f| \leq 1$ becomes:

obviously verified.

Considerazioni conclusive

Nei grafici che seguono sono riportati i valori del limite superiore e quelli di limiti inferiori ottenuti con i due metodi esposti nel caso di carico uniforme su di una zona della piastra. La curva tratteggiata si riferisce al metodo di calcolo mediante sviluppo in serie di Fourier del carico.

Il confronto tra i risultati conduce alla conclusione che per carichi impegnanti tutta la piastra, il secondo metodo fornisce limiti migliori mentre per carichi quasi concentrati il primo metodo è preferibile.

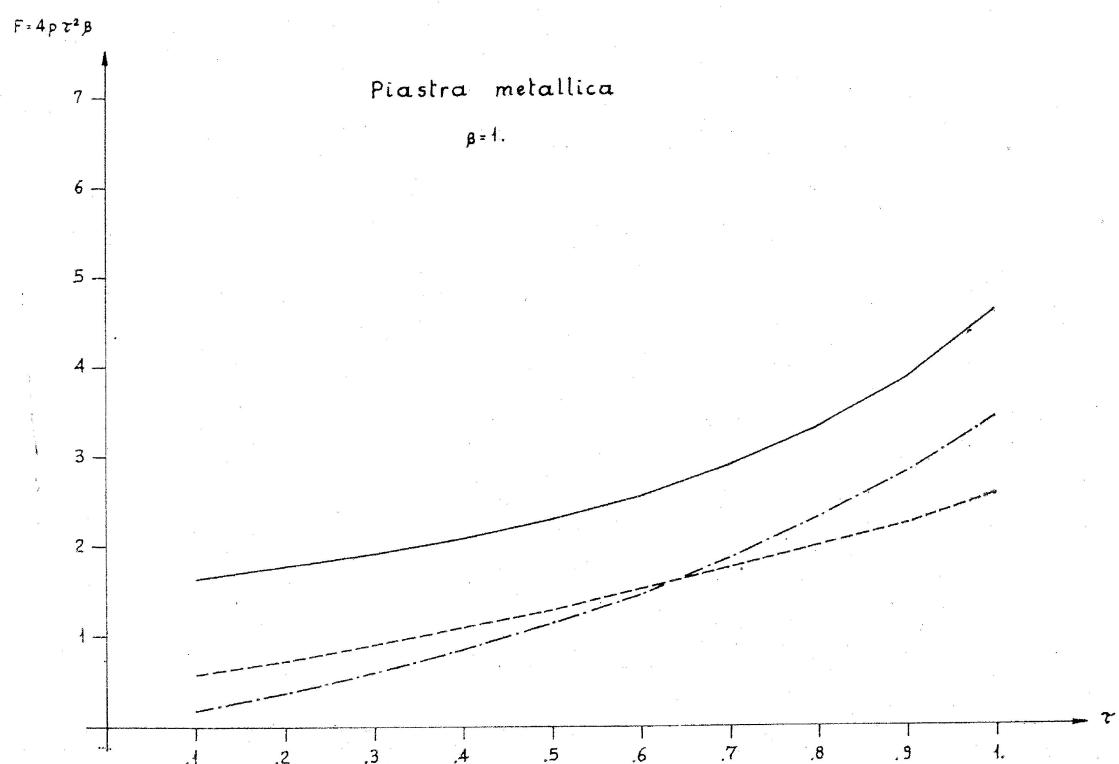
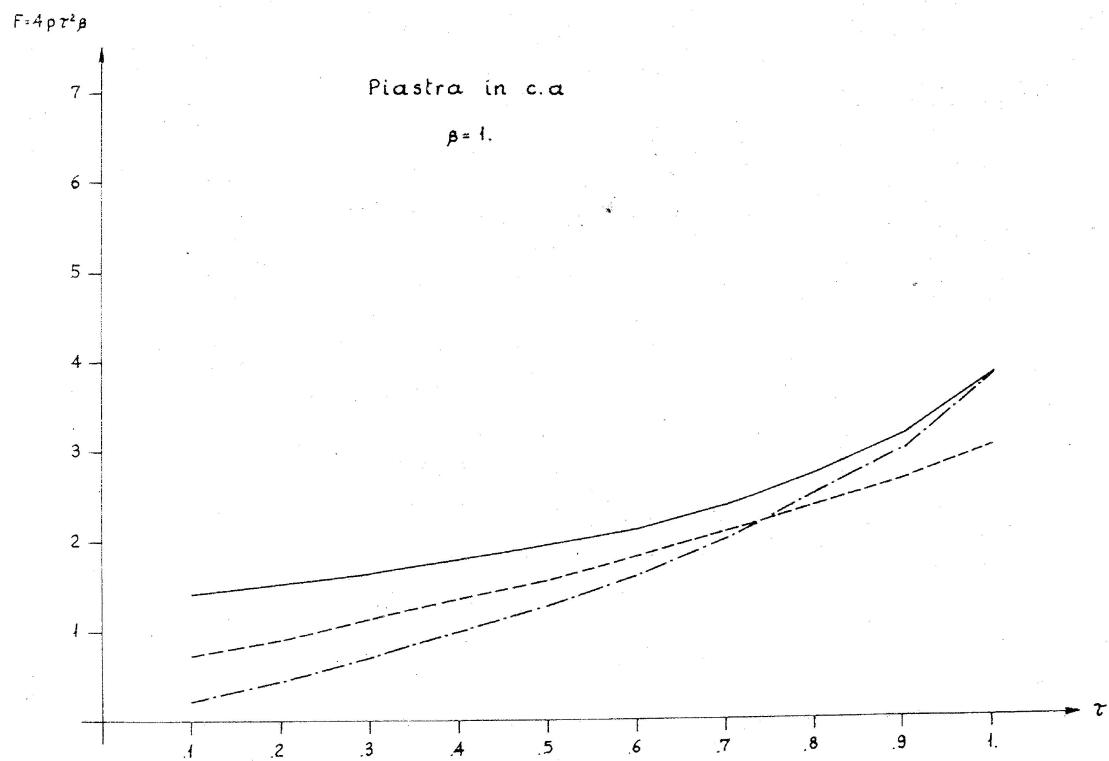
Final Remarks

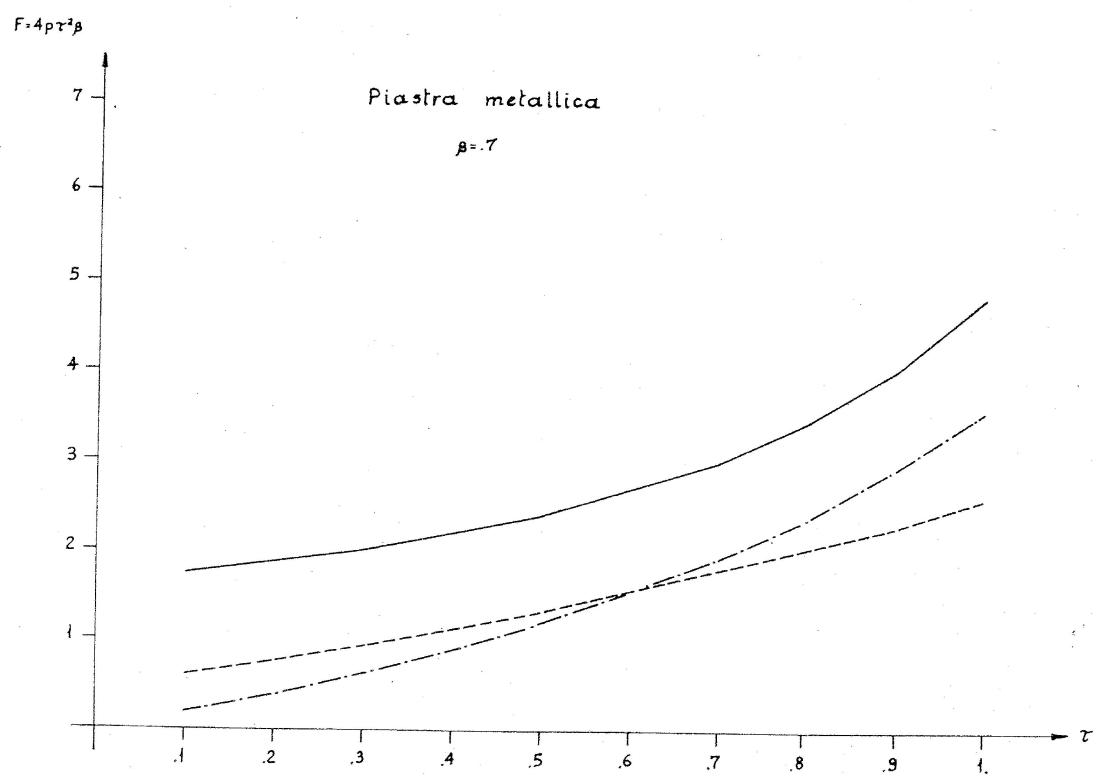
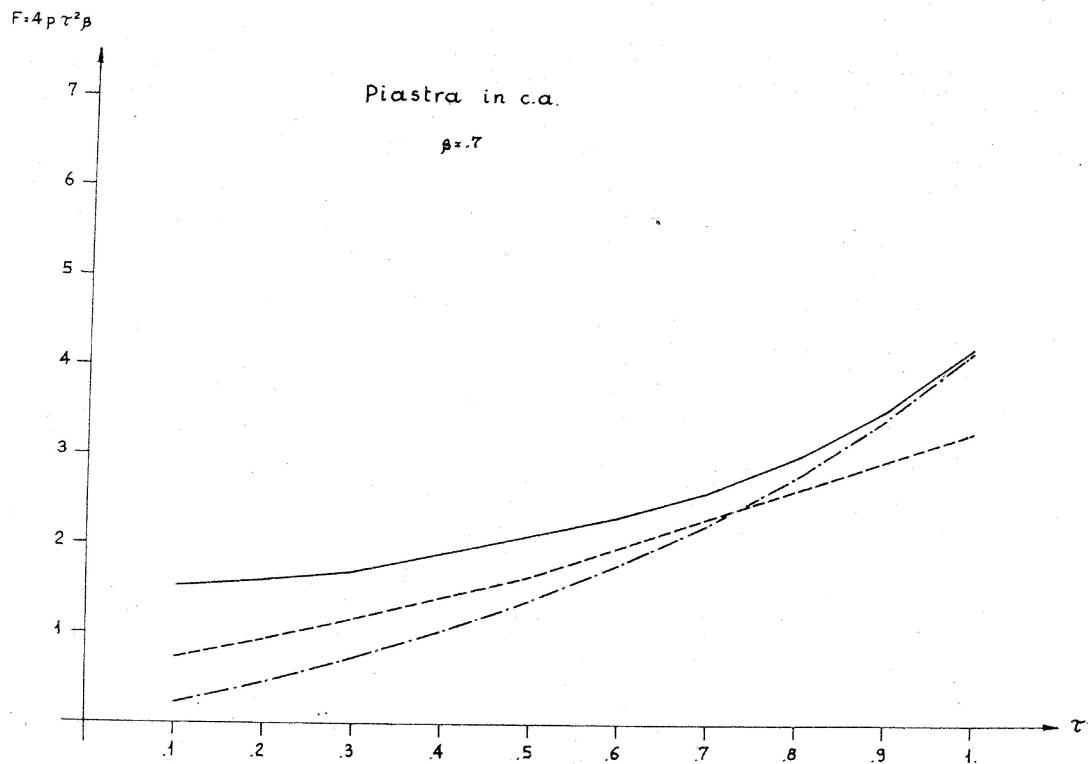
In the following graphs of upper and lower bounds relative to both methods previously exposed are reported in the case of uniform load on a zone of the plate. The dashed line graphs refer to the first method (double Fourier expansion of the load).

The comparison between the results leads to the conclusion that for loads applied almost on the whole plate the second method goes better while for almost concentrated loads the first must be preferred.

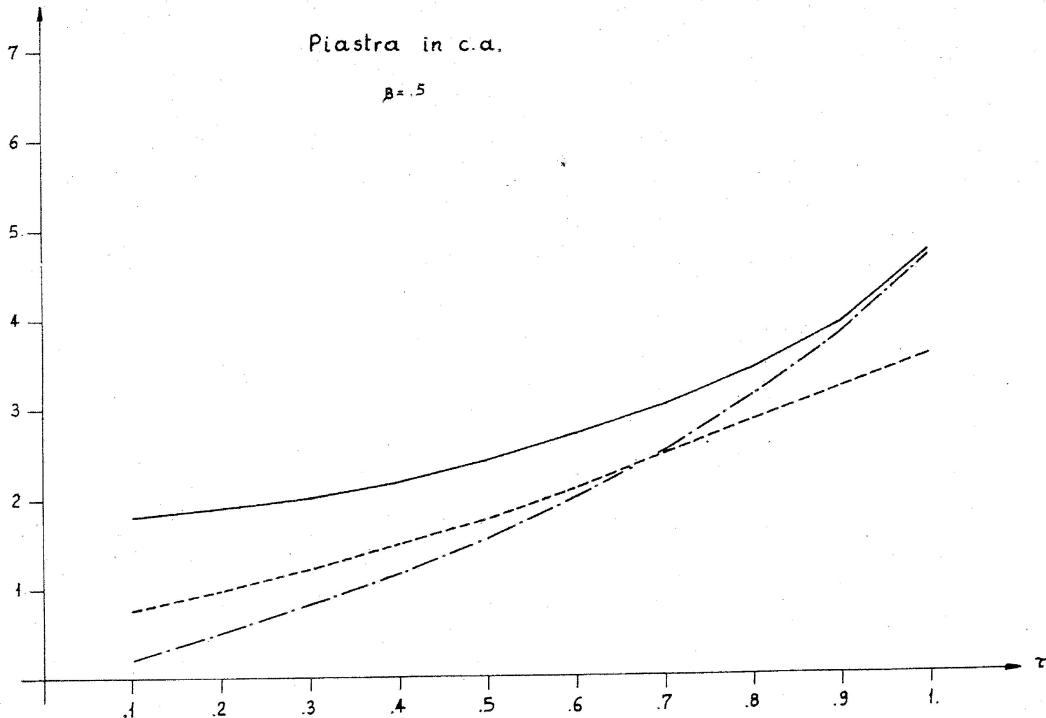
BIBLIOGRAFIA

- [1] M. CAPURSO: « Limiti di collasso rigido-plastico per piastre rettangolari metalliche a vincoli rigidi ». Ing. Civile n. 21, 1966.
- [2] S. D'AGOSTINO: « Sul collasso delle piastre rettangolari in cemento armato ». Ing. Civile n. 21, 1966.
- [3] CH. MASSONET - M. SAVE: « Calcul plastique des constructions ». Vol. II, 1963.
- [4] PH. HODGE JR. - C. K. SUN: « On plastic interaction curves ». Ill. Inst. of Tech. Dep. of Mech. February 1967 Domit Report. 1-34.

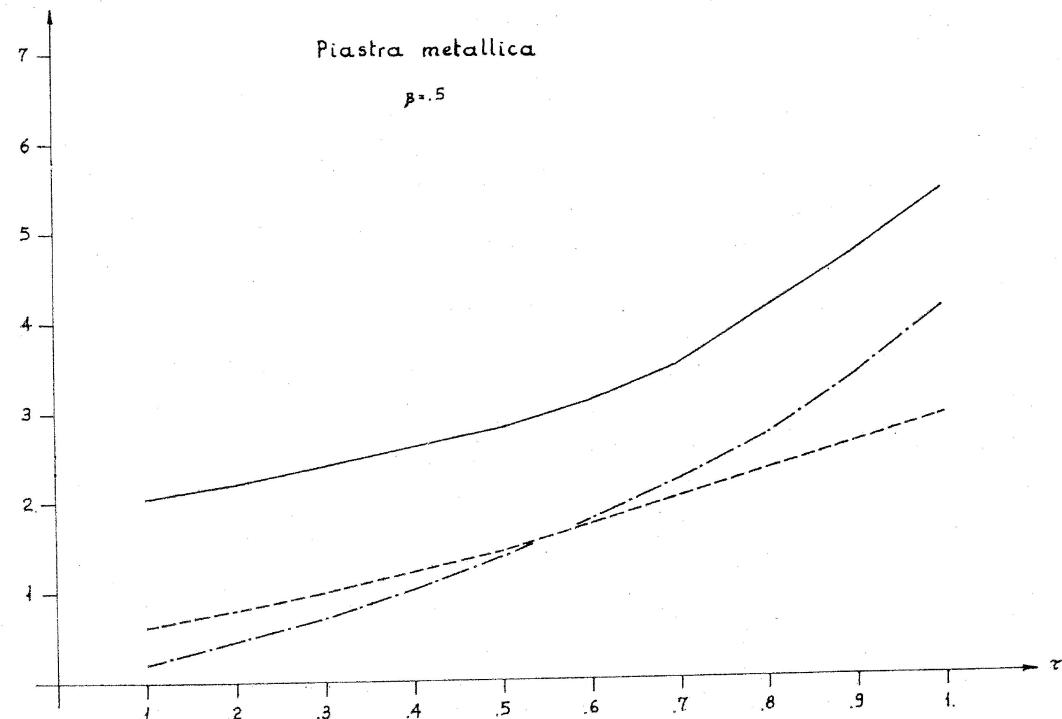




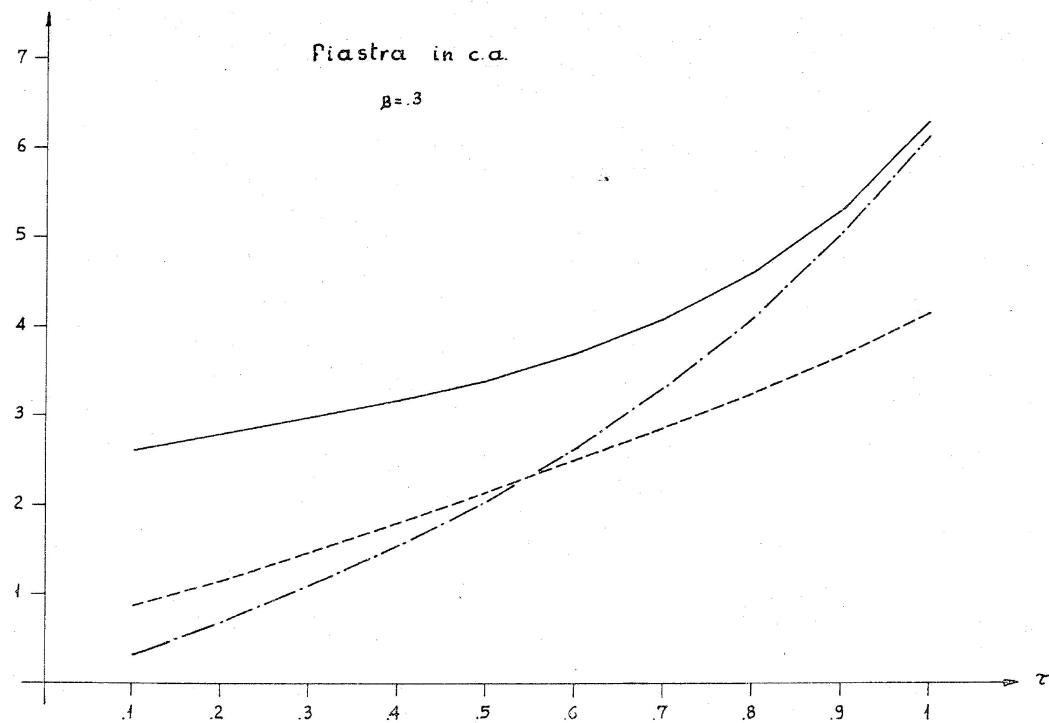
$$F = 4\rho\tau^2\beta$$



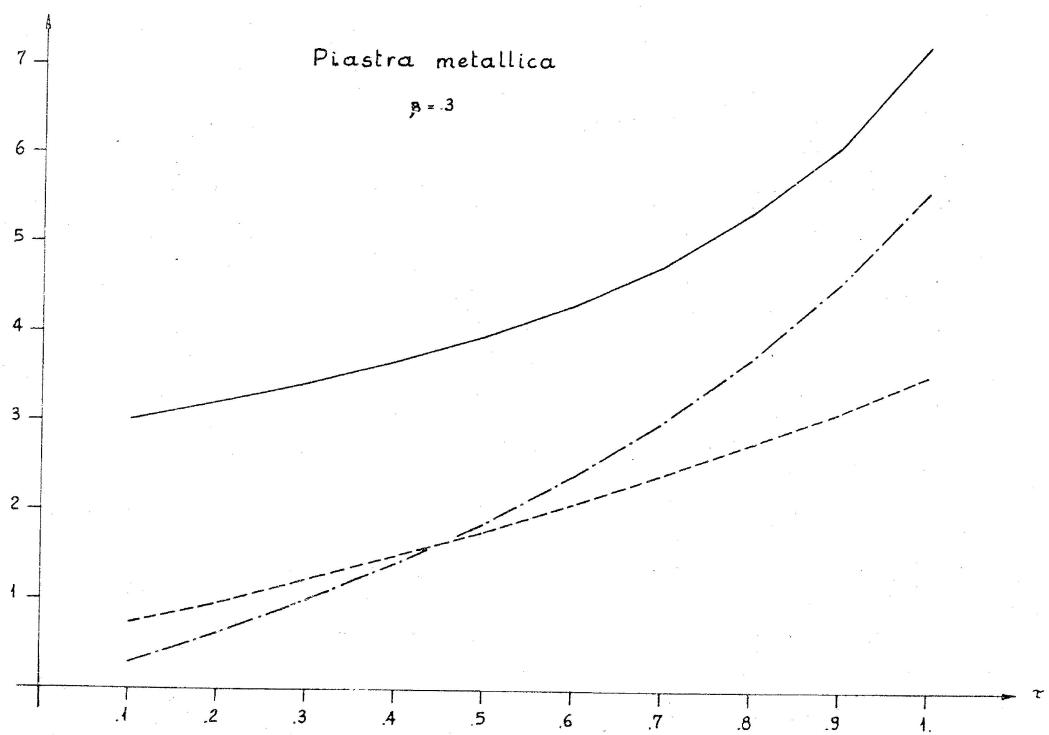
$$F = 4\rho\tau^2\beta$$



$$F = 4\rho v^2 \beta$$



$$F = 4\rho \tau^2 \beta$$



UNIVERSITA' DI NAPOLI - FACOLTA' DI INGEGNERIA
ISTITUTO DI SCIENZA DELLE COSTRUZIONI
Recenti Pubblicazioni

- 166) V. Franciosi - Alcuni risultati sperimentali e teorici in tema di calcolo a rottura, 1962.
- 167) T. Renzulli - Studio sperimentale e teorico su di uno stato tensionale biassiale, 1963.
- 168) E. Bruzzese - Incremental collapse of a steel arch bridge under repeated live and thermal loading, 1964.
- 169) G. Augusti - Tests of cylindrical shells in the plastic range, 1964.
- 170) V. Franciosi - Collapse of arches under repeated loading, 1964.
- 171) G. Nicolosi - Calcolo a rottura dei tubi in conglomerato, 1963.
- 172) G. Augusti - Stabilità di strutture elastiche elementari in presenza di grandi spostamenti, 1964.
- 173) S. D'Agostino - Considerazioni relative alle travi a sezione sottile pluriconnessa, soggette a taglio, 1964.
- 174) G. Augusti - In tema di svergolamento delle strutture in campo inelastico, 1964.
- 175) L. Adriani - In tema di lastre piane, 1964.
- 176) F. Maceri
- 177) G. Augusti - Svergolamento e collasso di elementi strutturali in campo inelastico, 1964.
- 178) T. Renzulli - Sui carichi di rottura delle cupole sferiche, 1964.
- 179) S. D'Agostino - Un problema piano di tensioni: Risoluzione alle differenze finite, 1964.
- 180) L. Adriani - Sul calcolo del coefficiente di rottura attraverso modelli, 1964.
- 181) F. Maceri - Della portanza dei pali di fondazione, 1964.
- 182) G. Augusti - Experimental rotation capacity of steel beam-columns, 1964.
- 183) R. Sparacio - Behavior of hybrid beams subjected to static loads, 1964.
- 184) V. Franciosi - Le travi a sezione sottile, 1965.
- 185) E. Barbarito - Analysis of folded plate structures, 1964.
- 186) G. Augusti - Ulteriori prove su cilindri di acciaio in fase plastica, 1965.
- 187) S. D'Agostino - L'asta caricata di punta in presenza di attrito nelle cerriere, 1965.
- 188) G. Augusti - Cenni storici sul calcolo a rottura, 1965.
- 189) R. Sparacio - Il carico di punta nel caso di materiale non resistente a trazione, 1965.
- 190) F. Maceri - Studio dell'equilibrio elasto-plastico su modelli teorici di telai, 1965.
- 191) R. Sparacio - Le curve di equilibrio in fase elastica per i telai piani, 1965.
- 192) F. Maceri - Esperienze su archi in cemento armato al collasso incrementale, 1965.
- 193) R. Sparacio - Esempi di ottimizzazione nella progettazione di strutture: le travi di Gerber, 1965.
- 194) G. Augusti - La instabilità dei tubi soggetti a pressione, 1965.
- 195) G. Augusti - Inelastic buckling gradient, 1965.
- 196) T. Renzulli - Studio dinamico di un'asta inelastica compressa, 1965.
- 197) S. D'Agostino - Le deformazioni viscose di travi inflesse in calcestruzzo armato, 1966.
- 198) M. Locascio - Alcune considerazioni sul cerchio di Mohr, 1966.
- 199) T. Renzulli - Calcolo per successive approssimazioni del carico critico in fase inelastica, 1965.
- 200) G. Augusti - Ancora sui criteri di plasticizzazione, 1966.
- 201) R. Sparacio - Sul calcolo a torsione delle sezioni sottili pluriconnesse, 1965.
- 202) F. Maceri - Sulla stabilità dell'equilibrio di un'asta elasto-plastica, 1965.
- 203) G. Augusti - Su di un'asta inelastica compressa da forza trascinata, 1966.

- 203) P. Belli - Esperienze su telai a molte iperstatiche in conglomerato armato portati al collasso statico, 1966.
- 204) V. Franciosi - Carico critico e carico di collasso nelle strutture monodimensionali piane, 1966.
- 205) G. Augusti - Problemi dinamici nell'instabilità delle strutture elastiche (cenni introduttivi), 1965-66.
- 206) G. Augusti B. Barbarito - Small - Scale Aluminium Stanchions in Combined Bending and Compression, 1966.
- 207) L. Adriani - Considerazioni sull'estensione dei risultati del De Saint Venant, 1966.
- 208) G. Augusti - Full plastic torque of I-Beams, 1966.
- 209) G. Augusti - Calcolo a rottura delle travi di parete sottile (impostazione generale e primi risultati), 1966.
- 210) F. Maceri - Un linguaggio di programmazione orientato alla risoluzione di problemi di analisi strutturale, 1966.
- 211) G. Augusti - Instabilità delle lastre cilindriche, 1966.
- 212) L. Adriani - Il criterio della fascia intrinseca, 1966.
- 213) V. Franciosi - Considerazioni critiche in tema di criteri di resistenza, 1967.
- 214) S. D'Agostino - Sui domini di plasticizzazione per materiali con incrudimento, 1966.
- 215) S. D'Agostino - Le deformazioni da ritiro nelle travi inflesse in calcestruzzo armato, 1966.
- 216) G. Augusti - Tests on mild steel miniature stanchions, 1967.
- 217) G. Augusti - Uno schema elementare per un'indagine sulla stabilità degli archi inelasticci, 1967.
- 218) S. D'Agostino - Effetto dell'incrudimento sui domini di plasticizzazione, 1967.
- 219) V. Franciosi - Stabilità degli archi da ponte, 1967.
- 220) R. Sparacio - Procedimento per lo studio della stabilità dell'equilibrio nell'arco a tre cerniere in fase elastica et ultra, 1967.
- 221) F. Maceri - Sopra alcune funzioni notevoli della teoria delle strutture, 1967.
- 222) G. Augusti R. Scuderi - Sul collasso plastico di travi a mensola con sezione a doppio T, 1967.
- 223) R. Sparacio - Prove su telai in C. A. al collasso incrementale, 1967.
- 224) F. Maceri - Un procedimento per il calcolo rapido dei moltiplicatori critici delle travi continue, 1967.
- 225) F. Maceri - On the torsion of thin-walled multicell sections, 1967.
- 226) F. Maceri - Metodi di successive approssimazioni per il calcolo a torsione delle travi a sezione sottile più volte connessa, 1967.
- 227) F. Maceri - Sul calcolo a rottura delle sezioni sottili pluriconnesse sottoposte a torsione, 1967.
- 228) F. Maceri - Contributo al calcolo a torsione delle sezioni sottili pluriconnesse, 1967.
- 229) F. Maceri Estratto dalla Rivista « La RICERCA » Anno 1967
- 230) G. Augusti - Esame critico dei metodi matriciali di analisi strutturale, 1965.
- 231) G. Augusti Estratto dagli Atti del Congresso Nazionale AIDA-AIR, Napoli, 25-28 Ottobre 1965.
- 232) V. Franciosi - Buckling of inelastic arches: a simple model, 1968.
- 233) E. Chianese B. Barbarito - Instability of struts subject to radiant heat, 1968.
- 234) E. Chianese - Le travi con sezione a parete sottile pluriconnessa, 1969.
- 235) E. Chianese - Studio sperimentale sui fronti plastici susseguiti in fase di incrudimento, 1968.
- 236) B. Barbarito Nota I
- 237) E. Chianese - Collasso incrementale localizzato. Anno 1968.
- 238) G. Romano - Collasso incrementale localizzato per materiali non omogenei, 1969.
- 239) M. Romano - Studio sperimentale sui fronti plastici susseguiti in fase di incrudimento, 1969.
- 240) G. Augusti - Studio sperimentale sui fronti plastici susseguiti in fase di incrudimento, 1969.
- 241) G. Augusti J. B. Martin - Prove al collasso incrementale e per plasticizzazione alternata su alberi ruotanti, 1969.
- 242) G. Romano J. D. O'Keeffe - Tabelle per il calcolo dei ponti Maillart, 1968.
- 243) G. Romano - On leon's criterion, 1969.
- 244) G. Romano - On buckling and instability of plastic structural models, 1970.
- 245) G. Romano - An approximate method of analysis for pulse - Loaded rigid - plastic structures, 1970.
- 246) G. Romano - Limiti di collasso rigido plastico di piastre rettangolari soggetto a carichi simmetrici rispetto alle mediane, 1969.