

## INDICE

### PREMESSA

<b>I – CINEMATICA . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>  1. NOZIONI PRELIMINARI . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1. Partizioni e suddivisioni . . . . .	2
1.2. Localizzazione . . . . .	5
1.3. Formula di Green . . . . .	9
<b>  2. CINEMATICA DEI CORPI CONTINUI . . . . .</b>	<b>11</b>
2.1. Configurazioni . . . . .	14
2.2. Flusso . . . . .	17
<b>  3. DEFORMAZIONE FINITA . . . . .</b>	<b>19</b>
3.1. Isometrie . . . . .	19
3.2. Decomposizione polare . . . . .	23
3.3. Deformazione dello spazio tangente . . . . .	26
3.4. Dilatazioni e scorrimenti angolari . . . . .	27
3.5. Dilatazione volumetrica . . . . .	29
3.6. Deformazione delle superfici . . . . .	31
3.7. Trasformata di Piola e formula di Nanson . . . . .	32
<b>  4. DEFORMAZIONI OMOGENEE . . . . .</b>	<b>36</b>
4.1. Punti fissi, traslazioni, rotazioni e stiramenti . . . . .	38
4.2. Estensioni semplici ed omotetie . . . . .	41
4.3. Trasformazioni rigide . . . . .	43
4.4. Synopsis cinematica . . . . .	47
<b>  5. MISURE DI DEFORMAZIONE . . . . .</b>	<b>48</b>
5.1. Congruenza delle deformazioni finite . . . . .	51
<b>  6. CAMBIAMENTO DI OSSERVATORE . . . . .</b>	<b>55</b>
6.1. Punti di vista in movimento relativo . . . . .	58
<b>  7. MOTI E TRAIETTORIE . . . . .</b>	<b>60</b>
7.1. Descrizioni materiale e spaziale . . . . .	61
<b>  8. TEOREMI DEL TRASPORTO . . . . .</b>	<b>67</b>



8.1. Curve e superfici materiali . . . . .	70
<b>9. CINEMATISMI . . . . .</b>	<b>76</b>
9.1. Cinematismi rigidi . . . . .	77
9.2. Rotazione e deformazione tangenti . . . . .	78
9.3. Trasporto della circolazione e della vorticità . . . . .	79
9.4. Operatore cinematico . . . . .	83
9.5. Velocità di dilatazione e di scorrimento angolare . . . . .	87
9.6. Matrice della deformazione tangente . . . . .	89
9.7. Rappresentazione di Voigt . . . . .	90
9.8. Valor medio della deformazione tangente . . . . .	92
9.9. Prima diseguaglianza di Korn . . . . .	92
9.10. Analisi spettrale della deformazione tangente . . . . .	93
9.11. Deformazione tangente triassiale, piana e monoassiale . . . . .	94
9.12. Deformazione tangente sferica e deviatorica . . . . .	96
9.13. Cinematica e cambiamento dell'osservatore . . . . .	97
<b>10. CONGRUENZA INTERNA . . . . .</b>	<b>100</b>
10.1. Condizione differenziale di congruenza . . . . .	103
10.1.1. <i>Campi tensoriali solenoidali e funzioni di sforzo</i> . . . . .	107
10.2. Trattazione di Cesàro . . . . .	109
10.3. Congruenza in dimensione due . . . . .	113
10.3.1. <i>La funzione di Airy</i> . . . . .	116
10.3.2. <i>Trattazione di Cesàro bidimensionale</i> . . . . .	116
<b>11. COMPLEMENTI . . . . .</b>	<b>118</b>
11.1. Forma generale della decomposizione polare . . . . .	119
11.2. Superfici singolari . . . . .	123
11.3. Trasporto con superfici di discontinuità . . . . .	126
11.4. Forma variazionale del teorema del trasporto . . . . .	128
<b>12. CINEMATICA SU VARIETA'</b> . . . . .	<b>129</b>
12.1. Flussi e spinte . . . . .	130

12.2. Derivata di Lie . . . . .	134
12.3. Campi dipendenti dal tempo . . . . .	142
12.4. Integrazione su varietà e teorema del trasporto . . . . .	146
12.5. Varietà di Riemann . . . . .	148
12.6. Connessione e derivate covarianti . . . . .	149
12.7. Campi vettoriali di Killing . . . . .	156
12.8. Accelerazioni e spinte . . . . .	158
12.9. Derivate seconde covarianti . . . . .	160
12.10. Tensore curvatura . . . . .	163

**RIFERIMENTI**

<b>II – MECCANICA DEL CONTINUO</b> . . . . .	173
<b>1. GENERALITA'</b> . . . . .	173
<b>2. SPAZIO CINEMATICO</b> . . . . .	175
2.1. Spazi di Hilbert . . . . .	176
2.2. Spazi di Sobolev . . . . .	177
2.3. Valori al contorno . . . . .	181
2.4. Gradiente e divergenza distribuzionali . . . . .	182
2.5. Cinematismi Green-regolari . . . . .	183
2.6. Formula di Green . . . . .	185
2.7. Parte regolare e parte singolare . . . . .	188
<b>3. DUALITA' E POTENZA VIRTUALE</b> . . . . .	191
3.1. Strutture continue . . . . .	193
<b>4. CONDIZIONI VINCOLARI</b> . . . . .	194
4.1. Vincoli perfetti, lisci e bilaterali . . . . .	195
4.2. Vincoli al contorno . . . . .	198
4.3. Forze attive . . . . .	198
<b>5. CINEMATISMIGRIDI</b> . . . . .	199
<b>6. EQUILIBRIO</b> . . . . .	201
6.1. Equazioni cardinali della statica . . . . .	204

6.2. Principio delle potenze virtuali . . . . .	207
6.3. Teorema delle potenze virtuali . . . . .	210
6.3.1. <i>Dimostrazione del teorema delle potenze virtuali</i> . . . . .	212
6.4. Reazioni vincolari . . . . .	216
6.5. Stati di sforzo in autoequilibrio . . . . .	218
6.6. Strutture staticamente determinate . . . . .	219
<b>7. PROBLEMI AL CONTORNO</b> . . . . .	220
7.1. Vincoli al contorno . . . . .	221
7.2. Sforzi conformi . . . . .	223
7.3. Equazioni di equilibrio di Cauchy . . . . .	224
7.4. Forze concentrate . . . . .	228
7.5. Discontinuità . . . . .	229
7.6. Vettori caratteristici . . . . .	230
7.7. Sforzi autoequilibrati . . . . .	231
<b>8. CONDIZIONI DI CONGRUENZA</b> . . . . .	233
8.1. Decomposizione ortogonale . . . . .	235
8.2. Congruenza in problemi al contorno . . . . .	236
<b>9. FORMULAZIONI VARIAZIONALI</b> . . . . .	238
9.1. Formulazioni variazionali dell'equilibrio . . . . .	239
9.2. Formulazioni variazionali della congruenza . . . . .	240
9.3. Regole di complementarietà . . . . .	242
<b>10. TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE</b> . . . . .	243
10.1. Teoremi primali . . . . .	243
10.2. Teoremi complementari . . . . .	250
10.3. Synopsis . . . . .	252
<b>11. EQUILIBRIO DINAMICO</b> . . . . .	258
11.1. Conservazione della massa . . . . .	258
11.2. Legge fondamentale della dinamica . . . . .	260
11.3. Condizioni locali d'equilibrio dinamico . . . . .	264

<i>11.3.1. Descrizione materiale dell'equilibrio dinamico . . . . .</i>	264
<i>11.3.2. Descrizione spaziale dell'equilibrio dinamico . . . . .</i>	265
<i>11.4. Equilibrio dinamico di un volume di controllo . . . . .</i>	266
<i>11.4.1. Equazioni di Navier-StVenant-Stokes . . . . .</i>	269
<i>11.5. Equazioni di Euler e teorema di Bernoulli . . . . .</i>	272
<i>11.5.1. Idrostatica . . . . .</i>	274
<i>11.5.2. Spinta di Archimede e diavoletto di Cartesio . . . . .</i>	275
<b>12. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA . . . . .</b>	278
12.1. Temperature virtuali . . . . .	278
12.2. Principio delle temperature virtuali . . . . .	280
12.3. Legge di Fourier . . . . .	282
12.4. Leggi di bilancio . . . . .	283
<b>13. EQUILIBRIO REFERENZIALE . . . . .</b>	284
13.1. Tensore di Piola . . . . .	285
13.2. Tensore di Kirchhoff . . . . .	286
13.3. Tensore di Piola-Kirchhoff . . . . .	287
<b>14. COMPLEMENTI . . . . .</b>	289
14.1. Simmetria dello stato tensionale . . . . .	290
14.2. Versione tensoriale della formula di Green . . . . .	292
14.3. Valor medio dell'atto di deformazione . . . . .	293
14.4. Relazione di Signorini . . . . .	294
14.5. Valor medio dello stato tensionale . . . . .	294
14.6. Equilibrio astatico . . . . .	295
14.7. Teorema di Da Silva . . . . .	296
14.8. Rappresentazione delle autotensioni . . . . .	297
14.9. Vincoli locali al contorno . . . . .	299
<i>14.9.1. Vincoli assoluti . . . . .</i>	299
<i>14.9.2. Vincoli relativi . . . . .</i>	300
<i>14.9.3. Operatori di vincolo . . . . .</i>	301

<i>14.9.4. Vincoli ben posti</i>	302
<i>14.9.5. Sistemi reattivi</i>	302
14.10. Campi discontinui	305
<i>14.10.1. Gradiente di campi discontinui</i>	306
<i>14.10.2. Divergenza di campi discontinui</i>	308
<i>14.10.3. Deformazione tangente distribuzionale</i>	309
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>III – STATO TENSIONALE PUNTUALE</b>	315
<b>1. TEORIA DI CAUCHY</b>	315
1.1. Postulato di Cauchy	316
1.2. Lemma di Cauchy	317
1.3. Teorema fondamentale di Cauchy	318
1.4. Variante di Noll	319
1.5. Verifica dell'equilibrio	321
<b>2. TEORIA COMPLEMENTARE</b>	325
2.1. Postulato cinematico	325
2.2. Duale del Lemma di Cauchy	326
2.3. Duale del Teorema di Cauchy	327
2.4. Verifica della congruenza	328
<b>3. STATO TENSIONALE PUNTUALE</b>	330
3.1. Tensioni normali e tangenziali	330
3.2. Matrice dello stato tensionale	331
3.3. Rappresentazione di Voigt	333
3.4. Componenti tetraedrali	336
3.5. Direzioni principali	337
3.6. Quadriche delle tensioni	338
3.6.1. <i>Quadrica di Cauchy</i>	339
3.6.2. <i>Quadrica reciproca</i>	339
3.6.3. <i>Ellissoide di Cauchy</i>	340

3.6.4. <i>Ellissoide di Lamé</i>	341
3.7. Stati tensionali sferici e deviatorici	342
<b>4. CERCHIO di MOHR</b>	343
4.1. Stati tensionali bidimensionali	344
4.2. Il riferimento di Mohr	348
4.3. Costruzione del cerchio di Mohr	348
4.3.1. <i>Esempi di costruzione del Cerchio</i>	351
4.4. Stati tensionali tridimensionali	356
4.4.1. <i>Arbelo di Mohr</i>	356
4.5. Spinta delle terre. Teoria di Coulomb-Rankine	357
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>IV – MODELLI STRUTTURALI</b>	367
<b>1. MODELLI CONTINUI</b>	367
1.1. Formula di Green e teorema di Cauchy	370
1.2. Congruenza	371
1.3. Analogia di Mohr	376
<b>2. MODELLI SU VARIETA'</b>	379
2.1. Configurazioni, flussi e spostamenti virtuali	379
2.2. Misura di deformazione	380
2.3. Deformazione tangente	381
2.4. Equilibrio	384
<b>3. MODELLI MONODIMENSIONALI</b>	388
3.1. Geometria delle curve	390
3.1.1. <i>Espressione della curvatura</i>	392
<b>4. L'ASTA</b>	393
<b>5. LA FUNE</b>	396
5.1. Curva funicolare	400
5.2. Funi di sospensione	403
5.3. La catenaria	405

5.4. Principio di Torricelli . . . . .	407
5.5. Calcolo delle variazioni . . . . .	410
5.6. Peculiarità del modello fune . . . . .	413
<b>6. LA TRAVE DI TIMOSHENKO . . . . .</b>	<b>415</b>
6.1. Analogia di Mohr . . . . .	418
6.2. Buona posizione . . . . .	421
6.3. Componenti assiali e trasversali . . . . .	421
6.4. La trave piana . . . . .	424
6.5. La trave ad asse rettilineo . . . . .	427
6.6. La trave piana ad asse rettilineo . . . . .	427
<b>7. LA TRAVE DI BERNOULLI-EULER . . . . .</b>	<b>429</b>
7.1. Espressioni della velocità di curvatura flessionale . . . . .	429
7.2. Esempi . . . . .	431
7.3. Equilibrio . . . . .	434
7.4. Buona posizione . . . . .	435
7.5. La trave piana . . . . .	436
7.6. La trave ad asse rettilineo . . . . .	437
7.6.1. Analogia di Mohr . . . . .	439
7.7. La trave rettilinea nel piano . . . . .	440
<b>8. DEFORMAZIONE FINITA DELLE TRAVI . . . . .</b>	<b>442</b>
8.1. Configurazioni . . . . .	442
8.2. Processi evolutivi . . . . .	442
8.3. Deformazione finita . . . . .	445
8.4. Velocità di deformazione . . . . .	448
8.4.1. Velocità di curvatura . . . . .	449
8.4.2. Velocità di scorrimento . . . . .	450
8.5. Equazioni di equilibrio . . . . .	451
8.6. Relazioni cinematiche . . . . .	452
8.7. Equilibrio nella configurazione di riferimento . . . . .	454

<b>9. MODELLI BIDIMENSIONALI</b>	456
9.1. Geometria delle superfici	456
<b>10. LA MEMBRANA</b>	460
10.1. La membrana ribassata e pretesa	463
<b>11. LA PIASTRA DI REISSNER-MINDLIN</b>	465
11.1. Formula di Green	468
11.2. Dal tridimensionale al bidimensionale	471
<b>12. LA PIASTRA DI KIRCHHOFF</b>	472
12.1. Formula di Green	473
12.2. Forma canonica delle condizioni al contorno	475
12.3. Dal tridimensionale al bidimensionale	476
<b>13. CONTINUI CON STRUTTURA</b>	477
13.1. Varietà fibrate	477
13.2. Configurazioni e spostamenti virtuali	479
13.3. Continui micromorfi e micropolari	480
13.4. Misure di deformazione	481
13.5. Operatori cinematici	482
13.6. Equilibrio	483
<b>14. VARIAZIONE DEI VINCOLI</b>	488
14.1. Relazioni di dualità	488
14.2. Synopsis	494
14.3. Autosforzi e iperstaticità	495
14.4. Variazioni finite dell'iperstaticità e della labilità	498
14.5. Strutture semplici	499
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>INDICE ANALITICO</b>	505
<b>INDICE DELLE NOTE BIOGRAFICHE</b>	517

## PREMESSA

Nel corso degli anni di insegnamento di Scienza delle Costruzioni presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli, ora intitolata a Federico II di Svevia, ho sempre perseguito, attraverso continue modifiche e revisioni, il tentativo di dare al corpo fondamentale della disciplina un'impostazione più moderna.

La tradizione della scuola e la difficoltà di contemperare le esigenze didattiche con metodologie suggerite dall'attività di ricerca scientifica hanno reso tale compito arduo ma affascinante.

Finalmente, anche per le insistenze dei giovani colleghi che sono stati miei allievi, ho deciso di dare alle stampe questo testo, pur nella convinzione che alcune parti sono ancora svolte in modo non sufficientemente completo.

La trattazione fornisce un inquadramento della disciplina secondo un'angolazione originale che propone un approccio decisamente innovativo in cui è privilegiato il contenuto metodologico e concettuale rispetto all'elencazione dei risultati.

Il libro consta di due volumi, Tomo I e Tomo II, più un volume propedeutico e di riferimento, il Tomo Zero. Questo primo volume è dedicato all'analisi della cinematica e dell'equilibrio.

La trattazione è svolta con riferimento al continuo di CAUCHY ma con un approccio generale che fa riferimento a nozioni e metodi di geometria differenziale e consente un'immediata estensione ai modelli strutturali continui mono e bi-dimensionali di travi, piastre e gusci, ed ai modelli strutturali tri-dimensionali con microstruttura, quali i continui dei fratelli COSSERAT ed i continui micromorfi.

Nel secondo volume è svolta la trattazione della teoria dell'elasticità, della trave di SAINT VENANT e dei criteri di verifica delle strutture.

Il testo è indirizzato sia agli allievi del corso che ai lettori esperti ma interessati ad una presentazione rigorosa ed ingegneristica, e quindi non tradizionale, del corpo fondamentale della disciplina.

Nel redigere il testo ho tentato di conciliare la scelta di adottare metodi ed approcci moderni, adeguati anche alle esigenze dell'analisi dei problemi strutturali richiesta dal ricorso a strumenti di calcolo automatico, e la necessità di non esigere dal lettore conoscenze troppo avanzate.

Spero che tale intendimento sia stato raggiunto anche riservando alla trattazione delle parti più impegnative le sezioni di complemento poste in coda ad ogni capitolo.

Le scelte effettuate sono state dettate sia dall'esperienza di insegnamento di Scienza delle Costruzioni agli allievi ingegneri che dalla necessità di contenere i testi in dimensioni ragionevoli. Certamente la trattazione di molti argomenti è svolta in maniera più approfondita e dettagliata di quanto non possa essere illustrato in un corso di primo livello.

Ciò rende peraltro possibile una libera scelta del livello di approfondimento e fornisce una documentazione esauriente su metodi e risultati nella modellazione del continuo e nell'analisi delle strutture.

D'altro canto molti argomenti, anche di rilevante interesse, non hanno potuto trovare spazio in questa prima stesura e saranno oggetto di ampliamenti futuri.

Diversi sono gli argomenti classici trattati in modo originale o con metodologie non tradizionali. Il testo è inoltre disseminato di contributi inediti e di risultati di studio e di ricerca. In particolare la trattazione del problema dell'equilibrio è basata su una precisa definizione degli spazi funzionali topologici cui appartengono le grandezze che entrano in gioco e costituisce il primo esempio di un attacco moderno al problema che consente di non far ricorso alla classica ma oramai datata teoria di CAUCHY.

Gli strumenti attualmente resi disponibili dallo sviluppo dell'analisi funzionale consentono infatti di dimostrare direttamente l'equivalenza tra la condizione variazionale di equilibrio di un sistema di forze attive ed il principio dei lavori virtuali. Il principio diviene pertanto un teorema e l'ipotesi dell'esistenza di uno stato tensionale si traduce nel risultato del teorema.

La trattazione fa frequente riferimento a nozioni, definizioni e risultati di matematica che sono indispensabili per una piena comprensione delle tematiche affrontate. Una rapida rivisitazione di strumenti di base adoperati nel testo ed una documentazione su alcuni aspetti complementari più avanzati sono contenuti nel Tomo Zero.

Sotto il profilo didattico è palese la necessità di accompagnare lo studio con lo sviluppo di specifici esempi applicativi che costituiscono indispensabili verifiche della padronanza dei concetti e dei metodi propri dell'analisi del continuo e dei modelli strutturali.

Questo lavoro è dedicato al mio carissimo fratello MANFREDI che è stato professore di Scienza delle Costruzioni, e direttore dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Catania, gemello anche negli interessi, ispiratore di molte fondamentali riflessioni ed ideatore di brillanti contributi teorici ed applicativi nella Meccanica delle Strutture. La sua scomparsa prematura nel settembre del 1988 all'età di 47 anni è stata per me fonte di grande sgomento, come più di recente quella di mia madre.

Ringrazio i miei allievi ed amici ELIO SACCO, LUCIANO ROSATI, FRANCESCO MAROTTI DE SCIARRA e MARINA DIACO per la preziosa collaborazione prestatami in questi anni. A MARINA DIACO va anche il riconoscimento di una costante e fattiva assistenza nella redazione di questo testo e di utili rilievi critici.

A CHIARA, FEDERICA, EMANUELA, ALESSANDRA e GIULIA affido una copia di queste note per motivare almeno in parte tante giornate passate da solo a scrivere e studiare.

Napoli, dicembre 2001

GIOVANNI ROMANO

+

+

+

+

# I – CINEMATICA

Questo capitolo è dedicato all’analisi della cinematica del continuo tridimensionale di CAUCHY che costituisce a tutt’oggi il modello di riferimento per l’interpretazione delle prove sperimentali sui materiali. Questo modello svolge pertanto un ruolo privilegiato rispetto agli altri, più o meno sofisticati, proposti in letteratura per la descrizione del comportamento di particolari tipologie strutturali. La trattazione è svolta partendo dalle nozioni generali concernenti la deformazione finita di un corpo continuo per affrontare poi lo studio dei cinematicismi, seguendo un approccio che consente di estendere i metodi ed i risultati ad altri modelli di strutture continue. Si adottano le seguenti notazioni.

- $V$  è lo spazio lineare tridimensionale delle traslazioni associato allo spazio euclideo  $\mathbb{S}$ , con prodotto interno  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ .
- $L(V; V)$  è lo spazio dei tensori misti del secondo ordine su  $V$  dotato del prodotto interno  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$ .
- $L^+(V; V) \subset L(V; V)$  è lo spazio dei tensori con determinante positivo.
- $\text{Sym}(V; V), \text{Emi}(V; V) \subset L(V; V)$  sono i sottospazi dei tensori simmetrici ed emisimmetrici

$$\begin{aligned}\text{Sym}(V; V) &:= \{\mathbf{A} \in L(V; V) : \mathbf{A}^T = \mathbf{A}\}, \\ \text{Emi}(V; V) &:= \{\mathbf{A} \in L(V; V) : \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\},\end{aligned}$$

- $\text{Pos}(V; V), \text{Psym}(V; V) \subset L(V; V)$  sono i sottospazi dei tensori simmetrici, rispettivamente positivi e definiti positivi
$$\begin{aligned}\text{Pos}(V; V) &:= \{\mathbf{A} \in \text{Sym}(V; V) : \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V\}, \\ \text{Psym}(V; V) &:= \{\mathbf{A} \in \text{Sym}(V; V) : \mathbf{A}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}\}.\end{aligned}$$
- Negli integrali le misure di volume e di superficie saranno denotate rispettivamente con  $dv$  e  $da$ .
- $L^2(V; \mathbb{R}) := L(V, V; \mathbb{R})$  è lo spazio delle forme bilineari reali su  $V$ .
- $\text{Gen}(\mathbf{v}) \subseteq V$  è il sottospazio lineare generato dal vettore  $\mathbf{v} \in V$ .

Nel seguito si adotterà talvolta la notazione abbreviata  $\text{Lin}$  per  $L(V; V)$ ,  $\text{Sym}$  per  $\text{Sym}(V; V)$  etc. Si denoterà poi con  $\text{Sym}$  ( $\text{Emi}$ ,  $\text{Pos}$ ,  $\text{Psym}$ ) anche lo spazio dei campi di tensori simmetrici (etc.) continui nel dominio di definizione.

## 1. NOZIONI PRELIMINARI

Un insieme  $\Omega$  di punti dello spazio euclideo  $\mathbb{S}$  è *connesso* se due qualsiasi punti di  $\Omega$  possono essere collegati da una curva giacente in  $\Omega$ .

L'insieme  $\Omega$  è *semplicemente connesso* se ogni curva chiusa in  $\Omega$  può essere trasformata con continuità in un punto senza uscire da  $\Omega$ .

Un insieme aperto e connesso è detto una *regione* di  $\mathbb{S}$ .

Una regione  $\Omega$  è *regolare* se la frontiera  $\partial\Omega$  di  $\Omega$  è generalmente regolare nel senso che è costituita da un numero finito di superfici orientabili, ovvero di superfici su cui è definita la normale uscente da  $\Omega$ .

La chiusura di  $\Omega$  è denotata da  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ .

Una superficie orientabile che delimita una regione regolare  $\Omega$  (toroidale) è mostrata in fig.1.1. Un classico esempio di superficie non orientabile, dovuto a F. KLEIN<sup>1</sup> è riportato in fig.1.2.

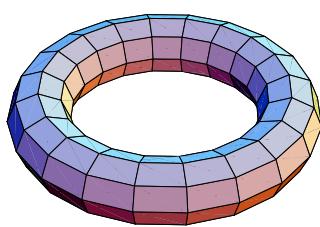


Fig. 1.1 Superficie orientabile

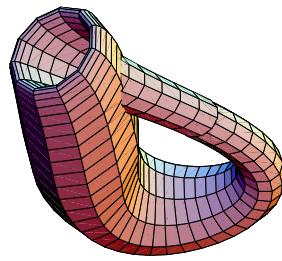


Fig. 1.2 La bottiglia di KLEIN

Nel seguito per *dominio* si intenderà una regione regolare e limitata.

### 1.1. Partizioni e suddivisioni

Una *partizione finita* di  $\Omega$  è una famiglia finita  $P(\Omega)$  di sottodomini

$$\mathcal{P}_\alpha \subseteq \Omega \quad \{\alpha = 1, \dots, n\},$$

che gode delle seguenti proprietà

- $P(\Omega)$  realizza un ricoprimento di  $\Omega$  e cioè l'unione delle chiusure  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  dei domini  $\mathcal{P}_\alpha$  è pari alla chiusura  $\overline{\Omega}$  di  $\Omega$

$$\bigcup_{\alpha=1}^n \overline{\mathcal{P}}_\alpha = \overline{\Omega}.$$

---

<sup>1</sup> FELIX CHRISTIAN KLEIN (1849-1925). Professore di geometria a Göttingen e poi dal 1872 ad Erlangen. Famoso è il programma di Erlangen redatto nel 1872 in cui egli espresse le sue idee sui fondamenti della geometria.

- Il ricoprimento avviene senza sovrapposizioni il che significa che l'intersezione di ogni coppia di sottodomini distinti è vuota

$$\mathcal{P}_\alpha \cap \mathcal{P}_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha \neq \beta.$$

La chiusura  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  di un sottodominio  $\mathcal{P}_\alpha \subseteq \Omega$  è detta un *elemento* ottenuto da  $\Omega$  per *sezionamento*.

Ad ogni partizione finita corrisponde una suddivisione di  $\Omega$ .

La *suddivisione*  $\mathcal{T}(\Omega)$  associata ad una partizione  $P(\Omega)$  di  $\Omega$  è la collezione degli elementi  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  di  $P(\Omega)$

$$\mathcal{T}(\Omega) := \prod_{\alpha=1}^n \overline{\mathcal{P}}_\alpha = \{\overline{\mathcal{P}}_1, \overline{\mathcal{P}}_2, \dots, \overline{\mathcal{P}}_n\},$$

in cui l'ordinamento della  $n$ -upla è inessenziale.

Si noti la diversa definizione di una partizione  $P(\Omega)$  e quella della corrispondente suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

- In  $P(\Omega)$  ogni elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  è riguardato come un sottoinsieme di  $\Omega$  e dunque la parte comune  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  dei contorni di due elementi adiacenti  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  e  $\overline{\mathcal{P}}_\beta$  definita da  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} := \partial\mathcal{P}_\alpha \cap \partial\mathcal{P}_\beta$ , è un unico sottoinsieme di  $\Omega$ .
- In  $\mathcal{T}(\Omega)$  ogni elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  è riguardato invece come un dominio a se stante e pertanto i contorni di due elementi adiacenti  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  e  $\overline{\mathcal{P}}_\beta$  vanno considerati come insiemi distinti.

L'unione disgiunta dei contorni degli elementi di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  costituisce il *contorno*  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

L'insieme di tutte le possibili suddivisioni di  $\Omega$  è parzialmente ordinato dalla *relazione d'ordine* così definita

- Una suddivisione  $\mathcal{T}^*(\Omega)$  è più *fitta* di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  se è possibile ottenere gli elementi di  $\mathcal{T}^*(\Omega)$  effettuando una suddivisione degli elementi di  $\mathcal{T}(\Omega)$  e si scrive

$$\mathcal{T}^*(\Omega) \prec \mathcal{T}(\Omega) \quad \text{ovvero} \quad \mathcal{T}(\Omega) \succ \mathcal{T}^*(\Omega).$$

Si dice anche che la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  è più *rada* di  $\mathcal{T}^*(\Omega)$ .



La dipendenza di  $\mathcal{T}(\Omega)$  da  $\Omega$  verrà nel seguito talvolta omessa scrivendo solo  $\mathcal{T}$  per semplificare la notazione, quando ciò non ingenera confusione.

E' immediato verificare che sono soddisfatte le regole formali di *relazione d'ordine*

i)	$\mathcal{T} \prec \mathcal{T}$	riflessività,
ii)	$\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2, \quad \mathcal{T}_2 \prec \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$	antisimmetria,
iii)	$\mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_2, \quad \mathcal{T}_2 \prec \mathcal{T}_3 \Rightarrow \mathcal{T}_1 \prec \mathcal{T}_3$	transitività.

Si noti che la relazione d'ordine è *parziale* perché non ordina totalmente la famiglia delle suddivisioni di  $\Omega$ . Esistono cioè suddivisioni tra loro non confrontabili.

La relazione d'ordine è poi *non stretta* nel senso che, valendo la proprietà di riflessività, ogni suddivisione è sia più fitta che più rada di se stessa.

Date due suddivisioni  $\mathcal{T}_1$  and  $\mathcal{T}_2$  esiste una suddivisione più fine di entrambe, detta la *griglia* generata da  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ , e denotata con

$$\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2.$$

Gli elementi della griglia  $\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2$  sono le chiusure delle intersezioni non vuote dei sottodomini di  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$

$$\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \iff \mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \neq \emptyset, \quad \overline{\mathcal{P}}_1 \in \mathcal{T}_1; \quad \overline{\mathcal{P}}_2 \in \mathcal{T}_2.$$

Valgono le seguenti semplici proprietà

$$\mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \prec \mathcal{T}_1, \quad \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2 \prec \mathcal{T}_2, \quad (\mathcal{T} \prec \mathcal{T}_1 \text{ e } \mathcal{T} \prec \mathcal{T}_2) \Rightarrow \mathcal{T} \prec \mathcal{T}_1 \vee \mathcal{T}_2.$$

La griglia generata da due suddivisioni è quindi la più rada suddivisione che risulta più fine di entrambe.

La più rada suddivisione di  $\Omega$  in elementi è costituita dal singleton  $\{\overline{\Omega}\}$ .

- Un insieme finito di superfici regolari, orientabili e a due a due disgiunte

$$\{S_\alpha \subseteq \overline{\Omega}; \alpha = 1, \dots, n\}, \quad \text{con } S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset \quad \text{per } \alpha \neq \beta,$$

effettua un *taglio* di  $\Omega$  se esiste almeno una suddivisione  $\mathcal{T}_S(\Omega)$  tale che

$$\bigcup_{\alpha=1}^n S_\alpha \subseteq \partial \mathcal{T}_S(\Omega).$$

Ad un assegnato *taglio* di  $\Omega$  corrisponde un'unica suddivisione  $\mathcal{T}_S(\Omega)$  se e solo se l'inclusione è una egualanza ed in tal caso si dice che le superfici effettuano un *taglio completo*.

Se il taglio non è completo esistono infinite suddivisioni  $\mathcal{T}_S(\Omega)$  anche tra loro non confrontabili.

- Le *interfacce* tra gli elementi di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  sono le superfici su cui si appoggiano i contorni di due elementi adiacenti di  $\mathcal{T}(\Omega)$ .
- Le *interfacce di taglio* sono un insieme di superfici cui si appoggiano le coppie di superfici adiacenti di un taglio.

- L'insieme delle interfacce corrispondenti ad una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  è denotata con  $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(\Omega)$ .

Si indica inoltre con  $\mathcal{I}(\Omega)$  un generico insieme di interfacce in  $\Omega$  e con  $\mathcal{I}(\overline{\Omega})$  l'unione di  $\mathcal{I}(\Omega)$  e del contorno  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$ .

I contorni degli elementi adiacenti in corrispondenza di un'interfaccia sono detti *facce*.

- Si denoterà con  $C^m(\overline{\Omega})$  lo spazio dei campi (scalari, vettoriali o tensoriali) limitati e continui con le derivate fino all'ordine  $m$  sulla chiusura  $\overline{\Omega}$  di  $\Omega$  (campi di classe  $C^m$  in  $\overline{\Omega}$ ).
- Un campo (scalare, vettoriale o tensoriale) è di classe  $C^m$  a pezzi su  $\overline{\Omega}$  se esiste una suddivisione di  $\mathcal{T}(\Omega)$  sui cui elementi la restrizione del campo è di classe  $C^m$ .
- Si denoterà con  $C^m(\mathcal{T}(\Omega))$  lo spazio dei campi (scalari, vettoriali o tensoriali) limitati e continui con le derivate fino all'ordine  $m$  in ogni elemento  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$ .

## 1.2. Localizzazione

Quando una condizione di tipo integrale viene trasformata in una puntuale si dice che si effettua una *localizzazione*.

Lo strumento classico che consente di effettuare una localizzazione è noto come *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

Il lemma fondamentale, si applica a campi continui a pezzi nel dominio di definizione e consente di dedurre l'annullarsi di un campo dalla condizione variazionale che esprime l'annullarsi dell'integrale del prodotto del campo per ogni funzione di prova variabile in un opportuno spazio.

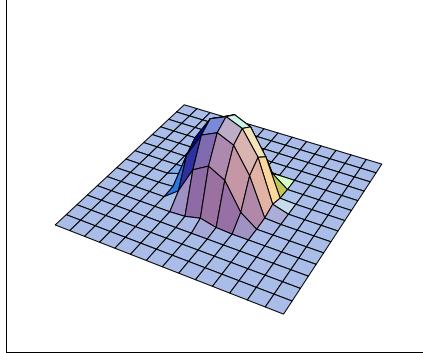
Se il campo è vettoriale anche le funzioni di prova sono vettoriali ed il prodotto va inteso come prodotto interno tra i valori locali.

Per precisare quale sia lo spazio delle funzioni di prova si considerino le seguenti definizioni.

- Il *supporto* di un campo  $\mathbf{v} : \overline{\Omega} \mapsto V$  continuo a pezzi in  $\overline{\Omega} \subset \mathbb{S}$  è per definizione la chiusura del sottoinsieme di  $\overline{\Omega}$  su cui il campo è diverso da zero.
- Lo spazio  $C_o^\infty(\Omega)$  è costituito dai campi vettoriali indefinitamente derivabili aventi *supporto compatto* contenuto nell'aperto  $\Omega$ .

Dunque i campi di  $C_o^\infty(\Omega)$  si annullano in uno strato compreso tra la frontiera  $\partial\Omega$  di  $\overline{\Omega}$  e la frontiera del supporto del campo.

L'insieme dei campi di  $C_o^\infty(\Omega)$  non è vuoto.



Un campo vettoriale  $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$  con valori locali in  $V$  può ottersi ponendo  $\varphi(\xi) = m_x(\xi) \mathbf{v}$  con  $\mathbf{v} \in V$  e  $m_x : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  funzione scalare definita da

$$m_x(\xi) = \begin{cases} \exp\left[\frac{1}{\|\xi - x\|^2 - a^2}\right], & \xi \in \mathcal{P}_x \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui  $a$  è il raggio dell'intorno sferico  $\mathcal{P}_x$  di  $x \in \Omega$ .

Infatti la funzione esponenziale

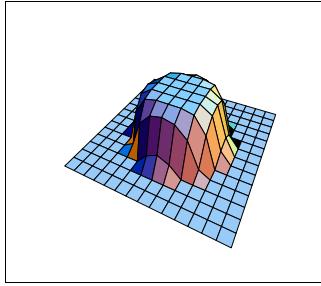
$$m_x(\xi) := \exp\left[\frac{1}{\|\xi - x\|^2 - a^2}\right]$$

gode delle seguenti proprietà

- è indefinitamente derivabile,  $m_x \in C_o^\infty(\Omega)$ ,
- è positiva all'interno dell'intorno sferico con centro in  $x$  e raggio  $a$ ,
- è nulla con tutte le sue derivate di qualsiasi ordine sulla sfera con centro in  $x$  e raggio  $a$  che costituisce la frontiera del supporto compatto.

Un altro utile esempio di funzione di  $C_o^\infty(\Omega)$  è fornito da

$$\bar{m}_x(\xi) = \begin{cases} \exp\left[\frac{1}{(\|\xi - x\|^2 - a)^2 - (b - a)^2}\right] \exp\left[\frac{1}{(b - a)^2}\right], & a < \|\xi - x\|^2 < b \\ 1, & \|\xi - x\|^2 \leq a \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$



La funzione  $\bar{m}_x(\xi) \in C_o^\infty(\Omega)$

- vale 1 nell'intorno sferico  $\mathcal{P}_a(x)$  di raggio  $a$  di  $x$ ,
- è positiva nell'intorno sferico con centro in  $x$  e raggio  $b$ ,
- è nulla con tutte le sue derivate sul contorno dell'intorno sferico  $\mathcal{P}_b(x)$  di raggio  $b$  di  $x$  ed all'esterno di esso.

Una funzione  $m_x(\xi) \in C_o^\infty(\Omega)$  è detta un *mollificatore* se ha valore unitario l'integrale esteso al supporto di  $m_x$  e cioè all'intorno sferico  $\mathcal{P}_x$  di raggio  $a$ .

**Proposizione 1.1. Lemma fondamentale del calcolo delle variazioni.** *Sia  $c$  un campo vettoriale con valori in  $V$  e continuo a pezzi nel dominio  $\Omega$ . Allora*

$$\int_{\Omega} c \cdot \varphi \, dv = 0, \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega) \Rightarrow c(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$$

**Dim.** Si ragiona per *absurdum*. Si supponga che esiste un punto  $x \in \Omega$  di continuità del campo  $c$  e tale che  $c(x) \neq \mathbf{o}$ . Esistono allora un vettore  $d \neq \mathbf{o}$  ed un intorno  $\mathcal{P}_x \subset \Omega$  di  $x$  in cui vale la diseguaglianza

$$c(\xi) \cdot d > 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{P}_x.$$

Si scelga quindi come campo di prova il campo vettoriale parallelo a  $d$

$$v_x(\xi) = \varphi_x(\xi)d,$$

dove  $\varphi_x(\xi) \in C_o^\infty(\overline{\Omega})$  è un mollificatore positivo in  $\mathcal{P}_x$  ed identicamente nullo al di fuori di  $\mathcal{P}_x$ . Il teorema della permanenza del segno delle funzioni continue impone che

$$\int_{\mathcal{P}_x} c \cdot v_x \, dv > 0, \quad v_x \in C_o^\infty(\Omega).$$

Ciò è contro l'ipotesi. Ne consegue che deve risultare  $c(x) = \mathbf{o}$  in ogni punto di continuità e quindi, in virtù della continuità a pezzi di  $c$ , in ogni punto di  $\Omega$ .  $\square$

Dimostrazioni analoghe conducono ai risultati seguenti.

**Proposizione 1.2. Corollario.** *Sia  $c$  un campo continuo a pezzi sul contorno  $\partial T(\Omega)$  di una suddivisione del dominio  $\Omega$ . Allora vale l'equivalenza*

$$\int_{\partial T(\Omega)} c \cdot \Gamma \varphi \, da = 0 \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega) \iff c(x) = \mathbf{o} \quad \forall x \in \partial T(\Omega),$$

tra condizioni variazionali e puntuali.  $\square$



Si noti che il carattere locale del risultato enunciato nella proposizione 1.2 consente di sostituire al contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  una qualsiasi sua parte regolare.

**Proposizione 1.3. Corollario.** *Siano  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{v}$  campi vettoriale continui a pezzi in  $\overline{\Omega}$ . Allora la condizione variazionale*

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \varphi \, dv = 0 \quad \forall \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega), \quad \varphi(\mathbf{x}) \text{ parallelo a } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

equivale alla condizione puntuale  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

**Dim.** La dimostrazione è analoga a quella della proposizione 1.1. Se infatti fosse  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) > 0$  in un punto di continuità, ponendo  $\varphi(\xi) = m_{\mathbf{x}}(\xi) \mathbf{v}(\xi)$  con  $\mathbf{c}(\xi) \cdot \mathbf{v}(\xi) > 0$  nel supporto di  $v_x$ , risulterebbe

$$\int_{\Omega} \mathbf{c} \cdot \varphi \, dv = \int_{\Omega} m_{\mathbf{x}}(\xi) \mathbf{c}(\xi) \cdot \mathbf{v}(\xi) \, dv > 0,$$

contro l'ipotesi.  $\square$

**Proposizione 1.4. Corollario.** *Siano  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{v}$  campi vettoriale continui a pezzi sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di una suddivisione del dominio  $\Omega$ . Allora la condizione variazionale*

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{c} \cdot \Gamma \varphi \, da = 0 \quad \forall \varphi \in C_o^{\infty}(\Omega), \quad \varphi(\mathbf{x}) \text{ parallelo a } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{T}(\Omega)$$

equivale alla condizione puntuale  $\mathbf{c}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{T}(\Omega)$ .  $\square$

Altri utili risultati di localizzazione sono i seguenti.

**Proposizione 1.5. Lemma del valor medio.** *Sia  $\mathbf{c}$  un campo continuo a pezzi in  $\overline{\Omega}$ . Se  $\xi \in \Omega$  è un punto di continuità e  $\mathcal{P}(\rho)$  è la palla chiusa di raggio  $\rho$  e centro in  $\xi$ , risulta*

$$\mathbf{c}(\xi) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol } \mathcal{P}(\rho)} \int_{\mathcal{P}(\rho)} \mathbf{c} \, dv,$$

Ne segue che

$$\int_{\mathcal{P}(\rho)} \mathbf{c} \, dv = \mathbf{o} \quad \forall \mathcal{P}(\rho) \subset \Omega \Rightarrow \mathbf{c}(\xi) = \mathbf{o}.$$

Se la condizione integrale vale per ogni intorno sferico dei punti  $\xi \in \Omega$  in cui il campo  $\mathbf{c}$  è continuo, la continuità a pezzi di  $\mathbf{c}$  implica che sia  $\mathbf{c} = \mathbf{o}$  in  $\Omega$ .

**Dim.** Basta osservare che

$$\left| \mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) - \frac{1}{\text{vol } \mathcal{P}(\rho)} \int_{\mathcal{P}(\rho)} \mathbf{c} \, dv \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\rho)} |\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{c}(\mathbf{x})|$$

e che il sup tende a zero quando  $\rho \rightarrow 0$  poiché  $\mathbf{c}$  è continuo in  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ .  $\square$

In modo analogo si dimostra il prossimo risultato.

**Proposizione 1.6. Valor medio sul contorno.** *Se  $\mathbf{c}$  un campo continuo a pezzi sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di una suddivisione del dominio  $\Omega$ , vale l'equivalenza*

$$\int_{\partial\mathcal{P}_{\mathbf{x}} \cap \partial\mathcal{T}(\Omega)} \Gamma \mathbf{c} \, da = 0 \quad \forall \mathcal{P}_{\mathbf{x}} \subset \Omega \iff \Gamma \mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{T}(\Omega).$$

con  $\mathcal{P}_{\mathbf{x}}$  intorno sferico di  $\mathbf{x}$  contenuto in  $\Omega$ .  $\square$

### 1.3. Formula di Green

Una formula di trasformazione integrale dovuta a GEORGE GREEN<sup>2</sup> svolge un ruolo fondamentale nello sviluppo della teoria che sarà illustrata.

La *formula di GREEN* relativa all'operatore gradiente su di un dominio  $\Omega$ , è una identità integrale espressa in termini di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  e di un campo tensoriale  $\mathbf{T}$  entrambi di classe  $C^1(\overline{\Omega})$ .

<sup>2</sup> GEORGE GREEN (1793-1841). Nato a Nottingham figlio di un fornaio anch'esso di nome GEORGE GREEN. Dopo un solo anno di scuola a Nottingham andò a lavorare col padre che nel 1807 comprò un terreno sul quale costruì un mulino a vento di 16 metri d'altezza e poi una casa. GEORGE GREEN junior ebbe sette figli da JANE SMITH, figlia del conduttore del mulino WILLIAM SMITH, ma non si sposò mai. Tramite la *Nottingham Subscription Library* ebbe accesso ai *Transactions of the Royal Society of London*. Studiò matematica da autodidatta e si interessò alla teoria dell'elettricità leggendo la memoria del 1771 di HENRY CAVENDISH (1731-1810), due memorie di POISSON di 1812 sull'elettricità di superficie e tre sul magnetismo (1821-1823) e lavori di ARAGO, LAPLACE, FOURIER, CAUCHY e T. YOUNG. Nel 1828 pubblicò la sua opera fondamentale dal titolo *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the theories of Electricity and Magnetism* dedicata a Sua Grazia il DUKE OF NEWCASTLE. In esso GREEN sviluppò la teoria matematica del potenziale. SIR EDWARD BROMHEAD si accorse del talento matematico di GREEN e si offrì di inviare i suoi lavori alla Royal Society of London, alla Royal Society of Edinburgh e alla Cambridge Philosophical Society. Nei seguenti tre anni GREEN scrisse due lavori sull'elettricità pubblicati nel 1833 e 1834 dalla Cambridge Philosophical Society ed un lavoro sull'idrodinamica pubblicato dalla Royal Society of Edinburgh. Su consiglio di BROMHEAD GREEN divenne studente a Cambridge nell'ottobre del 1833 all'età di 40 anni e si laureò nel 1837, insieme a JAMES JOSEPH SYLVESTER (1814-1897) ed a DUNCAN FARQUHARSON GREGORY (1813-1844). Negli anni 1838 and 1839 rimase Cambridge e si dedicò alla ricerca. In quel periodo scrisse due lavori sull'idrodinamica, due sulla riflessione e rifrazione della luce e due sulla rifrazione del suono, che furono pubblicati dalla Cambridge Philosophical Society. GREEN si ammalò nel 1840 e morì nel 1841 a Nottingham nella casa di JANE SMITH con i sette figli, l'ultimo nato nel 1840. I contemporanei di GREEN non capirono l'importanza delle sue idee ed egli stesso non ne fu

La formula di GREEN costituisce l'estensione della formula di integrazione per parti al caso di un dominio  $\Omega$  appartenente ad uno spazio di dimensione maggiore dell'unità. L'estensione della formula di GREEN al caso di campi discontinui sarà effettuata nella sezione II.2.6 (p. 185).

**Proposizione 1.7. Formula di Green.** *Se un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  ed un campo tensoriale  $\mathbf{T}$  sono di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  sussiste l'identità integrale*

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{v}) \, da = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{T} : (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv, \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})^3, \\ \forall \mathbf{T} \in C^1(\overline{\Omega})^6. \end{array}$$

L'operatore lineare  $\mathbf{\Gamma}$  è l'operatore dei valori al contorno che associa al campo vettoriale  $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})^3$  la sua restrizione  $\mathbf{\Gamma}\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega}$  al contorno  $\partial\Omega$ .

L'operatore lineare  $\mathbf{N}$  è l'operatore del flusso al contorno che associa al campo tensoriale  $\mathbf{T} \in C^1(\overline{\Omega})^6$  il valore del corrispondente flusso uscente  $\mathbf{NT} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  dal contorno  $\partial\Omega$ , con  $\mathbf{n}$  versore della normale uscente da  $\Omega$ .

**Dim.** Si fa ricorso al teorema del gradiente di GAUSS che costituisce l'estensione del teorema fondamentale del calcolo al caso di domini appartenenti a spazi vettoriali di dimensione maggiore di uno.

Il teorema del gradiente assicura che per ogni campo scalare  $\varphi$  di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  vale la formula

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \mathbf{n} \, dv = \int_{\Omega} \operatorname{grad} \varphi \, da \iff \int_{\partial\Omega} \varphi n_i \, da = \int_{\Omega} \varphi_{/i} \, dv, \quad i = 1, 2, 3,$$

dove gli indici dopo il pedice  $/$  indicano le corrispondenti derivate parziali.

Risulta allora

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ij} n_j) v_i \, da &= \int_{\partial\Omega} (\sigma_{ij} v_i) n_j \, da = \int_{\Omega} (\sigma_{ij} v_i)_{/j} \, dv = \\ &= \int_{\Omega} (\sigma_{ij/j} v_i) \, dv + \int_{\Omega} (\sigma_{ij} v_{i/j}) \, dv, \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})^3, \\ \forall \mathbf{T} \in C^1(\overline{\Omega})^6. \end{array} \end{aligned}$$

che è l'espressione della formula di GREEN in termini di componenti.  $\square$

---

pienamente consapevole. Nel gennaio del 1845 (WILLIAM THOMSON, (LORD KELVIN) (1824-1907) si laureò a Cambridge ed il suo tutore WILLIAM HOPKINS gli diede tre copie dell'*Essay* di GREEN. Sessanta anni dopo THOMSON ricordava ancora il suo entusiasmo e quello di JOSEPH LIOUVILLE (1809-1882) e di JACQUES CHARLES FRANÇOIS STURM (1803-1855), ai quali egli aveva mostrato il lavoro a Parigi nell'estate del 1845. L'opera di GREEN fu pubblicata postuma nel 1850 a Cambridge a cura di THOMSON.

L'operatore divergenza è detto l'*aggiunto formale* dell'operatore gradiente in quanto soddisfa l'identità

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{T} : (\operatorname{grad} \boldsymbol{\varphi}) \, dv, \quad \begin{array}{l} \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}_o^{\infty}(\Omega)^3, \\ \forall \mathbf{T} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})^6. \end{array}$$

Nel caso generale in cui l'operatore cinematico è un operatore differenziale di ordine  $m \geq 1$  i valori al contorno dei cinematicismi sono costituiti sia dai valori che i cinematicismi assumono sul contorno sia dai valori delle loro derivate in direzione normale al contorno fino all'ordine  $m-1$ .

Decomponendo il gradiente del cinematicismo che compare nella formula di GREEN come somma delle parti simmetrica ed emisimmetrica, in virtù della relazione di ortogonalità tra tensori simmetrici ed emisimmetrici

$$\mathbf{S} \in \operatorname{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}), \mathbf{A} \in \operatorname{Emi}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \Rightarrow \mathbf{S} : \mathbf{A} = \operatorname{tr}(\mathbf{S} \mathbf{A}) = 0,$$

si ha che

$$\mathbf{T} : \operatorname{grad} \mathbf{v} = \operatorname{emi} \mathbf{T} : \operatorname{emi} \operatorname{grad} \mathbf{v} + \operatorname{sym} \mathbf{T} : \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}.$$

Per ogni campo tensoriale  $\mathbf{T} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})^6 \cap \operatorname{Sym}$  e per ogni  $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})^3$  si ottiene quindi l'identità

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{\Gamma}\mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{T} : (\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv,$$

che è la *formula di GREEN* per l'operatore differenziale  $\operatorname{sym} \operatorname{grad}$ .

Se i campi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{T}$  sono di classe  $C^1$  a pezzi su  $\overline{\Omega}$ , sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione tale che  $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))^3$  e  $\mathbf{T} \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))^9$ .

Applicando allora la formula di GREEN a ciascun elemento di  $\mathcal{T}(\Omega)$  si perviene alla formula

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot \mathbf{\Gamma}\mathbf{v} \, da = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : (\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv,$$

## 2. CINEMATICA DEI CORPI CONTINUI

Il *continuo di CAUCHY* è un modello strutturale che descrive la cinematica di un corpo tridimensionale costituito da particelle e fibre materiali.

In un processo evolutivo le particelle del corpo occupano, al variare del parametro scalare che descrive l’evoluzione, regioni diverse dello spazio euclideo ambiente  $\mathbb{S} = \mathcal{E}^3$ . Fissata un’origine, ogni punto dello spazio viene individuato da un vettore posizione  $\mathbf{x} \in V$  nello spazio vettoriale tridimensionale delle traslazioni  $V$  associato ad  $\mathcal{E}^3$ .

Per fornire una descrizione geometrica delle trasformazioni subite dal corpo in un processo evolutivo, le particelle materiali vengono identificate con i punti di una *regione* (un aperto connesso) dello spazio euclideo ambiente  $\mathbb{S} = \mathcal{E}^3$  che è la *configurazione materiale*  $\mathcal{B}$  del corpo.

La configurazione materiale  $\mathcal{B}$  è quindi un simulacro che permette di dotare l’insieme delle particelle di una struttura geometrica. Essa può non essere mai occupata dal corpo nel corso del processo evolutivo.

Nel seguito si identificheranno le particelle del corpo con le loro posizioni  $\mathbf{p}$  nella configurazione materiale  $\mathcal{B}$ . Una descrizione delle trasformazioni del corpo in termini delle sue particelle  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  è detta *descrizione materiale*.

Il modello di continuo di CAUCHY considera inoltre il corpo dotato di una struttura geometrica locale costituita da un insieme di fibre lineari in corrispondenza di ogni particella  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ .

L’idea intuitiva di *fibra lineare* in corrispondenza di una particella del corpo  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  è quella di un insieme orientato di particelle materiali disposte lungo un segmento rettilineo con estremo iniziale in  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  e contenuto in un intorno di  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ .

Una fibra lineare può essere rappresentata da una coppia  $\{\mathbf{p}, \text{Gen}(\mathbf{h})\}$  costituita da una particella che ne definisce il punto di applicazione (o punto base) e dalla retta generata dal vettore  $\mathbf{h}$  che ne definisce la direzione.

E’ però più conveniente rappresentare le fibre lineari mediante coppie  $\{\mathbf{p}, \mathbf{h}\}$  costituite da una particella e da un vettore diretto.

Si attribuisce così alle fibre lineari una lunghezza ed un verso, richiedendo però che le proprietà che descrivono modifiche della geometria delle fibre lineari prescindano dalla lunghezza e dal verso del vettore rappresentativo.

In corrispondenza di ogni particella  $\mathbf{p}$  interna a  $\mathcal{B}$  l’insieme delle fibre lineari orientate passanti per  $\mathbf{p}$  costituisce uno spazio vettoriale tridimensionale denotato con  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$  e detto *spazio tangente a  $\mathcal{B}$  in  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$* , ovvero, con terminologia della geometria differenziale, *fibra tangente in  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$* .

L’unione disgiunta delle coppie  $\{\mathbf{p}, \mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})\}$  al variare di  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  costituisce il *fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$* .

Nel seguito per *corpo* si intenderà il fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ .

La generica fibra lineare di uno spazio tangente  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$  viene indicata con i simboli  $\{\mathbf{p}, \mathbf{h}\}$  ovvero  $\mathbf{h}_{\mathbf{p}}$ . Il punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  ed il vettore  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$  sono detti rispettivamente *base* e *direttore* della fibra lineare orientata.

Quando dal contesto è chiaro a quale particella ci si riferisca, o quando ciò è inessenziale, le fibre lineari saranno denotate dal simbolo  $\mathbf{h}$ .

**Osservazione 2.1.** In generale sia la configurazione materiale  $\mathcal{B}$  di una struttura che lo spazio ambiente  $\mathbb{S}$  in cui si evolve il processo possono essere *varietà differenziabili* modellate su uno spazio vettoriale di dimensione finita  $V$ . Si richiama qui la definizione di varietà differenziabile modellata su  $V$ . Una trattazione più completa può essere trovata in [61].

Un insieme  $M$  è una *varietà differenziabile* di classe  $C^k$  modellata su  $V \equiv \mathbb{R}^n$  se

- su  $M$  è assegnato un *atlante* e cioè una famiglia di *carte locali* o *sistemi di coordinate*  $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V, \alpha \in \mathcal{A}$  tali che
  - $\text{dom } \varphi_\alpha = U_\alpha$ , l'immagine  $\varphi_\alpha(U_\alpha)$  è un aperto in  $V$  e la corrispondenza tra  $U_\alpha \subset S$  e  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset V$  è biunivoca.
  - La famiglia  $\{\mathcal{U}_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$  effettua un ricoprimento di  $M$  e cioè  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = M$ .
  - Per ogni coppia di carte locali  $\varphi_\alpha$  e  $\varphi_\beta$  con  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  si richiede che la mappa di sovrapposizione

$$\varphi_{\beta\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \mapsto \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

sia un *diffeomorfismo* di classe  $C^k$  e cioè una mappa invertibile e continua con le derivate sino all'ordine  $k$  insieme all'inversa.

La mappa inversa  $\varphi_\alpha^{-1} : V \mapsto U_\alpha$  è una *parametrizzazione* locale della varietà  $M$ .

I vettori tangentini in un punto  $p \in M$  alla varietà  $M$  possono essere definiti in due modi alternativi.

- Il primo approccio considera i vettori tangentini come vettori velocità lungo una curva in  $M$  passante per  $p \in M$ .

Sia  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo reale aperto con  $0 \in I$ . Una curva regolare passante per  $p \in M$  è una mappa  $c : I \mapsto U_\alpha$  tale che  $c(0) = p$ .

Siano quindi  $\varphi_\alpha : U_\alpha \mapsto V$  e  $\varphi_\beta : U_\beta \mapsto V$  sistemi di coordinate definiti in un intorno di  $p$  con  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ . Siano quindi

$$\varphi_\alpha \circ c : I \mapsto V, \quad \varphi_\beta \circ c : I \mapsto V,$$

le corrispondenti curve coordinate in  $V$ . La richiesta che la mappa di sovrapposizione sia un diffeomorfismo, derivando la legge di composizione

$$\varphi_\beta = \varphi_{\beta\alpha} \circ \varphi_\alpha,$$

consente di instaurare tra i vettori tangentini  $d(\varphi_\alpha \circ c)(0)$  e  $d(\varphi_\beta \circ c)(0)$  la relazione di equivalenza

$$d(\varphi_\beta \circ c)(0) = d\varphi_{\beta\alpha}[d(\varphi_\alpha \circ c)(0)].$$

Un vettore tangente in  $p \in M$  alla curva  $c : I \mapsto U_\alpha$  è allora definito come classe di equivalenza di vettori tangentini in  $0 \in I$  alle corrispondenti curve coordinate ed è denotato con  $d\mathbf{c}(0) \in T_M(p)$ .



Il vettore tangente ad una curva in un punto è definito a meno di un fattore scalare positivo arbitrario. Infatti una diversa rappresentazione parametrica  $(\mathbf{c} \circ \hat{\lambda})(v)$  della curva orientata, ottenuta tramite una funzione monotona crescente  $\lambda = \hat{\lambda}(v)$ , fornisce il vettore tangente

$$d(\mathbf{c} \circ \hat{\lambda})(v) = d\mathbf{c}(\lambda) \circ d\hat{\lambda}(v).$$

con  $d\hat{\lambda}(v)$  positiva, in virtù della stretta monotonia della funzione  $\hat{\lambda}$ .

L'insieme delle classi di equivalenza delle curve orientate passanti per  $\mathbf{p} \in M$  costituisce uno spazio vettoriale, lo *spazio tangente* a  $M$  in  $\mathbf{p} \in M$ .

- Il secondo approccio consiste nell'identificare un vettore tangente  $\mathbf{v} \in T_M(\mathbf{p})$  con l'operatore lineare che ad ogni campo scalare  $f \in C^1(M, \mathbf{p})$  associa la corrispondente derivata direzionale  $\mathbf{v}(f)$ . Lo spazio  $C^1(M, \mathbf{p})$  è costituito dalle funzioni reali che sono derivabili con continuità in un intorno di  $\mathbf{p} \in M$ . La proprietà caratteristica dell'operatore di derivazione è costituita dalla regola di LEIBNIZ

$$\mathbf{v}(fg)(\mathbf{p}) = \mathbf{v}(f)g(\mathbf{p}) + f(\mathbf{p})\mathbf{v}(g).$$

Si dimostra che le derivazioni in  $\mathbf{p} \in M$  costituiscono uno spazio lineare di dimensione  $n$  che è identificato con lo *spazio tangente* a  $M$  in  $\mathbf{p} \in M$  (vedi [50], [53], [55], [61]).

Nel continuo tridimensionale di CAUCHY la configurazione materiale è una regione (un aperto connesso)  $B$  dello spazio euclideo ambiente  $S = E^3$  e pertanto le fibre  $T_B(\mathbf{p})$  tangenti in corrispondenza di particelle  $\mathbf{p}$  interne a  $B$  sono costituite da copie dello spazio vettoriale  $V$ . Questa peculiarità del modello del continuo tridimensionale di CAUCHY porta spesso a confondere lo spazio tangente locale con lo spazio delle traslazioni dello spazio euclideo ambiente. È però evidente l'opportunità di distinguere anche in questo caso le due nozioni in quanto esse giocano ruoli del tutto diversi nella formulazione della teoria. ■

Nelle sezioni IV.2 (p. 379) e IV.13 (p. 477) sarà svolta una trattazione della cinematica relativa nel caso in cui sia la configurazione materiale  $B$  della struttura che lo spazio ambiente  $S$  siano *varietà differenziabili* o sezioni di *varietà differenziabili*. Nel capitolo IV sarà mostrato inoltre come la descrizione della cinematica dei modelli della trave di TIMOSHENKO, della piastra di REISSNER-MINDLIN e del continuo polare dei fratelli E. e F. COSSERAT richieda di porsi in tale contesto geometrico più generale.

## 2.1. Configurazioni

Le osservazioni sperimentali sul corpo  $T_B$  sono condotte descrivendo i fenomeni che si verificano in un processo evolutivo durante il quale il corpo assume posizioni diverse nello spazio fisico ambiente  $S$  che è assunto euclideo.

- Una *configurazione spaziale* del corpo  $T_B$  è un'applicazione  $\chi : B \mapsto S$  che associa ad ogni particella  $\mathbf{p} \in B$  della *configurazione materiale*  $B$  la posizione spaziale  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{p})$  che essa occupa nello spazio ambiente  $S$ .

L'immagine  $\Omega = \chi(\mathcal{B})$  della mappa  $\chi : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  è detta una *posizione spaziale* o un *posizionamento nello spazio* del corpo. Pertanto l'applicazione  $\chi : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  è anche detta *mappa di posizionamento*. Si assume che le posizioni  $\Omega = \chi(\mathcal{B})$  siano regioni, non necessariamente limitate, dello spazio ambiente euclideo  $\mathbb{S}$ . Si denoterà con  $\partial\Omega$  la frontiera di  $\Omega$  e con  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  la sua chiusura.

- Un *processo evolutivo*  $\chi : \mathcal{B} \times I \mapsto \mathbb{S}$  del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  è una famiglia ad un parametro reale  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$  di configurazioni  $\chi_t : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  che mappano il corpo nello spazio ambiente.

Il parametro di evoluzione  $t \in I$  è uno *pseudo tempo*, nel senso che esso svolge il ruolo di ordinare totalmente l'insieme delle configurazioni del processo, ma non è necessariamente il tempo dinamico. Nel seguito si dirà comunque spesso per brevità che  $t \in I$  è il tempo. Una chiara distinzione tra tempo dinamico e parametro evolutivo è invece indispensabile nella trattazione delle equazioni fondamentali della dinamica (vedi sezione II.11 (p. 258)). Il parametro reale tempo varia in un *intervallo di osservazione*  $I = [t_{in}, t_{fin}] \subseteq \mathbb{R}$  da un istante iniziale  $t_{in}$  ad uno finale  $t_{fin}$ .

All'istante  $t \in I$  del periodo di osservazione, la posizione spaziale  $\Omega(t)$  assunta dal corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  è l'immagine della *configurazione*

$$\boxed{\chi_t : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S},}$$

che ad ogni particella  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  associa la posizione  $\mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}, t)$  che essa occupa nello spazio ambiente  $\mathbb{S}$  al tempo  $t \in I$ .

- La *configurazione spaziale* assunta dal corpo al tempo  $t \in I$  è quindi definita da

$$\boxed{\Omega(t) = \chi_t(\mathcal{B}),}$$

- La *traiettoria* del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  nel moto  $\chi$  è l'insieme di coppie di punti dello spazio  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$  e di istanti  $t \in I$  in cui le particelle del corpo occupano tali punti

$$\boxed{\mathcal{F}_{\chi}(\mathcal{B}) := \{\{\mathbf{x}, t\} \in \mathbb{S} \times I \mid \mathbf{x} \in \chi_t(\mathcal{B})\}.}$$

Affinché non si verifichino compenetrazioni delle particelle durante un processo evolutivo, si richiede che  $\forall t \in I$  l'applicazione  $\chi_t$  sia *invertibile* da  $\mathcal{B}$  su  $\chi_t(\mathcal{B})$ .

- l'applicazione inversa  $\mathbf{p}_t = \chi_t^{-1}$  è detta *mappa di riferimento*.

Definendo  $\mathbf{p} : \mathcal{F}_{\chi}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$  con  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}_t(\mathbf{x})$  si ha dunque che

$$\mathbf{p}(\chi(\mathbf{p}, t), t) = \mathbf{p}, \quad \chi(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}.$$

La mappa  $\mathbf{p} : \mathcal{F}_{\chi}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$  associa ad ogni elemento  $\{\mathbf{x}, t\} \in \mathcal{F}_{\chi}(\mathcal{B})$  della traiettoria la particella  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$  che all'istante  $t$  occupa la posizione spaziale  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$ .

Nel seguito si scriverà  $\chi(\mathbf{p})$  al posto di  $\chi_t(\mathbf{p})$  o  $\chi(\mathbf{p}, t)$  quando la dipendenza dal tempo non gioca un ruolo essenziale.

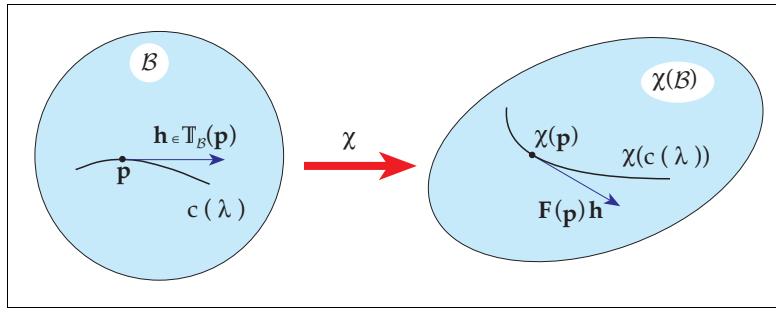
Si consideri una curva orientata  $\mathbf{c}(\lambda)$  nella configurazione materiale  $\mathcal{B}$ .

Ad essa corrisponderà una curva spaziale  $(\chi \circ \mathbf{c})(\lambda)$  nella posizione spaziale  $\chi(\mathcal{B})$ . Derivando rispetto al parametro  $\lambda$  si ottiene

$$\frac{d}{d\lambda}(\chi \circ \mathbf{c})(\lambda) = d\chi(\mathbf{c}(\lambda)) \frac{d\mathbf{c}(\lambda)}{d\lambda}.$$

Si ponga quindi

$$\mathbf{p} = \mathbf{c}(\lambda), \quad \mathbf{h} = \frac{d\mathbf{c}(\lambda)}{d\lambda}.$$



La fibra lineare  $\{\mathbf{p}, \mathbf{h}\}$  avente per base il punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  e per direttore il vettore  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$  è pertanto trasformata nella fibra lineare

$$\{\chi(\mathbf{p}), d\chi(\mathbf{p}; \mathbf{h})\} \in \mathbb{T}_{\chi(\mathcal{B})},$$

e cioè nella fibra lineare avente per base il punto  $\chi(\mathbf{p}) \in \chi(\mathcal{B})$  e quale direttore il vettore  $d\chi(\mathbf{p}; \mathbf{h})$ , derivata direzionale di  $\chi$  nel punto  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  lungo  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$ , definito dal limite

$$d\chi(\mathbf{p}; \mathbf{h}) := \frac{d}{d\lambda} (\chi \circ \mathbf{c})(\lambda).$$

Sotto opportune ipotesi di continuità, la derivata direzionale dipende linearmente dal vettore  $\mathbf{h}$  e si può quindi definire la derivata  $d\chi(\mathbf{p}) \in L(V; V)$  come la mappa lineare che soddisfa l'identità

$$d\chi(\mathbf{p})[\mathbf{h}] := d\chi(\mathbf{p}; \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in V.$$

■ La *trasformazione tangente*  $T\chi : \mathbb{T}_{\mathcal{B}} \mapsto \mathbb{T}_{\chi(\mathcal{B})}$  è la mappa lineare definita da

$$(T\chi)(\{\mathbf{p}, \mathbf{h}\}) = \{\chi(\mathbf{p}), d\chi(\mathbf{p})[\mathbf{h}]\} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}),$$

Nella meccanica dei continui si pone

$$\mathbf{F}_\chi(\mathbf{p}) := T\chi(\mathbf{p}).$$

In letteratura la trasformazione tangente  $\mathbf{F}_\chi(\mathbf{p}) \in L(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}(\mathbf{p}), \mathbb{T}\chi(\mathcal{B})(\chi(\mathbf{p})))$  è anche detta *gradiente della deformazione* in  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  associato alla mappa di configurazione  $\chi$ . In questo testo non si adotterà tale denominazione ritenendo che il termine gradiente vada riservato al vettore rappresentativo della derivata di un campo scalare.

**Osservazione 2.2.** Si assume che la configurazione  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}$  sia un'applicazione derivabile con continuità e che l'applicazione tangente  $T\chi : \mathbb{T}_{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  sia un isomorfismo (cioè una trasformazione lineare ed invertibile).

Il teorema della funzione inversa assicura allora che l'applicazione  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}$  è localmente invertibile, che la trasformazione inversa  $p(\mathbf{x})$  è anch'essa derivabile con continuità e che risulta  $dp(\mathbf{x}) = [d\chi(p(\mathbf{x}))]^{-1}$  in un intorno di  $\chi(\mathbf{p})$  (cfr. ad es. DIEUDONNÉ<sup>3</sup> [46] teorema 10.2.5.).

La cinematica dei continui è fondata sull'ipotesi più forte dell'invertibilità globale della mappa di posizionamento e sulla continuità con la derivata prima dell'applicazione  $\chi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}$  e della sua inversa. In altri termini si assume che la mappa di posizionamento sia un *diffeomorfismo* da  $\mathcal{B}$  su  $\chi(\mathcal{B})$ . ■

La trasformazione tangente descrive le modifiche che si producono nelle fibre tangentili quando la configurazione materiale del corpo  $\mathcal{B}$  è mappata nella posizione spaziale  $\chi(\mathcal{B})$ .

Poiché per ipotesi la funzione  $\chi$  è invertibile, il trasformazione tangente  $\mathbf{F}_\chi(\mathbf{p})$  è non singolare ed il determinante  $\det \mathbf{F}_\chi(\mathbf{p})$  è diverso da zero in ogni  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ .

## 2.2. Flusso

- Il *flusso* o *mappa di evoluzione*  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \times I \times I \mapsto \mathbb{S}$  individua la posizione spaziale  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t) \in \mathbb{S}$  al tempo  $t$  dalla particella  $\mathbf{p} = p(\mathbf{x}, s)$  che al tempo  $s$  occupa la posizione  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t) := \chi(p(\mathbf{x}, s), t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{S}, \quad s, t \in I,$$

con  $\{\mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t), t\} \in \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$ ,  $\{\mathbf{x}, s\} \in \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$ .

Adottando le notazioni  $\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t)$ , si può scrivere

$$\mathbf{k}_{t,s} = \chi_t \circ p_s.$$

---

<sup>3</sup> JEAN ALEXANDRE EUGÈNE DIEUDONNÉ (1906-1992). È stato, insieme a HENRI PAUL CARTAN (1904-) il maggiore contributore alla serie dei testi di BOURBAKI. Professore di matematica alla University of Michigan ed alla Northwestern University e quindi dal 1964 all'Università di Nizza.

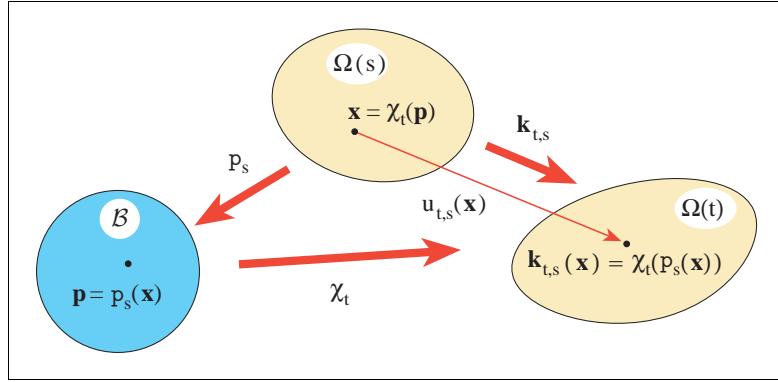


Fig. 2.1

■ Vale la *legge di determinismo* o legge di CHAPMAN<sup>4</sup>-KOLMOGOROV<sup>5</sup>

$$\mathbf{k}_{\tau,t} = \mathbf{k}_{\tau,t} \circ \mathbf{k}_{t,s}, \quad \mathbf{k}_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

Infatti si ha che

$$\mathbf{k}_{\tau,t} \circ \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{k}_{\tau,t} \circ \chi_t \circ p_s = \chi_\tau \circ p_t \circ \chi_t \circ p_s = \chi_\tau \circ p_s = \mathbf{k}_{\tau,s}.$$

■ La *trasformazione tangente* alla mappa di evoluzione è per definizione

$$\mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) = T\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}).$$

Se lo spazio ambiente  $\mathbb{S}$  è euclideo, e quindi ha senso effettuare la differenza tra due posizioni nello spazio. Si può pertanto porre la seguente definizione.

- Lo *spostamento* della particella  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  nell'evoluzione  $\mathbf{k}_{t,s}$  dal tempo  $s \in I$  al tempo  $t \in I$  è il vettore

$$\mathbf{u}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) - \mathbf{x},$$

dove  $\mathbf{x} = \chi_s(\mathbf{p}) \in \mathbb{S}$ .

---

<sup>4</sup> SYDNEY CHAPMAN (1888-1970). Matematico inglese cui si devono importanti contributi alla teoria della diffusione termica ed ai fondamenti della gasdinamica. Nel 1919 fu eletto alla Royal Society per importanti studi sul magnetismo terrestre. Professore di matematica all'Imperial College di Londra dal 1924 succedendo a WHITEHEAD e poi professore di Natural Philosophy a Oxford dal 1946. Nel 1953 si ritirò dedicandosi a ricerche su fenomeni magnetici, avendo quali basi il Geophysical Institute in Alaska e l'High Altitude Observatory in Boulder, Colorado.

<sup>5</sup> ANDREY NIKOLAEVICH KOLMOGOROV (1903-1987). Illustrate matematico russo cui si devono contributi fondativi della moderna teoria della probabilità ed importanti risultati ed applicazioni in topologia, geometria differenziale teoria dei flussi turbolenti, analisi funzionale e la storia e lo sviluppo della matematica. Con il grande topologo PAVEL SERGEEVICH ALEKSANDROV (1896-1982) comprò una casa a Komarovka, piccolo villaggio fuori Mosca, dove furono ospiti molti illustri matematici tra cui HADAMARD, FRÉCHET, BANACH, HOPF, KURATOWSKI, GNEDENKO

Dunque  $\mathbf{u}_{t,s}(\mathbf{x}) \in V$ . Derivando rispetto ad  $\mathbf{x}$  si ottiene la relazione

$$d\mathbf{u}_{t,s}(\mathbf{x}) = d\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) - \mathbf{I},$$

dove  $\mathbf{I}$  è la mappa identica su  $V$ .

**Osservazione 2.3.** Si noti che il campo di spostamento è definito solo se lo spazio delle configurazioni è uno spazio affine. Più in generale lo spazio delle configurazioni può essere una varietà differenziabile che non è uno spazio affine. Tale è lo spazio delle configurazioni per il modello di trave di TIMOSHENKO, per il modello di piastra di REISSNER-MINDLIN e per il continuo di E. e F. COSSERAT, che saranno trattati nel capitolo IV. In questi casi non è definita la differenza di due posizioni e dunque non è possibile considerare un campo di spostamento. ■

### 3. DEFORMAZIONE FINITA

Un cambiamento di configurazione provoca modificazioni delle posizioni delle particelle e dei vettori rappresentativi delle fibre lineari in ogni punto del corpo  $T_B$ .

La misurazione di tali modifiche è l'oggetto dell' *analisi della deformazione finita* di un corpo continuo  $T_B$ .

Il termine *deformazione finita* sta ad indicare che non vengono imposte restrizioni *a priori* all'entità di tali modifiche.

Per contro, nella teoria linearizzata le deformazioni sono studiate adottando un'approssimazione lineare e cioè trascurando tutti i termini di ordine superiore al primo in uno sviluppo in serie di potenze rispetto al parametro evolutivo.

I risultati ottenuti possono in tal caso ritenersi significativi solo per deformazioni molto piccole in qualche senso da precisare. Si parla in tal caso di *deformazioni infinitesime*.

L'aspetto fondamentale dell'analisi della deformazione consiste nello studio delle modifiche che si verificano nelle fibre lineari del corpo  $T_B$ .

Sono infatti tali modifiche, e precisamente quelle che inducono una distorsione degli spazi tangentici, ad essere correlate allo stato di sforzo e agli effetti delle variazioni di temperatura od ai fenomeni di ritiro o di espansione dovuti a reazioni chimiche che si verificano nel corpo.

Il risultato fondamentale della cinematica dei continui è costituito da una formula di decomposizione, detta formula di *decomposizione polare*, che permette di esprimere la trasformazione tangente come prodotto di composizione tra due trasformazioni lineari, una che effettua la distorsione dello spazio tangente e l'altra che ruota lo spazio tangente senza distorcerlo.

L'analisi inizia con il richiamare le proprietà caratteristiche delle trasformazioni che non alterano le lunghezze dei vettori dello spazio lineare su cui agiscono e perciò dette *trasformazioni isometriche*.

### 3.1. Isometrie

Sia  $\{V, g\}$  uno spazio lineare con prodotto interno definito da un tensore metrico  $g(-, -) \in L^2(V; \mathbb{R})$ , simmetrico e definito positivo, cioè tale che

$$\begin{aligned} g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ g(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &> 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}. \end{aligned}$$

Per semplificare la notazione si adotterà anche la notazione  $g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ .

Sia  $\mathbf{A} \in L(V; V)$  un operatore lineare.

L'operatore lineare trasposto  $\mathbf{A}^T \in L(V; V)$  è definito dalla identità

$$g(\mathbf{A}\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = g(\mathbf{A}^T\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_1) \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in V.$$

Le trasformazioni isometriche in  $\{V, g\}$  sono operatori lineari che traggono il nome dalla proprietà definitoria di non alterare la *lunghezza* o *norma* dei vettori  $\mathbf{u} \in \{V, g\}$ , definita da

$$\|\mathbf{u}\| := [g(\mathbf{u}, \mathbf{u})]^{1/2}.$$

Le *isometrie* giocano un ruolo fondamentale in meccanica e godono di peculiari prerogative. Le proprietà che caratterizzano le trasformazioni isometriche sono enunciate nella successiva proposizione 3.1. La dimostrazione, che è di natura algebrica, fa ricorso al seguente semplice risultato.

**Lemma 3.1.** *Sia  $\{V, g\}$  uno spazio lineare con prodotto interno e  $\mathbf{A} \in L(V; V)$  un operatore lineare simmetrico. Allora*

$$(\mathbf{A}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \forall \mathbf{h} \in V \iff \mathbf{A} = \mathbf{O}.$$

**Dim.** Si ha che

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in V &\Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{h}_1 + \lambda\mathbf{h}_2) \cdot (\mathbf{h}_1 + \lambda\mathbf{h}_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in V &\Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{h}_1 + \lambda^2 (\mathbf{A}\mathbf{h}_2) \cdot \mathbf{h}_2 + 2\lambda (\mathbf{A}\mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{h}_2 = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow (\mathbf{A}\mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{h}_2 = 0, \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in V &\Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{O}. \end{aligned}$$

L'implicazione inversa è banale. □

**Proposizione 3.2. Proprietà delle isometrie.** *Una trasformazione isometrica  $\mathbf{R} \in L(V; V)$  in un spazio vettoriale di dimensione finita  $\{V, g\}$  con prodotto interno è caratterizzata dalle seguenti proprietà tra loro equivalenti*

- i) *Le fibre lineari non cambiano lunghezza:*  $\|\mathbf{R}\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\|, \quad \forall \mathbf{h} \in V$ .
- ii) *Il loro prodotto interno non cambia:*  $\mathbf{R}\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{R}\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2, \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in V$ .
- iii) *La trasposta e l'inversa di  $\mathbf{R}$  coincidono:*  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ .

**Dim.** Si mostra che  $i) \iff iii) \iff ii)$ .

$i) \iff iii)$  Per ogni  $\mathbf{h} \in V$  si ha

$$\|\mathbf{Rh}\|^2 = \|\mathbf{h}\|^2 \iff \mathbf{Rh} \cdot \mathbf{Rh} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \iff (\mathbf{R}^T \mathbf{R} - \mathbf{I})\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}.$$

Per la simmetria di  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ , la proposizione 3.1. implica quindi che  $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$  e cioè che  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ .

$iii) \iff ii)$

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \iff \mathbf{Rh}_1 \cdot \mathbf{Rh}_2 = \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{Rh}_2 = \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2, \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in V$$

e l'asserto è dimostrato.  $\square$

Dalla teoria spettrale degli operatori lineari (vedi [61]) è noto che ad ogni isometria di uno spazio lineare tridimensionale  $V$  può associarsi una base ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  tale che

- i versori  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$  individuano un *sottospazio bidimensionale invariante*,
- il versore  $\mathbf{d}_3$  è un autovettore con autovalore di modulo unitario che individua l'*asse di rotazione*.

Rispetto a tale base l'isometria assume la *forma canonica*

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Se l'autovalore associato a  $\mathbf{d}_3$  è pari a  $+1$  l'isometria si dice *propria* e rappresenta una *rotazione* attorno all'asse  $\mathbf{d}_3$  di ampiezza  $\alpha$ .

Se invece l'autovalore associato ad  $\mathbf{d}_3$  è pari a  $-1$  l'isometria comporta, oltre alla rotazione, anche una *riflessione* nella direzione dell'asse  $\mathbf{d}_3$ .

Si osservi che dalla relazione  $\det \mathbf{R} = \det \mathbf{R}^T$  segue che per ogni isometria risulta

$$(\det \mathbf{R})^2 = \det \mathbf{R} \det \mathbf{R}^T = \det (\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \det \mathbf{I} = 1.$$

Quindi  $\det \mathbf{R} = \pm 1$ . L'isometria è pertanto propria se e solo se  $\det \mathbf{R} = +1$ .

L'insieme delle trasformazioni isometriche ha, rispetto all'operazione di composizione, la struttura algebrica di gruppo (non commutativo), denotato con Orth.

Il gruppo Orth è detto *gruppo delle isometrie* e gode delle proprietà caratteristiche:

- esiste in Orth l'elemento neutro (è la trasformazione identica  $\mathbf{I}$ ),
- esiste l'inversa di ogni isometria  $\mathbf{R} \in \text{Orth}$  (è l'isometria trasposta),
- il prodotto di composizione tra due isometrie è ancora una isometria, infatti

$$(\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^{-1} = \mathbf{R}_2^{-1} \mathbf{R}_1^{-1} = \mathbf{R}_2^T \mathbf{R}_1^T = (\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2)^T.$$

Il gruppo delle isometrie non è commutativo in quanto in generale

$$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \neq \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1.$$

Le *isometrie proprie* formano un sottogruppo  $\text{Orth}^+$  di Orth.

Se  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$  è una rotazione non identica, l'insieme dei vettori  $\mathbf{h} \in V$  tali che  $\mathbf{R}\mathbf{h} = \mathbf{h}$  forma un sottospazio lineare di dimensione 1 ed è detto l'*asse di rotazione*.

Dalla forma canonica delle isometrie si deduce che l'invariante lineare di una rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$ , pari alla somma degli elementi sulla diagonale principale, vale  $\text{tr } \mathbf{R} = 2 \cos \alpha + 1$  per cui

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} (\text{tr } \mathbf{R} - 1).$$

Si osservi poi che la matrice della parte antisimmetrica  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)$  di  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$  ha l'espressione

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il vettore assiale  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial } \boldsymbol{\Omega}$  e le sue componenti sono

$$\boldsymbol{\omega} = (\sin \alpha) \mathbf{d}_3, \quad [\boldsymbol{\omega}] = \{0, 0, \sin \alpha\}.$$

Nota dunque la matrice associata ad una rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$  rispetto ad un riferimento arbitrario  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ , l'asse attorno al quale avviene la rotazione, l'angolo di rotazione ed il suo verso possono essere così valutati

- $\cos \alpha$  si ottiene dall'invariante lineare di  $\mathbf{R}$ ,
- l'asse di rotazione è individuato dal vettore assiale  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial } \frac{1}{2} (\mathbf{R} - \mathbf{R}^T)$  di intensità pari a  $\sin \alpha$ .

Se si considera un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  con  $\mathbf{e}_3$  pari al versore di  $\boldsymbol{\omega}$  e con lo stesso orientamento di  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ , il verso positivo di  $\alpha$  è quello che porta  $\mathbf{e}_1$  su  $\mathbf{e}_2$  descrivendo un angolo pari a  $\pi/2$ .

Si fornisce ora una fondamentale caratterizzazione dei processi evolutivi di tipo isometrico.

**Proposizione 3.3. Processi isometrici.** Una famiglia ad un parametro  $\lambda \in [0, 1]$  di trasformazioni lineari  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è un processo isometrico se e solo se è soluzione dei problemi differenziali lineari del primo ordine, tra loro equivalenti

- i)  $\mathbf{Q}'(\lambda) = \mathbf{W}(\lambda) \mathbf{Q}(\lambda)$ ,  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_o$
- ii)  $\mathbf{Q}'(\lambda) = \mathbf{Q}(\lambda) \mathbf{W}_o(\lambda)$ ,  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_o$

dove il valore iniziale  $\mathbf{Q}_o$  è una isometria e  $\mathbf{W}, \mathbf{W}_o$  sono trasformazioni antisimmetriche legate dalla relazione  $\mathbf{W} = \mathbf{Q} \mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T$ .

Se  $\mathbf{Q}_o$  è una rotazione tale è  $\mathbf{Q}(\lambda)$  per  $\lambda \in [0, 1]$ .

**Dim.** Una isometria  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è caratterizzata dalla proprietà

$$\mathbf{Q} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I},$$

e quindi derivando rispetto a  $\lambda$  si ha

$$\mathbf{Q}' \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} (\mathbf{Q}')^T = \mathbf{O}, \quad (\mathbf{Q}')^T \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}' = \mathbf{O}.$$

Ne consegue che  $\mathbf{W}(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}' \mathbf{Q}^T$  e  $\mathbf{W}_o(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}'$  sono trasformazioni antisimmetriche.

Viceversa sia  $\mathbf{Q}(\lambda)$  soluzione del problema differenziale i).

Posto  $\mathbf{Z} = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T$  risulta  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Q}_o \mathbf{Q}_o^T = \mathbf{I}$  e l'equazione differenziale del primo ordine

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Q}' \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} (\mathbf{Q}')^T = \mathbf{W} \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \mathbf{Q}^T \mathbf{W} = \mathbf{W} \mathbf{Z} - \mathbf{Z} \mathbf{W}, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{I},$$

ammette l'unica soluzione  $\mathbf{Z}(\lambda) = \mathbf{I}$ . Ciò dimostra che  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è una isometria. Se  $\mathbf{Q}_o$  è una rotazione, per continuità  $\det \mathbf{Q}(\lambda) = \det \mathbf{Q}_o = +1$  e pertanto  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è una rotazione per  $\lambda \in [0, 1]$ . Analogamente per ii).  $\square$

Il ruotato  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}$  di un tensore  $\mathbf{A}$  mediante una rotazione  $\mathbf{R}$  è definito dalla formula

$$\mathbf{A}_{\mathbf{R}}(\mathbf{Rh}) := \mathbf{R}(\mathbf{Ah}) \quad \forall \mathbf{h} \in V,$$

ovvero come il tensore che associa al ruotato di ogni vettore il ruotato della sua immagine tramite  $\mathbf{A}$ . Risulta quindi

$$\mathbf{A}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \mathbf{A} \mathbf{R}^T.$$

E' facile verificare che gli autovettori di  $\mathbf{A}_{\mathbf{R}}$  sono i ruotati tramite  $\mathbf{R}$  di quelli di  $\mathbf{A}$  e che i loro autovalori coincidono.

### 3.2. Decomposizione polare

Un’evoluzione  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \times I \times I \mapsto \mathbb{S}$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  provoca modificazioni delle fibre lineari negli spazi tangenti ad ogni punto del corpo  $\mathbb{T}_B$ .

Si denotino con

- $\Omega$  e  $\mathbf{k}(\Omega)$  le posizioni occupate dal corpo ai tempi  $s$  e  $t$  durante il processo evolutivo. La mappa  $\mathbf{k}_{t,s} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  è detta *mappa di trasferimento* da  $\Omega$  a  $\mathbf{k}(\Omega)$  e per brevità si pone  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{t,s}$ .
- $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  lo spazio delle fibre lineari tangentì nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  e con
- $\mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$  lo spazio delle fibre lineari tangentì nel punto  $\mathbf{k}(\mathbf{x}) \in \mathbf{k}(\Omega)$ .

In generale ognuno degli spazi tangenti  $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  viene modificato dalla trasformazione  $\mathbf{k}$  in modo diverso.

La modifica di ogni spazio tangente è rappresentabile come l’effetto di due trasformazioni, una rotazione ed una distorsione dello spazio tangente.

La distorsione provoca variazioni delle lunghezze delle fibre lineari e degli angoli che esse formano tra loro.

A tale risultato si giunge operando una opportuna decomposizione della trasformazione tangente

$$\mathbf{F}_\mathbf{k} := T\mathbf{k},$$

in due operazioni lineari in cascata.

La metodologia che consente di effettuare tale decomposizione è di natura puramente algebrica ed è sostanzialmente dovuta ad A.L. CAUCHY<sup>6</sup> [5], [8].

La dimostrazione richiede il seguente semplice risultato.

---

<sup>6</sup> AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857). Nacque a Parigi all’inizio della rivoluzione francese. PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827) e JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) frequentavano la casa del padre e LAGRANGE notò le doti matematiche del giovane CAUCHY. Nel 1805 entrò all’Ecole Polytechnique dove ebbe ANDRÉ MARIE AMPÈRE (1775-1836) come tutore di analisi. Nel 1807 entrò alla Ecole des Ponts et Chaussées e quindi lavorò come ingegnere a progetti di ingegneria idraulica (Canale di Ourcq) dedicandosi nel contempo a ricerche matematiche. Nel 1813 divenne professore associato di matematica all’Ecole Polytechnique. Nel 1817 prese il posto di JEAN-BAPTISTE BIOT ( 1774-1862) al Collège de France. Nel luglio del 1830 FILIPPO D’ORLEANS con un colpo di stato spodestò CARLO X DI BORBONE dal trono di Francia. CAUCHY, che era di sicura fede borbonica ed estremamente cattolico e bigotto, rifiutò di prestare giuramento al nuovo re e dovette lasciare Parigi. Dopo un breve soggiorno in Svizzera accettò l’invito di re CARLO ALBERTO DI SARDEGNA e nel 1831 divenne professore di fisica all’Università di Torino. Nel 1833 lasciò Torino per rispondere all’appello di CARLO X che da Praga lo chiamò a dedicarsi all’educazione scientifica del figlio. Ritornato a Parigi nel 1838 riprese la sua posizione al Collège de France ma fino al 1948 non potette insegnare né prendere il posto al Bureau des Longitudes, per il perdurante rifiuto di prestare giuramento al Re. CAUCHY è stato uno dei maggiori e più prolifici matematici di ogni tempo. Egli ha pubblicato ben 789 lavori, di cui circa 500 negli ultimi vent’anni di vita, ed ha contribuito in modo sostanziale al fondamento della moderna analisi matematica, della teoria delle funzioni di variabili complesse e della meccanica dei corpi continui.

**Lemma 3.4.** Sia  $\{V, g\}$  uno spazio lineare con prodotto interno e  $A \in L(V; V)$  un operatore lineare e  $A^T \in L(V; V)$  l'operatore trasposto. Allora l'operatore lineare  $A^T A \in L(V; V)$  è simmetrico e positivo ed è definito positivo se e solo se l'operatore  $A \in L(V; V)$  è non singolare.

**Dim.** Si osservi che  $(A^T A)^T = A^T A$  ed inoltre

$$(A^T A h) \cdot h = (A h) \cdot (A h) = \|A h\|^2 \geq 0, \quad \forall h \in V.$$

Se  $\text{Ker } A = \{\mathbf{o}\}$  allora  $\|A h\| = 0 \iff h = 0$ . □

**Proposizione 3.5. Decomposizione polare.** Sia  $V$  uno spazio lineare di dimensione finita. Un operatore  $F \in L(V, V)$  non singolare può essere decomposto univocamente in due modi alternativi

$$F = R U = V R$$

dove

$$\begin{cases} R & \text{è una isometria} \\ U, V & \text{sono operatori simmetrici, definiti positivi.} \end{cases}$$

Se  $F$  ha determinante positivo, l'isometria è propria e cioè è una rotazione.

**Dim.** L'operatore  $U^2 = F^T F \in L(V, V)$  è simmetrico e definito positivo. Può quindi porsi

$$U = (F^T F)^{1/2}.$$

La radice quadrata si estrae in modo univoco ponendo  $U^2 = F^T F$  in forma canonica e valutando la radice quadrata aritmetica degli autovalori che, essendo  $F^T F$  simmetrico e definito positivo, sono reali e positivi.

Si ottiene così la forma canonica dell'operatore  $U \in L(V, V)$  che risulta anch'esso simmetrico e definito positivo e pertanto invertibile. Si può allora definire l'operatore lineare

$$R = FU^{-1} \in L(V, V).$$

E' immediato poi constatare che

- $R$  è un isometria; infatti  $R^T = U^{-T} F^T = U^{-1} F^T$  da cui

$$RR^T = FU^{-1}U^{-1}F^T = FU^{-2}F^T = F(F^T F)^{-1}F^T = FF^{-1}F^{-T}F^T = I.$$

- Se  $\det F > 0$  l'isometria  $R$  è propria. Infatti si ha che

$$\det U = [\det (F^T F)]^{1/2} = |\det F| > 0$$

e quindi risulta  $\det R = \det F / \det U = +1$ .

L'unicità segue dall'osservare che se sussiste la decomposizione polare  $F = R U$  con  $U$  simmetrico e positivo ed  $R$  isometrico, allora

$$F^T F = U R^T R U = U^2.$$

L'unicità di  $\mathbf{U}$  segue dalla univocità dell'operazione di estrazione della radice quadrata ed implica l'unicità di  $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}$ .

In modo perfettamente analogo si dimostra che  $\mathbf{F} = \mathbf{V}\bar{\mathbf{R}}$ , con  $\mathbf{V}^2 = \mathbf{FF}^T$  simmetrico e definito positivo e  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$  isometrico, univocamente definiti. L'egualanza  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R}$  segue infine dall'implicazione

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \Rightarrow \mathbf{VR} = \mathbf{UR} = \mathbf{F},$$

e dall'unicità della decomposizione polare.  $\square$

Alla decomposizione polare di un arbitrario tensore  $\mathbf{F} \in \mathcal{L}(V; V)$  si può pervenire ponendo un problema di minima distanza dal gruppo Orth delle isometrie, (vedi [37], [38], [49] e [51] ex. I.2.7).

Si ottiene così un risultato più generale che consente di effettuare la decomposizione polare di gradienti della deformazione anche singolari.

Una dimostrazione dovuta all'autore [58], che fornisce una caratterizzazione completa dell'insieme delle soluzioni del problema di minimo, è riportata nella sezione 11.1 (p. 119).

Per la posizione occupata nella formula di decomposizione polare,

- $\mathbf{U}$  è detto *tensore destro* di CAUCHY,
- $\mathbf{V}$  è detto *tensore sinistro* di CAUCHY.

In base alla definizione i tensori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  risultano legati dalle relazioni

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{V} \mathbf{R}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T.$$

La simmetria di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  assicura che esistono basi dello spazio costituite dai rispettivi autovettori e che gli autovalori sono reali.

La definizione positiva di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  implica che i rispettivi autovalori sono positivi.

Si osservi inoltre che

$$\begin{cases} \mathbf{U}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{VRa} = \mathbf{RUa} = \lambda\mathbf{Ra}, \\ \mathbf{V}\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{UR}^T\mathbf{b} = \mathbf{R}^T\mathbf{Vb} = \lambda\mathbf{R}^T\mathbf{b}. \end{cases}$$

Si può dunque concludere che

- gli autovalori di  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  coincidono,
- gli autovettori di  $\mathbf{V}$  si ottengono ruotando di  $\mathbf{R}$  quelli di  $\mathbf{U}$ ,
- gli autovettori di  $\mathbf{U}$  si ottengono ruotando di  $\mathbf{R}^T$  quelli di  $\mathbf{V}$ .

### 3.3. Deformazione dello spazio tangente

Il teorema di decomposizione polare è applicabile alla trasformazione tangente

$$\mathbf{F}_k \in L(\mathbb{T}_{\Omega}, \mathbb{T}_{k(\Omega)})$$

associata ad un trasferimento  $k : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  dalla posizione spaziale  $\Omega$  alla posizione spaziale  $k(\Omega)$ . Nel seguito il pedice  $_k$  denota i vettori ed i tensori relativi allo spazio tangente  $\mathbb{T}_{k(\Omega)}$ .

Fanno eccezione i tensori  $\mathbf{F}_k$  e  $\mathbf{R}_k$  che operano *a cavallo* degli spazi tangenti  $\mathbb{T}_{\Omega}$  e  $\mathbb{T}_{k(\Omega)}$ . Si ha quindi che

$$Tk = \mathbf{F}_k = \mathbf{R}_k \mathbf{U} = \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{V}_k^2 = \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^T.$$

- Il tensore isometrico  $\mathbf{R}_k(x) \in L(\mathbb{T}_{\Omega}(x); \mathbb{T}_{k(\Omega)}(k(x)))$  effettua una rotazione rigida locale nel punto  $x \in \Omega$  ed una traslazione in  $k(x)$ .

- I tensori

$$\mathbf{U}(x) \in L(\mathbb{T}_{\Omega}(x), \mathbb{T}_{\Omega}(x)),$$

$$\mathbf{V}_k(x) \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}(k(x)); \mathbb{T}_{k(\Omega)}(k(x))),$$

inducono una deformazione locale in quanto provocano una variazione della lunghezza delle fibre lineari e degli angoli tra le fibre lineari del corpo.

- Il tensore  $\mathbf{U}(x)$  opera sullo spazio  $\mathbb{T}_{\Omega}(x)$  tangente nel punto  $x \in \Omega$ ,
- il tensore  $\mathbf{V}_k(x)$  opera sullo spazio  $\mathbb{T}_{k(\Omega)}(k(x))$  tangente in  $k(x) \in k(\Omega)$ .

La duplice decomposizione polare della trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$  si può enunciare affermando che

- la trasformazione locale delle fibre lineari tangentи può ottersi componendo una rotazione ed una deformazione, e ciò in duplice modo facendo avvenire prima l'una e poi l'altra o viceversa, come schematicamente mostrato in fig.3.1.

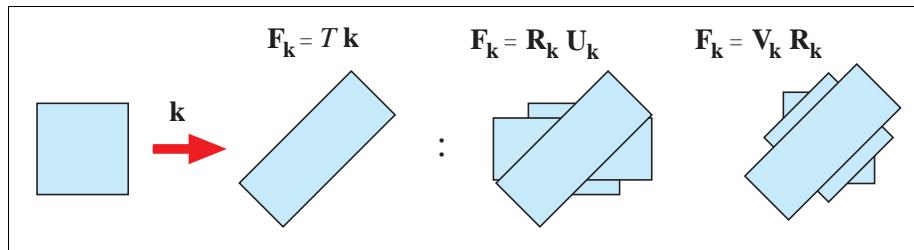


Fig. 3.1

### 3.4. Dilatazioni e scorimenti angolari

Una generica fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  viene portata dalla trasformazione  $\mathbf{k}$  nella fibra lineare  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) \mathbf{h} \in \mathbb{T}_{k(\Omega)}(k(\mathbf{x}))$ .

Sia  $l_o = \|\mathbf{h}\|$  la lunghezza di  $\mathbf{h}$  ed  $l = \|\mathbf{F}_k \mathbf{h}\|$  la lunghezza di  $\mathbf{F}_k \mathbf{h}$ .

■ La *dilatazione* della fibra lineare  $\mathbf{h}$  è il rapporto tra l'aumento di lunghezza e la lunghezza iniziale

$$\varepsilon_{\mathbf{h}} := \frac{l - l_o}{l_o} = \frac{\|\mathbf{F}_k \mathbf{h}\| - \|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|}.$$

Essendo  $\|\mathbf{F}_k \mathbf{h}\| = \|\mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{h}\| = \|\mathbf{U} \mathbf{h}\|$ , se  $\mathbf{h}$  è una fibra lineare principale per  $\mathbf{U}$  associata all'autovalore  $\lambda$ , sarà

$$l = \|\mathbf{F}_k \mathbf{h}\| = \|\mathbf{U} \mathbf{h}\| = \lambda \|\mathbf{h}\| = \lambda l_o.$$

Gli autovalori  $\lambda$  di  $\mathbf{U}$  sono quindi pari al rapporto tra la lunghezza finale e quella iniziale della corrispondente fibra lineare principale, per cui si ha che

$$\lambda = \frac{l}{l_o}, \quad \varepsilon = \frac{l - l_o}{l_o} = \lambda - 1,$$

dove  $\varepsilon$  è la dilatazione della fibra lineare principale.

Si considerino ora due fibre lineari non parallele  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  in  $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$ .

Sia quindi  $\mathbf{a}$  il versore ortogonale ad entrambe e tale che la terna ordinata  $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{a}\}$  sia concorde con l'orientamento positivo dello spazio, così che risulta  $\Delta(\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{a}) := (\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{a} > 0$  con  $\Delta$  funzione determinante normalizzata (vedi sezione 3.5).

L'angolo  $\alpha(\mathbf{n}, \mathbf{m})$  che le fibre lineari formano tra loro può essere determinato valutandone il coseno ed il seno, forniti da

$$\cos \alpha(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{m}\|}, \quad \sin \alpha(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \frac{(\mathbf{n} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{n}\| \|\mathbf{m}\|}.$$

Il verso positivo dell'angolo  $\alpha(\mathbf{n}, \mathbf{m})$  è quello che porta  $\mathbf{n}$  su  $\mathbf{m}$  con una rotazione concorde all'orientamento determinato dalla terna ordinata  $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{a}\}$ .

Se ad esempio l'orientamento è levogiro, un osservatore che guarda parallelamente ad  $\mathbf{a}$ , ed in verso opposto ad  $\mathbf{a}$ , vede ruotare  $\mathbf{n}$  in verso antiorario per portarsi su  $\mathbf{m}$ .

A seguito della trasformazione  $\mathbf{k}$  l'angolo  $\alpha(\mathbf{F}_k \mathbf{n}, \mathbf{F}_k \mathbf{m})$  tra le corrispondenti fibre lineari  $\mathbf{F}_k \mathbf{n}$  e  $\mathbf{F}_k \mathbf{m}$  in  $\mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$  è individuato da

$$\begin{cases} \cos \alpha(\mathbf{F}_k \mathbf{n}, \mathbf{F}_k \mathbf{m}) = \frac{\mathbf{U} \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} \mathbf{m}}{\|\mathbf{U} \mathbf{n}\| \|\mathbf{U} \mathbf{m}\|} \\ \sin \alpha(\mathbf{F}_k \mathbf{n}, \mathbf{F}_k \mathbf{m}) = \frac{(\mathbf{U} \mathbf{n} \times \mathbf{U} \mathbf{m}) \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{U} \mathbf{n}\| \|\mathbf{U} \mathbf{m}\|} \end{cases}$$

dove

- $\mathbf{b}$  è il versore ortogonale alle fibre lineari  $\mathbf{U} \mathbf{n}$  e  $\mathbf{U} \mathbf{m}$  ed orientato in modo tale che la terna  $\{\mathbf{U} \mathbf{n}, \mathbf{U} \mathbf{m}, \mathbf{b}\}$  sia concorde all'orientamento della terna  $\{\mathbf{n}, \mathbf{m}, \mathbf{a}\}$ .

- Lo *scorrimento angolare* tra le fibre lineari  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  indotto dalla trasformazione  $\mathbf{k}$  è la diminuzione di angolo tra le due fibre lineari

$$\gamma(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = \alpha(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - \alpha(\mathbf{F}_k \mathbf{n}, \mathbf{F}_k \mathbf{m}).$$

Lo scorrimento angolare dipende solo dalla distorsione  $\mathbf{U}$  associata al trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$ .

Si noti che le quantità che descrivono modifiche alla geometria delle fibre lineari del corpo sono indipendenti dalla lunghezza iniziale del loro vettore rappresentativo.

### 3.5. Dilatazione volumetrica

Si consideri un trasferimento  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  dalla posizione spaziale  $\Omega$  alla posizione spaziale  $\mathbf{k}(\Omega)$ . Sia  $\mathcal{P}$  una qualsiasi parte connessa di  $\Omega$  e  $\mathbf{k}(\mathcal{P})$  la corrispondente parte di  $\mathbf{k}(\Omega)$ .

- La *forma di volume*  $\Delta$  è la funzione determinante normalizzata rispetto alla metrica euclidea (vedi [61]), e cioè l'unica forma trilineare alternante che ad ogni terna ordinata di vettori dello spazio orientato associa il volume con segno del corrispondente parallelepipedo orientato, il segno essendo  $+$  o  $-$  a seconda che l'orientamento dello spazio e del parallelepipedo siano concordi o discordi.

Se  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è una base ortonormale risulta  $\Delta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 1$

Dunque il volume del parallelepipedo di lati  $\{\mathbf{F}_k \mathbf{e}_1, \mathbf{F}_k \mathbf{e}_2, \mathbf{F}_k \mathbf{e}_3\}$  è pari a

$$\Delta(\mathbf{F}_k \mathbf{e}_1, \mathbf{F}_k \mathbf{e}_2, \mathbf{F}_k \mathbf{e}_3) = (\det \mathbf{F}_k) \Delta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \det \mathbf{F}_k.$$

Il determinante della trasformazione lineare  $\mathbf{F}_k$  è detto *determinante jacobiano* (o determinante di JACOBI)<sup>7</sup> della trasformazione  $k$  e si denota con

$$J(k) = \det \mathbf{F}_k,$$

Ne segue che il volume di  $k(\mathcal{P})$  si calcola mediante la formula integrale

$$\text{vol } k(\mathcal{P}) = \int_{k(\mathcal{P})} dv_k = \int_{\mathcal{P}} \det \mathbf{F}_k dv.$$

Indicando con  $(\det \mathbf{F}_k)_{\text{MED}}$  il valore medio del determinante di  $\mathbf{F}_k$  in  $\mathcal{P}$  ed applicando il teorema della media si ottiene

$$\text{vol } k(\mathcal{P}) = (\det \mathbf{F}_k)_{\text{MED}} \text{vol } \mathcal{P}.$$

Si definisce *dilatazione volumetrica media* di  $\mathcal{P}$  il rapporto

$$\frac{\text{vol } k(\mathcal{P}) - \text{vol } \mathcal{P}}{\text{vol } \mathcal{P}} = (\det \mathbf{F}_k)_{\text{MED}} - 1.$$

La *dilatazione volumetrica locale* in corrispondenza di un punto  $x \in \Omega$  può anche valutarsi considerando gli intorni sferici  $\mathcal{P}$  di  $x$  di raggio  $\rho(\mathcal{P})$  ed effettuando il limite per  $\rho(\mathcal{P}) \rightarrow 0$  della dilatazione volumetrica media.

Il limite, per la continuità di  $\mathbf{F}_k$  rispetto ad  $x$ , vale

$$\lim_{\rho(\mathcal{P}) \rightarrow 0} \frac{\text{vol } k(\mathcal{P}) - \text{vol } \mathcal{P}}{\text{vol } \mathcal{P}} = \det \mathbf{F}_k(x) - 1.$$

In un processo di deformazione che fa passare il corpo dalla posizione spaziale  $\Omega$  al tempo  $s \in I$  alla posizione spaziale  $k(\Omega)$  al tempo  $t \in I$ , la trasformazione  $k_s(x, t)$  è invertibile ad ogni istante  $t \in I$  e dunque risulta  $\det \mathbf{F}_k(x, s, t) \neq 0$ .

Essendo  $\mathbf{F}_k(x, s, s) = \mathbf{I}$  risulta  $\det \mathbf{F}_k(x, s, s) = 1$ .

---

<sup>7</sup> CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851). Illustrer matematico tedesco di famiglia ebrea, professore alla Università di Königsberg insieme a FRANZ ERNST NEUMANN (1798-1895) ed a FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846). Le sue famose ricerche sulle funzioni ellittiche furono pubblicate nel 1829 nel lavoro *Fundamenta nova theoria functionum ellipticarum*. Le parallele ed innovative ricerche del geniale matematico norvegese NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) sono del 1828. Entrambi ricevettero l'ammirazione di ADRIEN-MARIE LEGENDRE e di JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855). A Parigi JACOBI incontrò JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830) e SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840). Per la qualità e l'ampiezza dei suoi contributi alla matematica ed alla meccanica JACOBI può essere paragonato a LEONHARD EULER (1707-1783).

La continuità rispetto a  $\tau$  di  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}, s, t)$  e quindi di  $\det \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, s, t)$  assicura poi che  $\det \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, s, t) > 0$  per ogni  $t \in I$ .

Ciò implica che, se il volume di  $\mathcal{P}$  è positivo, il volume di  $k_t(\mathcal{P})$  è anch'esso positivo per ogni  $t \in I$ .

- Sono dette *trasformazioni isocore* le trasformazioni  $k$  che non alterano il volume di una qualsiasi parte  $\mathcal{P}$  di  $\Omega$ .

Le trasformazioni isocore sono caratterizzate dalla proprietà

$$\text{vol } \mathcal{P} = \text{vol } k(\mathcal{P}), \quad \forall \mathcal{P} \subset \Omega$$

e quindi dalla condizione locale

$$\det \mathbf{F}_k(\mathbf{x}, s, t) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad \forall t \in I,$$

e cioè da un campo di gradienti con determinante unitario.

### 3.6. Deformazione delle superfici

Sia  $k : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{S}$  una trasformazione che manda  $\overline{\Omega}$  su  $\overline{k(\Omega)}$ .

Una superficie regolare  $S \subset \overline{\Omega}$  viene allora trasformata nella superficie regolare

$$k(S) \subset \overline{k(\Omega)}.$$

Si vuole valutare la deformazione locale da  $S$  a  $k(S)$  indotta da  $k$ .

A tal fine si considerino due fibre lineari tangentи,  $a$  e  $b$  non parallele ed appartenenti al piano tangente ad  $S$  nel punto  $\mathbf{x} \in S$ .

Per effetto della trasformazione  $k$  le fibre lineari diventano

$$a \rightarrow \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) a, \quad b \rightarrow \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) b.$$

Se  $\Delta$  è la forma di volume associata ad un orientamento dello spazio, il prodotto vettoriale tra  $a$  e  $b$  è definito dalla proprietà

$$(a \times b) \cdot h = \Delta(a, b, h) \quad \forall h \in V.$$

Ponendo  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k(\mathbf{x})$  e ricordando con  $J(k) = \det \mathbf{F}_k$  lo jacobiano di  $k$ , si deduce che  $\forall h \in V$  risulta

$$\begin{aligned} (\mathbf{F}_k a \times \mathbf{F}_k b) \cdot \mathbf{F}_k h &= \Delta(\mathbf{F}_k a, \mathbf{F}_k b, \mathbf{F}_k h) = \\ &= (\det \mathbf{F}_k) \Delta(a, b, h) = J(k) (a \times b) \cdot h. \end{aligned}$$



Dunque

$$\mathbf{F}_k^T (\mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}) = J(\mathbf{k}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).$$

Si osservi ora che i versori

- $\mathbf{n}$  normale a  $S$  in  $\mathbf{x}$
- $\mathbf{n}_k$  normale a  $k(S)$  in  $k(\mathbf{x})$

hanno le espressioni

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|},$$

$$\mathbf{n}_k = \frac{\mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}}{\|\mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}\|},$$

Le aree dei parallelogrammi di lati  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{F}_k \mathbf{a}$  e  $\mathbf{F}_k \mathbf{b}$  sono date da

$$A = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|, \quad A_k = (\mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}) \cdot \mathbf{n}_k = \|\mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}\|.$$

Risulta quindi

$$A \mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad A_k \mathbf{n}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}.$$

In virtù della relazione

$$\mathbf{F}_k^T (\mathbf{F}_k \mathbf{a} \times \mathbf{F}_k \mathbf{b}) = J(\mathbf{k}) (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$

si perviene quindi alla notevole (vedi [40] formula 20.8)

■ *formula* di NANSON<sup>8</sup>

$$(n_k A_k)(k(x)) = (J(k) F_k^{-T} n A)(x),$$

che fornisce la regola di trasformazione del prodotto tra l'area ed il versore normale.

Effettuando il prodotto interno con il versore  $\mathbf{n}_k$  normale alla superficie  $k(S)$ , si ottiene la seguente formula di trasformazione dell'area

$$A_k \circ k = J(k) (F_k^{-1} n_k \circ k) \cdot n A.$$

---

<sup>8</sup> EDWARD JOHN NANSON (1850-1936). Conseguì la laurea al Trinity college di Cambridge nel 1874 divenne Professore di Matematica Applicata al Royal Indian Engineering College nel Surrey e l'anno successivo Professore di Matematica all'Università di Melbourne dalla quale si ritirò come Professore Emerito nel 1922. La formula che porta il suo nome fu pubblicata nel 1878 in [22]. NANSON è anche noto per le sue idee di riforma elettorale che sostenevano la rappresentanza proporzionale ed il voto preferenziale.

### 3.7. Trasformata di Piola e formula di Nanson

A G. PIOLA, [9] (1833), è dovuta l'ideazione di una trasformazione che consente di esprimere l'equilibrio di un corpo continuo in termini di campi definiti sull'immagine di una configurazione di riferimento.

La trattazione del problema dell'equilibrio in presenza di grandi deformazioni e spostamenti sarà svolta nel capitolo II, sezione II.13 (p. 284).

Come si vedrà, la trasformata di PIOLA consente anche di pervenire in modo alternativo alla formula di NANSON.

Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$ ,  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  una trasformazione differenziabile con l'inversa,  $\alpha_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$  un campo scalare e  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbf{x}))$  un campo vettoriale entrambi di classe  $C^1(\mathcal{T}(\Omega))$  su  $\mathbf{k}(\Omega)$ .

I corrispondenti campi su  $\Omega$ , definiti localmente dalla formula del cambiamento di variabile, siano

$$\alpha(\mathbf{x}) := \alpha_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}) := \mathbf{w}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

- La *trasformata di PIOLA*<sup>9</sup> di un campo vettoriale, associata alla mappa di trasferimento  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  con  $\Omega = \text{dom } \mathbf{k}$ , può essere definita come l'applicazione lineare che ad ogni campo vettoriale  $\mathbf{w}_{\mathbf{k}} \in C^1(\mathbf{k}(\mathcal{T}(\Omega)))$  associa un campo  $P[\mathbf{w}_{\mathbf{k}}] \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$  tale che, per ogni  $\alpha \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$ , si abbia

$$\int_{\mathcal{T}(\Omega)} (P[\mathbf{w}_{\mathbf{k}}] \cdot \text{grad } \alpha) \, dv = \int_{\mathbf{k}(\mathcal{T}(\Omega))} (\mathbf{w}_{\mathbf{k}} \cdot \text{grad}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}) \, dv_{\mathbf{k}},$$

Essendo  $\alpha = \alpha_{\mathbf{k}} \circ \mathbf{k}$  e  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}} = d\mathbf{k}$ , dalla formula di derivazione a catena

$$d\alpha[\mathbf{h}] = [(d_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}) \circ \mathbf{k}] [\mathbf{F}_{\mathbf{k}} \mathbf{h}],$$

si deduce che

$$(\text{grad } \alpha) \cdot \mathbf{h} = [(\text{grad}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}) \circ \mathbf{k}] \cdot (\mathbf{F}_{\mathbf{k}} \mathbf{h}),$$

e quindi che

$$\text{grad } \alpha = \mathbf{F}_{\mathbf{k}}^T (\text{grad}_{\mathbf{k}} \alpha_{\mathbf{k}}) \circ \mathbf{k}.$$

---

<sup>9</sup> GABRIO PIOLA (1791-1850). Di famiglia milanese nobile e benestante si dedicò alle matematiche per diletto e *puro spirito filosofico*. Nel 1831, quando CAUCHY arrivò a Torino, lo introdusse agli intellettuali cattolici milanesi tra cui ALESSANDRO MANZONI (1785-1873). Pubblicò negli *Opuscoli Matematici e Fisici*, da lui fondati, la traduzione italiana, con note esplicative, della *Mémoire sur la mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites* presentata da CAUCHY all'Accademia Torinese delle Scienze nel 1831.

Essendo inoltre  $dv_k = J(k) dv$ , deve avversi che

$$\int_{\mathcal{T}(\Omega)} (P[w_k] \cdot \operatorname{grad} \alpha) dv = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} (J(k) F_k^{-1} w_k \circ k) \cdot \operatorname{grad} \alpha dv.$$

Si ponga quindi  $\alpha(x) = g \cdot x$ , con  $g \in V$ , su  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$  e  $\alpha(x) = 0$  altrove.

Stante l'arbitrarietà di  $\mathcal{T}(\Omega)$  e di  $g \in V$  si perviene alla relazione

$$P[w_k] := J(k) F_k^{-1} w_k \circ k,$$

che definisce la trasformata di PIOLA di un campo vettoriale.

Dalla *formula di GREEN* si ottiene quindi che, per ogni  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$ ,

$$\int_{k(\mathcal{P})} (w_k \cdot \operatorname{grad}_k \alpha_k) dv_k = - \int_{k(\mathcal{P})} (\operatorname{div}_k w_k) \alpha_k dv_k + \int_{\partial k(\mathcal{P})} (w_k \cdot n_k) \alpha_k d\sigma_k,$$

$$\int_{\mathcal{P}} (P[w_k] \cdot \operatorname{grad} \alpha) dv = - \int_{\mathcal{P}} (\operatorname{div} P[w_k]) \alpha dv + \int_{\partial \mathcal{P}} (P[w_k] \cdot n) \alpha d\sigma.$$

Imponendo l'egualità delle espressioni per ogni  $\alpha \in C_o^\infty(\Omega)$  e tenendo presente che  $dv_k = J(k) dv$ , dalla proposizione 1.1 (p. 7) si deduce che sussiste l'*identità di PIOLA*

$$\operatorname{div} P[w_k] = J(k) (\operatorname{div}_k w_k) \circ k.$$

Si può concludere che gli integrali al contorno sono eguali e cioè che

$$\int_{\partial k(\mathcal{P})} (w_k \cdot n_k) \alpha_k d\sigma_k = \int_{\partial \mathcal{P}} (P[w_k] \cdot n) \alpha d\sigma = \int_{\partial \mathcal{P}} ((J(k) F_k^{-1} w_k \circ k) \cdot n) \alpha d\sigma,$$

ovvero che

$$\int_{\partial k(\mathcal{P})} (\alpha_k w_k) \cdot (n_k d\sigma_k) = \int_{\partial \mathcal{P}} (\alpha_k w_k \circ k) \cdot (J(k) F_k^{-T} n d\sigma).$$

Ponendo  $\alpha \in C_o^\infty(\Omega)$  e  $w \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$  pari ad un arbitrario campo costante su  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$  si deduce che per ogni  $S \subseteq \partial \mathcal{P}$  sussiste la relazione

$$\int_{k(S)} n_k d\sigma_k = \int_S J(k) F_k^{-T} n d\sigma,$$

che è la *formula di NANSON*.

Dall'eguaglianza degli integrali al contorno, ponendo  $\alpha = 1$  su  $\mathcal{P}$ , si perviene alla seguente proprietà caratteristica che esprime l'eguaglianza dei flussi al contorno

$$\int_{\partial\mathcal{P}} (P[\mathbf{w}_k] \cdot \mathbf{n}) d\sigma = \int_{\partial k(\mathcal{P})} (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{n}_k) d\sigma_k.$$

In letteratura tale eguaglianza è assunta come definizione della trasformata di PIOLA di un campo vettoriale.

Procedendo in perfetta analogia si introduce

- la *trasformata di PIOLA* di un campo tensoriale  $\mathbf{T}_k \in C^1(k(\mathcal{T}(\Omega)))$ , come il campo  $P[\mathbf{T}_k] \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$  tale che, per ogni  $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$ , si abbia

$$\int_{\mathcal{T}(\Omega)} (P[\mathbf{T}_k] : d\mathbf{v}) dv = \int_{k(\mathcal{T}(\Omega))} (\mathbf{T}_k : d_k \mathbf{v}_k) dv_k,$$

Essendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k \circ \mathbf{k}$  con  $\mathbf{F}_k = d\mathbf{k}$ , dalla formula di derivazione a catena si ha che

$$d\mathbf{v}[\mathbf{h}] = d_k \mathbf{v}_k [\mathbf{F}_k \mathbf{h}].$$

Sussiste pertanto l'eguaglianza

$$\int_{\mathcal{T}(\Omega)} (P[\mathbf{T}_k] : d\mathbf{v}) dv = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} (\mathbf{T}_k \circ \mathbf{k}) (J(\mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}) : d\mathbf{v} dv.$$

Ponendo  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}[\mathbf{x}]$  su  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$  e  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$  altrove, stante l'arbitrarietà di  $\mathcal{T}(\Omega)$  e di  $\mathbf{G} \in L(V; V)$  si perviene alla relazione

$$P[\mathbf{T}_k] := (\mathbf{T}_k \circ \mathbf{k}) (J(\mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}),$$

che definisce la trasformata di PIOLA di un campo tensoriale.

Dalla formula di GREEN si ottiene quindi che

$$\int_{k(\mathcal{P})} (\mathbf{T}_k : d_k \mathbf{v}_k) dv_k = - \int_{k(\mathcal{P})} (\operatorname{div}_k \mathbf{T}_k) \mathbf{v}_k dv_k + \int_{\partial k(\mathcal{P})} (\mathbf{T}_k \mathbf{n}_k) \cdot \mathbf{v}_k d\sigma_k,$$

$$\int_{\mathcal{P}} (P[\mathbf{T}_k] : d\mathbf{v}) dv = - \int_{\mathcal{P}} (\operatorname{div} P[\mathbf{T}_k]) \mathbf{v} dv + \int_{\partial\mathcal{P}} (P[\mathbf{T}_k] \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma.$$



Imponendo l'eguaglianza delle espressioni per ogni  $\alpha \in C_o^\infty(\Omega)$  e tenendo presente che  $dv_k = J(k) dv$ , dalla proposizione 1.1 (p. 7) si deduce che sussiste l'*identità di PIOLA*

$$\operatorname{div} P[\mathbf{T}_k] = J(k) (\operatorname{div}_k \mathbf{T}_k) \circ k.$$

L'eguaglianza degli integrali al contorno implica poi che

$$\int_{\partial k(P)} (\mathbf{T}_k \mathbf{n}_k) \cdot \mathbf{v}_k d\sigma_k = \int_{\partial P} (P[\mathbf{T}_k] \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma = \int_{\partial P} (\mathbf{T}_k \circ k)(J(k) \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\sigma,$$

e cioè che

$$\int_{\partial k(P)} (\mathbf{T}_k^T \mathbf{v}_k) \cdot (\mathbf{n}_k d\sigma_k) = \int_{\partial P} (\mathbf{T}_k^T \mathbf{v}_k \circ k) \cdot (J(k) \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{n} d\sigma).$$

Ponendo  $\mathbf{T}_k^T \mathbf{v}_k \in C^1(k(\Omega))$  pari ad un arbitrario campo costante con supporto compatto, si deduce nuovamente la formula di NANSO

$$\int_{k(S)} \mathbf{n}_k d\sigma_k = \int_S J(k) \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{n} d\sigma.$$

Dall'eguaglianza degli integrali al contorno, ponendo  $\mathbf{v} \in C^1(T(\Omega))$  pari ad un arbitrario campo costante su  $\bar{\mathcal{P}} \in T(\Omega)$ , si ritrova la proprietà caratteristica della trasformata di PIOLA che esprime l'eguaglianza dei flussi al contorno

$$\int_{\partial P} (P[\mathbf{T}_k])[\mathbf{n}] d\sigma = \int_{\partial k(P)} (\mathbf{T}_k \mathbf{n}_k) d\sigma_k.$$

#### 4. DEFORMAZIONI OMOGENEE

Una trasformazione  $k : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  di una posizione spaziale  $\Omega$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  induce una *deformazione omogenea* se la trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k = Tk$  è costante in  $\Omega$ .

Si noti che una deformazione omogenea di  $\Omega$  può essere estesa a tutto lo spazio  $\mathbb{S}$  assumendo che la trasformazione tangente sia ovunque pari al valore costante che assume in  $\Omega$ . Si può quindi studiare una deformazione omogenea come se interessasse l'intero spazio ambiente.

Nel seguito si assumerà che la posizione spaziale  $\Omega$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  sia una *regione* e cioè un aperto connesso dello spazio ambiente euclideo  $\mathbb{S}$ .

Sussiste allora la seguente semplice caratterizzazione.

**Proposizione 4.1. Mappa di trasferimento affine.** *La deformazione è omogenea se e solo se la mappa di trasferimento  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  è una funzione affine*

$$\mathbf{k}(\mathbf{y}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_k[\mathbf{y} - \mathbf{x}] \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

**Dim.** Se la deformazione è omogenea, integrando lungo una curva  $\mathbf{c}(\lambda)$  in  $\Omega$  con  $\lambda \in [0, 1]$  ed estremi in  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{k} \circ \mathbf{c})(\lambda) d\lambda = \int_0^1 \mathbf{F}_k(\mathbf{c}(\lambda)) \frac{d\mathbf{c}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \\ &= \mathbf{F}_k \int_0^1 \frac{d\mathbf{c}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \mathbf{F}_k[\mathbf{y} - \mathbf{x}]. \end{aligned}$$

Viceversa, se la mappa  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  è affine, la trasformazione tangente è costante.  $\square$

Il prossimo risultato, dovuto all'autore, mostra che per caratterizzare una trasformazione omogenea è in effetti sufficiente richiedere che la sola parte distorcente della trasformazione tangente sia costante.

**Proposizione 4.2. Distorsioni omogenee.** *Una trasformazione  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  di  $\Omega$  è omogenea se e solo se i campi tensoriali destro e sinistro di CAUCHY  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}_k$  sono costanti in  $\Omega$ .*

**Dim.** Dal teorema di decomposizione polare di CAUCHY segue

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{R}_k \mathbf{U}, \quad \mathbf{F}_k^T = \mathbf{U} \mathbf{R}_k^T, \quad \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k = \mathbf{U} \mathbf{R}_k^T \mathbf{R}_k \mathbf{U} = \mathbf{U}^2.$$

Se  $\mathbf{U}$  è costante è costante anche  $\mathbf{U}^2$  e quindi, denotando con  $d$  la derivata direzionale ed assumendo che  $\mathbf{k}$  sia derivabile due volte con continuità, si ha

$$d(\mathbf{U}^2(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = 0 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}.$$

Ora

$$\begin{aligned} d(\mathbf{U}^2(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} &= d(\mathbf{F}_k^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} = \\ &= d(\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) \mathbf{b}) \mathbf{c} = d(d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b}) \mathbf{c} = \\ &= d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b} + d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b} \mathbf{c} = 0. \end{aligned}$$

Tale relazione ne genera altre due scambiando  $\mathbf{a}$  con  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{b}$  con  $\mathbf{c}$ . Si ha quindi che

$$i) \quad d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \mathbf{c} \cdot d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b} + d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b} \mathbf{c} = 0,$$

$$ii) \quad d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{c} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b} + d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{c} \cdot d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{b} \mathbf{a} = 0,$$

$$iii) \quad d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{c} + d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{c} \mathbf{b} = 0.$$



Da esse si deduce che

$$d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{ab} \cdot d\mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{c} = 0 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V,$$

e quindi, essendo  $d\mathbf{k}(\mathbf{x})$  per ipotesi non singolare, segue che

$$d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) \mathbf{ab} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V \iff d^2 \mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Pertanto, in virtù della connessione del dominio  $\Omega$ , risulta

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = T\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_k = \text{costante}.$$

e l'enunciato è dimostrato.  $\square$

Si noti che se  $\mathbf{U}$  è costante, risultando costanti sia  $\mathbf{F}_k$  che  $\mathbf{R}_k$ , anche  $\mathbf{V}_k$  sarà costante. Analogamente se  $\mathbf{V}_k$  è costante lo saranno anche  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{R}_k$  e  $\mathbf{U}$ .

E' facile verificare che

- La composizione  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 \circ \mathbf{k}_2$  di due deformazioni omogenee  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$  con la trasformazioni tangentili  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}_1}$  e  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}_2}$  è omogenea con trasformazione tangente  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{F}_{\mathbf{k}_2}$ . Infatti la regola di derivazione delle funzioni composte

$$d(\mathbf{k}_1 \circ \mathbf{k}_2)(\mathbf{x}) \mathbf{h} = d\mathbf{k}_1(\mathbf{k}_2(\mathbf{x})) d\mathbf{k}_2(\mathbf{x}) \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x}),$$

equivale a  $T\mathbf{k} = T(\mathbf{k}_1 \circ \mathbf{k}_2) = T\mathbf{k}_1 \circ T\mathbf{k}_2$ . Dunque  $\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_{\mathbf{k}_1} \mathbf{F}_{\mathbf{k}_2}$ .

Esempi importanti di deformazioni omogenee sono

- *traslazioni*,
- *rotazioni*,
- *stiramenti*,
- *estensioni semplici*,
- *omotetie*,
- *trasformazioni rigide*.

Tali trasformazioni sono definite e discusse nel seguito.

Se la deformazione è omogenea tutti gli spazi tangentili sono deformati allo stesso modo e la loro deformazione coincide con quella dell'intero spazio  $\mathbb{S}$ .

In particolare le rette sono trasformate in rette.

#### 4.1. Punti fissi, traslazioni, rotazioni e stiramenti

Un *punto fisso* di una trasformazione  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  è un punto  $\mathbf{x}_o \in \Omega$  tale che

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o.$$

Se un punto  $\mathbf{x}_o \in \Omega$  è fisso per due trasformazioni  $\mathbf{k}_1$  e  $\mathbf{k}_2$ , lo è anche per la loro composizione  $\mathbf{k}_1 \circ \mathbf{k}_2$ . Infatti

$$\begin{cases} \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o \\ \mathbf{k}_2(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o \end{cases} \Rightarrow (\mathbf{k}_1 \circ \mathbf{k}_2)(\mathbf{x}_o) = \mathbf{k}_1(\mathbf{k}_2(\mathbf{x}_o)) = \mathbf{k}_1(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o.$$

Una trasformazione omogenea  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  con trasformazione tangente pari all'identità  $\mathbf{F}_k = \mathbf{I}$  è detta una *traslazione*.

Essa induce un campo di spostamento costante nella posizione spaziale  $\Omega$  del corpo ed ha la forma

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}, \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = \mathbf{a}.$$

Se  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  la traslazione degenera nella trasformazione identica  $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Le traslazioni non degeneri non ammettono ovviamente punti fissi.

Scelto ad arbitrio un punto  $\mathbf{x}_o \in \Omega$ , ogni deformazione omogenea

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

può essere univocamente realizzata mediante la composizione di una traslazione e di una deformazione omogenea

$$\mathbf{k}_o(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

con punto fisso  $\mathbf{x}_o$  e trasformazione tangente  $T\mathbf{k}_o$  eguale a  $\mathbf{F}_k$ .

Sussiste precisamente il seguente risultato.

**Proposizione 4.3. Decomposizione delle deformazioni omogenee.** *Sia  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  una deformazione omogenea di  $\Omega$  con trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$  e  $\mathbf{x}_o$  un punto qualsiasi di  $\Omega$ . Sussistono allora le decomposizioni univoche*

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_o \circ \mathbf{k}_D = \mathbf{k}_S \circ \mathbf{k}_o,$$

dove  $\mathbf{k}_o$  è la deformazione omogenea con punto fisso  $\mathbf{x}_o$  e trasformazione tangente  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}_o} = \mathbf{F}_k$  data da

$$\mathbf{k}_o(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o].$$

e  $\mathbf{k}_D$  e  $\mathbf{k}_S$  sono le traslazioni destra e sinistra rispettivamente definite da

$$\mathbf{k}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o), \quad \mathbf{k}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o),$$

con  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o$ .

**Dim.** La decomposizione  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_o \circ \mathbf{k}_D$  impone che

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{x}_o], \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Dunque

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k \mathbf{a} \iff \mathbf{a} = \mathbf{F}_k^{-1}[\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o] = \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o),$$

per cui la *traslazione destra* deve essere pari a

$$\mathbf{k}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{u}(\mathbf{x}_o).$$

La decomposizione  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_S \circ \mathbf{k}_o$  impone invece che

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] + \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Quindi risulta  $\mathbf{a} = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o)$  e l'espressione della *traslazione sinistra* sarà  $\mathbf{k}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o)$ .  $\square$

La decomposizione di una deformazione omogenea bidimensionale è schematicamente illustrata in fig.4.1.

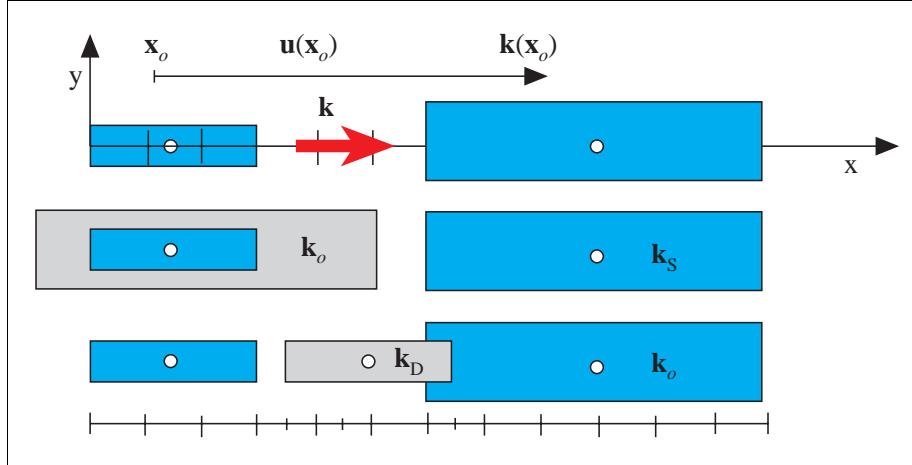


Fig. 4.1

La posizione spaziale  $\Omega$  è il rettangolo  $\{0, -1/2\}, \{3, -1/2\}, \{3, 1/2\}, \{0, 1/2\}$  e la trasformazione è

$$[\mathbf{k}] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La matrice  $[\mathbf{F}_k]$  della trasformazione tangente è il doppio dell'identità e quindi tutte le direzioni sono principali con autovalore 2.

Il punto fisso scelto, di coordinate  $[\mathbf{x}_o] = \{1, 0\}$ , per effetto di  $\mathbf{k}$  si sposta di  $[\mathbf{u}(\mathbf{x}_o)] = \{7, 0\}$ . Gli spostamenti indotti dalle traslazioni destra e sinistra sono  $\mathbf{u}_D(\mathbf{x}) = \{3.5, 0\}$  e  $\mathbf{u}_S(\mathbf{x}) = \{7, 0\}$ .

Sussiste la seguente proprietà.

**Proposizione 4.4. Caratterizzazione delle deformazioni omogenee.** *Una deformazione omogenea  $\mathbf{k}$  è univocamente definita assegnando un punto fisso  $\mathbf{x}_o \in \Omega$  e la trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$ .*

**Dim.** Infatti se  $\mathbf{k}$  è omogenea, in virtù della proposizione 4.1 si ha che

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Inoltre, se  $\mathbf{x}_o$  è fisso, risulta  $\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o$  e quindi  $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]$ .  $\square$

In particolare una deformazione omogenea

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

con punto fisso  $\mathbf{x}_o$  e trasformazione tangente pari ad una isometria propria  $\mathbf{R}_k$  è detta una *rotazione* attorno ad  $\mathbf{x}_o$ .

Una deformazione omogenea  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  del tipo

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{U} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]$$

con punto fisso  $\mathbf{x}_o$  e trasformazione tangente  $\mathbf{U}$  costante, simmetrica e definita positiva è detta uno *stiramento* da  $\mathbf{x}_o$ .

Entrambe le tipologie sono illustrate in fig.4.2.

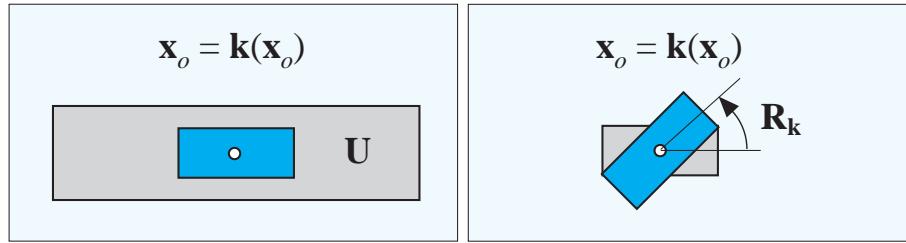


Fig. 4.2

Uno stiramento è anche detto una *deformazione pura* in quanto la deformazione omogenea descritta dalla trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$  è depurata dalla componente di rotazione  $\mathbf{R}_k$ . Ogni deformazione omogenea con punto fisso può essere decomposta in due successive operazioni di rotazione e di stiramento.

**Proposizione 4.5. Decomposizione delle deformazioni omogenee con punto fisso.**  
Una deformazione omogenea  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  con punto fisso  $\mathbf{x}_o \in \Omega$  e con trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$  può essere decomposta come

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \circ \mathbf{k}_U = \mathbf{k}_V \circ \mathbf{k}_R,$$

dove  $\mathbf{k}_R$  è una rotazione attorno a  $\mathbf{x}_o$  con trasformazione tangente  $\mathbf{R}_k$

$$\mathbf{k}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]$$

e  $\mathbf{k}_U$  e  $\mathbf{k}_V$  sono stiramenti da  $\mathbf{x}_o$  con gradienti rispettivamente  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}_k$

$$\mathbf{k}_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{U} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o], \quad \mathbf{k}_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{V}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

essendo  $\mathbf{F}_k = \mathbf{R}_k \mathbf{U} = \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k$  la decomposizione polare di  $\mathbf{F}_k$ .

**Dim.** La trasformazione  $\mathbf{k}_R \circ \mathbf{k}_U$ , composta da deformazioni omogenee, è omogenea ed ha lo stesso punto fisso e la stessa trasformazione tangente di  $\mathbf{k}$ . dunque il risultato segue dalla proposizione 4.4. La stessa argomentazione vale per  $\mathbf{k}_V \circ \mathbf{k}_R$ .  $\square$

La dimostrazione della proposizione 4.5 può anche condursi per verifica diretta e tale esercizio è lasciato al lettore.

## 4.2. Estensioni semplici ed omotetie

Un esempio elementare di stiramento è quello di una *estensione semplice* da  $\mathbf{x}_o$  in direzione  $\mathbf{d}$  con dilatazione  $\varepsilon$

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + [\mathbf{I} + \varepsilon (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d})] [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

in cui  $\mathbf{d}$  è un versore e  $\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$  è il proiettore ortogonale in direzione  $\mathbf{d}$ .

La matrice associata ad  $\mathbf{U} = \mathbf{I} + \varepsilon (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d})$  in un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{d}\}$  è data da

$$[\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Il campo di spostamenti dovuto all'estensione  $\mathbf{k}$  è

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\varepsilon (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d})] [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o].$$

Una estensione semplice viene ad esempio realizzata nella zona centrale di un provino metallico quando si effettua la prova di trazione semplice per valutare il modulo di elasticità longitudinale o modulo di YOUNG del materiale.

Si ha al riguardo la seguente notevole proprietà delle deformazioni con punto fisso.

**Proposizione 4.6. Decomposizione di uno stiramento.** *Uno stiramento  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  da  $\mathbf{x}_o \in \Omega$  con trasformazione tangente  $\mathbf{U}$  simmetrica e definita positiva può essere rappresentato come una composizione di tre estensioni semplici da  $\mathbf{x}_o \in \Omega$ . Le direzioni e le dilatazioni ad esse associate sono i versori di una base di autovettori di  $\mathbf{E} = \mathbf{U} - \mathbf{I}$  ed i rispettivi autovalori.*

**Dim.** Essendo  $\mathbf{E}$  un operatore simmetrico e definito positivo, esiste una base ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  di autovettori di  $\mathbf{E}$  (e di  $\mathbf{U}$ ). La corrispondente rappresentazione spettrale si scrive

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \boldsymbol{\Pi}_i,$$

dove  $\boldsymbol{\Pi}_i = \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i$  è il proiettore ortogonale sull'autovettore  $\mathbf{d}_i$  ed  $\varepsilon_i$  è il relativo autovalore. Risultando  $\boldsymbol{\Pi}_i \boldsymbol{\Pi}_j = \mathbf{O}$  per  $i \neq j$  e  $\boldsymbol{\Pi}_i \boldsymbol{\Pi}_i = \boldsymbol{\Pi}_i$ , posto  $\mathbf{U}_i = \mathbf{I} + \mathbf{E}_i$  si ha che

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{E} = \mathbf{I} + \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 = (\mathbf{I} + \mathbf{E}_1)(\mathbf{I} + \mathbf{E}_2)(\mathbf{I} + \mathbf{E}_3) = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_3.$$

In forza della proposizione 4.4 la deformazione omogenea con punto fisso  $\mathbf{x}_o$  e trasformazione tangente  $\mathbf{U}$  è univocamente definita. Essa sarà dunque la composizione delle tre estensioni semplici con punto fisso  $\mathbf{x}_o$

$$\mathbf{k}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{U}_i [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o], \quad i = 1, 2, 3,$$

prese in un ordine qualsiasi. Quindi  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\pi(1)} \circ \mathbf{k}_{\pi(2)} \circ \mathbf{k}_{\pi(3)}$  con  $\pi$  arbitraria permutazione di  $\{1, 2, 3\}$ .  $\square$

Un altro esempio di deformazioni omogenee con punto fisso è fornito dalle *omotetie* di ragione  $\alpha$  e centro in  $\mathbf{x}_o \in \Omega$

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \alpha \mathbf{I} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{x}_o,$$

a cui corrisponde lo spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\alpha - 1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ . Esse sono quindi caratterizzate dall'avere una trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k = \alpha \mathbf{I}$  proporzionale all'identità.

Tutte le fibre lineari subiscono una dilatazione pari a  $\varepsilon = \alpha - 1$ .

Sono omotetiche le deformazioni di un corpo metallico soggetto a compressione idrostatica e la deformazione termica di un materiale termicamente isotropo.

Le deformazioni omotetiche hanno importanti applicazioni in grafica. E' infatti omotetica la trasformazione che viene effettuata su disegni ed immagini quando si opera uno *zoom* rispetto ad un punto per aumentarne o ridurne la scala.

### 4.3. Trasformazioni rigide

Il corpo subisce una trasformazione *rigida* se il cambiamento di configurazione non induce variazioni della distanza mutua tra le sue particelle.

La mappa  $\mathbf{k}$  di trasferimento da  $\Omega$  soddisfa allora la proprietà

$$\|\mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

La proposizione che segue mostra che tale proprietà definitoria delle trasformazioni rigide equivale a richiedere che la deformazione sia omogenea e che la trasformazione tangente corrispondente sia una isometria.

Si perviene in tal modo a fornire una rappresentazione parametrica delle trasformazioni rigide.

**Proposizione 4.7. Trasformazioni rigide.** Una trasformazione  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  di  $\Omega$  è rigida se e solo se induce una deformazione omogenea in  $\Omega$  e la trasformazione tangente è un'isometria propria  $\mathbf{R}_k$ . Una trasformazione rigida è quindi caratterizzata dalle proprietà equivalenti

$$\begin{cases} i) & \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_k & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ ii) & \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} & \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ iii) & \mathbf{k}(\mathbf{y}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_k[\mathbf{y} - \mathbf{x}] & \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega. \end{cases}$$

**Dim.** Se  $\mathbf{k}$  è rigida, derivando due volte la relazione

$$\|\mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

prima rispetto ad  $\mathbf{x}$  in direzione  $\mathbf{a} \in V$  e quindi rispetto ad  $\mathbf{y}$  in direzione  $\mathbf{b} \in V$  si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{F}_k(\mathbf{x})\mathbf{a} \cdot [\mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})] = \mathbf{a} \cdot [\mathbf{y} - \mathbf{x}] & \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \\ \mathbf{F}_k(\mathbf{x})\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}_k(\mathbf{y})\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} & \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega. \end{cases}$$

Ponendo  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  nella seconda, si ha che  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x})^T \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$  per cui  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x})$  è una isometria. Ne consegue che

$$\mathbf{F}_k(\mathbf{y})^T \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_k(\mathbf{y})^{-1} \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \iff \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_k(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

per cui  $\mathbf{F}_k$  è costante. Poichè  $\det \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) > 0$  si conclude che  $\mathbf{F}_k$  è una rotazione costante. L'implicazione inversa è evidente.  $\square$

La caratterizzazione delle trasformazioni rigide fornita dalla proposizione 4.7 è di fondamentale importanza per poter definire una misura di deformazione (vedasi la proposizione 5.1 (p. 48)). E' facile vedere che nella caratterizzazione delle trasformazioni rigide la condizione  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  posta in termini del tensore destro di CAUCHY può essere sostituita da quella analoga  $\mathbf{V}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  posta in termini del tensore sinistro di CAUCHY.

Si noti poi che il risultato fornito dalla proposizione 4.7 può anche essere dedotto come corollario della proposizione 4.2 (p. 37).

Sia  $\mathbf{c}(\lambda)$  una curva regolare in  $\Omega$  con  $\lambda \in [0, 1]$  e  $(\mathbf{k} \circ \mathbf{c})(\lambda)$  la curva in cui essa è trasformata da  $\mathbf{k}$ . Denotando con un apice la derivata rispetto al parametro  $\lambda$ , le rispettive lunghezze sono date da

$$L(\mathbf{c}) = \int_0^1 \| \mathbf{c}'(\lambda) \| d\lambda, \quad L(\mathbf{k} \circ \mathbf{c}) = \int_0^1 \| (\mathbf{k} \circ \mathbf{c})'(\lambda) \| d\lambda.$$

Una trasformazione rigida può anche essere definita richiedendo che non vari la lunghezza  $L(\mathbf{c})$  di una arbitraria curva  $\mathbf{c} \in \Omega$  e cioè che

$$L(\mathbf{c}) = L(\mathbf{k} \circ \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \Omega.$$

Sussiste infatti la seguente proprietà.

**Proposizione 4.8. Invarianza delle lunghezze.** *Una trasformazione  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  di  $\Omega$  è rigida se e solo se per ogni curva  $\mathbf{c} \in \Omega$  risulta*

$$L(\mathbf{c}) = L(\mathbf{k} \circ \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{c} \in \Omega.$$

**Dim.** In virtù della proposizione 4.7 se  $\mathbf{k}$  è rigida, risulta  $\mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_k$  e quindi  $\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Quindi, essendo

$$(\mathbf{k} \circ \mathbf{c})'(\lambda) = \mathbf{F}_k(\mathbf{c}'(\lambda)), \quad \| \mathbf{F}_k(\mathbf{c}'(\lambda)) \| = \| \mathbf{U}(\mathbf{c}'(\lambda)) \|,$$

ne segue che le curve  $\mathbf{c}$  e  $(\mathbf{k} \circ \mathbf{c})$  hanno la stessa lunghezza.

Viceversa se  $L(\mathbf{c}) = L(\mathbf{k} \circ \mathbf{c})$  dovrà essere

$$\int_0^1 \left[ \| (\mathbf{k} \circ \mathbf{c})'(\lambda) \| - \| \mathbf{c}'(\lambda) \| \right] d\lambda = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in \Omega.$$

La continuità  $C^1$  delle funzioni  $\mathbf{c}$  e  $(\mathbf{k} \circ \mathbf{c})$  implica allora che

$$\|(\mathbf{k} \circ \mathbf{c})'(\lambda)\| = \|\mathbf{c}'(\lambda)\|, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall \mathbf{c} \in \Omega.$$

Posto  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(\lambda)$  e  $\mathbf{h} = \mathbf{c}'(\lambda)$ , si ha quindi

$$\|F_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\mathbf{h}\| = \|U(\mathbf{x})\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \forall \mathbf{h} \in V,$$

e pertanto  $U(\mathbf{x})$  è una isometria propria. La simmetria di  $U(\mathbf{x})$  implica quindi che  $U(\mathbf{x}) = U^{-1}(\mathbf{x})$  e cioè che  $U(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

La proposizione 4.7 assicura allora che  $\mathbf{k}$  è rigida.  $\square$

Dalla proposizione 4.3 (p. 39) si deduce la seguente formula di decomposizione di una trasformazione rigida in una traslazione ed una rotazione attorno ad un punto.

**Proposizione 4.9. Prima formula di decomposizione.** *Scelto ad arbitrio un punto  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$ , una trasformazione rigida  $\mathbf{k} : \Omega \mapsto \mathbb{S}$  può essere decomposta nella forma*

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_S \circ \mathbf{k}_R = \mathbf{k}_R \circ \mathbf{k}_D,$$

con  $\mathbf{k}_R$  rotazione attorno al punto  $\mathbf{x}_o$

$$\mathbf{k}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

e  $\mathbf{k}_S$  e  $\mathbf{k}_D$  traslazioni sinistra e destra definite da

$$\mathbf{k}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{R}_{\mathbf{k}}^T \mathbf{u}(\mathbf{x}_o), \quad \mathbf{k}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o),$$

essendo  $\mathbf{u}$  il campo di spostamenti associato alla trasformazione  $\mathbf{k}$ .  $\square$

Le decomposizioni

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \circ \mathbf{k}_D = \mathbf{k}_S \circ \mathbf{k}_R,$$

sono illustrate in fig.4.3 rispettivamente ai numeri 1 e 2 dove  $\alpha$  è l'angolo di rotazione corrispondente a  $\mathbf{R}_{\mathbf{k}}$ .

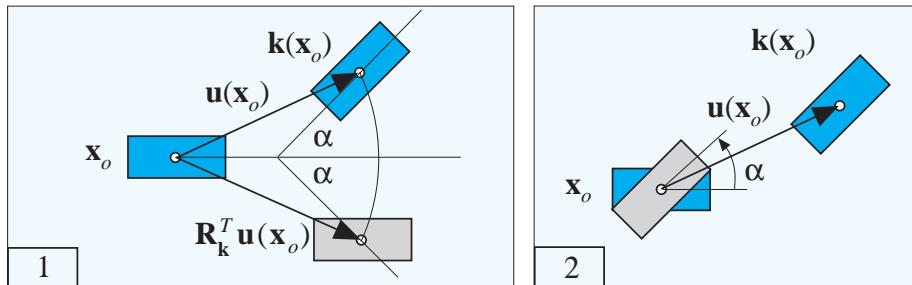


Fig. 4.3

Esiste inoltre un'altra possibilità di decomporre una trasformazione rigida, come mostrato nella proposizione che segue, dovuta all'autore.

**Proposizione 4.10. Seconda formula di decomposizione.** *Scelto ad arbitrio un punto  $\mathbf{x}_o$  una trasformazione rigida  $\mathbf{k}$  può essere decomposta nella forma*

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}_S \circ \bar{\mathbf{k}}_R = \bar{\mathbf{k}}_R \circ \bar{\mathbf{k}}_D,$$

con  $\bar{\mathbf{k}}_R$  rotazione attorno al punto  $\mathbf{k}(\mathbf{x}_o)$  definita da

$$\bar{\mathbf{k}}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} [\mathbf{x} - \mathbf{k}(\mathbf{x}_o)],$$

e  $\bar{\mathbf{k}}_S$  e  $\bar{\mathbf{k}}_D$  traslazioni sinistra e destra definite da

$$\bar{\mathbf{k}}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o), \quad \bar{\mathbf{k}}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{x}_o).$$

**Dim.** Ponendo  $\bar{\mathbf{k}}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$  si ha che

$$(\bar{\mathbf{k}}_S \circ \bar{\mathbf{k}}_R)(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} [\mathbf{x} - \mathbf{k}(\mathbf{x}_o)] + \mathbf{a}.$$

La prima formula si ottiene osservando che, essendo

$$\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

$(\bar{\mathbf{k}}_S \circ \bar{\mathbf{k}}_R)$  coincide con  $\mathbf{k}$  se e solo se  $\mathbf{a} = \mathbf{R}_{\mathbf{k}} [\mathbf{k}(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o] = \mathbf{R}_{\mathbf{k}} \mathbf{u}(\mathbf{x}_o)$ .

Ponendo poi  $\bar{\mathbf{k}}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{a}$  si ha che

$$(\bar{\mathbf{k}}_R \circ \bar{\mathbf{k}}_D)(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{R}_{\mathbf{k}} [\mathbf{x} + \mathbf{a} - \mathbf{k}(\mathbf{x}_o)].$$

Dunque  $\bar{\mathbf{k}}_R \circ \bar{\mathbf{k}}_D$  risulta eguale a  $\mathbf{k}$  se e solo se  $\mathbf{a} = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) - \mathbf{x}_o = \mathbf{u}(\mathbf{x}_o)$ .  $\square$

Si noti che  $\bar{\mathbf{k}}_D = \mathbf{k}_S$ . Le decomposizioni

$$\mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}_R \circ \bar{\mathbf{k}}_D = \bar{\mathbf{k}}_S \circ \bar{\mathbf{k}}_R,$$

sono illustrate in fig.4.4 rispettivamente ai numeri 1 e 2.

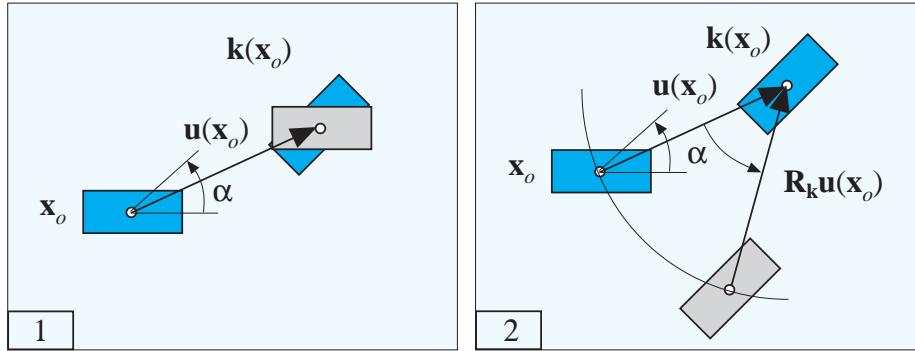


Fig. 4.4

#### 4.4. Synopsis cinematica

i) $\mathbf{F}_k = T\mathbf{k} = \mathbf{R}_k \mathbf{U} = \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k$	<i>decomposizione polare</i>
ii) $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]$	<i>deformazione omogenea</i>
$\mathbf{k} = \mathbf{k}_o \circ \mathbf{k}_D = \mathbf{k}_S \circ \mathbf{k}_o$	formula di decomposizione
$\begin{cases} \mathbf{k}_o = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \\ \mathbf{k}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \\ \mathbf{k}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \end{cases}$	deformazione omogenea da $\mathbf{x}_o$ traslazione destra traslazione sinistra
iii) $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{F}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]$	<i>deformazione omogenea da <math>\mathbf{x}_o</math></i>
$\mathbf{k} = \mathbf{k}_R \circ \mathbf{k}_U = \mathbf{k}_V \circ \mathbf{k}_R$	formula di decomposizione
$\begin{cases} \mathbf{k}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \\ \mathbf{k}_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{U} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \\ \mathbf{k}_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{V}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \end{cases}$	rotazione attorno ad $\mathbf{x}_o$ stiramento destro da $\mathbf{x}_o$ stiramento sinistro da $\mathbf{x}_o$
$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\varepsilon (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d})] [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\alpha - 1)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \end{cases}$	estensione semplice da $\mathbf{x}_o$ omotetia di ragione $\alpha$ e centro in $\mathbf{x}_o$
$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\pi(1)} \circ \mathbf{k}_{\pi(2)} \circ \mathbf{k}_{\pi(3)} \\ \mathbf{k}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \varepsilon_i (\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i) [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \end{cases}$	decomposizione dello stiramento stiramento i-esimo $i = 1, 2, 3$
iv) $\ \mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})\  = \ \mathbf{y} - \mathbf{x}\ $	<i>trasformazioni rigide</i>
$\begin{cases} \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{R}_k \\ \mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \\ \mathbf{k}(\mathbf{y}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) + \mathbf{R}_k (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ \mathbf{L}(\mathbf{c}) = \mathbf{L}(\mathbf{k} \circ \mathbf{c}) \end{cases}$	definizioni equivalenti
$\begin{cases} \mathbf{k} = \mathbf{k}_S \circ \mathbf{k}_R = \mathbf{k}_R \circ \mathbf{k}_D \\ \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}_S \circ \bar{\mathbf{k}}_R = \bar{\mathbf{k}}_R \circ \bar{\mathbf{k}}_D \end{cases}$	formule di decomposizione
$\begin{cases} \mathbf{k}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_o + \mathbf{R}_k [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \\ \mathbf{k}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{R}_k^T \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \\ \mathbf{k}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \end{cases}$	rotazione attorno ad $\mathbf{x}_o$ traslazione destra traslazione sinistra
$\begin{cases} \bar{\mathbf{k}}_R(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}_o) + \mathbf{R}_k [\mathbf{x} - \mathbf{k}(\mathbf{x}_o)] \\ \bar{\mathbf{k}}_D(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \\ \bar{\mathbf{k}}_S(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{R}_k \mathbf{u}(\mathbf{x}_o) \end{cases}$	rotazione attorno a $\mathbf{k}(\mathbf{x}_o)$ traslazione destra traslazione sinistra

## 5. MISURE DI DEFORMAZIONE

Si consideri la famiglia

$$\mathcal{K} := \{\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}\},$$

delle mappe di trasferimento  $\mathbf{k}$  che sono diffeomorfismi di classe  $C^k$  con  $k \geq 1$  da una regione  $\Omega = \text{dom } \mathbf{k} \subset \mathbb{S}$  dello spazio euclideo tridimensionale su un'altra regione  $\mathbf{k}(\Omega) \subset \mathbb{S}$ . Si denoterà con  $\mathbf{k}|_{\mathcal{P}}$  la restrizione di  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  a  $\mathcal{P} \subset \Omega$ .

- Sia quindi  $\mathbb{D}$  un'applicazione che ad ogni elemento  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  associa un campo  $\mathbb{D}(\mathbf{k})$  (scalare, vettoriale o tensoriale) su  $\Omega = \text{dom } \mathbf{k}$  o su  $\mathbf{k}(\Omega)$ .
- L'applicazione  $\mathbb{D}$  è un *operatore di deformazione* se gode della proprietà

$$\mathbb{D}(\mathbf{k}) = \mathbf{o} \iff \|\mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Il campo  $\mathbb{D}(\mathbf{k})$  si deve quindi annullare se e solo se la trasformazione  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  è rigida. Il campo  $\mathbb{D}(\mathbf{k})$  è detto allora una *misura di deformazione*.

Con riferimento al continuo di CAUCHY si osservi che la trasformazione  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  induce in ogni punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  una deformazione omogenea dello spazio tangente  $\mathbb{T}_{\Omega}(\mathbf{x})$  con punto fisso nell'origine

$$\mathbf{k}_{\mathbb{T}_{\Omega}(\mathbf{x})}(\mathbf{h}) = \mathbf{F}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) [\mathbf{h}], \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega}(\mathbf{x}).$$

In virtù del teorema di decomposizione polare tale deformazione omogenea può essere decomposta in una rotazione ed una deformazione pura

$$\mathbf{k}_{\mathbb{T}_{\Omega}(\mathbf{x})}(\mathbf{h}) = \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \mathbf{U}(\mathbf{x}) [\mathbf{h}] = \mathbf{V}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbf{x})) \mathbf{R}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) [\mathbf{h}], \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega}(\mathbf{x}).$$

La caratterizzazione delle trasformazioni rigide fornita nella proposizione 4.7 (p. 44) è alla base dello studio delle misure di deformazione. Essa equivale infatti alla seguente affermazione.

**Proposizione 5.1. Misure di deformazione.** *Una trasformazione  $\mathbf{k} \in \mathcal{K}$  è rigida se e solo se per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  la trasformazione tangente  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}} = T\mathbf{k} : \mathbb{T}_{\Omega} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}$  è omogenea e rigida. Ciò equivale a richiedere che sia*

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{x}) &= \mathbf{I}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{V}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}(\mathbf{x})) &= \mathbf{I}_{\mathbf{k}}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{k}(\Omega), \end{aligned}$$

e cioè che i campi tensoriali  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}_{\mathbf{k}}$ , destro e sinistro di CAUCHY, associati alla trasformazione tangente  $\mathbf{F}_{\mathbf{k}} = T\mathbf{k}$  siano costanti e rispettivamente pari alle identità  $\mathbf{I} \in \mathbf{L}\{\mathbb{T}_{\Omega}; \mathbb{T}_{\Omega}\}$  e  $\mathbf{I}_{\mathbf{k}} \in \mathbf{L}\{\mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}; \mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}\}$ .  $\square$

I campi tensoriali simmetrici  $\mathbf{U} - \mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}_k - \mathbf{I}_k$  costituiscono dunque misure di deformazione.

I tensori destro e sinistro di CAUCHY  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}_k$  sono funzioni irrazionali della trasformazione tangente  $\mathbf{F}_k$  della mappa di trasferimento  $k$  in quanto rispettivamente definiti come radice quadrata dei tensori

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k &\in L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega), \\ \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^T &\in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)}).\end{aligned}$$

E' più conveniente adottare misure di deformazione espresse in termini di tensori che siano funzioni razionali della trasformazione tangente alla mappa di trasferimento. A tal fine si considerino i tensori

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k, \quad \text{tensore di PIOLA-GREEN}, \\ \mathbf{B}_k &= \mathbf{V}_k^2 = \mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^T, \quad \text{tensore di FINGER}, \\ \mathbf{C}^{-1} &= \mathbf{U}^{-2} = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{F}_k^{-T}, \quad \text{tensore PIOLA}, \\ \mathbf{B}_k^{-1} &= \mathbf{V}_k^{-2} = \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{F}_k^{-1}, \quad \text{tensore di CAUCHY}.\end{aligned}$$

- Il tensore  $\mathbf{B}_k^{-1}$  è stato introdotto da CAUCHY ([7], 1827).
- Il tensore  $\mathbf{C}^{-1}$  è stato introdotto da G. PIOLA ([9], 1833).
- Il tensore  $\mathbf{C}$  è stato introdotto da G. PIOLA ([10], 1836 e [14], 1848) e discusso ed interpretato da G. GREEN ([11], 1841).
- Il tensore  $\mathbf{B}_k$  è stato introdotto da J. FINGER ([27], 1894).

In letteratura tensori  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{B}_k$  sono anche detti rispettivamente *tensore destro* e *tensore sinistro* di CAUCHY-GREEN.

■ La *misura di deformazione* di GREEN [11]  $\mathbf{E} \in L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  è definita da

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}).$$

L'espressione in termini del campo di spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$  è

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} ((d\mathbf{u} + \mathbf{I})^T (d\mathbf{u} + \mathbf{I}) - \mathbf{I}) = \\ &= \frac{1}{2} [d\mathbf{u} + (d\mathbf{u})^T] + \frac{1}{2} (d\mathbf{u})^T d\mathbf{u},\end{aligned}$$

dove  $\mathbf{I}(\mathbf{x})$  è l'identità sullo spazio tangente  $\mathbb{T}_\Omega$ .

L'approssimazione lineare di  $\mathbf{E}$  è pari alla parte simmetrica della derivata del campo di spostamenti

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [d\mathbf{u} + (d\mathbf{u})^T] = \text{sym}(d\mathbf{u}),$$

ed è detta tensore della *deformazione infinitesima*.

La misura di deformazione corrispondente al tensore di CAUCHY  $\mathbf{B}_k^{-1}$  è stata proposta da E. ALMANSI ([34], 1911).

■ La *misura di deformazione di ALMANSI*  $\mathbf{A}_k \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)})$  è definita da

$$\mathbf{A}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{I}_k - \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{F}_k^{-1}) = \frac{1}{2} [d_k \mathbf{u}_k + (d_k \mathbf{u}_k)^T] - \frac{1}{2} (d_k \mathbf{u}_k)^T (d_k \mathbf{u}_k),$$

dove  $\mathbf{I}_k(k(x))$  è l'identità sullo spazio tangente  $\mathbb{T}_{k(\Omega)}(k(x))$  e

$$\mathbf{u}_k(y) = y - k^{-1}(y), \quad y \in k(\Omega)$$

è il campo di spostamenti definito sulla posizione spaziale trasformata  $k(\Omega)$ .

**Osservazione 5.1.** La definizione dell'operatore di deformazione può essere generalizzata formulandola in termini geometrici differenziali. Ciò consente di pervenire a risultati fondati sui concetti e sui metodi della geometria differenziale e di per rendere applicabile la teoria al caso generale in cui il corpo è una sottovarietà differenziabile di una varietà ambiente. L'operatore di deformazione è allora un'applicazione definita sull'insieme  $\mathcal{K}$  dei diffeomorfismi tra varietà differenziabili.

Si premettono a tal fine alcune definizioni basilari, rinviano alla sezione 12 (p. 129) per approfondimenti e dimostrazioni. Siano

- $\mathbb{M}, \mathbb{N}$  varietà differenziabili,
- $k : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  un diffeomorfismo da  $\mathbb{M}$  su  $\mathbb{N}$ ,
- $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  una coppia di campi vettoriali tangentì alla varietà  $\mathbb{M}$ .

La mappa tangente  $Tk : \mathbb{T}_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  trasforma la fibra lineare  $\mathbf{u}(x) \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}(x)$  con base in  $x \in \mathbb{M}$  nella fibra lineare  $Tk[\mathbf{u}(x)] \in \mathbb{T}_{\mathbb{N}}(k(x))$  avente base nel punto  $k(x) \in k(\mathbb{M})$ . Allora

■ La *spinta* di un campo scalare  $f : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}$  è il campo scalare  $k_* f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  definito da  $(k_* f) \circ k := f$ .

■ La *spinta*  $k_* \mathbf{u} \in \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  secondo  $k : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  del campo vettoriale  $\mathbf{u} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è il campo vettoriale costituito dai vettori tangentì trasformati dalla mappa tangente.

In termini della mappa tangente definita nella sezione 2.2 (p. 17), si ha che

$$(k_* \mathbf{u}) \circ k := Tk[\mathbf{u}].$$

■ La *spinta inversa* di un campo vettoriale  $\mathbf{u}_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  lungo  $k : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  è la spinta secondo la mappa inversa  $k^{-1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{M}$  ed è pertanto definita da

$$(k^* \mathbf{u}_k) \circ k^{-1} := (Tk)^{-1}[\mathbf{u}_k].$$

■ La *spinta* di un campo tensoriale  $\mathbf{a} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{R})$  lungo  $k : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  è il campo tensoriale  $k_* \mathbf{a} : \mathbb{N} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \mathbb{T}_{\mathbb{N}}; \mathbb{R})$  definito da

$$\begin{aligned} (k_* \mathbf{a})(k_* \mathbf{u}, k_* \mathbf{v}) &:= k_* [\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] = \\ &= \mathbf{a}(Tk[\mathbf{u}], Tk[\mathbf{v}]), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}. \end{aligned}$$

■ La *spinta inversa* di un campo tensoriale  $\mathbf{a}_k : \mathbb{N} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \mathbb{T}_{\mathbb{N}}; \mathfrak{R})$  lungo  $k : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  è il campo tensoriale  $k^* \mathbf{a}_k : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R})$  definito da

$$\begin{aligned} (k^* \mathbf{a}_k)(k^* \mathbf{u}_k, k^* \mathbf{v}_k) &:= k^* [\mathbf{a}_k(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k)] = \\ &= \mathbf{a}_k(Tk^{-1}[\mathbf{u}_k], Tk^{-1}[\mathbf{v}_k]), \quad \forall \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Le misure di deformazione di GREEN e di ALMANSI sono suscettibili di una diretta interpretazione in termini di spinte del tensore metrico.

Si consideri infatti

- uno spazio ambiente costituito da una varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{R}, g\}$  con il campo di tensori metrici  $g : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathfrak{R})$ ,
- una sottovarietà  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}$  dotata della metrica indotta da quella di  $\{\mathbb{R}, g\}$ ,
- $k : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  un diffeomorfismo da  $\text{dom } k = \mathbb{M}$  su  $k(\mathbb{M})$ .

Essendo per definizione  $\mathbf{F}_k = Tk$  risulta

$$g(\mathbf{F}_k \mathbf{u}, \mathbf{F}_k \mathbf{v}) = g(\mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k \mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

Pertanto la semidifferenza  $\frac{1}{2}(k^* g - g)$ , tra la spinta inversa del tensore metrico ed il tensore metrico, è pari a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [g(\mathbf{F}_k \mathbf{u}, \mathbf{F}_k \mathbf{v}) - g(\mathbf{u}, \mathbf{v})] &= \frac{1}{2} g((\mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k - \mathbf{I}) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} g((\mathbf{C} - \mathbf{I}) \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \\ &= g(\mathbf{E} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = e(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \end{aligned}$$

dove  $e \in L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}^2; \mathfrak{R})$  è la forma due volte covariante del tensore *misura di deformazione* di GREEN che è dunque pari alla metà della variazione di metrica locale prodotta dalla trasformazione  $k$ .

La *misura di deformazione* di ALMANSI è suscettibile di un'analogia interpretazione facendo riferimento alla trasformazione inversa  $k^{-1}$ .

Essendo infatti  $\mathbf{F}_k^{-1} = Tk^{-1}$ , la semidifferenza  $\frac{1}{2}(g - k_* g)$  tra il tensore metrico e la spinta del tensore metrico è data da

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [g(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) - g(\mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{u}_k, \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{v}_k)] &= \frac{1}{2} g((\mathbf{I}_k - \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{F}_k^{-1}) \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \\ &= g(\mathbf{A}_k \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{a}_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k \in \mathbb{T}_{k(\Omega)}, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{a}_k \in L(\mathbb{T}_{\Omega}^2; \mathfrak{R})$  è la forma due volte covariante del tensore di ALMANSI.

La misura di deformazione di ALMANSI è dunque pari alla metà della variazione di metrica locale prodotta dalla trasformazione inversa  $k^{-1}$ .

I campi tensoriali di GREEN e di ALMANSI sono uno la spinta dell'altro secondo le trasformazioni  $k$  e  $k^{-1}$ . Infatti, in termini dei tensori due volte covarianti, si ha che

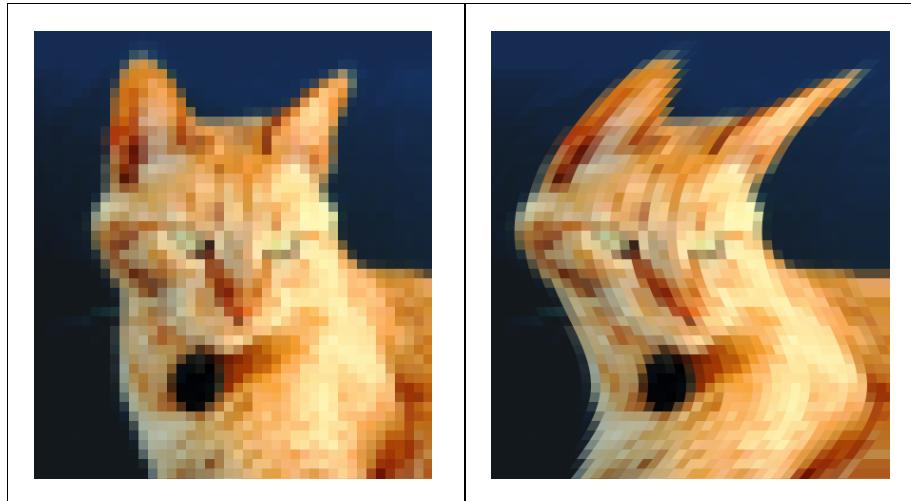
$$e = k_* \mathbf{a}_k, \quad \mathbf{a}_k = k^* e.$$

Si noti infine che le misure di deformazione basate sui tensori di deformazione di FINGER  $\mathbf{B}_k$  e di PIOLA  $\mathbf{C}^{-1}$  non sono suscettibili di interpretazione in termini di spinte. ■

### 5.1. Congruenza delle deformazioni finite

Si consideri un corpo  $\mathbb{T}_B$ , che per semplicità di rappresentazione si supporrà bidimensionale, e si immagini di suddividere il corpo  $\mathbb{T}_B$  in un gran numero di elementi molto piccoli in guisa delle tessere di un *mosaico*, come mostrato in fig.5.1.

Ogni tessera costituisce un'approssimazione dello spazio di fibre lineari tangenti al corpo in corrispondenza di una particella.



Se si deforma ogni tessera senza tener conto delle deformazioni delle altre, sarà in generale impossibile ricomporre il mosaico mediante rotazioni e traslazioni delle tessere senza che si verifichino vuoti o sovrapposizioni di tessere adiacenti.

E' naturale allora chiedersi quale condizione di *congruenza* debba essere rispettata, nel deformare le singole tessere, affinchè ciò non si verifichi ed il mosaico appaia continuo, come in fig. 5.2.

Per comprendere la rilevanza applicativa di tale questione si supponga che le tessere siano elasticamente deformabili.

Se, deformate le tessere, il mosaico non può essere ricomposto con mere trasformazioni rigide delle tessere, sarà necessario forzare le tessere in modo che per via della deformazione elastica vengano ricoperti i vuoti ed evitate le sovrapposizioni. Nel mosaico ripristinato sarà presente uno stato di coazione dovuto alle reciproche azioni che si esercitano tra le tessere. Se invece, dopo la deformazione imposta alle tessere, il mosaico può essere ricomposto solo mediante trasformazioni rigide delle tessere, in esso non si genera uno stato di coazione.

La problematica illustrata va sotto il nome di *congruenza interna* in quanto l'attenzione è rivolta solo alla posizione mutua delle tessere.

E' importante considerare un caso più generale in cui il bordo del mosaico è vincolato, in tutto od in parte ad essere solidale ad una cornice rigida, eventualmente soggetta ad una assegnata deformazione. Nel ricomporre il mosaico si avrà in tal caso meno libertà d'azione. La condizione da imporre alle deformazioni delle tessere risulterà infatti più stringente poichè si dovrà tener conto, oltre che di quella interna, anche della *congruenza esterna* per assicurare il rispetto del vincolo imposto dalla cornice di bordo.

Queste osservazioni giocano, come si vedrà, un ruolo di fondamentale importanza in meccanica delle strutture e saranno approfonditamente studiate nel seguito con riferimento al caso particolare, ma di grande rilevanza nelle applicazioni, di piccole deformazioni e spostamenti.

Si darà qui solo un cenno alla questione della congruenza interna in presenza di deformazioni finite.

La trattazione generale richiede strumenti raffinati di geometria differenziale ed il problema della congruenza in senso globale costituisce un problema ancora aperto.

Il problema della congruenza interna può essere così formalizzato.

In una posizione spaziale  $\mathbb{T}_\Omega$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  si assegna il campo tensoriale simmetrico e definito positivo  $\mathbf{C} \in L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  che in ogni spazio tangente  $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  induce la trasformazione delle fibre lineari  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$

$$\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x}), \quad \text{con} \quad \mathbf{U} = \mathbf{C}^{1/2}.$$

Il tensore  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  agisce quindi localmente come un tensore di deformazione di PIOLA-GREEN.

Il campo di deformazione indotto da  $\mathbf{C}$  nelle fibre del corpo è *congruente* se esiste una trasformazione  $\mathbf{k}$  che manda la posizione spaziale  $\Omega$  nella posizione spaziale  $\mathbf{k}(\Omega)$  in modo tale che il tensore di deformazione di PIOLA-GREEN ad essa associato in ogni punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  sia  $\mathbf{C}(\mathbf{x})$  e cioè tale che

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{F}_k = T\mathbf{k}.$$

E' naturale chiedersi allora quale sia la condizione da imporre al campo tensoriale  $\mathbf{C}$  affinchè sia congruente.

Una risposta a tale questione può essere data, almeno in senso locale, mediante la nozione di curvatura di una varietà di RIEMANN<sup>10</sup>.

Seguendo tale approccio, la prossima proposizione fornisce un criterio locale di congruenza della misura di deformazione finita secondo GREEN.

Per una trattazione dettagliata si rinvia alla sezione 12.5 (p. 148), dove sono forniti elementi di teoria delle varietà differenziabili di RIEMANN, è svolta la dimostrazione della necessità del criterio ed è indicata la via dimostrativa della sufficienza della condizione di congruenza. Ulteriori considerazioni e approfondimenti possono essere trovati in [41], [45], [50], [52], [55], [53].

---

<sup>10</sup> GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866). Allievo di JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855) succedette a JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859) come professore di matematica a Göttingen. Fondamentali i suoi contributi alla geometria differenziale ed alla teoria delle funzioni di variabile complessa.



**Proposizione 5.2. Condizione di congruenza locale.** *Il campo di deformazione del corpo  $\mathbb{T}_B$ , rappresentato dal tensore  $\mathbf{C}$  definito nella posizione spaziale  $\Omega$ , è congruente in un intorno di ciascun punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  se e solo se la varietà di RIEMANN  $\{\Omega, \mathbf{C}\}$  con tensore metrico  $\mathbf{C}$  è piatta e cioè se il campo tensoriale di curvatura della varietà di RIEMANN è nullo.*  $\square$

Le componenti del campo tensoriale curvatura sono fornite dalla formula

$$\mathbf{R}[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B, \mathbf{E}_C, \mathbf{E}_D] = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{E}_A} \nabla_{\mathbf{E}_B} \mathbf{E}_C - \nabla_{\mathbf{E}_B} \nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_C - \nabla_{[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B]} \mathbf{E}_C, \mathbf{E}_D),$$

dove

- $\{\mathbf{E}_A\}$ ,  $A = 1, \dots, n$  è la base locale indotta dal sistema di coordinate,
- $\nabla$  è la *connessione di LEVI-CIVITA* (vedi sezione 12.6 (p. 149)) associata al tensore metrico

$$\mathbf{g}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) := (\mathbf{Ch}) \cdot \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V},$$

- $[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B]$  è la *parentesi di JACOBI-LIE (commutatore)* relativa ai campi vettoriali tangentì alle linee coordinate (vedi sezione 12.2 (p. 134)).

Si pone

$$\mathbf{R}_{ABCD} := \mathbf{R}[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B, \mathbf{E}_C, \mathbf{E}_D],$$

$$\mathbf{G}_{AB} := \mathbf{g}(\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B) = \mathbf{C}_{AB},$$

$$\Gamma_{AB}^C \mathbf{E}_C := \nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_B, \quad \text{simboli di CHRISTOFFEL},$$

dove  $\nabla_{\mathbf{E}_A}$  è la *derivata covariante* secondo il campo  $\mathbf{E}_A$ . Tenendo conto che, in forza della proposizione 12.7 (p. 138), risulta

$$[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \mathbf{o},$$

si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ABCD} &= \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{E}_A}(\Gamma_{BC}^E \mathbf{E}_E) - \nabla_{\mathbf{E}_B}(\Gamma_{AC}^E \mathbf{E}_E), \mathbf{E}_D) = \\ &= \mathbf{g}(\Gamma_{BC/A}^E \mathbf{E}_E + \Gamma_{BC}^E \Gamma_{AE}^F \mathbf{E}_F - \Gamma_{AC/B}^E \mathbf{E}_E - \Gamma_{AC}^E \Gamma_{BE}^F \mathbf{E}_F, \mathbf{E}_D) = \\ &= \mathbf{g}(\Gamma_{BC/A}^E \mathbf{E}_E + \Gamma_{BC}^F \Gamma_{AF}^E \mathbf{E}_E - \Gamma_{AC/B}^E \mathbf{E}_E - \Gamma_{AC}^F \Gamma_{BF}^E \mathbf{E}_E, \mathbf{E}_D) = \\ &= \mathbf{G}_{ED} [\Gamma_{BC/A}^E - \Gamma_{AC/B}^E + \Gamma_{BC}^F \Gamma_{AF}^E - \Gamma_{AC}^F \Gamma_{BF}^E]. \end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni che forniscono i simboli di CHRISTOFFEL in funzione del tensore metrico

$$\Gamma_{AB}^D \mathbf{G}_{CD} = \mathbf{G}_{BC/A} + \mathbf{G}_{CA/B} - \mathbf{G}_{AB/C},$$

si perviene alle espressioni delle componenti del tensore curvatura in termini delle componenti del tensore metrico e delle sue derivate (vedi [41]).

## 6. CAMBIAMENTO DI OSSERVATORE

Si considerino due osservatori  $O$  e  $O^*$  in moto relativo. Un medesimo processo evolutivo di un corpo  $\mathbb{T}_B$  è visto in modo diverso dai due osservatori per i quali le leggi di evoluzione risultano rispettivamente  $\chi_t : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  e  $\chi_t^* : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$ .

Nell'ambito della meccanica classica i sistemi di riferimento solidali ai due osservatori subiscono, l'uno rispetto all'altro, una trasformazione rigida variabile col tempo.

Le scale dei tempi sono le medesime per entrambi gli osservatori, a meno di una inessenziale costante additiva che per semplicità si assume nulla.

All'istante  $t \in I$  la posizione dell'osservatore  $O^*$  rispetto all'osservatore  $O$  è caratterizzata da una traslazione  $-\mathbf{c}(t) \in V$  e da un'isometria

$$\mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}^{-1}(t) \in L(V; V).$$

Allora l'osservatore  $O^*$  vede lo spazio solidale all'osservatore  $O$  subire la trasformazione rigida  $\xi_t : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  descritta da

$$\xi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x}], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}.$$

La trasformazione rigida  $\xi_t(\mathbf{x})$  è caratterizzata da una traslazione  $\mathbf{c}_t$  opposta a quella dell'osservatore  $O^*$  rispetto all'osservatore  $O$  e da un'isometria  $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}^{TT}(t)$  inversa di quella dell'osservatore  $O^*$  rispetto all'osservatore  $O$ .

- Le mappe di posizionamento  $\chi_t : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  e  $\chi_t^* : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  che descrivono il processo evolutivo del corpo  $\mathbb{T}_B$  visto dai due osservatori, sono legate dalla relazione

$$\chi_t^*(\mathbf{p}) = \xi_t(\chi_t(\mathbf{p})) \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{B}, \quad \forall t \in I,$$

che esplicitamente si scrive

$$\chi_t^*(\mathbf{p}) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)[\chi_t(\mathbf{p})], \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{B}.$$

Il processo  $\chi_t^*$  si ottiene quindi dal processo  $\chi_t$  componendolo, istante per istante, con la successiva trasformazione rigida  $\xi_t : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$

$$\chi_t^* = \xi_t \circ \chi_t, \quad \forall t \in I.$$

Applicando la regola della derivazione a catena si ha

$$T\chi_t^* = T\xi_t \circ T\chi_t.$$

Essendo  $T\xi_t = \mathbf{Q}(t)$  e ponendo  $\mathbf{F}_\chi = T\chi_t$  e  $\mathbf{F}_\chi^* = T\chi_t^*$  tra le due trasformazioni tangenti sussiste la relazione

$$\mathbf{F}_\chi^*(\mathbf{p}) = \mathbf{Q}_t \mathbf{F}_\chi(\mathbf{p}).$$

Si noti che, essendo  $\det \mathbf{Q} = 1$ , risulta

$$\det \mathbf{F}_x^*(\mathbf{p}) = \det \mathbf{F}_x(\mathbf{p}).$$

Dal teorema di decomposizione polare, proposizione 3.5 (p. 26), omettendo gli argomenti si ha poi che

$$\mathbf{F}_x = \mathbf{R}_x \mathbf{U}_B = \mathbf{V}_x \mathbf{R}_x,$$

$$\mathbf{F}_x^* = \mathbf{R}_x^* \mathbf{U}_B^* = \mathbf{V}_x^* \mathbf{R}_x^*,$$

dove

$$\mathbf{F}_x \in L(\mathbb{T}_B; \mathbb{T}_S),$$

$$\mathbf{R}_x \in L(\mathbb{T}_B; \mathbb{T}_S),$$

$$\mathbf{U}_B \in L(\mathbb{T}_B; \mathbb{T}_B),$$

$$\mathbf{V}_x \in L(\mathbb{T}_S; \mathbb{T}_S).$$

Ne segue che

$$\mathbf{R}_x^* \mathbf{U}_B^* = \mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{U}_B.$$

Poichè  $\mathbf{Q} \mathbf{R}_x$  è un'isometria propria, per l'unicità della decomposizione polare si ha che

$$\mathbf{U}_B^* = \mathbf{U}_B, \quad \mathbf{R}_x^* = \mathbf{Q} \mathbf{R}_x,$$

e quindi anche che

$$\mathbf{V}_x^* = \mathbf{R}_x^* \mathbf{U}_B^* \mathbf{R}_x^{*T} = \mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{U}_B \mathbf{R}_x^T \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{V}_x \mathbf{Q}^T.$$

Dunque il tensore destro di CAUCHY è invariante rispetto ad un cambiamento di osservatore da  $O$  ad  $O^*$  mentre il tensore sinistro subisce una rotazione  $\mathbf{Q}(t)$  inversa di quella dell'osservatore  $O^*$  rispetto all'osservatore  $O$ .

**Osservazione 6.1.** Si noti che le posizioni  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}^*$  di una stessa particella vista dagli osservatori  $O$  e  $O^*$  sono legate dalla trasformazione rigida  $\mathbf{x}^* = \xi_t(\mathbf{x})$  con  $\{\mathbf{x}, t\} \in \mathcal{F}_x(\mathcal{B})$  e  $\{\mathbf{x}^*, t\} \in \mathcal{F}_x^*(\mathcal{B})$ . ■

Si consideri ora un processo evolutivo descritto

- dall'osservatore  $O$  come un flusso  $\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t)$ ,
- dall'osservatore  $O^*$  come un flusso  $\mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^*(\mathbf{x}, s, t)$ .

L'evoluzione del processo ed il cambiamento di osservatore possono essere composti in due modi alternativi tenendo conto prima dell'uno e poi dell'altro o viceversa.

Sia infatti  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$  la posizione di una particella vista dall'osservatore  $O$  al tempo  $s$ . La posizione della stessa particella vista dall'osservatore  $O^*$  all'istante  $t$  può valutarsi nei seguenti due modi.

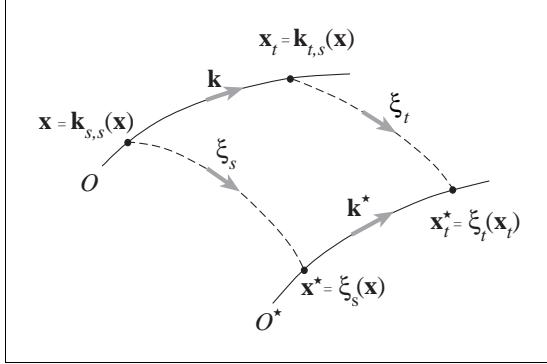
- Prima si effettua il cambiamento di osservatore da  $O$  ad  $O^*$  e poi si segue il flusso  $\mathbf{k}_{t,s}^*$ , che è quello che appare all'osservatore  $O^*$ , oppure
- prima si segue il flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$ , che è quello che appare all'osservatore  $O$ , e poi si effettua il cambiamento di osservatore da  $O$  ad  $O^*$ .

Eguagliando i risultati delle due procedure si ottiene che

$$\mathbf{k}_{t,s}^*(\xi_s(\mathbf{x})) = \xi_t(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S},$$

ovvero

$$\mathbf{k}_{t,s}^* \circ \xi_s = \xi_t \circ \mathbf{k}_{t,s}.$$



Alla relazione che lega le mappe tangenti dei flussi  $\mathbf{k}_{t,s}$  e  $\mathbf{k}_{t,s}^*$  si perviene applicando la regola di derivazione a catena

$$T \mathbf{k}_{t,s}^* \circ T \xi_s = T \xi_t \circ T \mathbf{k}_{t,s}.$$

Osservando poi che

$$T \mathbf{k}_{t,s}^* = \mathbf{F}_{t,s}^*,$$

$$T \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{F}_{t,s},$$

$$T \xi_t = \mathbf{Q}(t),$$

$$T \xi_s = \mathbf{Q}(s),$$

si deduce infine la relazione

$$\mathbf{F}_{t,s}^* \mathbf{Q}(s) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}_{t,s},$$

ovvero

$$\mathbf{F}_{t,s}^* = \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}_{t,s} \mathbf{Q}^T(s).$$



I tensori destro e sinistro di CAUCHY  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}_k$ , associati alla mappa di trasferimento  $k$ , sono soggetti alle leggi di trasformazione

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}^*)^2(\mathbf{x}, t) &= (\mathbf{F}_{t,s}^*)^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{Q}(s) \mathbf{F}_{t,s}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(t) \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(s) = \\ &= \mathbf{Q}(s) \mathbf{F}_{t,s}^T(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(s) = \mathbf{Q}(s) \mathbf{U}^2(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T(s), \\ (\mathbf{V}_k^*)^2(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}_{t,s}^*(\mathbf{x}) (\mathbf{F}_{t,s}^*)^T(\mathbf{x}) = \\ &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(s) \mathbf{Q}(s) \mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(t) = \\ &= \mathbf{Q}(t) \mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) \mathbf{F}_{t,s}^T(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{V}_k^2(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T(t). \end{aligned}$$

Tali leggi di trasformazione sono in accordo con quelle cui obbediscono i tensori destro e sinistro di CAUCHY  $\mathbf{U}_B$  e  $\mathbf{V}_\chi$  associati alla mappa di posizionamento  $\chi$ . Infatti

- il tensore destro  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$  misurato dall'osservatore  $O$  differisce da quello  $\mathbf{U}^*(\mathbf{x}, t)$  misurato dall'osservatore  $O^*$  solo per l'effetto della rotazione relativa iniziale (al tempo  $s$ ) tra i due osservatori.
- Il tensore sinistro  $\mathbf{V}_k(\mathbf{x}, t)$  misurato dall'osservatore  $O$  differisce invece da quello  $\mathbf{V}_k^*(\mathbf{x}, t)$  misurato dall'osservatore  $O^*$  per l'effetto della rotazione relativa attuale (al tempo  $s$ ) tra i due osservatori.

Dunque  $\mathbf{U}$  è invariante, mentre  $\mathbf{V}_k$  ruota.

Ne segue che, al cambiare dell'osservatore, i tensori di deformazione di PIOLA-GREEN  $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$  e di FINGER  $\mathbf{B}_k = \mathbf{V}_k^2$  si trasformano secondo le leggi

$$\mathbf{C}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(s) \mathbf{C}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T(s), \quad \mathbf{B}_k^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{B}_k(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T(t).$$

Dunque  $\mathbf{C}$  è invariante, mentre  $\mathbf{B}_k$  ruota.

Dalla definizione

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}),$$

si deduce che il tensore di GREEN è invariante, e cioè che

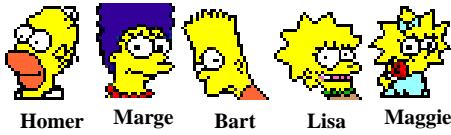
$$\mathbf{E}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{Q}(s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) \mathbf{Q}^T(s).$$

### 6.1. Punti di vista in movimento relativo

Per approfondire l'argomento può interessare la breve storia di un esperimento cinematico condotto dal professor HOMER  e dal suo allievo BART  nel laboratorio di casa SIMPSON.

#### SIMPSON MECHANICS

Attenti a quei due!



Un giorno, HOMER  e BART  decidono di effettuare un esperimento di deformazione mentre sono in moto relativo e di confrontare le misure ottenute.

Procuratisi un corpo  progettano di ricavarne un provino da sottoporre ad un processo di deformazione omogenea.

HOMER  è nel laboratorio al banco di sperimentazione.

BART  si infila in una bolla di sapone e viaggia nello spazio.

Al tempo prestabilito HOMER  invia a BART  il segnale di inizio della misurazione delle fibre lineari del corpo , trasmettendo i dati sulla rotazione  $\mathbf{Q}_o^T$  della bolla di sapone in tale istante.

Trascorso il tempo di osservazione HOMER  lancia a BART  il messaggio di misurazione finale delle fibre del corpo deformato , trasmettendo i dati sulla rotazione  $\mathbf{Q}^T$  della bolla di sapone.

*Domanda:* In cosa differiscono le misurazioni di HOMER  e BART ?

*Risposta:* Indichiamo con una stella le quantità misurate da BART .

HOMER  ha misurato nell'intervallo di tempo la deformazione  $\mathbf{F}$  in quanto ogni fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega}$  si è trasformata in  $\mathbf{F}\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{k(\Omega)}$ .

BART  invece ha osservato che ogni fibra  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{T}_{\Omega^*}$  è divenuta al tempo finale pari a  $\mathbf{F}^*\mathbf{h}^* \in \mathbb{T}_{k^*(\Omega^*)}$ .

Riflettendo sul fatto che i direttori delle fibre misurate rispettivamente da BART  e da HOMER  erano correlati

- all'istante iniziale da  $\mathbf{h}^* = \mathbf{Q}_o \mathbf{h}$  ed
- all'istante finale da  $\mathbf{F}^* \mathbf{h}^* = \mathbf{Q} \mathbf{F} \mathbf{h}$ ,

BART  comunica a HOMER  il risultato dell'esperimento mediante la seguente tabella di correlazione delle misure effettuate



HOMER	BART
F	$F^* = Q F Q_o^T$

HOMER non è d'accordo e fa osservare che, per rendere significativo il confronto, BART avrebbe dovuto tener conto dell'iniziale rotazione relativa  $Q_o$ . A tal fine la deformazione  $F^*$  andava ruotata dell'inverso e cioè di  $Q_o^{-1} = Q_o^T$ .

BART , che è allievo di HOMER , esegue senza discutere la correzione valutando la deformazione efficace:

$$F_{\text{eff}}^* := Q_o^T F^* Q_o.$$

Con un semplice calcolo ricava quindi che:

$$F_{\text{eff}}^* = (Q_o^T Q) F (Q_o^T Q_o) = (Q_o^T Q) F$$

in quanto  $Q_o^T Q_o = I$ .

Definendo la rotazione efficace  $Q_{\text{eff}} := Q_o^T Q$  pari a quella finale  $Q$  seguita dalla correzione  $Q_o^T$  inversa della rotazione iniziale, decide che la risposta corretta che deve dare a HOMER è la seguente:



HOMER	BART
F	$F_{\text{eff}}^* = Q_{\text{eff}} F_{\text{eff}}$

HOMER si congratula con BART per la correttezza dei suoi calcoli ma gli fa osservare che a tale risultato si poteva giungere più semplicemente se entrambi avessero iniziato le misurazioni osservando il provino dallo stesso punto di vista e cioè facendo in modo che risultasse  $Q_o = I$  e dunque  $Q_{\text{eff}} = Q$ .

La questione sarà ulteriormente discussa nel capitolo V con riferimento alla richiesta di invarianza delle relazioni costitutive.

## 7. MOTI E TRAIETTORIE

Si considerino un moto del corpo  $\mathbb{T}_B$  descritto dalla mappa di posizionamento

$$\chi : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathbb{S},$$

e la traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  nel moto  $\chi$

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) := \{\{\mathbf{x}, t\} \in \mathbb{S} \times I \mid \mathbf{x} \in \chi_t(\mathcal{B})\}.$$

- La *velocità* di una particella  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  al tempo  $t \in I$  è la derivata della mappa di posizionamento  $\chi(\mathbf{p}, t)$  rispetto al tempo

$$\dot{\chi}(\mathbf{p}, t) := \frac{d}{d\tau} \chi(\mathbf{p}, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

- L'*accelerazione* di una particella  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  al tempo  $t \in I$  è la derivata seconda della mappa di posizionamento  $\chi(\mathbf{p}, \tau)$  rispetto al tempo

$$\ddot{\chi}(\mathbf{p}, t) := \frac{d^2}{d\tau^2} \chi(\mathbf{p}, \tau) \Big|_{\tau=t} = \frac{d}{d\tau} \dot{\chi}(\mathbf{p}, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

### 7.1. Descrizioni materiale e spaziale

- Un  è un campo  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ , scalare, vettoriale o tensoriale, definito su di una traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$ .
- Un  è un campo  $\Phi_m(\mathbf{p}, t)$ , scalare, vettoriale o tensoriale, definito sul prodotto cartesiano  $\mathcal{B} \times I$ .

La *descrizione materiale* di un campo spaziale consiste nella trasformazione

$$\Phi_m(\mathbf{p}, t) := \Phi(\chi(\mathbf{p}, t), t), \quad \forall \{\mathbf{p}, t\} \in \mathcal{B} \times I,$$

che sinteticamente può scriversi

$$\Phi_{m,t} := \Phi_t \circ \chi_t,$$

La *descrizione spaziale* di un campo materiale consiste nella trasformazione

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \Phi_m(p(\mathbf{x}, t), t),$$

dove  $p : \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}$  è la mappa di riferimento. In forma sintetica si ha che

$$\Phi_t := \Phi_{m,t} \circ \chi_t^{-1} = \Phi_{m,t} \circ p_t.$$

- La *velocità spaziale* è la descrizione spaziale del campo di velocità (che per definizione è un campo materiale). Dunque è data da

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) := \dot{\chi}(p(\mathbf{x}, t), t),}$$

ovvero

$$\boxed{\mathbf{v}_t := \dot{\chi}_t \circ p_t,}$$



Si notino le seguenti definizioni.

La *derivata spaziale* rispetto al tempo di un campo spaziale  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  è definita da

$$\Phi'(\mathbf{x}, t) := \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

La *derivata materiale* rispetto al tempo di un campo materiale  $\Phi_m(\mathbf{p}, t)$  è definita da

$$\dot{\Phi}_m(\mathbf{p}, t) := \frac{\partial}{\partial \tau} \Phi_m(\mathbf{p}, \tau) \Big|_{\tau=t}$$

La *derivata materiale* rispetto al tempo di un campo spaziale  $\Phi_t(\mathbf{x})$  è definita da

$$\dot{\Phi}_t(\mathbf{x}) := [(\Phi_t \circ \chi_t) \cdot \circ p_t](\mathbf{x}).$$

La derivata materiale di un campo spaziale  $\Phi(\mathbf{x}, t)$  consiste quindi nell'effettuare le seguenti operazioni

- si considera la descrizione materiale del campo spaziale,
- si effettua la derivata temporale,
- si trasforma la derivata nella descrizione spaziale.

La regola di derivazione delle funzioni composte e la formula di LEIBNIZ (o regola di derivazione delle forme bilineari) mostrano che per i campi spaziali valgono le seguenti

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \phi' + (d\phi)[\mathbf{v}] = \phi' + (\text{grad } \phi) \cdot \mathbf{v} & \text{per un campo scalare } \phi, \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + (d\mathbf{u})[\mathbf{v}] & \text{per un campo vettoriale } \mathbf{u}, \\ \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}' + (d\mathbf{T})[\mathbf{v}] & \text{per un campo tensoriale } \mathbf{T}. \end{cases}$$

Infatti si ha che

$$\dot{\phi}(\chi(\mathbf{p}, t), t) = \phi'(\chi(\mathbf{p}, t), t) + \text{grad } \phi(\chi(\mathbf{p}, t), t) \cdot \dot{\chi}(\mathbf{p}, t),$$

e quindi

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = \phi'(\mathbf{x}, t) + \text{grad } \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\chi}(\mathbf{x}, t).$$

Analogamente si dimostrano le altre due formule.

Le relazioni precedenti sono note come *formule di EULER*<sup>11</sup> [3] (1770).

**Osservazione 7.1.** Si consideri un sistema di coordinate curvilinee con una base di vettori tangentici  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  ed una base duale  $\mathbf{e}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$  di vettori cotangenti. In termini di componenti le formule di EULER per campi vettoriali e tensoriali si scrivono allora

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}} &= (\dot{u}^i \mathbf{e}_i) = u^k \dot{\mathbf{e}}_k + u^i (\dot{\mathbf{e}}_i) = [(u^k)' + \Gamma_{ij}^k u^j] \mathbf{e}_k = \\ &= [(u^k)' + (u_{;j}^k + \Gamma_{ij}^k u^i) v^j] \mathbf{e}_k = [(u^k)' + (u_{;j}^k v^j)] \mathbf{e}_k, \\ \dot{\mathbf{T}} &= (T^i_{\cdot j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = (T^i_{\cdot j})' \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j + T^i_{\cdot j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = \\ &= \left[ (T^i_{\cdot j})' + [T^p_{\cdot j} \Gamma_{pk}^i - T^i_{\cdot p} \Gamma_{jk}^p] v^k \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \\ &= \left[ (T^i_{\cdot j})' + [T^i_{\cdot j/k} + T^p_{\cdot j} \Gamma_{pk}^i - T^i_{\cdot p} \Gamma_{jk}^p] v^k \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \\ &= \left[ (T^i_{\cdot j})' + T^i_{\cdot j;k} v^k \right] \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j,\end{aligned}$$

dove il simbolo  $(-)^i_{;k}$  denota la componente  $i$ -esima della derivata covariante in direzione  $k$  e  $\Gamma_{ij}^k$  è il simbolo di CHRISTOFFEL definito da (vedi la sezione 12.5 (p. 148))

$$\nabla \mathbf{e}_i [\mathbf{e}_j] = \Gamma_{ji}^k \mathbf{e}_k.$$

Il segno – nell'espressione di  $\dot{\mathbf{T}}$  discende dalla formula

$$\nabla \mathbf{e}^i [\mathbf{e}_k] = -\Gamma_{kj}^i \mathbf{e}^j.$$

Per ricavarla basta derivare la condizione di dualità  $\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i$  per dedurre che

$$\langle \nabla \mathbf{e}^i [\mathbf{e}_k], \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}^i, \nabla \mathbf{e}_j [\mathbf{e}_k] \rangle = 0.$$

e quindi che  $\langle \nabla \mathbf{e}^i [\mathbf{e}_k], \mathbf{e}_j \rangle = -\Gamma_{kj}^i \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_s \rangle = -\Gamma_{kj}^i$ . ■

<sup>11</sup> LEONHARD EULER (1707-1783). Il padre PAUL EULER e JOHANN BERNOULLI (1667-1748), entrambi studenti all'Università di Basilea, vissero insieme nella casa di JACOB BERNOULLI (1654-1705), fratello maggiore di JOHANN. Nel 1720, a 14 anni, LEONHARD entrò all'Università di Basilea dove fu allievo di JOHANN BERNOULLI e studiò i lavori di VARIGNON, DESCARTES, NEWTON, GALILEO, VON SCHOUTEN, JACOB BERNOULLI, HERMANN, TAYLOR e WALLIS. Nel 1725 CATHERINA I, moglie di PIETRO IL GRANDE, fondò l'Accademia delle Scienze di St. Pietroburgo e fece chiamare ad insegnare NICOLAUS II BERNOULLI e DANIEL BERNOULLI, figli di JOHANN. Nel 1727, scomparso prematuramente NICOLAUS II BERNOULLI, per interessamento di JOHANN BERNOULLI il posto fu assegnato a EULER che poi nel 1733 succedette nella cattedra di matematica all'amico DANIEL BERNOULLI che era tornato a Basilea. Nel 1741 EULER fu chiamato a Berlino da FEDERICO DI PRUSSIA e nel 1744 passò alla nascente Accademia delle Scienze di Berlino con MAUPERTUIS direttore. Quando MAUPERTUIS lasciò Berlino 1753, FEDERICO offrì a D'ALEMBERT la presidenza dell'Accademia, e rinnovò l'invito nel 1764, ma D'ALEMBERT rifiutò entrambe le volte, caldeggiando la candidatura di EULER. Nel 1766 EULER lasciò Berlino e ritornò a St. Pietroburgo e poco dopo divenne totalmente cieco a seguito di una malattia. La prodigiosa memoria gli consentì di continuare a lavorare ed egli produsse quasi metà dei suoi lavori in questo periodo. EULER è stato il più prolifico matematico di ogni tempo e certamente tra i più geniali. Ad EULER è dovuta una mole immensa di risultati fondamentali per lo sviluppo della fisica matematica e delle sue applicazioni.

Sia  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  è un campo vettoriale spaziale definito sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  e

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{p}, t) := \mathbf{u}(\chi(\mathbf{p}, t), t),$$

la corrispondente descrizione materiale. Denotando con  $d_m$  e con  $d$  le derivate materiali e spaziali rispetto alla posizione, la regola della derivazione a catena mostra che

$$d_m \mathbf{u}_m = (d\mathbf{u})_m \circ \mathbf{F}_\chi,$$

ed esplicitamente

$$d_m \mathbf{u}_m(\mathbf{p}, t) = [(d\mathbf{u})_m(\mathbf{p}, t)] \circ \mathbf{F}_\chi(\mathbf{p}, t).$$

Ponendo  $\mathbf{v}_m(\mathbf{p}, t) := \dot{\chi}(\mathbf{p}, t)$  risulta dunque

$$\dot{\mathbf{F}}_\chi(\mathbf{p}, t) = d\dot{\chi}(\mathbf{p}, t) = d_m \mathbf{v}_m(\mathbf{p}, t) = [(d\mathbf{v})_m(\mathbf{p}, t)] \circ \mathbf{F}_\chi(\mathbf{p}, t).$$

Considerando il gradiente spaziale di velocità

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) := d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t),$$

e la relativa descrizione materiale  $\mathbf{L}_m = \mathbf{L} \circ \chi$  si ha che

$$\boxed{\dot{\mathbf{F}}_\chi = (\mathbf{L} \circ \chi) \mathbf{F}_\chi \iff (\mathbf{L} \circ \chi) = \dot{\mathbf{F}}_\chi \mathbf{F}_\chi^{-1}.}$$

■ Le *linee di corrente* sono le traiettorie dalle particelle di  $\mathcal{B}$ , ossia le curve definite dalla *mappa di posizionamento*  $\chi : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathbb{S}$  mediante la relazione

$$\mathbf{c}(t) = \chi(\mathbf{p}, t), \quad \mathbf{p} \in \mathcal{B}.$$

Una linea di corrente passante per  $\mathbf{x}$  al tempo  $s \in I$  è soluzione dell'equazione differenziale di evoluzione

$$\boxed{\dot{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{c}(t), t), \quad \mathbf{c}(s) = \mathbf{x}.}$$

Infatti si ha che

$$\dot{\mathbf{c}}(t) = \dot{\chi}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{v}(\chi(\mathbf{p}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{c}(t), t).$$

Viceversa ogni soluzione di tale equazione differenziale è una linea di corrente.

Appare opportuno richiamare alcune nozioni introdotte nella sezione 2.2 (p. 17).

Il *flusso* o *mappa di evoluzione*  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \times I \times I \mapsto \mathbb{S}$  individua la posizione  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t) \in \mathbb{S}$  al tempo  $t$  dalla particella  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{x}, s)$  che al tempo  $s$  occupa la posizione  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ . Se l'evoluzione è assegnata mediante una mappa di posizionamento  $\chi : \mathcal{B} \times I \rightarrow \mathbb{S}$ , l'operatore di evoluzione è espresso da

$$\mathbf{k}_{t,s} := \chi_t \circ \mathbf{p}_s = \chi_t \circ \chi_s^{-1}, \quad s, t \in I,$$

dove  $\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_t(\mathbf{x}, s) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t)$ .



Ne segue che il flusso è soluzione dell'equazione differenziale

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{k}_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.}$$

Infatti, essendo  $p_s(\mathbf{x}) = p_t(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}))$ , si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dt} \chi(p_s(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}_m(p_s(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}_m(p_t(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})), t) = \\ &= \mathbf{v}(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})). \end{aligned}$$

dalla relazione  $\mathbf{k}_{t,s} = \chi_t \circ p_s$  si deduce la *legge di determinismo* di CHAPMAN-KOLMOGOROV:

$$\mathbf{k}_{\tau,t} \circ \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{k}_{\tau,s}, \quad \mathbf{k}_{s,s} = \text{identità}, \quad s, t, \tau \in I.$$

Il *gradiente della mappa di evoluzione* è

$$\mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}) = T\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}).$$

Derivando rispetto al tempo  $t \in I$  si ottiene che  $\dot{\mathbf{F}}_{t,s}(\mathbf{x}) = T\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})$ . Invertendo quindi l'ordine di derivazione temporale e spaziale, l'equazione di evoluzione fornisce la relazione

$$\dot{\mathbf{F}}_{t,s}(\mathbf{x}) = d\dot{\mathbf{k}}_{t,s}(\mathbf{x}) = d(\mathbf{v}_t \circ \mathbf{k}_{t,s})(\mathbf{x}).$$

Invocando infine la regola di derivazione a catena, si ottiene

$$\dot{\mathbf{F}}_{t,s}(\mathbf{x}) = (\mathbf{L}_t \circ \mathbf{F}_{t,s})(\mathbf{x}),$$

dove  $\mathbf{L}_t := d\mathbf{v}_t$ .

- Le *linee di flusso* sono le curve inviluppo del campo di velocità spaziale del corpo  $\mathcal{B}$  in un fissato istante di tempo, ossia le curve che sono soluzioni massimali dell'equazione differenziale

$$\boxed{\dot{\mathbf{c}}(\lambda) = \mathbf{v}(\mathbf{c}(\lambda), t).}$$

- Un *moto stazionario* si ha quando il corpo  $\mathcal{B}$  occupa la stessa configurazione spaziale  $\Omega$  ad ogni istante ed il campo spaziale di velocità non varia nel tempo e cioè  $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{o}$ . Risulta quindi  $\chi(\mathcal{B}, t) = \Omega$  per ogni  $t \in I$  e  $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{o}$  sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$ .

In un moto stazionario le linee di corrente e le linee di flusso soddisfano la stessa equazione differenziale autonoma (cioè indipendente dal tempo)

$$\dot{\mathbf{s}}(\lambda) = \mathbf{v}(\mathbf{s}(\lambda)).$$

Pertanto, in forza dell'unicità della soluzione massimale dell'equazione differenziale, le linee di corrente e le linee di flusso coincidono.

La condizione necessaria e sufficiente affinché si abbia coincidenza tra linee di corrente e linee di flusso in un moto non stazionario è fornita dal criterio di HELMHOLTZ-ZORAWSKI che sarà illustrato nella proposizione 8.6 (p. 74).



**Osservazione 7.2.** Il campo di spostamento  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$  del corpo misurato a partire dalla posizione  $\Omega(t)$  nella traiettoria, è definito da

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau) = \mathbf{k}_t(\mathbf{x}, \tau) - \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega(t), \quad \forall \tau \in I,$$

dove  $\mathbf{k}_t(\mathbf{x}, \tau) = \chi(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \tau)$ .

Si noti che il campo di spostamento non è un campo spaziale in quanto non è definito sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  ma piuttosto su  $\Omega(t) \times I$ . Analoga considerazione vale per la mappa di trasferimento  $\mathbf{k}_t : \Omega(t) \mapsto \Omega(\tau)$ . Derivare il campo di spostamenti  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \tau)$  rispetto al tempo

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{k}_t(\mathbf{x}, \tau) \Big|_{\tau=t},$$

equivale a derivare rispetto a  $\tau$  il campo materiale  $\chi(\mathbf{p}, \tau)$  ed a considerarne la descrizione spaziale al tempo  $t$ . Dunque  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\chi}(\mathbf{p}(\mathbf{x}, t), t)$ . ■

■ La formula che esprime il *tasso di variazione di un volume materiale* si ottiene effettuando la derivata temporale del determinante jacobiano  $\det \mathbf{F}_k$  della mappa di trasferimento  $k$ . Sia  $\Delta$  la forma di volume e  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  una terna di vettori di  $V$ . Dalla definizione di determinante di una trasformazione lineare si ha

$$\Delta\{\mathbf{F}_k \mathbf{a}_1, \mathbf{F}_k \mathbf{a}_2, \mathbf{F}_k \mathbf{a}_3\} = (\det \mathbf{F}_k) \Delta\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}.$$

Derivando rispetto al tempo e tenendo conto della multilinearità della funzione determinante e della relazione  $\dot{\mathbf{F}}_k = \mathbf{L} \mathbf{F}_k$ , si ottiene

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{F})' \Delta\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} &= \frac{d}{dt} \Delta\{\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \mathbf{F}\mathbf{a}_2, \mathbf{F}\mathbf{a}_3\} \\ \Delta\{\dot{\mathbf{F}}\mathbf{a}_1, \mathbf{F}\mathbf{a}_2, \mathbf{F}\mathbf{a}_3\} + \Delta\{\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \dot{\mathbf{F}}\mathbf{a}_2, \mathbf{F}\mathbf{a}_3\} + \Delta\{\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \mathbf{F}\mathbf{a}_2, \dot{\mathbf{F}}\mathbf{a}_3\} &= \\ \Delta\{\mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \mathbf{F}\mathbf{a}_2, \mathbf{F}\mathbf{a}_3\} + \Delta\{\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{a}_2, \mathbf{F}\mathbf{a}_3\} + \Delta\{\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \mathbf{F}\mathbf{a}_2, \mathbf{L}\mathbf{F}\mathbf{a}_3\} &= \\ (\text{tr } \mathbf{L}) [\Delta\{\mathbf{F}\mathbf{a}_1, \mathbf{F}\mathbf{a}_2, \mathbf{F}\mathbf{a}_3\}] &= (\text{tr } \mathbf{L}) (\det \mathbf{F}) [\Delta\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}], \end{aligned}$$

dove si è scritto  $\mathbf{F}$  al posto di  $\mathbf{F}_k$  per semplificare la notazione.

Dunque risulta

$$(\det \mathbf{F}_k)' = \det \mathbf{F}_k \text{tr}(\mathbf{L}) = \det \mathbf{F}_k (\text{div } \mathbf{v}).$$

Denotando con  $J(\mathbf{k}) := \det \mathbf{F}_k$  il *determinante jacobiano*, si ha

$$\boxed{J(\mathbf{k}) = J(\mathbf{k}) (\text{div } \mathbf{v})}.$$

E' questa la *formula di espansione di EULER* [1] (1757) che fornisce la velocità di variazione del volume in termini dello jacobiano della mappa di trasferimento.

- La formula che esprime il *tasso di variazione di una superficie materiale* si ottiene derivando rispetto al tempo la formula di NANSON  $\mathbf{n}_k A_k = (J(\mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}) \mathbf{n} A$

$$(\mathbf{n}_k A_k) \dot{=} J(\mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{n} A + J(\mathbf{k}) (\dot{\mathbf{F}}_k^{-T}) \mathbf{n} A.$$

Allora, essendo

$$(\mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k^{-T}) \dot{=} \mathbf{F}_k^T (\mathbf{F}_k^{-T}) \dot{+} \dot{\mathbf{F}}_k^T \mathbf{F}_k^{-T} = \mathbf{O},$$

risulta  $(\mathbf{F}_k^{-T}) \dot{=} -\mathbf{F}_k^{-T} \dot{\mathbf{F}}_k^T \mathbf{F}_k^{-T}$ .

Dalla relazione  $\dot{\mathbf{F}}_k = \mathbf{L} \mathbf{F}_k$  si deduce inoltre che  $\dot{\mathbf{F}}_k^T = \mathbf{F}_k^T \mathbf{L}^T$  e dunque

$$\dot{\mathbf{F}}_k^{-T} = -\mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{F}_k^T \mathbf{L}^T \mathbf{F}_k^{-T} = -\mathbf{L}^T \mathbf{F}_k^{-T}.$$

Ne segue che  $(\mathbf{n}_k A_k) \dot{=} [J(\mathbf{k}) \mathbf{I} - J(\mathbf{k}) \mathbf{L}^T] \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{n} A$ .

Dunque dalla formula  $J(\mathbf{k}) = J(\mathbf{k}) \operatorname{div} \mathbf{v}$  si ottiene

$$(\mathbf{n}_k A_k) \dot{=} [(\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - \mathbf{L}^T] J(\mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T} \mathbf{n} A,$$

e quindi in definitiva si perviene alla *formula di LAMB*<sup>12</sup> [21] (1877).

$$(\mathbf{n}_k A_k) \dot{=} [(\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - (d\mathbf{v})^T] \mathbf{n}_k A_k.$$

- Il *tasso di variazione di una linea materiale* si ottiene derivando rispetto al tempo un vettore tangente alla curva. Sia  $\mathbf{c}(\lambda)$  l'equazione parametrica della curva e  $\mathbf{h}(\lambda) = d\mathbf{c}(\lambda)$  un vettore tangente. La curva trasformata ha equazione parametrica

$$\mathbf{c}_k(\lambda, t) := \mathbf{k}(\mathbf{c}(\lambda), t).$$

Dunque

$$\mathbf{h}_k(\lambda, t) = d_\lambda \mathbf{c}_k(\lambda, t) = \mathbf{F}_k(\mathbf{c}(\lambda), t) \mathbf{h}(\lambda).$$

Derivando rispetto al tempo si conclude che sussiste la seguente *formula di EULER* [2] (1761)

$$\dot{\mathbf{h}}_k = \dot{\mathbf{F}}_k \mathbf{h} = \mathbf{L} \mathbf{F}_k \mathbf{h}.$$

---

<sup>12</sup> HORACE LAMB (1849-1934). Professore a Cambridge pubblicò nel 1879 il *Treatise on the Mathematical Theory of the Motion of Fluids* che sancì l'accettazione del metodo analitico a Cambridge.



## 8. TEOREMI DEL TRASPORTO

Si può ora dimostrare un importante risultato, enunciato da O. REYNOLDS<sup>13</sup> nel 1903, che consente di calcolare il tasso di variazione lungo una traiettoria dell'integrale di un campo spaziale scalare  $\phi : \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) \mapsto \mathfrak{N}$ .

**Proposizione 8.1. Teorema del trasporto di Reynolds.** *Sia  $\phi(\mathbf{x}, t)$  un campo spaziale scalare definito sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  e regolare su  $\chi(\mathcal{B}, t)$ . Allora vale la formula*

$$\boxed{\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \phi \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\phi' + \operatorname{div}(\phi \mathbf{v})) \, dv.}$$

**Dim.** Dalla formula  $(\det \mathbf{F}_\chi)^\cdot = \det \mathbf{F}_\chi \operatorname{tr}(\dot{\mathbf{F}}_\chi \mathbf{F}_\chi^{-1}) = \det \mathbf{F}_\chi \operatorname{tr}(\mathbf{L})$  e dalla formula di cambiamento delle variabili di integrazione

$$dv = (\det \mathbf{F}_\chi) \, dv_{\mathcal{B}} = J(\chi) \, dv_{\mathcal{B}},$$

si evince che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \phi \, dv &= \int_{\mathcal{B}} (\phi \det \mathbf{F}_\chi)^\cdot \, dv_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{P}} (\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v})_m \det \mathbf{F}_\chi \, dv_{\mathcal{B}} = \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv. \end{aligned}$$

Osservando poi che, per la regola di LEIBNIZ<sup>14</sup> risulta

$$\operatorname{div}(\phi \mathbf{v}) = \phi \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \phi \cdot \mathbf{v},$$

e che  $\dot{\phi} = \phi' + (\operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{v}$  si deduce che

$$\boxed{\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} = \phi' + (\operatorname{grad} \phi) \cdot \mathbf{v} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v} = \phi' + \operatorname{div}(\phi \mathbf{v}),}$$

e quindi la seconda formula.  $\square$

---

<sup>13</sup> OSBORNE REYNOLDS (1842-1912). Ingegnere e scienziato inglese famoso per i contributi dati all'idrodinamica e per l'introduzione del parametro adimensionale detto numero di REYNOLDS.

<sup>14</sup> GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716). Scienziato e pensatore nato a Lipsia in Slesia. E' considerato, insieme ad ISAAC NEWTON (1643-1727), il fondatore del calcolo infinitesimale.

Una formulazione generale del teorema del trasporto relativa a flussi di varietà materiali in varietà spaziali sarà illustrata nella proposizione 12.15 (p. 147).

Si noti che

- il teorema del trasporto continua a sussistere se al corpo  $\mathcal{B}$  viene sostituita una qualsiasi sua parte  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$  regolare.

Il dominio  $\chi(\mathcal{P}, t)$  è detto un *volume materiale*.

Facendo ricorso al teorema della divergenza, la seconda formula di REYNOLDS può anche riscriversi esprimendo il tasso di variazione dell'integrale del campo nel volume materiale come somma di

- un integrale di volume del tasso di variazione spaziale del campo e
- un integrale sul contorno del prodotto del campo per il flusso di velocità uscente

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \phi \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \phi' \, dv + \int_{\partial \chi(\mathcal{B},t)} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Il primo termine a secondo membro costituisce il contributo del tasso di variazione spaziale del campo nel volume, mentre il secondo termine tiene conto del fatto che la superficie di contorno, spostandosi verso l'esterno con la componente normale della velocità, tende ad inglobare nuovi volumi spaziali occupati dal campo.

Al teorema del trasporto per un campo spaziale vettoriale  $\mathbf{u} : \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) \mapsto V$  e per un campo spaziale tensoriale  $\mathbf{T} : \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) \mapsto L(V; V)$  si perviene con una dimostrazione perfettamente analoga, basata sull'applicazione della regola di LEIBNIZ

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (d\mathbf{u})[\mathbf{v}] + \mathbf{u}(\operatorname{div} \mathbf{v}),$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = (d\mathbf{T})[\mathbf{v}] + \mathbf{T}(\operatorname{div} \mathbf{v}),$$

e sulle formule

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + (d\mathbf{u})[\mathbf{v}] \quad \text{per un campo vettoriale } \mathbf{u} : \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) \mapsto V,$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{T}' + (d\mathbf{T})[\mathbf{v}] \quad \text{per un campo tensoriale } \mathbf{T} : \mathcal{F}_\chi(\mathcal{B}) \mapsto L(V; V).$$

I prodotti tensoriali sono definiti da

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{n} := \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \quad (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})\mathbf{n} := \mathbf{T}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}), \quad \forall \mathbf{n} \in V.$$

Valgono pertanto le formule

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{u} \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\mathbf{u}' + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})) \, dv,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{T} dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v}) dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\mathbf{T}' + \operatorname{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})) dv.$$

Applicando il teorema della divergenza si ottengono le formule

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{u} dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{u}' dv + \int_{\partial \chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{u} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) da,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{T} dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{T}' dv + \int_{\partial \chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{T} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) da.$$

Come caso particolare del teorema di REYNOLDS si deduce il seguente risultato concernente i *moti isocori*, cioè quelli che non provocano variazioni di volume e sono pertanto caratterizzati dalla proprietà

$$[\operatorname{vol} \chi(\mathcal{P}, t)]' = 0, \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B} \quad \forall t \in I.$$

**Proposizione 8.2. Moti isocori.** *Il moto di un corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  è isocoro se e solo se vale una delle seguenti proprietà equivalenti*

- i)  $(\det \mathbf{F}_{t,s})' = 0 \iff \det \mathbf{F}_{t,s}(\mathbf{x}, t) = 1, \quad \forall \{\mathbf{x}, t\} \in \mathcal{F}_x(\mathcal{B}),$
- ii)  $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \forall \{\mathbf{x}, t\} \in \mathcal{F}_x(\mathcal{B}),$
- iii)  $\int_{\partial \mathbf{k}(\mathcal{P}, t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da = 0, \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}, \quad \forall t \in I.$

**Dim.** Ponendo  $\phi = 1$  la formula di REYNOLDS si riduce alla seguente formula del *trasporto del volume*

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{P},t)} dv = \int_{\chi(\mathcal{P},t)} \operatorname{div} \mathbf{v} dv = \int_{\partial \chi(\mathcal{P},t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} da.$$

Basta quindi ricordare che  $(\det \mathbf{F}_x)' = \det \mathbf{F}_x (\operatorname{div} \mathbf{v})_m$  e che  $\det \mathbf{F}_x > 0$ . □

La *ii*) è dovuta ad EULER [2] (1761). Casi particolari erano stati formulati in precedenza da D'ALEMBERT<sup>15</sup>.

### 8.1. Curve e superfici materiali

Sia  $\mathbf{c}_B : [0, 1] \mapsto \mathcal{B}$  una curva nella configurazione materiale del corpo. Durante il moto alla curva  $\mathbf{c}_B$  corrisponde una famiglia di curve.

Ad ogni valore del parametro evolutivo  $t \in I$  corrisponde la curva composta con la mappa di posizionamento  $\chi_t : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  e definita da

$$\mathbf{c}_t(\lambda) = (\chi_t \circ \mathbf{c}_B)(\lambda), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Ciascuna curva della famiglia è detta una *curva materiale*.

Analogamente sia  $\mathcal{S}_B : [0, 1] \times [0, 1] \mapsto \mathcal{B}$  una superficie nella configurazione materiale del corpo. Allora ciascuna superficie della famiglia

$$\mathcal{S}_t(\lambda, v) = (\chi_t \circ \mathcal{S}_B)(\lambda, v), \quad \{\lambda, v\} \in [0, 1] \times [0, 1],$$

è detta una *superficie materiale*.

Per formulare criteri che consentano di stabilire se una curva o una superficie siano o meno materiali si fa ricorso ai seguenti teoremi di trasporto che forniscono l'espressione della derivata temporale dell'integrale di un campo scalare, vettoriale o tensoriale, lungo curve e superfici materiali.

---

<sup>15</sup> JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783). Figlio illegittimo di MME DE TENCIN e di un ufficiale di artiglieria, LOUIS-CAMUS DESTOUCHES. Nato mentre il padre era assente da Parigi, fu abbandonato sulle scale della chiesa di St Jean Le Rond, da cui prese il nome. Tornato a Parigi il padre si prese cura del figlio affidandolo a MME ROUSSEAU, moglie di un vetrario, che fu per D'ALEMBERT la vera madre. Il padre morì quando D'ALEMBERT aveva 9 anni, lasciandogli un'eredità sufficiente per la sua educazione. Entrato nel Collège des Quatre Nations cambiò il suo nome da JEAN-BAPTISTE DAREMBERG in JEAN BAPTISTE D'ALEMBERT. Nel 1739 presentò il primo lavoro all'Accademia delle Scienze di Parigi di cui divenne membro nel 1741. Nel 1743 pubblicò il famoso *Traité de dynamique* in cui espone il suo principio della dinamica entrando in rivalità con ALEXIS CLAUDE CLAIRAUT (1713-1765) che leggeva lezioni di dinamica all'Accademia. Nel 1744 pubblicò il *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* proponendo un approccio diverso da quello di DANIEL BERNOULLI (1700-1782). Dal 1746 iniziò con DENIS DIDEROT (1713-1784) la redazione della monumentale *Encyclopédie*. Nel 1754 fu eletto all'Accademia di Francia e nel 1772 ne divenne segretario perpetuo. Fu invitato da FEDERICO II DI PRUSSIA a presiedere l'Accademia delle Scienze di Berlino nel 1753 e nel 1764, ma rifiutò sostenendo la candidatura di LEONHARD EULER (1707-1783). Declinò anche l'invito di CATHERINE II di Russia che lo voleva come tutore del figlio. Nell'ultima parte della sua vita gli interessi di D'ALEMBERT si rivolsero principalmente alla letteratura ed alla filosofia come testimoniò i *Mélanges de littérature et de philosophie* apparsi tra il 1753 ed il 1767. D'ALEMBERT fu principalmente un matematico amante del rigore e della sistematizzazione formale più che un fisico. Preziosi sono stati i suoi contributi al calcolo integrale, al moto dei fluidi ed alla dinamica.

**Proposizione 8.3. Trasporto lineare.** Siano  $\phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  campi spaziali scalare, vettoriale e tensoriale, definiti sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ . Allora per ogni curva materiale  $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}$ , posto  $\mathbf{h}(\lambda, t) = d_\lambda \mathbf{c}_t(\lambda)$ , si ha che

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} \phi \mathbf{h} \, d\lambda = \int_{\mathbf{c}_t} (\dot{\phi} \mathbf{I} + \phi d\mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} \, d\lambda, \\ ii) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} \, d\lambda = \int_{\mathbf{c}_t} (\dot{\mathbf{u}} + (d\mathbf{v})^T \mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} \, d\lambda, \\ iii) \quad & \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{T} \mathbf{h} \, d\lambda = \int_{\mathbf{c}_t} (\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T} d\mathbf{v}) [\mathbf{h}] \, d\lambda. \end{aligned}$$

**Dim.** Basta notare la relazione  $(\mathbf{h} \, d\lambda)' = \mathbf{L} \mathbf{h} \, d\lambda = (d\mathbf{v}) [\mathbf{h}] \, d\lambda$  che si deduce dalla formula di EULER (vedi sezione 7.1 (p. 61)).  $\square$

**Proposizione 8.4. Trasporto superficiale.** Siano  $\phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  campi spaziali scalare, vettoriale e tensoriale, definiti sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ . Allora per ogni superficie materiale  $S_{\mathcal{B}}$  in  $\mathcal{B}$ , posto  $S_t = \chi_t \circ S_{\mathcal{B}}$ , valgono le formule

$$\begin{aligned} i) \quad & \frac{d}{dt} \int_{S_t} \phi \mathbf{n} \, da = \int_{S_t} [(\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - (d\mathbf{v})^T] \mathbf{n} \, da, \\ ii_1) \quad & \frac{d}{dt} \int_{S_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{S_t} [\dot{\mathbf{u}} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{u} - (d\mathbf{v}) [\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{n} \, da, \\ iii) \quad & \frac{d}{dt} \int_{S_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \, da = \int_{S_t} [\dot{\mathbf{T}} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{T} - \mathbf{T} (d\mathbf{v})^T] [\mathbf{n}] \, da. \end{aligned}$$

**Dim.** Basta notare la relazione  $(\mathbf{n} \, da)' = [(\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{I} - (d\mathbf{v})^T] \mathbf{n} \, da$  che esprime la formula di LAMB (vedi sezione 7.1 (p. 61)).  $\square$

Si noti che essendo

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i &= \epsilon_{ijk} (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_{k/j} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{kpq} (\mathbf{u}_p \mathbf{v}_q)_{/j} = (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j)_{/j} - (\mathbf{u}_j \mathbf{v}_i)_{/j} = \\ &= \mathbf{u}_{i/j} \mathbf{v}_j + \mathbf{u}_i \mathbf{v}_{j/j} - \mathbf{u}_{j/j} \mathbf{v}_i - \mathbf{u}_j \mathbf{v}_{i/j}, \end{aligned}$$

sussiste l'identità

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (d\mathbf{u}) [\mathbf{v}] + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{u} - (d\mathbf{v}) [\mathbf{u}] - (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v},$$

Allora, dalla relazione  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + (d\mathbf{u})[\mathbf{v}]$  si deduce l'eguaglianza

$$a) \quad \dot{\mathbf{u}} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{u} - (d\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \mathbf{u}' + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v}.$$

Pertanto la  $ii_1$ ) si può riscrivere

$$ii_2) \quad \frac{d}{dt} \int_{S_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{S_t} [\mathbf{u}' + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Orientando il bordo  $\mathbf{c}_t$  della superficie  $S_t$  in modo congruente all'orientamento adottato per il vettore assiale  $\operatorname{rot}$  e denotando con  $\mathbf{t}$  il relativo versore della tangente a  $\mathbf{c}_t$ , si può applicare la trasformazione di KELVIN (teorema di STOKES) per porre la  $ii_2$ ) nella forma

$$ii_3) \quad \frac{d}{dt} \int_{S_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{S_t} [\mathbf{u}' - (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{n} \, da + \oint_{\mathbf{c}_t} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{t} \, ds.$$

Dalle  $ii_1$ ) e  $ii_2$ ) si possono dedurre immediatamente due notevoli risultati impliciti in lavori di HELMHOLTZ<sup>16</sup> (1858) e di NANSON (1874) e formalmente enunciati da ZORAWSKI<sup>17</sup> nel 1900.

**Proposizione 8.5. Lemma di Helmholtz-Zorawski.** *Un campo vettoriale spaziale  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  definito sulla traiettoria  $\mathcal{F}_x(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  ha flusso costante nel tempo attraverso una qualsiasi superficie materiale  $S_{\mathcal{B}}$  se e solo se soddisfa l'equazione*

$$\dot{\mathbf{u}} + (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{u} - (d\mathbf{v})[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$$

ovvero

$$\mathbf{u}' + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{u}) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

**Dim.** La sufficienza segue immediatamente dalle  $ii_1$ ) e  $ii_2$ ). La necessarietà è conseguenza dell'arbitrarietà della superficie materiale.  $\square$

<sup>16</sup> HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ (1821-1894). Medico, fisiologo e fisico matematico tedesco. I suoi importanti contributi occupano tutti i campi della fisica matematica, meccanica, acustica, ottica, termodinamica ed elettromagnetismo.

<sup>17</sup> KASIMIERZ ZORAWSKI (1866-1953). Matematico polacco svolse con STANISLAW ZAREMBA (1863-1942) un ruolo fondamentale nello sviluppo della matematica in Polonia dopo la prima guerra mondiale.

**Proposizione 8.6. Criterio di Helmholtz-Zorawski.** *Le curve integrali di un campo vettoriale spaziale  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  definito sulla traiettoria  $\mathcal{F}_x(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  sono curve materiali se e solo se è soddisfatta la condizione*

$$\boxed{\left[ \dot{\mathbf{u}} - (d\mathbf{v})[\mathbf{u}] \right] \times \mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I,}$$

*o equivalentemente*

$$\boxed{\left[ \mathbf{u}' + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + (\text{div } \mathbf{u}) \mathbf{v} \right] \times \mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.}$$

**Dim.** Si osservi preliminarmente che le due condizioni sono equivalenti in virtù della a) e dell'egualanza

$$\left[ \dot{\mathbf{u}} - (d\mathbf{v})[\mathbf{u}] \right] \times \mathbf{u} = \left[ \dot{\mathbf{u}} + (\text{div } \mathbf{v}) \mathbf{u} - (d\mathbf{v})[\mathbf{u}] \right] \times \mathbf{u}.$$

Le due condizioni impongono che il vettore in parentesi quadre sia parallelo al vettore  $\mathbf{u}$  e quindi ortogonale alla normale  $\mathbf{n}$  ad una qualsiasi superficie che si appoggia su di una curva  $\mathbf{c}$  integrale di  $\mathbf{u}$ .

In virtù della proposizione 8.5 ciò implica che, se tali superfici sono materiali, il flusso del campo  $\mathbf{u}$  è costante nel tempo. In particolare sarà definitivamente nullo il flusso attraverso una qualsiasi superficie materiale che all'istante iniziale si appoggia sulla curva integrale  $\mathbf{c}$ . Ne segue che la curva integrale  $\mathbf{c}$  coincide con la curva materiale intersezione di tali superfici materiali.

Una dimostrazione alternativa fa ricorso ad un'argomentazione più diretta.

Per definizione una curva materiale  $\mathbf{c}$  è una curva integrale per  $\mathbf{u}$  se e solo se in ogni punto di  $\mathbf{c}$  la tangente è parallela al valore del campo  $\mathbf{u}$  in quel punto e ciò accade in ogni istante di tempo.

Posto allora  $\mathbf{t} = d\mathbf{c}(\lambda)/d\lambda$  deve essere

$$\mathbf{t} \times \mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

Derivando rispetto al tempo e notando che  $\dot{\mathbf{t}} = d\mathbf{v}[\mathbf{t}]$  si ha che

$$(\mathbf{t} \times \mathbf{u})' = d\mathbf{v}[\mathbf{t}] \times \mathbf{u} + \mathbf{t} \times \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

Poichè  $\mathbf{t}$  è parallelo a  $\mathbf{u}$ , tale condizione equivale a

$$(\dot{\mathbf{u}} - d\mathbf{v}[\mathbf{u}]) \times \mathbf{u} = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

L'implicazione inversa si deduce seguendo il ragionamento nel verso opposto ed osservando che, se  $\mathbf{t} \times \mathbf{u}$  è costante nel tempo, il campo  $\mathbf{t}$  sarà costantemente parallelo al campo  $\mathbf{u}$  se tale è all'istante iniziale.  $\square$

Ponendo  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  e tenendo presente che  $\dot{\mathbf{v}} - (d\mathbf{v})[\mathbf{v}] = \mathbf{v}'$ , il criterio di HELMHOLTZ-ZORAWSKI fornisce la condizione

$$\mathbf{v}' \times \mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I,$$

necessaria e sufficiente affinché le linee di flusso coincidano con quelle di corrente.

Un classico criterio di materialità di una superficie dovuto a LAGRANGE<sup>18</sup> [4] (1783) è il seguente. La metodologia della dimostrazione è di KELVIN<sup>19</sup> [13] (1848).

**Proposizione 8.7. Criterio di Lagrange.** *Una superficie spaziale  $S(t)$  di equazione  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  appartenente alla traiettoria  $\mathcal{F}_x(\mathcal{B})$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  è una superficie materiale se e solo se è soddisfatta la condizione*

$$\dot{f} = f' + (df)[\mathbf{v}] = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

**Dim.** Si consideri una traiettoria regolare  $\psi : I \mapsto \mathbb{S}$  di un punto che si muove nello spazio rimanendo per ogni  $t \in I$  sulla superficie  $S(t)$  di equazione  $f(\mathbf{x}, t) = 0$  così che

$$\varphi(t) := f(\psi(t), t) = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

Derivando rispetto al tempo e ponendo  $\mathbf{x} = \psi(t)$  e  $\mathbf{w} = \dot{\psi}(t)$  si ha che

$$\dot{\varphi}(t) = f'(\mathbf{x}, t) + df(\mathbf{x}, t)[\mathbf{w}] = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

La superficie spaziale  $S(t)$  è una superficie materiale se e solo se un osservatore che si muove lungo la traiettoria  $\psi : I \mapsto \mathbb{S}$  vede la particella che ad ogni istante occupa la posizione  $\psi(t)$  muoversi con una velocità tangente alla superficie  $S(t)$ .

Dunque la condizione da imporre è

$$(df)[\mathbf{v} - \mathbf{w}] = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I.$$

Essendo  $f' + (df)[\mathbf{w}] = \mathbf{o}$  tale condizione equivale a

$$\dot{f} = f' + (df)[\mathbf{v}] = \mathbf{o}, \quad \forall t \in I,$$

ed il teorema è dimostrato.  $\square$

<sup>18</sup> JOSEPH-Louis LAGRANGE (1736-1813). Illustrer matematico italo-francese. Nacque a Torino e fu battezzato GIUSEPPE LODOVICO LAGRANGIA in quanto figlio di GIUSEPPE FRANCESCO LODOVICO LAGRANGIA e di TERESA GROSSO. L'origine francese dal lato paterno era dovuta ad un bisnonno capitano di cavalleria francese che aveva servito il DUCA DI SAVOIA. LAGRANGE contribuì in modo decisivo a dare un fondamento matematico alla meccanica estendendo e completando le ricerche di NEWTON. Famosa la sua *Mécanique Analytique* (1ª ed. 1788).

<sup>19</sup> SIR WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) (1824-1907). Nato a Belfast da famiglia scozzese. Eminent fisico matematico, professore a Glasgow. Il titolo di baronetto gli fu concesso per il fondamentale contributo scientifico alla messa in opera del primo cavo sottomarino tra l'Irlanda e gli Stati Uniti d'America. Autore con P.G. TAIT del *Treatise of Natural Philosophy*.

## 9. CINEMATISMI

Si ponga la seguente definizione.

- Un *cinematismo* del corpo  $\mathbb{T}_B$  nella posizione spaziale  $\Omega(t)$  è il campo di *velocità* in un processo evolutivo  $\chi : \mathcal{B} \times I \mapsto \mathbb{S}$  nel corso del quale il corpo attraversa la posizione  $\Omega(t)$  al tempo  $t \in I$ .

Se il parametro evolutivo è assunto adimensionale, i cinematismi hanno la dimensione di una lunghezza e sono detti *spostamenti virtuali* o *spostamenti tangenti*.

Nell’analisi della cinematica di un continuo è irrilevante considerare quale parametro evolutivo il tempo dinamico o uno pseudo tempo. Pertanto nel seguito il parametro evolutivo sarà detto semplicemente *tempo*.

Nella Meccanica dei Continui l’analisi dei *cinematismi* con cui un corpo può tendere ad allontanarsi da una prefissata configurazione, gioca un ruolo basilare.

Infatti, come si vedrà nel capitolo II, i sistemi di forze agenti sul corpo  $\mathbb{T}_B$  in una configurazione  $\Omega$  vengono definiti operativamente quali enti duali dei cinematismi ed il concetto di equilibrio è basato sulla condizione che i sistemi di forze non compiano *potenza virtuale* per i cinematismi rigidi (o *lavoro virtuale* per gli spostamenti virtuali rigidi).

Per la trattazione svolta in questo capitolo è lecito porre la seguente definizione.

- In una posizione  $\Omega$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  lo *spazio cinematico*  $\mathcal{V}(\Omega)$  è formato dai campi cinematici di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  e cioè dai campi vettoriali che in  $\overline{\Omega}$  sono continui con la derivata prima.

Nel capitolo II si mostrerà come, per sviluppare in modo coerente la teoria meccanica di una struttura continua, sia necessario considerare cinematismi che in  $\overline{\Omega}$  possono presentare discontinuità in corrispondenza delle interfacce relative ad una arbitraria suddivisione del dominio.

La dimostrazione dei teoremi di esistenza richiede poi di ampliare ancora lo spazio cinematico per includere tutti i cinematismi di quadrato integrabile su  $\Omega$  che siano dotati di derivata distribuzionale rappresentabile a pezzi su  $\Omega$  da campi di quadrato integrabile.

### 9.1. Cinematismi rigidi

I *cinematismi rigidi semplici* di un corpo  $\mathbb{T}_B$  in una posizione  $\Omega(t)$  sono i cinematismi di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  che non provocano velocità di variazione della distanza tra le particelle del corpo.

Omettendo di esplicitare la dipendenza dal tempo, deve quindi risultare

$$\|\mathbf{k}(\mathbf{y}) - \mathbf{k}(\mathbf{x})\| = 0 \iff [\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})] \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega,$$

dove si è omessa la dipendenza dal tempo del campo di velocità.

Tale proprietà caratteristica dei cinematismi rigidi semplici è detta *proprietà di equiproiettività*.

Essa impone infatti che le velocità di due punti scelti ad arbitrio in  $\Omega$  abbiano eguale proiezione sul segmento congiungente i due punti.

Il risultato enunciato nella proposizione seguente fornisce la classica rappresentazione parametrica dei cinematismi rigidi semplici.

**Proposizione 9.1. Caratterizzazione dei cinematismi rigidi.** *Un cinematismo rigido semplice di un corpo  $\mathbb{T}_B$  in una posizione semplicemente connessa  $\Omega$  è caratterizzato dal fatto che il gradiente è costante ed emisimmetrico. In altri termini le seguenti due proprietà sono equivalenti*

- i)  $[\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})] \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  *equiproiettività*,
- ii)  $\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  *forma parametrica*.

**Dim.**

■ La i) implica la ii).

Derivando la i) prima rispetto alla posizione  $\mathbf{x} \in \Omega$  in direzione  $\mathbf{a} \in V$  e poi rispetto alla posizione  $\mathbf{y} \in \Omega$  in direzione  $\mathbf{b} \in V$  si ha

$$d\mathbf{v}(\mathbf{y}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + d\mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

Ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  si ottiene

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + d\mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \iff \text{sym grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

L'emisimmetria di  $d\mathbf{v}(\mathbf{x})$  comporta quindi che

$$d\mathbf{v}(\mathbf{y}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = d\mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \iff d\mathbf{v}(\mathbf{y}) = d\mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

e cioè che  $\text{grad } \mathbf{v} = \Omega$  con  $\Omega$  campo tensoriale emisimmetrico costante.

Ponendo quindi  $\boldsymbol{\omega} = \text{axial } \Omega$  si perviene alla ii).

■ La ii) implica la i).

Dalla ii) si deduce che  $\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Omega[\mathbf{y} - \mathbf{x}]$  e quindi moltiplicando scalarmente ambo i membri per  $\mathbf{v}(\mathbf{y}) - \mathbf{v}(\mathbf{x})$  in virtù dell'emisimmetria di  $\Omega$  si ottiene la i).  $\square$

Ad ogni cinematismo rigido corrisponde dunque un'espressione parametrica della forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

in funzione di due *vettori caratteristici*,

- la velocità di traslazione  $\mathbf{v}_o$ ,
- la velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ .

■ L'insieme  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)$  dei cinematismi rigidi semplici costituisce un sottospazio di dimensione 6 dello spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$ .

Ad ogni base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dello spazio tridimensionale  $\mathbb{S}$  corrisponde infatti una base di  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)$  costituita da tre cinematismi di traslazione e tre cinematismi di rotazione attorno ad  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$

$$\begin{cases} \mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{v}_3(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{v}_4(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_1 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \\ \mathbf{v}_5(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_2 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o), \\ \mathbf{v}_6(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_3 \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o). \end{cases}$$

che costituiscono un generatore linearmente indipendente.

## 9.2. Rotazione e deformazione tangentì

Il risultato che segue mostra che le parti simmetrica ed emisimmetrica del gradiente di un cinematismo rappresentano rispettivamente l'atto di deformazione e l'atto di rotazione delle fibre del corpo.

**Proposizione 9.2. Parti simmetrica ed antisimmetrica.** *Sotto le stesse ipotesi del teorema di decomposizione polare di CAUCHY si ha che*

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}_t = \dot{\mathbf{R}}_t + \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{R}}_t + \dot{\mathbf{V}}_t = \mathbf{W} + \mathbf{D},$$

dove  $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{V}}_t$  e  $\mathbf{W} = \dot{\mathbf{R}}_t$  sono rispettivamente le parti simmetrica ed emisimmetrica del gradiente spaziale del cinematismo  $\dot{\mathbf{F}}_t = \text{grad } \mathbf{v}$  e cioè

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{V}}_t = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{F}}_t + \dot{\mathbf{F}}_t^T] = \frac{1}{2}[\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad } \mathbf{v}^T] = \text{sym grad } \mathbf{v}, \\ \mathbf{W} &= \dot{\mathbf{R}}_t = \frac{1}{2}[\dot{\mathbf{F}}_t - \dot{\mathbf{F}}_t^T] = \frac{1}{2}[\text{grad } \mathbf{v} - \text{grad } \mathbf{v}^T] = \text{emi grad } \mathbf{v}. \end{aligned}$$

**Dim.** Derivando rispetto al tempo  $\tau \in I$  la formula  $\mathbf{F}_t = \mathbf{R}_t \mathbf{U}_t$  e ponendo  $\tau = t$  si ha

$$\dot{\mathbf{F}}_t = \dot{\mathbf{R}}_t \mathbf{U}_t + \mathbf{R}_t \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{R}}_t + \dot{\mathbf{U}}_t .$$

in quanto le trasformazioni  $\mathbf{U}_t$  e  $\mathbf{R}_t$ , valutate nella posizione iniziale all'istante  $t$ , sono pari all'identità.

La linearità dell'operatore derivata assicura che  $\text{emi } \dot{\mathbf{U}}_t = (\text{emi } \mathbf{U}_t) \cdot = \mathbf{O}$  e cioè che  $\dot{\mathbf{U}}_t$  è simmetrica.

Essendo  $\mathbf{R}_t$  una isometria, risulta  $\mathbf{R}_t \mathbf{R}_t^T = \mathbf{I}$ . Derivando rispetto al tempo all'istante iniziale  $t$  si ha che

$$\mathbf{R}_t \dot{\mathbf{R}}_t^T + \dot{\mathbf{R}}_t \mathbf{R}_t^T = \mathbf{W} + \mathbf{W}^T = \mathbf{0} ,$$

e quindi  $\mathbf{W}$  è emisimmetrica.  $\square$

Le parti simmetrica ed antisimmetrica del gradiente  $\text{grad } \mathbf{v}$  del cinematico  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  in una posizione  $\Omega(t)$  rappresentano pertanto rispettivamente l'atto di deformazione e l'atto di rotazione locali in un processo evolutivo che parte da  $\Omega(t)$ .

- Il tensore simmetrico

$$\boxed{\mathbf{D} := \dot{\mathbf{U}}_t = \dot{\mathbf{V}}_t = \text{sym grad } \mathbf{v} ,}$$

è detto *atto di deformazione* o *deformazione tangente* corrispondente al cinematico  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ .

- Il tensore emisimmetrico

$$\boxed{\mathbf{W} := \text{sym grad } \mathbf{v} ,}$$

descrive l'*atto di rotazione* o *rotazione tangente* o *vorticità* corrispondente al cinematico  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ .

Spesso è conveniente rappresentare  $\mathbf{W}$  con il vettore assiale ad esso associato

$$\boldsymbol{\omega} = \text{axial } \mathbf{W} \iff \mathbf{W} \mathbf{h} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x}) ,$$

che è il vettore *velocità angolare* dell'atto di rotazione locale.

A partire da una posizione di riferimento  $\Omega$  si consideri ora una mappa di trasferimento  $\mathbf{k} : \Omega \times I \mapsto \mathbb{S}$  con  $\mathbf{k}(\Omega, t) = \Omega(t)$ .

Sia quindi  $\mathbf{F}_k = d\mathbf{k} = \mathbf{R}_k \mathbf{U}_k$  la decomposizione polare della trasformazione tangente alla mappa di trasferimento.

Denotando con un punto sovrapposto la derivata rispetto al tempo  $t \in I$ , risulta

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{W} - \mathbf{W}_R &= \mathbf{F}_k^{-T} \text{emi}(\mathbf{U}_k \dot{\mathbf{U}}_k) \mathbf{F}_k^{-1} , \\ \mathbf{D} &= \mathbf{F}_k^{-T} \text{sym}(\mathbf{U}_k \dot{\mathbf{U}}_k) \mathbf{F}_k^{-1} , \end{aligned}}$$

dove si è posto  $\mathbf{W}_R = \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{R}_k^T$ .

Si noti che, essendo  $\mathbf{R}_k \mathbf{R}_k^T = \mathbf{I}$ , si ha che

$$(\mathbf{R}_k \mathbf{R}_k^T)' = \mathbf{R}_k \dot{\mathbf{R}}_k^T + \dot{\mathbf{R}}_k \mathbf{R}_k^T = \mathbf{0},$$

e quindi il tensore  $\mathbf{W}_R$  è emisimmetrico.

### 9.3. Trasporto della circolazione e della vorticità

Una curva nello spazio  $\mathbb{S}$  è una mappa  $\mathbf{c}_{\mathbb{S}} : [0, 1] \mapsto \mathbb{S}$  differenziabile a tratti. La curva è chiusa se  $\mathbf{c}_{\mathbb{S}}(0) = \mathbf{c}_{\mathbb{S}}(1)$ .

Dalla proposizione 8.3 (p. 72) si deduce il seguente notevole risultato [51].

**Proposizione 9.3. Trasporto della circolazione.** *Sia  $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} : [0, 1] \mapsto \mathcal{B}$  una curva materiale chiusa in  $\mathcal{B}$ ,  $\chi : \mathcal{B} \times I \mapsto \mathbb{S}$  un processo evolutivo di  $\mathcal{B}$  e  $\mathbf{v}$  il corrispondente campo spaziale di velocità al tempo  $t \in I$ . Allora lungo la traiettoria risulta*

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{h} d\lambda,$$

dove  $\mathbf{h} = d\mathbf{c}/d\lambda$  è la tangente alla curva trascinata dal processo, definita da  $\mathbf{c}_t(\lambda) = \chi_t(\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(\lambda))$ , avendo posto  $\chi_t(\mathbf{p}) = \chi(\mathbf{p}, t)$ .

**Dim.** Nella proposizione 8.3 (p. 72) è stata stabilita la formula

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \int_{\mathbf{c}_t} (\dot{\mathbf{u}} + (d\mathbf{v})^T \mathbf{u}) \cdot \mathbf{h} d\lambda.$$

Ponendo  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  ed osservando che

$$\oint_{\mathbf{c}_t} (d\mathbf{v})^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{v}) \mathbf{h} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\lambda} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) d\lambda = 0,$$

si perviene al risultato.  $\square$

La proposizione 9.3 può enunciarsi affermando che

- in ogni processo evolutivo  $\chi : \mathcal{B} \times I \mapsto \mathbb{S}$  il tasso di variazione della circolazione lungo un circuito materiale è pari alla circuitazione dell'accelerazione.

Un importante corollario è dovuto a LORD KELVIN.

**Proposizione 9.4. Invarianza della circolazione.** *Il processo conserva la circolazione lungo circuiti materiali se e solo se il campo di accelerazione è il gradiente di un potenziale:*

$$\dot{\mathbf{v}} = \text{grad } \alpha \Rightarrow \frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda = 0.$$

**Dim.** Ponendo  $\dot{\mathbf{v}} = \text{grad } \alpha$  nella formula della proposizione 9.3 si ha

$$\frac{d}{dt} \oint_{\mathbf{c}_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \text{grad } \alpha \cdot \mathbf{h} d\lambda = \oint_{\mathbf{c}_t} \frac{d(\alpha \circ \mathbf{c})}{d\lambda} d\lambda = 0,$$

e quindi si perviene alla condizione sufficiente.  $\square$

Valutando la derivata materiale rispetto al tempo del gradiente spaziale di velocità, si perviene al seguente interessante risultato (vedi [51]).

**Proposizione 9.5. Trasporto della vorticità.** *La vorticità  $\mathbf{W}$  soddisfa le seguenti equazioni differenziali*

$$(\mathbf{F}^T \mathbf{W}_m \mathbf{F})' = \mathbf{F}^T \mathbf{J}_m \mathbf{F},$$

$$\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{W} = \mathbf{J},$$

dove  $\mathbf{J} = \text{anti}(d\dot{\mathbf{v}})$ .

**Dim.** Derivando la formula  $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m \mathbf{F}$  si ha che  $\ddot{\mathbf{F}} = d_m \dot{\mathbf{v}}_m = (d\dot{\mathbf{v}})_m \mathbf{F}$ . Allora dalla egualianza

$$2 \mathbf{F}^T \mathbf{W}_m \mathbf{F} = \mathbf{F}^T (\mathbf{L}_m - \mathbf{L}_m^T) \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F},$$

derivando rispetto al tempo si ha che

$$2 (\mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{F})' = \mathbf{F}^T \ddot{\mathbf{F}} - \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} = \mathbf{F}^T d\dot{\mathbf{v}}_m \mathbf{F} - \mathbf{F}^T d\dot{\mathbf{v}}_m^T \mathbf{F} = 2 \mathbf{F}^T \mathbf{J}_m \mathbf{F}.$$

Per ottenere la seconda formula si derivi rispetto al tempo l'egualianza  $\mathbf{L}_m = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ , tenendo presente la formula per la derivata dell'inversa (vedi [61])

$$(\mathbf{F}^{-1})' = -\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}.$$

Si ottiene allora

$$\dot{\mathbf{L}}_m = \ddot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \dot{\mathbf{F}} (\mathbf{F}^{-1})' = \ddot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - (\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1})^2 = \ddot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} - \mathbf{L}_m^2.$$

Osservando poi che  $\ddot{\mathbf{F}} = d_m \dot{\mathbf{v}}_m = (d\dot{\mathbf{v}})_m \mathbf{F}$  si ha che  $\ddot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = (d\dot{\mathbf{v}})_m$  e quindi

$$\dot{\mathbf{L}} = d\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{L}^2.$$

Prendendo la parte antisimmetrica di  $\dot{\mathbf{L}}$  ed osservando che  $\mathbf{W} = \text{anti} \mathbf{L}$ , si giunge alla formula

$$\dot{\mathbf{W}} + \frac{1}{2} [\mathbf{L}^2 - (\mathbf{L}^T)^2] = \mathbf{J}.$$

Essendo

$$\mathbf{L}^2 - (\mathbf{L}^T)^2 = (\mathbf{D} + \mathbf{W})^2 - (\mathbf{D} - \mathbf{W})^2 = \mathbf{W}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{W},$$

dalla formula precedente si ottiene

$$\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}\mathbf{D} + \mathbf{D}\mathbf{W} = \mathbf{J},$$

che è il risultato cercato.  $\square$

Come corollario si deduce il seguente notevole risultato dovuto a LAGRANGE e CAUCHY.

**Proposizione 9.6. Teorema di Lagrange-Cauchy.** *Se il campo di accelerazione è il gradiente di un potenziale allora la parte antisimmetrica del gradiente di velocità è nulla durante tutto il moto se si annulla in un istante.*

**Dim.** Se  $\dot{\mathbf{v}} = \text{grad } \alpha$  allora  $\mathbf{J} = \mathbf{O}$  e quindi risulta

$$\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{WD} + \mathbf{DW} = \mathbf{O}.$$

Posto  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{O}$  l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale mostra che la soluzione  $\mathbf{W}(t)$  è identicamente nulla.  $\square$

■ Una curva dello spazio  $\mathbf{c}_{\mathbb{S}} : [0, 1] \mapsto \mathbb{S}$  è una *linea di vortice* se è tangente in ogni punto al vettore assiale della vorticità in quel punto. Dunque deve essere

$$\mathbf{W} \frac{dc}{d\lambda} = \mathbf{w} \times \frac{dc}{d\lambda} = \mathbf{o}.$$

Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 9.7. Teorema di Helmholtz.** *Se il campo di accelerazione è il gradiente di un potenziale allora le linee di vortice sono trasportate dal moto.*

**Dim.** Sia  $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} : [0, 1] \mapsto \mathcal{B}$  una curva materiale e  $\mathbf{c}_t(\lambda) = (\chi_t \circ \mathbf{c}_{\mathcal{B}})(\lambda)$ , la curva trascinata dal processo al tempo  $t \in I$ .

Sia  $\mathbf{h}_{\mathcal{B}}(\lambda)$  la tangente alla curva  $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}$  in  $\lambda \in [0, 1]$  e  $\mathbf{h}_t(\lambda) = \mathbf{F} \mathbf{h}_{\mathcal{B}}(\lambda)$  la tangente alla curva trascinata dal moto.

Se la curva  $\mathbf{c}_t = \chi_t \circ \mathbf{c}_{\mathcal{B}}$  è una *linea di vortice* si ha che

$$\mathbf{W}_t \mathbf{h}_t = \mathbf{F}_t^T \mathbf{W}_t \mathbf{F}_t \mathbf{h}_{\mathcal{B}} = \mathbf{o},$$

e dunque che  $\mathbf{F}_t^T \mathbf{W}_t \mathbf{F}_t \mathbf{h}_{\mathcal{B}} = \mathbf{o}$ .

In forza della proposizione 9.5 il tensore  $\mathbf{F}_t^T \mathbf{W}_t \mathbf{F}_t$  è costante nel tempo. Pertanto sarà anche  $\mathbf{F}_{\tau}^T \mathbf{W}_{\tau} \mathbf{F}_{\tau} \mathbf{h}_{\mathcal{B}} = \mathbf{o}$  e quindi

$$\mathbf{W}_{\tau} \mathbf{F}_{\tau} \mathbf{h}_{\mathcal{B}} = \mathbf{W}_{\tau} \mathbf{h}_{\tau} = \mathbf{o},$$

per ogni  $\tau \in I$ , e ciò fornisce il risultato.  $\square$

La trattazione delle proprietà dei vortici può essere svolta, in alternativa, sulla base di una formula notevole che consente di applicare il teorema del trasporto superficiale della proposizione 8.4 (p. 72) ed il criterio di HELMHOLTZ-ZORAWSKI della proposizione 8.6 (p. 74).

Si premette il seguente lemma.

**Proposizione 9.8. Un'identità differenziale.** *Sia  $\mathbf{v} \in C^2(\Omega)$  un campo vettoriale spaziale nel dominio  $\Omega$ . Allora sussiste l'identità*

$$\text{rot} (d\mathbf{v}[\mathbf{v}]) = \text{rot} [(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v}].$$

**Dim.** Si noti che, essendo  $\text{rot } \mathbf{v} = 2$  axial emi grad , risulta

$$(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v} = 2 (\text{emi grad } \mathbf{v})[\mathbf{v}] = d\mathbf{v}[\mathbf{v}] - (d\mathbf{v})^T[\mathbf{v}].$$

Si tratta quindi di mostrare che

$$\text{rot}(d\mathbf{v}[\mathbf{v}]) = \text{rot}[d\mathbf{v}[\mathbf{v}] - (d\mathbf{v})^T[\mathbf{v}]],$$

e cioè che

$$\text{rot}[(d\mathbf{v})^T[\mathbf{v}]] = \mathbf{o}.$$

A tal fine si osservi che, per ogni  $\mathbf{a}, \mathbf{h} \in V$  si ha

$$d[(d\mathbf{v})^T[\mathbf{v}] \cdot \mathbf{a}][\mathbf{h}] = d[(d\mathbf{v})[\mathbf{a}] \cdot \mathbf{v}][\mathbf{h}] = d^2\mathbf{v}[\mathbf{a}, \mathbf{h}] \cdot \mathbf{v} + (d\mathbf{v})[\mathbf{a}] \cdot (d\mathbf{v})[\mathbf{h}].$$

Il risultato è pertanto una diretta conseguenza della evidente simmetria di tale forma bilineare rispetto alla coppia di campi costanti  $\mathbf{a}, \mathbf{h} \in V$ .  $\square$

Dalla proposizione 9.8 si deduce la seguente formula notevole [41].

$$\boxed{\text{rot } \dot{\mathbf{v}} = (\text{rot } \mathbf{v})' + \text{rot}(d\mathbf{v}[\mathbf{v}]) = (\text{rot } \mathbf{v})' + \text{rot}[(\text{rot } \mathbf{v}) \times \mathbf{v}].}$$

Allora dal teorema di STOKES

$$\oint_{C_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda = \oint_{S_t} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} da,$$

e dal teorema del trasporto superficiale (proposizione 8.4 (p. 72)) ponendo  $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{v}$  e tenendo presente che  $\text{div } \mathbf{u} = \text{div } \text{rot } \mathbf{v} = 0$  si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \oint_{C_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} d\lambda &= \frac{d}{dt} \oint_{S_t} \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{h} da = \int_{S_t} [(\text{rot } \mathbf{v})' + \text{rot}(\text{rot } \mathbf{v} \times \mathbf{v})] \cdot \mathbf{n} da = \\ &= \int_{S_t} (\text{rot } \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{n} da. \end{aligned}$$

Dunque

- la circolazione è invariante se e solo se  $\text{rot } \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{o}$  e cioè se l'accelerazione  $\dot{\mathbf{v}}$  ammette un potenziale.

Inoltre, ponendo  $\mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{v}$ , la condizione di HELMHOLTZ-ZORAWSKI (proposizione 8.6 (p. 74)) assume la forma

$$\boxed{\text{rot } \dot{\mathbf{v}} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{o}},$$

e ciò assicura che se l'accelerazione  $\dot{\mathbf{v}}$  ammette un potenziale allora le linee vorticose sono linee materiali. Si ritrova così il teorema di HELMHOLTZ, proposizione 9.7.

#### 9.4. Operatore cinematico

Sia  $\mathcal{H}(\Omega)$  uno spazio lineare i cui elementi siano campi vettoriali su  $\Omega$ .

- Un *operatore cinematico* è un operatore lineare  $\mathbf{B} \in L(\mathcal{V}(\Omega), \mathcal{H}(\Omega))$  che ad ogni cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  in  $\Omega$  associa un campo  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  su  $\Omega$  che gode della seguente proprietà caratteristica
- i cinematismi rigidi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)$  in  $\Omega$  sono quelli cui corrisponde un campo vettoriale  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  identicamente nullo su  $\Omega$ .

In altri termini si richiede che il sottospazio dei cinematismi rigidi costituisca il nucleo dell'operatore cinematico e cioè che risulti

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega) = \text{Ker } \mathbf{B}.$$

- Nel modello del continuo di CAUCHY l'operatore cinematico è l'operatore differenziale *symgrad* che ad ogni cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) = C^1(\bar{\Omega})$  associa il campo di tensori simmetrici  $\text{sym grad } \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega) = C^0(\bar{\Omega})$ .

Per mostrare che l'operatore differenziale *symgrad* gode della proprietà caratteristica di un operatore cinematico si fa ricorso al seguente fondamentale risultato, analogo a quello enunciato nella proposizione 4.2 (p. 37) con riferimento alla deformazione finita di un corpo.

**Proposizione 9.9. Atti di deformazione omogenea.** *Se il campo tensoriale simmetrico  $\mathbf{D} = \text{sym grad } \mathbf{v}$  è costante, risultano costanti anche il gradiente  $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$  e la sua parte emisimmetrica  $\mathbf{W} = \text{emi grad } \mathbf{v}$ .*

**Dim.** Se  $\text{sym grad } \mathbf{v}$  è costante, denotando con  $d\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  la derivata direzionale in  $\mathbf{x}$  lungo  $\mathbf{h}$ , risulta

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_2 + d\mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_1 = \text{costante} \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x}).$$

Derivando in direzione  $\mathbf{h}_3 \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  si ha

- i)  $d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_2 + d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_2 \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_1 = 0,$
- ii)  $d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_2 + d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_2 \mathbf{h}_1 \cdot \mathbf{h}_3 = 0,$
- iii)  $d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_3 + d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_3 \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_1 = 0.$

in cui ii) e iii) sono ottenute da i) scambiando gli indici 1 e 3 e gli indici 2 e 3.

Dalle relazioni precedenti si deduce che

$$d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \cdot \mathbf{h}_3 = 0 \quad \forall \mathbf{h}_1 \mathbf{h}_2 \mathbf{h}_3 \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x}) \iff d^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Poichè il dominio  $\Omega$  è per definizione connesso, il gradiente  $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$  risulta costante e l'asserto è dimostrato.  $\square$

Si può ora enunciare un basilare *criterio* dovuto a EULER (1761) [2].

**Proposizione 9.10. Criterio di Euler.** *Un cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  in  $\Omega$  è un cinematismo rigido semplice se e solo se la parte simmetrica del gradiente spaziale è nulla*

$$\text{sym grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \iff \mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

**Dim.** Dalla proposizione 9.9 si deduce che dalla condizione

$$\text{sym grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

segue che il gradiente  $\text{grad } \mathbf{v}$  del cinematismo  $\mathbf{v}$  è emisimmetrico e costante e cioè che per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$  risulta  $\text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}$  con  $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$ . Dunque

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{W}[\mathbf{y} - \mathbf{x}] = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega.$$

L'implicazione inversa è evidente.  $\square$

Ecco ora una forma alternativa della proposizione 9.10.

**Proposizione 9.11. Stazionarietà della lunghezza.** *Un cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  del corpo  $\mathbb{T}_B$  in  $\Omega$  non tende a far variare la lunghezza di una qualsiasi curva materiale se e solo se la parte simmetrica del suo gradiente spaziale è nulla*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{c}_t} ds = 0, \quad \forall \mathbf{c} \subset \Omega \iff \text{sym grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

dove  $\mathbf{c}_t = \chi(c_B, t)$  e  $\mathbf{c}_B \subset \mathcal{B}$  è un'arbitraria curva materiale regolare.

**Dim.** Sia  $\mathbf{t}$  il versore tangente a  $\mathbf{c}$ . Ponendo  $\mathbf{u} = \mathbf{t}$  nella ii) della proposizione 8.3 (p. 72), la formula di EULER (sezione 7.1 (p. 61)) e la relazione  $\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{o}$  implicano che

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(c_B, t)} ds = \int_{\chi(c_B, t)} [\dot{\mathbf{t}} + (d\mathbf{v})^T[\mathbf{t}]] \cdot \mathbf{t} ds = \int_{\chi(c_B, t)} [\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{D}\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}] ds = \int_{\chi(c_B, t)} (\mathbf{D}\mathbf{t}) \cdot \mathbf{t} ds,$$

dove  $\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \text{sym grad } \mathbf{v}$ . L'arbitrarietà di  $\mathbf{t} \in \mathbf{V}$  implica il risultato.  $\square$



**Osservazione 9.1.** A W. KILLING<sup>20</sup> (1892) [26] è dovuto un criterio che generalizza quello di EULER al caso in cui la struttura è costituita da una sottovarietà  $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$  di una varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{S}, g\}$  con tensore metrico  $g \in L^2(\mathbb{T}_{\mathbb{S}}; \mathfrak{R})$  (vedi [52], [53]).

La formula di KILLING esprime la deformazione tangente in termini della derivata di LIE del tensore metrico lungo il flusso indotto dal campo di velocità  $\mathbf{v} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$

$$\boxed{\mathbf{B}\mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} g := \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* g .}$$

Il flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  associato al cinematismo  $\mathbf{v} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  è soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}), t) = \mathbf{v}_t(\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{k}_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

L'espressione della deformazione tangente per il continuo di EULER-CAUCHY può essere dedotta derivando rispetto al tempo le misure di deformazione finita di GREEN e di ALMANSI e valutando la derivata all'istante iniziale. Infatti si ha che

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{E}_{t,s} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\mathbf{F}^T{}_{t,s} \mathbf{F}_{t,s}) = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}}) = \text{sym } \dot{\mathbf{F}} = \text{sym } \mathbf{L} = \mathbf{D}.$$

Analogamente, essendo  $(\mathbf{F}^{-1})' = -\dot{\mathbf{F}}$ , si ha che

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{A}_{t,s} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\mathbf{F}_{t,s}^{-T} \mathbf{F}_{t,s}^{-1}) = -\text{sym } (\mathbf{F}^{-1})' = \text{sym } \mathbf{L} = \mathbf{D}.$$

Alle stesse espressioni si può giungere applicando la formula di KILLING alle misure di deformazione finita di GREEN e di ALMANSI espresse in termini di spinte del tensore metrico. Infatti per la misura di GREEN  $\frac{1}{2} (\mathbf{k}^* g - g)$  si ha che

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} g(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\mathbf{k}_{t,s}^* g)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} g(\mathbf{F}_{t,s} \mathbf{h}, \mathbf{F}_{t,s} \mathbf{h}) = g(\mathbf{D} \mathbf{h}, \mathbf{h}).$$

Dunque

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} g = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* g = \mathbf{d},$$

dove  $\mathbf{d} \in L^2(V; \mathfrak{R})$  è la forma due volte covariante del tensore misto  $\mathbf{D} \in L(V; V)$ .

---

<sup>20</sup> WILHELM KARL JOSEPH KILLING (1847-1923). Allievo di WEIERSTRASS a Berlino portò contributi originali alla geometria non euclidea. Le algebre introdotte da LIE intorno al 1870 furono definite indipendentemente da KILLING nel 1883 insieme ai concetti ora noti come subalgebre e matrici di CARTAN sulle quali egli fondò la classificazione delle algebre di LIE semplici. A KILLING è dovuto il termine *equazione caratteristica* di una matrice.

Osservando che  $\mathbf{k}_{s,t}^* \mathbf{g} = \mathbf{k}_{t,s*} \mathbf{g}$ , per la misura di ALMANSI  $\frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{k}_* \mathbf{g})$  si ha

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{v}}} \mathbf{g}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\mathbf{k}_{s,t}^* \mathbf{g})(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{g}(\mathbf{F}_{t,s}^{-1} \mathbf{h}, \mathbf{F}_{t,s}^{-1} \mathbf{h}) = \mathbf{g}(\mathbf{D} \mathbf{h}, \mathbf{h}), \end{aligned}$$

dove  $\bar{\mathbf{v}} = -\mathbf{k}_{s,t*} \mathbf{v}_t$  è il campo di velocità associato al flusso inverso (vedi sezione 12.1 (p. 130)) e si è fatto ricorso alla formula  $(\mathbf{F}^{-1})' = -\dot{\mathbf{F}}$ .

La formula di KILLING è ulteriormente illustrata nella sezione 12.7 (p. 156)). Nella sezione IV.2 (p. 379) si farà ricorso alla formula di KILLING per dedurre un'espressione generale della deformazione tangente di modelli strutturali che sono sottovarietà di una varietà ambiente. La formula generale è quindi applicata alla descrizione della statica delle funi e delle membrane che infatti sono sottovarietà dello spazio euclideo. ■

## 9.5. Velocità di dilatazione e di scorrimento angolare

Si consideri, in corrispondenza di un punto  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$  del corpo nella configurazione  $\Omega(t)$ , una fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega(t)}(\mathbf{x})$  che, per semplificare le formule, si suppone di norma unitaria.

Se il corpo subisce un trasferimento  $\mathbf{k}$  dalla posizione spaziale  $\Omega(t)$  alla posizione spaziale  $\Omega(\tau)$  con gradiente  $\mathbf{F}_t = \text{grad } \mathbf{k}$ ,

- il punto  $\mathbf{x} \in \Omega(t)$  si porta nel punto  $\mathbf{k}(\mathbf{x}, \tau) \in \Omega(\tau)$  e
- la fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega(t)}(\mathbf{x})$  si trasforma di conseguenza nella fibra lineare  $\mathbf{F}_t \mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega(\tau)}(\mathbf{k}(\mathbf{x}, \tau))$ .

La fibra lineare subisce quindi una dilatazione pari a

$$\varepsilon_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\|\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{h}\| - \|\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \|\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, \tau)\mathbf{h}\| - 1.$$

La velocità di dilatazione in  $\Omega$  si ottiene derivando rispetto a  $\tau$  per  $\tau = t$

$$\dot{\varepsilon}_{\mathbf{h}}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{d\tau} \|\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, t)\mathbf{h}\| \Big|_{\tau=t} = \|\mathbf{F}_t(\mathbf{x}, t)\mathbf{h}\|'.$$

Omettendo gli argomenti ed esplicitando la derivata, si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}_t \mathbf{h}\|' &= (\sqrt{\mathbf{F}_t \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}_t \mathbf{h}})' = (\sqrt{\mathbf{U}_t \mathbf{h} \cdot \mathbf{U}_t \mathbf{h}})' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{U}_t \mathbf{h} \cdot \mathbf{U}_t \mathbf{h}}} (\mathbf{U}_t \mathbf{h} \cdot \mathbf{U}_t \mathbf{h})' = \\ &= \frac{1}{2} [(\dot{\mathbf{U}}_t \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot (\dot{\mathbf{U}}_t \mathbf{h})] = \\ &= (\dot{\mathbf{U}}_t \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{Dh}) \cdot \mathbf{h}. \end{aligned}$$

La *velocità di dilatazione* della fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_{\Omega(t)}(\mathbf{x})$ , ha pertanto l'espressione

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{h}) = (\mathbf{Dh}) \cdot \mathbf{h},$$

in cui si è adottata la notazione alternativa  $\dot{\varepsilon}(\mathbf{h}) = \dot{\varepsilon}_{\mathbf{h}}$ .

La velocità di dilatazione è quindi la restrizione alla sfera unitaria (costituita dai versori  $\mathbf{h}$ ) della forma quadratica associata al tensore  $\mathbf{D}$ .

Si considerino ora due fibre lineari  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  in  $\mathbb{T}_{\Omega(t)}(\mathbf{x})$  di norma unitaria e non parallele. Nella posizione spaziale  $\Omega(\tau)$  esse formano un angolo  $\alpha_{\mathbf{nm}}(\tau)$  il cui coseno vale

$$\cos \alpha_{\mathbf{nm}}(\tau) = \frac{\mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{m}}{\|\mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{n}\| \|\mathbf{F}_t(\tau) \mathbf{m}\|} = \frac{\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{m}}{\|\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{n}\| \|\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{m}\|},$$

e, derivando rispetto a  $\tau$  per  $\tau = t$ , si ottiene l'espressione

$$-\left[\operatorname{sen} \alpha_{\mathbf{nm}}(t)\right] \dot{\alpha}_{\mathbf{nm}}(t) = \frac{d}{d\tau} \left( \frac{\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{m}}{\|\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{n}\| \|\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{m}\|} \right) \Big|_{\tau=t}.$$

Essendo poi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{\|\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{n}\| \|\mathbf{U}_t(\tau) \mathbf{m}\|} \right) \Big|_{\tau=t} = \|\mathbf{U}_t \mathbf{n}\|' + \|\mathbf{U}_t \mathbf{m}\|', \\ \|\mathbf{U}_t \mathbf{n}\|' = \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{U}_t \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_t \mathbf{n})'}{\|\mathbf{U}_t \mathbf{n}\|} = \frac{\dot{\mathbf{U}}_t \mathbf{n} \cdot \mathbf{U}_t \mathbf{n}}{\|\mathbf{U}_t \mathbf{n}\|} = (\mathbf{Dn}) \cdot \mathbf{n} = \dot{\varepsilon}_{\mathbf{n}}, \end{array} \right.$$

si perviene in definitiva alla formula che esprime la velocità di diminuzione dell'angolo tra le fibre lineari  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{m}$  in  $\mathbb{T}_{\Omega(t)}(\mathbf{x})$

$$\dot{\gamma}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = -\dot{\alpha}_{\mathbf{nm}} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha_{\mathbf{nm}}} \left[ 2 (\mathbf{Dn}) \cdot \mathbf{m} - (\dot{\varepsilon}_{\mathbf{n}} + \dot{\varepsilon}_{\mathbf{m}}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} \right]$$

che viene detta *velocità di scorrimento angolare* tra le fibre lineari  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$ .

Se le fibre lineari  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  sono inizialmente ortogonali risulta

- $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$ ,
- $\sin \alpha_{\mathbf{nm}}(t) = 1$ ,

per cui la velocità di scorrimento angolare assume la forma semplice

$$\dot{\gamma}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 2 (\mathbf{D}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}.$$

La velocità di scorrimento angolare è quindi pari al doppio del valore della forma bilineare associata al tensore  $\mathbf{D}$  in corrispondenza dei versori ortogonali  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$ .

## 9.6. Matrice della deformazione tangente

Gli elementi della matrice associata al tensore simmetrico della deformazione tangente  $\mathbf{D}$  rispetto ad una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  di  $V$  hanno le espressioni

$$D_{ij} = (\mathbf{D} \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{D} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j.$$

Ricordando le formule che esprimono le velocità di dilatazione e di scorrimento angolare si ha che

$$\dot{\varepsilon}_i = (\mathbf{D} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i = D_{ii}, \quad \dot{\gamma}_{ij} = 2 (\mathbf{D} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = 2 D_{ij}, \quad i \neq j.$$

La matrice associata al tensore  $\mathbf{D}$  si scrive dunque

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{12} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{13} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{12} & \dot{\varepsilon}_2 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{23} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{13} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{23} & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}.$$

- Gli elementi della diagonale principale della matrice rappresentano le velocità di dilatazione delle fibre lineari parallele ai vettori  $\mathbf{e}_i$  della base,
- gli elementi fuori della diagonale principale rappresentano la metà delle velocità di scorrimento angolare che avvengono tra le corrispondenti fibre lineari.

La velocità di dilatazione di una fibra lineare di versore  $\mathbf{h} = \{h_1, h_2, h_3\}$  è espressa da

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}(\mathbf{h}) &= (\mathbf{D}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = D_{ij} h_i h_j = \\ &= \dot{\varepsilon}_1 h_1^2 + \dot{\varepsilon}_2 h_2^2 + \dot{\varepsilon}_3 h_3^2 + \dot{\gamma}_{12} h_1 h_2 + \dot{\gamma}_{23} h_2 h_3 + \dot{\gamma}_{13} h_1 h_3.\end{aligned}$$

Le componenti  $\{h_1, h_2, h_3\}$  del versore  $\mathbf{h}$  sono coseni direttori e quindi, detti  $\alpha_i \quad i = 1, 2, 3$  gli angoli che  $\mathbf{h}$  forma con gli assi del riferimento, si ha

$$\begin{cases} h_1 = \cos \alpha_1 \\ h_2 = \cos \alpha_2 \\ h_3 = \cos \alpha_3 \end{cases}$$

La velocità di scorrimento angolare  $\dot{\gamma}(\mathbf{n}, \mathbf{m})$  tra due fibre lineari ortogonali rappresentata dai versori  $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$  e  $\mathbf{m} = \{m_1, m_2, m_3\}$  è data da

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) &= 2(\mathbf{D}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 2 D_{ij} n_i m_j = \\ &= 2(\dot{\varepsilon}_1 n_1 m_1 + \dot{\varepsilon}_2 n_2 m_2 + \dot{\varepsilon}_3 n_3 m_3) + \\ &\quad + \dot{\gamma}_{12}(n_1 m_2 + m_1 n_2) + \dot{\gamma}_{23}(n_2 m_3 + m_2 n_3) + \dot{\gamma}_{13}(n_1 m_3 + m_1 n_3).\end{aligned}$$

Se  $\alpha_i \quad i = 1, 2, 3$  e  $\beta_i \quad i = 1, 2, 3$  sono gli angoli che  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  formano con gli assi del riferimento, si ha

$$\begin{cases} n_1 = \cos \alpha_1 & \begin{cases} m_1 = \cos \beta_1 \\ m_2 = \cos \beta_2 \\ m_3 = \cos \beta_3 \end{cases} \\ n_2 = \cos \alpha_2 \\ n_3 = \cos \alpha_3 \end{cases}$$

Un cinematismo  $\mathbf{v}$  induce in ogni punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  un atto di deformazione locale rappresentato dal tensore simmetrico  $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \text{sym grad } \mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

Le componenti della matrice del tensore simmetrico  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  rispetto alla base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , espresse in termini delle derivate parziali del cinematismo  $\mathbf{v}$ , si scrivono in forma indiciale come

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

ed in forma esplicita

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial x_1}, & \dot{\varepsilon}_2 &= \frac{\partial \dot{v}_2}{\partial x_2}, & \dot{\varepsilon}_3 &= \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial x_3}, \\ \dot{\gamma}_{12} &= \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{v}_2}{\partial x_1}, & \dot{\gamma}_{13} &= \frac{\partial \dot{v}_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial x_1}, & \dot{\gamma}_{23} &= \frac{\partial \dot{v}_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \dot{v}_3}{\partial x_2}.\end{aligned}$$

### 9.7. Rappresentazione di Voigt

Per quanto detto in precedenza un atto di deformazione  $\mathbf{D}$  può essere rappresentato come somma di tre atti di estensione e di tre atti di scorrimento angolare.

Siano dunque  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  due versori ortogonali in  $V$ . Allora

- l'atto di estensione di entità  $\dot{\varepsilon}$  in direzione della fibra lineare  $\mathbf{n}$  è il tensore

$$\dot{\varepsilon} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}),$$

- l'atto di scorrimento di entità  $\dot{\gamma}$  tra le fibre lineari  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  è il tensore

$$\dot{\gamma} \operatorname{sym} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}).$$

Fissata quindi una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  in  $V$  sussiste la seguente formula di rappresentazione

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \dot{\gamma}_{ij} \operatorname{sym} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j).$$

Le matrici rappresentative di  $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$  sono date da

$$[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



per cui la matrice rappresentativa di  $\operatorname{sym} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$  è

$$\operatorname{sym} [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

La formula di rappresentazione espressa in termini di matrici restituisce, sommando i 6 termini, la matrice  $[\mathbf{D}]$  dell'atto di deformazione.

Si noti che i tensori simmetrici  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$  e  $\operatorname{sym} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  con  $i < j$  sono tra loro ortogonali per cui, in virtù la formula di rappresentazione, l'insieme dei sei tensori simmetrici

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \frac{1}{2} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1), \\ \frac{1}{2} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2), \end{array} \right.$$

costituisce una base ortogonale per lo spazio di dimensione 6 di tutti i tensori simmetrici.



Rispetto a tale base il tensore  $\mathbf{D}$  dell'atto di deformazione si scrive come un vettore numerico

$$[\mathbf{D}] = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}\}.$$

Questa rappresentazione del tensore  $\mathbf{D}$  è detta *rappresentazione ingegneristica* o rappresentazione di VOIGT<sup>21</sup> ed è quella adottata nelle procedure di calcolo numerico automatico.

Essa presenta infatti il vantaggio di ricondurre le operazioni tra tensori ad operazioni di tipo vettoriale e di ottimizzare le informazioni necessarie a caratterizzare un tensore simmetrico.

Le considerazioni svolte possono naturalmente essere estese anche a tensori non simmetrici.

### 9.8. Valor medio della deformazione tangente

Dal teorema della divergenza si ha che

$$\int_{\partial\Omega} \dot{v}_i n_j \, da = \int_{\Omega} \dot{v}_{i,j} \, dv \iff \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \otimes \mathbf{n} \, da = \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v} \, dv,$$

e quindi, prendendo la parte simmetrica di ambo i membri, si ottiene la formula

$$\mathbf{D}_{\text{med}} = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\Omega} \text{sym grad } \mathbf{v} \, dv = \frac{1}{\text{vol}(\Omega)} \int_{\partial\Omega} \text{sym}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) \, da,$$

che consente di esprimere il valor medio dell'atto di deformazione in termini dei valori al contorno del cinematismo.

### 9.9. Prima diseguaglianza di Korn

Nella sezione 9.4 (p. 83) si è mostrato come un cinematismo dia luogo ad un campo costante di deformazioni tangentì solo se il campo dei gradienti del cinematismo è costante.

Più in generale vale il seguente risultato.

- Se il valor medio quadratico dell'atto di deformazione tende a zero, allora il valor medio quadratico del cinematismo e del suo gradiente tendono a zero, a meno di un atto di moto rigido.

---

<sup>21</sup> WOLDEMAR VOIGT (1850-1919). Allievo di FRANZ NEUMANN a Königsberg e poi professore di fisica teorica a Göttingen, ha portato importanti contributi sia teorici che sperimentali all'elasticità anisotropa. A VOIGT è dovuta la prova sperimentale che l'elasticità isotropa è descritta da due costanti e l'introduzione della nozione di tensore nella teoria dell'elasticità.

In altri termini ciò significa che a piccoli atti di deformazione corrispondono piccoli cinematicismi e piccoli atti di rotazione locali.

Questa fondamentale proprietà della cinematica di un corpo continuo  $\mathbb{T}_B$  è basata su due fondamentali diseguaglianze dovute a A. KORN [31], [32], [33] e formulate nei primi anni del 1900.

La dimostrazione della seconda diseguagliaza è assai complessa ed è basata su risultati profondi di Analisi Funzionale e della teoria dei sistemi alle derivate parziali di tipo ellittico.

Una trattazione completa può trovarsi nell'articolo [48] (1972) di G. FICHERA. Una discussione dettagliata è anche fornita nel volume [59] dell'autore.

Alla seconda diseguagliaza di KORN si farà riferimento nel capitolo VIII per dimostrare la buona posizione del modello del continuo tridimensionale.

Si riporta di seguito la dimostrazione della prima diseguagliaza di KORN che è relativa al caso semplice in cui il cinematicismo si annulla sul contorno del dominio  $\Omega$  (GURTIN [47], 1972).

**Proposizione 9.12. Prima diseguagliaza di Korn.** *Si assume che il cinematicismo  $\mathbf{v}$  sia di classe  $C^2(\bar{\Omega})$  e che abbia valore nullo su  $\partial\Omega$ . Allora vale la diseguagliaza*

$$\int_{\Omega} \|\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} \geq c_{\mathbf{K}} \int_{\Omega} \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v}.$$

**Dim.** Si osservi che sussistono le identità

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 + \|\operatorname{emi} \operatorname{grad} \mathbf{u}\|^2 = \|\operatorname{grad} \mathbf{u}\|^2, \\ \|\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 - \|\operatorname{emi} \operatorname{grad} \mathbf{u}\|^2 = \operatorname{grad} \mathbf{v} : (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T, \\ \operatorname{grad} \mathbf{v} : (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T = \operatorname{div} [(\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} - (\operatorname{div} \mathbf{v}) \mathbf{v}] + (\operatorname{div} \mathbf{v})^2. \end{array} \right.$$

Essendo  $\mathbf{v} = \mathbf{o}$  su  $\partial\Omega$ , dalla seconda e terza di tali identità e dal teorema della divergenza si deduce che

$$\int_{\Omega} \|\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} = \int_{\Omega} \|\operatorname{emi} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \, d\mathbf{v}.$$

Risulta allora

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} &= \int_{\Omega} \|\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} + \int_{\Omega} \|\operatorname{emi} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} = \\ &= 2 \int_{\Omega} \|\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v}\|^2 \, d\mathbf{v} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})^2 \, d\mathbf{v}, \end{aligned}$$

e dunque la prima diseguagliaza di KORN sussiste con  $c_{\mathbf{K}} = \frac{1}{2}$ .  $\square$

### 9.10. Analisi spettrale della deformazione tangente

La simmetria del tensore della deformazione tangente  $\mathbf{D}$  assicura che esso ammette solo autovalori reali e che esiste una base ortonormale dello spazio costituita da autovettori di  $\mathbf{D}$ .

Le direzioni degli *autovettori* sono dette *direzioni principali* della deformazione tangente e gli *autovalori* sono detti *valori principali* della deformazione tangente.

In dipendenza della *molteplicità degli autovalori*, si possono distinguere tre situazioni.

- Se tutte le velocità principali di deformazione sono *semplici* la base principale è unica.
- Se una velocità principale di deformazione è *semplice* ed una è *doppia*, a quella semplice si associa un'unica direzione principale mentre a quella doppia si associa il piano principale ortogonale alla prima direzione.
- Se la velocità principale di deformazione è *tripla* ogni direzione è principale e la deformazione tangente si dice *sferica*.

Sia  $\mathbf{n}$  un versore principale e  $\lambda$  è il corrispondente autovalore. La velocità dilatazione di una fibra lineare parallela a  $\mathbf{n}$  vale

$$\dot{\varepsilon}(\mathbf{n}) = (\mathbf{D} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \lambda,$$

mentre lo scorrimento tangente tra la fibra lineare  $\mathbf{n}$  e qualsiasi fibra lineare  $\mathbf{m}$  ad essa ortogonale è nullo

$$\dot{\gamma}(\mathbf{n}, \mathbf{m}) = 2(\mathbf{D} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 2\lambda \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0.$$

In particolare è nullo lo scorrimento fra fibre materiali principali.

La matrice associata ad  $\mathbf{D}$  rispetto ad una base ortonormale di autovettori  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  assume pertanto la forma canonica

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix},$$

essendo  $\dot{\gamma}_{12} = \dot{\gamma}_{13} = \dot{\gamma}_{23} = 0$ .

Il tensore di deformazione tangente  $\mathbf{D}$  può essere rappresentato come somma di tre atti di estensione lungo tre direzioni principali

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \dot{\varepsilon}_i (\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i).$$

Tale formula consente di esprimere il tensore  $\mathbf{D}$  in funzione di autovalori ed autovettori ed è detta *rappresentazione spettrale* di  $\mathbf{D}$  e l'insieme degli autovalori è detto lo *spettro*.

### 9.11. Deformazione tangente triassiale, piana e monoassiale

In ogni punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  il tensore di deformazione tangente  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  associa alla fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  il vettore  $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  che rappresenta la velocità di variazione della fibra lineare  $\mathbf{h}$  per effetto della deformazione tangente pura della fibra  $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$ .

- La deformazione tangente in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  si dice *tridirezionale o triassiale* se al variare della fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  la velocità di variazione  $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  può avere una direzione qualsiasi.

Ciò si verifica se a nessuna delle direzioni principali di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  corrisponde un autovalore nullo.

- La deformazione tangente in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  si dice *bidirezionale o piano o biassiale* se la velocità di variazione  $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  di ogni fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  appartiene ad un piano  $\pi$  detto *piano della deformazione tangente*.

Ciò accade se la normale  $\mathbf{n}$  al piano  $\pi$  è una direzione principale di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  ed il corrispondente autovalore è nullo.

Infatti risulta

$$(\mathbf{D}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{D}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{h} = 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \pi \iff \mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

La matrice dell'atto di deformazione  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  rispetto ad una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{d}_3\}$  con  $\mathbf{d}_3 = \mathbf{n}$  assume quindi la forma

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} & 0 \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} & \dot{\varepsilon}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Al variare della fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  la velocità di variazione  $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  rimane sempre nel piano  $\pi$  pur variando di intensità e direzione, annullandosi per  $\mathbf{h}$  ortogonale al piano  $\pi$ .

- La deformazione tangente in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  si dice poi *unidirezionale o monoassiale* se la velocità di variazione  $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  di ogni fibra lineare  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  è proporzionale ad un vettore  $\mathbf{d}$  detto *asse della deformazione tangente*.

Ciò si verifica se tutte le direzioni ortogonali a  $\mathbf{d}$  sono autovettori di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  ed il corrispondente autovalore è nullo.

In tal caso la matrice associata a  $\mathbf{D}$  rispetto ad una base ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  con  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}$  assume la forma canonica

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al variare della fibra  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  la velocità di variazione  $\mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{h}$  appartiene sempre alla retta di direttore  $\mathbf{d}$  pur variando di intensità e si annulla per  $\mathbf{h}$  ortogonale a  $\mathbf{d}$ .

Si può in definitiva affermare che una deformazione tangente della fibra  $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  è

- *triassiale* se lo zero non è un autovalore di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ ,
- *biassiale* se lo zero è un autovalore semplice di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ ,
- *monoassiale* se lo zero è un autovalore doppio di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ .

### 9.12. Deformazione tangente sferica e deviatorica

La deformazione tangente  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  della fibra  $\mathbb{T}_\Omega(\mathbf{x})$  ad  $\Omega$  in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  può essere decomposto additivamente in due parti

- la *parte sferica*  $\mathbf{D}_S = \text{sph } \mathbf{D}$  proporzionale all'identità,
- la *parte deviatorica*  $\mathbf{D}_D = \text{dev } \mathbf{D}$  ad invariante lineare nullo,

così definite

$$\mathbf{D}_S = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{D}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{D}_D = \mathbf{D} - \mathbf{D}_S.$$

Risulta infatti  $\text{tr } \mathbf{D}_D = \text{tr} [\mathbf{D} - \mathbf{D}_S] = \text{tr } \mathbf{D} - \text{tr } \mathbf{D}_S = \text{tr } \mathbf{D} - \text{tr } \mathbf{D} = 0$  in quanto  $\text{tr } \mathbf{I} = 3$ .

Detta  $s = \text{tr } \mathbf{D}/3$  la media delle velocità principali di deformazione, le matrici associate a  $\mathbf{D}_S$  e  $\mathbf{D}_D$  rispetto ad una base ortonormale assumono la forma

$$[\mathbf{D}_S] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{D}_D] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 - s & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{13} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{12} & \dot{\varepsilon}_2 - s & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{23} \\ \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{13} & \frac{1}{2} \dot{\gamma}_{23} & \dot{\varepsilon}_3 - s \end{bmatrix}$$

Si ha quindi che

- la velocità di dilatazione volumetrica corrispondente ad  $\mathbf{D}_D$  è nulla,
- tutte le direzioni sono principali per  $\mathbf{D}_S$  con velocità principale di dilatazione lineare pari ad  $s$ ,
- le direzioni principali di  $\mathbf{D}_D$  e di  $\mathbf{D}$  coincidono.

Le parti sferica e deviatorica di un tensore simmetrico sono tra loro ortogonali.

Si ha infatti che

$$\mathbf{D}_S : \mathbf{D}_D = \text{tr} (\mathbf{D}_S \mathbf{D}_D) = \frac{1}{3} (\text{tr } \mathbf{D}) \text{tr} (\mathbf{D}_D) = 0,$$

ovvero, in termini di componenti

$$\sum_{i,j=1}^3 D_{Sij} D_{Dij} = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 D_{jj} \sum_{k=1}^3 \mathbf{D}_{Dkk} = 0.$$

- Il tensore  $\mathbf{D}_S$  definisce una deformazione tangente omogenea di pura espansione (sferico) che provoca nello spazio tangente una velocità di *variazione di volume ma non di forma*.
- Il tensore  $\mathbf{D}_D$  definisce una deformazione tangente deviatorico che provoca nello spazio tangente una velocità di *variazione di forma ma non di volume*.

La decomposizione di un tensore in parti sferica e deviatorica riveste un ruolo importante in molti problemi di meccanica.

Un esempio è fornito, nell'ambito della teoria linearizzata, dalla decomposizione dell'energia quadratica di deformazione elastica nelle due aliquote dette *energia di forma ed energia di volume*.

Un altro esempio di grande interesse applicativo concerne le piccole deformazioni plastiche di materiali metallici cristallini che, verificandosi per effetto del propagarsi delle dislocazioni nel reticolo cristallino con puri scorimenti lungo piani cristallini preferenziali (legge di SCHMID), producono variazioni di forma ma non di volume.

Tale comportamento è stato oggetto di notevoli conferme sperimentali da parte di BRIDGMAN<sup>22</sup> che, per le sue ricerche nel campo della fisica delle alte pressioni, ha ottenuto il premio NOBEL<sup>23</sup> nel 1946.

### 9.13. Cinematica e cambiamento dell'osservatore

Si mostra ora come si trasformano le espressioni delle quantità cinematiche al cambiare dell'osservatore.

Si considerino due osservatori  $O$  e  $O^*$  in moto relativo e si assuma che la posizione occupata dal corpo in un determinato istante  $t \in I$  risulti  $\Omega$  per  $O$  e  $\Omega^*$  per  $O^*$ .

Poiché i due osservatori  $O$  e  $O^*$  sono in moto rigido relativo le posizioni  $\Omega$  e  $\Omega^*$  sono legate dalla relazione

$$\Omega^* = \xi_t(\Omega),$$

essendo  $\xi_t : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  la trasformazione rigida descritta da

$$\xi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x}], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}.$$

Si noti che all'istante  $t \in I$  la posizione dell'osservatore  $O^*$  rispetto all'osservatore  $O$  è caratterizzata da una traslazione  $-\mathbf{c}(t)$  e da una rotazione  $\mathbf{Q}^T(t)$ .

I flussi  $\mathbf{k}_{t,s} : \Omega \mapsto \Omega$  e  $\mathbf{k}_{t,s}^* : \Omega^* \mapsto \Omega^*$ , che descrivono il processo evolutivo del corpo  $\mathbb{T}_B$  visto dai due osservatori, sono legati dalla relazione

$$\mathbf{k}_{t,s}^* = \xi_t \circ \mathbf{k}_{t,s}, \quad \forall t, s \in I,$$

con  $\mathbf{k}_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

<sup>22</sup> PERCY WILLIAMS BRIDGMAN (1882-1961). Fisico statunitense.

<sup>23</sup> ALFRED BERNHARD NOBEL (1833-1896). Industriale chimico svedese, produsse per primo la dinamite rendendo praticamente utilizzabile la nitroglicerina.

Esplicitamente si scrive

$$\boxed{\mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t) [\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})].}$$

Si ponga

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{k}_{s,s}^*(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi}_s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}(s), \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}(s).$$

Dunque

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q}[\mathbf{x}].$$

Derivando rispetto al tempo  $t \in I$  la relazione tra i flussi, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) [\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})] + \mathbf{Q}(t) \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) \right].$$

Sostituendo le espressioni delle velocità fornite dalle leggi di flusso

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_t \circ \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}),$$

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_t^* \circ \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}),$$

si può scrivere

$$\mathbf{v}_t^* \circ \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) [\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})] + \mathbf{Q}(t) \left[ \mathbf{v}_t \circ \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) \right].$$

Valutando per  $t = s$ , ponendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_s$  e  $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_s^*$  e tenendo presente la formula

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_s^* \circ \mathbf{k}_{s,s}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*),$$

si perviene alla relazione tra le velocità

$$\boxed{\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}] + \mathbf{Q}[\mathbf{v}(\mathbf{x})].}$$

Sostituendo l'espressione  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}]$ , si può anche scrivere

$$\boxed{\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) = \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{W}_Q [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}] + \mathbf{Q}[\mathbf{v}(\mathbf{x})],}$$

dove  $\mathbf{W}_Q = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$  è il tensore emisimmetrico che misura l'atto di rotazione dell'osservatore  $O$  rispetto a quello  $O^*$ .

Ai matematici polacchi ZAREMBA e ZORAWSKI<sup>24</sup> è dovuto il seguente risultato.

**Proposizione 9.13. Teorema di Zaremba-Zorawski.** *Gli atti di deformazione e di rotazione rispetto a due osservatori  $O$  e  $O^*$  in moto relativo sono legati dalle formule di trasformazione*

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{D}^*(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{Q} \mathbf{D}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T, \\ \mathbf{W}^*(\mathbf{x}^*) &= \mathbf{W}_Q + \mathbf{Q} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T.\end{aligned}}$$

**Dim.** Dalla relazione tra i campi di velocità

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) - \mathbf{Q} [\mathbf{v}(\mathbf{x})] = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}],$$

valutando le derivate rispetto a  $\mathbf{x}$ , la regola di derivazione a catena, ponendo

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*) = d\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{L}(\mathbf{x}) = d\mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

fornisce la relazione

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*) \mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{Q} \mathbf{L}(\mathbf{x}),$$

che può scriversi

$$\mathbf{L}^*(\mathbf{x}^*) = \mathbf{W}_Q + \mathbf{Q} \mathbf{L}(\mathbf{x}) \mathbf{Q}^T.$$

Le formule enunciate si deducono eguagliando le parti simmetriche ed emisimmetriche tenendo conto che  $\mathbf{W}_Q = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$  è un tensore emisimmetrico.  $\square$

Si vuole ora dedurre la formula di trasformazione dell'accelerazione al cambiare dell'osservatore. A tal fine si noti che per definizione l'accelerazione è

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}_s(\mathbf{x}) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{v}_t \circ \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{v}_t(\mathbf{x}) + d\mathbf{v}[\mathbf{v}](\mathbf{x}), \\ \mathbf{a}^*(\mathbf{x}) &= \mathbf{a}_s^*(\mathbf{x}) = \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{v}_t^* \circ \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{v}_t^*(\mathbf{x}^*) + d\mathbf{v}^*[\mathbf{v}^*](\mathbf{x}^*).\end{aligned}$$

---

<sup>24</sup> STANISLAW ZAREMBA (1863-1953) e KASIMIERZ ZORAWSKI (1863-1942). Matematici polacchi che fornirono un importante contributo allo sviluppo della matematica in Polonia dopo la prima guerra mondiale.

Effettuando la derivata rispetto al tempo della relazione

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}^*(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{c}}(t) + \dot{\mathbf{Q}}(t) [\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x})] + \mathbf{Q}(t) \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) \right],$$

e valutando al tempo  $t = s$  si ottiene allora che

$$\boxed{\mathbf{a}^*(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}] + 2\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}(\mathbf{x})] + \mathbf{Q}[\mathbf{a}(\mathbf{x})].}$$

- Il termine  $\ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}]$  è l'*accelerazione di trascinamento*,
- il termine  $2\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}(\mathbf{x})]$  è l'*accelerazione di CORIOLIS*.

Si osservi ora che  $(\mathbf{Q}^T) = -\mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$  e che  $\mathbf{x} = \mathbf{Q}^T [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}]$ . Quindi

$$\dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{Q}} = (\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) = \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}^T) = \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T - \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T - (\mathbf{W}_{\mathbf{Q}})^2.$$

Ponendo poi  $\ddot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T = \dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{Q}} + (\mathbf{W}_{\mathbf{Q}})^2$ , la formula precedente può essere riscritta

$$\mathbf{a}^*(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{c}} + [\dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{Q}} + (\mathbf{W}_{\mathbf{Q}})^2] [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}] + 2\dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{v}(\mathbf{x})] + \mathbf{Q}[\mathbf{a}(\mathbf{x})].$$

Si noti ora che

$$\mathbf{Q}[\mathbf{x}] = \mathbf{x}^* - \mathbf{c},$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}^T [\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) - \dot{\mathbf{c}}] - \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}],$$

$$2(\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) [\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) - \dot{\mathbf{c}}] = 2\dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) - \dot{\mathbf{c}}],$$

$$2(\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}] = 2(\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T)(\dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T) \mathbf{Q}[\mathbf{x}] = 2\mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^2 [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}].$$

La formula di trasformazione dell'accelerazione al cambiare dell'osservatore si può pertanto scrivere [44]

$$\boxed{\mathbf{a}^*(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{c}} + (\dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{Q}} - \mathbf{W}_{\mathbf{Q}}^2) [\mathbf{x}^* - \mathbf{c}] + 2\dot{\mathbf{W}}_{\mathbf{Q}} [\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*) - \dot{\mathbf{c}}] + \mathbf{Q}[\mathbf{a}(\mathbf{x})].}$$

**Osservazione 9.2.** Nella sezione 12.3 (p. 142) alla proposizione 12.13 (p. 145) è dedotta la formula di trasformazione tra i campi di velocità relativi ad un flusso su di una varietà differenziabile ed al corrispondente flusso sulla varietà differenziabile trasformata mediante un diffeomorfismo dipendente dal tempo.

Nella sezione 12.8 (p. 158) alla proposizione 12.23 (p. 160) è dedotta inoltre la formula di trasformazione tra i campi di accelerazione relativi ad un flusso su di una varietà di RIEMANN ed al corrispondente flusso sulla varietà di RIEMANN isometrica secondo un arbitrario diffeomorfismo dipendente dal tempo.

Tali formule costituiscono una generalizzazione di quelle dimostrate nella presente sezione e trovano applicazione nella formulazione di una teoria meccanica *covariante* ed in meccanica relativistica [52].

## 10. CONGRUENZA INTERNA

Il problema della congruenza che, per un campo di deformazione finita, è stato illustrato nella sezione 5.1 (p. 51), viene qui affrontato con riferimento ad un campo di deformazione tangente.

Per illustrare la questione si consideri un *mosaico* formato da numerosissime piccole *tessere* perfettamente combacianti le une alle altre e si immagini quindi di imporre in modo arbitrario una velocità di distorsione a ciascuna delle tessere del mosaico.

In generale nel mosaico si verificheranno tra le tessere velocità di distacco o di compenetrazione che non sono ricomponibili assegnando opportuni atti di moto rigido alle tessere. E' importante allora chiedersi quali siano le regole da seguire nell'assegnare le velocità di distorsione delle tessere del mosaico affinché ciò non accada.

Se le velocità di distacco o di compenetrazione sono ricomponibili assegnando opportuni atti di moto rigido alle tessere, si dice che gli atti di distorsione imposti alle tessere sono tra loro congruenti o *internamente congruenti*.

Per analizzare il problema si consideri una configurazione  $\Omega$  di un corpo ed un campo tensoriale simmetrico  $D$  che agisce sulle fibre lineari  $\{x, h\} \in \mathbb{T}_\Omega(x)$  inducendo su di esse la velocità di trasformazione  $D(x)h$ .

Si vuole ora stabilire una condizione necessaria e sufficiente affinché un assegnato campo di deformazione tangente  $D$  sia compatibile. Ciò significa che esistono un campo di velocità di rotazione  $W$  ed un cinematismo  $v$  tali che

$$D + W = \text{grad } v,$$



e cioè che sussista la relazione cinematica  $D = \text{sym grad } v$ .

E' questo un problema di integrabilità che può essere affrontato con metodi classici di teoria del potenziale. Un criterio diverso, di natura variazionale, che consente di tener conto anche delle condizioni al contorno, sarà illustrato nel successivo capitolo II.

Alcune delle idee fondamentali sulla questione della congruenza sono dovute a KIRCHHOFF<sup>25</sup> (1859, [15]) mentre l'espressione esatta delle condizioni di compatibilità è stata fornita da SAINT VENANT<sup>26</sup> (1864, [16]).

<sup>25</sup> GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887). Allievo di FRIEDRICH GAUSS a Göttingen e di FRANZ NEUMANN a Königsberg e poi professore di fisica a Breslau (1850-54) e ad Heidelberg (1854-74) dove insegnavano anche ROBERT WILHELM BUNSEN (1811-1899) e HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ (1821-1894). Nel 1854 enunciò le leggi sui circuiti elettrici che estendono e generalizzano quelle di GEORG SIMON OHM (1789-1854). Il suo studio sulla radiazione del corpo nero è stato fondamentale per lo sviluppo della teoria dei quanti. Basandosi sulla spettroscopia KIRCHHOFF spiegò per primo la presenza delle bande nere (linee di FRAUNHOFER) nella radiazione solare inaugurando una nuova era nell'astrofisica. Insieme a BUNSEN scoprì gli elementi cesium e rubidium. Dal 1875 ricopre la cattedra di fisica matematica a Berlino. KIRCHHOFF era disabile e passò gran parte della vita con le grucce e sulla sedia a rotelle.

<sup>26</sup> ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797-1886). Ha fornito contributi importanti alla meccanica, all'elasticità, all'idrostatica ed all'idrodinamica. Le equazioni di NAVIER-STOKES furono pubblicate nella forma definitiva da SAINT-VENANT nel 1843, due anni prima di GABRIEL STOKES (1819-1903). A SAINT-VENANT è dovuto lo sviluppo di un calcolo vettoriale, ideato nel 1832 e pubblicato



La dimostrazione della sufficienza delle condizioni di compatibilità per domini semplicemente connessi è stata fornita da EUGENIO BELTRAMI<sup>27</sup> (1886, [24]).

Al matematico napoletano ERNESTO CESÀRO<sup>28</sup> (1906, [30]) è dovuta poi una formula di integrazione esplicita che consente di calcolare il campo di velocità associato ad una deformazione tangente congruente (vedi SOKOLNIKOFF [39]).

L'espressione della condizione di congruenza di BELTRAMI in forma indipendente dal sistema di riferimento è dovuta a GURTIN (1963, [42,47]).

L'approccio che sarà seguito è basato su di una versione modificata della trattazione di GURTIN in cui la dimostrazione della necessità trae spunto da una comunicazione privata di MICHELE CAPURSO<sup>29</sup> (1971).

La formula di CESÀRO viene qui presentata per la prima volta in forma vettoriale. È inoltre sviluppata una versione modificata che consente di adottare percorsi di integrazione non regolari. Si mostra inoltre come tramite la formula di CESÀRO si perviene ad un'originale dimostrazione della condizione di congruenza, basata sull'applicazione diretta della condizione di integrabilità di VITO VOLTERRA<sup>30</sup> (1913, [35]).

Alle condizioni differenziali di congruenza di un campo di deformazioni tangentì si può pervenire anche linearizzando la condizione di congruenza che in deformazioni finite che è espressa dall'annullarsi del tensore di curvatura di RIEMANN-CHRISTOFFEL. A tal fine basta sviluppare l'espressione del tensore curvatura riportata nella sezione 5.1 (p. 51) in termini di componenti, ponendo

$$\mathbf{G} = \mathbf{C} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}.$$

Trascurando tutti i termini non lineari nel campo tensoriale di GREEN  $\mathbf{E}$  si perviene alle equazioni differenziali che impongono la congruenza del campo di deformazioni tangentì (vedi [40] sect. 34 e [41]).

---

nel 1845, simile a quello di HERMANN GÜNTER GRASSMANN (1809-1877) che lo pubblicò nel 1844. Famoso è il lavoro *De la torsion des prismes* presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1853. A 71 anni succedette a JEAN VICTOR PONCELET (1788-1867) nella classe di meccanica dell'Académie des Sciences di Parigi. A 86 anni tradusse con FLAMANT dal tedesco in francese il libro sull'elasticità scritto nel 1862 da RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH (1833-1872) dal titolo *Theorie der Elastizität ferster Körper*. La traduzione, dal titolo *Theorie de l'élasticité des corps solides*, più che raddoppiò, per le molte note, il testo originale.

<sup>27</sup> EUGENIO BELTRAMI (1835-1900). Professore di matematica a Bologna ed in altre Università italiane. Con RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832-1903) e ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL (1829-1900) fu un prosecutore dell'opera di RIEMANN.

<sup>28</sup> ERNESTO CESÀRO (1859-1906). Professore all'Università di Napoli, ha dato notevoli contributi all'analisi matematica.

<sup>29</sup> MICHELE CAPURSO (1935-1987) di scuola napoletana. Professore di Scienza delle Costruzioni a Bologna, ha dato contributi importanti a diversi problemi di meccanica strutturale.

<sup>30</sup> VITO VOLTERRA (1860-1940). Fu successore di BELTRAMI alla cattedra di fisica matematica a Roma. Per primo contribuì a fondare la teoria generale delle equazioni integrali, cui poi diedero contributi decisivi lo svedese ERIK IVAR FREDHOLM (1866-1927) ed il tedesco DAVID HILBERT (1862-1943).

E' però preferibile condurre una trattazione diretta del caso lineare anche perchè ciò consente di fornire una condizione necessaria e sufficiente e di pervenire alle formule esplicite di integrazione di CESÀRO.

### 10.1. Condizione differenziale di congruenza

Per svolgere la trattazione della condizione di congruenza è opportuno richiamare alcune definizioni e formule notevoli di calcolo vettoriale.

Si ricorda inoltre che  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{W}$  denotano rispettivamente la parte simmetrica e quella emisimmetrica del campo tensoriale  $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ .

Sia  $\{i, j, k\}$  una permutazione di  $\{1, 2, 3\}$  e con  $\epsilon_{ijk}$  il simbolo che in componenti rispetto ad un riferimento cartesiano  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è definito da

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ è di classe pari,} \\ -1 & \text{se } \{i, j, k\} \text{ è di classe dispari,} \end{cases}$$

e prende il nome di alternatore o tensore di RICCI<sup>31</sup>.

Si notino le definizioni

$$\boldsymbol{\omega} := \text{axial } \mathbf{W} \iff \omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} W_{kj}$$

$$\mathbf{W} := \text{anti } \boldsymbol{\omega} \iff W_{ij} = -\epsilon_{ijk} \omega_k$$

$$\text{div } \mathbf{v} := \text{tr grad } \mathbf{v} = v_{i/i}$$

$$\text{rot } \mathbf{v} := 2 \text{ axial emi grad } \mathbf{v} \iff [\text{rot } \mathbf{v}]_i = \epsilon_{ijk} v_{k/j}$$

$$[\text{div } \mathbf{A}] \cdot \mathbf{a} := \text{div} [\mathbf{A}^T \mathbf{a}] \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V} \iff [\text{div } \mathbf{A}]_i = A_{ij/j}$$

$$[\text{rot } \mathbf{A}]^T [\mathbf{a}] := \text{rot} [\mathbf{A}^T \mathbf{a}] \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V} \iff [\text{rot } \mathbf{A}]_{ij} = \epsilon_{jks} A_{is/k}$$

---

<sup>31</sup> GREGORIO RICCI-CURBASTRO (1853-1925). Allievo di ENRICO BETTI (1823-1892) e di ULLISSE DINI (1845-1918) alla Scuola Normale Superiore di Pisa e professore di fisica matematica all'Università di Padova. In quattro note del periodo 1888 e 1892 sviluppò i fondamenti del calcolo differenziale assoluto su varietà n-dimensional. A questi risultati ed a quelli ottenuti dopo il 1900 con l'allievo TULLIO LEVI-CIVITA (1873-1941) fece ricorso ALBERT EINSTEIN (1879-1955) per formulare la teoria generale della relatività.



e le proprietà notevoli

$$\begin{aligned}
 [\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v}] = \mathbf{O} &\iff [\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v}]_{ij} = \epsilon_{jks} v_{i/ks} = 0 \\
 \operatorname{rot} [\operatorname{grad} \mathbf{v}]^T &= [\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{v}]^T \iff \\
 &\iff [\operatorname{rot} [\operatorname{grad} \mathbf{v}]^T]_{ij} = \epsilon_{jsk} v_{k/si} = [\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{v}]_{ji} \\
 \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 &\iff [\operatorname{rot} \mathbf{v}]_{i/i} = \epsilon_{ijk} v_{k/ji} = 0 \\
 \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{o} &\iff [\operatorname{rot} \mathbf{A}]_{ij/j} = \epsilon_{jks} A_{is/kj} = 0 \\
 \operatorname{tr} \operatorname{rot} \mathbf{D} = [\operatorname{rot} \mathbf{D}]_{ii} &= \epsilon_{iks} \mathbf{D}_{is/k} = 0 \\
 \operatorname{rot} \mathbf{W} = [\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}] \mathbf{I} - [\operatorname{grad} \boldsymbol{\omega}]^T &\iff \\
 [\operatorname{rot} \mathbf{W}]_{ij} &= \epsilon_{jks} W_{is/k} = \epsilon_{jks} \epsilon_{ips} \omega_{p/k} = (\delta_{ij} \delta_{pk} - \delta_{ik} \delta_{jp}) \omega_{p/k} = \\
 &= \delta_{ij} \omega_{k/k} - \omega_{j/i}
 \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{I}$  è il tensore identità.

Si premette un risultato concernente la condizione di integrabilità di un campo tensoriale.

**Proposizione 10.1. Campi tensoriali irrotazionali.** *Sia  $\mathbf{A}$  un campo tensoriale di classe  $C^n$  su  $\Omega$  che soddisfi la condizione di irrotazionalità*

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

*Allora esiste un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  di classe  $C^{n-1}$  su  $\Omega$  tale che*

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

**Dim.** Sia  $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3\}$  una base ortonormale. Dalla relazione  $[\operatorname{rot} \mathbf{A}]^T [\mathbf{e}_i] = \operatorname{rot} [\mathbf{A}^T \mathbf{e}_i] = \mathbf{o}$  si deduce che esiste un campo scalare  $u_i$  tale che  $\mathbf{A}^T \mathbf{e}_i = \operatorname{grad} u_i$ .

Allora ponendo  $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$  si ha che  $u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$ . Essendo  $\operatorname{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i) = (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T [\mathbf{e}_i]$  ne segue che  $\mathbf{A} = \operatorname{grad} \mathbf{u}$ .  $\square$

Si può ora enunciare il teorema fondamentale.

**Proposizione 10.2. Condizione differenziale di congruenza.** *Affinchè un campo tensoriale simmetrico di velocità di deformazione  $\mathbf{D}$  di classe  $C^2$  in  $\Omega$  sia internamente congruente è necessario che sia soddisfatta la condizione tensoriale di integrabilità*

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{D}]^T = \mathbf{O}.$$

*La condizione è sufficiente sotto l'ulteriore ipotesi che il dominio  $\Omega$  sia semplicemente connesso.*

**Dim.** La condizione è *necessaria*.

Sia  $\mathbf{v}$  un campo di velocità di classe  $C^3$  in  $\Omega$  e si ponga

$$\begin{cases} \mathbf{D} := \text{sym grad } \mathbf{v}, \\ \boldsymbol{\omega} := \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}. \end{cases}$$

Invocando l'identità

$$\text{rot grad } \mathbf{v} = \mathbf{O},$$

risulta

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{D} := \text{rot sym grad } \mathbf{v} &= \text{rot } \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{v} + [\text{grad } \mathbf{v}]^T] = \\ &= \frac{1}{2} [\text{rot grad } \mathbf{v} + \text{rot} [\text{grad } \mathbf{v}]^T] = \frac{1}{2} \text{rot} [\text{grad } \mathbf{v}]^T = \\ &= \frac{1}{2} [\text{grad rot } \mathbf{v}]^T = [\text{grad } \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}]^T = [\text{grad } \boldsymbol{\omega}]^T, \end{aligned}$$

e quindi

$$[\text{rot } \mathbf{D}]^T = \text{grad } \boldsymbol{\omega}.$$

Calcolando il rotore di entrambi i membri ed invocando ancora l'identità

$$\text{rot grad } \boldsymbol{\omega} = \mathbf{O},$$

si ottiene il risultato

$$\text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T = \mathbf{O}.$$

La condizione è *sufficiente*.

A tal fine si osservi che, essendo il dominio  $\Omega$  semplicemente connesso, la condizione di integrabilità

$$\text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T = \mathbf{O},$$

implica l'esistenza di un campo vettoriale  $\boldsymbol{\omega}$  di classe  $C^3$  tale che

$$[\text{rot } \mathbf{D}]^T = \text{grad } \boldsymbol{\omega}.$$

Ponendo quindi  $\mathbf{W} = \text{anti } \boldsymbol{\omega}$ , dall'identità

$$[\text{grad } \boldsymbol{\omega}]^T + \text{rot } \mathbf{W} = (\text{div } \boldsymbol{\omega}) \mathbf{I},$$

si ottiene la relazione

$$\text{rot} [\mathbf{D} + \mathbf{W}] = (\text{div } \boldsymbol{\omega}) \mathbf{I}.$$



Per la simmetria di  $\mathbf{D}$  risulta però

$$\operatorname{tr} \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0,$$

e quindi ne segue che

$$\operatorname{tr} \operatorname{rot} \mathbf{W} = 3 \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}.$$

Peraltro dalla medesima identità

$$\operatorname{rot} \mathbf{W} = [\operatorname{div} \boldsymbol{\omega}] \mathbf{I} - [\operatorname{grad} \boldsymbol{\omega}]^T,$$

segue anche che

$$\operatorname{tr} \operatorname{rot} \mathbf{W} = 2 \operatorname{div} \boldsymbol{\omega},$$

per cui deve necessariamente risultare

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0.$$

In conclusione sussisterà la relazione

$$\operatorname{rot} [\mathbf{D} + \mathbf{W}] = \mathbf{O}.$$

Se il dominio  $\Omega$  è semplicemente connesso, questa condizione di integrabilità assicura l'esistenza di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  di classe  $C^3$  tale che

$$\mathbf{D} + \mathbf{W} = \operatorname{grad} \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

e quindi, in virtù della emisimmetria di  $\mathbf{W}$ , risulta

$$\mathbf{D} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v},$$

e la dimostrazione è conclusa. □

Si osservi che il campo di velocità che soddisfa la condizione di congruenza  $\operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{D}$  è unico a meno di un atto di moto rigido dell'intero corpo.

Il campo tensoriale emisimmetrico  $\mathbf{W}$  associato a  $\mathbf{D}$  è pertanto unico a meno di un campo tensoriale emisimmetrico costante.

Dalla definizione di rotore di un campo tensoriale  $\mathbf{A}$  si trae la seguente espressione cartesiana del tensore  $\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{A}]^T(\mathbf{x})$

$$[\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{A}]^T]_{ij} = \epsilon_{jsk} [\operatorname{rot} \mathbf{A}]^T_{ik/s} = \epsilon_{iqp} \epsilon_{jks} A_{kq/pq}.$$

La proprietà di alternanza del tensore di RICCI e la simmetria della derivata seconda mostrano che

$\mathbf{A} \text{ simmetrico} \Rightarrow \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{A}]^T \text{ simmetrico.}$

Se  $\mathbf{A}$  è simmetrico si ha che  $[\text{rot} [\text{rot } \mathbf{A}]]^T_{ij} = \epsilon_{iqp} \epsilon_{jks} A_{qk/ps}$ .

Tale risultato consente di affermare che per il campo tensoriale simmetrico velocità di deformazione  $\mathbf{D}$  risulta

$$\text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T = [\text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]]^T.$$

La condizione di congruenza del campo di velocità di deformazione

$$\text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T = \mathbf{O},$$

espressa in termini di componenti cartesiane fornisce quindi 6 equazioni differenziali scalari alle derivate parziali

$$\epsilon_{iqp} \epsilon_{jks} \mathbf{D}_{qk/ps}, \quad i \geq j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ed esplicitamente

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{22/33} + D_{33/22} - 2 D_{23/23} = 0, \\ D_{11/33} + D_{33/11} - 2 D_{13/13} = 0, \\ D_{11/22} + D_{22/11} - 2 D_{12/12} = 0, \\ D_{12/13} + D_{13/12} - D_{11/23} - D_{23/11} = 0, \\ D_{13/23} + D_{23/13} - D_{33/12} - D_{12/33} = 0, \\ D_{12/23} + D_{23/12} - D_{22/13} - D_{13/22} = 0. \end{array} \right.$$

Le 6 equazioni differenziali scalari di congruenza non sono funzionalmente indipendenti.

Nella prossima sezione si mostrerà che esistono tra esse 3 identità differenziali scalari.

Ciò è in accordo con l'argomentazione euristica che le 6 condizioni differenziali devono individuare, nello spazio dei 6 campi scalari incogniti costituiti dalle componenti del campo tensore simmetrico di deformazione tangente, una varietà che è parametricamente rappresentata da 3 campi scalari costituiti dalle componenti di un campo cinematico.



### 10.1.1. Campi tensoriali solenoidali e funzioni di sforzo

Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 10.3.** *Se  $\Phi$  è un campo tensoriale di classe  $C^3$  in  $\Omega$ , allora il campo tensoriale di classe  $C^1$  definito da*

$$\mathbf{S} = \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \Phi]^T,$$

soddisfa in  $\Omega$  la condizione di divergenza nulla

$$\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{o},$$

ed è detto solenoidale.

**Dim.** Per dimostrare l'identità

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \Phi]^T = \mathbf{o},$$

si fa ricorso all'espressione in termini di componenti cartesiane che fornisce

$$[\operatorname{div} \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \Phi]^T]_i = [\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \Phi]^T]_{ij/j} = \epsilon_{iqp} \epsilon_{jks} \Phi_{kq/psj} = 0,$$

in quanto nella sommatoria la derivazione è simmetrica rispetto agli indici  $s, j$  mentre il tensore di RICCI è alternante.  $\square$

Come si è visto nella sezione precedente, se il campo tensoriale  $\Phi$  è simmetrico, il campo tensoriale  $\mathbf{S}$  risulta anch'esso simmetrico. In tal caso  $\Phi$  è detta una funzione di sforzo.

La proposizione con  $\Phi$  simmetrico è dovuta a BELTRAMI (1892, [24]).

La prima soluzione dell'equazione  $\operatorname{div} \mathbf{S} = \mathbf{o}$  con  $\mathbf{S}$  simmetrico è dovuta ad AIRY (1863, [18]) per il caso bidimensionale (vedi sezione 10.3.1 (p. 116)).

Estensioni del risultato di AIRY al contesto tridimensionale sono state ottenute da MAXWELL<sup>32</sup> (1868, [19]) e da MORERA (1892, [25]) e costituiscono forme particolari della soluzione di BELTRAMI.

- La versione tridimensionale della soluzione di AIRY si ottiene assumendo che  $\Phi$  sia un tensore simmetrico monoassiale

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi \end{bmatrix} \quad [\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \varphi_{22} & -\varphi_{12} & 0 \\ -\varphi_{12} & \varphi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

---

<sup>32</sup> JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879). Fisico matematico scozzese, allievo con l'amico TAIT del Trinity college di Cambridge dove poi fu il professore di fisica e progettò l'HENRY CAVENDISH laboratory. Straordinari furono i suoi contributi alla teoria dell'elettromagnetismo (Electricity and Magnetism, 1873), all'ottica, alla teoria dell'elasticità ed alla teoria cinetica dei gas (teoria di MAXWELL-BOLTZMANN).

- La soluzione di MAXWELL assume che  $\Phi$  sia un tensore diagonale

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} \varphi_{2/33} + \varphi_{3/22} & -\varphi_{3/12} & -\varphi_{2/13} \\ -\varphi_{3/12} & \varphi_{1/33} + \varphi_{3/11} & -\varphi_{1/23} \\ -\varphi_{2/13} & -\varphi_{1/23} & \varphi_{1/22} + \varphi_{2/11} \end{bmatrix}.$$

- La soluzione di MORERA assume per  $\Phi$  un tensore simmetrico di tipo deviatorico

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi la matrice  $[\mathbf{S}]$  è data da

$$\begin{bmatrix} -2\varphi_{1/23} & \varphi_{2/23} + \varphi_{1/13} - \varphi_{3/33} & \varphi_{3/23} + \varphi_{1/12} - \varphi_{2/22} \\ \varphi_{2/23} + \varphi_{1/13} - \varphi_{3/33} & -2\varphi_{2/13} & \varphi_{3/13} + \varphi_{2/12} - \varphi_{1/11} \\ \varphi_{3/23} + \varphi_{1/12} - \varphi_{2/22} & \varphi_{3/13} + \varphi_{2/12} - \varphi_{1/11} & -2\varphi_{3/12} \end{bmatrix}.$$

## 10.2. Trattazione di Cesàro

Una espressione esplicita del cinematismo corrispondente ad un atto di deformazione congruente è dovuta ad ERNESTO CESÀRO (1906, [30]).

In SOKOLNIKOFF (1956, [39]) è riportata la dimostrazione della formula di CESÀRO in termini di componenti cartesiane.

Nel seguito è fornita un'espressione del risultato di CESÀRO in forma tensoriale ed una sua variante valida per percorsi di integrazione non regolari.

Una trattazione originale mostra inoltre come la formula di CESÀRO consenta di dedurre la condizione differenziale di congruenza facendo ricorso alla condizione di integrabilità di VOLTERRA (1913, [35]).

La formula di CESÀRO fornisce un'espressione esplicita di un cinematismo di cui sia nota la sola parte simmetrica del gradiente. Il cinematismo è unico a meno di un arbitrario atto di moto rigido addizionale.

**Proposizione 10.4. Formula di Cesàro.** *Sia  $\mathbf{D}$  l'atto di deformazione congruente con un cinematismo  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  nel dominio  $\Omega$ . Vale allora la formula di CESÀRO*

$$\boxed{\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) [d\boldsymbol{\xi}] + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \times [(\text{rot } \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}))^T [d\boldsymbol{\xi}]]},$$

dove  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_o)$  e  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o)$  sono i vettori velocità di traslazione e velocità angolare caratteristici di un arbitrario atto di moto rigido. Gli integrali vanno effettuati lungo una qualsiasi curva regolare (e cioè differenziabile) che unisce  $\mathbf{x}_o$  e  $\mathbf{x}$ .

**Dim.** La dimostrazione della formula di CESÀRO si basa sull'applicazione diretta del teorema fondamentale del calcolo integrale che fornisce la relazione

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\text{grad } \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi})) [d\boldsymbol{\xi}] = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi})) [d\boldsymbol{\xi}].$$

Per pervenire al risultato occorre trovare una espressione dell'integrale di  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  in termini di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ .

A tal fine si osservi che  $\mathbf{W}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$  per ogni  $\mathbf{a} \in V$  e pertanto

$$\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) [d\boldsymbol{\xi}] = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times d\boldsymbol{\xi} = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times d(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}).$$

La regolarità della curva che unisce  $\mathbf{x}_o$  e  $\mathbf{x}$  consente di effettuare un'unica integrazione per parti per ottenere

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) \times (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \times [(\text{grad } \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})) [d\boldsymbol{\xi}]] = \\ &= \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \times [(\text{grad } \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi})) [d\boldsymbol{\xi}]]. \end{aligned}$$

Ricordando infine che  $\boxed{\text{grad } \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\xi}) = [\text{rot } \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi})]^T}$  si ottiene l'espressione

$$\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi}) [d\boldsymbol{\xi}] = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \times [(\text{rot } \mathbf{D}(\boldsymbol{\xi}))^T [d\boldsymbol{\xi}]],$$

e pertanto il risultato è dimostrato.  $\square$

**Osservazione 10.1.** Se la curva da  $\mathbf{x}_o$  a  $\mathbf{x}$ , lungo la quale si effettua l'integrazione di  $\mathbf{W}$ , ha  $n$  punti singolari è necessario effettuare  $n+1$  integrazioni per parti. Ponendo  $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}$  si ottiene allora l'espressione

$$\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n \left\{ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) + \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} (\xi - \mathbf{x}_{i+1}) \times [\text{grad } \boldsymbol{\omega}(\xi) [d\xi]] \right\}.$$

Si osservi ora che

$$\sum_{i=0}^n \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_i) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \sum_{i=1}^n [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_i) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o)] \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i),$$

e che per  $i = 1, \dots, n$  risulta

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_i) - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}_i} \text{grad } \boldsymbol{\omega}(\xi) [d\xi] = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}_i} [\text{rot } \mathbf{D}(\xi)]^T [d\xi].$$

La formula di CESÀRO assume quindi l'espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_o) \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\xi) [d\xi] + \\ &+ \sum_{i=0}^n \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} (\xi - \mathbf{x}_{i+1}) \times [[\text{rot } \mathbf{D}(\xi)]^T [d\xi]] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}_i} [\text{rot } \mathbf{D}(\xi)]^T [d\xi] \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i). \end{aligned}$$



Una applicazione di questa formula, che è dovuta all'autore, è condotta in [62] nel capitolo in cui è svolta la trattazione della flessione delle travi. ■

Si moltiplichino scalarmente ambo i membri della formula di CESÀRO per un arbitrario campo vettoriale costante  $\mathbf{a} \in V$  ignorando l'inessenziale termine relativo all'atto di moto rigido

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} &= \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\xi) d\xi \cdot \mathbf{a} + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} (\xi - \mathbf{x}) \times [[\text{rot } \mathbf{D}(\xi)]^T d\xi] \cdot \mathbf{a} = \\ &= \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\xi) \mathbf{a} \cdot d\xi + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\text{rot } \mathbf{D}(\xi)] [\mathbf{a} \times (\xi - \mathbf{x})] \cdot d\xi. \end{aligned}$$



Introducendo l'operatore di traslazione  $\tau_x(\xi) := \xi - x$ , la formula di CESÀRO si può scrivere

$$\boxed{\mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{a} = \int_{x_o}^x [\mathbf{D}\mathbf{a} + (\operatorname{rot} \mathbf{D})[\mathbf{a} \times \tau_x]](\xi) \cdot d\xi, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}.}$$

Si mostra ora come la condizione differenziale di congruenza possa ottersi applicando la condizione di integrabilità di VOLTERRA alla formula di CESÀRO. Si premette un risultato dovuto all'autore.

**Proposizione 10.5. Una identità notevole.** *Sia  $\mathbf{A}$  un campo tensoriale di classe  $C^1$  in  $\Omega$  ed  $\mathbf{a}$  è un campo vettoriale costante. Vale la formula*

$$\operatorname{rot} [\mathbf{A}(\mathbf{a} \times \tau_x)] = [\operatorname{rot} \mathbf{A}^T]^T(\mathbf{a} \times \tau_x) + [\operatorname{tr} \mathbf{A}] \mathbf{a} - \mathbf{A}^T \mathbf{a}.$$

**Dim.** Si osservi che in termini di componenti cartesiane risulta

$$[\operatorname{rot} [\mathbf{A}(\mathbf{a} \times \tau_x)]]_i = \epsilon_{ijk} [A_{ks} \epsilon_{spq} a_p \tau_q]_{/j} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{spq} [A_{ks} \delta_{qj} a_p + A_{ks/j} a_p \tau_q],$$

dove si è posto  $\tau_q = (\tau_x)_q$ . Ora il primo termine vale

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{spj} A_{ks} a_p = \epsilon_{kij} \epsilon_{spj} A_{ks} a_p = A_{kk} a_i - A_{ki} a_k = (\operatorname{tr} \mathbf{A}) a_i - (\mathbf{A}^T \mathbf{a})_i$$

ed il secondo termine vale

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{spq} A_{ks/j} \tau_q a_p &= \epsilon_{ijk} A_{ks/j} (\mathbf{a} \times \tau_x)_s = \\ &= \epsilon_{ijk} A_{sk/j}^T (\mathbf{a} \times \tau_x)_s = [\operatorname{rot} \mathbf{A}^T]_{is}^T (\mathbf{a} \times \tau_x)_s. \end{aligned}$$

Sommendo i due termini si ottiene il risultato.  $\square$

Per dedurre la condizione differenziale di congruenza si ponga la formula di CESÀRO in forma scalare. Affinchè il cinematismo  $\mathbf{v}$  sia ben definito, l'integrale deve risultare indipendente dal percorso di integrazione per ogni scelta del vettore  $\mathbf{a}$ .

Se il dominio  $\Omega$  è semplicemente connesso, la condizione di integrabilità di VOLTERRA assicura che ciò si verifica se e solo se il campo vettoriale integrando nella formula di CESÀRO ha rotore nullo

$$\operatorname{rot} [\mathbf{D}\mathbf{a}] + \operatorname{rot} [[\operatorname{rot} \mathbf{D}] [\mathbf{a} \times \tau_x]] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}.$$

Ponendo  $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{D}$  nell'identità stabilita dalla proposizione 10.5, si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [[\operatorname{rot} \mathbf{D}] (\mathbf{a} \times \tau_x)] &= [\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{D}]]^T (\mathbf{a} \times \tau_x) + \\ &\quad + [\operatorname{tr} \operatorname{rot} \mathbf{D}] \mathbf{a} - [\operatorname{rot} \mathbf{D}]^T \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Si osservi poi che, in virtù della simmetria di  $\mathbf{D}$ , risulta

$$\begin{cases} \operatorname{tr} \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0, \\ [\operatorname{rot} \mathbf{D}]^T \mathbf{a} = \operatorname{rot} [\mathbf{D}\mathbf{a}], \end{cases}$$

per cui la formula precedente può risciversi

$$\operatorname{rot} [[\operatorname{rot} \mathbf{D}](\mathbf{a} \times \boldsymbol{\tau}_x)] = [\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{D}]^T]^T (\mathbf{a} \times \boldsymbol{\tau}_x) - \operatorname{rot} [\mathbf{D}\mathbf{a}].$$

La condizione di integrabilità di VOLTERRA assume dunque la forma

$$[\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{D}]^T]^T [\mathbf{a} \times \boldsymbol{\tau}_x] = \mathbf{0},$$

in cui  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$  è costante. Tale condizione, dovendo valere per ogni  $\mathbf{a} \in V$  ed ogni fissato  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ , equivale ad imporre che

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \mathbf{D}]^T = \mathbf{0}.$$

Si è così ritrovata per altra via la condizione differenziale di congruenza.

### 10.3. Congruenza in dimensione due

Nella meccanica dei continui bidimensionali si pone il problema della congruenza di un campo di atti di deformazione in modo analogo a quanto visto nel caso tridimensionale. Le definizioni, le proprietà ed i risultati vanno però opportunamente riformulati.

Si denoti con  $\{i, j\}$  una permutazione di  $\{1, 2\}$  e con  $\epsilon$  l'alternatore bidimensionale che ha componenti cartesiane

$$\epsilon_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{i, j\} \text{ è di classe pari,} \\ -1 & \text{se } \{i, j\} \text{ è di classe dispari,} \\ 0 & \text{se gli indici } i, j \text{ sono uguali.} \end{cases}$$

Denotando con  $\mathbf{R}$  il tensore che effettua una rotazione di  $\pi/2$  in senso antiorario

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

risulta  $\epsilon = -\mathbf{R} = \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ .

Si pongano ora le definizioni

$$\omega = \text{axial } \mathbf{W} := \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\mathbf{R}^T \mathbf{W}] \iff \omega = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} W_{ji} = W_{21}$$

$$\mathbf{W} = \text{anti } \omega := \omega \mathbf{R} \iff W_{ij} = -\omega \epsilon_{ij}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} := \operatorname{tr} \operatorname{grad} \mathbf{v} = v_{i/i}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} := 2 \text{ axial emi grad } \mathbf{v} \iff \operatorname{rot} \mathbf{v} = \epsilon_{ij} v_{j/i}$$

$$[\operatorname{div} \mathbf{A}] \cdot \mathbf{a} := \operatorname{div} [\mathbf{A}^T \mathbf{a}] \quad \forall \mathbf{a} \iff [\operatorname{div} \mathbf{A}]_i = A_{ij/j}$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{A}] \cdot \mathbf{a} := \operatorname{rot} [\mathbf{A}^T \mathbf{a}] \quad \forall \mathbf{a} \iff [\operatorname{rot} \mathbf{A}]_i = \epsilon_{jk} A_{ik/j}$$

e si osservino le proprietà notevoli

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{div} [\mathbf{R}^T \mathbf{v}] = \mathbf{R} * \operatorname{grad} \mathbf{v} \iff \operatorname{rot} \mathbf{v} = R_{ji} v_{j/i}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{I} * \operatorname{grad} \mathbf{v} \iff \operatorname{div} \mathbf{v} = I_{ji} v_{j/i} = v_{i/i}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{div} (\mathbf{A} \mathbf{R}) \iff [\operatorname{rot} \mathbf{A}]_i = (A_{ik} R_{kj})_{/j}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v} = \mathbf{o} \iff [\operatorname{rot} \operatorname{grad} \mathbf{v}]_i = \epsilon_{jk} v_{i/jk} = 0$$

$$\operatorname{rot} [\operatorname{grad} \mathbf{v}]^T = [\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{v}] \iff$$

$$\iff [\operatorname{rot} [\operatorname{grad} \mathbf{v}]^T]_i = \epsilon_{jk} v_{k/ji} = [\operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{v}]_i$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{W} = -\operatorname{grad} \omega \iff$$

$$[\operatorname{rot} \mathbf{W}]_i = \epsilon_{jk} W_{ik/j} = -\epsilon_{jk} \epsilon_{ik} \omega_{/j} = -\delta_{ij} \omega_{/j} = -\omega_{/i}$$

Si può allora enunciare il seguente teorema.

**Teorema 10.6. Condizione di congruenza bidimensionale.** *Un campo tensoriale simmetrico di velocità di deformazione  $\mathbf{D}$  di classe  $C^2$  sul dominio piano  $\Omega$  è congruente se e solo se è soddisfatta la condizione scalare di integrabilità*

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

*La condizione è sufficiente sotto l'ulteriore ipotesi che il dominio piano  $\Omega$  sia semplicemente connesso.*

**Dim.** La condizione è *necessaria*. Infatti sia  $\mathbf{v}$  un campo di velocità di classe  $C^3$  in  $\Omega$  e si ponga

$$\begin{cases} \mathbf{D} := \text{sym grad } \mathbf{v}, \\ \omega := \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v}. \end{cases}$$

Osservando che

$$\text{rot grad } \mathbf{v} = \mathbf{O},$$

risulta

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{D} &:= \text{rot sym grad } \mathbf{v} = \text{rot } \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{v} + [\text{grad } \mathbf{v}]^T] = \\ &= \frac{1}{2} [\text{rot grad } \mathbf{v} + \text{rot } [\text{grad } \mathbf{v}]^T] = \frac{1}{2} \text{rot } [\text{grad } \mathbf{v}]^T = \\ &= \frac{1}{2} \text{grad rot } \mathbf{v} = \text{grad } \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{v} = \text{grad } \omega \end{aligned}$$

e quindi, dalla proprietà

$$\text{rot grad } \omega = 0,$$

si ottiene il risultato

$$\text{rot rot } \mathbf{D} = 0.$$

La condizione è *sufficiente*. A tal fine si osservi che, in un dominio piano  $\Omega$  semplicemente connesso, la condizione di integrabilità

$$\text{rot rot } \mathbf{D} = 0,$$

implica l'esistenza di un campo scalare  $\omega$  di classe  $C^3$  tale che

$$\text{rot } \mathbf{D} = \text{grad } \omega.$$

Ponendo  $\mathbf{W} = \text{anti } \omega$ , dalla relazione

$$\text{grad } \omega = -\text{rot } \mathbf{W},$$

si ottiene

$$\text{rot } [\mathbf{D} + \mathbf{W}] = \mathbf{o}.$$

Se il dominio  $\Omega$  è semplicemente connesso, questa condizione di integrabilità assicura l'esistenza di un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  di classe  $C^3$  tale che

$$\mathbf{D} + \mathbf{W} = \text{grad } \mathbf{v},$$

e quindi, in virtù della emisimmetria di  $\mathbf{W}$ , risulterà

$$\text{sym grad } \mathbf{v} = \mathbf{D},$$

e la dimostrazione è conclusa.  $\square$



Si osservi esplicitamente che la condizione di integrabilità del campo di velocità di deformazione

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0$$

consiste in un'unica equazione differenziale alle derivate parziali.

Dalla definizione di rotore di un campo tensoriale si trae la seguente espressione cartesiana del campo scalare  $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D} = \epsilon_{ik} [\operatorname{rot} \mathbf{D}]_{k/i} = \epsilon_{ik} \epsilon_{js} D_{ks/ji}$$

ed esplicitamente

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D} = D_{11/22} + D_{22/11} - 2 D_{12/12}.$$

Si osservi infine che sussiste l'identità

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D} = (R_{ik}^T D_{ks} R_{sj})_{/ji} = \operatorname{div} \operatorname{div} (\mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R}).$$

### 10.3.1. La funzione di Airy

Se  $\varphi$  è un arbitrario campo scalare di classe  $C^3$ , si definisca il campo tensoriale simmetrico

$$\Phi_{ij} = \epsilon_{ik} \epsilon_{js} \varphi_{/ks},$$

ovvero

$$\Phi = \mathbf{R}^T [\operatorname{grad} \operatorname{grad} \varphi] \mathbf{R} = -\mathbf{R} [\operatorname{grad} \operatorname{grad} \varphi] \mathbf{R},$$

ed in termini matriciali

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \varphi_{/22} & -\varphi_{/12} \\ -\varphi_{/21} & \varphi_{/11} \end{bmatrix}.$$

Sussiste allora la seguente notevole identità

$$\operatorname{div} \Phi = \mathbf{o}.$$

Infatti risulta

$$[\operatorname{div} \Phi]_i = [\Phi]_{ij/j} = \epsilon_{ik} \epsilon_{js} \varphi_{/ksj} = 0.$$

In altri termini ogni campo tensoriale del tipo  $\Phi = \mathbf{R} [\operatorname{grad} \operatorname{grad} \varphi] \mathbf{R}$  risulta solenoidale.

Tale risultato è dovuto ad AIRY<sup>33</sup> (1863) e la funzione scalare  $\varphi$  è nota come *funzione di Airy*.

---

<sup>33</sup> GEORGE BIDDELL AIRY (1801-1892). Dal 1826 svolse la sua attività scientifica a Cambridge dove fu professore di matematica e di astronomia nonché direttore dell'Osservatorio. Nel 1835 divenne astronomo reale e direttore dell'Osservatorio di Greenwich.

### 10.3.2. Trattazione di Cesàro bidimensionale

Modificando opportunamente la trattazione svolta nel caso tridimensionale si possono ricavare analoghi risultati per un continuo bidimensionale.

**Proposizione 10.7. Formula di Cesàro bidimensionale.** *Sia  $\mathbf{D}$  l'atto di deformazione congruente con un cinematismo  $\mathbf{v}$  nel dominio piano  $\Omega$ . Vale allora la formula*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) + \omega(\mathbf{x}_o) \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{D}(\xi) [d\xi] - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x})] \otimes \text{rot } \mathbf{D}(\xi) [d\xi]$$

dove  $\mathbf{v}(\mathbf{x}_o)$  è il vettore velocità di traslazione ed  $\omega(\mathbf{x}_o)$  è lo scalare velocità angolare che caratterizzano un arbitrario atto di moto rigido nel piano.

**Dim.** La dimostrazione della formula di CESÀRO si basa sull'applicazione diretta del teorema fondamentale del calcolo integrale che fornisce la relazione

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\text{grad } \mathbf{v}(\xi)] [d\xi] = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\mathbf{D}(\xi) + \mathbf{W}(\xi)] [d\xi].$$

Per pervenire al risultato occorre quindi trovare una espressione dell'integrale di  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$  in termini di  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ .

A tal fine si noti che

$$\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\xi) [d\xi] = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \omega(\xi) \mathbf{R} [d\xi] = \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \omega(\xi) \mathbf{R} [d(\xi - \mathbf{x})].$$

Una integrazione per parti mostra che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\xi) [d\xi] &= \omega(\xi) \mathbf{R}(\xi - \mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x})] \otimes \text{grad } \omega(\xi) [d\xi] = \\ &= \omega(\mathbf{x}_o) \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x})] \otimes \text{grad } \omega(\xi) [d\xi], \end{aligned}$$

e, ricordando che  $\text{grad } \omega(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{D}(\mathbf{x})$  si ottiene

$$\int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} \mathbf{W}(\xi) [d\xi] = \omega(\mathbf{x}_o) \mathbf{R}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) - \int_{\mathbf{x}_o}^{\mathbf{x}} [\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x})] \otimes \text{rot } \mathbf{D}(\xi) [d\xi],$$

e pertanto il risultato.  $\square$



La condizione differenziale di congruenza può ottersi applicando la condizione di integrabilità di VOLTERRA alla formula di CESÀRO.

Si farà ricorso al seguente risultato preliminare dovuto all'autore.

**Proposizione 10.8. Una identità notevole.** *Se  $\mathbf{v}$  è un arbitrario campo vettoriale di classe  $C_1$  in  $\Omega$  vale l'identità*

$$\operatorname{rot} [\mathbf{R}\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x})] = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + [\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})]\mathbf{R}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

**Dim.** Si osservi che in termini di componenti cartesiane risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} [\mathbf{R}\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x})]_i &= \operatorname{div} [[\mathbf{R}\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x})]\mathbf{R}]_i = (R_{is}x_s v_k R_{kj})_{/j} = \\ &= R_{ij}v_k R_{kj} + R_{is}x_s v_{k/j} R_{kj}. \end{aligned}$$

Il primo termine, ricordando che  $-\mathbf{R}\mathbf{R} = \mathbf{R}^T\mathbf{R} = \mathbf{I}$ , vale

$$-R_{ij}R_{jk}v_k = v_i$$

ed il secondo termine vale

$$R_{kj}v_{k/j}R_{is}x_s = [\mathbf{R} * \operatorname{grad} \mathbf{v}(\mathbf{x})](\mathbf{R}\mathbf{x})_i = [\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})](\mathbf{R}\mathbf{x})_i.$$

Sommando i due termini si ottiene il risultato.  $\square$

Per dedurre la condizione di congruenza interna si osservi che, affinché il cinematicismo  $\mathbf{v}$  sia ben definito, l'integrale che compare nella formula di CESÀRO deve risultare indipendente dal percorso di integrazione.

Se il dominio piano  $\Omega$  occupato dal corpo è semplicemente connesso, l'indipendenza dal percorso di integrazione sussiste se e solo se il rotore del campo vettoriale da integrare è nullo:

$$\operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi) - \operatorname{rot} [[\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x})] \otimes \operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi)] = \mathbf{o}.$$

Si ricordi quindi che per ogni campo vettoriale  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  vale l'identità

$$\operatorname{rot} [\mathbf{R}\mathbf{x} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x})] = \mathbf{v}(\mathbf{x}) + [\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})]\mathbf{R}\mathbf{x}.$$

Da essa, ponendo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \operatorname{rot} \mathbf{D}(\mathbf{x}),$$

si ottiene

$$\operatorname{rot} [\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x}) \otimes \operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi)] = \operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi) + [\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi)]\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x}).$$

In definitiva la condizione di integrabilità assume la forma

$$[\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi)]\mathbf{R}(\xi - \mathbf{x}) = \mathbf{o}$$

che, dovendo valere per ogni  $\xi$  e per ogni fissato  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ , equivale ad imporre che

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{D}(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Si è così ritrovata la condizione scalare di congruenza interna per il continuo di CAUCHY bidimensionale.

## 11. COMPLEMENTI

Questa sezione è dedicata alla presentazione di altri risultati ed all'approfondimento di alcune tematiche trattate.

### 11.1. Forma generale della decomposizione polare

Nella sezione 3.2 (p. 23) è stata dimostrata la formula di decomposizione polare per una trasformazione lineare  $\mathbf{F} \in L(V; V)$  non singolare.

Alla validità della decomposizione polare per un'arbitraria trasformazione lineare  $\mathbf{F} \in L(V; V)$  si perviene mostrando che essa equivale alla soluzione di un problema di minima distanza dal gruppo Orth delle isometrie.

Si premette una proprietà che è una diretta conseguenza della forma canonica delle isometrie.

**Proposizione 11.1. Vettori invarianti.** *Sia  $\mathcal{S}$  un sottospazio di  $V$ . Si ponga il problema di determinare una isometria  $\mathbf{R} \in \text{Orth} \setminus \mathbf{I}$  tale che*

$$\mathbf{R} \mathbf{h} = \mathbf{h} \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{S} \setminus \{\mathbf{o}\}.$$

*Si ha allora che*

- se  $\mathcal{S} = V$  non esiste alcuna soluzione in  $\text{Orth} \setminus \mathbf{I}$ ,
- se  $\dim \mathcal{S} = 2$  l'unica soluzione in  $\text{Orth} \setminus \mathbf{I}$  è la riflessione rispetto ad  $\mathcal{S}$ ,
- se  $\dim \mathcal{S} = 1$  le soluzioni in  $\text{Orth} \setminus \mathbf{I}$  sono costituite dalle riflessioni rispetto ad un qualsiasi sottospazio bidimensionale contenente  $\mathcal{S}$  e dalle rotazioni di  $\alpha \in ]0, 2\pi[$  attorno ad  $\mathcal{S}$ .

Si può ora dimostrare la seguente fondamentale proprietà di stazionarietà.

**Proposizione 11.2. Principio di stazionarietà.** *Per ogni operatore  $\mathbf{F} \in L(V; V)$  si consideri il funzionale  $\psi : \text{Orth} \mapsto \mathbb{R}$  definito da*

$$\psi(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\|^2,$$

dove  $\|\mathbf{F}\| = (\text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}))^{\frac{1}{2}}$  è la norma euclidea in  $L(V; V)$ . Allora le seguenti proprietà sono equivalenti

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\|^2 \text{ è stazionario nel punto } \mathbf{R} \in \text{Orth}, \\ \mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R}, \end{cases}$$

dove  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$  sono operatori simmetrici e positivi.

- Se  $\det \mathbf{F} \neq 0$  allora l'isometria  $\mathbf{R} \in \text{Orth}$  è univocamente determinata ed i tensori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono definiti positivi.
- Se il nucleo di  $\mathbf{F}$  è al più monodimensionale ed il gruppo delle isometrie Orth è sostituito dal sottogruppo delle rotazioni  $\text{Orth}^+$ , la rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$  è univocamente determinata.

**Dim.** Preliminarmente si osservi che la continuità della norma e la compattezza di Orth assicurano l'esistenza di almeno una soluzione del problema di minimo. Si consideri quindi la funzione  $f(\lambda) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{Q}(\lambda)\|^2$  lungo una traiettoria regolare  $\mathbf{Q}(\lambda)$  in Orth che parte da  $\mathbf{R} = \mathbf{Q}(0)$ . La derivata

$$f'(\lambda) = \left( \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{Q}(\lambda)\|^2 \right)' = -(\mathbf{F} - \mathbf{Q}(\lambda)) * \mathbf{Q}'(\lambda),$$

nel punto  $\lambda = 0$  vale

$$f'(0) = -(\mathbf{F} - \mathbf{R}) * \mathbf{Q}'(0).$$

Per la proposizione 3.3 (p. 23) si ha che  $\mathbf{Q}'(0) = \mathbf{W}\mathbf{R} = \mathbf{R}\mathbf{W}_o$  e dunque

$$(\mathbf{F} - \mathbf{R}) * \mathbf{Q}'(0) = \mathbf{F} * \mathbf{W}\mathbf{R} - \mathbf{R} * \mathbf{W}\mathbf{R} = \mathbf{F} * \mathbf{R}\mathbf{W}_o - \mathbf{R} * \mathbf{R}\mathbf{W}_o.$$

Essendo poi

$$\begin{cases} \mathbf{R} * \mathbf{W}\mathbf{R} = \text{tr}\{\mathbf{W}\mathbf{R}\mathbf{R}^T\} = \text{tr}\{\mathbf{W}\} = 0, \\ \mathbf{R} * \mathbf{R}\mathbf{W}_o = \text{tr}\{\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{W}_o\} = \text{tr}\{\mathbf{W}_o\} = 0, \end{cases}$$

l'annullarsi della derivata equivale ad imporre che

$$\begin{cases} \mathbf{F} * \mathbf{W}\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{R}^T * \mathbf{W} = 0 & \forall \mathbf{W} \in \text{Anti} \iff \mathbf{F}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{F}^T, \\ \mathbf{F} * \mathbf{R}\mathbf{W}_o = \mathbf{R}^T\mathbf{F} * \mathbf{W}_o = 0 & \forall \mathbf{W}_o \in \text{Anti} \iff \mathbf{R}^T\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{R}. \end{cases}$$

Si possono pertanto definire i tensori simmetrici

$$\mathbf{V} := \mathbf{F}\mathbf{R}^T = \mathbf{R}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{U} := \mathbf{R}^T\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{R},$$

così che  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ .

Si può quindi affermare che la proprietà di stazionarietà di  $f(\lambda)$  nel punto  $\lambda = 0$  conduce alla decomposizione polare di  $\mathbf{F}$ .

I tensori simmetrici  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono univocamente definiti come radici quadrate dei tensori

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{R}^T\mathbf{R}\mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{R}\mathbf{R}^T\mathbf{F} = \mathbf{F}^T\mathbf{F},$$

simmetrici e positivi in quanto

$$\begin{cases} (\mathbf{V}^2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{F}\mathbf{F}^T\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \|\mathbf{F}^T\mathbf{h}\|^2 \geq 0, & \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}, \\ (\mathbf{U}^2\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = (\mathbf{F}^T\mathbf{F}\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \|\mathbf{F}\mathbf{h}\|^2 \geq 0, & \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}. \end{cases}$$

Ne segue che

- I tensori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono simmetrici e positivi.
- Se  $\det \mathbf{F} \neq 0$  i tensori  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  sono definiti positivi, quindi invertibili, e l'isometria  $\mathbf{R} \in \text{Orth}$  è univocamente individuata da  $\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{F}$ .

In generale la discussione dell'unicità dell'isometria  $\mathbf{R}$  che compare nella decomposizione polare si conduce assumendo che sia  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \overline{\mathbf{R}}\mathbf{U}$ . Allora risulta  $(\overline{\mathbf{R}}^T \mathbf{R})\mathbf{U} = \mathbf{U}$ . Ma  $\overline{\mathbf{R}} \neq \mathbf{R} \iff \overline{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} \neq \mathbf{I}$ .

La non unicità dell'isometria  $\mathbf{R}$  dipende dunque dall'esistenza di isometrie non identiche  $\mathbf{Q} \neq \mathbf{I}$  tali che  $\mathbf{Q}\mathbf{U} = \mathbf{U}$ .

Ponendo  $\mathcal{S} = \text{Im } \mathbf{U}$  e tenendo conto che  $\text{Ker } \mathbf{F} = \text{Ker } \mathbf{U}$ , la proposizione 11.1 consente di affermare che

- se  $\dim \text{Ker } \mathbf{F} = 0$  l'isometria è unica,
- se  $\dim \text{Ker } \mathbf{F} = 1$  l'isometria è definita a meno di una riflessione rispetto al sottospazio bidimensionale  $\mathcal{S}$ ,
- se  $\dim \text{Ker } \mathbf{F} = 2$  l'isometria è definita a meno delle riflessioni rispetto ad un qualsiasi sottospazio bidimensionale contenente il sottospazio monodimensionale  $\mathcal{S}$  ed a meno di una rotazione di  $\alpha \in ]0, 2\pi[$  attorno ad  $\mathcal{S}$ .

Se  $\det \mathbf{F} > 0$  risulta  $\det \mathbf{R} > 0$  e l'isometria è una rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+$ .  $\square$

Il risultato della proposizione 11.2 sussiste se si sostituisce al gruppo  $\text{Orth}$  delle isometrie il sottogruppo  $\text{Orth}^+$  delle rotazioni, con ovvie modificazioni concernenti la discussione dell'unicità della rotazione.

La prima dimostrazione dell'equivalenza tra la proprietà di minima distanza da  $\text{Orth}^+$  e la formula di decomposizione polare è dovuta a MARTINS e PODIO GUIDUGLI [49].

L'argomentazione con la quale si mostra che i punti di stazionarietà sono di minima distanza è dovuta a GURTIN in [51] la cui trattazione fa riferimento al gruppo  $\text{Orth}^+$  delle rotazioni. Si riporta di seguito l'ovvia estensione al caso del gruppo  $\text{Orth}$  delle isometrie.



**Proposizione 11.3. Minima distanza dal gruppo delle isometrie.** *Per ogni operatore lineare  $\mathbf{F} \in L(V; V)$  le seguenti proprietà sono equivalenti*

$$\begin{cases} \|\mathbf{F} - \mathbf{R}\| = \min \{\|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\| : \mathbf{Q} \in \text{Orth}\}, \\ \mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}. \end{cases}$$

**Dim.** In forza della proposizione 11.2 basta dimostrare che in ogni punto di stazionarietà  $\mathbf{R} \in \text{Orth}$  la funzione  $\psi(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\|^2$  attinge un minimo assoluto su  $\text{Orth}$ . Infatti dalla relazione

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\|^2 = \|\mathbf{F}\|^2 - 2\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q} + 3,$$

posto  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$ , si ha

$$\|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\|^2 - \|\mathbf{F} - \mathbf{R}\|^2 = 2\mathbf{U} * (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o),$$

con  $\mathbf{Q}_o = \mathbf{R}^T \mathbf{Q}$ . Essendo  $\mathbf{U} * \mathbf{Q}_o = \mathbf{U} * \frac{1}{2}(\mathbf{Q}_o + \mathbf{Q}_o^T)$  sussiste l'identità

$$2\mathbf{U} * (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o) = \mathbf{U} * [(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o)(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o)^T] = \text{tr} \{(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o)^T \mathbf{U} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o)\} \geq 0,$$

in quanto il tensore  $(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o)^T \mathbf{U} (\mathbf{I} - \mathbf{Q}_o)$  è positivo.  $\square$



**Osservazione 11.1.** Nello spazio  $L(V; V)$  degli operatori lineari su  $V$  si considerino le norme che esprimono il valor medio quadratico dei vettori che sono le immagini di quelli della sfera unitaria

$$\mathcal{S}_1(V) := \{\mathbf{h} \in V : \|\mathbf{h}\| = 1\},$$

o del disco unitario

$$\mathcal{B}_1(V) := \{\mathbf{h} \in V : \|\mathbf{h}\| \leq 1\}.$$

Tali norme sono definite da

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{S}_1} := \left[ \int_{\mathcal{S}_1} \|\mathbf{A}\mathbf{h}\|^2 d\mathbf{a} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{B}_1} := \left[ \int_{\mathcal{B}_1} \|\mathbf{A}\mathbf{h}\|^2 d\mathbf{v} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

La norma  $\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{B}_1}$  è il *divario locale* di GRIOLI [38].

La simmetria e la positività di  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  assicurano che esiste una terna ortonormale di autovettori  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  cui corrispondono gli autovalori non negativi  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Allora

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{S}_1}^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_{\mathcal{S}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 d\mathbf{a}, \quad \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{B}_1}^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_{\mathcal{B}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 d\mathbf{v}.$$

Risultando

$$\int_{\mathcal{S}_1} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 d\mathbf{a} = 4\pi, \quad \int_{\mathcal{B}_1} \sum_{i=1}^3 (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 d\mathbf{v} = \frac{4}{5}\pi,$$

in virtù della simmetria polare si deduce che

$$\int_{\mathcal{S}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 d\mathbf{a} = \frac{4}{3}\pi, \quad \int_{\mathcal{B}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 d\mathbf{v} = \frac{4}{15}\pi.$$

Dall'espressione della norma euclidea  $\|\mathbf{A}\|^2 = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i$  seguono infine le relazioni di proporzionalità

$$\|\mathbf{A}\|_{\mathcal{S}_1} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \|\mathbf{A}\|, \quad \|\mathbf{A}\|_{\mathcal{B}_1} = \sqrt{\frac{4\pi}{15}} \|\mathbf{A}\|.$$

La proporzionalità tra le norme in media quadratica (superficiale e volumica) e la norma euclidea mostra che la proprietà di minimo enunciata nella proposizione 11.3 equivale a quella per le norme in media quadratica.

GRIOLI in [38] ha per primo dimostrato che l'isometria  $\mathbf{R} \in \text{Orth}$  che realizza la decomposizione polare  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$  è un punto di minimo assoluto per il funzionale  $\phi(\mathbf{Q}) = \|\mathbf{F} - \mathbf{Q}\|_{\mathcal{B}_1}$  su Orth.

La dimostrazione originale di GRIOLI [38] è fondata sulla rappresentazione spettrale dell'operatore simmetrico e positivo  $\mathbf{U} \in \text{Sym} \cap \text{Pos}$  ed è condotta osservando che la diseguaglianza integrale

$$\int_{\mathcal{B}_1} \|(\mathbf{F} - \mathbf{R})\mathbf{h}\|^2 dv \leq \int_{\mathcal{B}_1} \|(\mathbf{F} - \mathbf{Q})\mathbf{h}\|^2 dv, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth},$$

equivale alla diseguaglianza

$$\int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{F}\mathbf{h} \cdot \mathbf{R}\mathbf{h} dv \geq \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{F}\mathbf{h} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{h} dv, \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth},$$

che, ponendo  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$  e  $\mathbf{Q}_o = \mathbf{Q}^T\mathbf{R}$  può scriversi

$$\int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{R}\mathbf{h} dv = \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} dv \geq \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{h} dv = \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{Q}_o \mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} dv.$$

Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una terna ortonormale principale per  $\mathbf{U} \in \text{Sym} \cap \text{Pos}$  cui corrispondono gli autovalori non negativi  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Allora risulta

$$\int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} dv = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_{\mathcal{B}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 dv.$$

$$\int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{Q}_o \mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} dv = \sum_{i,k=1}^3 \lambda_i (\mathbf{Q}_o \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_k \int_{\mathcal{B}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_k) dv.$$

Si noti ora che la terna ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è principale per il tensore dei momenti del secondo ordine del disco unitario. Dunque risulta

$$\int_{\mathcal{B}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_k) dv = 0 \quad \text{per } i \neq k.$$

Inoltre si ha che

$$\|\mathbf{e}_i - \mathbf{Q}_o \mathbf{e}_i\|^2 \geq 0 \Rightarrow (\mathbf{Q}_o \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \leq \|\mathbf{e}_i\|^2 = 1.$$

Pertanto si conclude che, per ogni  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}$ ,

$$\int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{Q}_o \mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} dv \leq \sum_{i=1}^3 \lambda_i \int_{\mathcal{B}_1} (\mathbf{h} \cdot \mathbf{e}_i)^2 dv = \frac{4\pi}{15} \text{tr}(\mathbf{U}) = \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{U}\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} dv,$$

che è la diseguaglianza che dovevansi dimostrare. ■



La formula di decomposizione polare per una trasformazione lineare, anche non regolare,  $\mathbf{F} \in L(V; V)$  trova un’interessante applicazione in Statica, nella dimostrazione del teorema di DA SILVA (vedi capitolo II, sezione II.14 (p. 289)).

## 11.2. Superfici singolari

Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  ed  $\mathbf{n}$  il versore normale alla frontiera  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  orientata in modo che, per ogni  $\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{T}(\Omega)$ ,

- sulle frontiere  $\partial\mathcal{P}_\alpha \cap \partial\Omega$  abbia verso uscente da  $\partial\mathcal{P}_\alpha$ ,
- in corrispondenza delle interfacce tra gli elementi di  $\mathcal{T}(\Omega)$ , detti  $(\overline{\mathcal{P}})^+$  e  $(\overline{\mathcal{P}})^-$  gli elementi adiacenti, sia diretta verso l’elemento positivo. Quindi, se  $\mathbf{n}^+$  e  $\mathbf{n}^-$  sono i versori normali uscenti da  $(\overline{\mathcal{P}})^+$  e  $(\overline{\mathcal{P}})^-$ , risulta  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^-$ .

Detto  $I \subset \mathbb{R}$  un intervallo reale, sia  $\mathbf{c} : I \mapsto \Omega$  una curva regolare su di un’interfaccia  $(\overline{\mathcal{P}})^+ \cap (\overline{\mathcal{P}})^-$  di  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

- Si consideri quindi un *campo scalare*  $\Psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  di classe  $C^m$  in  $\mathcal{T}(\Omega)$ .
- Si dice che una superficie  $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}(\Omega)$  è *singolare* di ordine  $k$  se esiste una derivata parziale di ordine  $k$  che presenta un *salto di discontinuità* attraverso  $\mathcal{S}$  mentre tutte le derivate parziali di ordine minore di  $k$  sono continue attraverso  $\mathcal{S}$ .

Se  $m \geq 1$  la regola di derivazione a catena, applicata alla funzione  $\Psi \circ \mathbf{c} : I \mapsto \mathbb{R}$  in  $(\overline{\mathcal{P}})^+$  e  $(\overline{\mathcal{P}})^-$ , fornisce le formule

$$\begin{aligned} d(\Psi^+ \circ \mathbf{c}) &= d\Psi^+(\mathbf{c}) \circ d\mathbf{c}, \\ d(\Psi^- \circ \mathbf{c}) &= d\Psi^-(\mathbf{c}) \circ d\mathbf{c}. \end{aligned}$$

La validità della regola di derivazione a catena in  $(\overline{\mathcal{P}})^+$  e  $(\overline{\mathcal{P}})^-$  è nota in letteratura come *lemma di HADAMARD*<sup>34</sup> [29]. Su di esso è fondata l’intera teoria delle superfici singolari (si veda [40] pag. 491).

- Le derivate  $d(\Psi^+ \circ \mathbf{c})$  ( $d(\Psi^- \circ \mathbf{c})$ ) sono dette *derivate tangenziali* di  $\Psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  lungo la curva  $\mathbf{c} : I \mapsto \Omega$ .

Sottraendo la seconda delle formule precedenti dalla prima, si perviene alla *condizione superficiale di compatibilità*

$$[[d(\Psi \circ \mathbf{c})]] = d[[\Psi \circ \mathbf{c}]] = [[d\Psi]](\mathbf{c}) \circ d\mathbf{c}.$$

<sup>34</sup> JACQUES SALOMON HADAMARD (1865-1963). Illustré matematico, professore di analisi alla École Polytechnique, dove fu successore di MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838-1922), e membro dell’Accademia delle Scienze dove fu successore di JULES HENRI POINCARÉ (1854-1912). Famoso è il suo teorema sui numeri primi, il trattato del 1903 *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l’Hydrodynamique* e l’articolo *Leçons sur le calcul des variations* del 1910. Fondamentali anche i contributi alla teoria dell’elasticità, all’ottica geometrica, all’idrodinamica ed ai problemi di valori al contorno.

La condizione superficiale di compatibilità si esprime affermando che

- il salto della derivata tangenziale è uguale alla derivata tangenziale del salto.

Se il salto  $[[\Psi]]$  è costante sull'interfaccia  $(\bar{\mathcal{P}})^+ \cap (\bar{\mathcal{P}})^-$  risulta  $d[[\Psi]] = 0$  e la condizione di compatibilità fornisce la relazione

$$[[d\Psi]](\mathbf{c}) \circ d\mathbf{c} = 0.$$

Dalla definizione del gradiente di un campo scalare

$$\text{grad } \Psi \cdot \mathbf{h} = d\Psi[\mathbf{h}], \quad \forall \mathbf{h} \in V,$$

si evince allora che il salto del gradiente  $[[\text{grad } \Psi]]$  è ortogonale all'interfaccia.

Si è così dimostrato il seguente fondamentale risultato dovuto a MAXWELL [20].

**Proposizione 11.4. Teorema di Maxwell.** *Se il salto  $[[\Psi]]$  di un campo scalare  $\Psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  è costante attraverso una superficie  $S \subset \mathcal{I}(\Omega)$ , allora il salto del gradiente è normale all'interfaccia*

$$[[\text{grad } \Psi]] = \alpha \mathbf{n},$$

dove

$$\alpha = [[\text{grad } \Psi]] \cdot \mathbf{n} = [[d\Psi[\mathbf{n}]]] = [[d\Psi/d\mathbf{n}]].$$

Il risultato sussiste a fortiori se  $\Psi$  è continuo attraverso la superficie  $S$ . □

Applicando il teorema di MAXWELL a campi vettoriali si deduce il seguente risultato dovuto J. WEINGARTEN<sup>35</sup> [28]

**Proposizione 11.5. Teorema di Weingarten.** *Si assuma che il salto  $[[\mathbf{v}]]$  di un campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  sia costante attraverso una superficie  $S \subset \mathcal{I}(\Omega)$ . Allora esiste un campo vettoriale  $\boldsymbol{\alpha} : S \mapsto V$  tale che*

$$[[\text{div } \mathbf{v}]] = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n},$$

$$[[\text{rot } \mathbf{v}]] = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [[\text{div } \mathbf{v}]] \mathbf{n} + [[\text{rot } \mathbf{v}]] \times \mathbf{n},$$

<sup>35</sup> JULIUS WEINGARTEN (1836-1910). Nacque a Berlino da famiglia di emigranti polacchi. All'Università di Berlino frequentò lezioni di teoria del potenziale tenute da DIRICHLET. Nonostante dovesse insegnare nelle scuole per guadagnarsi da vivere, nel 1857 ottenne un premio dall'Università di Berlino per un lavoro sulle linee di curvatura delle superfici. Lo studio della geometria differenziale delle superfici fu il suo principale interesse di ricerca e DARBOUX paragonò la qualità dei suoi risultati a quelli di GAUSS. Sullo stesso argomento WEINGARTEN ebbe una numerosa corrispondenza con LUIGI BIANCHI (1856-1928). Nel 1894 vinse il Grand Prix della Académie des Sciences di Parigi per un lavoro sulla determinazione di tutte le superfici isometriche ad una data superficie, in cui riconduceva il problema a quello di trovare tutte le soluzioni di un'equazione differenziale alle derivate parziali del tipo di MONGE-AMPÈRE.

**Dim.** Dal teorema di MAXWELL, ponendo  $\Psi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}$  con  $\mathbf{a} : \Omega \mapsto V$  campo vettoriale costante, si deduce che

$$[[\operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]] = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{a} \in V,$$

dove

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} := [[\operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]] \cdot \mathbf{n} = [[d\mathbf{v}]] [\mathbf{n}] \cdot \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a} \in V.$$

Inoltre per ogni coppia  $\mathbf{a}, \mathbf{h} : \Omega \mapsto V$  di campi vettoriali costanti, si ha che

$$[[\operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})]] \cdot \mathbf{h} = [[d\mathbf{v}]] [\mathbf{h}] \cdot \mathbf{a} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h}) = (\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{n}) [\mathbf{h}] \cdot \mathbf{a}.$$

Pertanto

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} = [[d\mathbf{v}]] [\mathbf{n}], \quad [[d\mathbf{v}]] = \boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{n}.}$$

Ne segue che

$$[[\operatorname{div} \mathbf{v}]] = [[\operatorname{tr} d\mathbf{v}]] = \operatorname{tr}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{n}) = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n},$$

$$[[\operatorname{rot} \mathbf{v}]] = [[2 \text{ axial emi } d\mathbf{v}]] = -\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}.$$

Dall'identità

$$(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha},$$

si ha infine che

$$\boldsymbol{\alpha} = [[\operatorname{div} \mathbf{v}]] \mathbf{n} + [[\operatorname{rot} \mathbf{v}]] \times \mathbf{n},$$

ed il risultato è provato.  $\square$

**Osservazione 11.2.** Si consideri un campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  che sia il gradiente di un campo scalare  $\Psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ . Si assuma inoltre che il campo  $\Psi$  sia continuo attraverso la superficie  $\mathcal{S}$  o presenti un salto costante di discontinuità attraverso la superficie  $\mathcal{S}$ .

Dal teorema di MAXWELL si deduce allora che

$$[[\mathbf{v}]] = [[\operatorname{grad} \Psi]] = \boldsymbol{\alpha} \mathbf{n},$$

e quindi che

- la componente tangenziale del campo vettoriale potenziale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  deve essere continua attraverso la superficie  $\mathcal{S}$ .

Si consideri ora un campo vettoriale solenoidale  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{w}$  con un potenziale vettore  $\mathbf{w} : \Omega \mapsto V$  anch'esso solenoidale. Si assuma inoltre che il potenziale vettore  $\mathbf{w}$  sia continuo attraverso la superficie  $\mathcal{S}$  o presenti un salto costante di discontinuità attraverso la superficie  $\mathcal{S}$ .

Dal teorema di WEINGARTEN si deduce allora che

$$[[\mathbf{v}]] = [[\operatorname{rot} \mathbf{w}]] = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{n}, \Rightarrow [[\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]] = 0,$$

e quindi che

- la componente normale del campo vettoriale solenoidale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  deve essere continua attraverso la superficie  $\mathcal{S}$ .  $\blacksquare$

### 11.3. Trasporto con superfici di discontinuità

Il teorema di REYNOLDS della sezione 8 (p. 67) può essere esteso per trattare il caso più generale in cui esistono nella configurazione  $\Omega(t)$  superfici di discontinuità del campo da integrare e del campo di velocità.

Le superfici di discontinuità si propagarsi attraverso il corpo se la componente normale della loro velocità è diversa da quella delle particelle del corpo istantaneamente ubicate su di essa.

In tal caso si dice che esse sono *superfici di propagazione delle discontinuità*.

Sussiste in proposito il seguente risultato ottenuto dall'autore generalizzando il teor. 1.8 del capitolo 2 di [52].

**Proposizione 11.6. Teorema del trasporto con propagazione di discontinuità.** Sia  $\phi(\mathbf{x}, t)$  un campo spaziale a valori scalari definito sulla traiettoria  $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  di un corpo  $\mathbb{T}_\mathcal{B}$  e regolare a pezzi su  $\Omega = \chi(\mathcal{B}, t)$ . Allora vale la formula

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \phi \, dv &= \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \phi' \, dv + \int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\partial\mathcal{I}(\Omega)} [[\phi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, da = \\ &= \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \phi' \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\partial\mathcal{I}(\Omega)} [[\phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})]] \cdot \mathbf{n} \, da = \end{aligned}$$

dove:

- la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  è il supporto di regolarità del campo scalare  $\phi$  e del campo di velocità spaziale  $\mathbf{v}$  nella configurazione  $\Omega = \chi(\mathcal{B}, t)$ ,
- gli integrali estesi a  $\mathcal{T}(\Omega)$  sono per definizione somma di quelli estesi agli elementi della suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ ,
- $\partial\mathcal{I}(\Omega)$  è l'insieme delle interfacce tra gli elementi di  $\mathcal{T}(\Omega)$ ,
- $\mathbf{w}$  è il campo di velocità con cui si muovono le interfacce,
- i salti di discontinuità sono definiti da  $[[\phi]] := [\phi^+ - \phi^-]$  e  $[[\phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})]] := [\phi^+(\mathbf{v}^+ - \mathbf{w}) - \phi^-(\mathbf{v}^- - \mathbf{w})]$ .

La normale  $\mathbf{n}$  alla frontiera  $\partial\mathcal{P}_\alpha \in \mathcal{T}(\Omega)$  è orientata assumendo che

- sulla frontiera  $\partial\mathcal{P}_\alpha \cap \partial\Omega$  abbia verso uscente,
- in corrispondenza delle interfacce tra gli elementi di  $\mathcal{T}(\Omega)$  sia diretta verso la parte positiva (quella su cui si calcola  $\phi^+$ ).

**Dim.** Per ogni elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha \in \mathcal{T}(\Omega)$ , si denotino con  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} = \partial\mathcal{P}_\alpha \cap \partial\mathcal{P}_\beta$  la parte di frontiera comune a  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  e  $\overline{\mathcal{P}}_\beta$ , con  $\mathbf{w}_{\alpha\beta}$  la velocità di  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ , con  $\mathbf{n}_\alpha$  la normale uscente da  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  e con  $\mathbf{v}_\alpha$  la restrizione del campo di velocità  $\mathbf{v}$  all'elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$ .

Si estenda il campo vettoriale definito, sul contorno  $\partial\mathcal{P}_\alpha$ , dai campi

$$\mathbf{w}_{\alpha\beta} \quad \text{su} \quad \bigcup_{\substack{\mathcal{P}_\beta \in \mathcal{T}(\Omega) \\ \beta \neq \alpha}} \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_\alpha \quad \text{su} \quad \partial\mathcal{P}_\alpha \cap \partial\Omega,$$

ad un campo vettoriale  $\mathbf{w}_\alpha$  sull'elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$ .

Applicando all'elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha \in \mathcal{T}(\Omega)$  il teorema del trasporto di REYNOLDS (proposizione 8.1 (p. 68)) lungo il flusso generato dal campo di velocità  $\mathbf{w}_\alpha$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{P}_\alpha} \phi_\alpha \, dv &= \int_{\mathcal{P}_\alpha} \phi'_\alpha \, dv + \int_{\partial\mathcal{P}_\alpha \cap \partial\Omega} \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \, da + \sum_{\substack{\mathcal{P}_\beta \in \mathcal{T}(\Omega) \\ \mathcal{P}_\beta \neq \mathcal{P}_\alpha}} \int_{\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}} \phi_\alpha \mathbf{w}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{n}_\alpha \, da = \\ &= \int_{\mathcal{P}_\alpha} \phi'_\alpha \, dv + \int_{\partial\mathcal{P}_\alpha} \phi_\alpha \mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha \, da + \sum_{\substack{\mathcal{P}_\beta \in \mathcal{T}(\Omega) \\ \mathcal{P}_\beta \neq \mathcal{P}_\alpha}} \int_{\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}} \phi_\alpha (\mathbf{w}_{\alpha\beta} - \mathbf{v}_\alpha) \cdot \mathbf{n}_\alpha \, da. \end{aligned}$$

Si sommino quindi i contributi di tutti gli elementi di  $\mathcal{T}(\Omega)$  e, in corrispondenza di ogni interfaccia, si orienti la normale  $\mathbf{n}$  verso la faccia positiva così che risulti  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^-$ . Si ha così che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \phi \, dv &= \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \phi' \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da - \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} [[\phi]] \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, da = \\ &= \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \phi' \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \phi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} [[\phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})]] \cdot \mathbf{n} \, da, \end{aligned}$$

e l'enunciato è dimostrato.  $\square$

In modo analogo a quanto visto nella sezione 8 (p. 67), alla formula di trasporto si possono dare le seguenti espressioni alternative.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \phi \, dv &= \int_{\mathcal{T}(\Omega)} [\phi' + \operatorname{div}(\phi \mathbf{v})] \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} [[\phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})]] \cdot \mathbf{n} \, da = \\ &= \int_{\mathcal{T}(\Omega)} [\dot{\phi} + \phi \operatorname{div}(\mathbf{v})] \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} [[\phi(\mathbf{v} - \mathbf{w})]] \cdot \mathbf{n} \, da = \end{aligned}$$

Il teorema di trasporto con propagazione di discontinuità può essere formulato con ovvie modifiche per campi vettoriali e tensoriali. Esso costituisce uno strumento fondamentale nella teoria della propagazione delle onde e delle onde d'urto [41], [52].

#### 11.4. Forma variazionale del teorema del trasporto

La forma variazionale del teorema del trasporto consente di valutare il tasso di variazione nel tempo dell'integrale del prodotto interno tra un campo vettoriale spaziale  $\mathbf{u}$  dipendente dal tempo ed un campo vettoriale di prova  $\delta\mathbf{v}$  indipendente dal tempo.

Procedendo come nella dimostrazione del teorema di REYNOLDS, proposizione 8.1 (p. 68), tenendo conto dell'identità

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = d\mathbf{u}[\mathbf{v}] + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v},$$

dalla formula di espansione di EULER  $\dot{J}(\chi) = J(\chi)(\operatorname{div} \mathbf{v})$  si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v} \, dv &= \int_{\mathcal{B}} (\dot{J}(\chi) \mathbf{u}) \cdot \delta\mathbf{v} \, dv_B = \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} \, J(\chi) \, dv_B = \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u} \operatorname{div} \mathbf{v}) \cdot \delta\mathbf{v} \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} [\mathbf{u}' + \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})] \cdot \delta\mathbf{v} \, dv = \\ &= \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \mathbf{u}' \cdot \delta\mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\chi(\mathcal{B},t)} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{v}) \, da. \end{aligned}$$

Assumendo che  $\delta\mathbf{v}$  sia un qualsiasi campo vettoriale costante, si riottiene in particolare la formula del trasporto di un campo vettoriale spaziale.

La forma variazionale del teorema del trasporto si può immediatamente estendere per considerare campi tensoriali invece che vettoriali considerando come integrando il prodotto interno  $\mathbf{T} : \delta\mathbf{S}$  di un campo tensoriale  $\mathbf{T}$  dipendente dal tempo per un campo tensoriale di prova  $\delta\mathbf{S}$  indipendente dal tempo.

Si noti infine che la forma variazionale del teorema del trasporto consente di estendere il risultato relativo a campi vettoriali e tensoriali al caso generale in cui lo spazio ambiente delle configurazioni della struttura è una varietà differenziabile (si veda la trattazione svolta nella sezione 12.4 (p. 146)).

#### 12. CINEMATICA SU VARIETA'

In questa sezione si illustrano le nozioni e i risultati di geometria differenziale che forniscono gli strumenti di base per l'analisi della cinematica di strutture che sono sottovarietà di una varietà ambiente.

In particolare tali strumenti trovano applicazione nella trattazione del problema della congruenza in deformazioni finite e nella definizione dei modelli strutturali delle funi, delle membrane e dei continui con struttura (vedi capitolo IV).

Si illustra preliminarmente la nozione di *spinta* indotta da un diffeomorfismo tra varietà, con riferimento a campi scalari, campi di vettori tangentici, campi di vettori cotangenti e campi di tensori su di una varietà.

Gli elementi essenziali di tale nozione, che sono già stati introdotti nella sezione 5 (p. 48), vengono qui estesi e completati.

Le proprietà delle spinte, dirette ed inverse, sono propedeutiche alla definizione ed allo studio delle proprietà della *derivata di LIE*.

Sono introdotti il concetto di flusso su una varietà e di derivata di LIE lungo un flusso e sono dimostrate le relative principali proprietà.

La trattazione è quindi estesa per includere il caso generale in cui siano esplicitamente dipendenti dal parametrazione evolutivo sia il campo vettoriale che genera il flusso, sia il campo tensoriale di cui si effettua la derivata di LIE. Si mostra in particolare come la nozione di derivata di LIE consenta di formulare il teorema del trasporto di REYNOLDS per campi scalari dipendenti dal tempo e definiti su varietà differenziabili.

Viene poi introdotta la definizione di varietà di RIEMANN, i relativi simboli di CHRISTOFFEL e la connessione di LEVI-CIVITA.

Tali nozioni consentono di definire la derivata covariante di campi vettoriali e tensoriali e di stabilirne le principali proprietà.

La definizione di Hessiano di un campo scalare e di derivata covariante seconda di un campo tensoriale conduce quindi alla nozione di curvatura di una varietà di RIEMANN. A tal riguardo sono illustrate e dimostrate le proprietà di simmetria ed emisimmetria del tensore curvatura e le identità di BIANCHI.

Si mostra infine come per un continuo di CAUCHY l'annullarsi della curvatura della varietà di RIEMANN definita dal tensore metrico di GREEN fornisca la condizione differenziale di congruenza locale in deformazioni finite.

Nozioni introduttive riguardanti le varietà differenziabili possono essere trovate in [61]. Per trattazioni più esaurienti e specialistiche si può consultare ad esempio [50], [55], [57].

## 12.1. Flussi e spinte

Si consideri una varietà differenziabile  $\mathbb{M}$  ed il fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  ad essa associato, e cioè l'unione disgiunta degli spazi tangentici nei punti di  $\mathbb{M}$ .

Si denoterà con  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*$  il fibrato cotangente, unione disgiunta degli spazi duali di quelli tangentici nei punti di  $\mathbb{M}$ .

■ Un campo vettoriale tangente ad  $\mathbb{M}$  è una funzione

$$\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}},$$

tale che per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  sia  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{X}_{\mathbf{x}}\}$  con  $\mathbf{X}_{\mathbf{x}} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{x})$ .

Ad ogni campo vettoriale tangente ad  $\mathbb{M}$  può associarsi un insieme di curve integrali soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{c}(t)), \quad t \in I = [-\varepsilon, +\varepsilon], \quad \varepsilon > 0,$$

con la condizione iniziale  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{x}$ .

Il *flusso del campo vettoriale*  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è l'applicazione  $\mathbf{k} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{M}$  tale che per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  la funzione  $\mathbf{k}_{\mathbf{x}}(-) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, -) : I \mapsto \mathbb{M}$  sia una curva integrale del campo e cioè risulti

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{k}_{\mathbf{x}}(t)) = \mathbf{X}(\mathbf{k}_{\mathbf{x}}(t)), \quad \mathbf{k}_{\mathbf{x}}(0) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{M}.$$

E' conveniente porre  $\mathbf{k}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, t)$ .

L'unicità delle curve integrali implica che vale la *proprietà di gruppo*

$$\mathbf{k}_{\tau} \circ \mathbf{k}_t = \mathbf{k}_{t+\tau}.$$

Si ha quindi che  $\mathbf{k}_{-t} = \mathbf{k}_t^{-1}$  in quanto  $\mathbf{k}_t \circ \mathbf{k}_{-t} = \mathbf{k}_0$  è l'identità.

Sia ora  $\mathbb{N}$  un'altra varietà differenziabile e  $\mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  il fibrato tangente ad essa associato.

Si assuma che le varietà  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{N}$  siano diffeomorfe e cioè che esista un'applicazione biiettiva  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  differenziabile con l'inversa,

E' allora possibile trasformare campi scalari, vettoriali o tensoriali, su  $\mathbb{M}$  in analoghi campi su  $\mathbb{N}$  e viceversa mediante operazioni di spinta. La spinta di un campo scalare consiste in un semplice cambiamento di variabile, quella di un campo vettoriale o tensoriale è indotta dalla trasformazione tangente associata al diffeomorfismo.

- La *spinta* secondo  $\varphi$  di un   $f : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}$  è il campo scalare  $(\varphi_* f) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  definito da

$$(\varphi_* f) \circ \varphi := f \iff \varphi_* f := f \circ \varphi^{-1}.$$

Sia ora  $T\varphi : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  la mappa tangente associata al diffeomorfismo  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  e definita da

$$(T\varphi)(\{\mathbf{x}, \mathbf{X}\}) := \{\varphi(\mathbf{x}), d\varphi(\mathbf{x}) \circ \mathbf{X}\}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{M}, \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

- La *spinta* secondo  $\varphi$  di un   $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è il campo vettoriale  $(\varphi_* \mathbf{X}) : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  definito da

$$\varphi_* \mathbf{X} \circ \varphi := (T\varphi) \circ \mathbf{X} \iff \varphi_* \mathbf{X} := (T\varphi) \circ \mathbf{X} \circ \varphi^{-1}.$$

- La *spinta inversa* è la spinta secondo la mappa inversa  $\varphi^{-1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{M}$ .

Le spinte inverse dei campi scalare  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathfrak{R}$  e vettoriale  $\mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  sono quindi i campi  $\varphi^*g : \mathbb{M} \mapsto \mathfrak{R}$  e  $(\varphi^*\mathbf{Y}) : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  definiti da

$$\varphi^*g = g \circ \varphi, \quad \varphi^*\mathbf{Y} := (T\varphi)^{-1} \circ \mathbf{Y} \circ \varphi.$$

Risulta pertanto

$$\varphi_*(\varphi^*g) = g, \quad \varphi^*(\varphi_*f) = f,$$

$$\varphi_*(\varphi^*\mathbf{Y}) = \mathbf{Y}, \quad \varphi^*(\varphi_*\mathbf{X}) = \mathbf{X}.$$

■ Le spinte, diretta ed inversa di *campi covettoriali*  $\alpha : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*$  e  $\beta : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}^*$  sono i campi covettoriali definiti da

$$(\varphi_*\alpha)(\varphi_*\mathbf{X}) := \varphi_*(\alpha(\mathbf{X})), \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}},$$

$$(\varphi^*\beta)(\varphi^*\mathbf{Y}) := \varphi^*(\beta(\mathbf{Y})), \quad \forall \mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}},$$

ovvero

$$(\varphi_*\alpha)(\mathbf{Y}) := \varphi_*(\alpha(\varphi^*\mathbf{Y})), \quad \forall \mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}},$$

$$(\varphi^*\beta)(\mathbf{X}) := \varphi^*(\beta(\varphi_*\mathbf{X})), \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

Quindi

$$\varphi_*(\varphi^*\beta) = \beta, \quad \varphi^*(\varphi_*\alpha) = \alpha.$$

■ Le spinte, diretta ed inversa, dei *campi tensoriali*  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  e  $\mathbf{B} : \mathbb{N} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \mathbb{T}_{\mathbb{N}}^*; \mathfrak{R})$  sono i campi tensoriali definiti da

$$(\varphi_*\mathbf{A})(\varphi_*\mathbf{X}, \varphi_*\alpha) := \varphi_*(\mathbf{A}(\mathbf{X}, \alpha)), \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \quad \forall \alpha : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*,$$

$$(\varphi^*\mathbf{B})(\varphi^*\mathbf{Y}, \varphi^*\beta) := \varphi^*(\mathbf{B}(\mathbf{Y}, \beta)), \quad \forall \mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \quad \forall \beta : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}^*,$$

ovvero

$$(\varphi_*\mathbf{A})(\mathbf{Y}, \beta) := \varphi_*(\mathbf{A}(\varphi^*\mathbf{Y}, \varphi^*\beta)), \quad \forall \mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \quad \forall \beta : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}^*,$$

$$(\varphi^*\mathbf{B})(\mathbf{X}, \alpha) := \varphi^*(\mathbf{B}(\varphi_*\mathbf{X}, \varphi_*\alpha)), \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \quad \forall \alpha : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*.$$

Quindi

$$\varphi_*(\varphi^*\mathbf{B}) = \mathbf{B}, \quad \varphi^*(\varphi_*\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Si noti che se  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  e  $\phi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$  sono diffeomorfismi risulta

$$(\phi \circ \varphi)_* = \phi_* \circ \varphi_*,$$

e quindi

$$(\phi \circ \varphi)^* = ((\phi \circ \varphi)^{-1})_* = (\varphi^{-1} \circ \phi^{-1})_* = \varphi^* \circ \phi^*.$$

**Proposizione 12.1. Flussi delle spinte.** *Per ogni diffeomorfismo  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  sussiste l'equivalenza*

$$T\varphi \circ \mathbf{X} = \mathbf{Y} \circ \varphi \iff \varphi \circ \mathbf{k}_{\mathbf{X}} = \mathbf{k}_{\mathbf{Y}} \circ \varphi,$$

dove  $\mathbf{k}_{\mathbf{X}}$  e  $\mathbf{k}_{\mathbf{Y}}$  sono i flussi dei campi vettoriali  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  e  $\mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$ .

**Dim.** Derivando rispetto al tempo l'espressione  $\varphi \circ k_X = k_Y \circ \varphi$  si ha che

$$(\varphi \circ k_X) = T\varphi \circ \dot{k}_X = T\varphi \circ X \circ k_X,$$

$$(k_Y \circ \varphi) = \dot{k}_Y \circ \varphi = Y \circ k_Y \circ \varphi = Y \circ \varphi \circ k_X.$$

Eguagliando si ottiene che  $T\varphi \circ X = Y \circ \varphi$ .

Viceversa, se vale tale egualianza, si ha che

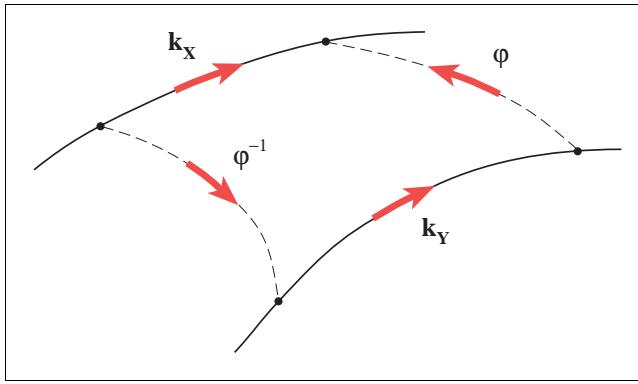
$$(\varphi \circ k_X) = T\varphi \circ \dot{k}_X = T\varphi \circ X \circ k_X = Y \circ (\varphi \circ k_X).$$

Quindi  $(\varphi \circ k_X)(x)$  con  $x \in M$  è la curva integrale del campo  $Y$  passante per  $\varphi(x) \in N$ . L'unicità dell'integrale implica allora che  $\varphi \circ k_X = k_Y \circ \varphi$ .  $\square$

Sia  $k_X$  un flusso su  $M$  e  $\varphi : M \mapsto N$  un diffeomorfismo. E' allora naturale porre la seguente definizione (vedi fig. 12.1)

- la *spinta del flusso*  $k_X$  mediante  $\varphi$  è il flusso  $k_Y$  su  $N$  definito da

$$k_Y = \varphi \circ k_X \circ \varphi^{-1}.$$



Dalla proposizione 12.1 segue poi immediatamente che

$$Y = \varphi_* X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \iff k_Y = \varphi \circ k_X \circ \varphi^{-1},$$

Vale dunque la seguente proprietà.

- Il flusso della spinta è uguale alla spinta del flusso.

Ponendo  $Y = X$  si deduce che

$$X = \varphi_* X = T\varphi \circ X \circ \varphi^{-1} \iff k_X \circ \varphi = \varphi \circ k_X,$$

e cioè che la spinta lascia invariato il campo vettoriale se e solo se il diffeomorfismo commuta con il flusso del campo.

In particolare per  $\varphi = k_X$  si ottiene che

- il campo viene trascinato dal proprio flusso e cioè  $X = k_{X*} X = k_X^* Y$ .

Il risultato della prossima proposizione si enuncia affermando che la derivata direzionale è *naturale* rispetto alla spinta.

**Proposizione 12.2. Spinta della derivata direzionale.** *Siano  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  un diffeomorfismo,  $f : \mathbb{M} \mapsto \mathfrak{R}$ ,  $g : \mathbb{N} \mapsto \mathfrak{R}$  funzioni scalari e  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ ,  $\mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  campi vettoriali. Allora risulta*

$$\varphi_*(d_{\mathbf{X}} f) = d_{\varphi_* \mathbf{X}} (\varphi_* f), \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}},$$

$$\varphi^*(d_{\mathbf{Y}} g) = d_{\varphi^* \mathbf{Y}} (\varphi^* g), \quad \forall \mathbf{Y} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}.$$

**Dim.** Applicando la regola di derivazione a catena in termini di mappe tangentili, e ponendo  $\mathbf{Y} = T\varphi \circ \mathbf{X} \circ \varphi^{-1} = \varphi_* \mathbf{X}$  si ha che

$$T(f \circ \varphi^{-1}) \circ \mathbf{Y} = Tf \circ T\varphi^{-1} \circ \mathbf{Y} = Tf \circ \mathbf{X} \circ \varphi^{-1},$$

che è la prima egualanza. La seconda si dimostra con analoga procedura.  $\square$

Dalla definizione di spinta di un campo tensoriale segue allora che

$$(\varphi_* d f) [\varphi_* \mathbf{X}] = \varphi_* (d f [\mathbf{X}]) = d (\varphi_* f) [\varphi_* \mathbf{X}], \quad \forall \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}},$$

e cioè  $\varphi_* d f = d (\varphi_* f)$ . Analogamente si mostra che  $\varphi^* d g = d (\varphi^* g)$ .

## 12.2. Derivata di Lie

Sia  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  un campo tensoriale di tipo  $(1, 1)$  e cioè una volta controvariante ed una volta covariante.

- La *derivata di Lie*<sup>36</sup> del campo tensoriale  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  secondo il campo vettoriale  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è il tasso iniziale di variazione della spinta inversa del campo tensoriale lungo il flusso  $\mathbf{k}_t : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{M}$  di  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ .

La derivata di Lie è quindi definita da

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A} := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{k}_t^* \mathbf{A},$$

---

<sup>36</sup> MARIUS SOPHUS LIE (1842-1899). Nato in Norvegia, frequentò l'Università di Christiania (ora Oslo) dove, sotto la guida di PETER LUDWIG MEJDELL SYLOW (1832-1918), studiò le teorie di NIELS HENRIK ABEL (1802-1829) e EVARISTE GALOIS (1811-1832) sulle equazioni algebriche. In Germania ebbe contatti con i matematici THEODOR REYE (1838-1919) e RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH (1833-1872) a Göttingen e LEOPOLD KRONECKER (1823-1891), ERNST EDUARD KUMMER (1810-1893), KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1810-1893) e FELIX KLEIN (1849-1925) a Berlino. Con KLEIN iniziò una lunga amicizia e collaborazione scientifica per la comunanza di interessi. A Parigi incontrò JEAN GASTON DARBOUX (1842-1917), MICHEL CHASLES (1793-1880) e MARIE ENNEMOND CAMILLE JORDAN (1838-1922). I suoi principali contributi sono raccolti nell'opera *Theorie der Transformationsgruppen* in tre volumi scritti tra il 1888 ed il 1893 in collaborazione con FRIEDRICH ENGEL, allievo di KLEIN.

ovvero

$$(\mathcal{L}_Y A)(X, \alpha) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} k_t^* A(k_{t*} X, k_{t*} \alpha), \quad \begin{cases} \forall X : M \mapsto T_M, \\ \forall \alpha : M \mapsto T_M^*, \end{cases}$$

dove, per definizione,  $(\varphi_* \alpha)[Y] = \varphi_* \alpha[\varphi^* Y]$ .

In modo analogo si definisce la derivata di LIE di un campo scalare e di un campo vettoriale.

Si noti che la derivata di LIE di un campo scalare  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  coincide con la derivata direzionale. Infatti la regola di derivazione a catena mostra che

$$\mathcal{L}_Y f := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} k_t^* f = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f \circ k_t = d f[Y] = Y[f].$$

Una proprietà fondamentale è la seguente.

**Proposizione 12.3. Teorema della derivata di Lie.** *Lungo il flusso  $k : M \times I \mapsto M$  del campo  $Y : M \mapsto T_M$  vale la formula*

$$k_t^*(\mathcal{L}_Y A) = \frac{d}{dt} (k_t^* A).$$

**Dim.** Ricordando che

$$k_{t+\tau}^* A = (k_\tau \circ k_t)^* A = k_t^* (k_\tau^* A),$$

ed osservando che

$$\frac{d}{dt} (k_t^* A) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} k_{t+\tau}^* A = k_t^* \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} k_\tau^* A = k_t^* (\mathcal{L}_Y A),$$

si perviene al risultato.  $\square$

Dalla proposizione 12.3 segue che, se la derivata di LIE  $\mathcal{L}_Y A$  è identicamente nulla sul dominio temporale del flusso, risulta

$$\frac{d}{dt} (k_t^* A) = \mathbf{o}.$$

Dunque

$$k_t^* A = k_0^* A = A, \quad k_{t*} A = A, \quad \forall t \in I,$$

Pertanto se  $\mathcal{L}_Y A = \mathbf{o}$  il campo tensoriale  $A : M \mapsto L(T_M, T_M^*; \mathbb{R})$  è trascinato lungo il flusso.

**Proposizione 12.4. Regola di Leibniz.** *Per la derivata di LIE vale la formula di LEIBNIZ:*

$$\mathcal{L}_Y (A[X, \alpha]) = (\mathcal{L}_Y A)[X, \alpha] + A[\mathcal{L}_Y X, \alpha] + A[X, \mathcal{L}_Y \alpha],$$

$$\forall X : M \mapsto T_M, \quad \forall Y : M \mapsto T_M, \quad \forall \alpha : M \mapsto T_M^*.$$

**Dim.** Basta osservare che

$$(\mathbf{k}_*\mathbf{A})[\mathbf{k}_*\mathbf{X}, \mathbf{k}_*\boldsymbol{\alpha}] = \mathbf{k}_*(\mathbf{A}[\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]),$$

ed applicare le regole della derivazione parziale e della derivazione a catena.  $\square$

**Proposizione 12.5. Derivata di Lie della spinta.** *Siano  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  un campo tensoriale e  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  un campo vettoriale sulla varietà  $\mathbb{M}$ . Per ogni diffeomorfismo  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  vale allora la formula*

$$\varphi_*(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{A}) = \mathcal{L}_{\varphi_*\mathbf{Y}}\varphi_*\mathbf{A},$$

dove  $\mathbf{Z} = \varphi_*\mathbf{Y}$  è il vettore tangente al flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{Z}} = \varphi \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}} \circ \varphi^{-1}$ .

**Dim.** Basta osservare che

$$\mathbf{k}_{\mathbf{Z}}^*(\varphi_*\mathbf{A}) = (\varphi \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi)_*\mathbf{A} = (\varphi \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^{-1})_*\mathbf{A} = \varphi_*(\mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^*\mathbf{A}),$$

e la formula segue dalla definizione della derivata di LIE.  $\square$

Il risultato della proposizione 12.5 si enuncia affermando che

- la derivata di LIE è *naturale* rispetto alla spinta.

La derivata di LIE  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X}$  è evidentemente lineare nel campo vettoriale  $\mathbf{X}$ .

La prossima proposizione fornisce una fondamentale caratterizzazione della derivata di LIE di un campo vettoriale.

**Proposizione 12.6. Parentesi di Lie.** *Sia  $f : \mathbb{M} \mapsto \mathfrak{R}$  una funzione differenziabile e  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ ,  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  campi vettoriali su  $\mathbb{M}$ . Si denoti con  $\mathbf{X}[f] = df[\mathbf{X}] = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}f$  la derivata direzionale secondo il campo vettoriale  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ . Vale allora la formula*

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}}\mathbf{X})[f] = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}][f], \quad \forall f : \mathbb{M} \mapsto \mathfrak{R},$$

dove la parentesi di LIE  $[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]$  è definita da

$$[\mathbf{Y}, \mathbf{X}][f] := \mathbf{Y}[\mathbf{X}[f]] - \mathbf{X}[\mathbf{Y}[f]], \quad \forall f : \mathbb{M} \mapsto \mathfrak{R}.$$

**Dim.** Si ponga

$$(-) \dot{=} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (-),$$

e osservi preliminarmente che, se  $\mathbf{k}_t$  è il flusso di  $\mathbf{Y}$ , risulta  $(\mathbf{k}_t) \dot{=} \mathbf{Y}$ . Dunque

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) [f] &= \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{k}_t^* \mathbf{X} \right) [f] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{L}_{(\mathbf{k}_t^* \mathbf{X})} f = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{L}_{(\mathbf{k}_t^* \mathbf{X})} \mathbf{k}_t^* (\mathbf{k}_{-t}^* f) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{k}_t^* \mathcal{L}_{\mathbf{X}} (\mathbf{k}_{-t}^* f) = \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} f + \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbf{k}_{-t}^* f) = \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} f + \mathcal{L}_{\mathbf{X}} (f \circ \mathbf{k}_{-t}) \dot{=} \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} f + \mathcal{L}_{\mathbf{X}} d f [-(\mathbf{k}_t) \dot{=}] = (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} - \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathcal{L}_{\mathbf{Y}}) f, \end{aligned}$$

dove si è fatto ricorso alla formula

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{-t}) = -\mathbf{k}_{-t} \circ \left( \frac{d}{dt} \mathbf{k}_t \right) \circ \mathbf{k}_{-t},$$

che fornisce la derivata dell'inversa.  $\square$

Dalla proposizione 12.6 segue in particolare che

- la derivata di LIE  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  è  $\mathfrak{R}$ -lineare in  $\mathbf{Y}$  e cioè che per ogni  $\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2 : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  e per ogni  $\alpha \in \mathfrak{R}$  si ha che

$$i) \quad \mathcal{L}_{(\mathbf{Y}_1 + \mathbf{Y}_2)} \mathbf{X} = \mathcal{L}_{\mathbf{Y}_1} (\mathbf{X}) + \mathcal{L}_{\mathbf{Y}_2} (\mathbf{X}),$$

$$ii) \quad \mathcal{L}_{\alpha \mathbf{Y}} (\mathbf{X}) = \alpha \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} (\mathbf{X}),$$

Inoltre dall'emisimmetria del commutatore segue che  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Y} = [\mathbf{Y}, \mathbf{Y}] = \mathbf{o}$ .

Si noti che banalmente la derivata di LIE  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  è  $\mathfrak{R}$ -lineare in  $\mathbf{X}$ .

Si consideri lo spazio  $V^\infty(\mathbb{M})$  dei campi vettoriali  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  di classe  $C^\infty(\mathbb{M})$  con la struttura di spazio linerare sul campo dei numeri reali  $\mathfrak{R}$ . La parentesi di LIE definisce allora un'algebra che gode delle seguenti proprietà

- i)  $[-, -]$  è  $\mathfrak{R}$  bilineare,
- ii)  $[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}] = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{Y} \in V^\infty(\mathbb{M}),$
- iii)  $[\mathbf{X}, [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}]] + [\mathbf{Y}, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}]] + [\mathbf{Z}, [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in V^\infty(\mathbb{M}).$

L'algebra così definita è detta un'*algebra di LIE*.

L'identità iii) è detta *identità di JACOBI*. La parentesi di LIE è pertanto detta anche *parentesi di JACOBI-LIE o commutatore*.

La proprietà di essere *naturale* rispetto alla spinta consente di determinare l'espressione della derivata di LIE in termini di coordinate.

Si denoti con

$$\{\mathbf{Z}_A, A = 1, \dots, n\}$$

la base usuale in  $\mathbb{R}^n$ . Sia quindi  $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}^n$  una carta locale e si denoti con

$$\{\mathbf{E}_A(\mathbf{x}), A = 1, \dots, n\},$$

la base indotta nello spazio tangente in  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ . Per definizione si ha che

$$\mathbf{E}_A := \varphi^* \mathbf{Z}_A, \quad \mathbf{Z}_A = \varphi_* \mathbf{E}_A.$$

Adottando la convenzione di EINSTEIN, si può scrivere

$$\varphi_* \mathbf{X} = \varphi_*(X^A \mathbf{E}_A) = X^A (\varphi_* \mathbf{E}_A) = X^A \mathbf{Z}_A.$$

Si noti la seguente proprietà.

**Proposizione 12.7.** *La parentesi di LIE si annulla in corrispondenza di ogni coppia di campi vettoriali coordinati. Risulta cioè*

$$[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \mathbf{o}, \quad \forall A, B \in \{1, \dots, n\}.$$

**Dim.** Dalla proposizione 12.5 segue che

$$\varphi_* [\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = [\varphi_* \mathbf{E}_A, \varphi_* \mathbf{E}_B] = [\mathbf{Z}_A, \mathbf{Z}_B].$$

Denotando con  $C^2(\mathbb{M}, \mathbf{p})$  lo spazio costituito dalle funzioni reali che sono derivabili due volte con continuità in un intorno di  $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$ , la simmetria della derivata seconda in  $\mathbb{R}^n$  implica che per ogni  $f \in C^2(\mathbb{M}, \mathbf{p})$  sia

$$[\mathbf{Z}_A, \mathbf{Z}_B] f = d^2 f[\mathbf{Z}_B; \mathbf{Z}_A] - d^2 f[\mathbf{Z}_A; \mathbf{Z}_B] = 0.$$

Dunque  $[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \varphi^* [\mathbf{Z}_A, \mathbf{Z}_B] = \mathbf{o}$ .

□

Il risultato che segue sarà richiamato nella sezione 12.10 (p. 163).

**Proposizione 12.8.** *Ogni  $n$ -upla di vettori di uno spazio tangente  $\mathbf{X}_A(\mathbf{x}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{x})$  con  $A = 1, \dots, n$  può essere estesa ad una  $n$ -upla di campi vettoriali  $\tilde{\mathbf{X}}_A : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  tale che risulti*

$$[\mathbf{X}_A, \mathbf{X}_B] = \mathbf{o}, \quad A, B = 1, \dots, n.$$



**Dim.** Sia  $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}^n$  una carta locale con  $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$  e  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ .

$$\mathbf{E}_A(\mathbf{x}) = (\varphi^* \mathbf{Z}_A)(\mathbf{x}) = T\varphi^{-1} \circ \mathbf{Z}_A \circ \varphi(\mathbf{x}), \quad A = 1, \dots, n,$$

la corrispondente base locale in  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$ .

Detta allora  $\mathbf{L} \in \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{x}); \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{x}))$  la trasformazione dalla base  $\{\mathbf{E}_A(\mathbf{x})\}$  alla base  $\{\mathbf{X}_A(\mathbf{x})\}$ , si consideri la matrice  $\mathbf{G} \in \mathbf{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$  tale che

$$T\varphi^{-1} \circ \mathbf{G} = \mathbf{L} \circ T\varphi^{-1}.$$

Allora la carta locale  $\mathbf{k} = \mathbf{G}^{-1} \circ \varphi$  risolve il problema. Infatti risulta  $\mathbf{k}^{-1} = \varphi^{-1} \circ \mathbf{G}$  e quindi

$$T\mathbf{k}^{-1} = T\varphi^{-1} \circ \mathbf{G}.$$

La corrispondente base locale in  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  è costituita dalla  $n$ -upla di vettori  $\mathbf{X}_A(\mathbf{x})$ . Infatti, essendo  $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{k}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}^{-1} \circ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \in \mathbb{R}^n$ , si ha che

$$(\mathbf{k}^* \mathbf{Z}_A)(\mathbf{x}) = T\mathbf{k}^{-1} \circ \mathbf{Z}_A \circ \mathbf{k}(\mathbf{x}) = T\varphi^{-1} \circ \mathbf{G} \circ \mathbf{Z}_A \circ \varphi(\mathbf{x}) =$$

$$= \mathbf{L} \circ T\varphi^{-1} \circ \mathbf{Z}_A \circ \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \circ (\varphi^* \mathbf{Z}_A)(\mathbf{x}) = \mathbf{L} \circ \mathbf{E}_A(\mathbf{x}) = \mathbf{X}_A(\mathbf{x}).$$

Il risultato segue allora dalla proposizione 12.7.  $\square$

**Proposizione 12.9. Derivata di Lie in coordinate.** *La derivata di Lie  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  in termini di coordinate locali  $\{\mathcal{U}, \varphi\}$  si scrive*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = (X_{/B}^A Y^B - Y_{/B}^A X^B) \mathbf{E}_A.$$

**Dim.** Dalla proposizione 12.5 si deduce che

$$\varphi_* (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) = \varphi_* [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \mathcal{L}_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{X}) = [\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}].$$

Osservando quindi che

$$\varphi_* [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \sum_{A=1}^n [\varphi_* [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]]^A \mathbf{Z}_A, \quad \varphi_* \mathbf{Y} = \sum_{A=1}^n [\varphi_* \mathbf{Y}]^A \mathbf{Z}_A = \sum_{A=1}^n Y^A \mathbf{Z}_A,$$

si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned} [\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}] [f] &= [Y^B \mathbf{Z}_B, X^A \mathbf{Z}_A] [f] = \\ &= d(df[X^A \mathbf{Z}_A]) [Y^B \mathbf{Z}_B] - d(df[Y^B \mathbf{Z}_B]) [X^A \mathbf{Z}_A]. \end{aligned}$$

Si osservi quindi che

$$df[X^A \mathbf{Z}_A] = X^A df[\mathbf{Z}_A],$$

e che inoltre risulta

$$d(X^A df[\mathbf{Z}_A]) [\mathbf{Z}_B] Y^B = d^2 f[\mathbf{Z}_A; \mathbf{Z}_B] X^A Y^B + (dX^A)[\mathbf{Z}_B] Y^B df[\mathbf{Z}_A].$$

Dalla simmetria della derivata seconda mista  $d^2 f[\mathbf{Z}_A; \mathbf{Z}_B]$  segue che

$$[\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}] [f] = (dX^A)[\mathbf{Z}_B] Y^B df[\mathbf{Z}_A] - (dY^A)[\mathbf{Z}_B] X^B df[\mathbf{Z}_A].$$

Dunque essendo  $[\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}] [f] = [\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}]^A df[\mathbf{Z}_A]$ , si ha

$$[\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}]^A = (dX^A)[\mathbf{Z}_B] Y^B - (dY^A)[\mathbf{Z}_B] X^B = X_{/B}^A Y^B - Y_{/B}^A X^B,$$

che è la formula cercata.  $\square$

La dimostrazione della proposizione 12.9 può sintetizzarsi come segue.

Sia  $\{\mathcal{U}, \varphi\}$  con  $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{M} \mapsto \mathbb{R}^n$  una carta locale sulla varietà  $\{\mathbb{M}, g\}$  e si denoti con  $X = \varphi_* \mathbf{X}$  l'espressione di  $\mathbf{X}$  in coordinate. Allora, stante la simmetria della derivata seconda mista in  $\mathbb{R}^n$ , si ha che

$$\begin{aligned} [Y, X][f] &= d(d f[X])[Y] - d(d f[Y])[X] = \\ &= d^2 f[X, Y] - d^2 f[Y, X] + d_Y X[f] - d_X Y[f] = \\ &= (d_Y X - d_X Y)[f], \end{aligned}$$

e dunque

$$[Y, X] = (d_Y X - d_X Y).$$

La proposizione 12.3 (p. 135) consente di ricondurre la soluzione di un opportuno sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali alla soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Si consideri infatti il sistema di equazioni scalari

$$\frac{d}{dt} X^A = (X_{/B}^A Y^B - Y_{/B}^A X^B),$$

con la condizione iniziale  $X^A(0) = W^A$ .

In forma vettoriale il sistema si scrive

$$\frac{d}{dt} \mathbf{X} = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X},$$

con la condizione iniziale  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{W}$ . La soluzione è data da  $\mathbf{X} = \mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{W}$ .

Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{X} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{W}) = \mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{W}) = \mathcal{L}_{\mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{Y}} (\mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{W}) = \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} (\mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{W}) = \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]. \end{aligned}$$

Le curve integrali del campo  $\mathbf{Y}$  sono dette *curve caratteristiche* del sistema e la metodologia di soluzione è detta *metodo delle caratteristiche*.

Si noti che la soluzione  $\mathbf{X} = \mathbf{k}_{\mathbf{Y}}^* \mathbf{W}$  è unica in forza del lemma di GRONWALL (vedi [53]). L'unicità può anche mostrarsi considerando una carta locale  $\{\mathcal{U}, \varphi\}$  e ponendo

$$E := \int_{\varphi(\mathcal{U})} \|X_1 - X_2\|^2 \, dv.$$

Allora, essendo  $Y$  continuo, in ogni compatto  $\mathcal{K} \subset \varphi(\mathcal{U})$  risulta

$$\begin{aligned} \dot{E} &= \int_{\mathcal{K}} 2(X_1 - X_2) \cdot (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) \, dv = \int_{\mathcal{K}} 2(X_1 - X_2) \cdot [Y, (X_1 - X_2)] \, dv \leq \\ &\leq \alpha \int_{\mathcal{K}} \|X_1 - X_2\|^2 \, dv = \alpha E. \end{aligned}$$

Integrando si ha che  $E(t) \leq E(0) \exp(\alpha t)$  e quindi  $E(t) = 0$  essendo  $E(0) = 0$ .

**Proposizione 12.10. Derivazione.** *La derivata di LIE  $\mathcal{L}_Y(X)$  soddisfa la proprietà*

$$\mathcal{L}_Y(fX) = f\mathcal{L}_Y(X) + X\mathcal{L}_Y(f),$$

per ogni  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  differenziabile e per ogni  $X, Y : M \mapsto T_M$ .

**Dim.** Dalla definizione di derivata di LIE, detto  $k_{t,s}$  il flusso del campo vettoriale  $X$ , si ha poi che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y(fX) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} k_{t,s}^*(fX)_t = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (d k_{t,s})^{-1} (fX)_t \circ k_{t,s} = \\ &= f_t \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (d k_{t,s})^{-1} X_t \circ k_{t,s} + X \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (d k_{t,s})^{-1} f_t \circ k_{t,s} = \\ &= f\mathcal{L}_Y(X) + X\mathcal{L}_Y(f), \end{aligned}$$

dove il secondo passaggio segue dalla regola di LEIBNIZ in forza della bilinearità rispetto a  $f$  e  $X$ .  $\square$

Dalla proprietà di derivazione e dalla proposizione 12.6 (p. 137) segue il prossimo risultato.

**Proposizione 12.11. Formule notevoli.** *La parentesi di LIE  $[X, Y]$  soddisfa le relazioni*

- i)  $\mathcal{L}_{(gY)} f = g\mathcal{L}_Y f,$
- ii)  $[fX, Y] = f[X, Y] - (\mathcal{L}_Y f)X,$
- iii)  $[fX, gY] = f g [X, Y] + (\mathcal{L}_X g) f Y - (\mathcal{L}_Y f) g X,$

per ogni  $f, g : M \mapsto \mathbb{R}$  differenziabili e per ogni  $X, Y : M \mapsto T_M$ .

**Dim.** La i) segue dalla definizione di derivata direzionale. La ii) equivale alla proprietà di derivazione dimostrata nella proposizione 12.10. Infatti dall'antisimmetria della parentesi di LIE si deduce che

$$\begin{aligned} [fX, Y] &= -[Y, fX] = -\mathcal{L}_Y(fX) = -f\mathcal{L}_Y(X) - (\mathcal{L}_Y f)X = \\ &= f[X, Y] - (\mathcal{L}_Y f)X. \end{aligned}$$

Dalle i) e ii) si ottiene

$$\begin{aligned} [fX, gY] &= f[X, gY] - (\mathcal{L}_{(gY)} f)X = f[X, gY] - (\mathcal{L}_Y f)gX = \\ &= -f[gY, X] - (\mathcal{L}_Y f)gX = \\ &= f g [X, Y] + (\mathcal{L}_X g) f Y - (\mathcal{L}_Y f) g X, \end{aligned}$$

che è la formula iii).  $\square$

■ Dalla definizione della derivata di LIE di un campo tensoriale si deduce che vale la seguente formula di derivazione del prodotto tensoriale

$$\mathcal{L}_Z(\alpha \otimes \beta) = (\mathcal{L}_Z\alpha \otimes \beta) + (\alpha \otimes \mathcal{L}_Z\beta).$$

dove  $\alpha, \beta : M \mapsto T_M^*$ .

Infatti, posto  $T = \alpha \otimes \beta$  nella formula della derivata di LIE di un campo tensoriale, essendo per definizione

$$(\alpha \otimes \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y),$$

si ha che

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_Z(\alpha \otimes \beta)](X, Y) &= d_Z[(\alpha \otimes \beta)(X, Y)] + \\ &\quad - (\alpha \otimes \beta)(\mathcal{L}_Z X, Y) - (\alpha \otimes \beta)(X, \mathcal{L}_Z Y) = \\ &= d_Z[(\alpha(X)\beta(Y))] - \alpha(\mathcal{L}_Z X)\beta(Y) - \alpha(X)\beta(\mathcal{L}_Z Y). \end{aligned}$$

Applicando quindi la regola di LEIBNIZ per la derivata direzionale si ha che

$$d_Z[(\alpha(X)\beta(Y))] = d_Z[\alpha(X)]\beta(Y) + \alpha(X)d_Z[\beta(Y)].$$

La proposizione 12.4 (p. 135) consente di applicare la regola di LEIBNIZ alla derivata di LIE per dedurre che

$$d_Z[\alpha(X)] = (\mathcal{L}_Z\alpha)(X) + \alpha(\mathcal{L}_Z X).$$

Sostituendo si perviene alla formula cercata. E' facile vedere che la formula della derivata di LIE del prodotto tensoriale vale anche per il prodotto tensoriale di due tensori qualsiasi.

### 12.3. Campi dipendenti dal tempo

Si prenda ora in esame il caso generale di un campo vettoriale che dipende dal parametro evolutivo (che per brevità sarà detto il tempo).

Il campo vettoriale è dunque definito da un'applicazione

$$Y : M \times I \mapsto T_M$$

Si consideri l'insieme delle curve integrali soluzioni dell'equazione differenziale

$$\frac{dc}{dt} = Y(c(t), t), \quad t \in I = [-\varepsilon, +\varepsilon], \quad \varepsilon > 0,$$

con la condizione iniziale  $c(0) = x \in M$ .

■ Il *flusso o operatore di evoluzione* è l'applicazione

$$\mathbf{k} : \mathbb{M} \times I \times I \mapsto \mathbb{M}$$

tale che per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  la funzione  $\mathbf{k}_{\mathbf{x},s} = \mathbf{k}(\mathbf{x}, s, -) : I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  sia una curva integrale del campo  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ .

Ponendo  $\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t)$  e  $\mathbf{Y}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ , il flusso è quindi definito dall'equazione differenziale

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{Y}_t \circ \mathbf{k}_{t,s}, \quad \mathbf{k}_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{M}.}$$

L'unicità delle curve integrali implica la validità della *legge di determinismo*

$$\mathbf{k}_{\tau,t} \circ \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{k}_{\tau,s}.$$

Dunque è  $\mathbf{k}_{s,t} = \mathbf{k}_{t,s}^{-1}$  in quanto  $\mathbf{k}_{s,s}$  è la mappa identica e risulta

$$\mathbf{k}_{s,t} \circ \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{k}_{s,s}.$$

Derivando rispetto al tempo  $t$  si ottiene la relazione

$$\left( \frac{d}{dt} \mathbf{k}_{s,t} \right) \circ \mathbf{k}_{t,s} + (T\mathbf{k}_{s,t}) \circ \frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{o},$$

ed essendo  $\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{Y}_t \circ \mathbf{k}_{t,s}$ , si deduce che

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathbf{k}_{s,t} = -(T\mathbf{k}_{s,t} \circ \mathbf{Y}_t \circ \mathbf{k}_{t,s}) \circ \mathbf{k}_{s,t} = -(\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{Y}_t) \circ \mathbf{k}_{s,t}.}$$

Dunque l'inverso del flusso di un campo è il flusso corrispondente ad un campo vettoriale che è l'opposto della spinta inversa del campo lungo il flusso.

■ La *derivata di LIE* al tempo  $s$  di un campo tensoriale dipendente dal tempo  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  secondo il campo vettoriale  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ , anch'esso dipendente dal tempo, è definita da

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_s := \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_t = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{A}_t + \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_s,$$

dove si è posto  $\mathbf{A}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ .



- La derivata

$$(\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_s := \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_s,$$

è detta *derivata autonoma di LIE*.

Ponendo

$$\dot{\mathbf{A}}_s := \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{A}_t,$$

vale dunque la formula

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_s = \dot{\mathbf{A}}_s + (\bar{\mathcal{L}}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_s.$$

Una proprietà fondamentale è la seguente.

**Proposizione 12.12. Teorema della derivata di Lie.** *Lungo il flusso  $\mathbf{k} : \mathbb{M} \times I \times I \mapsto \mathbb{M}$  del campo  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  vale la formula*

$$\mathbf{k}_{t,s}^* (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_t = \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_t).$$

**Dim.** Ricordando che

$$\mathbf{k}_{\tau,s}^* \mathbf{A}_{\tau} = (\mathbf{k}_{\tau,t} \circ \mathbf{k}_{t,s})^* \mathbf{A}_{\tau} = \mathbf{k}_{t,s}^* (\mathbf{k}_{\tau,t}^* \mathbf{A}_{\tau}),$$

ed osservando che

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_t) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathbf{k}_{\tau,s}^* \mathbf{A}_{\tau} = \mathbf{k}_{t,s}^* \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathbf{k}_{\tau,t}^* \mathbf{A}_{\tau} = \mathbf{k}_{t,s}^* (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_t,$$

si perviene al risultato.  $\square$

Dalla proposizione 12.3 (p. 135) segue che, se la derivata di LIE  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A}$  è identicamente nulla sul dominio temporale del flusso, risulta

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_t) = \mathbf{o},$$

e quindi che

$$\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_t = \mathbf{k}_{s,s}^* \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_s, \quad \forall t \in I,$$

ovvero che

$$\mathbf{k}_{t,s*} \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_t, \quad \forall t \in I.$$

Dunque se  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A} = \mathbf{o}$  il campo tensoriale  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  è trascinato lungo il flusso.

I risultati delle proposizioni 12.1 (p. 132) e 12.5 (p. 136) sono estesi al caso di flussi di campi vettoriali dipendenti dal tempo nelle prossime proposizioni 12.13 e 12.14.

**Proposizione 12.13. Flussi delle spinte dipendenti dal tempo.** *Per ogni diffeomorfismo  $\varphi_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  dipendente dal tempo si consideri il flusso*

$$\phi_{t,s} := \varphi_t \circ \varphi_s^{-1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N},$$

e sia  $\mathbf{X}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  il relativo campo vettoriale di velocità, cioè il campo tale che

$$\frac{d}{dt} \phi_{t,s} = \mathbf{X}_t \circ \phi_{t,s}, \quad \phi_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}.$$

Siano inoltre  $\mathbf{Y}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  e  $\mathbf{Z}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  campi vettoriali. Sussiste allora l'equivalenza

$$\boxed{\mathbf{Z}_t = \mathbf{X}_t + \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t \iff \varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} = \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s},$$

dove  $\mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}$  e  $\mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)}$  sono i flussi dei campi vettoriali  $\mathbf{Y}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  e  $\mathbf{Z}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$ .

**Dim.** Derivando rispetto al tempo l'espressione  $\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} = \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s$  si ha che

$$(\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)})' = \dot{\varphi}_t + T\varphi_t [\dot{\mathbf{k}}_{\mathbf{Y}(t,s)}] = \mathbf{X}_t \circ \varphi_t + T\varphi_t [\mathbf{Y}] \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)},$$

$$(\mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s)' = \dot{\mathbf{k}}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s = \mathbf{Z}_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s = \mathbf{Z}_t \circ \varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}.$$

Eguagliando si ottiene che  $\mathbf{X}_t \circ \varphi_t + T\varphi_t [\mathbf{Y}] = \mathbf{Z}_t \circ \varphi_t$  e cioè  $\mathbf{X}_t + \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t = \mathbf{Z}_t$ .

Viceversa, se vale tale eguaglianza, si ha che

$$(\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)})' = (\mathbf{X}_t \circ \varphi_t + T\varphi_t [\mathbf{Y}]) \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} = \mathbf{Z}_t \circ (\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}).$$

Quindi  $(\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)})(\mathbf{x})$  con  $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  è la curva integrale del campo  $\mathbf{Z}_t$  passante al tempo  $s$  per  $\varphi_s(\mathbf{x}) \in \mathbb{N}$ .

L'unicità dell'integrale implica allora che  $\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} = \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s$ .  $\square$

Il risultato della proposizione 12.13, detti

- $\mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)}$  spinta del flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}$ ,
- $\phi_{t,s}$  flusso spingente,

si può enunciare affermando che

- il campo tangente alla spinta di un flusso è pari alla somma del campo tangente al flusso spingente e della spinta del campo tangente al flusso.

**Proposizione 12.14. Derivata di Lie della spinta dipendente dal tempo.** *Siano  $\mathbf{A}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*; \mathfrak{R})$  un campo tensoriale e  $\mathbf{Y}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  un campo vettoriale sulla varietà  $\mathbb{M}$ . Per ogni diffeomorfismo  $\varphi_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  vale allora la formula*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Z}_t} (\varphi_{t*} \mathbf{A}_t) = \varphi_{t*} (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}_t} \mathbf{A}_t),$$

dove  $\mathbf{Z}_t = \mathbf{X}_t + \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t$  è il campo tangente al flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} = \varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} \circ \varphi_s^{-1}$ .



**Dim.** Notando che

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)}^*(\varphi_{t*}\mathbf{A}_t) &= (\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} \circ \varphi_s^{-1})^*(\varphi_{t*}\mathbf{A}_t) = \\ &= (\varphi_s \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}^{-1} \circ \varphi_t^{-1})_*(\varphi_{t*}\mathbf{A}_t) = \\ &= \varphi_{s*}(\mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}^*\mathbf{A}_t), \end{aligned}$$

la formula segue dalla definizione della derivata di LIE. Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{Z}_s}(\varphi_{s*}\mathbf{A}_s) &:= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)}^*(\varphi_{t*}\mathbf{A}_t), \\ \varphi_{s*}(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}_s}\mathbf{A}_s) &:= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \varphi_{s*}(\mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)}^*\mathbf{A}_t), \end{aligned}$$

e questo dimostra il risultato al generico tempo  $s \in I$ . □

La formula della proposizione 12.13 esprime in forma generalizzata la relazione tra i campi di velocità misurati da due osservatori in moto relativo, già illustrata nella sezione 9.13 (p. 97).

La formula della proposizione 12.14 trova poi un'importante applicazione in meccanica, nel definire per il tensore dello sforzo derivate temporali che siano indipendenti da un cambiamento di osservatore [52], [62].

#### 12.4. Integrazione su varietà e teorema del trasporto

L'integrale di una  $k$ -forma differenziale  $\alpha$  su di una varietà  $k$ -dimensionale  $\mathbb{N}$  si definisce considerando la  $k$ -forma di volume  $\Delta_{\mathbb{N}}$  sulla varietà  $\mathbb{N}$ , così che risulta  $\alpha = \alpha \Delta_{\mathbb{N}}$ . Si pone quindi

$$\int_{\mathbb{N}} \alpha := \int_{\mathbb{N}} \alpha \, dv_{\mathbb{N}}.$$

La nozione di derivata di LIE consente di estendere il teorema del trasporto di REYNOLDS a campi scalari dipendenti dal tempo e definiti su varietà differenziabili (vedi [53], pag. 471).

Per l'enunciato classico e la dimostrazione del *teorema del trasporto* di REYNOLDS in  $\mathbb{R}^n$  si veda la proposizione 8.1 (p. 68).

Si noti che non è possibile formulare il teorema del trasporto per campi vettoriali e tensoriali su varietà differenziabili in quanto non ha senso l'integrale di tali campi sulla varietà.

E' necessario quindi in tal caso far riferimento alla forma variazionale del teorema del trasporto introdotta nella sezione 11.4 (p. 128).

**Proposizione 12.15. Teorema del trasporto.** Si consideri una varietà differenziabile  $\mathbb{M}$  di dimensione  $m$  e sia  $\mathbf{k} : \mathbb{M} \times I \times I \mapsto \mathbb{M}$  il flusso di un campo vettoriale  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ . Sia quindi  $\mathbb{N} \subset \mathbb{M}$  una sottovarietà di dimensione  $k$  con  $k \leq m$ . Allora, se  $\omega$  è una  $k$ -forma differenziale su  $\mathbb{N}$ , risulta

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbf{k}_{t,s}(\mathbb{N})} \omega_t = \int (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega)_t.$$

**Dim.** La formula da dimostrare equivale alla seguente:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \int_{\mathbf{k}_{t,s}(\mathbb{N})} \omega_t = \int_{\mathbb{N}} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega)_s.$$

Si osservi che, se  $\mathbf{E}_S = \{\mathbf{E}_A, A = 1, \dots, k\}$  è una base locale e  $\Delta_{\mathbb{N}}$  è la  $k$ -forma di volume su  $\mathbb{N}$ , si ha che

$$(\mathbf{k}_{t,s}^* \Delta_{\mathbb{N}})(\mathbf{E}_S) = \Delta_{\mathbb{N}}(T\mathbf{k}_{t,s}[\mathbf{E}_S]) = (\det T\mathbf{k}_{t,s}) \Delta_{\mathbb{N}}(\mathbf{E}_S),$$

Quindi

$$\int_{\mathbf{k}_{t,s}(\mathbb{N})} \omega = \int_{\mathbb{N}} \mathbf{k}_{t,s}^* \omega.$$

Derivando rispetto al tempo per  $t = s$  si perviene al risultato.  $\square$

Sia  $\Delta_{\mathbb{M}}$  la  $m$ -forma di volume sulla varietà  $\mathbb{M}$ .

■ La divergenza del campo vettoriale  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \times I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è definita da

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\Delta_{\mathbb{M}}) = (\operatorname{div} \mathbf{X}) \Delta_{\mathbb{M}}}.$$

Se  $\mathbb{M} = \mathbb{R}^m$  tale definizione coincide con quella standard del calcolo vettoriale in  $\mathbb{R}^m$  secondo la quale la divergenza è la traccia della derivata:  $\operatorname{div} \mathbf{X} = \operatorname{tr}(d\mathbf{X})$ .

Infatti la derivata di LIE  $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\Delta_{\mathbb{M}})$  è data da

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\mathbf{k}_{t,s}^* \Delta_{\mathbb{M}})(\mathbf{E}_I) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* [\Delta_{\mathbb{M}}(\mathbf{k}_{t,s} \mathbf{E}_I)] = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} [\Delta_{\mathbb{M}}(T\mathbf{k}_{t,s} \circ \mathbf{E}_I)].$$

Allora, essendo

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s} = \mathbf{X}_t \circ \mathbf{k}_{t,s},$$

la regola di derivazione a catena in  $\mathbb{R}^n$  mostra che

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} T\mathbf{k}_{t,s} = T \frac{d\mathbf{k}_{t,s}}{dt} \Big|_{t=s} = d\mathbf{X}_t \circ T\mathbf{k}_{t,s} \Big|_{t=s} = d\mathbf{X}_s.$$

Applicando la regola di LEIBNIZ all'espressione della derivata di LIE si ha infine che

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\Delta_{\mathbb{M}}) = \text{tr}(d\mathbf{X}) \Delta_{\mathbb{M}}.$$

La forma classica del teorema di REYNOLDS si ottiene dalla proposizione 12.15 ponendo  $\omega = f \Delta_{\mathbb{M}}$ . Infatti, essendo  $\dot{f} = f' + df[\mathbf{X}]$ , risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(f \Delta_{\mathbb{M}}) &= (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} f) \Delta_{\mathbb{M}} + f \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\Delta_{\mathbb{M}}) = \\ &= (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} f + f \text{ div } \mathbf{X}) \Delta_{\mathbb{M}} = (f' + df[\mathbf{X}] + f \text{ div } \mathbf{X}) \Delta_{\mathbb{M}} = \\ &= (\dot{f} + \text{div}(f \mathbf{X})) \Delta_{\mathbb{M}} = (\dot{f} + f \text{ div } \mathbf{X}) \Delta_{\mathbb{M}}. \end{aligned}$$

Sostituendo nella definizione di integrale si perviene all'espressione

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \int_{\mathbf{k}_{t,s}(\mathbb{M})} f \, dv = \int_{\mathbb{M}} (f' + \text{div}(f \mathbf{X})) \, dv_{\mathbb{M}} = \int_{\mathbb{M}} (\dot{f} + f \text{ div } \mathbf{X}) \, dv_{\mathbb{M}},$$

che è l'enunciato della formula di REYNOLDS in  $\Re^n$ .

## 12.5. Varietà di Riemann

Una varietà di RIEMANN<sup>37</sup>  $\{\mathbb{R}, g\}$  è una varietà differenziabile tale che in ogni punto  $\{\mathbf{x}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}(\mathbf{x})\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  del fibrato tangente sia definito un tensore metrico e cioè una forma bilineare

$$g_{\mathbf{x}}(-, -) \in L^2(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}(\mathbf{x}); \Re),$$

a valori reali, simmetrica e definita positiva.

---

<sup>37</sup> GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866). Nel 1846 entrò all'università di Göttingen dove fu allievo di GAUSS. Nel 1847 andò a Berlino e studiò con JAKOB STEINER (1796-1863), CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851), LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859), FERDINAND GOTTHOLD MAX EISENSTEIN (1823-1852). Nel 1849 tornò a Göttingen e presentò nel 1851 la tesi di dottorato sulle proprietà geometriche delle funzioni analitiche, e sulle trasformazioni conformi e la connettività delle superfici, sotto la supervisione di GAUSS. La qualità e l'originalità delle idee contenute nella tesi impressionarono GAUSS che lo raccomandò per un posto. La lezione *Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sulle ipotesi alla base della Geometria) che RIEMANN tenne il 10 giugno 1854 per la sua abilitazione all'insegnamento divenne un classico della matematica. GAUSS fu il solo in grado di apprezzarne la profondità e, cosa straordinaria, comunicò il suo entusiastico giudizio a WILHELM EDUARD WEBER (1804-1891) che ricopriva la cattedra di fisica a Göttingen. Nel 1855 la cattedra di GAUSS a Göttingen fu presa da DIRICHLET. Nel 1857 RIEMANN ottenne la cattedra e pubblicò un altro lavoro magistrale concernente la teoria delle funzioni di ABEL. Contemporaneamente KARL THEODOR WILHELM WEIERSTRASS (1815-1897) aveva sottoposto all'Accademia di Berlino una trattazione generale delle funzioni di ABEL, ma, letto il lavoro di RIEMANN sul Crelle's Journal, decise di non pubblicare il suo. Nel 1858 BETTI visitò Göttingen e RIEMANN discusse con lui le sue idee topologiche. Visitò poi ENRICO BETTI (1823-1892) in Italia in 1863. Nel 1859 DIRICHLET morì e RIEMANN gli succedette nella cattedra di matematica. Nello stesso anno venne eletto alla Accademia delle Scienze di Berlino su proposta di ERNST EDUARD KUMMER (1810-1893), CARL WILHELM BORCHARDT (1817-1880) e WEIERSTRASS. Il lavoro che egli presentò all'Accademia costituisce un'altra opera magistrale sul tema dei numeri primi minori di una assegnata grandezza. Negli anni dal 1862 al 1866 viaggiò spesso in Italia dove

Per ogni  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  differenziabile, la derivata di  $f$  è un campo di co-vettori

$$df : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*.$$

- Il campo vettoriale  $\nabla f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  gradiente di  $f$ , è quindi definito da

$$df[\mathbf{Y}] = \mathbf{g}(\nabla f, \mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.$$

In assenza di una ulteriore struttura che consenta di correlare (o connettere) i valori dei campi vettoriali in spazi tangenti in punti diversi, non è possibile definire la derivata direzionale di un campo vettoriale.

E' perciò fondamentale il concetto di connessione che verrà ora introdotto.

## 12.6. Connessione e derivate covarianti

- Una *connessione affine* sulla varietà differenziabile  $\mathbb{R}$  è una mappa

$$\mathbf{X} \mapsto \nabla \mathbf{X},$$

che ad ogni campo vettoriale  $\mathbf{X} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  associa un campo tensoriale  $\nabla \mathbf{X} : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{T}_{\mathbb{R}})$  di tipo  $(1, 1)$ , tale che

$$\boxed{\begin{aligned} i) \quad & \nabla \mathbf{X}[\alpha \mathbf{Y} + \beta \mathbf{Z}] = \alpha \nabla \mathbf{X}[\mathbf{Y}] + \beta \nabla \mathbf{X}[\mathbf{Z}], \\ ii) \quad & \begin{cases} \nabla(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \nabla \mathbf{X}_1 + \nabla \mathbf{X}_2, \\ \nabla(f \mathbf{X})[\mathbf{Y}] = df[\mathbf{Y}] \mathbf{X} + f \nabla \mathbf{X}[\mathbf{Y}] \end{cases} \end{aligned}}$$

$\forall \alpha, \beta, f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ , con  $f$  differenziabile e  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ .

- Il campo vettoriale  $\nabla \mathbf{X}[\mathbf{Y}]$  è la *derivata covariante* di  $\mathbf{X}$  secondo  $\mathbf{Y}$ . Si scrive anche

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = \nabla \mathbf{X}[\mathbf{Y}].$$

- La proprietà *i*) assicura che derivata covariante  $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  è tensoriale in  $\mathbf{Y}$  e quindi dipende solo dai valori puntuali di  $\mathbf{Y}$ .
- La proprietà *ii*) mostra invece che la derivata covariante non è tensoriale in  $\mathbf{X}$  in quanto la mappa  $\mathbf{X} \mapsto \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  è una derivazione.
- Se  $\mathbf{c} : I \mapsto \mathbb{R}$  è una curva in  $\mathbb{R}$  si consideri la derivata covariante  $\nabla_{\dot{\mathbf{c}}} \mathbf{X}$ .

---

incontrò BETTI ed altri matematici italiani che avevano visitato Göttingen. La sua salute andò rapidamente deteriorando. Morì sul Lago Maggiore il 16 giugno 1866.

- Se la derivata covariante  $\nabla_{\dot{\mathbf{c}}}\mathbf{X}$  di  $\mathbf{X}$  lungo  $\mathbf{c} : I \mapsto \mathbb{R}$  è nulla si dice che  $\mathbf{X}$  è parallelo a  $\mathbf{c} : I \mapsto \mathbb{R}$ .

Si consideri allora l'operatore  $S_{t,s} : \mathbb{T}_{\mathbb{R}}(\mathbf{c}(s)) \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}(\mathbf{c}(t))$  che effettua il trasporto parallelo da  $\mathbf{c}(s)$  a  $\mathbf{c}(t)$  lungo  $\mathbf{c} : I \mapsto \mathbb{R}$ . La derivata covariante è correlata al trasporto parallelo dal seguente risultato.

**Proposizione 12.16. Trasporto parallelo.** *Sia  $\mathbf{c} : I \mapsto \mathbb{R}$  una curva e  $\mathbf{X}$  un campo vettoriale definito su  $\mathbf{c}$ . Vale allora la formula*

$$\nabla_{\dot{\mathbf{c}}(t)} \mathbf{X}(\mathbf{c}(t)) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} S_{t,s} \mathbf{X}(\mathbf{c}(s)).$$

**Dim.** Vedi [52] prop.1.4.21. □

- Una connessione affine su una varietà differenziabile di RIEMANN  $\{\mathbb{R}, \mathbf{g}\}$  è detta *connessione di LEVI-CIVITA*<sup>38</sup> se gode delle ulteriori proprietà

$$iii) \quad \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{0},$$

$$iv) \quad \nabla_{\mathbf{Z}} (\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = d_{\mathbf{Z}}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \mathbf{g}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}).$$

L'espressione

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$$

è detta *torsione della connessione*.

Il campo del tensore di torsione del tipo  $(1,2)$   $\mathbf{T} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^* ; \mathfrak{R})$  è definito da [45]

$$\mathbf{T}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \alpha] := \alpha(\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})), \quad \forall \begin{cases} \mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \\ \alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*. \end{cases}$$

La proprietà *iii)* può pertanto enunciarsi affermando che la connessione è priva di torsione. La tensorialità del campo di torsione sarà dimostrata nella proposizione 12.19.

- I simboli di CHRISTOFFEL<sup>39</sup> relativi al riferimento  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$  sono definiti dalla relazione

$$\Gamma_{AB}^C \mathbf{E}_C = \nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_B.$$

<sup>38</sup> TULLIO LEVI-CIVITA (1873-1941). Studiò all'Università di Padova. Fu allievo e successivamente collaboratore di RICCI con il quale nel 1900 pubblicò la teoria dei tensori in *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* in una forma che fu adoperata da EINSTEIN 15 anni dopo. Dal 1898 al 1918 insegnò meccanica a Padova. Nel 1918 gli fu affidata la cattedra di Meccanica a Roma dove insegnò per circa 20 anni, finché il governo fascista, per discriminazioni razziali, lo rimosse dal suo incarico in quanto discendente di ebrei. Morì poco dopo.

<sup>39</sup> ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL (1829-1900). Studiò all'Università di Berlino dal 1850 dove ebbe come professori BORCHARDT, EISENSTEIN, FERDINAND JOACHIMSTHAL (1818-1861), STEINER e principalmente DIRICHLET. A CHRISTOFFEL sono dovuti importanti contributi in molti campi della matematica ma è particolarmente noto per gli studi sulla geometria differenziale dove per primo introdusse il concetto di connessione e definì i simboli che portano il suo nome.

Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 12.17. Simmetria dei simboli di Christoffel.** *La torsione della connessione è nulla se e solo se i simboli di CHRISTOFFEL relativi ad un qualsiasi riferimento  $\{\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n\}$  sono simmetrici rispetto agli indici inferiori e cioè risulta*

$$\Gamma_{BC}^A = \Gamma_{CB}^A.$$

**Dim.** Al risultato si perviene direttamente partendo dalla formula  $[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \mathbf{o}$  dimostrata nella proposizione 12.9 (p. 139). Infatti si ha che

$$\mathbf{T}(\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B) = (\nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_B - \nabla_{\mathbf{E}_B} \mathbf{E}_A) - [\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_B - \nabla_{\mathbf{E}_B} \mathbf{E}_A = \mathbf{o}.$$

La proprietà di simmetria rispetto agli indici inferiori segue allora dalla definizione dei simboli di CHRISTOFFEL.  $\square$

La proprietà iv) della connessione di LEVI-CIVITA si enuncia affermando che il *trasposto parallelo* non altera la metrica o che è nulla la derivata covariante del tensore metrico, come sarà chiarito dalla proposizione 12.18.

Il *teorema fondamentale della geometria di RIEMANN* assicura che su di una varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{R}, g\}$  esiste un'unica connessione di LEVI-CIVITA.

Ciò discende direttamente dalla seguente notevole formula di KOSZUL [57]

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= d_X(g(Y, Z)) + d_Y(g(Z, X)) - d_Z(g(X, Y)) + \\ &\quad + g([X, Y], Z) - g([Y, Z], X) + g([Z, X], Y), \end{aligned}$$

che consente di definire la derivata covariante in termini di quantità indipendenti dalla connessione.

Si verifica infatti che la connessione definita dalla formula di KOSZUL è una connessione di LEVI-CIVITA e che ogni siffatta connessione soddisfa l'identità di KOSZUL.

D'ora in poi si assumerà che la derivata covariante sia quella definita dalla connessione di LEVI-CIVITA.

Dalla formula di KOSZUL si deduce immediatamente l'espressione dei simboli di CHRISTOFFEL in termini del tensore metrico.

Infatti, ricordando dalla proposizione 12.9 (p. 139) che  $[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \mathbf{o}$ , si deduce direttamente che

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_B, \mathbf{E}_C) &= \\ &= d_{\mathbf{E}_A}(g(\mathbf{E}_B, \mathbf{E}_C)) + d_{\mathbf{E}_B}(g(\mathbf{E}_C, \mathbf{E}_A)) - d_{\mathbf{E}_C}(g(\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B)), \end{aligned}$$

e cioè che

$$2\Gamma_{AB}^D \mathbf{G}_{CD} = \mathbf{G}_{BC/A} + \mathbf{G}_{CA/B} - \mathbf{G}_{AB/C}.$$

■ La *derivata covariante di un campo tensoriale* di tipo  $(1, 1)$

$$\mathbf{A} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*; \mathfrak{R}),$$

è il campo tensoriale  $\nabla \mathbf{A} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*; \mathfrak{R})$  di tipo  $(1, 2)$  definito, in modo che valga la formula di LEIBNIZ, dall'identità

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] &= (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})[\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] := \\ &= d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{A}[\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]) - \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] - \mathbf{A}[\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\alpha}]. \end{aligned}$$

La dipendenza da  $\mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  è tensoriale per la proprietà *i)* della derivata covariante.

Per dimostrare la tensorialità della dipendenza dagli altri argomenti  $\mathbf{X} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  e  $\boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*$  bisogna mostrare che, per ogni campo scalare differenziabile  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  differenziabile, risulta

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, f \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] &= f (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}], \\ (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, f \boldsymbol{\alpha}] &= f (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]. \end{aligned}$$

Ciò segue da un calcolo diretto. Ad esempio si ha che

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, f \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] &= \nabla_{\mathbf{Y}}(\mathbf{A}[f \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]) - \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{Y}}(f \mathbf{X}), \boldsymbol{\alpha}] - \mathbf{A}[f \mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\alpha}] = \\ &= (\nabla_{\mathbf{Y}} f)(\mathbf{A}[\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]) + f \nabla_{\mathbf{Y}}(\mathbf{A}[\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]) - (\nabla_{\mathbf{Y}} f)\mathbf{A}[\mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] + \\ &\quad - f \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}] - f \mathbf{A}[\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}} \boldsymbol{\alpha}] = f (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\alpha}]. \end{aligned}$$

■ Dalla definizione della derivata covariante di un campo tensoriale si evince che vale la seguente formula di derivazione del prodotto tensoriale

$$\nabla_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) = (\nabla_{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\alpha} \otimes \nabla_{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\beta}).$$

dove  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*$ .

Infatti, posto  $\mathbf{T} = \boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta}$  nella formula della derivata covariante di un campo tensoriale, essendo per definizione

$$(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{Y}),$$

si ha che

$$\begin{aligned} [\nabla_{\mathbf{Z}}(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})](\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= d_{\mathbf{Z}}[(\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] + \\ &\quad - (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) - (\boldsymbol{\alpha} \otimes \boldsymbol{\beta})(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}) = \\ &= d_{\mathbf{Z}}[(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{Y}))] - \boldsymbol{\alpha}(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}) \boldsymbol{\beta}(\mathbf{Y}) - \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{X}) \boldsymbol{\beta}(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Dalla regola di LEIBNIZ per la derivata direzionale segue poi che

$$d_{\mathbf{Z}}[(\alpha(\mathbf{X})\beta(\mathbf{Y}))] = d_{\mathbf{Z}}[\alpha(\mathbf{X})]\beta(\mathbf{Y}) + \alpha(\mathbf{X})d_{\mathbf{Z}}[\beta(\mathbf{Y})],$$

e dalla definizione della derivata covariante di un campo tensoriale, che

$$d_{\mathbf{Z}}[\alpha(\mathbf{X})] = (\nabla_{\mathbf{Z}}\alpha)(\mathbf{X}) + \alpha(\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}).$$

Sostituendo si perviene alla formula cercata. E' facile vedere che la formula del prodotto tensoriale vale anche per il prodotto tensoriale di due tensori qualsiasi.

La proprietà *iv)* della connessione di LEVI-CIVITA è motivata dalla seguente conseguenza.

**Proposizione 12.18. Derivata covariante del tensore metrico.** *Sia  $\{\mathbb{R}, g\}$  una varietà di RIEMANN con la connessione di LEVI-CIVITA. Allora è nulla la derivata covariante del campo tensoriale metrico  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{T}_{\mathbb{R}})$ .*

**Dim.** Dalla definizione di derivata covariante di un campo tensoriale e dalla proprietà *iv)* della connessione di LEVI-CIVITA si ha che

$$(\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{g})\{\mathbf{Y}, \mathbf{Z}\} = \nabla_{\mathbf{Z}}(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) - g(\nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - g(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{Y}) = \mathbf{0},$$

per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  e cioè  $\nabla\mathbf{g} = \mathbf{O}$ .  $\square$

**Proposizione 12.19. Tensorialità della torsione.** *Il campo di torsione  $\mathbf{T}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \alpha] = \alpha(\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$  è un campo tensoriale. Sussiste infatti la formula*

$$\mathbf{T}(f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}) = f g \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

**Dim.** Dalla proprietà *i)* e *ii)*<sub>2</sub> della derivata covariante e dalla formula *iii)*  $[f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] = f g [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} g) f\mathbf{Y} - (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} f) g\mathbf{X}$  della proposizione 12.11 (p. 141) segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}) &= \nabla_{(f\mathbf{X})}(g\mathbf{Y}) - \nabla_{(g\mathbf{Y})}(f\mathbf{X}) - [f\mathbf{X}, g\mathbf{Y}] = \\ &= f g \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} - f g \nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{X} - f g [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = f g \mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

La tensorialità della dipendenza di  $\mathbf{T}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \alpha] = \alpha(\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$  da  $\alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*$  è immediata.  $\square$

**Osservazione 12.1.** Una definizione alternativa della derivata covariante di un campo tensoriale fa ricorso al trasporto parallelo di un campo tensoriale definito da

$$(S_{t,s}\mathbf{A})[\mathbf{X}, \alpha] := \mathbf{A}[S_{s,t}\mathbf{X}, S_{s,t}\alpha],$$

dove il trasporto parallelo della 1-forma  $\alpha \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*$  è definito da

$$(S_{t,s}\alpha)[\mathbf{Y}] = \alpha[S_{s,t}\mathbf{Y}].$$

Posto quindi  $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$  e  $\mathbf{Z} = \dot{\mathbf{c}}(t)$  la derivata covariante è definita da

$$\nabla \mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \alpha] = \nabla_{\mathbf{Z}}\mathbf{A}(\mathbf{x})[\mathbf{X}, \alpha] = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (S_{t,s}\mathbf{A})(\mathbf{c}(s))[\mathbf{X}, \alpha].$$

■



La prossima proposizione fornisce l'espressione della derivata covariante in termini di coordinate.

**Proposizione 12.20. Componenti della derivata covariante.** *Sia  $\{\mathbb{R}, g\}$  una varietà di RIEMANN. L'espressione della derivata covariante  $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}$  in termini delle coordinate, definite da una carta locale  $\varphi : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ , è data da*

$$\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = Y^B (X_{/B}^A + \Gamma_{BC}^A X^C) \mathbf{E}_A,$$

dove si è adottata la convenzione di EINSTEIN.

**Dim.** Ponendo

$$\mathbf{X} = X^A \mathbf{E}_A, \quad \mathbf{Y} = Y^B \mathbf{E}_B,$$

dalle proprietà *i)* e *ii)* della connessione si ha che

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} &= \nabla_{(Y^B \mathbf{E}_B)} (X^C \mathbf{E}_C) = Y^B \nabla_{\mathbf{E}_B} (X^C \mathbf{E}_C) = \\ &= Y^B [(d_{\mathbf{E}_B} X^C) \mathbf{E}_C + (\nabla_{\mathbf{E}_B} \mathbf{E}_C) X^C] = \\ &= Y^B (X_{/B}^A + \Gamma_{BC}^A X^C) \mathbf{E}_A, \end{aligned}$$

e quindi il risultato. □

Ricordando dalla proposizione 12.9 (p. 139) che

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [Y_{/B}^A X^B - X_{/B}^A Y^B] \mathbf{E}_A,$$

si ottiene la relazione

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] &= \\ &= [X^B (Y_{/B}^A + \Gamma_{BC}^A Y^C) - Y^B (X_{/B}^A + \Gamma_{BC}^A X^C) - [Y_{/B}^A X^B - X_{/B}^A Y^B]] \mathbf{E}_A = \\ &= [X^B Y^C \Gamma_{BC}^A - Y^B X^C \Gamma_{BC}^A] \mathbf{E}_A = [X^B Y^C [\Gamma_{BC}^A - \Gamma_{CB}^A]] \mathbf{E}_A. \end{aligned}$$

Si ritrova così l'equivalenza tra l'annullarsi della torsione della connessione di LEVI-CIVITA e la proprietà di simmetria dei simboli di CHRISTOFFEL rispetto agli indici inferiori.

Sia  $\{\mathbb{R}, g\}$  una varietà di RIEMANN con la connessione di LEVI-CIVITA e  $\mathbb{M}$  una varietà differenziabile ad essa diffeomorfa tramite  $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{M}$ .

■ La varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{M}, \varphi_* g\}$  è detta *isometrica* alla varietà  $\{\mathbb{R}, g\}$ .

Sussiste allora il seguente notevole risultato.



**Proposizione 12.21. Derivate covarianti di campi vettoriali ed isometrie riemanniane.** Siano  $\{\mathbb{R}, g\}$  e  $\{\mathbb{M}, \varphi_* g\}$  varietà di RIEMANN isometriche. Allora le derivate covarianti definite dalle rispettive connessioni di LEVI-CIVITA godono della proprietà

$$a) \quad \varphi_*(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) = \nabla_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.$$

**Dim.** La formula da stabilire si può riscrivere imponendo che  $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  si abbia

$$b) \quad (\varphi_* g)(\nabla_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{X}), \varphi_* \mathbf{Z}) = \varphi_*(g(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z})).$$

Infatti dalla definizione di spinta di un tensore si ha che

$$c) \quad (\varphi_* g)(\nabla_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{X}), \varphi_* \mathbf{Z}) = \varphi_*(g(\varphi^* \nabla_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{X}), \mathbf{Z})).$$

Eguagliando i termini a destra delle *b)* e *c)* si ottiene la *a)* e viceversa.

Rimane da dimostrare che vale la *b)*.

A ciò si perviene osservando che il tensore metrico della varietà di RIEMANN  $\mathbb{M}$  è  $\varphi_* g$ . Pertanto, applicando la formula di KOSZUL, l'espressione a sinistra nella *b)* si può scrivere come somma di termini del tipo

$$d) \quad d_{\varphi_* \mathbf{Y}} [(\varphi_* g)(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Z})], \quad e) \quad (\varphi_* g)([\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}], \varphi_* \mathbf{Z}).$$

Per definizione di spinta si ha che

$$d) \quad d_{\varphi_* \mathbf{Y}} [(\varphi_* g)(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Z})] = d_{\varphi_* \mathbf{Y}} [\varphi_*(g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))],$$

$$e) \quad (\varphi_* g)([\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}], \varphi_* \mathbf{Z}) = \varphi_*(g(\varphi^* [\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}], \mathbf{Z})).$$

Ora le proposizioni 12.2 (p. 134) e 12.5 (p. 136), assicurano che la derivata direzionale e la parentesi di LIE sono naturali rispetto alla spinta. Sussistono quindi le egualanze

$$d) \quad d_{\varphi_* \mathbf{Y}} [\varphi_*(g(\mathbf{X}, \mathbf{Z}))] = \varphi_*(d_{\mathbf{Y}} [g(\mathbf{X}, \mathbf{Z})]),$$

$$e) \quad \varphi_*(g(\varphi^* [\varphi_* \mathbf{Y}, \varphi_* \mathbf{X}], \mathbf{Z})) = \varphi_*(g([\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \mathbf{Z})).$$

Una nuova applicazione della formula di KOSZUL consente di dedurre l'egualanza tra le espressioni a sinistra ed a destra nella *b)*.

L'asserto è pertanto dimostrato.  $\square$

Il risultato della proposizione 12.21 si può enunciare affermando che

- la derivata covariante è *naturale* rispetto alle isometrie riemanniane.

La prossima proposizione mostra che un'analogia proprietà vale per i campi tensoriali.

**Proposizione 12.22. Derivate covarianti di campi tensoriali ed isometrie riemanniane.** Siano  $\{\mathbb{R}, g\}$  e  $\{\mathbb{M}, \varphi_* g\}$  varietà di RIEMANN isometriche,  $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  un campo vettoriale e  $\mathbf{A} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{R})$  un campo tensoriale. Allora le derivate covarianti definite dalle rispettive connessioni di LEVI-CIVITA godono della proprietà

$$a) \quad \varphi_*(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{A}) = \nabla_{\varphi_* \mathbf{Z}} (\varphi_* \mathbf{A}), \quad \begin{cases} \forall \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \\ \forall \mathbf{A} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{R}). \end{cases}$$

**Dim.** Si osservi che dalle proposizioni 12.21 e 12.2 (p. 134), dalla definizione di spinta di un campo tensoriale e dalla definizione di derivata covariante di un campo tensoriale si deduce che per ogni coppia di campi vettoriali  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  valgono le proprietà

$$\begin{aligned}\varphi_*(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) &= \nabla_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{X}), \\ \varphi_*[\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] &= (\varphi_* \mathbf{A})(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}), \\ \varphi_*[\nabla_{\mathbf{Z}} (\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] &= \nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} \varphi_*[\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})], \\ (\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{A})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= \nabla_{\mathbf{Z}} (\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) - \mathbf{A}(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{A}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}).\end{aligned}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}[\varphi_*(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{A})](\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}) &= \varphi_*[(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{A})(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \\ \varphi_*[\nabla_{\mathbf{Z}} (\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))] - \varphi_*[\mathbf{A}(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y})] - \varphi_*[\mathbf{A}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y})] &= \\ \nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} \varphi_*[\mathbf{A}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] - (\varphi_* \mathbf{A})(\varphi_*(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}), \varphi_* \mathbf{Y}) - (\varphi_* \mathbf{A})(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_*(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y})) &= \\ \nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} [(\varphi_* \mathbf{A})(\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y})] - (\varphi_* \mathbf{A})(\nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} \varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}) - \\ (\varphi_* \mathbf{A})(\varphi_* \mathbf{X}, \nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} \varphi_* \mathbf{Y}) &= [\nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} (\varphi_* \mathbf{A})](\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}).\end{aligned}$$

e cioè che  $\varphi_*(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{A}) = \nabla_{(\varphi_* \mathbf{Z})} (\varphi_* \mathbf{A})$ . □

Sia  $\{\mathbf{E}_A, A = 1, \dots, n\}$  una base ortonormale su  $\mathbb{R}$ .

■ La *divergenza di un campo vettoriale*  $\mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  è il campo scalare definito da

$$\text{div } \mathbf{Y} := \text{tr}(\nabla \mathbf{Y}) = \sum_{A=1}^n \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{Y}, \mathbf{E}_A).$$

■ La *divergenza di un campo tensoriale* di tipo  $(1, 1)$   $\mathbf{A} : \mathbb{R} \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*; \mathfrak{R})$  è il campo vettoriale definito da

$$(\text{div } \mathbf{A})[\mathbf{u}] := \mathbf{C}[\mathbf{u}, \mathbf{v}^*](\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{A})[\mathbf{u}, \mathbf{v}^*] = \sum_{A=1}^n \mathbf{g}((\nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{A})[\mathbf{u}], \mathbf{E}_A).$$



### 12.7. Campi vettoriali di Killing

Un campo vettoriale  $\mathbf{Y} : \mathbb{R} \times I \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  è detto un *campo di KILLING* su  $\mathbb{R}$  se risulta

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{g} = \mathbf{o}.$$

Ne segue che il flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  di  $\mathbf{Y}$  è una isometria. Infatti in virtù della formula

$$\mathbf{k}_{t,s}^* (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})_t = \frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{A}_t),$$

stabilita nella proposizione 12.3 (p. 135), si ha che per ogni  $t \in I$

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{g})(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.$$

Dunque  $\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{g} = \mathbf{k}_{s,s}^* \mathbf{g} = \mathbf{g}$  e cioè

$$(\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{g})(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \mathbf{g}(T\mathbf{k}_{t,s} \circ \mathbf{X}, T\mathbf{k}_{t,s} \circ \mathbf{Z}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Z}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.$$

Un campo di KILLING è anche detto una *isometria infinitesimale*.

La *condizione di KILLING*  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{g} = \mathbf{o}$  costituisce l'estensione della *condizione di EULER* che stabilisce che un cinematico è rigido se e solo se si annulla la parte simmetrica del suo gradiente spaziale (vedi proposizione 9.10 (p. 85)).

Per mostrarlo si esprima la derivata di LIE del tensore metrico in funzione della derivata covariante.

Dalla proposizione 12.4 (p. 135) si sa che per la derivata di LIE vale la regola di LEIBNIZ, e cioè che per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  risulta

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{g})(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} (\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) - \mathbf{g}(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}).$$

La proprietà *iii)* della connessione di LEVI-CIVITA assicura che la torsione è nulla e cioè che  $\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = [\mathbf{Y}, \mathbf{X}] = (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})$ .

Sostituendo e tenendo presente che, per la proprietà *iv)* della connessione di LEVI-CIVITA, risulta

$$\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} (\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}),$$

si perviene alla formula

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{g})(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) + \mathbf{g}(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.$$

Conviene trasformare ulteriormente la formula. A tal fine si noti che

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{g})(\mathbf{X}, \mathbf{Z}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{g}(\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{Y}, \mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{Z}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{g}(\mathbf{C}_{t,s} \mathbf{X}, \mathbf{Z}) = \\ &= \mathbf{g}(\dot{\mathbf{C}}_{s,s} \mathbf{X}, \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{C}_{t,s} = (T\mathbf{k}_{t,s})^T T\mathbf{k}_{t,s}$ .



Si noti inoltre che

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) + g(X, \nabla_Z Y) &= g(\nabla Y [X], Z) + g(X, \nabla Y [Z]) = \\ &= 2g((\text{sym } \nabla Y)[Z], X). \end{aligned}$$

Pertanto la condizione di KILLING si può scrivere

$$\boxed{\frac{1}{2} \dot{C}_{s,s} = \text{sym } \nabla Y = \mathbf{o}.}$$

Questa espressione della condizione di KILLING rende evidente che essa costituisce l'estensione della condizione di EULER al caso più generale in cui allo spazio euclideo si sostituisce una varietà di RIEMANN. Se lo spazio ambiente è euclideo, la derivata covariante coincide con la derivata direzionale e si ritrova la classica formulazione di EULER.

## 12.8. Accelerazioni e spinte

I risultati precedenti consentono di stabilire una formula generale che correla i campi di accelerazione relativi a due flussi correlati da un diffeomorfismo tra varietà di RIEMANN e generalizza il risultato esposto nella sezione 9.13 (p. 97).

Il contesto formale è quello delle proposizioni 12.13 (p. 145) e 12.21.

Sia  $\varphi_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  diffeomorfismo dipendente dal tempo tra le varietà di RIEMANN isometriche  $\{\mathbb{M}, g\}$  e  $\{\mathbb{N}, \varphi_{t*}g\}$ . Si consideri quindi il flusso

$$\phi_{t,s} := \varphi_t \circ \varphi_s^{-1} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N},$$

e sia  $\mathbf{X}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  il relativo campo vettoriale di velocità, cioè il campo tale che

$$\frac{d}{dt} \phi_{t,s} = \mathbf{X}_t \circ \phi_{t,s}, \quad \phi_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{N}.$$

Siano inoltre

- $\mathbf{Y}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  e  $\mathbf{Z}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}$  campi vettoriali e
- $\mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{M}$  e  $\mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$  i rispettivi flussi correlati dalla spinta

$$\varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} = \mathbf{k}_{\mathbf{Z}(t,s)} \circ \varphi_s.$$

### ■ L'accelerazione associata ai campi di velocità

$$\mathbf{X}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}},$$

$$\mathbf{Y}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}},$$

$$\mathbf{Z}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}},$$

è la corrispondente *derivata temporale materiale*, definita da

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}_t &:= \mathbf{X}'_t + \nabla_{\mathbf{X}_t} \mathbf{X}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}, \\ \dot{\mathbf{Y}}_t &:= \mathbf{Y}'_t + \nabla_{\mathbf{Y}_t} \mathbf{Y}_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \\ \dot{\mathbf{Z}}_t &:= \mathbf{Z}'_t + \nabla_{\mathbf{Z}_t} \mathbf{Z}_t : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{N}}.\end{aligned}$$

La derivata covariante  $\nabla_{\mathbf{Y}_t} \mathbf{Y}_t$  è associata alla connessione di LEVI-CIVITA sulla varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{M}, g\}$ , mentre le derivate covarianti  $\nabla_{\mathbf{X}_t} \mathbf{X}_t$  e  $\nabla_{\mathbf{Z}_t} \mathbf{Z}_t$  sono associate alla connessione di LEVI-CIVITA sulla varietà di RIEMANN isometrica  $\{\mathbb{N}, \varphi_{t*}g\}$ . Le derivate temporali spaziali sono poi definite da

$$\mathbf{Y}'_t := \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \mathbf{Y}_s,$$

ed analogamente per  $\mathbf{X}'$ ,  $\mathbf{Z}'$ . Si ha allora il seguente risultato [52].

**Proposizione 12.23. Accelerazione della spinta.** *Sussiste la formula*

$$\dot{\mathbf{Z}}_t = \varphi_{t*} \dot{\mathbf{Y}}_t + \dot{\mathbf{X}}_t + 2 \nabla_{(\varphi_{t*} \mathbf{Y}_t)} \mathbf{X}_t.$$

*Il termine  $\dot{\mathbf{X}}_t$  è la generalizzazione della accelerazione di trascinamento mentre il termine  $2 \nabla_{(\varphi_{t*} \mathbf{Y}_t)} \mathbf{X}_t$  è la generalizzazione della accelerazione di CORIOLIS*<sup>40</sup>.

**Dim.** La dimostrazione fa ricorso a molti risultati dimostrati in precedenza. Dalla proposizione 12.13 (p. 145) si trae la relazione tra i campi di velocità

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{X}_t + \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t.$$

Dall'espressione dell'accelerazione nel flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{Y}(t,s)} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{M}$  operando la spinta tramite  $\varphi_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  si ha che

$$\varphi_{t*} \dot{\mathbf{Y}}_t = \varphi_{t*} \mathbf{Y}'_t + \varphi_{t*} (\nabla_{\mathbf{Y}_t} \mathbf{Y}_t).$$

---

<sup>40</sup> GASPARD GUSTAVE DE CORIOLIS (1792-1843). Entrò alla Ecole Polytechnique nel 1808 e poi all'Ecole des Ponts et Chaussées. Nel 1816 divenne tutore di analisi all'Ecole Polytechnique su raccomandazione di CAUCHY. Nel 1836 NAVIER morì e CORIOLIS gli succedette sulla cattedra all'Ecole des Ponts and Chaussées e alla Académie des Sciences. Le ricerche hanno riguardato la matematica applicata, la meccanica ed in particolare l'attrito, l'idraulica, le prestazioni delle macchine e l'ergonomica. CORIOLIS introdusse i termini "lavoro" ed "energia cinetica" nella loro accezione moderna (*Du Calcul de l'effet des machines* (1829)). La nozione di *accelerazione di Coriolis* fu introdotta nel lavoro *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps* (1835). Nel 1835 scrisse anche la *Théorie mathématique des effets du jeu de billard* e nel 1844 un *Traité de la mécanique des corps solides* (1844).

In virtù della proposizione 12.21 (p. 155) si può scrivere

$$\varphi_{t*}(\nabla_{\mathbf{Y}_t} \mathbf{Y}_t) = \nabla_{(\varphi_{t*}\mathbf{Y}_t)} \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t = \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)} (\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t).$$

Si ha inoltre che  $\varphi_{t*} = \phi_{t,s*} \circ \varphi_{s*} = \phi_{s,t}^* \circ \varphi_{s*}$  e dunque

$$\begin{aligned} \varphi_{t*} \mathbf{Y}'_t &= \varphi_{t*} \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \mathbf{Y}_s = \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \phi_{s,t}^* \circ \varphi_{s*} \mathbf{Y}_s = \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}_t}(\varphi_{t*} \mathbf{Y}_t) = [\mathbf{X}_t, \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t] + \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} \varphi_{s*} \mathbf{Y}_s = \\ &= [\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t] + \frac{d}{ds} \Big|_{s=t} (\mathbf{Z}_s - \mathbf{X}_s) = \\ &= [\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t] + \mathbf{Z}'_t - \mathbf{X}'_t. \end{aligned}$$

La simmetria della connessione fornisce quindi la relazione

$$[\mathbf{X}_t, \mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t] = \nabla_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t) - \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)} \mathbf{X}_t.$$

In definitiva si ha pertanto che

$$\varphi_{t*} \dot{\mathbf{Y}}_t = \nabla_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t) - \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)} \mathbf{X}_t + \mathbf{Z}'_t - \mathbf{X}'_t + \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)}(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t).$$

Raggruppando mediante le proprietà della derivata covariante, si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi_{t*} \dot{\mathbf{Y}}_t &= -2 \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)} \mathbf{X}_t + \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)} \mathbf{Z}_t + \nabla_{\mathbf{X}_t}(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t) + \mathbf{Z}'_t - \mathbf{X}'_t = \\ &= -2 \nabla_{(\mathbf{Z}_t - \mathbf{X}_t)} \mathbf{X}_t + \nabla_{\mathbf{Z}_t} \mathbf{Z}_t - \nabla_{\mathbf{X}_t} \mathbf{X}_t + \mathbf{Z}'_t - \mathbf{X}'_t, \end{aligned}$$

che è la formula cercata.  $\square$

**Osservazione 12.2.** Nelle formule generali di trasformazione dei campi di velocità e di accelerazione

$$\mathbf{Z}_t = \mathbf{X}_t + \varphi_{t*} \mathbf{Y}_t, \quad \dot{\mathbf{Z}}_t = \varphi_{t*} \dot{\mathbf{Y}}_t + \dot{\mathbf{X}}_t + 2 \nabla_{(\varphi_{t*} \mathbf{Y}_t)} \mathbf{X}_t,$$

si assuma che il diffeomorfismo  $\varphi_t : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  sia una trasformazione rigida

$$\varphi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{c}(t) + \mathbf{Q}(t)[\mathbf{x}], \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}.$$

Si ritrovano allora le formule speciali dedotte nella sezione 9.13 (p. 97).

Infatti, rinunciando ad esplicitare la dipendenza dal tempo, si ha che

$$\varphi_* \mathbf{Y} = T\varphi \circ \mathbf{Y} \circ \varphi^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{Y} \circ \varphi^{-1}, \quad (\mathbf{X} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}],$$

$$\mathbf{x}^* = \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{c} + \mathbf{Q}\mathbf{x}, \quad \mathbf{X} = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}^T \mathbf{x}^* + \mathbf{c}).$$

Dunque risulta

$$\nabla_{(\varphi_* \mathbf{Y})} \mathbf{X} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{Y} \circ \varphi^{-1} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Y} \circ \varphi^{-1},$$

e le formule di trasformazione diventano rispettivamente

$$(\mathbf{Z} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{c}} + \dot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}] + \mathbf{Q} \mathbf{Y}(\mathbf{x}),$$

$$(\dot{\mathbf{Z}} \circ \varphi)(\mathbf{x}) = \ddot{\mathbf{c}} + \ddot{\mathbf{Q}}[\mathbf{x}] + 2 \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}),$$

e coincidono con quelle della sezione 9.13 (p. 97).

### 12.9. Derivate seconde covarianti

La derivata covariante  $\nabla f \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  di una funzione differenziabile  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  è un campo vettoriale. E' quindi naturale porre la seguente definizione.

- L'Hessiano<sup>41</sup>  $\nabla^2 f : \mathbb{R} \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{T}_{\mathbb{R}})$  di un campo scalare  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  è il campo di tensori di tipo  $(1,1)$  definito dalla derivata covariante del campo vettoriale  $\nabla f \in \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ . L'Hessiano è quindi definito dall'identità

$$\mathbf{g}(\nabla^2 f[\mathbf{Y}], \mathbf{X}) := \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Y}} \nabla f, \mathbf{X}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.$$

**Proposizione 12.24. Simmetria dell'Hessiano.** Se  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  è due volte differenziabile, l'Hessiano  $\nabla^2 f : \mathbb{R} \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{T}_{\mathbb{R}})$  è un campo di tensori simmetrici.

**Dim.** In virtù delle proprietà *iii) e iv)* della connessione di LEVI-CIVITA (vedasi la sezione 12.6 (p. 149)) e della relazione

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}][f] = d_f[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] = \mathcal{L}_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} f = d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} f - d_{\mathbf{Y}} d_{\mathbf{X}} f,$$

valida per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ , si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\nabla^2 f[\mathbf{X}], \mathbf{Y}) &= \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \nabla f, \mathbf{Y}) = \nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{g}(\nabla f, \mathbf{Y})] - \mathbf{g}(\nabla f, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}) = \\ &= d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} f - d_f[\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}] = \\ &= d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} f - d_f[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{Y}, \mathbf{X}]] = \\ &= d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} f - d_f[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}] + d_f[[\mathbf{Y}, \mathbf{X}]] = \\ &= d_{\mathbf{Y}} d_{\mathbf{X}} f - d_f[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}] = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Y}} \nabla f, \mathbf{X}) = \mathbf{g}(\nabla^2 f[\mathbf{Y}], \mathbf{X}), \end{aligned}$$

per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ .  $\square$

L'Hessiano può essere rappresentato come un campo tensoriale di tipo  $(0,2)$  definendo il campo tensoriale  $\overline{\nabla}^2 f : \mathbb{R} \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*)$  mediante l'identità

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}^2_{\mathbf{XY}} f &= \langle \overline{\nabla}^2 f[\mathbf{X}], \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{g}(\nabla^2 f[\mathbf{X}], \mathbf{Y}) = \\ &= \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \nabla f, \mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{Y}, \mathbf{X} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Si può allora scrivere

$$\langle \overline{\nabla}^2 f[\mathbf{X}], \mathbf{Y} \rangle = \nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{g}(\nabla f, \mathbf{Y})] - \mathbf{g}(\nabla f, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}),$$

---

<sup>41</sup> LUDWIG OTTO HESSE (1811-1874). Allievo di JACOBI insegnò a Königsberg, ad Heidelberg ed a Munich. Introdusse il determinante Hessiano in un lavoro del 1842 sulle curve quadratiche e cubiche.

e cioè

$$\boxed{\overline{\nabla}^2_{\mathbf{XY}} f = \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} f - \nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} f.}$$

La derivata seconda covariante di un campo tensoriale è naturalmente definita come derivata covariante della derivata covariante. Dunque

**Proposizione 12.25. Derivata seconda covariante.** *La derivata seconda covariante di un campo tensoriale di tipo  $(0, 2)$   $\mathbf{A} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathfrak{R})$  è il campo tensoriale  $\nabla^2 \mathbf{A} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathfrak{R})$  di tipo  $(0, 4)$  definito da*

$$\boxed{(\nabla^2 \mathbf{A})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\nabla^2_{\mathbf{XY}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := [\nabla_{\mathbf{X}} (\nabla \mathbf{A})](\mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}),}$$

per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  e sussiste la formula

$$\boxed{\nabla^2_{\mathbf{XY}} \mathbf{A} = \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A} - \nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{A}.}$$

**Dim.** Ricordando la formula definitoria della derivata covariante

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{A})[\mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}] &= (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] := \\ &= \nabla_{\mathbf{Y}} (\mathbf{A}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]) - \mathbf{A}[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{x}, \mathbf{y}] - \mathbf{A}[\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{y}], \end{aligned}$$

si ha che

$$\begin{aligned} &[\nabla_{\mathbf{X}} (\nabla \mathbf{A})](\mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} [(\nabla \mathbf{A})(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y})] + \\ &- (\nabla \mathbf{A})(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\nabla \mathbf{A})(\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\nabla \mathbf{A})(\mathbf{Y}, \mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{y}) = \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} [(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \\ &- (\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Infine, osservando che

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{X}} [(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y})] - (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{y}) = \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \end{aligned}$$

si perviene alla espressione della derivata seconda covariante

$$(\nabla^2 \mathbf{A})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\nabla^2_{\mathbf{XY}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - (\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

che fornisce la formula dell'asserto.  $\square$

La differenza delle derivate seconde covarianti miste ha l'espressione

$$(\nabla_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^2 \mathbf{A} - \nabla_{\mathbf{Y}\mathbf{X}}^2 \mathbf{A}) = (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A}) - (\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{A} - \nabla_{\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}} \mathbf{A}).$$

Osservando che

$$\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{A} - \nabla_{\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}} \mathbf{A} = \nabla_{(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X})} \mathbf{A} = \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{A},$$

si perviene alla formula notevole

$$(\nabla_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^2 \mathbf{A} - \nabla_{\mathbf{Y}\mathbf{X}}^2 \mathbf{A}) = \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{A} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{A} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{A}.$$

- Il *laplaciano di un campo scalare*  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  è il campo scalare definito da

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f) = \operatorname{tr}(\nabla(\nabla f)) = \sum_{A=1}^n \nabla_{\mathbf{E}_A \mathbf{E}_A}^2 \mathbf{Y}.$$

## 12.10. Tensore curvatura

Per ogni funzione differenziabile  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  vale la formula

$$\mathbf{X}[\mathbf{Y}[f]] - \mathbf{Y}[\mathbf{X}[f]] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}][f],$$

che può risciversi

$$\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} f = \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} f.$$

E' fondamentale notare che in generale tale formula non sussiste se al campo scalare  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  si sostituisce un campo vettoriale  $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  su  $\{\mathbb{R}, g\}$ . Questa mancanza di simmetria costituisce l'elemento che differenzia la geometria euclidea dalle altre geometrie. Dunque ha senso porre la seguente definizione.

- Il *campo di curvatura*  $\mathbf{R} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{T}_{\mathbb{R}})$  è un campo di tensori di tipo  $(1, 3)$  definito dalla formula

$$\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z} := \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z},$$

per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ .

Identificando il campo vettoriale  $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  con il campo tensoriale di tipo  $(1, 0)$   $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*; \mathfrak{R})$ , dai risultati della sezione precedente si ottiene

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}(\alpha) := (\nabla_{\mathbf{XY}}^2 \mathbf{Z})(\alpha) - (\nabla_{\mathbf{YX}}^2 \mathbf{Z})(\alpha), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \\ \forall \alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*,}$$

ovvero

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z} = \nabla_{\mathbf{XY}}^2 \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{YX}}^2 \mathbf{Z}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.}$$

Dunque, per ogni fissato  $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  si può concludere che la curvatura è rappresentata dal campo tensoriale di tipo  $(1, 2)$

$$\boxed{\mathbf{R}_Z[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \alpha] := \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}(\alpha), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \\ \forall \alpha : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*.}$$

In effetti anche la dipendenza dal campo  $\mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  è tensoriale. Infatti si consideri la formula

$$\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] (f \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{XY}}^2 (f \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{YX}}^2 (f \mathbf{Z}),$$

e l'espressione della derivata covariante seconda

$$\nabla_{\mathbf{XY}}^2 (f \mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} (f \mathbf{Z}) - \nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} (f \mathbf{Z}).$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} (f \mathbf{Z}) &= (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} f) \mathbf{Z} + (\nabla_{\mathbf{Y}} f) (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) + \\ &= (\nabla_{\mathbf{X}} f) (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) + f (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}), \end{aligned}$$

e che

$$\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} (f \mathbf{Z}) = (\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} f) \mathbf{Z} + f (\nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{Z}).$$

Allora

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] (f \mathbf{Z}) &= [\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} f - \nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} f] \mathbf{Z} + \\ &\quad + [\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - \nabla_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathbf{Z}] f, \end{aligned}$$

e quindi

$$\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] (f \mathbf{Z}) = [\nabla_{\mathbf{XY}}^2 \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{YX}}^2 \mathbf{Z}] f + [\nabla_{\mathbf{XY}}^2 f - \nabla_{\mathbf{YX}}^2 f] \mathbf{Z}.$$

La simmetria dell'Hessiano di  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathfrak{R}$  stabilita nella proposizione 12.24 conduce infine al risultato

$$\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] (f \mathbf{Z}) = [\nabla_{\mathbf{XY}}^2 \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{YX}}^2 \mathbf{Z}] f = f \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}.$$

Ne segue che la *curvatura* è un campo tensoriale di tipo  $(1, 3)$  definito da

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\alpha}] := (\nabla^2_{\mathbf{XY}} \mathbf{Z})(\boldsymbol{\alpha}) - (\nabla^2_{\mathbf{YX}} \mathbf{Z})(\boldsymbol{\alpha}), \quad \begin{array}{l} \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \\ \forall \boldsymbol{\alpha} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}^*. \end{array}}$$

La derivata covariante seconda  $\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}$  è la derivata covariante lungo  $\mathbf{X}$  della derivata covariante lungo  $\mathbf{Y}$  del campo  $\mathbf{Z}$ .

La curvatura può essere espressa in termini del tensore metrico della varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{R}, \mathbf{g}\}$ . A tal fine si consideri un campo vettoriale  $\mathbf{W} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$  tale che  $\mathbf{Z}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{W})$  per ogni  $\mathbf{x} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ .

La *curvatura* è allora rappresentata da un campo tensoriale di tipo  $(0, 4)$

$$\mathbf{R} : \mathbb{R} \mapsto \mathbf{L}(\mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}, \mathbb{T}_{\mathbb{R}}; \mathbb{R}),$$

definito da

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] := \mathbf{g}(\nabla^2_{\mathbf{XY}} \mathbf{Z}, \mathbf{W}) - \mathbf{g}(\nabla^2_{\mathbf{YX}} \mathbf{Z}, \mathbf{W}),}$$

ovvero

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] := \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}, \mathbf{W}),}$$

per ogni  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}$ .

Le componenti del campo tensoriale curvatura in un riferimento locale si deducono dalla formula

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B, \mathbf{E}_C, \mathbf{E}_D] = \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{E}_A} \nabla_{\mathbf{E}_B} \mathbf{E}_C - \nabla_{\mathbf{E}_B} \nabla_{\mathbf{E}_A} \mathbf{E}_C - \nabla_{[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B]} \mathbf{E}_C, \mathbf{E}_D),}$$

e cioè, ricordando che  $[\mathbf{E}_A, \mathbf{E}_B] = \mathbf{o}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ABCD} &= \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{E}_A}(\Gamma_{BC}^E \mathbf{E}_E) - \nabla_{\mathbf{E}_B}(\Gamma_{AC}^E \mathbf{E}_E), \mathbf{E}_D) = \\ &= \mathbf{g}(\Gamma_{BC/A}^E \mathbf{E}_E + \Gamma_{BC}^E \Gamma_{AE}^F \mathbf{E}_F - \Gamma_{AC/B}^E \mathbf{E}_E - \Gamma_{AC}^E \Gamma_{BE}^F \mathbf{E}_F, \mathbf{E}_D) = \\ &= \mathbf{g}(\Gamma_{BC/A}^E \mathbf{E}_E + \Gamma_{BC}^F \Gamma_{AF}^E \mathbf{E}_E - \Gamma_{AC/B}^E \mathbf{E}_E - \Gamma_{AC}^F \Gamma_{BF}^E \mathbf{E}_E, \mathbf{E}_D) = \\ &= \mathbf{G}_{ED} [\Gamma_{BC/A}^E - \Gamma_{AC/B}^E + \Gamma_{BC}^F \Gamma_{AF}^E - \Gamma_{AC}^F \Gamma_{BF}^E]. \end{aligned}$$

Sostituendo le relazioni

$$\Gamma_{AB}^D \mathbf{G}_{CD} = \mathbf{G}_{BC/A} + \mathbf{G}_{CA/B} - \mathbf{G}_{AB/C},$$

si ottengono le espressioni delle componenti del tensore curvatura in termini delle componenti del tensore metrico e delle sue derivate.

Il campo tensoriale  $\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}]$  gode delle seguenti proprietà.

- $\mathbf{R}$  è *antisimmetrico* nella prima e seconda coppia di argomenti

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = -\mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = \mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}].}$$

- $\mathbf{R}$  è *simmetrico* rispetto allo scambio tra la prima e seconda coppia di argomenti

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = \mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}].}$$

- $\mathbf{R}$  soddisfa la *prima identità di BIANCHI*<sup>42</sup>

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z} + \mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \mathbf{Y} + \mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \mathbf{X} = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{R}}.}$$

- $\mathbf{R}$  soddisfa la *seconda identità di BIANCHI*

$$\boxed{(\nabla_{\mathbf{W}} \mathbf{R})[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{R})[\mathbf{Y}, \mathbf{W}] \mathbf{Z} + (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{R})[\mathbf{W}, \mathbf{X}] \mathbf{Z} = \mathbf{o}.}$$

Per completezza si riporta nel seguito la dimostrazione di tali proprietà seguendo la trattazione svolta in [57].

- L'antisimmetria di  $\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}]$  nella prima coppia di argomenti è una immediata conseguenza della definizione.  
L'antisimmetria nella seconda coppia di argomenti si deduce dal fatto che è nulla la forma quadratica associata al tensore  $\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ .

Ciò segue dalla formula

$$\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} f - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} f = \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} f.$$

Infatti l'annullarsi della derivata covariante del tensore metrico implica che

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) &= \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) - \mathbf{g}(\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}, \mathbf{Z}) = \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \mathbf{Z})] - \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) - \nabla_{\mathbf{Y}} [\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}, \mathbf{Z})] + \\ &\quad + \mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) - \frac{1}{2} \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} [\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})] = \\ &= \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]}) [\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})] = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] [\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{Z})] = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>42</sup> LUIGI BIANCHI (1856-1928). Allievo di ENRICO BETTI (1823-1892) e di ULLISSE DINI (1845-1918) alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Dopo la laurea conseguita nel 1877, svolse attività di ricerca a Pisa ed a Göttingen con FELIX KLEIN (1849-1925). Di rilievo è la sua corrispondenza con JULIUS WEINGARTEN (1849-1925) sulla teoria delle superfici.

- La prima identità di BIANCHI si dimostra assumendo che i campi vettoriali  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  commutino mutuamente e cioè che risulti

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = \mathbf{o}.$$

Allora, essendo nulla la torsione della connessione, si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z} + \mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \mathbf{Y} + \mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \mathbf{X} &= \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z} - \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z} + \\ &+ \nabla_{\mathbf{Z}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y} + \\ &+ \nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{Z}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} = \\ &= \nabla_{\mathbf{Z}} (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) + \\ &= \nabla_{\mathbf{Y}} (\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X} - \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) = \\ &= \nabla_{\mathbf{X}} [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] + \nabla_{\mathbf{Z}} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \nabla_{\mathbf{Y}} [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = 0. \end{aligned}$$

Il risultato è valido in generale poichè  $\mathbf{R}$  è un campo tensoriale ed ogni terna di vettori può essere estesa ad una terna di campi vettoriali che commutano mutuamente (vedi la proposizione 12.8 (p. 139)).

- La proprietà di simmetria rispetto allo scambio tra la prima e seconda coppia di argomenti si verifica adesso con semplici passaggi.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] &= -\mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{W}] - \mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{W}] = \\ &= \mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}] + \mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}] = \\ &= -\mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}] - \mathbf{R}[\mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}] + \\ &- \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{Y}] - \mathbf{R}[\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \\ &= 2\mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}] + \mathbf{R}[\mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}] + \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = \\ &= 2\mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \mathbf{R}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{W}, \mathbf{Z}] = \\ &= 2\mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}]. \end{aligned}$$

Dunque  $2\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W}] = 2\mathbf{R}[\mathbf{Z}, \mathbf{W}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ .

- Per stabilire la seconda identità di BIANCHI si supponga nuovamente che sia  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = [\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] = [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] = \mathbf{o}$ . Allora si ha che

$$\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z} = [\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}] \mathbf{Z} - \nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z} = [\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}] \mathbf{Z}.$$

Si noti inoltre che

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{R})[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{W} &= \nabla_{\mathbf{Z}}(\mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{W} + \\
 &\quad - \mathbf{R}[\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{W} = \\
 &= [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}] \mathbf{W}.
 \end{aligned}$$

Pertanto, in forza dell'identità di JACOBI per i commutatori, risulta

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{R})[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{W} + (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{R})[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \mathbf{W} + (\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{R})[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \mathbf{W} &= \\
 = [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} + [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} + [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} + \\
 &- \mathbf{R}[\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}] \mathbf{W} + \\
 &- \mathbf{R}[\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}, \mathbf{Z}] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\mathbf{Y}, \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}] \mathbf{W} + \\
 &- \mathbf{R}[\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}, \mathbf{X}] \mathbf{W} - \mathbf{R}[\mathbf{Z}, \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}] \mathbf{W} = \\
 = [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} + [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} + [\nabla_{\mathbf{Z}}, \mathbf{R}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]] \mathbf{W} + \\
 &+ \mathbf{R}[[\mathbf{X}, \mathbf{Z}], \mathbf{Y}] + \mathbf{R}[[\mathbf{Z}, \mathbf{Y}], \mathbf{X}] + \mathbf{R}[[\mathbf{Y}, \mathbf{X}], \mathbf{Z}] = \\
 &= ([\nabla_{\mathbf{Z}}, [\nabla_{\mathbf{X}}, \nabla_{\mathbf{Y}}]] + [\nabla_{\mathbf{X}}, [\nabla_{\mathbf{Y}}, \nabla_{\mathbf{Z}}]] + [\nabla_{\mathbf{Y}}, [\nabla_{\mathbf{Z}}, \nabla_{\mathbf{X}}]]) \mathbf{W} = \mathbf{o}.
 \end{aligned}$$

Si considerino ora due varietà di RIEMANN isometriche  $\{\mathbb{M}, g\}$  e  $\{\mathbb{N}, \varphi_* g\}$  correlate dal diffeomorfismo  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$ .

In forza della proposizione 12.21 (p. 155) i campi tensoriali di curvatura  $\mathbf{R}_{\mathbb{M}}$  e  $\mathbf{R}_{\mathbb{N}}$  sono legati dalla formula

$$\boxed{\mathbf{R}_{\mathbb{N}} = \varphi_* \mathbf{R}_{\mathbb{M}}}.$$

Basta infatti osservare che

$$\varphi_*(\mathbf{R}_{\mathbb{M}}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}) = \varphi_*(\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) - \varphi_*(\nabla_{\mathbf{Y}} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Z}) - \varphi_*(\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}),$$

e che

$$\varphi_*(\nabla_{\mathbf{X}} \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) = \nabla_{\varphi_* \mathbf{X}} \varphi_*(\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{Z}) = \nabla_{\varphi_* \mathbf{X}} \nabla_{\varphi_* \mathbf{Y}} (\varphi_* \mathbf{Z}),$$

$$\varphi_*(\nabla_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} \mathbf{Z}) = \nabla_{\varphi_* [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} (\varphi_* \mathbf{Z}) = \nabla_{[\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}]} (\varphi_* \mathbf{Z}).$$

Dunque

$$\varphi_*(\mathbf{R}_{\mathbb{M}}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}) = \mathbf{R}_{\mathbb{N}}[\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}] (\varphi_* \mathbf{Z}).$$

Essendo

$$\varphi_*(\mathbf{R}_{\mathbb{M}}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{Z}) = (\varphi_* \mathbf{R}_{\mathbb{M}})[\varphi_* \mathbf{X}, \varphi_* \mathbf{Y}] (\varphi_* \mathbf{Z}),$$

si deduce che  $\mathbf{R}_{\mathbb{N}} = \varphi_* \mathbf{R}_{\mathbb{M}}$ .

Una varietà di RIEMANN con campo tensoriale curvatura identicamente nullo è detta una *varietà piatta*.

Dalla formula precedente segue quindi che se una varietà di RIEMANN è piatta tale sarà anche ogni varietà ad essa isometrica.

**Osservazione 12.3.** Se in particolare la varietà di RIEMANN è lo spazio euclideo allora la derivata covariante coincide con la derivata direzionale e quindi il campo tensoriale curvatura è identicamente nullo.

Dunque lo spazio euclideo  $\{\mathbb{S}, \text{CAN}\}$  con la metrica canonica CAN è piatto.

Sia  $\varphi : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{N}$  un diffeomorfismo tra varietà in  $\mathbb{S}$ . Se la varietà  $\mathbb{N}$  è dotata della metrica canonica euclidea, allora la varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{M}, \varphi^* \text{CAN}\}$  è piatta essendo isometrica alla varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{N}, \text{CAN}\}$  che è piatta.

Nel caso in cui  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{N}$  sono domini nello spazio euclideo  $\{\mathbb{S}, \text{CAN}\}$  il tensore metrico  $\varphi^* \text{CAN}$  è dato da

$$(\varphi^* \text{CAN})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{CAN}(T\varphi[\mathbf{X}], T\varphi[\mathbf{Y}]), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

Posto  $\mathbf{F}_\varphi = T\varphi$  il tensore metrico  $\varphi^* \text{CAN}$  è quindi rappresentato dal tensore di deformazione di PIOLA-GREEN  $\mathbf{C} = \mathbf{F}_\varphi^T \mathbf{F}_\varphi$  che è un tensore di tipo  $(1, 1)$ . Infatti si ha che

$$(\varphi^* \text{CAN})(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \text{CAN}(\mathbf{F}_\varphi \mathbf{X}, \mathbf{F}_\varphi \mathbf{Y}) = \text{CAN}(\mathbf{F}_\varphi^T \mathbf{F}_\varphi \mathbf{X}, \mathbf{Y}), \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

Si è così dimostrato che l'annullarsi del campo tensoriale di curvatura associato al tensore metrico di PIOLA-GREEN è condizione necessaria affinché il campo di deformazione da esso descritto sia congruente (vedasi la proposizione 5.2 (p. 54)).

La dimostrazione della sufficienza può essere condotta richiamando un classico teorema della geometria di RIEMANN il quale assicura che in un intorno di un punto appartenente ad una varietà piatta è possibile determinare un diffeomorfismo locale che mappa l'intorno in una varietà isometrica con tensore metrico costante.

E' inoltre possibile far coincidere tale tensore metrico costante con un prefissato tensore costante componendo il diffeomorfismo con una opportuna mappa affine.

Assumendo quale prefissato tensore costante il tensore della metrica canonica euclidea, si conclude che l'annullarsi del campo tensoriale di curvatura consente, almeno localmente, di determinare un diffeomorfismo (che è l'inverso del diffeomorfismo sopra individuato) il quale genera l'assegnato campo di tensori di deformazione di PIOLA-GREEN. ■

## RIFERIMENTI

1. L. EULER, Principes généraux de l'état d'équilibre des fluides. *Mem. Acad. Sci. Berlin* **11**, 217-273 = Œuvres (2) **12**, 2-53 (1757).
2. L. EULER, Principia motus fluidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **6**, 271-311 = Œuvres (2) **12**, 133-168 (1761).
3. L. EULER, Sectio secunda de principiis motus fluidorum. *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **14**, 270-386 = Œuvres (2) **13**, 73-153 (1761).
4. J.L. LAGRANGE, Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides. *Nouv. mém. Acad. Sci. Berlin.*, 151-198 = Œuvres **4**, 695-748 (1783).
5. A.L. CAUCHY, Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, *Bull. Soc. Philomath.* 9-13 = Œuvres (2) **2**, 300-304 (1823)
6. A.L. CAUCHY, De la pression ou tension dans un corps solide, *Ex. de Mathematique* **2**, 42-56 = Œuvres (2) **7**, 60-78 (1827).
7. A.L. CAUCHY, Sur la condensation et la dilatation des corps solides. *Ex. de Mathematique* **2**, 60-69 = Œuvres (2) **7**, 82-83 (1827).
8. A.L. CAUCHY, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique, *Ex. de Mathematique* **3**, 160-187 = Œuvres (2) **8**, 195-226 (1828).
9. G. PIOLA, La meccanica dei corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni, *Opusc. Mat. Fis. di Diversi Autori*, Giusti, Milano, **2**, 201-236 (1833).
10. G. PIOLA, Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare, *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena*, **21**, 155-321 (1836).
11. G. GREEN, On the propagation of light in crystallized media *Trans. Cambridge Phil. soc.*, **7**, 121-140 = Papers, 293-311 (1841).
12. C.G.J. JACOBI, De determinantibus functionalibus *J. reine angev. Math.*, **22**, 319-359 = Werke, **3**, 393-438 (1841).
13. W. THOMSON (LORD KELVIN), Notes on hydrodynamics (2) On the equation of the bounding surface. *Cambr. dubl. Math. J.* **3**, 89-93 = Papers **1**, 83-87 (1848).
14. G. PIOLA, Intorno alle equazioni fondamentali del movimento di corpi qual-sivoglino, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione, *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena*, **24**, 1-186 (1848).
15. G. KIRCHHOFF, Über die Gleichungen des Gleichgewicht und die Bewegung eines elastischen Körpers bei nicht unendlich Verschiebungen seiner Theile, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien*, **9**, 762-773 (1852).
16. A.J.C.B., DE SAINT VENANT, Mémoire sur la torsion des prismes, *Mém. Divers Savants Acad. Sci. Paris*, **14**, 233-560 (1853).
17. G. KIRCHHOFF, Über das Gleichgewicht eines dünnen elastischen Stabes, *J. Reine. Angew. Math.*, Wien, **56**, 285-313 (1859).
18. G.B. AIRY, On the strains in the interior of beams, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, Giusti, Milano, **153**, 49-80 (1863).
19. J.C. MAXWELL, On reciprocal diagrams in space and their relation to Airy function of stress, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (1) **2**, 58-60 = Papers **2**, 102-104 (1868).
20. J.C. MAXWELL, A Treatise on Electricity and Magnetism, 2 vols, Oxford (1873).

21. H. LAMB, Note on a theorem in hydrodynamics, *Mess. Math.*, (1) **7**, 41-42 (1877).
22. E.J. NANSON, Note on Hydrodynamics, *Mess. Math.*, **7**, 182-185 (1878).
23. E. BELTRAMI, Sull'interpretazione meccanica delle formule di Maxwell, *Mem Acad. Sci. Bologna*, (4) **7**, 1-38 = Opere **4**, 510-512 (1886).
24. E. BELTRAMI, Osservazioni sulla nota precedente, *Atti Acad. Lincei Rend.*, (5) **1**, 141-142 = Opere **4**, 190-223 (1892).
25. G. MORERA, Appendice alla Nota: Sulla soluzione più generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un corpo continuo, *Atti Acad. Lincei Rend.*, (5) **1**, 311-321 = Opere **4**, 233-234 (1892).
26. W. KILLING, Über die Grundlagen der Geometrie, *J. reine angew. Math.*, (4) **109**, 121-186 (1892).
27. J. FINGER, Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aeolotropen und isotropen Substanzen, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien*, (IIa) **103**, 1073-1100 (1894).
28. J. WEINGARTEN, Sulle superfici di discontinuità nella teoria dell'elasticità dei corpi solidi, *Rend. Accad. Lincei*, (5) **10**, 57-60 (1901).
29. J. HADAMARD, Leçons sur la Propagation des Ondes et les Équations de l'Hydrodynamique, (lezioni del 1898-1900) Paris (1903).
30. E. CESÀRO, Sulle formule di Volterra, fondamentali nella teoria delle distorsioni elastiche, *Rend. Napoli*, (3a) **12**, 311-321 (1906).
31. A. KORN, Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche, *Acad. Wiss., München, Math. phys. Kl. Sitz.* **36**, 351-402 (1906).
32. A. KORN, Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de elasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (2) **10**, 156-269.
33. A. KORN, Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen. *Akad. Umiejet. Kracow Bulletin Int.* 705-724 (1909).
34. E. ALMANSI, Sulle deformazioni finite dei corpi elastici isotropi I, *Rend. Lincei* (5A) **20**, 705-714, (1911).
35. V. VOLTERRA, Lecons sur les fonctions de ligne, Gauthier Villars, Paris, (1913).
36. A.E.H. LOVE, A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge, University Press, (1927).
37. J. VON NEUMANN, Some matrix-inequalities and metrization of matric space, *Tomsk Univ. Rev.*, **I**, 286-300, (1937). Ristampato in J. Von Neumann Collected Works, Vol.IV, 205-219, Pergamon Press, (1962).
38. G. GRIOLI, Una proprietà di minimo nella cinematica delle deformazioni finite, *Boll. Un. Mat. Ital.*, (2) **2**, 452-455 (1940).
39. I.S. SOKOLNIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, 2nd Ed. McGraw-Hill, New York (1956).
40. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, The Classical Field Theories, *Encyclopædia of Physics*, vol. III/1, 226-793 Springer-Verlag, Berlin (1960).
41. A.C. ERINGEN, Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, New York (1962).

42. M.E. GURTIN, A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **13**, 321-329 (1963).
43. C. TRUESDELL, W. NOLL, Non-Linear Field Theories of Mechanics, *Encyclopædia of Physics*, vol. III/3, , 1-591 Springer-Verlag, New York (1965).
44. C. TRUESDELL, The Elements of Continuum Mechanics, Springer-Verlag, New York (1966).
45. Y. CHOQUET-BRUHAT, Géométrie Différentielle et Système Extérieurs, Dunod, Paris (1968).
46. J. DIEUDONNÉ, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York (1969).
47. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIa/2, , 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).
48. G. FICHERA, Existence Theorems in Elasticity, *Encyclopædia of Physics* vol. VI/a, 347-389 Springer-Verlag, New York (1972).
49. L.C. MARTINS - P. PODIO GUIDUGLI, A variational approach to the polar decomposition theorem, *Rend. Accad. Naz. Lincei (Classe Sci. Fis. Mat. Natur.)*, **66** (6) 487-493, (1979).
50. M. SPIVAK, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol.I-V, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1979).
51. M.E. GURTIN, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, San Diego (1981).
52. J.E. MARSDEN AND T.J.R. HUGHES, Mathematical Foundation of Elasticity, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1983).
53. R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, T. RATIU, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, second edition, Springer Verlag, New York (1988).
54. F. BREZZI, M. FORTIN, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Verlag, New York (1991).
55. E. SERNESI, *Geometria 2*, Bollati Boringhieri, Torino (1994).
56. J.L. KOSZUL, Selected Papers of J.L. Koszul, World Scientific, New York (1994).
57. P. PETERSEN, Riemannian Geometry, Springer-Verlag, New York (1998).
58. G. ROMANO, M. DIACO, S. DE CICCO, On the polar decomposition as a minimum problem, *Research report* (2001).
59. G. ROMANO, Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2001).
60. G. ROMANO, Theory of structural models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2001).
61. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Napoli (2001).
62. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo II, Hevelius, Benevento (2001).

## II – MECCANICA DEL CONTINUO

In questo capitolo sono illustrate le nozioni fondamentali della meccanica dei corpi continui. La trattazione è basata sulla dualità tra enti statici e cinematici. Lo spazio dei cinematicismi è definito in modo che le deformazioni tangentì indotte dai cinematicismi siano distribuzioni costituite da una parte regolare di quadrato integrabile sul dominio della struttura e da una parte singolare dovuta a discontinuità dei cinematicismi in corrispondenza del contorno di una suddivisione finita del dominio. Dotato lo spazio dei cinematicismi di una adeguata struttura topologica, i sistemi di forze sono introdotti quali enti duali dei cinematicismi e l'interazione tra di essi è detta potenza virtuale. Gli stati di sforzo interno ad un corpo, duali delle deformazioni tangentì, sono definiti, prima in modo intuitivo e poi per via rigorosa, come campi tensoriali che forniscono una rappresentazione parametrica dei sistemi di forze in equilibrio. Il risultato fondamentale è costituito dalla dimostrazione dell'equivalenza tra il principio dei lavori virtuali e la condizione di equilibrio. La dimostrazione è basata sulla seconda diseguaglianza di KORN e sul teorema dell'immagine chiusa di BANACH. La formula di trasformazione integrale di GEORGE GREEN fornisce lo strumento analitico fondamentale per passare dalla formulazione variazionale alle equazioni differenziali con relative condizioni al contorno. Si dimostra infine che la condizione di congruenza di un campo di deformazioni tangentì può essere formulata in termini variazionali imponendo l'ortogonalità agli stati di coazione.

### 1. GENERALITÀ

La meccanica dei continui studia le proprietà di equilibrio di corpi costituiti da materiali in cui le forze di aggregazione tra le particelle microscopiche si oppongono alle azioni applicate, inclusa quelle d'inerzia, che tendono a distorcerne la configurazione.

Al livello macroscopico si sperimenta un comportamento in cui il corpo, pur distorcendosi, mantiene la sua integrità sotto un campo sufficientemente ampio di sollecitazioni.

E' importante osservare che la delimitazione di un corpo continuo è in genere del tutto arbitraria, in quanto essa viene effettuata considerando una superficie ideale che delimita l'oggetto dell'indagine meccanica. Ogni parte di un corpo continuo ottenuta con un sezionamento ideale è quindi a sua volta un corpo continuo ed ogni corpo continuo può essere parte di un corpo continuo che lo include. Nella modellazione meccanica dei corpi continui le proprietà macroscopiche sono simulate mediante assiomi caratteristici.

- Un primo assioma concerne la definizione dei sistemi di forze agenti su di un corpo. Si parte dal considerare campi di (pseudo)velocità che il corpo può intraprendere in un qualsiasi processo evolutivo di tipo puramente geometrico (virtuale) descritto da un parametro reale. I campi di (pseudo)velocità sono detti cinematismi, spostamenti tangenti o spostamenti virtuali. I sistemi di forze sono definiti come enti duali dei cinematismi e cioè enti capaci di compiere in corrispondenza di essi potenza virtuale. La potenza virtuale è una forma bilineare definita sulle coppie forze-cinematismi.
  - Un secondo assioma descrive a livello macroscopico le forze di legame come coppie di azioni opposte che si evidenziano solo in corrispondenza di cinematismi che tendono a produrre distacchi o sovrapposizioni tra le particelle. Il legame di aggregazione viene simulato come un vincolo che impone una continuità dei valori al contorno dei campi cinematici.
  - Un terzo assioma definisce la proprietà di equilibrio di un sistema di forze. A tal fine si considerano i cinematismi rigidi, caratterizzati dalla proprietà di non indurre nel corpo velocità di variazione delle distanze mutue tra le particelle. Le forze agenti sul corpo, ivi comprese quelle d'inerzia, sono bilanciate da quelle di legame. Poichè queste ultime non compiono potenza virtuale quando non si verificano velocità di variazione delle distanze mutue tra le particelle, anche le forze agenti sul corpo devono essere indifferenti ai cinematismi rigidi.
- E' questa la motivazione fisica della definizione assiomatica di equilibrio di un sistema di forze che, come si vedrà, esprime la loro indifferenza ai cinematismi rigidi. I cinematismi discontinui vengono utilizzati quali campi di prova per valutare l'entità delle forze di legame in equilibrio con le forze attive.

Le azioni che si esercitano su di un corpo possono avere origine fisica diversa e dipendere da agenti esterni di varia natura. La forza di gravità è un'azione cui sono sottoposti tutti i corpi materiali oggetto di sperimentazione. Essa è una azione a distanza, indipendente dal contatto con altri corpi e tutte le azioni indotte da campi, gravitazionali, elettrici o magnetici appartengono a questa categoria. Altre azioni sono invece dovute alla contiguità con altri corpi, solidi, liquidi o gassosi che interagiscono col corpo in esame in modo complesso attraverso le superfici di frontiera. I sistemi di forze sono definiti ed analizzati mediante una formulazione assiomatica che si propone di individuarne, al di là delle differenti origini, le proprietà influenti nel determinare le condizioni di equilibrio, statico o dinamico della configurazione del corpo su cui agiscono. Secondo l'idea di D'ALEMBERT<sup>43</sup> e di EULER<sup>44</sup>, tra i sistemi di forze vengono incluse anche le forze d'inerzia che nascono quando un corpo dotato di massa si muove di moto accelerato rispetto ad un riferimento privilegiato detto inerziale. La forza d'inerzia per unità di volume è pari all'opposto del vettore accelerazione moltiplicato per la densità. In questo ordine di idee viene sviluppata la teoria dell'equilibrio dei corpi continui.

---

<sup>43</sup> JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) *Traité de dynamique*, Paris 1743.

<sup>44</sup> LEONHARD EULER (1707-1783) *Formulae generales...* [3], San Pietroburgo 1776.

## 2. SPAZIO CINEMATICO

Sia  $\mathbb{T}_B$  un corpo continuo che occupa in un fissato istante di tempo una configurazione  $\Omega$  nello spazio euclideo.

- I *cinematismi* di  $\mathbb{T}_B$  in  $\Omega$  sono i campi vettoriali di *velocità* con cui il corpo  $\mathbb{T}_B$  transita per  $\Omega$  nel corso di un immaginario processo evolutivo.

I cinematismi sono anche denominati con i sinonimi di *velocità tangenti* o *velocità virtuali*. Se il parametro evolutivo è adimensionale, i cinematismi hanno la dimensione di una lunghezza e sono detti *spostamenti tangenti* o *spostamenti virtuali*.

Quest'ultima terminologia è quella adottata nella maggioranza dei testi di Scienza delle Costruzioni.

**Osservazione 2.1.** Si noti che i termini velocità tangenti o spostamenti tangenti evidenzia il fatto che questi campi vettoriali hanno per dominio la configurazione cui si riferiscono e per immagine una sezione del fibrato tangente alla varietà ambiente.

Se la varietà ambiente in cui si posiziona la struttura è uno spazio affine (quale quello euclideo) allora gli spostamenti tangenti appartengono allo spazio lineare delle traslazioni associato allo spazio affine. A tale spazio lineare appartengono anche gli spostamenti definiti come differenza di due posizioni.

Nel caso generale in cui la varietà ambiente non è uno spazio affine non è possibile definire gli spostamenti in quanto non è disponibile uno spazio delle traslazioni. Gli spostamenti tangenti (o virtuali) sono invece ben definiti negli spazi tangenti alla varietà ambiente.

La fondamentale differenza concettuale ed operativa tra spostamenti e spostamenti virtuali è talvolta oscurata nei testi di meccanica delle strutture in cui gli spostamenti virtuali sono definiti in termini di spostamenti. Tali definizioni sono possibili solo se lo spazio delle configurazioni è euclideo ed appaiono comunque non opportune per la confusione derivante dalla peculiarità del contesto geometrico euclideo.

Per evidenziare la differenza tra le nozioni di spostamento e di spostamento virtuale, si consideri un filo il cui spazio ambiente è una sfera.

Ignorando che la sfera sia immersa nello spazio euclideo tridimensionale, non è possibile definire lo spostamento del filo nel passaggio da una configurazione ad un'altra sulla sfera.

E' invece possibile considerare campi di spostamento virtuale del filo in ciascuna delle configurazioni che esso può assumere. I campi di spostamento virtuale sono campi vettoriali aventi valori nei piani tangenti alla sfera.

Si noti a tal proposito che i vettori tangenti possono essere definiti anche ignorando che la sfera sia immersa nello spazio euclideo tridimensionale, facendo riscorso ad un atlante di carte locali che mappano porzioni della sfera nello spazio lineare  $\mathbb{R}^2$ .

La definizione formale dei campi di spostamento virtuale è fornita nella sezione IV.13 (p. 477) con riferimento al caso generale in cui sia la struttura che lo spazio ambiente sono varietà differenziabili. ■



L'insieme dei cinematismi è dotato di una naturale struttura di spazio vettoriale ed è detto lo *spazio cinematico* di  $\mathbb{T}_B$  in  $\Omega$ .

Le operazioni lineari nello spazio cinematico sono definite localmente in termini delle corrispondenti operazioni lineari tra i valori locali dei campi cinematici.

La cinematica di un corpo continuo costituisce il quadro fondamentale per l'analisi dei fenomeni meccanici in quanto sono precisamente le quantità cinematiche (posizioni, velocità ed accelerazioni) ad essere l'oggetto diretto di misurazioni sperimentali.

Per valutare quale sia il contesto funzionale più adeguato allo sviluppo di una teoria meccanica si premettono le seguenti considerazioni.

L'analisi della deformazione di un corpo continuo  $\mathbb{T}_B$  sviluppata nel capitolo I è stata basata sull'assunzione che la configurazione occupata da  $\mathbb{T}_B$  in  $\mathbb{S}$  sia un dominio (connesso)  $\Omega$  e che i cinematismi siano campi vettoriali di classe  $C^1(\overline{\Omega})$ .

La definizione dello spazio dei cinematismi di un corpo continuo  $\mathbb{T}_B$  va però ampliata per garantire che la cinematica sia riproducibile su ogni sottocorpo di  $\mathbb{T}_B$ . Questa richiesta si traduce nel seguente assioma.

*Axioma di riproducibilità.*

- Allo spazio cinematico devono appartenere campi discontinui che consentano di poter rappresentare cinematismi relativi tra gli elementi di una arbitraria suddivisione finita di  $\Omega$ .

L'idea alla base di tale richiesta è perfettamente analoga a quella espressa dal *principio di sezionamento* dovuto ad EULER ed a CAUCHY e che sarà richiamato nella sezione 6 (p. 201) ed in forma classica nel capitolo IV.

La richiesta di riproducibilità della cinematica è una naturale conseguenza del fatto che la scelta del dominio  $\Omega$ , il quale definisce dal punto di vista geometrico l'oggetto della indagine meccanica, è del tutto arbitraria.

Ne segue che la caratterizzazione cinematica di una configurazione  $\Omega$  deve essere riproducibile su ogni sottodominio di  $\Omega$ .

L'altra richiesta, di tipo squisitamente matematico, consiste nel definire lo spazio cinematico in modo che sia possibile far ricorso alla teoria degli spazi di HILBERT<sup>45</sup> per poter far riferimento ad una struttura geometrica simile a quella degli spazi euclidei e per conseguire i fondamentali risultati di esistenza.

Nel seguito sono fornite le nozioni di base sugli spazi di HILBERT e di SOBOLEV che consentono di inquadrare nel contesto funzionale appropriato la teoria dell'equilibrio di un mezzo continuo.

Il lettore interessato ad approfondimenti potrà trovare in [49] ulteriori elementi di Analisi Lineare. Per una trattazione dettagliata della teoria dei modelli strutturali si rinvia a [48] e per le nozioni propedeutiche di Analisi Lineare a [47].

---

<sup>45</sup> DAVID HILBERT (1862-1943). Il matematico tedesco più illustre del XX secolo. Fondamentali i suoi contributi in svariati campi dell'analisi e della geometria.

## 2.1. Spazi di Hilbert

- Uno spazio vettoriale  $H$  sul campo reale è detto uno *spazio pre-HILBERT* se sul prodotto cartesiano  $H \times H$  è definita una forma bilineare  $(\cdot, \cdot)$ , simmetrica e definita positiva:

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 & \forall \mathbf{u} \in H, \\ (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o}. \end{cases}$$

La forma  $(\cdot, \cdot)$  è detta il *prodotto interno* in  $H$ . Essa induce in  $H$  una *norma* definita da

$$\|\mathbf{u}\| := \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}.$$

La norma soddisfa le proprietà caratteristiche

$$\begin{cases} \|\mathbf{u}\| \geq 0 & \forall \mathbf{u} \in H, \\ \|\mathbf{u}\| = \mathbf{o} \iff \mathbf{u} = \mathbf{o} & \forall \mathbf{u} \in H, \\ \|\alpha \mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\| & \forall \mathbf{u} \in H, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \quad \text{disegualanza triangolare}. \end{cases}$$

In uno spazio normato  $H$  una successione  $\{\mathbf{u}_n\} \in H$  che soddisfa la proprietà

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_m\|_H \rightarrow 0.$$

è detta una *successione di CAUCHY*.

- Se ogni successione di CAUCHY converge ad un elemento dello spazio  $H$  lo spazio normato è detto *completo*.
- Uno spazio normato completo è detto uno *spazio di BANACH*.
- Uno spazio pre-HILBERT  $H$  è detto uno *spazio di HILBERT* se è *completo* rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

Un qualsiasi spazio con prodotto interno (cioè pre-HILBERT) può essere completato aggiungendo ad i suoi elementi i limiti delle successioni di CAUCHY. Lo spazio di HILBERT così definito si dice ottenuto per *completamento*.

Si noti l'analogia tra la definizione di spazio lineare completo e quella usuale dello spazio dei numeri reali. Lo spazio dei numeri reali si ottiene infatti completando lo spazio dei razionali mediante l'aggiunta dei numeri irrazionali e questi ultimi sono limiti di successioni di CAUCHY di razionali.

La proprietà di completezza è essenziale per conseguire i principali risultati di esistenza. Per tal motivo la teoria dell'equilibrio che sarà sviluppata nel seguito di questo capitolo farà riferimento a variabili di stato costituite da campi che appartengono a spazi di HILBERT.



## 2.2. Spazi di Sobolev

Per pervenire alla definizione dello spazio cinematico nella configurazione  $\Omega$  si osservi innanzitutto che la richiesta minimale da porre ai cinematismi è che essi siano campi di quadrato integrabile (secondo LEBESGUE) nel dominio  $\Omega$  e cioè siano tali che

$$\int_{\Omega} \|\mathbf{v}\|^2 dv < +\infty.$$

- Lo spazio dei campi vettoriali di quadrato integrabile in  $\Omega$  è uno spazio di HILBERT e sarà denotato col simbolo  $H(\Omega)$ .

Si osservi ora che la deformazione tangente associata ad un cinematismo è valutata tramite operazioni di derivazione.

Poichè i cinematismi di  $H(\Omega)$  in generale non sono derivabili in senso classico è necessario estendere la definizione di derivata introducendo la nozione di *derivata generalizzata o distribuzionale*.

Per il lettore interessato ad approfondire l'argomento, elementi della teoria delle distribuzioni sono illustrati in [49] dove sono riportati anche alcuni riferimenti bibliografici. Nel seguito si illustrano le proprietà essenziali delle derivate distribuzionali seguendo una impostazione *naïve* che non richiede nozioni di topologia.

E' conveniente adottare la seguente notazione.

Sia  $\Omega$  un dominio di uno spazio euclideo di dimensione  $d$ .

Un *multi-indice*  $p$  è una lista  $p = \{p_1, \dots, p_d\}$  di ordine  $d$  le cui componenti sono numeri interi. Si adotta l'usuale notazione abbreviata

$$|p| := \sum_{i=1}^d p_i, \quad D^p := \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_d^{p_d}}.$$

Ad esempio, nel caso di un dominio bidimensionale, si ha che  $d = 2$  e ponendo rispettivamente  $p = \{2, 0\}$ ,  $p = \{1, 1\}$ ,  $p = \{0, 2\}$  risulta  $|p| = p_1 + p_2 = 2$ , e si ottengono gli operatori alle derivate parziali del secondo ordine

$$D^{\{2,0\}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad D^{\{1,1\}} := \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad D^{\{0,2\}} := \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}.$$

- La *distribuzione* associata ad un campo di quadrato integrabile  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  è il funzionale lineare definito da

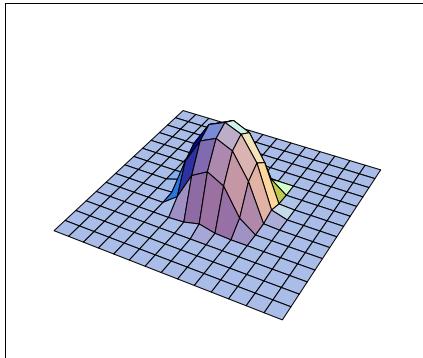
$$\mathbb{T}_{\mathbf{v}}(\varphi) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varphi dv, \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega),$$

dove  $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega) = C_o^\infty(\Omega)$  è un campo vettoriale continuo con tutte le derivate parziali di qualsiasi ordine su  $\Omega$  e che si annulla in una striscia attorno alla frontiera di  $\Omega$ .

Tali funzioni sono dette più precisamente *funzioni a supporto compatto* in  $\Omega$  (si ricordi che  $\Omega$  è un aperto in  $\mathbb{S}$ ), intendendo per supporto la chiusura dell'insieme su cui la funzione è non nulla.

- I campi vettoriali  $\varphi \in \mathbb{D}(\Omega)$  sono anche detti *campi di prova*.

Un esempio di funzione in  $C_o^\infty(\Omega)$  è stato illustrato nella sezione I.1.2 (p. 5) ed è qui di seguito richiamato.



Un campo scalare  $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$  può ottenersi ponendo  $\varphi(\xi) = m_x(\xi)$  con  $m_x : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  funzione scalare definita da:

$$m_x(\xi) = \begin{cases} \exp\left[\frac{1}{\|\xi - x\|^2 - a^2}\right], & \xi \in P_x \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

in cui  $a$  è il raggio dell'intorno sferico  $P_x$  di  $x$ .

Ad ogni distribuzione  $\mathbb{T}_v$  corrisponde univocamente un campo  $v \in H(\Omega) = L^2(\Omega)$  in quanto si ha che

$$\mathbb{T}_v = \mathbf{o} \Rightarrow v = \mathbf{o}.$$

La dimostrazione di tale implicazione è basata sulla seguente proprietà che consente di estendere il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni a campi di  $L^2(\Omega)$ . La dimostrazione può trovarsi ad esempio in [41].

**Proposizione 2.1. Densità.** *Il sottospazio lineare  $C_o^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  è denso in  $L^2(\Omega)$ . Ciò significa che ogni campo  $v \in L^2(\Omega)$  può essere approssimato quanto si voglia da un campo  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$  nella norma di  $L^2(\Omega)$  e cioè in media quadratica. Dato  $v \in L^2(\Omega)$  si ha quindi che*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in C_o^\infty(\Omega) : \|v - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

La proprietà di densità può anche enunciarsi affermando che la chiusura di  $C_o^\infty(\Omega)$  in  $L^2(\Omega)$  coincide con  $L^2(\Omega)$ .  $\square$

L'implicazione  $\mathbb{T}_v = \mathbf{o} \Rightarrow v = \mathbf{o}$  è una conseguenza della proposizione 2.1 osservando che:

- Il funzionale lineare  $\mathbb{T}_v$  può essere esteso ad un funzionale continuo su  $L^2(\Omega)$ . La continuità è implicata dalla diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ che si scrive

$$|\mathbb{T}_v(\varphi)|^2 = \left| \int_{\Omega} v \cdot \varphi \, dv \right|^2 \leq \int_{\Omega} \|v\|^2 \, dv \int_{\Omega} \|\varphi\|^2 \, dv,$$

per ogni  $v, \varphi \in L^2(\Omega)$ .



- Se una funzione continua si annulla su un sottosieme denso di uno spazio metrico essa è nulla sull'intero spazio.

Ne segue che

$$\mathbb{T}_v(\varphi) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varphi \, dv = 0, \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{o}.$$

Si consideri ora la derivazione di ordine 1 in direzione dell'asse coordinato  $1 \leq k \leq 3$ , così che il multi-indice  $p$  ha modulo unitario con l'unità nella  $k$ -esima posizione.

Un'applicazione formale della formula di GAUSS fornisce l'egualità

$$\int_{\Omega} (D^p \mathbf{v}) \cdot \varphi \, dv = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot D^p \varphi \, dv + \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \varphi n_k \, dv = - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot D^p \varphi \, dv,$$

in quanto  $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$  si annulla sul contorno  $\partial\Omega$ .

L'idea è quella di assumere tale identità formale come definizione della

- *derivata generalizzata o distribuzionale* del campo vettoriale  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$ .

Ciò consente di spostare l'operazione di derivazione dal campo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  sui campi vettoriali  $\varphi \in C_o^\infty(\Omega)$ .

- La *derivata distribuzionale* di multi-indice  $p$  del campo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  è quindi in generale definita da

$$(D^p \mathbb{T}_v)(\varphi) := (-1)^{|p|} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot D^p \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Dalla definizione risulta che:

- Un campo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  è derivabile indefinitamente nel senso delle distribuzioni.
- Se un campo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  è derivabile in senso classico allora la derivata distribuzionale coincide con quella classica.

Una derivata distribuzionale è detta di *quadrato integrabile* su  $\Omega$  se esiste un campo  $\mathbf{w} \in H(\Omega)$  di quadrato integrabile tale che

$$(D^p \mathbb{T}_v)(\varphi) := (-1)^{|p|} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot D^p \varphi \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{w} \cdot \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Una classe importante di spazi di HILBERT è la seguente.



- Uno spazio di SOBOLEV<sup>46</sup> è costituito da campi definiti in un dominio  $\Omega$  cui è richiesto di essere di quadrato integrabile in  $\Omega$  insieme a tutte le derivate parziali distribuzionali sino ad un'ordine prefissato. Se tale ordine massimo è  $m$  lo spazio di SOBOLEV si denota con  $W^m(\Omega)$ .

La dimostrazione del prossimo risultato, che fornisce un'utile caratterizzazione alternativa degli spazi di SOBOLEV, può trovarsi in [36] ed è dovuta a MEIERS e SERRIN [25].

**Proposizione 2.2. Completamento.** *Per ogni dominio  $\Omega$  il sottospazio lineare definito da*

$$\{\mathbf{u} \in C^m(\Omega) : \|\mathbf{u}\|_m < +\infty\}.$$

*è denso in  $W^m(\Omega)$ . Ciò significa che ogni campo  $\mathbf{v} \in W^m(\Omega)$  può essere approssimato quanto si voglia da un campo  $\varphi \in C^m(\Omega)$  nella norma di  $W^m(\Omega)$ . Dato  $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)$  si ha quindi che*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega) : \|\mathbf{v} - \varphi_\varepsilon\|_{W^m(\Omega)} < \varepsilon.$$

*Denotando con  $H^m(\Omega)$  il completamento di  $C^m(\Omega)$  nella topologia indotta dalla norma di  $W^m(\Omega)$  si ha che  $H^m(\Omega) = W^m(\Omega)$ .  $\square$*

Un risultato più forte, di fondamentale importanza per la definizione della traccia al contorno di un campo di  $W^m(\Omega)$ , è il seguente (vedi [36]).

**Proposizione 2.3. Completamento di campi limitati.** *Se il dominio  $\Omega$  gode della proprietà del segmento, allora lo spazio  $C^m(\overline{\Omega})$  è denso in  $W^m(\Omega)$ .  $\square$*

La proprietà del segmento richiede *grossso modo* che il dominio  $\Omega$  non presenti cuspidi. Si noti che la compattezza di  $\overline{\Omega}$  implica che i campi di  $C^m(\overline{\Omega})$  sono limitati e dunque che

$$C^m(\overline{\Omega}) \subseteq \{\mathbf{u} \in C^m(\Omega) : \|\mathbf{u}\|_m < +\infty\}.$$

Nel seguito si assumerà che il risultato della proposizione 2.3 sia valido e quindi che il completamento di  $C^m(\overline{\Omega})$  nella norma di  $W^m(\Omega)$ , denotato ancora con  $H^m(\Omega)$ , coincida con  $W^m(\Omega)$ .

---

<sup>46</sup> SERGEI LVOVICH SOBOLEV (1908-1989). Matematico russo allievo di VLADIMIR IVANOVICH SMIRNOV (1887-1974) all'Università di Lenigrado. Con SMIRNOV si dedicò alla soluzione dell'equazione delle onde ed insieme svilupparono una teoria completa delle onde di superficie di LORD RAYLEIGH (1842-1919). Nel 1934 l'Istituto di Matematica intitolato a VLADIMIR ANDREEVICH STEKLOV (1864-1926) fu trasferito a Mosca e nel 1935 SOBOLEV divenne il direttore del Dipartimento della Teoria delle Equazioni Differenziali dell'Istituto. Negli anni 1930 SOBOLEV introdusse l'idea di funzione generalizzata poi ulteriormente sviluppata da LAURENT SCHWARTZ (1915-) e ISRAIL MOISEEVIC GELFAND (1913-). SOBOLEV è stato membro dell'Accademia Sovietica delle Scienze, dell'Accademia delle Scienze di Francia e dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

### 2.3. Valori al contorno

In generale i campi vettoriali  $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)$  non sono necessariamente continui in  $\overline{\Omega}$  insieme alle loro derivate parziali fino all'ordine  $m - 1$ . Ciò nonostante è possibile dare un significato generalizzato al valore al contorno  $\partial\Omega$  dei campi di  $H^m(\Omega)$  e delle loro derivate lungo la normale al contorno fino all'ordine  $m - 1$ .

■ L'operatore di traccia  $\Gamma$  è l'operatore lineare che ad ogni campo di  $C^m(\overline{\Omega})$  assegna il valore al contorno delle derivate normali fino all'ordine  $m - 1$ .

Per  $m = 1$  si dimostra infatti che sussiste la seguente diseguaglianza (si veda [47])

$$\|\Gamma\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in C^1(\overline{\Omega}).$$

Per densità la diseguaglianza vale anche per ogni  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  e l'operatore lineare traccia può essere esteso ad un operatore limitato  $\Gamma \in L(H^1(\Omega); L^2(\partial\Omega))$ .

Un analogo risultato vale per l'operatore

$$\Gamma_k \in L(H^m(\Omega); H^{m-k-1}(\partial\Omega)),$$

che ad ogni campo  $\mathbf{v} \in H^m(\Omega)$  associa la derivata normale di ordine  $k$  sul contorno  $\partial^k \mathbf{v} / \partial n^k$ , con  $k < m$ .

Vale infatti la diseguaglianza

$$\|\Gamma_k \mathbf{v}\|_{H^{m-k-1}(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega).$$

L'operatore di traccia è in generale definito da

$$\Gamma\mathbf{v} = \{\Gamma_0\mathbf{v}, \Gamma_1\mathbf{v}, \dots, \Gamma_{m-1}\mathbf{v}\}, \quad \forall \mathbf{v} \in H^m(\Omega).$$

L'immagine  $\text{Im } \Gamma$  dell'operatore  $\Gamma$  è dunque lo spazio lineare costituito dalle  $m$ -uple di campi al contorno che sono le tracce di ordine  $0 \leq k \leq m-1$  dei campi di  $H^m(\Omega)$ .

E' possibile identificare  $\text{Im } \Gamma$  con lo spazio quoziante

$$\partial H^m(\Omega) := H^m(\Omega) / \text{Ker } \Gamma,$$

i cui elementi sono le classi di equivalenza costituite dalle varietà lineari di campi in  $H^m(\Omega)$  aventi lo stesso valore al contorno delle derivate normali fino all'ordine  $k$ .

Tali varietà lineari sono chiuse in  $H^m(\Omega)$  in quanto la continuità degli operatori di traccia  $\Gamma_k \in L(H^m(\Omega); H^{m-k-1}(\partial\Omega))$  assicura che è chiuso il sottospazio lineare

$$\text{Ker } \Gamma = \bigcap_{k=0}^{m-1} \text{Ker } \Gamma_k.$$

Ne segue che lo spazio  $\partial H^m(\Omega)$  è uno spazio di HILBERT per la norma che misura la distanza tra due varietà lineari parallele, definita da

$$\|\Gamma\mathbf{v}\|_{\partial H^m(\Omega)} := \inf \left\{ \|\mathbf{u}\|_{H^m(\Omega)} \mid \mathbf{u} \in H^m(\Omega) : \Gamma\mathbf{u} = \Gamma\mathbf{v} \right\},$$

L'identificazione tra  $\text{Im } \Gamma$  e  $H^m(\Omega) / \text{Ker } \Gamma$  mostra che l'operatore di traccia  $\Gamma \in L(H^m(\Omega); \partial H^m(\Omega))$  è suriettivo in quanto coincidente con l'iniezione canonica di  $H^m(\Omega)$  in  $H^m(\Omega) / \text{Ker } \Gamma$ .

Analoghe definizioni e risultati sussistono per campi vettoriali e tensoriali.

#### 2.4. Gradiente e divergenza distribuzionali

Se  $\mathbf{T} \in C^1(\Omega)$  è un campo tensoriale, considerando campi vettoriali di prova indefinitamente derivabili ed a supporto compatto  $\mathbf{v} \in \mathbb{D}_H(\Omega)$ , la formula di GREEN per l'operatore gradiente fornisce la relazione

$$-\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{T} : (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{D}_H(\Omega).$$

L'operatore differenziale lineare

$$-\operatorname{div} : C^1(\Omega)^9 \mapsto C^0(\Omega)^3,$$

è detto l'operatore *aggiunto formale* dell'operatore differenziale

$$\operatorname{grad} : C^1(\Omega)^3 \mapsto C^0(\Omega)^9.$$

In via complementare se  $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$  è un campo vettoriale, considerando campi tensoriali di prova indefinitamente derivabili ed a supporto compatto  $\mathbf{T} \in \mathbb{D}_H(\Omega)$ , si ha che

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dv = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv = \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_H(\Omega).$$



In generale sia

- $\mathcal{H}(\Omega)$  lo spazio dei campi tensoriali di quadrato integrabile nel dominio  $\Omega$ .

Allora

- La *divergenza distribuzionale* di un campo tensoriale  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  è definita da

$$(\mathbb{B}'_o \mathbf{T})(\mathbf{v}) = (\operatorname{div} \mathbb{T}_{\mathbf{T}})(\mathbf{v}) := - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{T} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{D}_H(\Omega).$$

- Il *gradiente distribuzionale* di un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  è definito da

$$(\mathbb{B} \mathbf{v})(\mathbf{T}) = (\operatorname{grad} \mathbb{T}_{\mathbf{v}})(\mathbf{T}) := - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_H(\Omega).$$



## 2.5. Cinematismi Green-regolari

■ La *deformazione tangente distribuzionale*

$$\mathbb{B}\mathbf{v} = \text{sym grad } \mathbb{T}_{\mathbf{v}} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}(\Omega)$$

associata ad un cinematismo di quadrato integrabile  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  è definita da

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{v}, \mathbf{T} \rangle := \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym},$$

dove  $\mathbf{B}'_o = -\text{div} : C^1(\Omega)^6 \mapsto C^0(\Omega)^3$ .

■ La deformazione tangente distribuzionale  $\mathbb{B}\mathbf{v} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}(\Omega)$  è detta di quadrato integrabile in  $\Omega$  se esiste un campo tensoriale simmetrico  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}(\Omega)$  tale che

$$\langle \mathbb{B}\mathbf{v}, \mathbf{T} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{D} : \mathbf{T} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

Nel formulare un modello di struttura continua, dovendo ammettere che i cinematismi possano essere discontinui, in osservanza dell'assioma di riproducibilità, si richiede che ai cinematismi corrisponda, almeno a pezzi in  $\Omega$ , una deformazione tangente distribuzionale di quadrato integrabile.

Ciò significa che affinchè un cinematismo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  sia ammissibile deve esistere una suddivisione  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$  del dominio  $\Omega$  tale che la restrizione del cinematismo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  ad un qualsiasi elemento della suddivisione generi una deformazione tangente distribuzionale di quadrato integrabile.

- La suddivisione  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$  è detta *suddivisione di supporto* del cinematismo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$ .
- I cinematismi che ammettono una suddivisione di supporto sono detti *cinematismi GREEN-regolari*.

Infatti nella sezione 2.6 si mostrerà che la validità della formula di GREEN può essere estesa ai cinematismi GREEN-regolari.

La richiesta di GREEN-regolarità equivale ad assumere che la traccia al contorno dei cinematismi non presenti salti di discontinuità in corrispondenza di interfacce interne agli elementi della suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

La proposizione 2.5 (p. 190) della sezione 2.7 (p. 188) fornisce la dimostrazione dell'equivalenza tra le due proprietà.

Si dà dunque la seguente definizione.

- Lo spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega) \subset H(\Omega)$  è il sottospazio lineare dei cinematicismi di quadrato integrabile su  $\Omega$  che sono GREEN-regolari su  $\Omega$ . Dunque

$$\mathcal{V}(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in H(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega) : \mathbb{B}\mathbf{v}|_P \in \mathcal{H}(\mathcal{P}) \right\},$$

dove  $\mathbf{v}|_P$  è la restrizione di  $\mathbf{v}$  a  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ .

La suddivisione di supporto  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$  del cinematicismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  in generale non è univocamente definita.

- La parte regolare  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  di una deformazione tangente distribuzionale  $\mathbb{B}\mathbf{v} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}(\Omega)$  con  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  è il prodotto cartesiano della famiglia finita di campi di quadrato integrabile  $(\mathbb{B}\mathbf{v})|_{\mathcal{P}} \in \mathcal{H}(\mathcal{P})$  per  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ . Per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  la parte regolare  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  di  $\mathbb{B}\mathbf{v} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}$  è quindi un campo di quadrato integrabile su  $\Omega$ . Si pone

$$(\langle \mathbf{B}\mathbf{v}, \mathbf{T} \rangle) := \int_{\Omega} \mathbf{B}\mathbf{v} : \mathbf{T} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

Lo spazio dei cinematici GREEN-regolari  $\mathcal{V}(\Omega)$  è uno spazio pre-HILBERT con prodotto interno e norma definiti da

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{V}(\Omega)} := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{u}) : (\mathbf{B}\mathbf{v}) \, dv,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \|\mathbf{u}\|^2 \, dv + \int_{\Omega} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|^2 \, dv.$$

- L'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega)\}$  è l'operatore lineare che ad ogni cinematico Green-regolare associa la parte regolare della corrispondente deformazione tangente distribuzionale.

La topologia hilbertiana definita in  $\mathcal{V}(\Omega)$  è la più economica che rende continuo l'operatore cinematico. Si noti che la variabilità della suddivisione di supporto dei cinematicismi rende lo spazio non completo. Se invece si fissa una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ , lo spazio  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$ , costituito dai cinematicismi di  $\mathcal{V}(\Omega)$  aventi  $\mathcal{T}(\Omega)$  quale suddivisione di supporto, è uno spazio di HILBERT, in quanto prodotto cartesiano di spazi di HILBERT (per la dimostrazione si veda [48]).

## 2.6. Formula di Green

In fisica matematica, ed in particolare in meccanica delle strutture, un ruolo fondamentale è svolto dalla classica formula di GREEN la cui dimostrazione è stata fornita nella proposizione I.1.7 (p. 10).

La formula di GREEN per l'operatore  $\text{grad} : \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})^3 \mapsto \mathbf{C}^0(\overline{\Omega})^3$  stabilisce l'identità integrale

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : (\text{grad } \mathbf{v}) \, dv = - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{v}) \, da,$$

dove

- $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  e  $\mathbf{T} : \Omega \mapsto L(V; V)$  sono rispettivamente un campo vettoriale ed un campo tensoriale di classe  $C^1(\overline{\Omega})$ .
- L'operatore lineare  $\mathbf{\Gamma}$  è l'*'operatore dei valori al contorno'* che associa al campo vettoriale  $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})$  la sua restrizione  $\mathbf{\Gamma}\mathbf{v} = \mathbf{v}|_{\partial\Omega}$  al contorno  $\partial\Omega$ .
- L'operatore lineare  $\mathbf{N}$  è l'*'operatore del flusso al contorno'* che associa al campo tensoriale  $\mathbf{T} \in C^1(\overline{\Omega})$  il valore del corrispondente flusso uscente  $\mathbf{NT} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  dal contorno  $\partial\Omega$ , con  $\mathbf{n}$  versore della normale uscente da  $\Omega$ .

La formula di GREEN per l'operatore cinematico  $\mathbf{B} = \text{sym grad}$ , che ad ogni campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  associa la parte simmetrica del gradiente, consiste nell'identità

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : (\mathbf{B}\mathbf{v}) \, dv = - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot (\mathbf{\Gamma}\mathbf{v}) \, da,$$

con  $\mathbf{T} : \Omega \mapsto \text{Sym}(V; V)$  arbitrario campo tensoriale simmetrico di classe  $C^1(\overline{\Omega})$ .

Si noti che la definizione del prodotto interno nello spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$  rende limitato l'operatore cinematico  $\mathbf{B} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathcal{H}(\Omega)$ . Infatti banalmente

$$\| \mathbf{B}\mathbf{u} \|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 \leq \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{V}(\Omega)}^2,$$

essendo per definizione

$$\| \mathbf{u} \|_{\mathcal{V}(\Omega)}^2 = \| \mathbf{u} \|_{H(\Omega)}^2 + \| \mathbf{B}\mathbf{u} \|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2.$$

Si introduca quindi nello spazio dei campi tensoriali simmetrici  $\mathbf{T}, \mathbf{H} \in C^1(\overline{\Omega})^6$  il prodotto interno

$$(\mathbf{T}, \mathbf{H})_{\mathcal{S}(\Omega)} := \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{H} \, dv + \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) : (\mathbf{B}'_o \mathbf{H}) \, dv,$$

e la corrispondente norma

$$\| \mathbf{T} \|_{\mathcal{S}(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \, dv + \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) : (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \, dv.$$

Si ottiene così uno spazio pre-HILBERT che può essere completato per ottenere lo spazio di HILBERT  $\mathcal{S}(\Omega)$  dei campi di *tensori simmetrici GREEN-regolari* definito da

$$\mathcal{S}(\Omega) := \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega) : \mathbf{B}'_o \mathbf{T}|_P \in H(\mathcal{P}) \right\},$$

dove  $\mathbf{T}|_P$  è la restrizione di  $\mathbf{T}$  a  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega)$ .

La definizione del prodotto interno nello spazio  $\mathcal{S}(\Omega)$  rende limitato l'operatore aggiunto formale  $\mathbf{B}'_o : \mathcal{S}(\Omega) \mapsto H(\Omega)$ . Infatti si ha che

$$\| \mathbf{B}'_o \mathbf{T} \|_{H(\Omega)}^2 \leq \| \mathbf{T} \|_{\mathcal{H}(\Omega)}^2 + \| \mathbf{B}'_o \mathbf{T} \|_{H(\Omega)}^2 = \| \mathbf{T} \|_{\mathcal{S}(\Omega)}^2.$$

Si osservi ora che

- La norma nello spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$  è equivalente a quella nello spazio di SOBOLEV  $H^1(\Omega)$  se e solo se l'operatore cinematico è un *operatore di KORN*, se cioè soddisfa la seguente *seconda diseguaglianza di KORN*

$$\| \mathbf{B}\mathbf{u} \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| \mathbf{u} \|_{H(\Omega)} \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega).$$

La diseguaglianza stabilisce che il valor medio quadratico di un cinematicismo e delle sue derivate parziali può essere maggiorato dal valor medio quadratico del cinematicismo e della deformazione tangente ad esso corrispondente.

La limitatezza dell'operatore  $\mathbf{B} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathcal{H}(\Omega)$  e la diseguaglianza di KORN assicurano l'esistenza di due costanti positive  $c, \alpha$  tali che

$$c \| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)} \geq \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{V}(\Omega)} \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega).$$

Poichè ogni campo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  appartiene anche a  $H^1(\mathcal{T}(\Omega))$  è possibile definire i valori al contorno dei campi di  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  e l'operatore suriettivo dei valori al contorno

$$\Gamma \in L \left\{ \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)); \partial \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)) \right\}.$$



Si può quindi concludere che

- Se l'operatore cinematico è un operatore di KORN la formula di GREEN può essere estesa per continuità a campi vettoriali  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  ed a campi tensoriali simmetrici  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega)$ .

Infatti considerando la suddivisione griglia  $\mathcal{T}(\Omega) = \mathcal{T}_v(\Omega) \vee \mathcal{T}_T(\Omega)$  si può applicare la formula di GREEN a ciascuno degli elementi  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$ .

Sommando i contributi di tutti gli elementi si ottiene la seguente

- Espressione generale della *formula di GREEN*

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : (\mathbf{B}\mathbf{v}) \, dv = \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{v} \rangle, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega). \end{cases}$$

La parentesi  $\langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{v} \rangle$  è l'estensione per continuità dell'integrale al contorno

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot (\Gamma\mathbf{v}) \, da,$$

e rappresenta il valore che il funzionale lineare limitato  $\mathbf{N}\mathbf{T} \in \partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))'$  assume in corrispondenza dei valori al contorno  $\Gamma\mathbf{v} \in \partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  su  $\partial\Omega$  (si veda [49] sezione VIII.2.2 (p. 130)).

- Lo spazio  $\partial\mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega)) = \partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))'$ , duale dello spazio dei valori al contorno  $\partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$ , costituisce lo spazio dei sistemi di forze al contorno.

## 2.7. Parte regolare e parte singolare

La formula di GREEN consente di dimostrare che i campi cinematici di  $\mathcal{V}(\Omega)$  sono caratterizzati dalla proprietà che il valore al contorno dei cinematicismi non presenti salti in corrispondenza di interfacce interne agli elementi della suddivisione  $\mathcal{T}_v(\Omega)$ .

Per pervenire a tale risultato basta ovviamente considerare il caso in cui la suddivisione  $\mathcal{T}_v(\Omega)$  consista del singleton costituito dall'intero dominio  $\Omega$  e cioè risulti  $\mathcal{T}_v(\Omega) = \{\Omega\}$ . Si premette un semplice lemma di tipo algebrico.

**Lemma 2.4.** *Sia  $\mathbf{n} \in \mathbf{V}$  un vettore non nullo e  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  il sottospazio lineare dei tensori simmetrici. Allora*

$$(\mathbf{S}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \iff \mathbf{a} = \mathbf{o}.$$

**Dim.** Ponendo  $\mathbf{S} = \mathbf{I}$  si deduce che  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$ . Si ponga quindi  $\mathbf{S} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}$  con  $\mathbf{e} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{n}$  dove  $\alpha, \beta \neq 0$ . Si ha che

$$[(\mathbf{e} \otimes \mathbf{e}) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{a} = 0 \iff (\mathbf{e} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{e} \cdot \mathbf{a}) = \beta \|\mathbf{n}\|^2 \alpha \|\mathbf{a}\|^2 = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

ed il risultato è dimostrato.  $\square$

**Proposizione 2.5. Continuità dei valori al contorno.** *Si consideri un cinematismo di quadrato integrabile  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  al quale corrisponde una deformazione tangente distribuzionale di quadrato integrabile su  $\Omega$ . Allora la traccia al contorno  $\Gamma\mathbf{v} \in \partial\mathcal{V}(\Omega)$  è continua attraverso qualsiasi interfaccia in  $\Omega$ .*

**Dim.** Sia  $\mathcal{T}(\Omega) = \{\Omega^+, \Omega^-\}$  una suddivisione di  $\Omega$  in due elementi separati da un’interfaccia  $\mathcal{S}$ . La deformazione tangente distribuzionale associata al cinematismo  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  ha l’espressione

$$(\mathbb{B}\mathbf{v})(\mathbf{T}) := \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

Applicando la formula di GREEN separatamente agli elementi  $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ , si ottiene

$$\begin{aligned} (\mathbb{B}\mathbf{v})(\mathbf{T}) &:= \int_{\Omega^+} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega^-} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv = \\ &= \int_{\Omega^+} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega^+} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot (\Gamma\mathbf{v}) \, da + \\ &\quad + \int_{\Omega^-} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega^-} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot (\Gamma\mathbf{v}) \, da = \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot [[\Gamma\mathbf{v}]] \, da, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{N}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  con  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^- = -\mathbf{n}^+$  e  $[[\Gamma\mathbf{v}]] = \Gamma\mathbf{v}^+ - \Gamma\mathbf{v}^-$ .

L’ultima eguaglianza è conseguenza del fatto che  $\mathbf{T} = \mathbf{O}$  su  $\partial\Omega$ .

Per ipotesi esiste un campo tensoriale  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}(\Omega) \cap \text{Sym}$  tale che

$$(\mathbb{B}\mathbf{v})(\mathbf{T}) = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$



Eguagliando le due espressioni di  $\mathbb{B}\mathbf{v} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}(\Omega)$  si ottiene

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{S}} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot [[\Gamma\mathbf{v}]] \, da, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

Scegliendo  $\mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega^+) \cap \text{Sym}$  si ha che

$$\int_{\Omega^+} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dv = \int_{\Omega^+} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega^+) \cap \text{Sym}.$$

Quindi, invocando la densità di  $\mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega^+)$  in  $\mathcal{H}(\Omega^+)$ , si evince che  $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{v}$  quasi ovunque in  $\Omega^+$ . Analogamente per  $\Omega^-$ .

Si ha in definitiva che

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot [[\Gamma\mathbf{v}]] \, da = 0, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

La densità di  $\mathbf{N}(\mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym})$  in  $\mathcal{L}^2(\partial\Omega)$  consente di concludere che quasi ovunque su  $\mathcal{S}$  risulta

$$\mathbf{N}\mathbf{T} \cdot [[\Gamma\mathbf{v}]] = 0, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

Dunque, essendo  $\mathbf{N}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ , il lemma 2.4 implica che  $[[\Gamma\mathbf{v}]] = \mathbf{o}$  quasi ovunque su  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Dalla dimostrazione della proposizione 2.5 si deducono immediatamente i seguenti importanti risultati di rappresentazione.

**Proposizione 2.6. Deformazione tangente distribuzionale.** *La deformazione tangente distribuzionale corrispondente ad un cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  è costituita da una parte regolare di quadrato integrabile su  $\Omega$  e da una parte singolare dovuta al salto di discontinuità dei valori al contorno del cinematismo in corrispondenza delle interfacce  $\mathcal{I}_{\mathbf{v}}(\Omega)$  della suddivisione di supporto  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ . Vale la formula di rappresentazione*

$$(\mathbb{B}\mathbf{v})(\mathbf{T}) = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{I}_{\mathbf{v}}(\Omega)} (\mathbf{N}\mathbf{T}) \cdot [[\Gamma\mathbf{v}]] \, da, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega) \cap \text{Sym}.$$

La parte singolare è nulla se e solo se  $[[\Gamma\mathbf{v}]] = \mathbf{o}$  quasi ovunque su  $\mathcal{I}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ .  $\square$



L’analogo risultato concernente i campi di sforzo richiede che il flusso dello stato di sforzo sia di quadrato integrabile sulla frontiera della suddivisione di supporto.

**Proposizione 2.7. Divergenza distribuzionale.** *La divergenza distribuzionale di un campo tensoriale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega)$  tale che  $\mathbf{NT} \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega))$  è costituita da una parte regolare di quadrato integrabile su  $\Omega$  e da una parte singolare dovuta al salto di discontinuità del flusso del campo tensoriale in corrispondenza delle interfacce  $\mathcal{I}_{\mathbf{v}}(\Omega)$  della suddivisione di supporto  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ . Vale la formula di rappresentazione*

$$(\mathbb{B}'_o \mathbf{T})(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{B}'_o \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\Omega)} [[\mathbf{NT}]] \cdot \mathbf{\Gamma v} \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{D}_H(\Omega).$$

*La parte singolare è nulla se e solo se  $[[\mathbf{NT}]] = \mathbf{0}$  quasi ovunque su  $\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\Omega)$*      $\square$

### 3. DUALITA' E POTENZA VIRTUALE

Nello sviluppo di una teoria meccanica è essenziale completare la definizione del modello strutturale introducendo gli enti che interagiscono con i cinematicismi del corpo continuo  $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$  nella configurazione  $\Omega$ .

Tali enti sono per definizione i *sistemi di forze*.

Il termine *sistemi* (di forze) indica che, in generale, gli enti duali dei cinematicismi non sono (o non sono rappresentabili da) campi vettoriali definiti su  $\Omega$ .

La meccanica dei continui è fondata sulla definizione delle proprietà caratteristiche dell’interazione tra sistemi di forze e cinematicismi. In quest’ottica si dà la seguente definizione operativa dei sistemi di forze basata sul concetto di *dualità*.

- I *sistemi di forze* che possono agire sulla configurazione  $\Omega$  del sul corpo  $\mathbb{T}\mathcal{B}$  sono gli *enti duali* dei cinematicismi, sono cioè *funzionali lineari limitati* su  $\mathcal{V}(\Omega)$ . Lo spazio lineare  $\mathcal{F}(\Omega)$  dei sistemi di forze è quindi il duale topologico dello spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$ .
- L’*interazione* scalare tra un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  ed un cinematicismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  del corpo in  $\Omega$  è il valore che il funzionale lineare  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  assume in corrispondenza del cinematicismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  ed è detta la *potenza virtuale* compiuta da  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  per  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ .

La limitatezza dei funzionali lineari  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  significa che sussiste la diseguaglianza

$$| \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle | \leq C \| \mathbf{v} \|_{\mathcal{V}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

ed è equivalente alla proprietà di continuità dell’applicazione lineare  $\mathbf{f} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$  (vedasi ad es. [48]).



Le parentesi  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sono usualmente denominate col termine francese *crochet*.

La richiesta di continuità appare del tutto naturale in quanto assicura che il lavoro virtuale di un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  può rendersi piccolo quanto si vuole facendo interagire il sistema di forze con cinematismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  di norma sufficientemente piccola in  $\mathcal{V}(\Omega)$ .

Lo spazio delle forze  $\mathcal{F}(\Omega)$  è uno spazio normato.

La norma di un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  è la più piccola costante  $C$  che ne definisce la limitatezza ed è quindi data da

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathcal{F}(\Omega)} := \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}(\Omega)}}.$$

Osservando poi che lo spazio duale di uno spazio normato è uno spazio normato completo (vedi ad es. [47]) si deduce che  $\mathcal{F}(\Omega)$  è uno spazio di BANACH.

La notazione  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$  per la potenza virtuale è preferita a quella più usuale  $\mathbf{f}(\mathbf{v})$  perchè consente di tener conto più convenientemente della dipendenza lineare da entrambi gli argomenti.

La funzione  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{F}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$  che ad ogni coppia  $\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\}$  associa la corrispondente potenza virtuale è detta *forma della potenza virtuale*.

Essa è caratterizzata dalle proprietà di *bilinearità* e di *separazione* di seguito definite.

■ La forma potenza virtuale è *bilineare* sullo spazio prodotto  $\mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{F}(\Omega)$ . Ciò significa che è una funzione additiva ed omogenea rispetto ad entrambi gli argomenti.

La proprietà di bilinearità è espressa dalle relazioni formali

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \langle \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{F}(\Omega), \\ \langle \mathbf{f}, \alpha \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \langle \alpha \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

■ La forma potenza virtuale gode inoltre della proprietà di *separazione* e cioè:

- L'unico sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  che compie potenza virtuale nulla per ogni cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  è il sistema nullo.
- L'unico cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  per il quale compie potenza virtuale nulla ogni sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  è il cinematismo nullo.

La proprietà di separazione è espressa formalmente dalle implicazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{o}, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{f} = \mathbf{o}. \end{array} \right.$$

- La prima implicazione è conseguenza del celebrato teorema di HAHN (vedi proposizione 4.1 (p. 199)) il quale assicura che ogni funzionale lineare limitato definito su di un sottospazio lineare chiuso dello spazio normato  $\mathcal{V}(\Omega)$  può essere esteso ad un funzionale lineare limitato definito su tutto lo spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$  senza incrementarne la norma. Sia infatti  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega) \text{ e } \mathbf{v} \neq \mathbf{o}$ . Sul sottospazio lineare  $\text{Gen}(\mathbf{v})$  generato da  $\mathbf{v}$  si definisca allora il funzionale lineare limitato

$$\langle \phi, \alpha \mathbf{v} \rangle := \alpha,$$

la cui norma è  $1/\|\mathbf{v}\|$ . Estendendo  $\phi$  a tutto lo spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$  si ottiene un funzionale lineare limitato  $\mathbf{f}$  tale che  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 1$ , contro l'ipotesi.

- La seconda implicazione è vera per definizione.

L'annullarsi del prodotto scalare  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$  viene indicato con terminologia geometrica affermando che il sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  ed il cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  sono tra loro ortogonali.

Se nella caratterizzazione cinematica si assume che il parametro evolutivo sia adimensionale, allora i cinematismi sono spostamenti virtuali e l'interazione tra i sistemi di forze e gli spostamenti virtuali è detta *lavoro virtuale*.

La dimensione fisica della potenza virtuale è *forza per lunghezza diviso tempo*:  $[FLT^{-1}]$ , e quella del lavoro virtuale è *forza per lunghezza*:  $[FL]$ .

E' opportuno porre in evidenza che i sistemi di forze, definiti come funzionali lineari limitati sullo spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$ , comprendono tutte le possibili interazioni tra elementi in cui il corpo può essere suddiviso.

Infatti allo spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$  appartengono cinematismi che consentono di *strappare via* una qualsiasi parte  $\overline{\mathcal{P}}$  del corpo  $\Omega$ . Ciò si effettua considerando un cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  che si annulla sull'elemento complementare  $\Omega \setminus \overline{\mathcal{P}}$  e presenta un salto di discontinuità sulla frontiera  $\partial\mathcal{P}$  di  $\overline{\mathcal{P}}$ .

Tali cinematismi discontinui fanno compiere potenza virtuale ai sistemi di forze reattivi che costituiscono le forze di legame tra gli elementi del corpo. Le nozioni di sistemi di forze attive e reattive saranno precise nella sezione 4.1.

### 3.1. Strutture continue

L'idea fisica di un corpo in cui sono presenti forze di mutua aggregazione tra le particelle viene tradotta in una richiesta di *continuità* dei valori al contorno dei cinematismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  in corrispondenza di ogni interfaccia interna al dominio  $\Omega$  occupato dal corpo, con al più l'esclusione della frontiera  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di una suddivisione finita  $\mathcal{T}(\Omega)$  del dominio  $\Omega$  che è detta *suddivisione base del modello*.

Ciò consente di includere nella trattazione modelli strutturali più generali di quello costituito da un unico corpo continuo.

Ad esempio si possono considerare

- strutture composte da corpi continui tra loro non completamente collegati,
  - strutture che presentano soluzioni di continuità materiale in corrispondenza di un numero finito di superfici regolari,
  - strutture in cui vengono impresse azioni esterne che provocano discontinuità dei cinematismi in corrispondenza di un numero finito di interfacce.
- Il sottospazio lineare  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}(\Omega) \subseteq H(\Omega)$  dei *cinematismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi* è costituito dai cinematismi che ammettono la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  come suddivisione di supporto.

I cinematismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi sono campi di quadrato integrabile in  $\Omega$  e la deformazione tangente ad essi associata è di quadrato integrabile in ogni  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$ .

In simboli si richiede che risulti  $\mathcal{T}(\Omega) \prec \mathcal{T}_v(\Omega) \quad \forall v \in \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

La *condizione di  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformità* equivale ad assumere che in corrispondenza di ogni interfaccia interna agli elementi della suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  il salto dei valori al contorno dei cinematismi sia nullo (almeno quasi ovunque e cioè a meno di un insieme di misura superficiale nulla).

La dimostrazione di tale equivalenza è illustrata nella sezione 14.10 (p. 305).

- Un *modello locale* di struttura continua è una terna  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  costituita da una configurazione  $\Omega$ , dal sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{V}(\Omega)$  costituito dai cinematismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi e dall'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in \mathbf{L}(\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega))$ .

Nel seguito si dirà semplicemente che  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  è una struttura continua in quanto l'analisi dei problemi di equilibrio e di congruenza ha carattere locale, fa cioè riferimento ad una assegnata configurazione occupata dalla struttura in un fissato istante di tempo.

#### 4. CONDIZIONI VINCOLARI

La definizione del modello locale di struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  va completata per tener conto di eventuali ulteriori vincoli cinematici che legano i campi cinematici  $v \in \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  e sistemi di forze duali  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

In effetti anche la richiesta di *continuità* dei valori al contorno dei cinematismi  $v \in \mathcal{V}(\Omega)$  in corrispondenza di ogni interfaccia interna agli elementi di una *suddivisione base del modello  $\mathcal{T}(\Omega)$*  costituisce un vincolo cinematico.

Pertanto in generale si pone la seguente definizione.

- Un *vincolo cinematico* è una relazione tra i campi cinematici  $v \in \mathcal{V}(\Omega)$  ed i sistemi di forze  $f \in \mathcal{F}(\Omega)$  caratterizzata da un *grafico*  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ .

Il grafico è un sottoinsieme proprio del prodotto cartesiano  $\mathcal{F}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$  tra lo spazio dei sistemi di forze  $\mathcal{F}(\Omega)$  e quello cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$ .

Al grafico  $\mathcal{G}$  si associano naturalmente due mappe multivoche

$$\overleftarrow{\mathcal{G}} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathcal{F}(\Omega),$$

$$\overrightarrow{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(\Omega) \mapsto \mathcal{V}(\Omega),$$

che, con riferimento alla posizione di  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{v}$  nella coppia ordinata  $\{\mathbf{f}, \mathbf{v}\} \in \mathcal{F}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$ , si dicono rispettivamente *sinistra* e *destra*.

Le mappe *sinistra* e *destra* sono definite da

$$\mathbf{f} \in \overleftarrow{\mathcal{G}}(\mathbf{v}) \iff \{\mathbf{v}, \mathbf{f}\} \in \mathcal{G} \iff \mathbf{v} \in \overrightarrow{\mathcal{G}}(\mathbf{f}).$$

- La mappa *sinistra*  $\overleftarrow{\mathcal{G}}$  associa ad ogni cinematico l'insieme dei sistemi di forze ad esso corrispondenti.
- La mappa *destra*  $\overrightarrow{\mathcal{G}}$  associa ad ogni sistema di forze l'insieme dei cinematici ad esso corrispondenti.

Si denotano con

- $\mathcal{V}_a(\Omega)$  l'insieme dei *cinematici ammissibili*,
- $\mathcal{F}_a(\Omega)$  l'insieme delle *forze ammissibili*,

definiti rispettivamente come i domini delle mappe multivoche  $\overleftarrow{\mathcal{G}}$  e  $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_a(\Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \mid \overleftarrow{\mathcal{G}}(\mathbf{v}) \neq \emptyset\}, \\ \mathcal{F}_a(\Omega) := \{\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega) \mid \overrightarrow{\mathcal{G}}(\mathbf{f}) \neq \emptyset\}. \end{cases}$$

#### 4.1. Vincoli perfetti, lisci e bilaterali

La tipologia più semplice di vincoli cinematici è costituita dai vincoli *perfetti*, *lisci* e *bilaterali* e che consentono di condurre un'analisi lineare dei modelli strutturali sulla quale basare poi eventuali estensioni e approfondimenti.

L'idea intuitiva di vincolo perfetto liscio e bilaterale è quella di un vincolo capace di esercitare reazioni di qualsiasi intensità, di essere privo di attrito e di consentire variazioni di verso opposto dei cinematici. Per svolgere una trattazione formale di tali condizioni vincolari si richiamano preliminarmente alcune definizioni.

Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio lineare e  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$  un sottospazio lineare.

- Una *varietà lineare*  $\mathcal{A}$  è la traslazione di un sottospazio, cioè un insieme tale che

$$\mathcal{A} = \mathbf{x} + \mathcal{S}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

Una varietà lineare è detta anche un *insieme affine*.

- Un *insieme convesso*  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$  è un sottoinsieme di  $\mathcal{X}$  che gode della proprietà

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{K} \Rightarrow \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y} \in \mathcal{K}, \quad \forall \alpha, \beta > 0, \quad \alpha + \beta = 1.$$

- Un *insieme bilanciato*  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$  è un sottoinsieme che gode della proprietà

$$\mathbf{x} \in \mathcal{S} \Rightarrow -\mathbf{x} \in \mathcal{S}.$$

Le *variazioni ammissibili dei cinematismi* a partire da un cinematismo ammissibile  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a(\Omega)$  sono i cinematismi  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}(\Omega)$  che sommati a  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a(\Omega)$  danno luogo ad un cinematismo ammissibile. Tali variazioni ammissibili formano quindi l'insieme

$$\mathcal{V}_v(\Omega) := \{\mathbf{w} \in \mathcal{V}(\Omega) \mid \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{V}_a(\Omega)\}.$$

Analogamente sia  $\mathcal{F}_f(\Omega)$  l'insieme delle *variazioni ammissibili dei sistemi di forze* a partire da un sistema di forze ammissibile  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_a(\Omega)$ , definito da

$$\mathcal{F}_f(\Omega) := \{\mathbf{r} \in \mathcal{F}(\Omega) \mid \mathbf{f} + \mathbf{r} \in \mathcal{F}_a(\Omega)\}.$$

- Un vincolo cinematico è un *vincolo perfetto e bilaterale* se per ogni cinematismo ammissibile  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a(\Omega)$  e per ogni sistema di forze ammissibile  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_a(\Omega)$  gli insiemi delle variazioni ammissibili  $\mathcal{V}_v(\Omega)$  e  $\mathcal{F}_f(\Omega)$  siano insiemi *convessi* e *bilanciati*.

- Un *vincolo affine* è una relazione vincolare perfetta e bilaterale definita dalle seguenti proprietà.

- L'insieme delle *variazioni ammissibili* dei cinematismi  $\mathcal{V}_v(\Omega)$  è un sottospazio lineare chiuso indipendente dal cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_a(\Omega)$ .
- L'insieme delle *variazioni ammissibili* dei sistemi di forze  $\mathcal{F}_f(\Omega)$  è un sottospazio lineare chiuso indipendente dal sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_a(\Omega)$ .

In un modello strutturale continuo i *vincoli affini* sono assegnati mediante la seguente procedura.

Siano

- $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione base del modello continuo,
- $\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}(\Omega)$  un cinematismo assegnato,
- $\bar{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(\Omega)$  un sistema di forze assegnato,
- $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  un sottospazio lineare chiuso,
- $\mathcal{R}(\Omega) \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$  un sottospazio lineare chiuso,

Un *vincolo affine* è quindi definito dalle seguenti mappe multivoche:

- La mappa multivoca sinistra  $\overleftarrow{\mathcal{G}} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathcal{F}(\Omega)$  che ha per dominio la varietà lineare chiusa

$$\mathcal{V}_{\mathbf{a}}(\Omega) = \bar{\mathbf{v}} + \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)),$$

ed associa ad ogni cinematismo ammissibile  $\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{v}} + \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  la varietà lineare  $\bar{\mathbf{f}} + \mathcal{R}(\Omega)$  dei sistemi di forze ammissibili,

- La mappa multivoca destra  $\overrightarrow{\mathcal{G}} : \mathcal{F}(\Omega) \mapsto \mathcal{V}(\Omega)$  che ha per dominio la varietà lineare chiusa

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a}}(\Omega) = \bar{\mathbf{f}} + \mathcal{R}(\Omega),$$

ed associa ad ogni sistema di forze ammissibile  $\mathbf{f} \in \bar{\mathbf{f}} + \mathcal{R}(\Omega)$  la varietà lineare  $\bar{\mathbf{v}} + \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  dei cinematismi ammissibili.

Dunque entrambe le mappe multivoche sono costanti e la relazione vincolare così definita costituisce un vincolo perfetto e bilaterale.

- I cinematismi appartenenti al sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  sono detti *cinematismi conformi*.
- Il sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{R}(\Omega) \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$  è costituito dalle *reazioni vincolari*.
- Il cinematismo assegnato  $\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}(\Omega)$  è detto *efficace* se  $\bar{\mathbf{v}} \notin \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$ .
- Il sistema di forze assegnato  $\bar{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}(\Omega)$  è detto *efficace* se  $\bar{\mathbf{f}} \notin \mathcal{R}(\Omega)$ .

L'altra proprietà importante di una relazione vincolare è quella di definire un *vincolo liscio*.

Un esempio elementare di vincolo liscio è quello che consiste nell'imporre ad un punto materiale di muoversi lungo una superficie priva di attrito.

La velocità del punto deve allora ad ogni istante essere diretta lungo una direzione tangente alla superficie ed il sistema reattivo del vincolo è costituito da una forza concentrata in tale punto e diretta normalmente alla superficie.

Per una struttura continua si dà la seguente definizione generale.

- Un *vincolo liscio* è caratterizzato dalla richiesta che sia nulla la potenza virtuale compiuta da un qualsiasi sistema di reazioni vincolari per un qualsiasi cinematismo conforme, e cioè che risulti

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}(\Omega).$$

Più precisamente, nel definire un vincolo liscio, si richiede che valgano le seguenti condizioni complementari.

- I cinematismi conformi  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  sono quelli per cui compie potenza virtuale nulla un qualsiasi sistema di forze reattive  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\Omega)$ .

- Le reazioni vincolari  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\Omega)$  sono i sistemi di forze caratterizzati dal compiere potenza virtuale nulla in corrispondenza di un qualsiasi cinematismo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

L'annullarsi della potenza virtuale può essere espressa sinteticamente in termini geometrici come una condizione di *ortogonalità* scrivendo

$$\mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))^{\perp}, \quad \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) = \mathcal{R}(\Omega)^{\perp},$$

dove il simbolo  $\perp$  indica il complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare potenza virtuale.

Si noti che la *condizione di  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformità* è un particolare, ma basilare, vincolo perfetto, liscio e bilaterale imposto sui cinematismi (non conformi)  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ .

In molte applicazioni le interazioni tra strutture continue richiedono la modellazione di tipologie di vincolo che non rientrano nella classe dei vincoli perfetti, lisci e bilaterali. Tali più generali tipologie di vincoli sono discusse in dettaglio in [50].

## 4.2. Vincoli al contorno

Usualmente le condizioni vincolari che definiscono il sottospazio dei cinematismi conformi sono costituite dal vincolo di continuità dei valori al contorno sulle interfacce interne ad ogni elemento di una suddivisione base  $\mathcal{T}(\Omega)$  e da condizioni imposte sui valori al contorno dei cinematismi sulla frontiera  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

I primi sono detti *vincoli di continuità* ed i secondi *vincoli di interfaccia*.

I problemi di meccanica delle strutture così formulati sono detti *problemi di valori al contorno*.

I vincoli al contorno sono illustrati in dettaglio nella sezione 7.1 (p. 221). Nella sezione 14.9 (p. 299) sono discusse le condizioni vincolari puntuali al contorno.

Si adotta la seguente nomenclatura.

- Un modello di *struttura vincolata* è una terna  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$ . Il sottospazio  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  definisce la condizione di *conformità*.
- Un modello di *struttura non vincolata* è una terna  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$ . I cinematismi possono quindi essere anche *non conformi*.

I vincoli cinematici al contorno perfetti, lisci e bilaterali, sono astrazioni utili per semplificare l'analisi del comportamento reale dei vincoli imposti su di una struttura continua. Ciò consente di cogliere gli aspetti essenziali delle proprietà di equilibrio di una struttura continua, rinviando eventualmente una più accurata valutazione ad una successiva fase di verifica e correzione.

### 4.3. Forze attive

In una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  i sistemi di forze assegnati sono detti *carichi* o *sistemi di forze attive*. La definizione formale è la seguente.

- I *sistemi di forze attive* sono gli enti duali dei cinematismi conformi e cioè i funzionali lineari sullo spazio  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  dei cinematismi conformi.

Lo spazio dei sistemi di forze attive, duale di  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$ , è denotato da

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega)) = \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))'.$$

Un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega))$  può essere esteso (in maniera non univoca) ad un sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{V}(\Omega)'$  avente la stessa norma, cioè tale che

$$\|\mathbf{f}_\ell\|_{\mathcal{F}(\Omega)} = \|\ell\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega))},$$

essendo

$$\|\mathbf{f}_\ell\|_{\mathcal{F}(\Omega)} := \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\langle \mathbf{f}_\ell, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}(\Omega)}},$$

$$\|\ell\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega))} := \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) \setminus \{\mathbf{o}\}} \frac{\langle \ell, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}(\Omega)}}.$$

Tale *proprietà di estensione*, è basata sul *teorema di estensione di HAHN* (vedi [41] coroll. I.2, [35] teor. IV.5.1, [48], proposizione I.5.2).

**Proposizione 4.1. Teorema di Hahn.** *Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio normato ed  $g : \mathcal{G} \mapsto \mathbb{R}$  un funzionale lineare limitato definito su un sottospazio lineare  $\mathcal{G} \subset \mathcal{X}$ . Esiste allora un funzionale lineare limitato  $f \in L\{\mathcal{X}, \mathbb{R}\} = \mathcal{X}'$  tale da prolungare  $g$  su  $\mathcal{X}$  senza incrementare la norma:*

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{G}, \quad \|f\|_{\mathcal{X}'} = \|g\|_{\mathcal{G}'},$$

dove

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{X}'} &:= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{|f(\mathbf{x})| : \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \leq 1\}, \\ \|g\|_{\mathcal{G}'} &:= \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{G}} \{|g(\mathbf{x})| : \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}} \leq 1\}, \end{aligned}$$

sono le norme rispettivamente in  $\mathcal{X}'$  ed in  $\mathcal{G}'$ .

□

Nella sezione 7 (p. 220) si mostrerà che nei problemi di valori al contorno l'estensione di un sistema di forze attive si può effettuare in modo banale.



## 5. CINEMATISMI RIGIDI

Sia  $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega})$  un cinematismo della struttura continua.

In virtù del *criterio di EULER* (proposizione I.9.10 (p. 85)) l'annullarsi in  $\Omega$  dell'immagine di  $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$  tramite l'*operatore cinematico*

$$\mathbf{B} = \text{sym grad} : C^1(\bar{\Omega}) \mapsto C^0(\bar{\Omega}),$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè la parte antisimmetrica del gradiente di  $\mathbf{v} \in C^1(\bar{\Omega})$  sia un campo tensoriale costante  $\boldsymbol{\Omega}$  in  $\Omega$ . Si ha cioè

$$\text{sym grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \iff \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o], \quad \boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}.$$

■ I cinematismi così caratterizzati sono detti *cinematismi rigidi semplici*.

E' importante osservare che la condizione di EULER sussiste anche nel caso in cui i cinematismi appartengono allo spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$  e pertanto l'operatore cinematico  $\mathbf{B} = \text{sym grad} \in L(\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega))$  deve essere inteso in senso distribuzionale.

La dimostrazione può trovarsi in [49], proposizione VII.3.4.

I cinematismi rigidi semplici generano nello spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$  un sotto-spazio lineare  $\mathcal{V}_o^S(\Omega)$  di dimensione finita pari a 6.

Dalla proposizione I.9.1 (p. 77) si evince che i *vettori caratteristici*:

- $\mathbf{v}_o = \mathbf{v}(\mathbf{x}_o) \in V$ , *velocità di traslazione*,
- $\boldsymbol{\omega} = \text{axial } \boldsymbol{\Omega} \in V$ , *vettore assiale della velocità angolare*,

consentono di fornire una rappresentazione parametrica dei cinematismi rigidi semplici:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega,$$

in cui  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$  è un punto prefissato.

Si definiscano quindi gli operatori lineari

$$\text{TRASL} \in L\{V, \mathcal{V}(\Omega)\}, \quad \text{ROT} \in L\{V, \mathcal{V}(\Omega)\}$$

mediante le relazioni locali

$$\text{TRASL}[\mathbf{v}_o](\mathbf{x}) := \mathbf{v}_o, \quad \text{ROT}[\boldsymbol{\omega}](\mathbf{x}) := \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

- L'operatore  $\text{TRASL} \in L\{V, \mathcal{V}(\Omega)\}$  associa al vettore  $\mathbf{v}_o \in V$  il corrispondente atto di moto di traslazione.
- L'operatore  $\text{ROT} \in L\{V, \mathcal{V}(\Omega)\}$  associa al vettore assiale  $\boldsymbol{\omega} \in V$  il corrispondente atto di moto di rotazione attorno all'origine in  $\mathbb{S}$ .

Ogni cinematismo rigido semplice  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^S(\Omega)$  è allora esprimibile come

$$\mathbf{v} = \text{TRASL}[\mathbf{v}_o] + \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}],$$

dove  $\text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}](\mathbf{x}) := \text{ROT}[\boldsymbol{\omega}](\mathbf{x}) - \text{ROT}[\boldsymbol{\omega}](\mathbf{x}_o) = \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$ .

Nello spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$  i *cinematismi rigidi* sono quelli che sono composti a pezzi da cinematismi rigidi semplici.

Si può quindi porre la seguente definizione.

- Il sottospazio dei *cinematismi rigidi*  $\mathcal{V}_o(\Omega) \subset \mathcal{V}(\Omega)$  è costituito dai cinematismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  cui corrisponde un valore nullo della parte regolare della deformazione tangente. Dunque, se  $\mathbf{B} \in L(\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega))$  è l'operatore cinematico, risulta

$$\mathcal{V}_o(\Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \mid \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{0}\} = \text{Ker } \mathbf{B},$$

## 6. EQUILIBRIO

Il termine *equilibrio* significa letteralmente egualanza delle azioni su di una bilancia (*libra*). Il concetto di equilibrio, così come esso viene oggi introdotto in meccanica, fu formulato da JOHANN BERNOULLI<sup>47</sup> nel 1717. La definizione, basata sul concetto di potenza virtuale, fu poi ripresa e perfezionata da D'ALEMBERT<sup>48</sup> e da EULER<sup>49</sup> [3].

La proprietà di equilibrio consiste nel richiedere che, in un fissato istante di tempo, il sistema di forze agenti sulla struttura compia potenza virtuale nulla per ogni cinematismo rigido che la struttura può intraprendere, a partire dalla configurazione occupata in tale istante, lungo un ideale processo evolutivo.

<sup>47</sup> JOHANN BERNOULLI (1667-1748). Fratello minore di JACOB BERNOULLI (1655-1705), fu il più grande matematico del suo tempo. La formulazione del principio fu comunicata per lettera a PIERRE VARIGNON (1654-1722). Ai due fratelli è dovuta la formula per il calcolo del raggio di curvatura di una curva, (il *teorema d'oro* di JAKOB). A JOHANN è tra l'altro dovuta la formula del calcolo infinitesimale nota come formula di DE L'HOSPITAL perché fu acquistata ed incorporata dal suo allievo marchese GUILLAME-FRANÇOIS-ANTOINE DE L'HÔPITAL (1661-1704) nel suo libro *Analyse des infiniment petits* del 1692, primo trattato di calcolo infinitesimale.

<sup>48</sup> JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) presentò il suo *Traité de dynamique* all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1743.

<sup>49</sup> LEONHARD EULER (1707-1783) *Formulae generales pro translazione quacunque corporum rigidorum* [3], San Pietroburgo 1776.

Il concetto di equilibrio è legato alla definizione dei *cinematismi rigidi* e cioè dei cinematismi cui corrisponde una deformazione tangente nulla e che appartengono pertanto al nucleo  $\text{Ker } \mathbf{B} \subset \mathcal{V}(\Omega)$  dell'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega)\}$ .

L'*equilibrio* di un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  agente sul modello strutturale  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$  è espresso dalla condizione variazionale

$$\mathbf{f} \in (\text{Ker } \mathbf{B})^\perp \iff \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o(\Omega) = \text{Ker } \mathbf{B},$$

ed è assiomaticamente definita dal seguente

*Axioma dell'equilibrio*

- Un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  agente su di un modello strutturale continuo  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$  è in equilibrio se la potenza virtuale da esso compiuta per un qualsiasi cinematismo rigido  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o(\Omega) = \text{Ker } \mathbf{B}$  è nulla.

Si noti che la definizione assiomatica di equilibrio è posta in termini variazionali e che i campi di prova sono cinematismi rigidi non conformi. Pertanto da tale definizione si deduce in particolare una formulazione generale del *principio di sezionamento* di EULER e CAUCHY secondo il quale un corpo è in equilibrio se e solo se è in equilibrio ogni sua parte sotto l'azione delle forze su di essa agenti.

Si noti inoltre che alla base della definizione assiomatica di equilibrio di un sistema di forze vi è la proprietà di dualità che la forma bilineare potenza virtuale induce tra lo spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$  e lo spazio delle forze  $\mathcal{F}(\Omega)$ .

- L'*operatore di equilibrio*  $\mathbf{B}' \in L\{\mathcal{H}(\Omega); \mathcal{F}(\Omega)\}$  è l'operatore lineare limitato, duale dell'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega)\}$ , definito dall'identità

$$\langle \mathbf{B}' \mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega),$$

dove, per definizione

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle := \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{Bv} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega).$$

- Gli sforzi  $\mathbf{T} \in \text{Ker } \mathbf{B}'$  non nulli sono detti *autosforzi nascosti* o *coazioni nascoste* in quanto soddisfano la condizione

$$\text{Ker } \mathbf{B}' = \{ \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \},$$

che impone l'ortogonalità delle coazioni nascoste alla parte regolare della deformazione tangente associata ad un arbitrario cinematismo GREEN-regolare.

Un'ulteriore caratterizzazione in termini di forze di massa e di contatto sarà data nella sezione 7 (p. 220). ■

Per il continuo di CAUCHY sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 6.1. Assenza di coazioni nascoste.** *Nel modello del continuo tridimensionale di CAUCHY non esistono coazioni nascoste, risulta cioè  $\text{Ker } \mathbf{B}' = \{\mathbf{o}\}$ .*

**Dim.** Fissato un arbitrario sottodomino  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$  si assumano quali campi di prova  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  i cinematismi nulli su  $\Omega \setminus \mathcal{P}$  e tali da indurre su  $\mathcal{P}$  un campo costante di deformazioni tangenti. Tali cinematismi sono quindi espressi su  $\mathcal{P}$  da una legge affine del tipo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_o + \mathbf{S}[\mathbf{x}], \quad \mathbf{x} \in \mathcal{P},$$

con  $\mathbf{v}_o \in \mathbf{V}$  e  $\mathbf{S} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  tensore simmetrico. Allora, essendo  $\mathbf{B} = \text{sym grad}$ , risulta  $\mathbf{B}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{S}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$  e quindi

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = \mathbf{S} : \int_{\mathcal{P}} \mathbf{T} \, d\mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \Rightarrow \int_{\mathcal{P}} \mathbf{T} \, d\mathbf{v} = \mathbf{o}, \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega.$$

In forza di una proprietà dell'integrale di LEBESGUE deve allora essere  $\mathbf{T} = \mathbf{O}$  quasi ovunque in  $\Omega$  (vedasi ad esempio [47]).  $\square$

Un analogo risultato vale per tutti i modelli strutturali mono e bidimensionali che saranno illustrati nel capitolo IV.

In una struttura continua soggetta a vincoli perfetti, lisci e bilaterali si consideri un assegnato sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

La condizione di equilibrio di un sistema di forze  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\ell} + \mathbf{r} \in \mathcal{F}(\Omega)$ , somma di un sistema di forze  $\mathbf{f}_{\ell} \in \mathcal{F}(\Omega)$  estensione di  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega))$  e di un sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\Omega)$ , si scrive

$$\langle \mathbf{f}_{\ell} + \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbf{o}}(\Omega) \iff \mathbf{f}_{\ell} + \mathbf{r} \in \mathcal{V}_{\mathbf{o}}(\Omega)^{\perp}.$$

■ Si consideri quindi il sottospazio dei *cinematismi rigidi conformi*:

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}}(\mathcal{T}(\Omega)) := \mathcal{V}_{\mathbf{o}}(\Omega) \cap \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)),$$

Per definizione di vincolo liscio, le reazioni vincolari  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))^{\perp}$  soddisfano la condizione di ortogonalità  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

Assumendo quali campi di prova i cinematismi rigidi conformi, la condizione di equilibrio si esprime in termini del solo *sistema di forze attive*. Si giunge così alla formulazione del fondamentale

***Principio della potenza virtuale***

- Un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\Omega)$  agente su di un modello strutturale continuo  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\Omega), \mathbf{B})$  è in equilibrio se la potenza virtuale da esso compiuta per un qualsiasi cinematismo rigido conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\mathcal{T}(\Omega))$  è nulla, cioè se

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\mathcal{T}(\Omega)) \iff \ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\mathcal{T}(\Omega))^{\perp}.$$

Se i vincoli agenti sulla struttura sono dipendenti dal tempo essi vanno considerati fissi (congelati) nell'istante in cui si valuta la conformità dei cinematismi rigidi.

Ciò è in accordo con il fatto che l'equilibrio è una proprietà istantanea e che i cinematismi sono campi di velocità virtuali e cioè valutati in un arbitrario processo evolutivo che parte dalla configurazione attuale.

Se l'operatore cinematico è un operatore di KORN, il *principio della potenza virtuale* fornisce una condizione di equilibrio operativa in quanto i cinematismi rigidi conformi costituiscono un sottospazio lineare di dimensione finita e pertanto il principio equivale ad un sistema algebrico lineare (vedi proposizione 6.5 (p. 216)).

Se i cinematismi sono detti *spostamenti virtuali* il principio è detto *principio del lavoro virtuale*. In alcuni testi della letteratura, il principio è talvolta detto *principio del lavoro virtuale per i corpi rigidi*. A tal proposito è da notare che in effetti il termine *rigido* va attribuito ai cinematismi piuttosto che al corpo.

Nella sezione 6.4 (p. 216) si mostrerà che, per modelli strutturali il cui operatore cinematico è un operatore di KORN, il *principio della potenza virtuale* è equivalente all'*assioma dell'equilibrio*. Più precisamente si mostrerà che un sistema di forze attive che soddisfa il *principio della potenza virtuale* può essere esteso ad un sistema di forze che soddisfa l'*assioma dell'equilibrio*.

### 6.1. Equazioni cardinali della statica

La condizione di equilibrio può essere formulata in termini di vettori caratteristici facendo ricorso alla rappresentazione parametrica dei cinematismi rigidi semplici fornita dalla proposizione I.9.1 (p. 77).

Ogni cinematismo rigido  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o(\Omega)$  può infatti esprimersi come combinazione lineare di una famiglia finita di cinematismi rigidi.

Lo spazio  $\mathcal{V}_o(\Omega)$  dei cinematismi rigidi è generato dalla famiglia dei campi vettoriali su  $\Omega$  che descrivono un *cinematismo rigido relativo* tra un qualsiasi sottodomino  $\overline{\mathcal{P}} \subset \overline{\Omega}$  ed il dominio complementare  $\overline{\Omega} \setminus \overline{\mathcal{P}}$ .

Si denoti con  $\mathcal{V}_o(\mathcal{P}, \Omega)$  la famiglia di tali campi cinematici, definiti dalla con-

dizione

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{v}_{|\mathcal{P}}(\mathbf{x}) & \text{per } \mathbf{x} \in \overline{\mathcal{P}} \text{ con } \mathbf{v}_{|\mathcal{P}} \in \mathcal{V}_o^S(\mathcal{P}), \\ \mathbf{o} & \text{per } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \overline{\mathcal{P}}, \end{cases}$$

dove  $\mathbf{v}_{|\mathcal{P}}$  è la restrizione di  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o(\Omega)$  a  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ .

Se i cinematismi di  $\mathcal{V}_o(\mathcal{P}, \Omega)$  non sono conformi nella condizione di equilibrio si deve tener conto sia delle forze attive che delle reazioni vincolari dei vincoli violati.

L'espressione parametrica dei cinematismi rigidi semplici conduce a formulare la condizione di equilibrio  $\mathbf{f} \in \mathcal{V}_o(\mathcal{P}, \Omega)^\perp$  mediante le due condizioni indipendenti

$$\begin{cases} \langle \mathbf{f}, \text{TRASL}[\mathbf{v}_o] \rangle = 0, & \forall \mathbf{v}_o \in \mathbf{V}, \\ \langle \mathbf{f}, \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}] \rangle = 0, & \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{V}. \end{cases}$$

dove

$$\text{TRASL} \in L\{\mathbf{V}; \mathcal{V}(\mathcal{P})\}, \quad \text{ROT}_{\mathbf{x}_o} \in L\{\mathbf{V}; \mathcal{V}(\mathcal{P})\},$$

con  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ , sono definiti da

$$\text{TRASL}[\mathbf{v}_o](\mathbf{x}) := \mathbf{v}_o, \quad \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}](\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) := \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Si considerino dunque gli operatori lineari

$$\mathbf{R} \in L\{\mathcal{F}(\mathcal{P}); \mathbf{V}\}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o} \in L\{\mathcal{F}(\mathcal{P}); \mathbf{V}\},$$

rispettivamente *duali* di  $\text{TRASL} \in L\{\mathbf{V}; \mathcal{V}(\mathcal{P})\}$  e  $\text{ROT}_{\mathbf{x}_o} \in L\{\mathbf{V}; \mathcal{V}(\mathcal{P})\}$ , definiti dalle identità

$$\begin{cases} \mathbf{R}[\mathbf{f}] \cdot \mathbf{v}_o = \langle \mathbf{f}, \text{TRASL}[\mathbf{v}_o] \rangle, & \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathbf{v}_o \in \mathbf{V}, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] \cdot \boldsymbol{\omega} = \langle \mathbf{f}, \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}] \rangle, & \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{V}. \end{cases}$$

dove il punto  $\cdot$  denota il prodotto interno in  $\mathbf{V}$ .

Essi associano ad ogni sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  i *vettori caratteristici*

- *vettore risultante*  $\mathbf{R}[\mathbf{f}]$ , e
- *vettore assiale del momento risultante*  $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]$  rispetto al polo  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$ .

La condizione di equilibrio è pertanto espressa dalle equazioni vettoriali

$$\boxed{\mathbf{R}[\mathbf{f}] = \mathbf{o}, \quad \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] = \mathbf{o}, \quad \forall \mathcal{P} \subseteq \Omega,}$$

dette *equazioni cardinali della statica*.

Tali equazioni impongono rispettivamente

- l'equilibrio alla *traslazione* e
- l'equilibrio alla *rotazione* rispetto al polo  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$ ,

di un qualsiasi sottodominoio  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ .

In termini di componenti rispetto ad un riferimento  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  si perviene ad un sistema lineare di 6 equazioni scalari indipendenti

$$\begin{cases} R_1[\mathbf{f}] = 0, & M_1[\mathbf{f}] = 0, \\ R_2[\mathbf{f}] = 0, & M_2[\mathbf{f}] = 0, \\ R_3[\mathbf{f}] = 0, & M_3[\mathbf{f}] = 0. \end{cases}$$

- L'insieme dei sistemi di forze agenti su  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$  cui corrispondono gli stessi vettori caratteristici è una *classe di equivalenza* costituita da una varietà lineare nello spazio  $\mathcal{F}(\Omega)$  dei sistemi di forze.

Due sistemi di forze appartenenti alla stessa classe sono detti *staticamente equivalenti*. I sistemi di forze con vettori caratteristici nulli sono *equivalenti a zero*.

Si noti poi che risulta

$$\text{ROT}_{\mathbf{y}_o}[\boldsymbol{\omega}] = \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}] + \text{TRASL}[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_o - \mathbf{y}_o)].$$

e dunque, passando agli operatori duali, si ha che

$$\mathbf{M}_{\mathbf{y}_o}[\mathbf{f}] \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{R}[\mathbf{f}] \cdot [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x}_o - \mathbf{y}_o)], \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{V}.$$

Vale dunque la *formula di trasporto*

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathbf{y}_o}[\mathbf{f}] = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] + \mathbf{R}[\mathbf{f}] \times (\mathbf{y}_o - \mathbf{x}_o), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}.}$$

Ne segue in particolare che

- se il risultante  $\mathbf{R}[\mathbf{f}]$  è nullo, allora il momento risultante è invariante rispetto al polo,
- per ogni  $\mathbf{x}_o, \mathbf{y}_o \in \mathbb{S}$ , essendo  $(\mathbf{R}[\mathbf{f}] \times (\mathbf{y}_o - \mathbf{x}_o)) \cdot \mathbf{R}[\mathbf{f}] = \mathbf{o}$  risulta

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathbf{y}_o}[\mathbf{f}] \cdot \mathbf{R}[\mathbf{f}] = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] \cdot \mathbf{R}[\mathbf{f}].}$$

Si può allora concludere che:

- il prodotto interno tra il vettore assiale del momento risultante ed il vettore risultante è indipendente dal polo rispetto al quale si valuta il momento risultante ed è detto *invariante scalare* del sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$ .

Al variare del polo  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$  varia pertanto solo la componente del momento risultante  $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]$  ortogonale al vettore risultante  $\mathbf{R}[\mathbf{f}]$ .

Si può quindi porre il problema di determinare il luogo dei punti dello spazio  $\mathbb{S}$  rispetto ai quali il momento risultante non ha componente ortogonale al risultante. Ciò equivale a determinare i punti  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$  tali che

$$\boxed{\mathbf{M}_{\mathbf{x}}[\mathbf{f}] \times \mathbf{R}[\mathbf{f}] = \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] \times \mathbf{R}[\mathbf{f}] + [\mathbf{R}[\mathbf{f}] \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)] \times \mathbf{R}[\mathbf{f}] = \mathbf{o}.}$$

Poichè risulta

$$[\mathbf{R}[\mathbf{f}] \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)] \times \mathbf{R}[\mathbf{f}] = [\mathbf{R}[\mathbf{f}] \cdot \mathbf{R}[\mathbf{f}]](\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) - [\mathbf{R}[\mathbf{f}] \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)] \mathbf{R}[\mathbf{f}],$$

ponendo  $\rho := \mathbf{R}[\mathbf{f}] / \|\mathbf{R}[\mathbf{f}]\|$  deve risultare

$$[\mathbf{I} - \rho \otimes \rho](\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = \rho \times \frac{\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]}{\|\mathbf{R}[\mathbf{f}]\|}.$$

L'operatore  $\mathbf{I} - \rho \otimes \rho$  effettua la proiezione ortogonale sul piano perpendicolare al sottospazio lineare  $\text{Lin}[\mathbf{R}[\mathbf{f}]]$  generato dal risultante.

Ne segue che il nucleo dell'operatore  $\mathbf{I} - \rho \otimes \rho$  è il sottospazio monodimensionale  $\text{Lin}[\mathbf{R}[\mathbf{f}]]$ .

La simmetria dell'operatore  $\mathbf{I} - \rho \otimes \rho$  assicura poi che l'immagine è il sottospazio bidimensionale  $\text{Lin}[\mathbf{R}[\mathbf{f}]]^\perp$ .

Poichè il termine noto appartiene a tale sottospazio lineare, il problema ammette una retta di soluzioni parallela al sottospazio monodimensionale  $\text{Lin}[\mathbf{R}[\mathbf{f}]]$  che viene detta *asse centrale* del sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$ .

E' facile verificare che l'equazione dell'asse centrale non dipende dalla scelta del polo rispetto al quale si valuta il momento risultante. Infatti la formula di trasporto stabilisce che

$$\frac{\mathbf{M}_{\mathbf{y}_o}[\mathbf{f}]}{\|\mathbf{R}[\mathbf{f}]\|} = \frac{\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]}{\|\mathbf{R}[\mathbf{f}]\|} + \rho \times (\mathbf{y}_o - \mathbf{x}_o), \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F},$$

e dunque sussiste l'equivalenza

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \rho \otimes \rho](\mathbf{x} - \mathbf{y}_o) &= \rho \times \frac{\mathbf{M}_{\mathbf{y}_o}[\mathbf{f}]}{\|\mathbf{R}[\mathbf{f}]\|} \iff \\ [\mathbf{I} - \rho \otimes \rho](\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) &= \rho \times \frac{\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]}{\|\mathbf{R}[\mathbf{f}]\|}. \end{aligned}$$

Nella sezione 7.6 (p. 230) si fornirà l'espressione dei vettori caratteristici  $\mathbf{R}[\mathbf{f}]$  e  $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]$  nel caso in cui il sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  è rappresentato da campi vettoriali definiti sul dominio  $\Omega$  e su una frontiera  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ .

## 6.2. Principio delle potenze virtuali

La condizione di equilibrio richiede che la potenza virtuale compiuta da un sistema di forze attive in equilibrio su  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  per un cinematismo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  sia nulla se la corrispondente deformazione tangente è nulla.

Un cinematismo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  genera in una struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  una deformazione tangente regolare  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \text{sym grad } \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  che è un campo tensoriale simmetrico di quadrato integrabile su  $\Omega$ .

Tali osservazioni conducono a formulare la seguente *congettura*.

- La potenza virtuale che un sistema di forze attive in equilibrio  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\mathcal{T}(\Omega))^\perp$  compie per un cinematico conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  può essere valutata direttamente in termini della deformazione tangente  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$ , come risultato della interazione con un campo di enti ad essa duali.

Essendo  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ , è naturale assumere che il campo di enti duali sia un campo di tensori di quadro integrabile in  $\Omega$ , detto *stato tensionale* o *stato di sforzo* nella struttura.

L'interazione tra uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  ed un campo di deformazione tangente  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}(\Omega)$  è detta la *potenza virtuale* ed è definita dall'integrale

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{D} \rangle\rangle := \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dv, \quad \forall \mathbf{D} \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega),$$

dove  $\mathbf{T} : \mathbf{D} = \text{tr}(\mathbf{T}^T \mathbf{D})$  è il prodotto interno nello spazio  $L(V; V)$  dei tensori doppi misti, indotto da quello in  $V$ .

La validità della congettura formulata può essere espressa sotto forma di un principio fondamentale della meccanica detto *principio delle potenze virtuali* o *principio dei lavori virtuali*.

Nella prossima sezione 6.3 si mostrerà come, partendo da principio della potenza virtuale nel contesto funzionale definito in questo capitolo, il principio delle potenze virtuali sia suscettibile di una dimostrazione rigorosa che fa ricorso a strumenti oramai classici di Analisi Funzionale.

Il principio può essere enunciato formalmente come segue.

#### *Principio delle potenze virtuali*

- Sia  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^\perp$  un sistema di forze attive in equilibrio sulla struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$ .

Esiste allora uno *stato tensionale* o *stato di sforzo* costituito da un campo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  di tensori simmetrici di quadro integrabile in  $\Omega$  tale che la potenza virtuale compiuta dal sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^\perp$  per un qualsiasi cinematico conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  sia eguale a quella compiuta dal campo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  per il campo di deformazione tangente regolare  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  corrispondente al cinematico conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

Si ha cioè che

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)).$$

- Un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^\perp$  ed uno stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  che soddisfano l'identità del principio delle potenze virtuali sono detti tra loro in equilibrio.

Lo spazio degli stati tensionali coincide dal punto di vista matematico con lo spazio delle deformazioni tangenti. E' però bene notare che i campi  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}(\Omega)$  e  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  hanno diversa dimensione fisica.

Se il parametro evolutivo ha la dimensione di un tempo, allora

- la dimensione delle deformazioni tangenti è il *reciproco di un tempo*:  $[T^{-1}]$ ,
- la dimensione degli stati tensionali è *forza/area*:  $[FL^{-2}]$ ,
- la potenza virtuale ha la dimensione di una *forza per lunghezza diviso tempo*:  $[FLT^{-1}]$ .

Se invece il parametro evolutivo è assunto adimensionale, si ha che

- le deformazioni tangenti sono adimensionali,
- il lavoro virtuale ha la dimensione di una *forza per lunghezza*:  $[FL]$ .

Decomponendo il tensore  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  nella somma delle parti simmetrica ed emisimmetrica

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{sym } \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \text{emi } \mathbf{T}(\mathbf{x}),$$

si riconosce che la parte emisimmetrica non contribuisce alla potenza virtuale interna in quanto risulta

$$[ \text{emi } \mathbf{T}(\mathbf{x}) ] : \mathbf{D}(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{D}(\mathbf{x}) \in \text{Sym},$$

dove  $\text{Sym} \subset L(V; V)$  è il sottospazio dei tensori simmetrici. Ne segue che

- E' lecito assumere che il tensore  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  dello stato tensionale sia simmetrico, senza ledere la generalità della trattazione.

Un approfondimento su tale punto è proposto nella sezione 14.1 (p. 290).

In un riferimento cartesiano  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  le matrici associate ai tensori simmetrici  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  ed  $\mathbf{D}(\mathbf{x})$  sono:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{12} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{13} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{12} & \dot{\varepsilon}_2 & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{23} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{13} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{23} & \dot{\varepsilon}_3 \end{bmatrix}.$$

La potenza virtuale specifica (per unità di volume)  $\mathbf{T} : \mathbf{D}$  nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  si esprime in termini di componenti cartesiane come somma delle componenti omonime delle due matrici ed è pertanto fornita da

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = \sigma_1 \dot{\varepsilon}_1 + \sigma_2 \dot{\varepsilon}_2 + \sigma_3 \dot{\varepsilon}_3 + \tau_{12} \dot{\gamma}_{12} + \tau_{13} \dot{\gamma}_{13} + \tau_{23} \dot{\gamma}_{23}.$$

Le proprietà e le rappresentazioni dello stato tensionale puntuale saranno illustrate in dettaglio nel capitolo III.

### ■ Notazioni

Per semplificare le notazioni, si adotteranno le seguenti abbreviazioni.

Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$ . Si pone

- $H := H(\Omega)$ ,  $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\Omega)$  spazi dei campi vettoriali e tensoriali di quadrato integrabile su  $\Omega$ ,
- $\mathcal{V} := \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{V}(\Omega)$  lo spazio di HILBERT dei cinematismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -regolari e cioè aventi  $\mathcal{T}(\Omega)$  quale suddivisione di supporto,
- $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{S}(\Omega)$  lo spazio di HILBERT degli stati di sforzo  $\mathcal{T}(\Omega)$ -regolari e cioè aventi  $\mathcal{T}(\Omega)$  quale suddivisione di supporto,
- $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{F}(\Omega)$  lo spazio duale dei sistemi di forze,
- $\partial\mathcal{V} := \partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  il corrispondente spazio di HILBERT dei valori sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  e
- $\partial\mathcal{F} := \partial\mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega))$  lo spazio duale di  $\partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  costituito dai sistemi di forze agenti sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ ,
- $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  il sottospazio dei cinematismi conformi,
- $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} := \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega))$  lo spazio dei sistemi di forze attive.

In corrispondenza della suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  l'operatore dei valori al contorno è dunque  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$  e l'operatore del flusso al contorno è  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}$ .

### 6.3. Teorema delle potenze virtuali

La congettura formulata nella sezione precedente circa la possibilità di valutare la potenza virtuale che un sistema di forze attive in equilibrio  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^{\perp}$  compie per un cinematzmo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  è suscettibile di una dimostrazione rigorosa nel contesto funzionale in cui è stato inquadrato il problema strutturale.

La dimostrazione consiste nella discussione di un problema lineare tra spazi topologici di HILBERT e fa riferimento a risultati classici dell'Analisi Funzionale.

Prima di procedere alla dimostrazione è utile richiamare gli elementi essenziali della discussione di un problema lineare tra spazi lineari di dimensione finita.

A tal fine si considerino due *spazi lineari di dimensione finita*  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  ed i rispettivi spazi duali  $\mathcal{X}'$  e  $\mathcal{Y}'$ .

Sia quindi  $\mathbf{A} \in L\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$  un'applicazione lineare e  $\mathbf{A}' \in L\{\mathcal{Y}', \mathcal{X}'\}$  l'applicazione duale definita dalla relazione

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{A}'\mathbf{y}', \mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'.$$

Assegnato  $\mathbf{f} \in \mathcal{X}'$ , si ponga il *problema lineare* consistente nel determinare  $\mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'$  tale che

$$a) \quad \mathbf{A}'\mathbf{y}' = \mathbf{f},$$

o in forma variazionale

$$\langle \mathbf{y}', \mathbf{Ax} \rangle = \langle \mathbf{A}'\mathbf{y}', \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}.$$

L'esistenza di almeno una soluzione del problema equivale alla condizione  $\mathbf{f} \in \text{Im } \mathbf{A}'$ . Dall'identità che definisce l'applicazione duale, si deduce che vale la relazione

$$\text{Ker } \mathbf{A} = (\text{Im } \mathbf{A}')^\perp,$$

come sarà dimostrato nella prossima proposizione 6.2.

Prendendo i complementi ortogonali, si ottiene l'eguaglianza

$$\text{Im } \mathbf{A}' = (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp,$$

in quanto in dimensione finita si ha che

$$b) \quad (\text{Im } \mathbf{A}')^{\perp\perp} = \text{Im } \mathbf{A}'.$$

Si noti che i complementi ortogonali dei sottoinsiemi  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  e  $\mathcal{B}' \subset \mathcal{Y}'$  sono per definizione i sottospazi lineari

$$\begin{cases} \mathcal{A}^\perp := \{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}' : \langle \mathbf{x}', \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{X}', \\ (\mathcal{B}')^\perp := \{\mathbf{y} \in \mathcal{Y} : \langle \mathbf{y}', \mathbf{y} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{B}'\} \subseteq \mathcal{Y}. \end{cases}$$

Il problema lineare *a)* ammette quindi soluzione se e solo se il dato  $\mathbf{f} \in \mathcal{X}'$  soddisfa la condizione di compatibilità

$$\mathbf{f} \in (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp,$$

che in forma variazionale si scrive

$$c) \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \text{Ker } \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

Se la condizione *c)* è soddisfatta, l'insieme delle soluzioni è la varietà lineare

$$\mathbf{y}'_f + \text{Ker } \mathbf{A},$$

costituita dalla somma di una soluzione particolare  $\mathbf{y}'_f \in \mathcal{Y}'$  della *a)* e da un qualsiasi elemento del sottospazio delle autosoluzioni del problema omogeneo associato.

In modo formalmente analogo si può dimostrare che la condizione di equilibrio posta in termini di cinematismi conformi equivale all'esistenza di un campo di sforzi che soddisfi il principio dei lavori virtuali.

Si consideri infatti l'*operatore cinematico*

$$\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in \mathbf{L}(\mathcal{L}; \mathcal{H}),$$

definito come la restrizione di  $\mathbf{B} \in \mathbf{L}(\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H})$  al sottospazio lineare dei cinematismi conformi  $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}(\Omega)$ .

La condizione di equilibrio di un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  si scrive quindi

$$C) \quad \ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^{\perp} = (\text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L})^{\perp} = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}.$$

Sia  $\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in \mathbf{L}\{\mathcal{H}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  l'*operatore di equilibrio*, duale di  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in \mathbf{L}\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$ , definito da

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle = \langle \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H}.$$

Il principio dei lavori virtuali

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

si può allora porre nella forma astratta

$$A) \quad \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{T} = \ell.$$

Se vale l'eguaglianza

$$\text{Im } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp},$$

l'esistenza di una soluzione del problema *A*) è equivalente alla condizione *C*).

E' dunque evidente la perfetta analogia tra la discussione del problema lineare *a*) e quella del problema dell'equilibrio *A*).

Per passare dall'uno all'altro basta infatti porre formalmente

$$\begin{cases} \mathcal{H} = \mathcal{Y}', & \mathcal{L} = \mathcal{X}, & \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{X}', \\ \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}, & \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = \mathbf{A}'. \end{cases}$$

■ Tale analogia formale diventa però operativa se e solo se è soddisfatta la condizione  $\text{Im } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}$ . E' poi naturale richiedere che tale condizione sussista per ogni scelta del sottospazio lineare dei cinematismi conformi  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}(\Omega)$ .

Si può dimostrare [46], [48], che la condizione  $\text{Im } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}$  sussiste per ogni scelta del sottospazio lineare dei cinematismi conformi  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}(\Omega)$  se l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in \mathbf{L}\{H^1(\Omega); \mathcal{H}(\Omega)\}$  è un *operatore di KORN* e cioè se è verificata la

■ *seconda diseguaglianza di KORN* [13], [15],

$$\| \mathbf{Bu} \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| \mathbf{u} \|_{H(\Omega)} \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega).$$

La prima diseguaglianza di KORN è un caso particolare della seconda [47] ed è stata dimostrata nella sezione I.9.12 (p. 93).

### 6.3.1. Dimostrazione del teorema delle potenze virtuali

La dimostrazione moderna della seconda diseguaglianza di KORN per l'operatore cinematico  $\mathbf{B} = \text{sym grad} \in L(H^1(\Omega); \mathcal{H}(\Omega))$  fa ricorso a risultati profondi di Analisi Funzionale, [31], [32], [34], [43], [46], [47].

Nella proposizione 6.5 è riportato un risultato astratto dovuto a LUC TARTAR da cui si evince la seguente implicazione [46], [47].

- La seconda diseguaglianza di KORN assicura che per ogni sottospazio lineare  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}(\Omega)$  di cinematici conformi, l'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{H})$  gode delle seguenti proprietà.
  - Il nucleo  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \mathcal{V}_{\text{RIG}}$  è un sottospazio lineare di  $\mathcal{L}$  avente dimensione finita. I cinematici rigidamente conformi ammettono dunque una rappresentazione parametrica in termini di un numero finito di parametri.
  - Lo spazio immagine  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  è un sottospazio lineare chiuso di  $\mathcal{H}$ .

Tali proprietà sono di fondamentale importanza per lo sviluppo della teoria.

Per pervenire alla dimostrazione del teorema delle potenze virtuali si premette una semplice ma importante proprietà.

**Proposizione 6.2. Nucleo ed immagine.** *Sia  $\mathbf{A} \in L(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  una applicazione lineare limitata tra spazi di HILBERT e  $\mathbf{A}' \in L(\mathcal{Y}'; \mathcal{X}')$  l'applicazione duale definita dall'identità*

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{y}' \rangle = \langle \mathbf{A}'\mathbf{y}', \mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'.$$

Allora si ha che

$$\begin{cases} i) & \text{Ker } \mathbf{A} = (\text{Im } \mathbf{A}')^\perp, \\ ii) & \text{Ker } \mathbf{A}' = (\text{Im } \mathbf{A})^\perp. \end{cases}$$

**Dim.** La *i*) segue dalle equivalenze

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \text{Ker } \mathbf{A} &\iff \langle \mathbf{y}', \mathbf{Ax} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}' \iff \\ &\iff \langle \mathbf{A}'\mathbf{y}', \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'. \end{aligned}$$

La *ii*) segue dalle equivalenze

$$\begin{aligned} \mathbf{y}' \in \text{Ker } \mathbf{A}' &\iff \langle \mathbf{A}'\mathbf{y}', \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X} \iff \\ &\iff \langle \mathbf{y}', \mathbf{Ax} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \end{aligned}$$

che sono conseguenza della relazione di dualità tra  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{A}'$ . □

Si noti che il nucleo di un'applicazione lineare limitata  $\mathbf{A} \in L(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$  è un sottospazio lineare chiuso in  $\mathcal{X}$  così come è chiuso il sottospazio complemento ortogonale di un insieme qualsiasi di  $\mathcal{X}'$ . E' dunque chiuso il complemento ortogonale di  $\text{Im } \mathbf{A}$ .

In generale non è invece chiuso il sottospazio lineare immagine di una applicazione lineare limitata.

Prendendo i complementi ortogonali nelle *i)* e *ii)* della proposizione 6.2, si deducono le egualanze

$$\begin{cases} (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp = (\text{Im } \mathbf{A}')^{\perp\perp}, \\ (\text{Ker } \mathbf{A}')^\perp = (\text{Im } \mathbf{A})^{\perp\perp}. \end{cases}$$

Ne segue che le egualanze

$$\begin{cases} \text{i)} & (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp = \text{Im } \mathbf{A}', \\ \text{iv)} & (\text{Ker } \mathbf{A}')^\perp = \text{Im } \mathbf{A}, \end{cases}$$

sussistono se e solo se

$$\begin{cases} (\text{Im } \mathbf{A}')^{\perp\perp} = \text{Im } \mathbf{A}', \\ (\text{Im } \mathbf{A})^{\perp\perp} = \text{Im } \mathbf{A}. \end{cases}$$

Essendo  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  spazi di HILBERT si ha che

$$\begin{cases} (\text{Im } \mathbf{A}')^{\perp\perp} = \overline{\text{Im } \mathbf{A}'}, \\ (\text{Im } \mathbf{A})^{\perp\perp} = \overline{\text{Im } \mathbf{A}}. \end{cases}$$

Si può dunque concludere che le *iii)* e *iv)* sussistono se e solo se i sottospazi lineari  $\text{Im } \mathbf{A} \subset \mathcal{Y}$  e  $\text{Im } \mathbf{A}' \subset \mathcal{X}'$  sono chiusi.

Il celebrato *teorema dell'immagine chiusa* di BANACH [17], [35], [41], [47] stabilisce che assumere la chiusura di  $\text{Im } \mathbf{A} \subset \mathcal{Y}$  equivale ad assumere la chiusura di  $\text{Im } \mathbf{A}' \subset \mathcal{X}'$  e che tali proprietà possono essere espresse come diseguaglianze [47].

L'enunciato nel contesto di spazi di HILBERT è il seguente.

**Proposizione 6.3. Teorema dell'immagine chiusa.** *Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$  e  $\mathcal{Y}, \mathcal{Y}'$  coppie di spazi di HILBERT duali. Allora per ogni coppia di operatori duali  $\mathbf{A} \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  e  $\mathbf{A}' \in L\{\mathcal{Y}'; \mathcal{X}'\}$  le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti*

- i)*  $\text{Im } \mathbf{A}$  chiuso in  $\mathcal{Y} \iff \text{Im } \mathbf{A} = \text{Ker } (\mathbf{A}')^\perp$ ,
- ii)*  $\text{Im } \mathbf{A}'$  chiuso in  $\mathcal{X}' \iff \text{Im } \mathbf{A}' = (\text{Ker } \mathbf{A})^\perp$ ,
- iii)*  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathcal{Y}} \geq c \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}/\text{Ker } \mathbf{A}} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ,
- iv)*  $\|\mathbf{A}'\mathbf{y}'\|_{\mathcal{X}'} \geq c \|\mathbf{y}'\|_{\mathcal{Y}'/\text{Ker } \mathbf{A}'} \quad \forall \mathbf{y}' \in \mathcal{Y}'$ ,

con  $c$  costante positiva. □



Le norme  $\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}/\text{Ker } \mathbf{A}}$  e  $\|\mathbf{y}'\|_{\mathcal{Y}'/\text{Ker } \mathbf{A}'}$  sono definite da

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{X}/\text{Ker } \mathbf{A}} &:= \left\{ \inf \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|_{\mathcal{X}} \mid \boldsymbol{\xi} \in \text{Ker } \mathbf{A} \right\}, \\ \|\mathbf{y}'\|_{\mathcal{Y}'/\text{Ker } \mathbf{A}'} &:= \left\{ \inf \|\mathbf{y}' - \boldsymbol{\eta}\|_{\mathcal{Y}'} \mid \boldsymbol{\eta} \in \text{Ker } \mathbf{A}' \right\},\end{aligned}$$

e misurano la distanza dall'origine di varietà lineari rispettivamente parallele ai sottospazi lineari  $\text{Ker } \mathbf{A}$  e  $\text{Ker } \mathbf{A}'$ .

E' ora possibile dimostrare il teorema fondamentale.

**Proposizione 6.4. Teorema delle potenze virtuali.** *Si consideri una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  in cui l'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  sia un operatore di KORN. Allora per ogni sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^{\perp}$  in equilibrio esiste almeno uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  tale che la potenza virtuale compiuta da  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^{\perp}$  per un qualsiasi cinematismo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  sia eguale alla potenza virtuale compiuta dallo stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  per la corrispondente deformazione tangente  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ . In formule*

$$\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^{\perp} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \iff \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H} : \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

**Dim.** L'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  ha immagine chiusa.

Allora  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}$  dove  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  è il duale di  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$ .

La condizione di equilibrio  $\ell \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp} = \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}'$  assicura che esiste uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  tale che  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}}'\mathbf{T} = \ell$  e cioè tale che

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{B}_{\mathcal{L}}'\mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)).$$

e ciò dimostra l'assunto del teorema. □

Se i cinematismi sono detti *spostamenti virtuali*, il teorema 6.4 è detto *teorema dei lavori virtuali*.

**Osservazione 6.1.** Il teorema delle potenze virtuali costituisce il risultato fondamentale della meccanica del continuo.

Nel modello del continuo di CAUCHY la dimostrazione classica dell'esistenza dello stato di sforzo è condotta imponendo l'equilibrio alla traslazione di un elemento infinitesimo a forma di tetraedro (CAUCHY [5], [6], [4]) o di prisma (NOLL [33]). Tale classico approccio sarà illustrato nel capitolo IV. La tecnica dimostrativa è basata su un passaggio al limite la cui validità è subordinata all'ipotesi di continuità delle interazioni di contatto ed alla dipendenza del valore locale delle tensioni sulle superfici di contatto dal solo orientamento della normale (*postulato di CAUCHY*).

In effetti, all’epoca della trattazione svolta da CAUCHY (1822, 1823) non era ancora nota la legge di trasformazione integrale di GREEN (1828) che fu pubblicata solo postuma nel 1850 per merito di LORD KELVIN. La formula di GREEN, sulla base della *congettura* illustrata all’inizio della sezione 6.2 (p. 207), consente di dedurre le equazioni di equilibrio di CAUCHY per il campo tensoriale simmetrico di sforzi in modo semplice ed elegante, come sarà mostrato nella sezione 7.3 (p. 224). Ciò nonostante la forza della tradizione e probabilmente il fascino della personalità scientifica di CAUCHY hanno fatto sì che l’approccio iniziale fosse ricoppiato, con maggiore o minore rigore e precisione, in tutti i testi e trattati di meccanica del continuo. Il teorema delle potenze virtuali nella forma moderna qui illustrata è stato formulato per la prima volta in [48].

Il teorema fornisce la conferma matematica della *congettura* e consente di ritrovare il classico risultato di CAUCHY in un contesto funzionale molto più generale ed applicabile a qualsiasi modello strutturale (vedasi a tal proposito il capitolo IV). La derivazione delle equazioni di equilibrio di CAUCHY con moderna metodologia sarà condotta nella sezione 7.3 (p. 224) con riferimento ai problemi di valori al contorno. ■

La connessione tra la seconda diseguaglianza di KORN e le proprietà dell’operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{H}(\Omega))$  si deduce dal seguente risultato [46], [47].

**Proposizione 6.5. Diseguaglianze equivalenti.** *Sia  $H$  uno spazio di HILBERT,  $E$ ,  $F$  spazi lineari normati e  $\mathbf{A} \in L\{H, E\}$  un operatore lineare limitato. Allora le seguenti proprietà sono equivalenti.*

$$\mathbb{P}_1) \quad \begin{cases} \dim \text{Ker } \mathbf{A} < +\infty, \\ \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_E \geq c_{\mathbf{A}} \|\mathbf{u}\|_{H/\text{Ker } \mathbf{A}}, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \end{cases}$$

$$\mathbb{P}_2) \quad \begin{array}{l} \text{Esiste } \mathbf{L}_o \in L\{H, F\} \text{ compatto} \\ \text{tale che } \text{Ker } \mathbf{A} \cap \text{Ker } \mathbf{L}_o = \{\mathbf{0}\} \text{ e} \\ \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{L}_o\mathbf{u}\|_F \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_H, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \end{array}$$

$$\mathbb{P}_3) \quad \begin{cases} \dim \text{Ker } \mathbf{A} < +\infty, \\ \|\mathbf{A}\mathbf{u}\|_E + \|\mathbf{L}\mathbf{u}\|_F \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{H/(\text{Ker } \mathbf{A} \cap \text{Ker } \mathbf{L})}, \quad \forall \mathbf{u} \in H, \\ \forall \mathbf{L} \in L\{H, F\}. \end{cases}$$

La fondamentale implicazione  $\mathbb{P}_2 \Rightarrow \mathbb{P}_1$  è dovuta a LUC TARTAR [37], [39], [46], [47]. Le implicazioni  $\mathbb{P}_3 \Rightarrow \mathbb{P}_1$ ,  $\mathbb{P}_1 \Rightarrow \mathbb{P}_3$  e  $\mathbb{P}_3 \Rightarrow \mathbb{P}_2$  sono state stabilite dall’autore in [46]. Le dimostrazioni possono trovarsi anche in [47]. Nella formula di KORN l’operatore compatto  $\mathbf{L}_o$  è l’immersione canonica di  $H^1(\Omega)$  in  $H(\Omega) = L^2(\Omega)$  (principio di selezione di RELLICH, [31], [36], [46] e [49], proposizione VIII.1.2 (p. 123)). □

#### 6.4. Reazioni vincolari

Sia  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$  un sistema di forze attive in equilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$ . Il teorema delle potenze virtuali stabilisce allora l'esistenza di almeno uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  in equilibrio con  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$ . Si ha quindi che

- L'insieme dei campi di sforzo in *equilibrio* con un assegnato sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è una varietà lineare non vuota  $\mathcal{S}_\ell = \mathcal{S}_\ell(\mathcal{T}(\Omega))$  definito da

$$\mathcal{S}_\ell := \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{H} : (\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle) = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \right\}.$$

Ogni stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_\ell$  fornisce una rappresentazione esplicita di un sistema di forze che è estensione del sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$  ed è in equilibrio sulla struttura non vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$ .

Infatti il prodotto interno  $(\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle)$  definisce un funzionale lineare continuo  $\mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{F}(\Omega)$  definito da

$$\langle \mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle := (\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega),$$

La continuità di  $\mathbf{f}_\ell(\mathbf{T})$  è un'immediata conseguenza della diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ. Infatti si ha che

$$| \langle \mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle | = | (\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle) | \leq \| \mathbf{T} \|_{\mathcal{H}(\Omega)} \| \mathbf{Bv} \|_{\mathcal{H}(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Dalla definizione segue inoltre che

$$\mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}) = \mathbf{B}' \mathbf{T} \in \text{Im } \mathbf{B}' \subseteq (\text{Ker } \mathbf{B})^\perp.$$

La condizione  $\mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}) \subseteq (\text{Ker } \mathbf{B})^\perp$  esprime l'annullarsi della potenza virtuale compiuta dal sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell(\mathbf{T})$  per ogni cinematismo rigido e cioè

$$\langle \mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}.$$

Si dice allora che

- il sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{F}(\Omega)$  è in equilibrio sulla struttura non vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$ .

Se  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{F}(\Omega)$  è un'altra qualsiasi estensione di  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$  si ha che

$$\langle \mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Il sistema di forze  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{F}(\Omega)$  definito da  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) = \mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}) - \mathbf{f}_\ell$ , è un sistema reattivo. Risulta infatti

$$\langle \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle - \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Si può quindi concludere che sussiste il seguente risultato che stabilisce l'equivalenza tra il *principio della potenza virtuale* e l'*assioma dell'equilibrio* enunciati nella sezione 6 (p. 201).

**Proposizione 6.6. Sistemi reattivi.** *Sia  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$  un sistema di forze attive in equilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  e  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{F}(\Omega)$  un sistema di forze estensione del sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$ . Allora in corrispondenza di ogni stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_\ell$  in equilibrio con  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$  è possibile determinare un sistema reattivo  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{R}(\Omega)$  che, sommato al sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{F}(\Omega)$ , soddisfi il principio delle potenze virtuali sulla struttura non vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$ , cioè tale che*

$$\langle \mathbf{f}_\ell, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle = \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

In particolare, assumendo come campi di prova i *cinematismi rigidi*,  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o(\Omega)$  si deduce che

$$\langle \mathbf{f}_\ell, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}), \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o(\Omega),$$

e cioè il sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{F}(\Omega)$  è in equilibrio sulla struttura non vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$ .  $\square$

## 6.5. Stati di sforzo in autoequilibrio

■ Il sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{H}$  costituito dai campi di sforzo in *autoequilibrio* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  è per definizione il nucleo dell'operatore  $\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  ed è quindi definito da

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} := \{ \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) : \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \}.$$

Gli stati di sforzo in *autoequilibrio* sono in equilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  con forze attive nulle e dunque sulla struttura non vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$  con sistemi di forze puramente reattivi. Infatti

$$\mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \iff \mathbf{B}' \mathbf{T} \in \mathcal{R}(\Omega).$$

Si consideri ora una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  soggetta ad un sistema di forze attive in equilibrio  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

Dal teorema delle potenze virtuali si traggono le seguenti proprietà.

La varietà lineare degli sforzi in equilibrio  $\mathcal{S}_\ell$  può essere espressa come somma

- di un qualsiasi particolare stato di sforzo  $\mathbf{T}_\ell \in \mathcal{S}_\ell$  in equilibrio col sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ,

- e del sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} \subset \mathcal{H}$  degli stati di sforzo in *autoequilibrio*

$$\mathcal{S}_\ell = \mathbf{T}_\ell + \mathcal{S}_{\text{AUTO}}, \quad \mathbf{T}_\ell \in \mathcal{S}_\ell.$$

Se il sottospazio lineare  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} \subset \mathcal{H}(\Omega)$  ha dimensione finita, tale dimensione è detta *grado di iperstaticità* o *grado di indeterminazione statica* della struttura.

Il sottospazio lineare degli stati di sforzo in autoequilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  può essere caratterizzato come il complemento ortogonale, nello spazio di HILBERT  $\mathcal{H}$ , del sottospazio lineare delle deformazioni tangenti associate a cinematicismi conformi. Infatti una dimostrazione analoga a quella della proposizione 6.2 (p. 213), ma formulata in spazi di HILBERT, fornisce la relazione

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = (\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^\perp = (\mathbf{B}\mathcal{L})^\perp,$$

dove l'apice  $(-)^{\perp}$  denota l'ortogonalità rispetto al prodotto interno in  $\mathcal{H}$ .

Gli stati di sforzo in autoequilibrio sono detti anche *autosforzi* o *coazioni* e svolgono un ruolo fondamentale nella formulazione della condizione variazionale di congruenza, come sarà illustrato nella sezione 8 (p. 233).

## 6.6. Strutture staticamente determinate

Si consideri un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  in equilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  ed una sua estensione ad un sistema di forze

$$\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subseteq \mathcal{F}(\Omega).$$

In generale il sistema reattivo  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) = \mathbf{B}'\mathbf{T} - \mathbf{f}_\ell \in \mathcal{R}(\Omega)$  in equilibrio con  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{F}(\Omega)$  non è unico.

■ Una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  è detta *staticamente determinata* se per ogni assegnato sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$  risulta univocamente definito il sistema reattivo  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) = \mathbf{B}'\mathbf{T} - \mathbf{f}_\ell \in \mathcal{R}(\Omega)$ .

Vale in proposito il seguente risultato.

**Proposizione 6.7.** *Una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  è staticamente determinata se e solo se la varietà lineare  $\mathcal{S}_\ell$  degli stati di sforzo in equilibrio con un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp$  è costituita da un solo campo, ovvero se e solo se il sottospazio lineare  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  degli stati di sforzo in autoequilibrio sulla struttura vincolata è costituito dal solo campo nullo.*

**Dim.** Se la struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  è staticamente determinata, per ogni assegnato sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}^\perp \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$  è unico il sistema di forze reattive  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{R}(\Omega)$  tali che  $\mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) = \mathbf{B}'\mathbf{T}$ . Essendo  $\text{Ker } \mathbf{B}' = \{\mathbf{o}\}$  (vedi la proposizione 6.0 (p. 202)) anche lo stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_\ell$  risulta univocamente determinato. Viceversa l'unicità dello stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_\ell$  implica l'unicità del sistema reattivo  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T}) \in \mathcal{R}(\Omega)$  tale che  $\mathbf{B}'\mathbf{T} = \mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T})$ .  $\square$

## 7. PROBLEMI AL CONTORNO

La classica formulazione della meccanica del continuo dovuta ad EULER<sup>50</sup> ed a CAUCHY<sup>51</sup> è basata sull'assunzione che

- le forze attive agenti su di una struttura continua sono costituite da forze di massa e da forze di contatto
- i vincoli cinematici, lisci, perfetti e bilaterali, sono imposti solo sui valori al contorno dei cinematicismi.

I problemi strutturali così formulati sono detti *problem di valori al contorno* e sono quindi caratterizzati dalle seguenti proprietà.

- a) Il sottospazio dei cinematicismi conformi è definito da vincoli imposti sui cinematicismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -regolari in corrispondenza del contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di una *suddivisione base*  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Ciò equivale ad assumere che

$$\text{Ker } \boldsymbol{\Gamma} \subseteq \mathcal{L}.$$

- b) Le forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  sono composte da

- campi di *forze di massa*  $\mathbf{b} \in H$  di quadrato integrabile sul dominio  $\Omega$  della struttura che è una varietà di dimensione  $d$ ,
- sistemi di *forze di contatto*  $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$  distribuite sulla varietà  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di dimensione  $d - 1$  contorno della suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

La potenza virtuale del sistema di forze attive  $\ell = \{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è definita da

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

con  $\mathbf{b} \in H$  e  $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$ . E' immediato verificare che  $\ell = \{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in \mathcal{F}(\Omega)$  e cioè che il funzionale lineare così definito è limitato sullo spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$ .

---

<sup>50</sup> LEONHARD EULER (1707-1783). EULER considerò solo stati tensionali di tipo idrostatico in cui le interazioni sono puramente normali.

<sup>51</sup> AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857). CAUCHY per primo considerò interazioni di tipo vettoriale ed introdusse il tensore degli sforzi.

Infatti la disegualanza di CAUCHY-SCHWARZ e la limitatezza dell'operatore  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  dei valori al contorno su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  assicurano che

$$|(\mathbf{b}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{b}\|_H \|\mathbf{v}\|_H \leq \|\mathbf{b}\|_H \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

$$|\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{t}\|_{\partial\mathcal{F}} \|\Gamma\mathbf{v}\|_{\partial\mathcal{V}} \leq \|\mathbf{t}\|_{\partial\mathcal{F}} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Un ruolo basilare nella teoria è svolto dalla proprietà di *suriettività* dell'operatore  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  dei valori al contorno su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  che si formalizza nella condizione

$$\text{Im } \Gamma = \partial\mathcal{V}.$$

### 7.1. Vincoli al contorno

Si consideri un insieme di *vincoli al contorno*, lisci, perfetti e bilaterali,  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  che è una famiglia di condizioni lineari che definiscono un sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$  di *cinematismi conformi*.

A tale sottospazio appartengono in particolare tutti i cinematismi con valori al contorno nulli.

- Una rappresentazione *implicita* del sottospazio lineare  $\mathcal{L}$  si ottiene considerando un operatore lineare continuo

$$\mathbf{G} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{Q}\},$$

dove  $\partial\mathcal{Q}$  è lo spazio di HILBERT dei *parametri di controllo* su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ .

Il sottospazio lineare  $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$  dei cinematismi conformi è individuato come nucleo dell'operatore composto  $\mathbf{G}\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{Q}\}$ :

$$\mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{G}\Gamma = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \Gamma\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{G}\} \iff \Gamma\mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{G},$$

ed è pertanto un sottospazio chiuso.

**Osservazione 7.1.** Si noti che la definizione del sottospazio lineare dei cinematismi conformi consiste nel porre  $\mathcal{L} := \Gamma^{-1}(\text{Ker } \mathbf{G})$  e ciò implica che  $\Gamma\mathcal{L} \subseteq \text{Ker } \mathbf{G}$ . L'implicazione inversa è conseguenza della suriettività dell'operatore al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$  su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ . Ne segue che sussiste l'eguaglianza  $\Gamma\mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{G}$ . ■

- Una rappresentazione *esplicita* si ottiene considerando uno spazio di HILBERT  $\partial\Lambda$  di *parametri cinematici* su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  ed un operatore lineare continuo

$$\mathbf{P} \in L\{\partial\Lambda; \partial\mathcal{V}\}.$$

Si individua quindi il sottospazio lineare  $\mathcal{L}$  dei cinematismi conformi come controimmagine del sottospazio lineare  $\mathbf{P}\partial\Lambda$  tramite l'operatore al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$ .



Si ha dunque che

$$\mathcal{L} = \Gamma^{-1}(\mathbf{P} \partial A) = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \Gamma \mathbf{v} = \mathbf{P} \partial \lambda, \lambda \in \partial A\} \iff \Gamma \mathcal{L} = \text{Im } \mathbf{P}.$$

L'eguaglianza  $\Gamma \mathcal{L} = \text{Im } \mathbf{P}$  è conseguenza della suriettività dell'operatore al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\}$  e ciò impone che l'immagine di  $\mathbf{P}$  sia chiusa in  $\partial \mathcal{V}$  essendo  $\text{Im } \mathbf{P} = \Gamma \mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{G}$ .

Affinchè la rappresentazione esplicita sia univoca è poi necessario che il nucleo di  $\mathbf{P}$  sia degenere, e cioè che  $\text{Ker } \mathbf{P} = \{\mathbf{o}\} \subset A$ .

■ Il sottospazio lineare  $\partial \mathcal{R} \subset \partial \mathcal{F}$  delle *reazioni vincolari al contorno* su  $\partial \mathcal{T}(\Omega)$  è il complemento ortogonale del sottospazio lineare  $\Gamma \mathcal{L} \subset \partial \mathcal{V}$  costituito dai valori al contorno su  $\partial \mathcal{T}(\Omega)$  dei cinematicismi conformi:

$$\partial \mathcal{R} = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp.$$

La continuità di  $\mathbf{G} \in L\{\partial \mathcal{V}; \mathcal{Q}\}$  assicura che  $\Gamma \mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{G}$  è chiuso in  $\partial \mathcal{V}$  e quindi che  $[\Gamma \mathcal{L}]^{\perp\perp} = \Gamma \mathcal{L}$ .

Valgono pertanto le relazioni di ortogonalità

$$\partial \mathcal{R} = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp \iff \Gamma \mathcal{L} = [\partial \mathcal{R}]^\perp.$$

Si considerino gli operatori

$$\begin{aligned} \mathbf{G}' &\in L\{\mathcal{Q}'; \partial \mathcal{F}\} \quad \text{che è il duale di } \mathbf{G} \in L\{\partial \mathcal{V}; \mathcal{Q}\}, \\ \mathbf{P}' &\in L\{\partial \mathcal{F}; \Lambda'\} \quad \text{che è il duale di } \mathbf{P} \in L\{\Lambda; \partial \mathcal{V}\}, \end{aligned}$$

Allora risulta

$$\text{Ker } \mathbf{P}' = [\text{Im } \mathbf{P}]^\perp = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp.$$

Se gli operatori di vincolo  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{G}'$  hanno immagine chiusa si ha che

$$\text{Im } \mathbf{G}' = [\text{Ker } \mathbf{G}]^\perp,$$

e quindi che

$$\text{Im } \mathbf{G}' = [\text{Ker } \mathbf{G}]^\perp = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp = \partial \mathcal{R}.$$

Si può concludere che gli operatori  $\mathbf{P}'$  e  $\mathbf{G}'$  e forniscono rispettivamente una rappresentazione implicita ed esplicita del sottospazio lineare delle reazioni vincolari al contorno. Sussiste la seguente proprietà.

**Proposizione 7.1. Rappresentazione dei sistemi reattivi.** *Si consideri una struttura  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  vincolata con condizioni al contorno su  $\partial \mathcal{T}(\Omega)$ . Allora ad ogni sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{F}$  corrisponde un sistema di forze reattive al contorno  $\rho \in (\Gamma \mathcal{L})^\perp$  univocamente definito e tale che*

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = \langle \langle \rho, \Gamma \mathbf{v} \rangle \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \iff \mathbf{r} = \Gamma' \rho.$$

**Dim.** Essendo  $\text{Ker } \Gamma \subseteq \mathcal{L}$  sussiste l'inclusione  $\mathcal{L}^\perp \subseteq (\text{Ker } \Gamma)^\perp$  dove l'ortogonalità va intesa nel senso della dualità tra  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}$ .

In virtù del teorema dell'immagine chiusa di BANACH, la proprietà di chiusura  $\text{Im } \Gamma = (\text{Ker } \Gamma)^\perp$  equivale alla relazione  $\text{Im } \Gamma' = (\text{Ker } \Gamma)^\perp$ . Pertanto risulta

$$\mathcal{L}^\perp \subseteq (\text{Ker } \Gamma)^\perp = \text{Im } \Gamma',$$

e l'esistenza è provata. L'unicità si trae dalla relazione

$$\text{Ker } \Gamma' = (\text{Im } \Gamma)^\perp = \{\mathbf{o}\},$$

conseguenza della suriettività dell'operatore  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$ .  $\square$

I vincoli puntuali al contorno di tipo assoluto e relativo saranno analizzati in dettaglio nella sezione 14.9 (p. 299).

## 7.2. Sforzi conformi

Siano

- $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{S}(\Omega)$  lo spazio di HILBERT dei campi di sforzo GREEN-regolari che sono  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi,
- $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}, \partial\mathcal{F}\}$  l'operatore di flusso attraverso il contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  della suddivisione di supporto  $\mathcal{T}(\Omega)$ .
- Il sottospazio lineare degli *sforzi conformi*  $\Sigma = \Sigma(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega))$  è costituito dai campi di sforzo in equilibrio sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  con forze di contatto puramente reattive.

I campi di sforzo  $\mathbf{T} \in \Sigma$  sono quindi definiti dalla condizione variazionale

$$\begin{aligned} \Sigma := & \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{N}\mathbf{T} \in [\mathbf{T}\mathcal{L}]^\perp = \partial\mathcal{R} \right\} = \\ & = \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{S} : \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \right\}, \end{aligned}$$

La formula di GREEN mostra che il sottospazio lineare degli sforzi conformi può essere equivalentemente caratterizzato mediante la condizione

$$\mathbf{T} \in \Sigma \iff (\mathbf{B}_o^T \mathbf{T}, \mathbf{v}) = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Ne segue che

$$(\mathbf{B}_o^T \mathbf{T}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma.$$

e cioè che le forze di massa in equilibrio con sforzi conformi sono in equilibrio.

Il sottospazio lineare  $\Sigma$  degli sforzi conformi è chiuso in  $\mathcal{S}$  in quanto controimmagine di un insieme chiuso tramite una trasformazione continua.

**Osservazione 7.2.** Nei metodi di soluzione di problemi strutturali in cui il campo di sforzi  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  è assunto quale incognita primaria è possibile esprimere il campo di sforzi incognito come combinazione lineare di campi interpolanti definiti a pezzi sugli elementi di una suddivisione finita, senza richiedere che siano soddisfatte a priori le condizioni di equilibrio di interfaccia tra gli elementi. Tali condizioni sono infatti imposte dal metodo variazionale alla soluzione del problema e sono pertanto dette *condizioni naturali*.

In questa classe di metodi rientra l'approccio primale del metodo misto sforzi-spostamenti degli elementi finiti in elasticità (vedi ad es. [45], [48]).

Tale metodo è basato infatti su di un principio variazionale in cui i campi incogniti sono costituiti da campi di sforzo che sono assunti solo di quadrato integrabile e da campi di spostamento conformi  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ . Le condizioni di continuità dei campi di spostamento sono pertanto *condizioni geometriche*. ■

**Osservazione 7.3.** Se un campo di sforzi conformi  $\mathbf{T} \in \Sigma(\Omega)$  è espresso come combinazione lineare di campi interpolanti definiti a pezzi sugli elementi di una suddivisione finita è necessario imporre il soddisfacimento *a priori* delle condizioni di equilibrio di interfaccia tra gli elementi che sono pertanto dette *condizioni geometriche*.

In questa classe rientra l'approccio complementare del metodo misto sforzi-spostamenti degli elementi finiti (vedi ad es. [45], [48]).

Tale metodo è basato su di un principio variazionale in cui i campi incogniti sono costituiti da campi di sforzo conformi e da campi di spostamento  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  che sono assunti solo di quadrato integrabile. Le condizioni di continuità dei campi di spostamento sono imposte dal metodo variazionale alla soluzione del problema e pertanto sono dette *condizioni naturali*. ■

### 7.3. Equazioni di equilibrio di Cauchy

Nei problemi di valori al contorno la condizione di equilibrio tra un sistema di forze di massa e di contatto  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  ed uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  può essere espressa in termini di un'equazione differenziale e di condizioni al contorno.

A CAUCHY sono dovuti i classici teoremi della meccanica del continuo che dimostrano l'esistenza del tensore degli sforzi e forniscono l'espressione delle condizioni di equilibrio differenziali ed al contorno.

Tali risultati richiedono opportune ipotesi di continuità e saranno illustrati nel capitolo III.

Nel contesto più generale qui considerato, l'esistenza di uno stato di sforzo che soddisfa la condizione variazionale di equilibrio è stabilita dal teorema delle potenze virtuali, proposizione 6.4 (p. 215).

Il prossimo risultato mostra che la condizione variazionale di equilibrio tra un sistema di forze attive ed uno stato di sforzo può essere equivalentemente espressa mediante un sistema di equazioni di equilibrio differenziali e di condizioni al contorno.

Nonostante i classici teoremi di CAUCHY differiscano sia per formulazione che per metodo dimostrativo, alla proposizione si dà il nome di teorema di CAUCHY in onore del fondatore della meccanica del continuo.

**Proposizione 7.2. Teorema di Cauchy.** *Sia  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  una struttura vincolata con vincoli al contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  in corrispondenza di una suddivisione base  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Allora un sistema di forze di massa e di contatto  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  ed uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  soddisfano la condizione variazionale di equilibrio*

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle = (\mathbf{T}, \mathbf{Bv}), \quad \mathbf{T} \in \mathcal{H}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

se e solo se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio di CAUCHY:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_o \mathbf{T} &= \mathbf{b}, && \text{equilibrio di massa,} \\ \mathbf{N}\mathbf{T} &= \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho} && \text{equilibrio al contorno,} \end{aligned}$$

in cui  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  e  $\boldsymbol{\rho} \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp$  è un sistema reattivo di contatto su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ .

**Dim.** Sia soddisfatta la condizione variazionale di equilibrio. Assumendo campi di prova  $\varphi \in \mathbb{D} \subset \text{Ker } \Gamma \subseteq \mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  e ricordando la definizione distribuzionale dell'operatore  $\mathbb{B}'_o : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{D}'$  data da

$$\langle \mathbb{B}'_o \mathbf{T}, \varphi \rangle := \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{B}\varphi, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{H} \quad \forall \varphi \in \mathbb{D},$$



si perviene alla relazione

$$(\mathbf{b}, \varphi) = (\mathbf{T}, \mathbf{B}\varphi) = (\mathbb{B}'_o \mathbf{T}, \varphi), \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}.$$

Ne segue che  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  e che  $\mathbb{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b}$ . Dalla formula di GREEN

$$(\mathbf{T}, \mathbf{Bv}) = (\mathbb{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{S},$$

e dalla condizione variazionale di equilibrio si deduce quindi che

$$\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{S} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

ovvero che

$$\mathbf{N}\mathbf{T} - \mathbf{t} \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp = \partial\mathcal{R}.$$

Viceversa siano soddisfatte le condizioni di equilibrio di CAUCHY. Allora, notando che

$$\langle \boldsymbol{\rho}, \Gamma\mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

la formula di GREEN fornisce la condizione variazionale di equilibrio.  $\square$



Sulle interfacce di  $\mathcal{T}(\Omega)$  in corrispondenza delle quali è imposto ai valori al contorno dei cinematicismi un vincolo di completa continuità, e dove non agiscono forze attive i campi di sforzi conformi *continui* rispettano il *principio locale di azione e reazione*:

$$\mathbf{T}^+ \mathbf{n}^+ + \mathbf{T}^- \mathbf{n}^- = \mathbf{o} \text{ su } \mathcal{S} = (\overline{\mathcal{P}})^+ \cap (\overline{\mathcal{P}})^-,$$

che, ponendo  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^-$ , si scrive

$$\mathbf{T}^+ \mathbf{n} = \mathbf{T}^- \mathbf{n} \text{ su } \mathcal{S} \iff [[\mathbf{T}]] \mathbf{n} = \mathbf{o} \text{ su } \mathcal{S}.$$

A tale conclusione si perviene localizzando la condizione di equilibrio al contorno

$$\int_{\mathcal{S}} (\mathbf{T}^+ \mathbf{n}^+ + \mathbf{T}^- \mathbf{n}^-) \cdot \varphi = 0, \quad \mathbf{T} \in \mathcal{H} \quad \forall \varphi \in \mathbb{D} : \text{supp} \varphi \subset \mathcal{S},$$

facendo ricorso al corollario I.1.2 (p. 7) del lemma fondamentale. Per una puntuale analisi di queste condizioni si rinvia alla sezione 14.9 (p. 299).

**Osservazione 7.4.** Dal teorema di CAUCHY si evince che lo spazio delle *coazioni nascoste o autosforzi nascosti* è definito dalle proprietà

$$\begin{aligned} \text{Ker } \mathbf{B}' &:= \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{H} : (\mathbf{T}, \mathbf{Bv}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega) \right\} = \\ &= \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{H} : \mathbf{B}_o' \mathbf{T} = \mathbf{o} \in H, \quad \mathbf{NT} = \mathbf{o} \in \partial \mathcal{F} \right\}. \end{aligned}$$

per ogni suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  di  $\Omega$ . Le coazioni nascoste sono quindi gli sforzi  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  in equilibrio con forze di massa nulle quasi ovunque in  $\Omega$  e con forze di contatto nulle sulla frontiera di una qualsiasi suddivisione di  $\Omega$ . ■

Le equazioni di equilibrio di una struttura continua furono formulate da AUGUSTIN LOUIS CAUCHY nel 1822 [5]. La trattazione originale di CAUCHY sarà illustrata nel capitolo IV insieme ad una formulazione duale dovuta all'autore.

In termini di componenti rispetto ad un riferimento cartesiano  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  le equazioni di equilibrio di CAUCHY si scrivono

$$\begin{cases} b_1 + \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3} = 0 \\ b_2 + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} = 0 & \text{equilibrio interno,} \\ b_3 + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3} = 0 \\ t_1 = T_{11} n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 \\ t_2 = T_{12} n_1 + T_{22} n_2 + T_{23} n_3 & \text{equilibrio al contorno.} \\ t_3 = T_{13} n_1 + T_{23} n_2 + T_{33} n_3 \end{cases}$$

In forma indiciale le le equazioni di equilibrio di CAUCHY si scrivono

$$b_i + T_{ij/j} = 0 , \quad t_i = T_{ij} n_j , \quad i, j = 1, 2, 3 ,$$

dove si è adottata la convenzione della somma rispetto agli indici ripetuti ed il pedice  $/$  per denotare la derivazione parziale.

Sia  $\mathcal{S}(\Omega)$  lo spazio dei campi di sforzo GREEN-regolari definito da

$$\mathcal{S}(\Omega) := \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega) : \mathbf{B}'_o \mathbf{T}|_P \in H(\mathcal{P}) \right\} ,$$

dove  $\mathbf{T}|_P$  è la restrizione di  $\mathbf{T}$  a  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega)$ .

- Dalla formula di GREEN si evince che, se il campo di sforzi  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  appartiene allo spazio  $\mathcal{S}(\Omega)$ , allora le forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  agenti sulla struttura, in equilibrio con  $\mathbf{T}$ , sono costituite da forze di massa  $\mathbf{b} \in H(\Omega)$  e da forze di contatto  $\mathbf{t} \in \mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega))$  in corrispondenza di ogni suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  di  $\Omega$  che sia di supporto per  $\mathbf{T}$ .

Si ha infatti che

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v}) = (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \mathbf{\Gamma}\mathbf{v} \rangle , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} .$$

Dunque, posto  $\mathbf{b} = \mathbf{B}'_o \mathbf{T}$  e  $\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{T}$ , risulta

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \mathbf{\Gamma}\mathbf{v} \rangle , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} .$$

Viceversa dal teorema di CAUCHY si deduce che, se il sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è costituito da forze di massa e forze di contatto in corrispondenza di una suddivisione base, allora il campo di sforzi  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega)$  appartiene al sottospazio  $\mathcal{S}(\Omega)$  ed i sistemi reattivi sono costituiti da sistemi di forze di contatto in corrispondenza di una qualsiasi suddivisione più fitta.

La trattazione classica della meccanica del continuo è basata su di un postulato dovuto ad EULER ed a CAUCHY consistente nell'assumere che le forze attive siano costituite da forze di massa  $\mathbf{b} \in H(\Omega)$  e da forze di contatto  $\mathbf{t} \in \mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

EULER considerava forze di contatto normali alla superficie di contorno, mentre CAUCHY estese la trattazione per includere forze di contatto comunque dirette.

Dalle considerazioni precedenti si evince che il postulato di EULER-CAUCHY è equivalente alla richiesta che i campi di sforzo siano GREEN-regolari.

**Osservazione 7.5.** Nei testi di meccanica delle strutture il *principio dei lavori virtuali* viene classicamente proposto con un enunciato che, nella terminologia qui adottata, afferma quanto segue.

*Forma classica del principio dei lavori virtuali.*

- Si consideri un problema di valori al contorno in corrispondenza di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  e si assegnino due sistemi di dati.
  - Un *sistema statico*  $\{\mathbf{f}, \mathbf{T}\} \in \mathcal{F}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega)$  costituito da un sistema di forze  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}_\ell \in \mathcal{F}$ , somma di un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e di un sistema reattivo  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{T})$ , e da uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  in *equilibrio* sul modello strutturale  $\mathcal{M} = \{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  e cioè tali che

$$\begin{cases} \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b}, & \text{equilibrio di massa,} \\ \mathbf{N} \mathbf{T} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho} & \text{equilibrio al contorno,} \end{cases}$$

dove  $\ell = \{\mathbf{b}, \mathbf{t}\}$  e  $\boldsymbol{\rho} \in [\Gamma \mathcal{L}]^\perp$  è un sistema reattivo di contatto su  $\partial \mathcal{T}(\Omega)$ .

- Un *sistema cinematico*  $\{\mathbf{v}, \mathbf{Bv}\} \in \mathcal{V}(\Omega) \times \mathcal{H}(\Omega)$  costituito da un campo cinematico  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  e dal corrispondente campo di deformazione tangente  $\mathbf{Bv} \in \mathcal{H}(\Omega)$ .

Allora la potenza virtuale compiuta dal sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  per il cinetismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  è uguale alla potenza virtuale compiuta dallo stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  per la deformazione tangente  $\mathbf{Bv} \in \mathcal{H}(\Omega)$ :

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{T}, \mathbf{Bv}).$$

Il principio dei lavori virtuali, nell’accezione sopra enunciata, è una diretta conseguenza della formula di GREEN (si veda la dimostrazione della sufficienza nel teorema di CAUCHY, proposizione 7.2) e della definizione di sistema reattivo (vedi sezione 6.4 (p. 216)).

Al contrario il *teorema dei lavori virtuali*, (o *teorema delle potenze virtuali*) enunciato nella proposizione 6.4 (p. 215) è invece basato su di un profondo risultato di esistenza in Analisi Lineare e fornisce una basilare rappresentazione dei sistemi di forze attive in equilibrio, in termini di stati di sforzo.

Il teorema dei lavori virtuali fa riferimento alla definizione assiomatica di equilibrio ed è basato sulla richiesta che l’operatore cinematico sia un operatore di KORN. La dimostrazione non richiede altre ipotesi.

Dalla trattazione svolta nella sezione 6.3 (p. 210) è inoltre evidente che il teorema dei lavori virtuali non richiede che i vincoli definiscano un problema di valori al contorno. ■

#### 7.4. Forze concentrate

Si noti che è importante poter considerare forze concentrate agenti in punti di una struttura continua.

Le forze concentrate sono definite dal compiere potenza virtuale solo per il valore assunto dai cinematicismi in corrispondenza del punto in cui esse agiscono:

- Una *forza concentrata*  $\{x, \mathbf{F}\}$  in un punto  $x \in \Omega$  è un sistema di forze attive  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  la cui potenza virtuale in corrispondenza di un cinematicismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  è definita da

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}(x),$$

dove  $\mathbf{F} \in V$  è il vettore rappresentativo della forza concentrata.

E' possibile pertanto considerare forze concentrate in un punto di  $\Omega$  solo se i cinematicismi ammissibili sono ivi continui. La teoria degli spazi di SOBOLEV mostra però che nel continuo bidimensionale e tridimensionale i cinematicismi appartenenti a  $H^1(\Omega)$  non sono necessariamente continui [47].

Le forze concentrate vengono quindi simulate mediante campi distribuiti su dischi di dimensione infinitesima e gli stati tensionali in equilibrio con forze concentrate si valutano con un procedimento di limite.

A tal proposito si noti che gli stati tensionali in equilibrio con forze concentrate non appartengono allo spazio  $\mathcal{S}$  ed hanno comportamenti singolari nei punti di applicazione delle forze concentrate, nel senso che il campo  $\mathbf{T}$  e la sua divergenza risultano non limitati in un intorno di tali punti.

Nelle applicazioni la verifica della resistenza del materiale richiede quindi una analisi correttiva in un opportuno intorno delle singolarità.

Ciò nonostante gli stati tensionali con singolarità giocano un ruolo rilevante nella teoria delle strutture continue.

In particolare la conoscenza di soluzioni singolari del problema dell'equilibrio elastico di una struttura continua è di fondamentale importanza sia dal punto di vista teorico che da quello applicativo.

#### 7.5. Discontinuità

In corrispondenza delle zone di interfaccia in cui lo stato tensionale è continuo e sulle quali non agiscono né tensioni attive né vincoli assoluti, (si veda la sezione 14.9.5 (p. 302)) la condizione di equilibrio al contorno impone che

$$[(\mathbf{T}\mathbf{n})^+ + (\mathbf{T}\mathbf{n})^-](x) = \mathbf{o} \quad \forall x \in \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}.$$

Ponendo  $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+(x) = -\mathbf{n}^-(x)$  si può definire il salto di discontinuità del flusso dello stato tensionale

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]](x) = [\mathbf{T}^+ - \mathbf{T}^-]\mathbf{n}(x).$$

La condizione di equilibrio al contorno può allora riscriversi

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]](\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta},$$

ed esprime la continuità del flusso dello stato tensionale attraverso le interfacce su cui non agiscono tensioni esterne.

In corrispondenza di interfacce non caricate

- gli stati tensionali  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  possono essere discontinui ma
- i flussi degli stati tensionali sono continui.

Un semplice esempio è illustrato in figura 7.1 dove è rappresentata una struttura continua a forma di prisma retto di asse  $\mathbf{d}$  e suddivisa in due elementi  $\overline{\mathcal{P}}_1$  e  $\overline{\mathcal{P}}_2$  da una superficie piana  $\pi$  parallela a  $\mathbf{d}$  e con normale  $\mathbf{n}$ .

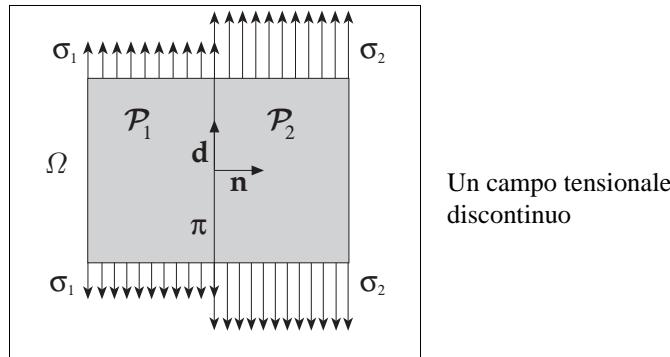


Fig. 7.1

Il prisma è caricato sulle basi inferiore e superiore da tensioni di trazione pari a  $\sigma_1$  su  $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{P}_1$  e  $\sigma_2$  su  $\partial\Omega \cap \partial\mathcal{P}_2$ .

Si consideri ora lo stato tensionale separatamente costante su  $\overline{\mathcal{P}}_1$  e  $\overline{\mathcal{P}}_2$  definito da:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}) &:= \sigma_1 \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_1, \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}) &:= \sigma_2 \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}, & \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_2. \end{aligned}$$

Tale stato tensionale è evidentemente in equilibrio col carico in quanto risulta:

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

ed è soddisfatta la condizione di equilibrio sul contorno  $\partial\Omega$ .

Il flusso  $\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}$  dello stato tensionale attraverso  $\pi$  è identicamente nullo in quanto, detto  $\mathbf{n}$  un versore normale a  $\pi$ , risulta  $\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = 0$  e quindi:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n} = (\sigma_1 \mathbf{d})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) = (\sigma_2 \mathbf{d})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{x} \in \pi.$$

Se  $\sigma_1 \neq \sigma_2$  lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  risulta discontinuo lungo la frontiera piana  $\pi$  di separazione tra  $\overline{\mathcal{P}}_1$  e  $\overline{\mathcal{P}}_2$ , non caricata. Il suo flusso  $\mathbf{T}\mathbf{n}$  attraverso  $\pi$  è però continuo (in particolare è nullo). ■

## 7.6. Vettori caratteristici

Nella sezione 6.1 (p. 204) sono stati introdotti i vettori caratteristici che definiscono le classi di equivalenza statica di sistemi di forze agenti sulla struttura.

Se tali sistemi di forze sono costituiti da forze di massa e di contatto  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \mathcal{F}$  è possibile dare una espressione esplicita al vettore risultante ed al vettore assiale momento risultante.

A tal fine si consideri la rappresentazione parametrica dei cinematici rigidi semplici

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\Omega} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o],$$

dove  $\mathbf{v}_o = \mathbf{v}(\mathbf{x}_o)$  è la velocità di traslazione ed  $\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{\Omega}^T$  è il tensore emisimmetrico costante rappresentativo dell'atto di rotazione attorno ad un polo  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$  prefissato ad arbitrio. I vettori caratteristici

- risultante  $\mathbf{R}[\mathbf{f}]$ , e
- momento risultante  $\mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}]$  rispetto al polo  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$ ,

sono definiti per dualità dalle identità

$$\begin{cases} \mathbf{R}[\mathbf{f}] \cdot \mathbf{v}_o = \langle \mathbf{f}, \text{TRASL}[\mathbf{v}_o] \rangle, & \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathbf{v}_o \in \mathbf{V}, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{f}] \cdot \boldsymbol{\omega} = \langle \mathbf{f}, \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}] \rangle, & \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \mathbf{V}, \end{cases}$$

dove

$$\text{TRASL}[\mathbf{v}_o](\mathbf{x}) := \mathbf{v}_o, \quad \text{ROT}_{\mathbf{x}_o}[\boldsymbol{\omega}](\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) := \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Si ha pertanto che

$$\begin{cases} \mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] \cdot \mathbf{v}_o = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_o \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_o \, da, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]) \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]) \, da. \end{cases}$$

Ricordando la relazione

$$\mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o]) = ([\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\omega},$$

le equazioni cardinali della statica assumono la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \, da = \mathbf{o}, \\ \mathbf{M}_{\mathbf{x}_o}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] &= \int_{\Omega} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \times \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_o] \times \mathbf{t} \, da = \mathbf{o}, \end{aligned}$$

Le due equazioni cardinali impongono rispettivamente l'*equilibrio alla traslazione* e l'*equilibrio alla rotazione* attorno al polo  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$ .



### 7.7. Sforzi autoequilibrati

Si consideri l'operatore lineare  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}(\Omega); H(\Omega)\}$  aggiunto formale di  $\mathbf{B} \in L\{H(\Omega); \mathcal{S}(\Omega)\}$ . Allora

■ Il sottospazio lineare  $\mathcal{S}_o(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$  degli *sforzi in equilibrio con forze di massa nulle* è definito da

$$\mathcal{S}_o(\Omega) := \{\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega) : \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{o}\} = \text{Ker } \mathbf{B}'_o.$$

Il sottospazio lineare  $\mathcal{S}_o(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$  è *chiuso* in forza della continuità dell'operatore lineare  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}(\Omega), H(\Omega)\}$ .

Si denoterà con  $\mathcal{S}_o = \mathcal{S}_o(\Omega) \cap \mathcal{S}$  lo spazio degli sforzi in equilibrio con forze di massa nulle ed aventi  $\mathcal{T}(\Omega)$  quale suddivisione di supporto.

Gli sforzi *autoequilibrati* possono essere caratterizzati come quelli che sono conformi ed in equilibrio con forze di massa nulle:

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} := \mathcal{S}_o \cap \Sigma.$$

Vale infatti il seguente risultato.

**Proposizione 7.3. Sforzi autoequilibrati.** *Il sottospazio lineare chiuso degli sforzi autoequilibrati  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} \subset \mathcal{S}(\Omega)$  può essere caratterizzato mediante le proprietà equivalenti:*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{AUTO}} &:= \{\mathbf{T} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\} \\ &= \{\mathbf{T} \in \mathcal{S}_o : \langle \mathbf{NT}, \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\} \\ &= \{\mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{o}, \quad \mathbf{NT} \in [\mathbf{T} \mathcal{L}]^\perp\} = \mathcal{S}_o \cap \Sigma. \end{aligned}$$

**Dim.** Le ultime due proprietà costituiscono definizioni alternative della intersezione  $\mathcal{S}_o \cap \Sigma$ . La terza segue dal teorema di CAUCHY.  $\square$

Nella sezione 8 si vedrà che gli stati tensionali a divergenza nulla, quelli conformi e quelli autoequilibrati giocano un ruolo fondamentale nel discutere la condizione di congruenza per via variazionale.

Nei corpi elastici l'azione di distorsioni e cedimenti vincolari non congruenti comporta l'insorgere di stati tensionali autoequilibrati che possono essere determinanti per la valutazione della sicurezza di una struttura continua.

In un continuo tridimensionale esistono stati tensionali non nulli che hanno però divergenza nulla. Il sottospazio  $\mathcal{S}_0(\Omega)$  è quindi non banale. Peraltro esso risulta non finitamente generabile.

Uno stato tensionale a divergenza nulla può essere costruito individuando un operatore differenziale lineare  $\mathbb{L}$  tale che

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbb{L}[\mathbf{A}], \\ \operatorname{div}(\mathbb{L}[\mathbf{A}]) = \mathbf{o}, \end{cases}$$

dove  $\mathbf{A}$  è un campo (scalare, vettoriale o tensoriale) di classe  $C^3(\Omega)$  che è detto una *funzione di sforzo*.

Come si è mostrato nel capitolo I alla sezione I.10.1.1 (p. 107), l'operatore  $\mathbb{L}$  può essere così determinato.

- In un continuo *tridimensionale* si pone

$$\mathbb{L}[\mathbf{A}](\mathbf{x}) := \operatorname{rot}[\operatorname{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})]^T$$

con  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  campo tensoriale simmetrico di classe  $C^2(\overline{\Omega})$ .

Infatti vale l'identità

$$\operatorname{div}[\operatorname{rot}[\operatorname{rot} \mathbf{A}]^T] = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{A} \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Tale rappresentazione delle autotensioni è detta *soluzione di BELTRAMI* (1892, [12]).

- In un continuo *bidimensionale* si pone

$$\mathbb{L}[\varphi(\mathbf{x})] := \mathbf{R}[\operatorname{grad} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x})]\mathbf{R}$$

dove  $\varphi(\mathbf{x})$  è un campo scalare in  $C^2(\overline{\Omega})$  ed  $\mathbf{R}$  è una rotazione di  $\pi/2$ .

Infatti vale l'identità

$$\operatorname{div}[\mathbf{R}[\operatorname{grad} \operatorname{grad} \varphi(\mathbf{x})]\mathbf{R}] = \mathbf{o} \quad \forall \varphi \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Il campo scalare  $\varphi$  è detto *funzione di AIRY* (1863, [10]).

Un campo non nullo di autotensioni può essere costruito definendo funzioni di sforzo di classe  $C^2(\overline{\Omega})$  che si annullano in un intorno di  $\partial\Omega$ .

Ciò può conseguirsi ponendo nelle soluzioni di BELTRAMI e di AIRY rispettivamente

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}),$$

con  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbb{D}(\Omega)$  funzione indefinitamente differenziabile con supporto compatto in  $\Omega$  e  $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$ ,  $\phi(\mathbf{x})$  campi, rispettivamente tensoriale e scalare, di classe  $C^2(\overline{\Omega})$ .

Il problema della rappresentazione delle autotensioni è discusso in maggior dettaglio nella sezione 14.8 (p. 297).



## 8. CONDIZIONI DI CONGRUENZA

Sia  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  una struttura vincolata.

La deformazione tangente  $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  associata ad un cinematismo conforme  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  è un campo di quadrato integrabile che costituisce la parte regolare della deformazione tangente distribuzionale  $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{D}'(\mathcal{T}(\Omega))$ .

Viceversa, assegnato un campo di deformazioni tangentili  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$ , non è sempre possibile determinare un cinematismo conforme  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  che generi una deformazione tangente la cui parte regolare  $\mathbf{B}\mathbf{u}$  sia pari a  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$ .

Si dice allora che

- Un deformazione tangente  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$  è *congruente* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M} = \{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  se esiste un cinematismo conforme  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  tale che  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D}$  e cioè se  $\mathbf{D} \in \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ .

Più in generale si consideri un *sistema cinematico*  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{V}$  sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$ , costituito da un *atto di distorsione*  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$  e da un *atto di cedimento vincolare*  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$ .

Si noti che, in virtù della suriettività di  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$ , per ogni atto di cedimento al contorno  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  esiste almeno un cinematismo  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  il cui valore al contorno sia  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  e cioè un cinematismo tale che  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

- Il sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{V}(\Omega)$  è *congruente* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  se

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D},$$

$$\text{dove } \mathbf{w} \in \mathcal{V} : \Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}.$$

In modo equivalente si può richiedere che esista almeno un cinematismo conforme  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  tale che

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}_o + \mathbf{w}, \quad \mathbf{v}_o \in \mathcal{L}.$$

- Si noti che il cedimento vincolare  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}(\Omega)$  per essere efficace deve essere non conforme.

La proprietà di congruenza di sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{V}(\Omega)$  può equivalentemente essere espressa come proprietà di congruenza della deformazione tangente  $\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{w} \in \mathcal{H}$  ovvervando che

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{w} \in \mathcal{L} \iff \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{w} \in \mathcal{B}\mathcal{L}.$$

La prossima sezione è dedicata al problema di individuare una condizione variazionale che caratterizzi la congruenza di un'assegnata deformazione tangente.

### 8.1. Decomposizione ortogonale

Nella sezione 6.5 (p. 218) si è mostrato che il sottospazio lineare degli sforzi in *autoequilibrio*  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}$  può scriversi nella forma

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^{\oplus} \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

Se l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  è un *operatore di KORN*, l'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{H}\}$  ha immagine chiusa in corrispondenza di ogni sottospazio di conformità  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$ . Risulta quindi

$$\mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^{\oplus\oplus} \quad \text{in } \mathcal{H}.$$

Vale pertanto la relazione di ortogonalità

$$\mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^{\oplus\oplus} = [\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^{\oplus} \quad \text{in } \mathcal{H},$$

che fornisce la caratterizzazione variazionale del sottospazio lineare delle deformazioni tangenti congruenti.

Si può concludere enunciando la seguente

*Proprietà di decomposizione dello spazio  $\mathcal{H}$ .*

- Il sottospazio lineare  $\mathbf{B}\mathcal{L}$  delle deformazioni tangenti congruenti ed il sottospazio lineare  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  degli sforzi autoequilibrati effettuano una decomposizione dello spazio di HILBERT  $\mathcal{H}$  delle *deformazioni tangenti regolari* come somma diretta di due complementi ortogonali.

$\mathcal{H} = \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \dot{+} \mathbf{B}\mathcal{L},$   
con

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^{\oplus}, \\ \mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^{\oplus}. \end{cases}$$

Questa decomposizione svolge un ruolo primario in teoria delle strutture ed è alla base dei seguenti risultati.

**Proposizione 8.1. Condizione variazionale di congruenza.** *Si consideri una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$ . Sussiste allora l'equivalenza*

$$\langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{D} \rangle \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \iff \exists \mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

**Dim.** Il risultato è una formulazione dell'eguaglianza

$$\mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\oplus,$$

che sussiste in quanto l'operatore  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  è un operatore di KORN.  $\square$

Un'immediata conseguenza è la seguente.

**Proposizione 8.2.** *In una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  sia  $\{\mathbf{D}, \mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{V}$  un sistema cinematico costituito da un atto di distorsione  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$  e da un atto di cedimento vincolare  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ . Sussiste allora l'equivalenza*

$$\langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{w} \rangle \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \iff \exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L} : \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

**Dim.** Basta porre  $\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{w}$  al posto di  $\mathbf{D}$  nella proposizione 8.1.  $\square$

**Osservazione 8.1.** In alcuni testi di meccanica delle strutture il problema della congruenza di un deformazione tangente  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$  viene discusso enunciando un *principio delle forze virtuali* che, nella formalizzazione qui sviluppata, è espresso dall'equivalenza

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle &= \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{D} \rangle \rangle, \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{f} = \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}\mathbf{T}, \end{cases} \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H} \iff \\ &\iff \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Tale equivalenza, essendo  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}\mathbf{T}, \mathbf{u} \rangle = \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle \rangle$ , può risciversi

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{D} \rangle \rangle &= \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle \rangle \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{H} \iff \\ &\iff \mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

L'equivalenza è pertanto una banale conseguenza della definizione positiva del prodotto interno in  $\mathcal{H}$ . Si noti la sostanziale differenza con la proposizione 8.1 che è fondata sulla proprietà di chiusura dell'immagine dell'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{H}\}$  e fornisce la condizione necessaria e sufficiente da imporre sul sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{V}$  per assicurare l'esistenza di un cinematico conforme con esso congruente. ■

## 8.2. Congruenza in problemi al contorno

Sia  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  una struttura vincolata con  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  e  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \partial\mathcal{V}$  un sistema cinematico, costituito da un *atto di distorsione*  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$  e da un *atto di cedimento vincolare*  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$ .

Si ricordi (vedi sezione 8) che un sistema cinematico è *congruente* se esiste almeno un cinematismo  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  che soddisfa le *condizioni di congruenza*

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D}, \quad \Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L}.$$

- $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D}$  è la *condizione differenziale di congruenza*,
- $\Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L}$  è la *condizione di congruenza al contorno*.

Si osservi che la suriettività dell'operatore  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  assicura che per ogni atto di cedimento vincolare  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  esiste almeno un cinematismo  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  tale che  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

Pertanto una formulazione equivalente delle condizioni di congruenza consiste nel richiedere che esista almeno un cinematismo conforme  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  tale che

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}_o, \quad \Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}.$$

La condizione variazionale di congruenza della proposizione 8.1 può essere specializzata al caso dei vincoli al contorno per ottenere il seguente risultato.

**Proposizione 8.3. Condizione variazionale di congruenza.** *Si consideri una struttura  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  vincolata con condizioni di vincolo imposte al contorno di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Allora un sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \partial\mathcal{V}$  è congruente e cioè*

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{D},$$

*se e solo se soddisfa la condizione variazionale*

$$(\mathbf{S}, \mathbf{D}) = (\mathbf{N}\mathbf{S}, \partial\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

**Dim.** Sia  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  tale che  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ . La condizione variazionale di congruenza della proposizione 8.1, che è necessaria e sufficiente, si scrive

$$(\mathbf{S}, \mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

Essendo  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} \subset \mathcal{S}$  è possibile applicare la formula di GREEN. Osservando che  $\mathbf{B}'_o \mathbf{S} = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  si deduce che

$$(\mathbf{S}, \mathbf{B}\mathbf{w}) = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{w}) + (\mathbf{N}\mathbf{S}, \Gamma\mathbf{w}) = (\mathbf{N}\mathbf{S}, \Gamma\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{S} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}.$$

e quindi il risultato.  $\square$



Nel 1890 L. DONATI [11] ha formulato il seguente classico risultato che stabilisce, per deformazioni tangenti di classe  $C^2(\mathcal{T}(\Omega))$ , l'equivalenza tra la trattazione del problema della congruenza interna svolta nel capitolo I con i metodi della teoria del potenziale e la formulazione di tipo variazionale.

**Proposizione 8.4. Teorema di Donati.** *Nel continua tridimensionale la condizione variazionale di congruenza interna di un atto di deformazione  $\mathbf{D}$ , di classe  $C^2(\mathcal{T}(\Omega))$ , equivale alla condizione differenziale di congruenza interna:*

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dv = 0, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \iff \text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T = \mathbf{O}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{T}(\Omega).$$

**Dim.** Se è soddisfatta la condizione differenziale di congruenza interna, esiste un cinematico  $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})$  che soddisfa l'equazione differenziale  $\mathbf{Bv} = \mathbf{D}$  e quindi anche la condizione variazionale in quanto  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = (\mathbf{BL})^\oplus$ .

Viceversa si consideri un campo tensoriale pari al prodotto di un tensore simmetrico  $\Phi$  e di un mollificatore  $m(\mathbf{x})$  con supporto compatto in ogni elemento di  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

Si ponga quindi lo stato tensionale autoequilibrato pari a

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{rot} [\text{rot} [m(\mathbf{x})\Phi]]^T.$$

La condizione variazionale di congruenza interna impone allora che

$$\int_{\Omega} \text{rot} [\text{rot} (m\Phi)]^T(\mathbf{x}) : \mathbf{D}(\mathbf{x}) \, dv = \int_{\Omega} m(\mathbf{x}) \Phi : \text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T(\mathbf{x}) \, dv = 0.$$

L'egualanza segue da una doppia applicazione del lemma di GREEN tenendo conto che il campo tensoriale  $m(\mathbf{x})\Phi$  si annulla con tutte le derivate in una striscia aperta attorno a  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ . Si ha quindi che

$$\int_{\Omega} \epsilon_{iqp} \epsilon_{jks} D_{qk/ps} (m\Phi)_{ij} \, dv = \int_{\Omega} \epsilon_{iqp} \epsilon_{jks} (m\Phi)_{ij/ps} D_{qk} \, dv = 0.$$

Il lemma del calcolo delle variazioni implica quindi il soddisfacimento dell'equazione differenziale di congruenza interna  $\text{rot} [\text{rot } \mathbf{D}]^T(\mathbf{x}) = \mathbf{O}$ .  $\square$

**Osservazione 8.2.** Si noti comunque che la formulazione differenziale del problema della congruenza interna non consente di imporre il soddisfacimento delle condizioni di conformità dei cinematici ai vincoli assegnati sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ .  $\blacksquare$

## 9. FORMULAZIONI VARIAZIONALI

Nei problemi di valori al contorno,

- la *condizione di equilibrio* di un sistema di forze

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F},$$

- e la *condizione di congruenza* di un sistema cinematico

$$\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \partial\mathcal{V},$$

possono essere espresse, al variare della scelta del sottospazio dei campi di prova, mediante formulazioni variazionali tra loro equivalenti.

Si noti che tali formulazioni sono equivalenti se si considerano i problemi dell'equilibrio e della congruenza di un modello continuo.

Al contrario le diverse formulazioni variazionali conducono a soluzioni approssimate che in generale sono diverse.

Fornire un quadro completo delle formulazioni variazionali di equilibrio e di congruenza è pertanto rilevante sia sotto il profilo teorico che applicativo.

Nel seguito si fornisce un quadro esauriente delle possibili formulazioni variazionali e se ne mostra l'equivalenza.



### 9.1. Formulazioni variazionali dell'equilibrio

**Proposizione 9.1.** *Le seguenti condizioni variazionali di equilibrio sono tra loro equivalenti*

- |      |   |
|------|---|
| i)   | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$ |
| ii)  | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$                     |
| iii) | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0,$   |
| iv)  | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}.$  |

dove

$$\mathbf{b} \in H \quad \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F} \quad \mathbf{T} \in \mathcal{H} \quad \boldsymbol{\rho} \in (\Gamma\mathcal{L})^\perp.$$



**Dim.** Chiaramente vale la catena di implicazioni  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ .

Per stabilire l'equivalenza basta provare che  $iv) \Rightarrow i)$ .

Se vale la  $iv)$  il teorema delle potenze virtuali assicura l'esistenza di un campo di sforzo  $\mathbf{T}^* \in \mathcal{H}$  e di un sistema reattivo  $\mathbf{r}^* \in \mathcal{L}^\perp$  tali che

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{r}^*, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{T}^*, \mathbf{B} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

La rappresentazione dei sistemi reattivi fornita dalla proposizione 7.1 (p. 223) assicura che esiste un unico  $\boldsymbol{\rho}^* \in (\Gamma \mathcal{L})^\perp$  tale che

$$\mathbf{r}^* = \Gamma' \boldsymbol{\rho}^*.$$

Vale dunque la condizione variazionale  $i)$  nella forma

$$i^*) \quad (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}^*, \Gamma \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{T}^*, \mathbf{B} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega).$$

Si noti che nella  $i)$  lo sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  è definito a meno di uno sforzo in autoequilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M} = \{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$ .

Infatti confrontando le espressioni  $i)$  e  $i^*)$  si deduce che deve essere

$$\langle \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}^*, \Gamma \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{T} - \mathbf{T}^*, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega),$$

e dunque

$$\langle \mathbf{T} - \mathbf{T}^*, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \iff \mathbf{T} - \mathbf{T}^* \in [\mathbf{B} \mathcal{L}]^\perp,$$

e cioè  $\mathbf{T} - \mathbf{T}^* \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$ . □

**Osservazione 9.1.** La condizione variazionale  $i)$  va così enunciata:

- In corrispondenza del sistema  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \mathcal{F}$  di forze di massa e di contatto, esistono uno stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  ed un sistema reattivo  $\boldsymbol{\rho} \in (\Gamma \mathcal{L})^\perp$  che soddisfano la condizione  $i)$ .

Analoga osservazione vale per le condizioni variazionali  $ii)$  e  $iii)$ . ■

**Osservazione 9.2.** Un dimostrazione alternativa dell'implicazione  $iv) \Rightarrow i)$  può condursi mediante le seguenti argomentazioni.

Il teorema delle potenze virtuali assicura che  $iv) \Rightarrow ii)$ .

Per teorema di CAUCHY la  $ii)$  equivale alle condizioni di equilibrio

$$\mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{N} \mathbf{T} = \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho} \in (\Gamma \mathcal{L})^\perp,$$

che sostituite nella formula di GREEN conducono alla  $i)$ . ■

## 9.2. Formulazioni variazionali della congruenza

**Proposizione 9.2.** *Le seguenti condizioni variazionali di congruenza sono tra loro equivalenti.*

- i)  $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} + \partial\mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S},$
- ii)  $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{S} \in \Sigma,$
- iii)  $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} + \partial\mathbf{v} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_o,$
- iv)  $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$

dove

$$\mathbf{D} \in \mathcal{H}, \quad \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}, \quad \mathbf{u} \in H, \quad \partial\mathbf{v} \in (\mathbf{N}\Sigma)^\perp = \Gamma\mathcal{L}.$$

**Dim.** Chiaramente vale la catena di implicazioni  $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ . Per stabilirne l'equivalenza basta provare che  $iv) \Rightarrow i)$ .

Valga la  $iv)$  e si ponga  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ . La condizione variazionale di congruenza, proposizione 8.3 (p. 237), assicura l'esistenza di un cinematismo  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}$  e di un cinematismo conforme  $\mathbf{v}^* \in \mathcal{L}$  con  $\Gamma\mathbf{u}^* = \Gamma(\mathbf{w} + \mathbf{v}^*)$  tali che  $\mathbf{D} = \mathbf{B}(\mathbf{w} + \mathbf{v}^*)$ . La formula di GREEN mostra allora che

$$i^*) \quad \langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \Gamma(\mathbf{w} + \mathbf{v}^*) \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u}^*), \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}.$$

Vale dunque la condizione variazionale  $i)$  nella forma

$$\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathbf{v}^* \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u}^*), \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}.$$

Si noti che nella  $i)$  il cinematismo  $\mathbf{u} \in H$  è definito a meno di un cinematismo rigido conforme. Infatti confrontando la  $i^*)$  e la  $i)$  si deduce che

$$(\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u} - \mathbf{u}^*) = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in \Sigma \iff \mathbf{u} - \mathbf{u}^* \in (\mathbf{B}'_o \Sigma)^\oplus,$$

e quindi dalla proposizione 10.7 (p. 248) segue che  $\mathbf{u} - \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ .  $\square$

**Osservazione 9.3.** Un dimostrazione alternativa dell'implicazione  $iv) \Rightarrow i)$  può condursi mediante le seguenti argomentazioni.

In forza della condizione variazionale di congruenza, proposizione 8.3 (p. 237), la  $iv)$  implica che  $\exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L}$  tale che

$$\mathbf{Bu} = \mathbf{D}, \quad \Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \mathcal{L}.$$

Sostituendo nella formula di GREEN si perviene alla  $i)$ . ■

### 9.3. Regole di complementarietà

Si confrontino le diverse espressioni delle condizioni variazionali di equilibrio e di congruenza dedotte nella sezione precedente.

■ *Condizioni variazionali di equilibrio*

- |             |  |   |
|-------------|--|---|
| <i>i)</i>   | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma \mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle$ | $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,              |
| <i>ii)</i>  | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle$                     | $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}$ ,              |
| <i>iii)</i> | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma \mathbf{v} \rangle\rangle = 0$   | $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o$ ,            |
| <i>iv)</i>  | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v} \rangle\rangle = 0$   | $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ . |

dove  $\mathbf{b} \in H$ ,  $\mathbf{t} \in \partial \mathcal{F}$ ,  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in (\Gamma \mathcal{L})^\perp = \mathbf{N}\Sigma$ .

■ *Condizioni variazionali di congruenza*

- |             |  |  |
|-------------|--|--|
| <i>i)</i>   | $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial \mathbf{w} + \partial \mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u})$ | $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}$ ,               |
| <i>ii)</i>  | $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial \mathbf{w} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u})$                       | $\forall \mathbf{S} \in \Sigma$ ,                    |
| <i>iii)</i> | $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial \mathbf{w} + \partial \mathbf{v} \rangle\rangle = 0$                                      | $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_o$ ,             |
| <i>iv)</i>  | $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial \mathbf{w} \rangle\rangle = 0$  | $\forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$ . |

dove  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$ ,  $\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{u} \in H$ ,  $\partial \mathbf{v} \in (\mathbf{N}\Sigma)^\perp = \Gamma \mathcal{L}$ .

Dal confronto risulta evidente che tra il problema dell'equilibrio e quello della congruenza sussiste un'analogia formale che rispetta le seguenti

■ *regole di complementarietà.*

- |   |        |   |
|---|--------|---|
| $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  | $\iff$ | $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ ,                                      |
| $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  | $\iff$ | $\mathbf{S} \in \Sigma$ ,   |
| $\mathbf{b} \in H$  | $\iff$ | $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$ ,                                      |
| $\mathbf{t} \in \partial \mathcal{F}$                                     | $\iff$ | $\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V}$ ,                    |
| $\mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$                   | $\iff$ | $\mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\}$ ,                  |
| $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\}$ | $\iff$ | $-\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial \mathcal{F}\}$ . |

## 10. TEOREMI DI RAPPRESENTAZIONE

Il teorema delle potenze virtuali ed il teorema di CAUCHY consentono di pervenire ad importanti risultati di rappresentazione.

Tali risultati, oltre ad essere interessanti *di per se*, svolgono un ruolo essenziale nella dimostrazione delle diverse formulazioni variazionali delle proprietà di equilibrio e di congruenza.

Nel seguito si assumerà che l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  soddisfi la diseguaglianza di KORN. Ciò assicura la validità del teorema delle potenze virtuali.

Si denoti con  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}; H\}$  l'aggiunto formale di  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$ , definito dalla relazione

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} : (\mathbf{B}\mathbf{v}) \, dv = \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega), \\ \forall \mathbf{T} \in \mathbb{D}(\Omega) \cap \text{Sym}. \end{cases}$$

### 10.1. Teoremi primali

Il risultato propedeutico che segue sarà richiamato nella proposizione 10.2.

**Lemma 10.1.** *Si consideri una struttura  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}, \mathbf{B})$ . In corrispondenza di ogni sistema di forze di contatto  $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$  esiste almeno un campo di forze di massa  $\mathbf{b} \in H$  tale che il sistema di forze  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\}$  sia in equilibrio sulla struttura e cioè risulti*

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B},$$

dove  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$ .

**Dim.** Si noti che l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  soddisfa la diseguaglianza di KORN e quindi ha nucleo di dimensione finita. E' possibile fornire una dimostrazione diretta della proposizione facendo riferimento ad una rappresentazione parametrica del sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{B}$ .  $\square$

**Osservazione 10.1.** Una dimostrazione alternativa della proposizione 10.1 è basata sulla soluzione del problema elastico di una struttura con vincoli elastici al contorno e di massa, soggetta all'azione del campo di foze di contatto  $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$ . La formulazione mista primale del problema è

$$\mathbb{M}) \quad \begin{cases} (\mathbf{K}_o \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \langle \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{S} \rangle - \langle \mathbf{C}_o \mathbf{T}, \mathbf{S} \rangle = 0, & \mathbf{T} \in \mathcal{H} \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

con  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$ ,  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$ ,  $\text{Ker } \mathbf{K}_o = \{\mathbf{o}\}$ ,  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$ .

Il problema  $\mathbb{M})$  ammette un'unica soluzione [50]. Basta quindi porre  $\mathbf{b} = -\mathbf{K}_o \mathbf{u}$  con  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  soluzione del problema  $\mathbb{M}$  ed assumere che  $\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}$ .  $\blacksquare$

**Proposizione 10.2. Rappresentazione delle forze di contatto.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$ ,  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  il corrispondente operatore al contorno e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio lineare dei cinematismi conformi. Allora ogni sistema di forze reattive di contatto  $\rho \in (\Gamma\mathcal{L})^\perp$  può ottenersi come flusso al contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  di un campo di sforzi conformi  $\mathbf{T} \in \Sigma$ . In altri termini l'operatore del flusso al contorno  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}$  è suriettivo da  $\Sigma$  su  $(\Gamma\mathcal{L})^\perp$  e cioè*

$$\mathbf{N}\Sigma = [\Gamma\mathcal{L}]^\perp.$$

Vale pertanto la diseguaglianza  $\|\mathbf{N}\mathbf{T}\|_{\partial\mathcal{F}} \geq c_{\mathbf{N}} \|\mathbf{T}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \mathbf{N} \cap \Sigma)} \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma.$

**Dim.** Sia  $\rho \in (\Gamma\mathcal{L})^\perp$  un sistema reattivo e si consideri la struttura  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}, \mathbf{B})$  priva di vincoli al contorno di  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ . Essendo  $\dim \text{Ker } \mathbf{B} < +\infty$ , il lemma 10.1 assicura che è possibile determinare un campo di forze di massa  $\mathbf{b} \in H$  tale che

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}.$$

Il teorema delle potenze virtuali assicura allora che esiste un campo di sforzi  $\mathbf{T} \in \mathcal{H}$  tale che

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Dal teorema di CAUCHY segue quindi che  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  e che  $\mathbf{N}\mathbf{T} = \rho$ . Dunque  $[\Gamma\mathcal{L}]^\perp \subseteq \mathbf{N}\Sigma$ . Essendo per definizione  $\mathbf{N}\Sigma \subseteq [\Gamma\mathcal{L}]^\perp$  si può concludere che  $\mathbf{N}\Sigma = [\Gamma\mathcal{L}]^\perp$ .

La diseguaglianza invocata nell'enunciato è una diretta conseguenza del teorema dell'immagine chiusa.  $\square$

**Proposizione 10.3. Rappresentazione dei valori al contorno dei cinematismi conformi.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio lineare dei cinematismi conformi. Allora un cinematismo al contorno  $\partial\mathbf{u} \in \partial\mathcal{V}$  è il valore al contorno di un cinematismo conforme  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  se e solo se per esso compie potenza virtuale nulla il flusso  $\mathbf{N}\mathbf{T} \in \partial\mathcal{F}$  di ogni campo di sforzo conforme  $\mathbf{T} \in \Sigma$ . In altri termini l'operatore al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  è suriettivo da  $\mathcal{L}$  su  $(\mathbf{N}\Sigma)^\perp$ , risulta cioè*

$$\Gamma\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp.$$

**Dim.** Poichè il sottospazio lineare  $\Gamma\mathcal{L}$  è chiuso in  $\partial\mathcal{V}$  il risultato è fornito dalla relazione

$$[\Gamma\mathcal{L}]^{\perp\perp} = \Gamma\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp,$$

cui si perviene prendendo i complementi ortogonali nella relazione  $\mathbf{N}\Sigma = [\Gamma\mathcal{L}]^\perp$  stabilita nella proposizione 10.2.  $\square$

**Proposizione 10.4. Rappresentazione delle forze di contatto in equilibrio.** Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematici conformi. Allora ogni campo di forze di contatto  $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$  è in equilibrio al contorno con un campo di sforzi  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_o + \Sigma$ , somma di uno in autoequilibrio di massa e di uno conforme, se e solo se è ortogonale ai cinematici rigidi conformi. Si ha cioè che

$$\mathbf{N}\mathcal{S}_o + [\Gamma\mathcal{L}]^\perp = \mathbf{N}(\mathcal{S}_o + \Sigma) = [\Gamma\mathcal{V}_{RIG}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F}.$$

**Dim.** Sia  $\mathbf{t} \in [\Gamma\mathcal{V}_{RIG}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F}$  e cioè

$$\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}, \quad \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{RIG}.$$

Il teorema delle potenze virtuali stabilisce l'equivalenza

$$\mathbf{t} \in [\Gamma\mathcal{V}_{RIG}]^\perp \iff \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H} : \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Il teorema di CAUCHY stabilisce poi l'equivalenza

$$\exists \mathbf{T} \in \mathcal{H}, \quad \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \iff$$

$$\exists \mathbf{T} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{N}\mathbf{T} \in \mathbf{t} + [\Gamma\mathcal{L}]^\perp, \quad \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = 0 \iff$$

$$\exists \mathbf{T} \in \mathcal{S}_o, \quad \mathbf{t} \in \mathbf{N}\mathbf{T} + [\Gamma\mathcal{L}]^\perp \iff \mathbf{t} \in \mathbf{N}(\mathcal{S}_o + \Sigma),$$

dove si è invocata la relazione  $[\Gamma\mathcal{L}]^\perp = \mathbf{N}\Sigma$  stabilita nella proposizione 10.2.  $\square$

**Osservazione 10.2.** L'eguaglianza  $\mathbf{N}\mathcal{S}_o + [\Gamma\mathcal{L}]^\perp = [\Gamma\mathcal{V}_{RIG}]^\perp$  sussiste per ogni scelta del sottospazio dei cinematici conformi  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$ . Allora

- Ponendo  $\mathcal{L} = \mathcal{V}$  risulta  $[\Gamma\mathcal{L}]^\perp = \mathbf{N}\Sigma = \{\mathbf{o}\}$  e si ottiene che

$$\mathbf{N}\mathcal{S}_o = [\Gamma \operatorname{Ker} \mathbf{B}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F},$$

essendo  $\mathbf{B} \in \mathbf{L}(\mathcal{V}; \mathcal{H})$ . Un caso particolare di questo risultato è riportato in [45] § III.1, Lemma 1.3, con riferimento all'operatore  $\mathbf{B} = \operatorname{grad}$ . La dimostrazione si riferisce ad un caso bidimensionale ed è basata sulla soluzione di un problema di NEUMANN (a tal proposito si veda la successiva osservazione 10.3).

- Se il sottospazio  $\mathcal{L}$  è tale che  $\mathcal{V}_{RIG} = \operatorname{Ker} \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{o}\}$  e cioè sono impediti cinematici rigidi conformi, risulta

$$\mathbf{N}\mathcal{S}_o + [\Gamma\mathcal{L}]^\perp = \mathbf{N}(\mathcal{S}_o + \Sigma) = \partial\mathcal{F}.$$

In tal caso ogni sistema di forze di contatto può essere rappresentato come somma del flusso di un campo di sforzi in equilibrio con forze di massa nulle e di un sistema reattivo.  $\blacksquare$

**Proposizione 10.5. Rappresentazione delle forze reattive in equilibrio.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematismi conformi. Allora un sistema di forze reattive di contatto  $\rho \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp$  è in equilibrio al contorno con un campo di sforzi in autoequilibrio  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  se e solo se è ortogonale ai cinematismi conformi ed a quelli rigidi. Si ha cioè che*

$$\boxed{\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\Gamma\mathcal{L}]^\perp \cap [\Gamma\mathcal{V}_o]^\perp = [\Gamma(\mathcal{L} + \mathcal{V}_o)]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F}.}$$

**Dim.** Sia  $\rho \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp \cap [\Gamma\mathcal{V}_o]^\perp$  e cioè

$$\rho \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp, \quad \langle\langle \rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o.$$

Il teorema delle potenze virtuali stabilisce l'equivalenza

$$\rho \in [\Gamma\mathcal{V}_o]^\perp \iff \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H} : \langle\langle \rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Il teorema di CAUCHY stabilisce poi l'equivalenza

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H}, \quad \langle\langle \rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} &\iff \\ \exists \mathbf{T} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{N}\mathbf{T} = \rho \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp, \quad \mathbf{B}'_o\mathbf{T} = 0 &\iff \\ \exists \mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}, \quad \rho = \mathbf{N}\mathbf{T}, & \end{aligned}$$

e ciò prova il risultato.  $\square$

In particolare per  $\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma$  si ottiene che  $[\Gamma\mathcal{V}_o]^\perp = \mathbf{N}\mathcal{S}_o$ .

Un caso più generale di quello considerato nella proposizione 10.4 sarà discusso nella sezione

**Proposizione 10.6. Rappresentazione delle forze di massa in equilibrio.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematismi conformi. Allora un campo di forze di massa  $\mathbf{b} \in H$  è in equilibrio con un campo di sforzi conformi  $\mathbf{T} \in \Sigma$  se e solo se è ortogonale ai cinematismi rigidi conformi. Si ha cioè che*

$$\boxed{\mathbf{B}'_o\Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus.}$$

Vale pertanto la diseguaglianza

$$\boxed{\|\mathbf{B}'_o\mathbf{T}\|_H \geq \alpha \|\mathbf{T}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \Sigma)} \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma.}$$



**Dim.** Sia  $\mathbf{b} \in [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus \subseteq H$  e cioè

$$\mathbf{b} \in H, \quad (\mathbf{b}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}.$$

Il teorema delle potenze virtuali stabilisce l'equivalenza

$$\mathbf{b} \in [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus \iff \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H} : (\mathbf{b}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Il teorema di CAUCHY stabilisce poi l'equivalenza

$$\begin{aligned} \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H}, \quad (\mathbf{b}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} &\iff \\ \exists \mathbf{T} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{NT} \in [\mathbf{T}\mathcal{L}]^\perp, \quad \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b} &\iff \mathbf{b} \in \mathbf{B}'_o \Sigma. \end{aligned}$$

Si è così stabilita l'eguaglianza  $\mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus$  dalla quale si deduce in particolare che l'immagine dell'operatore lineare continuo  $\mathbf{B}'_o \in L(\Sigma; H)$  è chiusa. La diseguaglianza invocata nell'enunciato è allora una diretta conseguenza del teorema dell'immagine chiusa.  $\square$

**Osservazione 10.3.** Il risultato fornito dalla proposizione 10.6 svolge un ruolo fondamentale nella dimostrazione della complementarietà tra le condizioni di equilibrio e quelle di congruenza che sarà discussa nella sezione 10.2.

Un caso particolare del risultato stabilito nella proposizione 10.6 è riportato in [45] § IV.1.2, pag. 136, con riferimento all'operatore differenziale  $\mathbf{B} = \text{grad}$ . Nel presente contesto più generale il risultato si enuncia affermando che l'operatore  $\mathbf{B}'_o = -\text{div} \in L\{\Sigma; H\}$  è suriettivo se  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \{\mathbf{o}\}$ . Tale affermazione è una semplice e diretta conseguenza della più generale egualanza  $\mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus$ .

La dimostrazione in [45] si riferisce al caso bidimensionale ed è basata sulla soluzione di un problema di POISSON con condizioni al contorno miste di DIRICHLET-NEUMANN.

Nel presente contesto la dimostrazione consisterebbe nel considerare la soluzione di un problema elastico del tipo

$$\langle \mathbf{E}_o \mathbf{Bu}, \mathbf{Bv} \rangle = (\mathbf{b}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

con  $\mathbf{E}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  operatore di rigidezza elastica simmetrico ed  $\mathcal{H}$ -ellittico:

$$\langle \mathbf{E}_o \mathbf{Bu}, \mathbf{Bv} \rangle \geq c_{\mathbf{E}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Assumendo che  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{o}\}$  il problema elastico ammette una soluzione unica per ogni  $\mathbf{b} \in \mathcal{H}$ . Ponendo allora  $\mathbf{T}_u = \mathbf{E}_o \mathbf{Bu}$  risulta che  $\mathbf{B}'_o \mathbf{T}_u = \mathbf{b}$  per cui dalla formula di GREEN segue che  $\langle \mathbf{NT}, \mathbf{v} \rangle = 0$  e cioè che  $\mathbf{T}_u \in \Sigma$ .

La dimostrazione della proposizione 10.6 mostra che al risultato si può pervenire più direttamente deducendo l'esistenza del campo di sforzi dal teorema della potenza virtuale invece che dalla discussione di un problema di elastostatica.  $\blacksquare$

**Proposizione 10.7. Rappresentazione dei cinematicismi rigidi conformi.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematicismi conformi. Un cinematicismo  $\mathbf{u} \in H$  è rigido e conforme se e solo se per esso compie potenza virtuale nulla ogni campo  $\mathbf{B}'_o \mathbf{T} \in H$  di forze di massa in equilibrio con un campo di sforzo conforme  $\mathbf{T} \in \Sigma$ . Risulta cioè*

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L} = [\mathbf{B}'_o \Sigma]^{\oplus}.$$

**Dim.** Sia  $\mathbf{u} \in [\mathbf{B}'_o \Sigma]^{\oplus}$ . Ciò significa che  $\mathbf{u} \in H$  ed è tale che

$$(\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma.$$

Risulta allora

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{u}, \Phi \rangle := (\mathbf{B}'_o \Phi, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \Phi \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}},$$

e pertanto  $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}$  con  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$ . Dalla formula di GREEN

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{u}) + \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

in forza della proposizione 10.3 (p. 244) si deduce che

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma \iff \Gamma\mathbf{u} \in \Gamma\mathcal{L}.$$

Tale condizione, essendo  $\text{Ker } \Gamma \subseteq \mathcal{L}$ , equivale ad imporre che  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ . Dunque sussiste l'inclusione  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \supseteq [\mathbf{B}'_o \Sigma]^{\oplus}$ .

Viceversa se  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}$  si ha che

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{L} \Rightarrow \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma, \\ \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B} \Rightarrow \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

Dunque risulta  $(\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \Sigma$  e quindi si può concludere che sussiste anche l'inclusione  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \subseteq [\mathbf{B}'_o \Sigma]^{\oplus}$ .  $\square$

**Osservazione 10.4.** La proposizione 10.7 può essere dedotta dalla proposizione 10.6 egualando i complementi ortogonali nell'eguaglianza

$$\mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^{\oplus},$$

ed osservando che  $[\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^{\oplus\oplus} = \mathcal{V}_{\text{RIG}}$  in quanto, essendo  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  un operatore di KORN, il sottospazio lineare  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{V} \subset H$  è di dimensione finita e quindi chiuso anche per la topologia di  $H$  (oltre che per quella di  $\mathcal{V}$ ).  $\blacksquare$

Sulla base delle egualanze enunciate nelle proposizioni 10.6 e 10.7 si può concludere che vale la seguente

*Proprietà di decomposizione dello spazio  $H$ .*

- Il sottospazio lineare  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L} \subseteq H$ , dei cinematici rigidi conformi, ed il sottospazio lineare  $\mathbf{B}'_o \Sigma \subseteq H$ , costituito dai campi di forza di massa  $\mathbf{B}'_o \mathbf{T} \in H$  in equilibrio con almeno un campo di sforzo conforme  $\mathbf{T} \in \Sigma$ , effettuano una decomposizione dello spazio di HILBERT  $H$  come somma diretta di due complementi ortogonali.

$$H = \mathcal{V}_{\text{RIG}} \dot{+} \mathbf{B}'_o \Sigma,$$

con

$$\begin{cases} \mathcal{V}_{\text{RIG}} = [\mathbf{B}'_o \Sigma]^\perp, \\ \mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\perp. \end{cases}$$

Si noti la complementarietà con la proprietà di decomposizione dello spazio di HILBERT  $\mathcal{H}$  stabilita nella sezione 8.1 (p. 235).

**Osservazione 10.5.** Si noti che

$$\begin{aligned} \mathcal{L} := \text{Ker } \Gamma &\iff \Sigma = \mathcal{S}, \\ \mathcal{L} := \mathcal{V} &\iff \Sigma = \text{Ker } \mathbf{N}, \end{aligned}$$

- Se  $\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma$  risulta  $\Gamma \mathcal{L} = \{\mathbf{o}\}$  per cui  $[\Gamma \mathcal{L}]^\perp = \partial \mathcal{F}$ . Quindi dalla relazione  $\mathbf{N} \Sigma = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp$  della proposizione 10.2 (p. 244) si trae che

$$\mathbf{N} \mathcal{S} = \partial \mathcal{F}.$$

In altri termini l'operatore di flusso al contorno  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial \mathcal{F}\}$  è suriettivo. Viceversa la condizione  $\mathbf{N} \Sigma = \partial \mathcal{F}$  richiede che  $[\Gamma \mathcal{L}]^\perp = \partial \mathcal{F}$  e quindi che sia  $\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma$ .

Un caso particolare di questo risultato è riportato in [45], § III.1, Lemma 1.2, con riferimento all'operatore  $\mathbf{B} = \text{grad}$ . La dimostrazione è basata su una applicazione del teorema di RIESZ-FRÉCHET in  $H^1(\Omega)$  (vedi ad es. [47]).

- Se risulta  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B}_\mathcal{L} = \{\mathbf{o}\}$  dalla relazione  $\mathbf{B}'_o \Sigma = [\text{Ker } \mathbf{B}_\mathcal{L}]^\perp \subseteq H$  della proposizione 10.6 si ha che

$$\mathbf{B}'_o \Sigma = H,$$

e cioè l'operatore di equilibrio di massa  $\mathbf{B}'_o \in L\{\Sigma; H\}$  è suriettivo.

■ Dalla decomposizione dello spazio  $H$ , ponendo  $\mathcal{L} = \mathcal{V}$  si deduce che vale la decomposizione

$$H = \text{Ker } \mathbf{B} + \mathbf{B}'_o(\text{Ker } \mathbf{N}) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \text{Ker } \mathbf{B} = [\mathbf{B}'_o(\text{Ker } \mathbf{N})]^\oplus, \\ \mathbf{B}'_o(\text{Ker } \mathbf{N}) = [\text{Ker } \mathbf{B}]^\oplus. \end{cases}$$

■ Analogamente dalla decomposizione dello spazio  $\mathcal{H}$ , ponendo  $\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma$  segue la decomposizione

$$\mathcal{H} = \text{Ker } \mathbf{B}'_o + \mathbf{B}(\text{Ker } \Gamma) \quad \text{con} \quad \begin{cases} \text{Ker } \mathbf{B}'_o = [\mathbf{B}(\text{Ker } \Gamma)]^\oplus, \\ \mathbf{B}(\text{Ker } \Gamma) = [\text{Ker } \mathbf{B}'_o]^\oplus. \end{cases}$$

■

Si può ora mostrare che

**Proposizione 10.8. Rappresentazione delle forze di contatto in equilibrio.** *Sia  $T(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$ . Allora ogni campo di forze di contatto in equilibrio  $\mathbf{t} \in [\Gamma(\text{Ker } \mathbf{B})]^\perp \subseteq \mathcal{F}$  può ottenersi come flusso al contorno  $\partial T(\Omega)$  di un campo di sforzi  $\mathbf{T} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_o$  in equilibrio con forze di massa nulle. In altri termini l'operatore del flusso al contorno  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial \mathcal{F}\}$  è suriettivo da  $\text{Ker } \mathbf{B}'_o$  su  $[\Gamma(\text{Ker } \mathbf{B})]^\perp$  e cioè*

$$\boxed{\mathbf{N}(\text{Ker } \mathbf{B}'_o) = [\Gamma(\text{Ker } \mathbf{B})]^\perp.}$$

**Dim.** Ponendo  $\mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{B}$  si ha che

$$\Sigma = \{\mathbf{T} \in \mathcal{S} : \langle \mathbf{NT}, \mathbf{Tu} \rangle = -(\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}\}.$$

Tenendo conto della relazione  $[\text{Ker } \mathbf{B}]^\oplus = \mathbf{B}'_o(\text{Ker } \mathbf{N})$ , si può porre

$$\Sigma = \{\mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \mathbf{T} \in [\text{Ker } \mathbf{B}]^\oplus = \mathbf{B}'_o(\text{Ker } \mathbf{N})\},$$

e cioè

$$\Sigma = \text{Ker } \mathbf{N} + \text{Ker } \mathbf{B}'_o.$$

Ne segue che  $\mathbf{N}\Sigma = \mathbf{N}(\text{Ker } \mathbf{B}'_o)$  per cui il risultato è una diretta conseguenza della proposizione 10.2 (p. 244).  $\square$

## 10.2. Teoremi complementari

Facendo riferimento alle

■ *regole di complementarietà.*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u} \in \mathcal{V} &\iff \mathbf{T} \in \mathcal{S}, \\
 \mathbf{v} \in \mathcal{L} &\iff \mathbf{S} \in \Sigma, \\
 \mathbf{b} \in H &\iff \mathbf{D} \in \mathcal{H}, \\
 \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F} &\iff \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}, \\
 \mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\} &\iff \mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\}, \\
 \boldsymbol{\Gamma} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\} &\iff -\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\},
 \end{aligned}$$

è possibile formulare i complementari dei teoremi di rappresentazione enunciati nella sezione 10 (p. 243).

Nel seguito, per completezza, si riportano l'enunciato e la dimostrazione dei risultati complementari di quelli enunciati nel lemma 10.1 (p. 243) e nelle proposizioni 10.4 (p. 245) e 10.5 (p. 246).

**Lemma 10.9.** *Si consideri una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$ . In corrispondenza di ogni atto di cedimento  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  esiste almeno un campo di deformazioni tangentì  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}$  tale che il sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H} \times \partial\mathcal{V}$  sia congruente sulla struttura e cioè risulti*

$$\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{S}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

**Dim.** La dimostrazione è basata sulla soluzione del problema elastico

$$\mathbb{M}^C \left\{
 \begin{array}{l}
 \langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{C}_o \mathbf{T} \rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{S}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle, \quad \mathbf{T} \in \Sigma \quad \forall \mathbf{S} \in \Sigma, \\
 \langle\langle \mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{K}_o \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle = 0, \quad \mathbf{u} \in H \quad \forall \mathbf{v} \in H,
 \end{array}
 \right.$$

con  $\mathbf{K}_o \in \mathbf{L}\{H; H\}$ ,  $\mathbf{C}_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$ ,  $\text{Ker } \mathbf{K}_o = \{\mathbf{o}\}$ ,  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$ , che è discusso in generale in [50]. Basta infatti porre  $\mathbf{D} = \mathbf{C}_o \mathbf{T}$  dove  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  è l'unica soluzione del problema  $\mathbb{M}^C$  ed osservare che  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{B}'_o$ .  $\square$

**Proposizione 10.10. Rappresentazione degli atti di cedimento congruenti.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematici conformi. Allora ogni campo di atti di cedimento  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  è congruente con un campo di cinematici  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o + \mathcal{L}$  somma di uno rigido e di uno conforme se e solo se è ortogonale al flusso di ogni stato di autosforzo. Si ha cioè che*

$$\Gamma \mathcal{V}_o + [\mathbf{N}\Sigma]^\perp = \Gamma(\mathcal{V}_o + \mathcal{L}) = [\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{V}.$$

**Dim.** Sia  $\partial\mathbf{w} \in [\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F}$  e cioè

$$\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}, \quad \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

La condizione variazionale di congruenza stabilisce l'equivalenza

$$\begin{aligned} \partial\mathbf{w} \in [\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp &\iff \exists \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L}, \quad \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff \\ \exists \mathbf{u} \in \mathcal{V}_o, \quad \partial\mathbf{w} &\in \Gamma\mathbf{u} + \Gamma\mathcal{L} \iff \partial\mathbf{w} \in \Gamma(\mathcal{V}_o + \mathcal{L}), \end{aligned}$$

e l'asserto è dimostrato tenendo conto che per la proposizione 10.3 (p. 244) risulta  $\Gamma\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp$ .  $\square$

**Proposizione 10.11. Rappresentazione dei cinematismi conformi congruenti.** *Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di  $\Omega$  e  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematismi conformi. Allora un campo di cinematismi liberi sul contorno  $\partial\mathbf{w} \in \Gamma\mathcal{L}$  è congruente con un campo di cinematismi rigidi  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}$  se e solo se è ortogonale al flusso di ogni stato di sforzo somma di uno conforme e di uno in equilibrio con forze di massa nulle. Si ha cioè che*

$$\boxed{\Gamma\mathcal{V}_{\text{RIG}} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp \cap [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp = [\mathbf{N}(\Sigma + \mathcal{S}_o)]^\perp \subseteq \partial\mathcal{V}.}$$

**Dim.** Sia  $\partial\mathbf{w} \in [\mathbf{N}\Sigma]^\perp \cap [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp$ , cioè  $\partial\mathbf{v} \in [\mathbf{N}\Sigma]^\perp$ ,  $\langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_o$ . La condizione variazionale di congruenza della proposizione 8.3 (p. 237) assicura che

$$\partial\mathbf{w} \in [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp \iff \exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{O}, \quad \Gamma\mathbf{u} = \partial\mathbf{w}.$$

Allora dalla condizione  $\partial\mathbf{w} \in [\mathbf{N}\Sigma]^\perp = \Gamma\mathcal{L}$  si deduce che  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ .

Quindi  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L} = \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ .

Viceversa se  $\partial\mathbf{w} \in \Gamma\mathcal{V}_{\text{RIG}}$  esiste un  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}$  tale che  $\Gamma\mathbf{u} = \partial\mathbf{w}$  e dalla formula di GREEN

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{u}) + \langle\langle \mathbf{NT}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S},$$

si evince che  $\langle\langle \mathbf{NT}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle = 0$  per ogni  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_o$  in quanto  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{O}$  e  $\mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{o}$ . Inoltre si ha anche che  $\langle\langle \mathbf{NT}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle = 0$  per ogni  $\mathbf{T} \in \Sigma$  in quanto  $\Gamma\mathbf{u} = \Gamma\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp$ . Ciò prova il risultato.

In particolare per  $\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma$ , e cioè  $\Sigma = \mathcal{S}$ , si ottiene che  $[\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp = \Gamma\mathcal{V}_o$ .  $\square$

Nella prossima sezione si riporta un quadro sinottico dei principali risultati e delle relazioni di maggior rilievo in meccanica delle strutture.

### 10.3. Synopsis

- spazio dei *cinematismi* GREEN-regolari

$$\mathcal{V}(\Omega) := \left\{ \mathbf{v} \in H(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega) : \mathbf{B}\mathbf{v}|_P \in \mathcal{H}(\mathcal{P}) \right\}.$$

- spazio degli *sforzi* GREEN-regolari

$$\mathcal{S}(\Omega) := \left\{ \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega) : \mathbf{B}'_o \mathbf{T}|_P \in H(\mathcal{P}) \right\}.$$

- spazio delle *forze*  $\mathcal{F}(\Omega) = \mathcal{V}'(\Omega)$  duale topologico di  $\mathcal{V}(\Omega)$ .

- formula di GREEN generalizzata

$$\langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{T}, \mathbf{u}) + \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \mathbf{\Gamma}\mathbf{u} \rangle\rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega).$$

- *cinematismi*  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)) \iff \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega), \quad \begin{cases} [[\mathbf{\Gamma}\mathbf{u}]] = \mathbf{o}, \\ \text{in ogni } \overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega). \end{cases}$$

- *sforzi*  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi

$$\mathbf{T} \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega)) \iff \mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega), \quad \begin{cases} [[\mathbf{N}\mathbf{T}]] = \mathbf{o}, \\ \text{in ogni } \overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega). \end{cases}$$

- *cinematismi conformi*

$$\mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{G}\mathbf{\Gamma} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{\Gamma}\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{G} = \text{Im } \mathbf{P} \right\}.$$

- *reazioni vincolari*

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\Omega) &:= \mathcal{L}^\perp = \left\{ \mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega) : \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \right\}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{R}(\Omega)^\perp = \left\{ \mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega) : \langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{r} \in \mathcal{R}(\Omega) \right\}. \end{aligned}$$

- *forze attive*

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}' = \frac{\mathcal{F}(\Omega)}{\mathcal{R}(\Omega)}.$$

- *cinematismi rigidi*

$$\mathcal{V}_o := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{o} \} = \text{Ker } \mathbf{B}.$$

- *cinematismi rigidi conformi*

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}} := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{o} \} = \mathcal{V}_o(\Omega) \cap \mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

- *seconda diseguaglianza di KORN*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|_{H(\Omega)} &\geq \alpha \|\mathbf{u}\|_{H^m(\Omega)} \quad \forall \mathbf{u} \in H^m(\Omega) \iff \\ \begin{cases} \dim \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} < +\infty, \\ \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}(\Omega)} \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}(\Omega)/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathcal{L} \subset \mathcal{V}(\Omega). \end{cases} \end{aligned}$$

- *reazioni vincolari al contorno*

$$\partial \mathcal{R} = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp \iff \Gamma \mathcal{L} = \partial \mathcal{R}^\perp.$$

- *sforzi conformi*

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{ \mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{N}\mathbf{T} \in [\Gamma \mathcal{L}]^\perp \} \iff \\ &\{ \mathbf{T} \in \mathcal{S} : \langle \mathbf{N}\mathbf{T}, \Gamma \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \}. \end{aligned}$$

- *sforzi in equilibrio con forze di massa nulle*

$$\mathcal{S}_o := \{ \mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{o} \} = \text{Ker } \mathbf{B}'_o.$$

- *sforzi autoequilibrati*

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{AUTO}} &:= \{ \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega) : \langle \mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \} \\ &= \{ \mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{o}, \mathbf{N}\mathbf{T} \in [\Gamma \mathcal{L}]^\perp \} \\ &= \mathcal{S}_o(\Omega) \cap \Sigma = \text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \Sigma = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}. \end{aligned}$$

■ *teorema delle potenze virtuali*

$$\begin{aligned} \ell \in [\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}]^{\perp} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}} &\iff \\ \exists \mathbf{T} \in \mathcal{H} : \langle \ell, \mathbf{v} \rangle &= \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

■ *teorema di CAUCHY*

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \mathbf{v} \rangle = \langle \langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \iff \begin{cases} \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{N}\mathbf{T} \in \mathbf{t} + [\mathbf{\Gamma}\mathcal{L}]^{\perp}. \end{cases}$$

■ *rappresentazione delle forze di massa in equilibrio*

$$\mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^{\oplus},$$

dove  $\mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\}$ . In particolare  $\text{Im } \mathbf{B}'_o = H$ .

■ *rappresentazione dei valori al contorno dei cinematismi conformi*

$$\mathbf{\Gamma}\mathcal{L} = (\mathbf{N}\Sigma)^{\perp}.$$

■ *rappresentazione del flusso al contorno degli sforzi conformi*

$$\mathbf{N}\Sigma = (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp},$$

dove  $\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}$ . In particolare  $\text{Im } \mathbf{N} = \partial\mathcal{F}$ .

■ *rappresentazione dei cinematismi rigidi conformi*

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L} = [\mathbf{B}'_o \Sigma]^{\oplus}.$$

■ *deformazioni tangenti conformi*

$$\mathbf{B}\mathcal{L} = [\text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \Sigma]^{\oplus} = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}^{\oplus}.$$



■ *decomposizione* dello spazio  $H(\Omega)$  in somma diretta di complementi ortogonali

$$H(\Omega) = \mathcal{V}_{\text{RIG}} \dot{+} \mathbf{B}'_o \Sigma, \quad \begin{cases} \mathcal{V}_{\text{RIG}} = [\mathbf{B}'_o \Sigma]^\perp, \\ \mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\perp. \end{cases}$$

■ *decomposizione* dello spazio  $\mathcal{H}(\Omega)$  in somma diretta di complementi ortogonali

$$\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \dot{+} \mathbf{B}\mathcal{L}, \quad \begin{cases} \mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^\perp, \\ \mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp. \end{cases}$$

■ *rappresentazione delle forze di contatto in equilibrio*

$$\mathbf{N}\mathcal{S}_o + [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}]^\perp = \mathbf{N}(\mathcal{S}_o + \Sigma) = [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F}.$$

■ *rappresentazione dei cinematismi al contorno congruenti*

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{V}_o + [\mathbf{N}\Sigma]^\perp = \boldsymbol{\Gamma}(\mathcal{V}_o + \mathcal{L}) = [\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp \subseteq \partial\mathcal{V}.$$

■ *casi particolari*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\text{Ker } \mathbf{B}'_o) &= [\boldsymbol{\Gamma}(\text{Ker } \mathbf{B})]^\perp, \\ \boldsymbol{\Gamma}(\text{Ker } \mathbf{B}) &= [\mathbf{N}(\text{Ker } \mathbf{B}'_o)]^\perp. \end{aligned}$$

■ *rappresentazione delle forze reattive in equilibrio*

$$\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}]^\perp \cap [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{V}_o]^\perp \subseteq \partial\mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{N}\mathcal{S}_o = [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{V}_o]^\perp.$$

■ *rappresentazione dei cinematismi conformi congruenti*

$$\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{V}_{\text{RIG}} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp \cap [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp \subseteq \partial\mathcal{V} \Rightarrow \boldsymbol{\Gamma}\mathcal{V}_o = [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp.$$

■ condizioni variazionali di autoequilibrio

- |  |
|--|
| i) $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \mathbf{\Gamma v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$ |
| ii) $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \mathbf{\Gamma v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{T}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$                    |
| iii) $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \mathbf{\Gamma v} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o,$   |
| iv) $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \mathbf{\Gamma v} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}.$   |

dove  $\mathbf{b} \in H, \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}, \mathbf{T} \in \mathcal{H}, \boldsymbol{\rho} \in (\mathbf{\Gamma L})^\perp = \mathbf{N}\Sigma$ .

■ condizioni variazionali di congruenza

- |  |
|--|
| i) $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} + \partial\mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S},$ |
| ii) $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \mathbf{S}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{S} \in \Sigma,$                          |
| iii) $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} + \partial\mathbf{v} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_o,$                                  |
| iv) $\langle\langle \mathbf{S}, \mathbf{D} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{NS}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \mathbf{S} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$  |

dove  $\mathbf{D} \in \mathcal{H}, \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}, \mathbf{u} \in H, \partial\mathbf{v} \in (\mathbf{N}\Sigma)^\perp = \mathbf{\Gamma L}$ .

■ regole di complementarietà.

$\mathbf{u} \in \mathcal{V}$	$\iff \mathbf{T} \in \mathcal{S},$
$\mathbf{v} \in \mathcal{L}$	$\iff \mathbf{S} \in \Sigma,$
$\mathbf{b} \in H$	$\iff \mathbf{D} \in \mathcal{H},$
$\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$	$\iff \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V},$
$\mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$	$\iff \mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\},$
$\mathbf{\Gamma} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$	$\iff -\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}.$

## 11. EQUILIBRIO DINAMICO

Le equazioni fondamentali della dinamica possono essere dedotte dalla condizione di equilibrio includendo tra le forze anche la forza d'inerzia.

Nella meccanica classica la forza d'inerzia è l'integrale del prodotto tra la densità e l'opposto del campo vettoriale di accelerazione misurato da un osservatore galileiano e cioè in moto rettilineo ed uniforme rispetto ad un riferimento privilegiato.

Nella formulazione delle leggi della dinamica un ruolo basilare è svolto dal principio di conservazione della massa che è illustrato nella prossima sezione.

### 11.1. Conservazione della massa

La legge locale di conservazione della massa può essere dedotta mediante un'applicazione del teorema di REYNOLDS (proposizione I.8.1 (p. 68)):

$$\frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{B},t)} \phi \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\dot{\phi} + \phi \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\chi(\mathcal{B},t)} (\phi' + \operatorname{div}(\phi \mathbf{v})) \, dv.$$

Sia infatti

- $m(\mathcal{P})$  la massa di  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$ ,
- $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{B})$  una traiettoria del corpo  $\mathcal{B}$ ,
- $\rho_{\mathcal{B}}(\mathbf{p})$  il campo di densità del corpo  $\mathcal{B}$ ,
- $\rho(\mathbf{x}, t)$  il campo di densità su  $\chi(\mathcal{B}, t)$ .

La legge di *conservazione della massa* stabilisce che

$$m(\chi(\mathcal{P}, t)) = \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \rho \, dv = \int_{\mathcal{P}} \rho J_\chi \, dv_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{P}} \rho_{\mathcal{B}} \, dv_{\mathcal{B}} = m(\mathcal{P}).$$

L'arbitrarietà di  $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{B}$  mostra quindi che

$$\rho J_\chi = \rho_{\mathcal{B}}.$$

Dal teorema del trasporto si deduce inoltre che, per ogni  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ ,

$$m(\chi(\mathcal{P}, t)) = \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \rho \, dv = \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) \, dv = \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} (\rho' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})) \, dv.$$

La legge di conservazione della massa impone che

$$m(\chi(\mathcal{P}, t)) \dot{=} 0,$$

ed è pertanto equivalente alle seguenti condizioni locali su  $\Omega(t) = \chi(\mathcal{B}, t)$

$$\boxed{\dot{\rho} + \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \iff \rho' + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) = 0,}$$

ed alla legge integrale

$$\int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \rho' \, dv + \int_{\partial \chi(\mathcal{P}, t)} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da = 0.$$

valida per ogni  $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$ . Dalla relazione  $\dot{\rho} + \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0$ , moltiplicando per lo jacobiano  $J_\chi$  e facendo ricorso alla legge di espansione di EULER

$$\dot{J}_\chi = J_\chi (\operatorname{div} \mathbf{v})_m,$$

si ritrova la condizione

$$\boxed{\dot{\rho} J_\chi + \rho \dot{J}_\chi = 0 \iff (\rho J_\chi) \dot{=} 0 \iff \rho J_\chi = \rho_B.}$$

Dalle relazioni  $\rho' + \rho (\operatorname{div} \mathbf{v}) = 0$  e  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + (d\mathbf{v}) [\mathbf{v}]$  si deduce la seguente relazione che esprime la forza d'inerzia per unità di volume in termini di derivata spaziale:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \dot{\mathbf{v}} &= \rho [\mathbf{v}' + d\mathbf{v} [\mathbf{v}]] = (\rho \mathbf{v})' - \rho' \mathbf{v} + \rho (d\mathbf{v}) [\mathbf{v}] = \\ &= (\rho \mathbf{v})' + \mathbf{v} \operatorname{div} (\rho \mathbf{v}) + (d\mathbf{v}) [\rho \mathbf{v}] = \\ &= (\rho \mathbf{v})' + \operatorname{div} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}). \end{aligned}}$$

Come semplice conseguenza dei risultati precedenti si deduce ancora che per ogni campo spaziale, scalare  $\phi(\mathbf{x}, t)$ , vettoriale  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  o tensoriale  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ , valgono le formule

$$\begin{aligned} \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \phi \rho \, dv &= \int_{\mathcal{P}} \phi_m \rho_B \, dv_B, & \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \phi \rho \, dv &= \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \dot{\phi} \rho \, dv, \\ \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \mathbf{u} \rho \, dv &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{u}_m \rho_B \, dv_B, & \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \mathbf{u} \rho \, dv &= \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \dot{\mathbf{u}} \rho \, dv, \\ \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \mathbf{T} \rho \, dv &= \int_{\mathcal{P}} \mathbf{T}_m \rho_B \, dv_B, & \frac{d}{dt} \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \mathbf{T} \rho \, dv &= \int_{\chi(\mathcal{P}, t)} \dot{\mathbf{T}} \rho \, dv. \end{aligned}$$

Le prime sono immediata conseguenza della legge di conservazione della massa.

Le seconde sono una diretta conseguenza delle prime.

In alternativa, possono essere ottenute anche dalla formula del trasporto di REYNOLDS, richiamata all'inizio di questa sezione, e dalle analoghe per campi vettoriali e tensoriali, osservando che

$$(\phi \rho) \dot{+} (\phi \rho) \operatorname{div} \mathbf{v} = \dot{\phi} \rho + \phi (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) = \dot{\phi} \rho,$$

$$(\mathbf{u} \rho) \dot{+} (\mathbf{u} \rho) \operatorname{div} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}} \rho + \mathbf{u} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{u}} \rho,$$

$$(\mathbf{T} \rho) \dot{+} (\mathbf{T} \rho) \operatorname{div} \mathbf{v} = \dot{\mathbf{T}} \rho + \mathbf{T} (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{T}} \rho.$$

Sia ora  $\Omega$  un *volume di controllo* al tempo  $t \in I$  e cioè una fissata regione dello spazio che è attraversata dal corpo nella sua traiettoria in un intorno dell'istante  $t \in I$ .

Si ha cioè che

$$\Omega \subset \chi(\mathcal{B}, \tau) \quad \forall \tau \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon], \varepsilon > 0.$$

La prossima proposizione stabilisce che il tasso d'incremento della massa contenuta in un volume di controllo è uguale al flusso di massa entrante attraverso la superficie di frontiera.

**Proposizione 11.1. Conservazione della massa per un volume di controllo.** *Sia  $\Omega$  un volume di controllo al tempo  $t \in I$ . Allora*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dv = - \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

**Dim.** Integrando la relazione  $\rho' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$  su  $\Omega$  e tenendo conto che

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dv = \int_{\Omega} \rho' \, dv, \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \, dv = \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

si ottiene il risultato. □

## 11.2. Legge fondamentale della dinamica

La condizione di equilibrio dinamico di un corpo  $\mathcal{B}$ , che nel corso di una traiettoria dinamica occupa una configurazione spaziale  $\Omega$ , si deduce dalla condizione di equilibrio statico enunciata nella sezione 6 (p. 201) esplicitando il ruolo svolto dalle forze d'inerzia, secondo l'idea di D'ALEMBERT<sup>52</sup> ed EULER [3].

---

<sup>52</sup> JEAN-BAPTISTE LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783) *Traité de dynamique*, Paris, 1743.

Nella configurazione spaziale  $\Omega$  di una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  siano

- $\rho \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  campo di densità di massa,
- $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  campo di velocità,
- $\dot{\mathbf{v}} \in H(\Omega)$  campo di accelerazione,
- $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  campo di spostamenti virtuali.

dove  $\Omega = \chi(\mathcal{B}, t)$ .

Negli sviluppi formali si assume che campo di velocità sia una funzione sufficientemente regolare del tempo.

In dinamica è necessario distinguere con attenzione tra il tempo fisico e lo pseudo tempo che funge da parametro in processi evolutivi ideali.

Conseguentemente simboli diversi denotano i campi di velocità  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  del corpo nella traiettoria dinamica ad un istante  $t \in I$  ed i campi di spostamenti virtuali  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  che giocano il ruolo di campi di prova per imporre la condizione di equilibrio.

In meccanica si suole anche dire che per imporre la condizione di equilibrio dinamico bisogna valutare le forze, inclusa quelle d'inerzia, e poi *congelare* il tempo ed immaginare che il corpo intraprenda un'immaginaria traiettoria evolutiva che avviene quindi nello spazio geometrico a tempo fisso.

Sia allora  $\Omega = \chi(\mathcal{B}, t)$  una configurazione del corpo continuo e  $\mathcal{T}(\Omega)$  una suddivisione di supporto per  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ .

Si pongono le seguenti definizioni

- $\rho \mathbf{v}$  densità di quantità di moto,
- $-\rho \dot{\mathbf{v}}$  densità di forza d'inerzia,
- $\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$  densità di energia cinetica,
- $\mathbf{T} : \mathbf{B} \mathbf{v}$  densità di potenza meccanica.

Dunque

- La *forza d'inerzia* in  $\Omega$  associata al campo di accelerazione  $\dot{\mathbf{v}} \in H(\Omega)$  all'istante  $t \in I$  è il funzionale lineare  $\mathbf{M}[\dot{\mathbf{v}}] \in \mathbf{L}(\mathcal{V}; \mathfrak{R})$  definito da

$$\langle \mathbf{M}[\dot{\mathbf{v}}], \mathbf{v} \rangle = - \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Il prodotto  $-\rho \dot{\mathbf{v}}$  rappresenta la *densità di forza d'inerzia*.

L'operatore lineare  $\mathbf{M} \in \mathbf{L}\{H; \mathcal{F}\}$  che ad ogni campo di accelerazione  $\dot{\mathbf{v}} \in H$  associa la corrispondente forza d'inerzia  $\mathbf{M}[\dot{\mathbf{v}}]$  è detto *operatore d'inerzia*.

- L'energia cinetica in  $\Omega$  associata al campo di velocità  $v \in H(\Omega)$  all'istante  $t \in I$  è il funzionale quadratico  $\mathcal{K} \in L(H^2; \mathbb{R})$  definito da

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho v \cdot v \, dv,$$

- La potenza meccanica compiuta da un campo di sforzi  $T \in \mathcal{H}(\Omega)$  per un campo di velocità di deformazione  $Bv \in \mathcal{H}(\Omega)$  è definita da

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega} T : Bv \, dv.$$

- La potenza delle forze attive compiuta dal sistema di forze di massa  $b \in H$  e di contatto  $t \in \mathcal{F}$  per il campo di velocità  $v \in H(\Omega)$  è il funzionale lineare  $\mathcal{W} \in L(V; \mathbb{R})$  definito da

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} b \cdot v \, dv + \int_{T(\Omega)} t \cdot v \, da,$$

■ La legge fondamentale della dinamica impone assiomaticamente che

$$a) \quad \langle f, v \rangle - \int_{\Omega} \rho \dot{v} \cdot v \, dv = 0, \quad \forall v \in \text{Ker } B = V_0.$$

■ In termini di forze attive e di spostamenti virtuali rigidi conformi la legge fondamentale della dinamica è detta principio dinamico della potenza virtuale e si scrive

$$b) \quad \langle \ell, v \rangle - \int_{\Omega} \rho \dot{v} \cdot v \, dv = 0, \quad \forall v \in \mathcal{L} \cap \text{Ker } B = V_{\text{RIG}}.$$

La condizione *b*) ed il teorema delle potenze virtuali, proposizione 6.4 (p. 215), assicurano l'esistenza di almeno uno stato di sforzo  $T \in \mathcal{H}(\Omega)$  che soddisfa la

■ condizione variazionale di equilibrio dinamico

$$c) \quad \langle \ell, v \rangle - \int_{\Omega} \rho \dot{v} \cdot v \, dv = \int_{T(\Omega)} T : Bv \, dv, \quad \forall v \in \mathcal{L},$$

Osservando che il campo di spostamenti virtuali conformi  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  non dipende dal tempo e che la legge di conservazione della massa impone che la misura di massa  $\rho \, dv$  sia costante, la condizione variazionale di equilibrio dinamico può essere riscritta nella forma

$$d) \quad \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 11.2. Teorema della potenza compiuta.** *Sia  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  una struttura vincolata. La potenza compiuta da un sistema di forze attive agenti su un continuo in corrispondenza di un atto di moto è pari alla somma del tasso di variazione dell'energia cinetica e della potenza compiuta da uno stato di sforzo in equilibrio per la velocità di deformazione corrispondente.*

$$e) \quad \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv.$$

**Dim.** Ponendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}$  nella *c)* si ottiene che

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv.$$

Basta allora osservare che

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}.$$

ed invocare la relazione

$$\frac{d}{dt} (\rho \, dv) = 0,$$

che esprime la conservazione della massa.  $\square$

La eguaglianza *e)* può scriversi sinteticamente nella forma

$$\mathcal{W} = \mathcal{M} + \dot{\mathcal{K}}.$$

Si noti poi la differenza tra la condizione *d)* di equilibrio dinamico e l'espressione *e)* del teorema della potenza compiuta.

Se si considerano spostamenti virtuali non conformi, nella condizione variazionale di equilibrio dinamico intervengono anche le forze reattive.

Detto quindi  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}_\ell(\mathbf{T})$  il sistema di forze agenti sulla struttura, le condizioni variazionali  $c), d)$  sono equivalenti alle seguenti

$$c_o) \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$$

$$d_o) \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, dv + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Se il sistema di forze  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è costituito da una coppia  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\}$  di forze di massa in  $\Omega$  e di forze di contatto su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ , la condizione varazionale  $c_o)$ , adottando quale campi di prova i cinematicismi rigidi di traslazione e di rotazione si ottengono le

■ *equazioni cardinali della dinamica o leggi di EULER [3]*

$$\mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \int_{\Omega} \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, dv,$$

$$\mathbf{M}_o[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) \, dv,$$

Le due equazioni cardinali della dinamica governano rispettivamente il tasso di variazione della *quantità di moto* ed il tasso di variazione del *momento della quantità di moto* rispetto all'origine:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \, dv, \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times (\rho \mathbf{v}) \, dv.$$

### 11.3. Condizioni locali d'equilibrio dinamico

Se il sistema di forze attive agenti sulla struttura è costituito da campi di forze di massa e di contatto  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$ , la condizione varazionale di equilibrio dinamico, in virtù del teorema di CAUCHY, proposizione 7.2 (p. 225), equivale ad un'equazione differenziale con condizioni al contorno.

La localizzazione della condizione varazionale di equilibrio dinamico è illustrata nel seguito trattando separatamente le descrizioni materiale e spaziale.

La prima dimostrazione dell'equivalenza della legge fondamentale della dinamica b) alle equazioni locali di equilibrio dinamico di CAUCHY è dovuta a GABRIEL PIOLA ([7], 1833). La procedura di PIOLA, che fece ricorso alla metodologia dei moltiplicatori di LAGRANGE (vedi sezione IV.5.5 (p. 410)), è illustrata in [23].

### 11.3.1. Descrizione materiale dell'equilibrio dinamico

In termini di forze di massa e di contatto  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  la condizione variazionale di equilibrio dinamico  $b_o$ ) si scrive

$$b_1) \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{T(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{Bv} \, dv + \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

In forza del teorema di CAUCHY la condizione variazionale equivale alle equazioni

$\mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}},$	equilibrio di massa,
$\mathbf{N} \mathbf{T} = \mathbf{t},$	equilibrio al contorno,

dove  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ .

### 11.3.2. Descrizione spaziale dell'equilibrio dinamico

In molti problemi di meccanica delle strutture ed in particolare in *fluidodinamica* è necessario scrivere le condizioni locali di equilibrio dinamico in termini della derivata rispetto al tempo del campo spaziale di velocità.

Ciò si consegue semplicemente ricordando la formula

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho [\mathbf{v}' + \operatorname{dv}[\mathbf{v}]] = (\rho \mathbf{v})' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}),$$

dedotta nella sezione 11.1 (p. 258).

Le condizioni locali di equilibrio dinamico si scrivono pertanto

$\mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b} - \rho [\mathbf{v}' + \operatorname{dv}[\mathbf{v}]],$	equilibrio di massa,
$\mathbf{N} \mathbf{T} = \mathbf{t},$	equilibrio al contorno,

ovvero

$\mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{b} - [(\rho \mathbf{v})' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})],$	equilibrio di massa,
$\mathbf{N} \mathbf{T} = \mathbf{t},$	equilibrio al contorno.

Si noti che l'equazione differenziale di equilibrio espressa in termini di velocità spaziali, è *non lineare* per effetto del termine quadratico  $\operatorname{dv}[\mathbf{v}]$  nel primo caso e per effetto del termine  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  nel secondo caso.

Definendo lo

- *sforzo equivalente*

$$\mathbf{T}_V = \mathbf{T} - (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}),$$

le condizioni locali di equilibrio dinamico si possono scrivere

$\mathbf{B}'_o \mathbf{T}_V = \mathbf{b} - (\rho \mathbf{v})',$	equilibrio di massa ,
$\mathbf{N} \mathbf{T}_V = \mathbf{t} - \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}),$	equilibrio al contorno ,

All'espressione della condizione variazionale di equilibrio dinamico in termini di velocità spaziali si perviene sostituendo nella b) della sezione 11.3.1 la formula

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = (\rho \mathbf{v})' + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}),$$

dedotta nella sezione 11.1 (p. 258).

#### 11.4. Equilibrio dinamico di un volume di controllo

Si assuma che la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  sia di supporto per il campo  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$ , nel senso che risulti  $\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{P})$  per ogni  $\mathcal{P} \in \mathcal{T}(\Omega)$ .

La condizione variazionale di equilibrio dinamico si scrive allora

$b_2) \quad \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T} : \mathbf{Bv} \, dv +$ $+ \int_{\Omega} (\rho \mathbf{v})' \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$
---

La formula di GREEN

$\int_{\Omega} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) : (\mathbf{Bv}) \, dv = \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, da,$
--

consente di porre la condizione variazionale di equilibrio dinamico nella forma

$b_3) \quad \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{T}_V : \mathbf{Bv} \, dv +$ $+ \int_{\Omega} (\rho \mathbf{v})' \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$
--

Tale formula esprime il criterio di equilibrio dinamico per un volume di controllo  $\Omega$ .  
Osservando che per  $\Omega$  fissato in  $\mathbb{S}$  si ha

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \cdot v \, dv = \int_{\Omega} (\rho v)' \cdot v \, dv,$$

il criterio assume la seguente espressione.

■ *Equilibrio dinamico per un volume di controllo  $\Omega \subset \mathbb{S}$*

$$b_4) \quad \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{T(\Omega)} \mathbf{T}_V : \mathbf{B}v \, dv + \\ + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \cdot v \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \rho v (v \cdot \mathbf{n}) \cdot v \, da. \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Dalla  $b_4)$ , assumendo che lo spostamento virtuale sia rigido, e cioè che

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x},$$

si ottengono le condizioni cardinali di equilibrio di un volume di controllo

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \, da = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho v \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \rho v (v \cdot \mathbf{n}) \, da, \\ \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{x} \times \mathbf{t} \, da = \\ = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{x} \times \rho v \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} (\mathbf{x} \times \rho v) (v \cdot \mathbf{n}) \, da.$$

■ Un flusso è detto *stazionario* se  $\chi(\mathcal{B}, t) = \chi(\mathcal{B}, s)$  per ogni  $s, t \in I$  e se

$$\mathbf{v}' = \mathbf{o}, \quad \rho' = 0, \quad \mathbf{T}' = \mathbf{O}.$$

Se il flusso è stazionario risulta pertanto  $(\rho v)' = \mathbf{o}$ .

La condizione di equilibrio dinamico per un volume di controllo  $\Omega \in \mathbb{S}$  in un *flusso stazionario* assume quindi la forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{T(\Omega)} \mathbf{T}_V : \mathbf{B}v \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \rho v (v \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

La formulazione variazionale dell'equilibrio dinamico per un volume di controllo consente di dedurre molti interessanti risultati.

A titolo di esemplificazione si riportano nel seguito la dimostrazione del *teorema di TORRICELLI* e la determinazione della spinta di una condotta in pressione su di un blocco di ancoraggio in corrispondenza di un tratto in curva.

**Proposizione 11.3. Teorema di Torricelli.** *Il flusso stazionario di un liquido contenuto in un recipiente attraverso un foro è proporzionale alla radice quadrata dell'altezza del pelo libero del liquido rispetto al foro.*

**Dim.** Si tratta di mostrare che il flusso stazionario del liquido è proporzionale alla pressione media alla quota del foro.

Si assuma quale volume di controllo un cilindro retto di sezione pari al foro ed asse orizzontale, avente una base in corrispondenza del foro e l'altra all'interno del recipiente. Applicando la condizione di equilibrio dinamico con un campo di spostamenti virtuali di traslazione orizzontale ed osservando che la forza di massa è verticale, si deduce che

$$\int_{\mathcal{A}} \pi \, da = \int_{\mathcal{A}} \rho \|v\|^2 \, da,$$

dove  $\mathcal{A}$  è l'area del foro. Se il foro è piccolo si ha che  $\rho \|v\|^2 = \pi = \rho h$  ovvero

$$\|v\| = \sqrt{h},$$

e quindi il risultato.  $\square$

La prossima proposizione fornisce un risultato utile nelle applicazioni di ingegneria idraulica. La trattazione segue quella svolta in [40].

**Proposizione 11.4. Spinta sul blocco d'ancoraggio.** *Una condotta in pressione che compie una curva esercita sul blocco d'ancoraggio una azione avente risultante pari a*

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - (\pi_1 + \rho_1 \|v_1\|^2) A_1 \mathbf{n}_1 - (\pi_2 + \rho_2 \|v_2\|^2) A_2 \mathbf{n}_2,$$

dove  $\mathbf{P}$  è la risultante della forza di massa,  $i = 1, 2$  sono le sezioni terminali del tratto di condotta in esame  $A_i$  è l'area della condotta,  $\pi_i$  è la pressione media,  $v_i$  è l'intensità media della velocità,  $\rho_i$  è la densità media e  $\mathbf{n}_i$  è il versore della normale uscente in  $i = 1, 2$ , con il flusso nel verso che va dalla sezione 1 alla 2.

**Dim.** Denotando con  $\mathbf{R}$  la risultante della forza esercitata dal fluido sulle pareti del tratto di condotta e con  $\mathbf{P}$  la risultante della corrispondente forza di massa, la risultante delle azioni sul volume di controllo si scrive

$$-\mathbf{R} + \mathbf{P} - \pi_1 A_1 \mathbf{n}_1 - \pi_2 A_2 \mathbf{n}_2.$$

Si osservi che la condotta è un tubo di flusso. Essendo quindi  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  sulla parete,  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 < 0$  e  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_2 > 0$  nelle sezioni 1 e 2, si ha che

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, da = \rho_1 \| \mathbf{v}_1 \|^2 A_1 \mathbf{n}_1 + \rho_2 \| \mathbf{v}_2 \|^2 A_2 \mathbf{n}_2.$$

Adottando quale campo di prova un arbitrario campo di spostamenti virtuali rigidi di traslazione, la condizione di equilibrio dinamico del volume di controllo in un flusso stazionario conduce alla formula cercata.  $\square$

Si noti che la conservazione della massa implica che il flusso di massa attraverso le sezioni del tubo siano pari ad una costante  $m$  e quindi risulta

$$\rho_1 \| \mathbf{v}_1 \|^2 A_1 = \rho_2 \| \mathbf{v}_2 \|^2 A_2 = m,$$

La formula della proposizione 11.4 si può dunque riscrivere

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - (\pi_1 A_1 + \| \mathbf{v}_1 \|^2 m) \mathbf{n}_1 - (\pi_2 A_2 + \| \mathbf{v}_2 \|^2 m) \mathbf{n}_2.$$

#### 11.4.1. Equazioni di Navier-StVenant-Stokes

La non linearità dell'equazione differenziale di equilibrio dinamico espressa in termini di velocità spaziali è la causa della non linearità delle equazioni del moto di un fluido incomprimibile ed a viscosità lineare, note in letteratura come *equazioni di NAVIER-STOKES*, ma che andrebbero a maggior ragione denominate *equazioni di NAVIER<sup>53</sup> -STVENANT<sup>54</sup> -STOKES<sup>55</sup>*.

<sup>53</sup> CLAUDE LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785-1836). Ingegnere civile e professore di meccanica all'Ecole Polytechnique e all'Ecole de Ponts et Chaussées. A NAVIER è dovuta la prima trattazione esatta del problema della flessione delle travi elastiche nel piano, che egli espone nel *Résumé des Leçons de Mécanique* pubblicato nel 1826. Le equazioni differenziali del moto di un fluido viscoso furono ricavata da NAVIER nel 1821 basandosi sull'analogia formale con le equazioni dell'equilibrio elastico. Nel 1824 divenne membro dell'Accademia di Francia.

<sup>54</sup> ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797-1886). Allievo della Ecole Polytechnique fu professore di matematica all'Ecole des Ponts et Chaussées succedendo a GASPAR GUSTAVE DE CORIOLIS (1792-1843). Portò contributi importanti alla meccanica, all'elasticità, all'idrostatica ed all'idrodinamica. Nel 1842 formulò correttamente le equazioni che reggono il flusso di un fluido viscoso incomprimibile, dedotte in precedenza da NAVIER sulla base della teoria molecolare. Le stesse equazioni furono poi formulate indipendentemente da STOKES nel 1845. Nel 1883 con la collaborazione di ALFRED-AIMÉ FLAMANT tradusse dal tedesco in francese il lavoro sull'elasticità di RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH (1833-1872). La traduzione dal titolo *Theorie de l'élasticité des corps solides* conteneva note di SAINT-VENANT le quali più che raddoppiarono il testo originale.

<sup>55</sup> GEORGE GABRIEL STOKES (1819-1903). Irlandese di nascita, eminente fisico matematico, professore a Cambridge e presidente della Società Reale, pubblicò il risultato nel 1845. SAINT VENANT aveva pubblicato il risultato nel 1842. STOKES portò importanti contributi all'idrodinamica, alla teoria dell'elasticità ed alla propagazione della luce. Famoso è il teorema sull'egualanza tra il flusso del rotore di un campo vettoriale e la sua circuitazione, che porta il suo nome ma che in realtà è dovuto a LORD KELVIN.

Detto  $\text{Sym} = \text{Sym}(V; V)$  lo spazio dei tensori simmetrici misti del secondo ordine, siano  $\text{Sph} = \text{Sph}(V; V)$  e  $\text{Dev} = \text{Dev}(V; V)$  i sottospazi lineari di costituiti rispettivamente dai tensori simmetrici sferici e deviatorici.

Il vincolo cinematico di incomprimibilità si traduce nella richiesta che il campo di velocità del fluido sia a divergenza nulla

$$\operatorname{div} v = 0 \iff \operatorname{tr} D = \operatorname{tr} \text{sym} \operatorname{grad} v = \operatorname{tr} \operatorname{grad} v = 0.$$

La legge costitutiva di un *fluido newtoniano*<sup>56</sup> impone che la componente deviatorica dello stato tensionale  $\operatorname{dev} T \in \text{Dev}$  dipenda linearmente dalla velocità di deformazione. L'ipotesi di incomprimibilità richiede poi che  $\operatorname{tr} D = 0$  e cioè che la velocità di deformazione sia anch'essa deviatorica. Si ha quindi che

$$\operatorname{dev} T = \mathcal{A}[D],$$

con  $\operatorname{tr} D = 0$  e  $\mathcal{A} \in L(\text{Dev}; \text{Dev})$  legame lineare.

Il principio di indifferenza materiale (vedi Tomo II sezione I.2.1 (p. 6)) impone che il legame  $\mathcal{A} \in L(\text{Dev}; \text{Dev})$  sia isotropo, cioè tale che

$$\mathcal{A}[Q D Q^T] = Q \mathcal{A}[D] Q^T, \quad \forall Q \in \text{Orth}.$$

Risulta allora (vedi TomoII sezione I.4.2 (p. 30))

$$\operatorname{dev} T = \mathcal{A}[D] = 2\mu D + \lambda(\operatorname{tr} D) I = 2\mu D.$$

Ne segue che lo stato tensionale nel fluido è dato da

$$T = -\pi I + 2\mu D.$$

---

<sup>56</sup> ISAAC NEWTON (1643-1727). Orfano di padre ebbe un'infanzia difficile. Nel 1661 entrò al Trinity College di Cambridge, dove studiò la filosofia di DESCARTES, GASSENDI, HOBBS, BOYLE. Fu attratto dall'astronomia copernicana di GALILEO GALILEI (1564-1642), studiò l'Ottica di JOHANNES KEPLER (1571-1630), l'opera del 1660 di VAN SCHOOTEN dal titolo *Geometria a Renato Des Cartes* e l'*Algebra* di WALLIS. Nel 1663 BARROW prese la cattedra Lucasiana a Cambridge. Nel 1665 la peste fece chiudere il Trinity College e NEWTON tornò a casa per due anni durante i quali iniziò le sue rivoluzionarie scoperte in Matematica, Ottica, Fisica ed Astronomia quando non aveva ancora 25 anni. Nel 1669 BARROW lasciò la cattedra per dedicarsi alla religione e raccomandò che NEWTON prendesse il suo posto. Nella sua prima lezione NEWTON mostrò come la luce bianca fossa composta da uno spettro di colori, contraddicendo quanto tutti avevano creduto sin dai tempi di ARISTOTELE. Nel 1671 NEWTON pose le basi del calcolo integrale e differenziale col lavoro *De Methodis Serierum et Fluxionum*. Nel 1672 fu eletto membro della Royal Society e pubblicò il suo primo lavoro sulla teoria corpuscolare della luce e sui colori nei *Philosophical Transactions of the Royal Society*. La teoria ondulatoria era sostenuta invece da ROBERT HOOKE (1635-1703) e da CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695). Nel 1675 HOOKE accusò NEWTON di aver rubato alcuni suoi risultati di Ottica. La controversia fu segnata dal carattere di NEWTON che era timoroso ed iracondo per natura e soffriva di depressione. I due si riappacificarono per lettera ma NEWTON pubblicò la sua *Opticks* solo nel 1704 dopo la morte di HOOKE. Nel 1667 furono pubblicati i *Philosophiae naturalis principia mathematica*, noti come *Principia*, in cui NEWTON formulò la legge di gravitazione universale mediante la quale, assumendo una azione a distanza inversamente proporzionale al quadrato della distanza, riuscì a spiegare molti fenomeni ancora non compresi, quali l'orbita eccentrica delle comete, le maree e le loro variazioni, la precessione dell'asse terrestre, ed il moto della Luna influenzato dall'attrazione solare. JAMES II re cattolico

- La costante  $\mu$  è la *viscosità dinamica*.
- Il parametro  $\nu = \mu/\rho$  è la *viscosità cinematica* del fluido.
- Il campo scalare  $\pi$  è la *pressione* nel fluido.

La pressione ha dimensione  $[FL^{-2}]$  e si misura in pascal = 1 newton m<sup>-2</sup> in onore di PASCAL<sup>57</sup>. Si noti che

- la viscosità dinamica  $\mu$  ha dimensione  $[FL^{-2}T]$  e si misura in poiseuille = Pa s (pascal secondo)<sup>58</sup> o in poise = 0,10 poiseuille.
- la viscosità cinematica  $\nu$  ha dimensione  $[L^2T^{-1}]$  e si misura in stokes =  $10^{-4}$  m<sup>2</sup> s<sup>-1</sup> = 1 cm<sup>2</sup> s<sup>-1</sup>.

L'equazione differenziale di equilibrio dinamico e la condizione di incompressibilità sono espresse da

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \rho [v' + dV[v]] , \\ \operatorname{div} v = 0 . \end{cases}$$

Essendo

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = -\operatorname{grad} \pi + 2\mu \operatorname{div} \mathbf{D} ,$$

$$2 \operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} [dv + (dv)^T] = \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} \operatorname{div} v = \operatorname{div} \operatorname{grad} v ,$$

le equazioni che reggono il problema si scrivono

$$\boxed{\begin{cases} \rho [v' + dV[v]] = \mu \operatorname{div} \operatorname{grad} v - \operatorname{grad} \pi + \mathbf{b} , \\ \operatorname{div} v = 0 . \end{cases}}$$

---

della Gran Bretagna dal 1685 al 1688 fu fortemente contestato da NEWTON che era un fervente protestante. Dopo la caduta di JAMES II ad opera di WILLIAM D'ORANGE, NEWTON divenne governatore della Zecca Reale e visse ricco e rispettato a Londra. Fu nominato SIR dalla regina ANNE nel 1705. L'ultima parte della sua vita fu segnata dalla controversia con GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716) su chi avesse inventato il calcolo infinitesimale.

<sup>57</sup> BLAISE PASCAL (1623-1662). Nacque a Clermont in Francia figlio di ETIENNE PASCAL, che ricco di famiglia, si trasferì a Parigi dedicandosi all'educazione del figlio. PASCAL espresse il suo genio in molti campi interessandosi di geometria proiettiva, di calcolo delle probabilità (in corrispondenza con PIERRE DE FERMAT (1601-1665)), di esperimenti sul vuoto (in disputa con RENÉ DESCARTES (1596-1650)), di teoria dei numeri (coefficienti binomiali e triangolo di PASCAL) Negli ultimi lavori si dedicò allo studio della cicloide ed a problemi connessi adoperando il metodo degli indivisibili di BONAVENTURA FRANCESCO CAVALIERI (1598-1647). PASCAL costruì nel periodo 1642-45 il secondo esempio di macchina calcolatrice digitale meccanica, la *Pascaline* dopo quella che, nel 1623, era stata ideata da WILHELM SCHICKARD (1592-1635) ed usata da JOHANNES KEPLER (1571-1630) per calcolare le effemeridi. .

<sup>58</sup> JEAN POISEUILLE (1797-1869). Medico francese che escogitò un metodo più preciso per misurare la pressione del sangue. POISEUILLE formulò la legge di proporzionalità tra la velocità del flusso con cui un liquido viscoso scorre in un tubo e la differenza di pressione agli estremi del tubo, tramite una costante che dipende dal diametro e dalla lunghezza del tubo.

Queste sono le celebri *equazioni di NAVIER-STVENANT-STOKES*.

Si ponga

$$\pi_o = \pi/\rho, \quad \mathbf{b}_o = \mathbf{b}/\rho,$$

e si fissino

- una lunghezza caratteristica  $\ell$  ed una
- velocità caratteristica  $v$ .

Allora, posto  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$  e definite le quantità adimensionali

$$\bar{x} = \frac{x}{\ell}, \quad \bar{t} = \frac{t v}{\ell}, \quad \bar{v} = \frac{v}{v}, \quad \bar{\pi}_o = \frac{\pi_o}{v^2},$$

le equazioni di NAVIER-STOKES si scrivono

$$\begin{cases} [\bar{v}' + d\bar{v}[\bar{v}]] = \frac{1}{RE} \operatorname{div} \operatorname{grad} \bar{v} - \operatorname{grad} \bar{\pi}_o, \\ \operatorname{div} \bar{v} = 0. \end{cases}$$

dove la quantità adimensionale  $RE = \frac{\ell v}{\nu}$  è detta il *numero di REYNOLDS* del flusso.

La forma adimensionale mostra che flussi con parametri diversi hanno le stesse caratteristiche purché il numero di REYNOLDS sia lo stesso. Tale osservazione è di fondamentale importanza per l'esecuzione di esperimenti di laboratorio.

### 11.5. Equazioni di Euler e teorema di Bernoulli

Si consideri uno stato tensionale è di tipo idrostatico e cioè descritto dal prodotto dell'opposto di uno scalare  $\pi$  detto *pressione* e del tensore identità:

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{I}.$$

Essendo

$$\operatorname{div}(\pi \mathbf{I}) = \operatorname{grad} \pi,$$

e ponendo  $\mathbf{b}_\rho = \mathbf{b}/\rho$ , le equazioni di equilibrio di CAUCHY assumono allora la forma

$-\operatorname{grad} \pi = \rho (\dot{v} - \mathbf{b}_\rho),$	equilibrio di massa,
$\pi \mathbf{n} = \mathbf{t},$	equilibrio al contorno,

e sono dette *equazioni di EULER*.

Se il campo di forze di massa  $\mathbf{b}_\rho = \mathbf{b}/\rho$  ammette un potenziale  $\beta$  si ha che

$$\mathbf{b}_\rho = -\operatorname{grad} \beta,$$

e le equazioni di EULER si scrivono

$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \pi + \operatorname{grad} \beta = -\dot{\mathbf{v}},$	equilibrio di massa,
$\pi \mathbf{n} = \mathbf{t},$	equilibrio al contorno,

ovvero, nella descrizione spaziale,

$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \pi + \operatorname{grad} \beta = -(v' + dv[v]),$	equilibrio di massa,
$\pi \mathbf{n} = \mathbf{t},$	equilibrio al contorno,

Un moto si dice *potenziale* se il campo di velocità ammette un potenziale e cioè risulta

$$\mathbf{v} = -\operatorname{grad} \phi,$$

Se  $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$  la condizione  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$  in  $\Omega$  è necessaria affinché il moto sia potenziale ed è sufficiente se il dominio  $\Omega$  è semplicemente connesso.

La prossima proposizione enuncia una proprietà cinematica.

**Proposizione 11.5. Lemma cinematico.** *In un flusso con velocità  $\mathbf{v} \in C^1(\Omega)$ , posto  $\mathbf{W} = \operatorname{emi}(d\mathbf{v})$ , si ha che*

$$a) \quad 2\mathbf{W}\mathbf{v} = dv[\mathbf{v}] - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right),$$

e quindi

$$b) \quad (dv[\mathbf{v}]) \cdot \mathbf{v} = \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{v}.$$

**Dim.** Derivando in direzione  $\mathbf{h} \in \mathbf{V}$  si ha che

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) \cdot \mathbf{h} = dv[\mathbf{h}] \cdot \mathbf{v} = (dv)^T[\mathbf{v}] \cdot \mathbf{h}, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}.$$

Allora risulta

$$2\mathbf{W}\mathbf{v} = dv[\mathbf{v}] - (dv)^T[\mathbf{v}] = dv[\mathbf{v}] - \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right).$$

L'antisimmetria di  $\mathbf{W}$  implica poi che  $\mathbf{W}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ .  $\square$



Si può ora dimostrare il seguente classico risultato [40].

**Proposizione 11.6. Teorema di BERNOULLI.** *Si consideri un flusso di un fluido con un campo di pressione  $\pi$  e di velocità  $\mathbf{v}$ . Allora l'equazione differenziale di EULER si scrive:*

i) *se il moto è potenziale*

$$\operatorname{grad} (\phi' + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \beta) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \pi = \mathbf{0},$$

ii) *se il flusso è stazionario*

$$\left[ \operatorname{grad} (\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \beta) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \pi \right] \cdot \mathbf{v} = 0,$$

iii) *se il flusso è stazionario ed irrotazionale*

$$\operatorname{grad} (\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \beta) + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \pi = \mathbf{0}.$$

**Dim.** Se il moto è potenziale allora il campo di velocità ha rotore nullo e cioè gradiente simmetrico. Dal lemma 11.5 a), essendo  $\mathbf{W} = \mathbf{O}$  si deduce che

$$d\mathbf{v} [\mathbf{v}] = \operatorname{grad} (\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}).$$

La i) segue quindi ponendo  $\mathbf{v}' = \operatorname{grad} \phi'$ .

Se il flusso è stazionario si ha che  $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$  e dunque il lemma 11.5 b) fornisce la ii).

Se il flusso è irrotazionale e stazionario si ha che  $\phi' = 0$  e la i) implica la iii).  $\square$

### 11.5.1. Idrostatica

Si consideri ora un fluido in quiete sotto l'azione della pressione atmosferica sul pelo libero e della forza di gravità. Detto  $\mathbf{k}$  il versore normale al pelo libero e diretto verso l'interno del fluido e  $\gamma$  il peso specifico del fluido, le forze attive saranno costituite da:

- una tensione  $\mathbf{t}$  costante sul piano di contorno:  $\mathbf{t} = -\pi_o \mathbf{k}$ ,
- una forza di massa  $\mathbf{b}$  di intensità costante:  $\mathbf{b} = \gamma \mathbf{k}$ .

Se  $z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{k}$  è la profondità rispetto al pelo libero, le equazioni di equilibrio di CAUCHY si scrivono nel caso in esame

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) &= \operatorname{grad} \pi(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}) \mathbf{k}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ (\mathbf{T}\mathbf{n})(\mathbf{x}) &= \pi(\mathbf{x}) \mathbf{k} = \pi_o \mathbf{k}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Il campo scalare di pressione idrostatica  $\pi$  in equilibrio con le forze applicate è continuo nel dominio  $\Omega$ , assume valore costante sul pelo libero  $z = 0$ , ed ha gradiente costante e diretto come  $\mathbf{k}$  verso la profondità.

Il campo  $\pi$  di pressioni nel fluido varia quindi con la legge affine

$$\pi(\mathbf{x}) = \pi_o + \gamma z,$$

e lo stato tensionale risulta univocamente definito dalle condizioni di equilibrio.

Ne consegue in particolare che, se la pressione atmosferica ed il peso specifico del fluido sono nulli, il campo di pressione nel fluido risulta nullo.

Nel fluido non esistono dunque stati tensionali ammissibili autoequilibrati.

### 11.5.2. Spinta di Archimede e diavoletto di Cartesio

Sia  $\mathcal{G}$  un galleggiante immerso nel fluido perfetto in quiete e si denoti con  $\mathcal{G}_e$  e  $\mathcal{G}_i$  rispettivamente la parte emersa e quella immersa del galleggiante.

Le azioni del fluido sulla superficie bagnata del galleggiante risultano dirette in ogni punto secondo la normale entrante ed hanno intensità pari al valore della pressione idrostatica

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = -(\pi \mathbf{n})(\mathbf{x}) = -(\pi_o + \gamma z) \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial \mathcal{G}_i.$$

La risultante delle azioni del fluido sul contorno della parte immersa  $\partial \mathcal{G}_i$  del galleggiante è pari a

$$\int_{\partial \mathcal{G}_i} \mathbf{t} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial \mathcal{G}_i} -(\pi_o + \gamma z) \mathbf{n} \, dv,$$

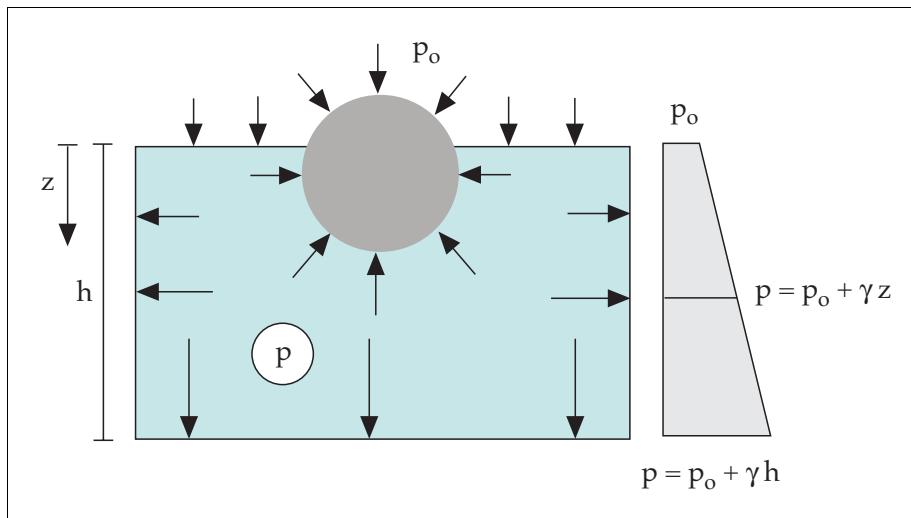
e la risultante delle azioni dell'atmosfera sul contorno della parte emersa  $\partial \mathcal{G}_e$  del galleggiante è pari a

$$\int_{\partial \mathcal{G}_e} \mathbf{t} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial \mathcal{G}_e} -(\pi_o) \mathbf{n} \, dv.$$

Il teorema del gradiente assicura che

$$\int_{\partial \mathcal{G}_e} \pi_o \mathbf{n} \, da + \int_{\partial \mathcal{G}_i} \pi_o \mathbf{n} \, da = \oint_{\partial \mathcal{G}} \pi_o \mathbf{n} \, da = \pi_o \int_{\partial \mathcal{G}} \mathbf{n} \, da = \mathbf{o},$$

e cioè che la risultante dell'azione sul galleggiante dovuta alla pressione atmosferica è nulla.



La risultante dell'azione sul galleggiante può allora essere valutata assumendo nullo il valore della pressione atmosferica.

Si ponga dunque  $\pi_o = 0$  e si osservi che sul pelo libero risulta  $z = 0$ . Applicando il teorema del gradiente al dominio  $\mathcal{G}_{\text{fluido}}$  delimitato dal contorno della parte immersa  $\mathcal{G}_i$  del galleggiante e dal prolungamento ideale del pelo libero attraverso il galleggiante, si ottiene la formula

$$\int_{\partial \mathcal{G}_i} -(\gamma z) \mathbf{n} \, da = \int_{\partial \mathcal{G}_{\text{fluido}}} -(\gamma \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{G}_{\text{fluido}}} -(\gamma \mathbf{k}) \, dv = -\gamma \text{vol}(\mathcal{G}_{\text{fluido}}) \mathbf{k},$$

che fornisce l'espressione della *spinta di ARCHIMEDE*<sup>59</sup>.

Un corpo immerso in un fluido in quiete riceve una spinta pari al peso del volume di fluido spostato dal galleggiante e diretta in verso opposto alla forza di gravità.

### Osservazione 11.1.

Da quanto mostrato si deduce che la spinta di ARCHIMEDE non dipende dalla profondità alla quale è immerso il corpo.

La posizione di galleggiamento dipende unicamente dalla forma e dal peso del corpo e dal peso specifico del fluido.

---

<sup>59</sup> ARCHIMEDE DI SIRACUSA (287 A.C.-212 A.C.)

Si immagini ora di immergere un corpo elastico galleggiante in un fluido in quiete portandolo a profondità sempre maggiori; il volume diminuirà per effetto della compressione esercitata dal fluido e diminuirà pertanto anche la spinta di ARCHIMEDE.

Se il corpo è sufficientemente deformabile esisterà una profondità in corrispondenza della quale il peso costante del corpo immerso risulta eguale alla spinta. In questa posizione il corpo è in equilibrio e pertanto non tende né a risalire in superficie né ad affondare.

Superata tale profondità, risultando il peso via via sempre maggiore della spinta, il corpo sarà soggetto ad una forza crescente che lo spingerà inesorabilmente verso il fondo.

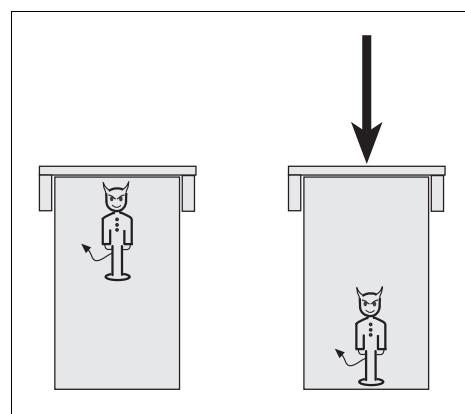
E' questa un'esperienza ben nota a coloro che praticano il nuoto subacqueo; quando ci si immerge, essendo il peso specifico medio del corpo umano alla pressione atmosferica minore di quello dell'acqua di mare, è necessario portare con sè una zavorra per facilitare la discesa in profondità.

Superata però una profondità di alcune decine di metri il bilancio tra peso e spinta si inverte ed il risalire in superficie necessita di un notevole sforzo muscolare che può essere agevolato liberandosi della zavorra.

Il fenomeno è noto da tempo ed è utilizzato nella realizzazione del divertente esperimento detto del *diavoletto di CARTESIO*.

Premendo la membrana che chiude il recipiente cilindrico, il diavoletto scende sul fondo. Eliminata la pressione il diavoletto risale alla sommità del contenitore.

In questo caso la deformabilità del corpo immerso è dovuta all'aria in esso contenuta.



*Diavoletto di CARTESIO*

## 12. CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

Il *primo principio della termodinamica* asserisce che per ogni corpo  $\mathcal{B}$ , e per ogni parte di esso, vale la *legge di conservazione dell'energia* che si scrive

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{M} + \mathcal{Q},$$

dove

- $\dot{\mathcal{E}}$  è il *tasso di incremento dell'energia interna*,
- $\mathcal{M}$  è la *potenza meccanica compiuta*,
- $\mathcal{Q}$  è il *tasso di calore apportato*.

Per potenza meccanica si intende la potenza compiuta da tutti i sistemi di forze agenti sul corpo ivi incluse le forze d'inerzia. Si ha dunque che

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega} (\mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{Bv} \, dv.$$

L'energia cinetica  $\mathcal{K}$  e la potenza  $\mathcal{W}$  compiuta dalle forze attive sono definite da

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv,$$

$$\mathcal{W} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{T(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da,$$

La potenza meccanica compiuta è dunque pari a  $\mathcal{M} = \mathcal{W} - \dot{\mathcal{K}}$  e quindi la legge di conservazione dell'energia si può anche scrivere

$$\dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}.$$

Nel seguito viene sviluppata una trattazione originale della legge di conservazione dell'energia che consente di dimostrare l'esistenza del campo vettoriale *densità del flusso di calore* e di formulare un *principio delle temperature virtuali*.

La procedura adottata è perfettamente analoga a quella sviluppata per la trattazione dell'equilibrio di una struttura continua. L'analogia consente di estendere, *mutatis mutandis*, le proposizioni ed i risultati da un contesto all'altro, una volta riconosciuto che la base matematica formale è la stessa. Questo è d'altronde un compito precipuo della *Fisica Matematica*.

### 12.1. Temperature virtuali

Sia  $\Omega$  una configurazione di  $\mathcal{B}$  e si introduca il concetto di temperatura virtuale.

- Un campo di *temperatura virtuale* è un campo scalare di quadrato integrabile su  $\Omega$  dotato di derivata generalizzata di quadrato integrabile a pezzi in  $\Omega$ .

Lo spazio dei campi di temperatura virtuale è denotato con  $\Theta(\Omega)$  ed è definito da

$$\Theta(\Omega) := \left\{ \theta \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_\theta(\Omega) : \theta \in H^1(\mathcal{P}), \quad \forall \bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_\theta(\Omega) \right\}.$$

Lo spazio  $\Theta(\Omega)$  è uno spazio pre-HILBERT con prodotto interno e norma definiti da

$$\begin{aligned} (\theta_1, \theta_2)_{\Theta(\Omega)} &:= \int_{\Omega} \theta_1 \theta_2 \, dv + \int_{\Omega} (\mathbf{G} \theta_1) \cdot (\mathbf{G} \theta_2) \, dv, \\ \|\mathbf{u}\|_{\Theta(\Omega)}^2 &:= \int_{\Omega} \theta^2 \, dv + \int_{\Omega} \|\mathbf{G}\theta\|^2 \, dv. \end{aligned}$$

Sia  $\Theta = \Theta(\mathcal{T}(\Omega)) = H^1(\mathcal{T}(\Omega))$  lo spazio dei campi di temperatura virtuale aventi  $\mathcal{T}(\Omega)$  quale suddivisione di supporto.

Il gradiente distribuzionale di un campo di temperatura virtuale  $\theta \in \Theta$  è dunque una distribuzione che può esprimersi come somma di due aliquote.

- La *parte regolare*  $\mathbf{G}\theta = \text{grad } \theta \in H$  che è un campo vettoriale di quadrato integrabile su  $\Omega$  con

$$\text{grad} = \mathbf{G} \in L\{\Theta; H\},$$

operatore lineare continuo.

- La *parte singolare*  $[[\Gamma\theta]] \in \partial\Theta$  che è il campo scalare di quadrato integrabile su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  costituito dai salti di discontinuità dei valori al contorno  $\Gamma\theta \in \partial\Theta$  di  $\theta \in \Theta$  su  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ .

Il tasso di incremento dell'energia interna  $\dot{\mathcal{E}}$ , la potenza meccanica compiuta  $\mathcal{M}$  ed il tasso di calore apportato  $\mathcal{Q}$  possono essere definiti in termini di enti duali dei campi di temperatura virtuale  $\theta \in \Theta$ .

Siano infatti  $\mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}$ ,  $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$  e  $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$  funzionali lineari limitati su  $\Theta$  tali che

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= \mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}(1), \\ \mathcal{M} &= \mathcal{F}_{\mathcal{M}}(1), \\ \mathcal{Q} &= \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}(1), \end{aligned}$$

dove 1 è il campo scalare di valore unitario sulla parte di corpo in esame e nullo altrove.

Il valore del funzionale lineare  $\mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}$  può essere assegnato sul sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{G} \subseteq \Theta$  dei campi di temperatura virtuale costanti a pezzi in  $\Omega$  ponendo, per omogeneità

$$\mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}(\alpha \mathbf{1}) := \alpha \mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}(1), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

L'esistenza di un funzionale lineare limitato che sia estensione (in generale non univoca) di  $\mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}$  da  $\text{Ker } \mathbf{G} \subseteq \Theta$  a  $\Theta$  è assicurata dal *teorema di estensione di HAHN* (vedi sezione 4.1 (p. 195)).

Analogamente si procede per  $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$  e  $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}$ .

La legge di conservazione dell'energia può quindi esprimersi imponendo che

$$\langle \mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}, \theta \rangle = \langle \mathcal{F}_{\mathcal{M}}, \theta \rangle + \langle \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}, \theta \rangle, \quad \forall \theta \in \text{Ker } \mathbf{G}.$$

## 12.2. Principio delle temperature virtuali

Per evidenziare l'analogia con la teoria dell'equilibrio di un corpo continuo, si definisca il *tasso di produzione di energia*

$$\mathcal{P} := \dot{\mathcal{E}} - \mathcal{M} - \mathcal{Q}.$$

Si consideri quindi il funzionale lineare  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} \in \Theta'$  definito da

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := \mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}} - \mathcal{F}_{\mathcal{M}} - \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}.$$

La legge di conservazione dell'energia equivale dunque alla condizione

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}}, \theta \rangle = 0, \quad \forall \theta \in \text{Ker } \mathbf{G},$$

che può anche scriversi

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} \in (\text{Ker } \mathbf{G})^{\perp}.$$

Si osservi ora che l'operatore  $\mathbf{G} \in L\{\Theta; H\}$  ha immagine chiusa e dunque, detto  $\mathbf{G}' \in L\{H; \Theta'\}$  l'operatore duale, risulta

$$\text{Im } \mathbf{G}' = (\text{Ker } \mathbf{G})^{\perp}.$$

Ne segue che esiste almeno un campo vettoriale  $\mathbf{h} \in H$  tale che  $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \mathbf{G}' \mathbf{h}$  e cioè

$$\langle \mathcal{F}_{\mathcal{P}}, \theta \rangle = \langle \mathbf{G}' \mathbf{h}, \theta \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{G} \theta) \, dv, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Questa è l'espressione di un principio termodinamico, analogo al principio delle potenze virtuali della meccanica, che sarà detto *principio delle temperature virtuali*.

- Il campo vettoriale  $\mathbf{h} \in H$  è la *densità del flusso di freddo*.

Si osservi ora che

- il tasso di incremento dell'energia interna  $\dot{\mathcal{E}}$  è definito in termini della densità volumetrica  $\rho \dot{\varepsilon}$ ,
- la potenza meccanica compiuta  $\mathcal{M}$  è definita in termini della densità volumetrica  $m$ ,
- il tasso di calore apportato  $\mathcal{Q}$  è definito in termini di una densità volumetrica  $\rho q$  e di una superficiale  $\partial q$ .

Si ha dunque che

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}_{\dot{\mathcal{E}}}, \theta \rangle &= \int_{\Omega} \rho \dot{\varepsilon} \theta \, dv, & \dot{\mathcal{E}} &= \int_{\Omega} \rho \dot{\varepsilon} \, dv, \\ \langle \mathcal{F}_{\mathcal{M}}, \theta \rangle &= \int_{\Omega} (\mathbf{T} : \mathbf{Bv}) \theta \, dv, & \mathcal{M} &= \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{Bv} \, dv, \\ \langle \mathcal{F}_{\mathcal{Q}}, \theta \rangle &= \int_{\Omega} \rho q \theta \, dv + \int_{\partial\Omega} \partial q \theta \, da, & \mathcal{Q} &= \int_{\Omega} q \, dv + \int_{\partial\Omega} \partial q \, da.\end{aligned}$$

Allora, posto

$$p = \mathbf{T} : \mathbf{Bv} + \rho q - \rho \dot{\varepsilon},$$

il *principio delle temperature virtuali* si scrive

$$\int_{\Omega} p \theta \, dv + \int_{\partial\Omega} \partial q \theta \, da = \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{G} \theta) \, dv, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Una dimostrazione analoga a quella del teorema di CAUCHY (proposizione 7.2 (p. 225)) mostra allora che il campo vettoriale  $\mathbf{h} \in H$  ha divergenza di quadrato integrabile a pezzi in  $\Omega$ .

Detto quindi  $\mathbf{G}'_o = -\operatorname{div}$  l'operatore duale formale dell'operatore differenziale  $\mathbf{G} = \operatorname{grad}$  si consideri lo spazio  $H_{\mathbf{G}'_o}(\Omega)$  dei campi vettoriali densità del flusso di freddo GREEN-regolari, definito da

$$H_{\mathbf{G}'_o}(\Omega) := \left\{ \mathbf{h} \in H(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_h(\Omega) : \mathbf{G}'_o \mathbf{h} \in L^2(\mathcal{P}), \quad \forall \bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_h(\Omega) \right\}.$$

Risulta allora  $\mathbf{G}'_o \in L\{H_{\mathbf{G}'_o}; \Theta'\}$ , dove  $H_{\mathbf{G}'_o} := H_{\mathbf{G}'_o}(\mathcal{T}(\Omega))$ , e la formula di GREEN si scrive

$$\int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{G} \theta) \, dv = \int_{\Omega} (\mathbf{G}'_o \mathbf{h}) \theta \, dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{N} \mathbf{h}) (\mathbf{T} \theta) \, da, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad \forall \mathbf{h} \in H_{\mathbf{G}'_o},$$

dove  $\mathbf{N} \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}$  con  $\mathbf{n}$  versore normale uscente da  $\Omega$ .



Le *equazioni di bilancio* sono le analoghe delle equazioni di CAUCHY e si scrivono

$\mathbf{G}'_o \mathbf{h} = \mathbf{p} = \mathbf{T} : \mathbf{Bv} + \rho \mathbf{q} - \rho \dot{\varepsilon},$	sorgente ,
$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \partial q$	flusso al contorno ,

- L'equazione  $\mathbf{G}'_o \mathbf{h} = \mathbf{p}$  è detta in letteratura *equazione ridotta di conservazione dell'energia*, e può convenientemente essere riscritta nella forma

$$\rho \dot{\varepsilon} = \rho \mathbf{q} + \mathbf{T} : \mathbf{Bv} + \operatorname{div} \mathbf{h},$$

in cui

- $\dot{\varepsilon}$  è il tasso di incremento dell'energia interna per unità di volume,
- $\rho \mathbf{q}$  è il tasso di apporto di calore per unità di volume,
- $\operatorname{div} \mathbf{h}$  è la sorgente volumetrica del flusso di freddo,
- $\mathbf{T} : \mathbf{Bv}$  è la potenza meccanica compiuta per unità di volume.

- La relazione  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \partial q$  è detta *principio del flusso di calore* di FOURIER<sup>60</sup>-STOKES.

In termodinamica è usuale considerare il campo vettoriale  $-\mathbf{h} \in H$  detto *densità di flusso di calore*.

Il principio del flusso di calore si enuncia pertanto affermando che

- il tasso di apporto di calore per unità di superficie di contorno è eguale alla densità del flusso di calore entrante (o flusso di freddo uscente).

---

<sup>60</sup> JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830). Nato in Borgogna, nono dei dodici figli della seconda moglie di un sarto, rimase orfano dei genitori all'età di dieci anni. Nel 1780 entrò alla Ecole Royale Militaire di Auxerre. All'età di 14 anni completò lo studio dei 6 volumi del *Cours de mathematique* di BÉZOUT e nel 1783 ricevette il primo premio per lo studio della *Méchanique en général* di BOSSUT. Nel 1787 decise di farsi prete ed entrò nell'abbazia Benedittina di St Benoit-sur-Loire continuando però a coltivare i suoi interessi per la matematica anche attraverso la corrispondenza con il suo professore di matematica ad Auxerre. In una lettera scrisse: *ieri era il mio 21° compleanno, a questa età NEWTON e PASCAL avevano già acquisito molti meriti per l'immortalità*. FOURIER non prese i voti e nel 1789 andò a Parigi dove lesse un lavoro sulle equazioni algebriche all'Académie Royale des Sciences. Nel 1790 divenne quindi professore all'Ecole Royale Militaire di Auxerre e si unì al locale Comitato Rivoluzionario. Dopo varie vicende politiche a seguito delle quali fu anche arrestato, nel 1795 FOURIER entrò alla Ecole Normale di Parigi, appena inaugurata, dove ebbe come insegnanti LAGRANGE, LAPLACE e MONGE con cui ebbe ottimi rapporti. Insegnò al Collège de France e all'Ecole Centrale des Travaux Publics diretta da LAZARE CARNOT (1753-1823) e GASPARD MONGE (1746-1818), e che fu presto rinominata Ecole Polytechnique. Arrestato nuovamente fu liberato nel 1795 e ritornò all'Ecole Polytechnique dove nel 1797 succedette a LAGRANGE nella cattedra di analisi e meccanica. Nel 1798 si unì all'esercito Napoleonicco nell'invasione dell'Egitto, ritornando alla sua attività di professore nel 1801 ma subito dopo fu nominato prefetto di Grenoble da Napoleone. In questo periodo scrisse la famosa memoria sulla propagazione del calore nei solidi che nel 1807 sottopose all'Istituto delle Scienze di Parigi suscitando obiezioni da parte di LAGRANGE e LAPLACE, che criticarono lo sviluppo delle funzioni in serie trigonometriche da lui introdotto, e critiche da parte di BIOT che non era stato citato pur avendo trattato la questione nel 1804, , anche se in modo non corretto. Comunque nel 1811 una commissione di cui

### 12.3. Legge di Fourier

La relazione costitutiva di conduzione termica, o *legge di FOURIER*, si scrive

$$\mathbf{h} = \mathbf{K}(\theta),$$

dove  $\theta$  è il campo di temperatura e  $\mathbf{K} \in L\{H, H\}$  è l'operatore lineare, simmetrico e definito positivo, di *conducibilità termica*.

Per corpi termicamente isotropi si ha che  $\mathbf{K} = k \mathbf{I}$  e quindi la legge di FOURIER assume l'aspetto classico

$$\mathbf{h} = k \operatorname{grad} \theta,$$

dove  $k > 0$  è la costante di *conducibilità termica*.

Si noti l'analogia con l'equazione costitutiva del fluido linearmente viscoso di NAVIER-STOKES trattato nella sezione 11.4.1 (p. 269).

Nel capitolo dedicato alle equazioni dell'elasticità si mostrerà come sussista una perfetta analogia tra i problemi di elastostatica e quelli del flusso stazionario di calore per conduzione.

Si osservi anche che in generale i due problemi, meccanico e termico, risultano accoppiati.

### 12.4. Leggi di bilancio

La procedura illustrata con riferimento al principio di conservazione dell'energia è del tutto generale e può essere applicata per discutere una generica *legge di bilancio*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} a \, dv = \int_{\Omega} b \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} c \, da,$$

relativa ad un intervallo di osservazione  $I$ .

- Il campo scalare  $a \in \mathcal{L}^2(\Omega) \times C^1(I)$  è la densità spaziale della grandezza di cui si vuole misurare l'incremento nell'unità di tempo.
- Il campo scalare  $b \in \mathcal{L}^2(\Omega) \times C^0(I)$  è la *sorgente volumetrica*.
- Il campo scalare  $c \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{T}(\Omega)) \times C^0(I)$  è la *sorgente superficiale*.

---

erano componenti JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813), PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827) e ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833) gli assegnò il premio che l'Istituto delle Scienze di Parigi aveva messo in palio per uno studio sulla propagazione del calore. Nel 1817 FOURIER fu eletto all'Académie des Sciences e nel 1822 ne divenne segretario. Nello stesso anno venne pubblicato il lavoro *Théorie analytique de la chaleur* col quale aveva vinto il premio nel 1811. Negli ultimi anni si dedicò alla ricerca matematica pura ed applicata e sostenne una disputa con JEAN-BAPTISTE BIOT (1774-1862) e SIMÉON DENIS POISSON (1781-1840) circa la priorità sulla formulazione della teoria della propagazione del calore.



In forza del teorema del trasporto la *legge di bilancio* può scriversi

$$\int_{\Omega} \dot{a} + a \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = \int_{\Omega} a' + \operatorname{div}(a \mathbf{v}) \, dv = \int_{\Omega} b \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} c \, da.$$

Si denoti quindi con  $\Lambda(\Omega)$  lo spazio dei campi scalari di prova, definito da

$$\Lambda(\Omega) := \left\{ \lambda \in \mathcal{L}^2(\Omega) \mid \exists \mathcal{T}_\lambda(\Omega) : \lambda \in H^1(\mathcal{P}), \quad \forall \overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_\theta(\Omega) \right\}.$$

Lo spazio  $\Lambda(\Omega)$  è uno spazio pre-HILBERT con prodotto interno e norma definiti da

$$(\lambda_1, \lambda_2)_{\Lambda(\Omega)} := \int_{\Omega} \lambda_1 \lambda_2 \, dv + \int_{\Omega} (\mathbf{G} \lambda_1) \cdot (\mathbf{G} \lambda_2) \, dv,$$

$$\|\lambda\|_{\Lambda(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} \lambda^2 \, dv + \int_{\Omega} \|\mathbf{G}\lambda\|^2 \, dv.$$

Sia  $\Lambda = \Lambda(\mathcal{T}(\Omega)) = H^1(\mathcal{T}(\Omega))$  lo spazio dei campi scalari di prova, indipendenti dal tempo, aventi  $\mathcal{T}(\Omega)$  quale suddivisione di supporto.

La trattazione svolta nella sezione 12 (p. 278) mostra allora che esiste un campo vettoriale  $\mathbf{h} \in H(\Omega)$  che soddisfa il *principio variazionale di bilancio*

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} a \lambda \, dv - \int_{\Omega} b \lambda \, dv - \int_{\partial T(\Omega)} c \lambda \, da = \int_{\Omega} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{G} \lambda) \, dv, \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Le corrispondenti *equazioni di bilancio* sono

$-\operatorname{div} \mathbf{h} = \dot{a} + a \operatorname{div} \mathbf{v} - b = a' + \operatorname{div}(a \mathbf{v}) - b,$	<small>sorgente ,</small>
$\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = c$	<small>flusso al contorno .</small>

Nei testi di meccanica e di temodinamica (vedi ad es. [42]) la legge di bilancio è enunciata nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} a \, dv = \int_{\Omega} b \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da,$$

che assume l'esistenza del campo vettoriale  $\mathbf{h} \in H(\Omega)$ . Nella formulazione illustrata tale esistenza è invece un risultato della teoria.

### 13. EQUILIBRIO REFERENZIALE

Nell'analisi del comportamento di strutture che durante il processo dinamico subiscono grandi spostamenti o grandi deformazioni locali si fa ricorso ad una trattazione in cui la condizione di equilibrio viene imposta in termini di campi definiti in una configurazione di riferimento.

Questa trattazione è detta descrizione *referenziale* dell'equilibrio. Si consideri una mappa di trasferimento  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  che instaura un diffeomorfismo tra  $\Omega$  e  $\mathbf{k}(\Omega)$ . Nel seguito si denotano con un pedice  $(-)_\mathbf{k}$  i campi definiti sulla configurazione trasformata  $\mathbf{k}(\Omega)$ .

Il concetto di equilibrio è espresso in termini di cinematici rigidi e la rigidità consiste nell'annullarsi del campo di deformazione tangente.

Ne segue che per imporre la condizione di equilibrio in una configurazione di riferimento  $\Omega$  è necessario poter esprimere sia la rigidità dei cinematici che la deformazione tangente, relativi alla configurazione trasformata  $\mathbf{k}(\Omega)$ , in termini di campi definiti sulla configurazione  $\Omega$ .

A tal fine sia  $\mathbf{v}_\mathbf{k} : \mathbf{k}(\Omega) \mapsto \mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}$  un cinematismo in  $\mathbf{k}(\Omega)$ .

Il corrispondente campo vettoriale su  $\Omega$ , denotato con  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbb{T}_\Omega$ , è definito localmente dalla formula del cambiamento di variabile:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{v}_\mathbf{k}(\mathbf{k}(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Si dice che il campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto \mathbb{T}_\Omega$  è ottenuto per *trasporto parallelo* nello spazio  $\mathbb{S}$  del campo  $\mathbf{v}_\mathbf{k} : \mathbf{k}(\Omega) \mapsto \mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)}$  dalla configurazione  $\mathbf{k}(\Omega)$  alla configurazione  $\Omega$ .

Tale definizione ha senso poiché lo spazio ambiente  $\mathbb{S}$  è euclideo e dunque gli spazi tangentici soddisfano le proprietà  $\mathbb{T}_\Omega = \mathbb{T}_{\mathbf{k}(\Omega)} \subset \mathbb{T}_\mathbb{S}$  e  $\mathbb{T}_\mathbb{S}(\mathbf{x}) = V$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ .

#### 13.1. Tensore di Piola

La formulazione referenziale della condizione di equilibrio è basata sulla trasformata di PIOLA illustrata nella sezione I.3.7 (p. 32) e qui di seguito richiamata.

- La *trasformata di PIOLA* di un campo di sforzi  $\mathbf{T}_\mathbf{k} \in C^1(\mathbf{k}(\mathcal{T}(\Omega)))$  nella configurazione  $\mathbf{k}(\mathcal{T}(\Omega))$  è il campo tensoriale  $P[\mathbf{T}_\mathbf{k}] \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$  tale che, per ogni  $\mathbf{v} \in C^1(\mathcal{T}(\Omega))$ , con  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\mathbf{k} \circ \mathbf{k}$ , si abbia

$$\int_{\mathcal{T}(\Omega)} (P[\mathbf{T}_\mathbf{k}] : d\mathbf{v}) \, dv = \int_{\mathbf{k}(\mathcal{T}(\Omega))} (\mathbf{T}_\mathbf{k} : d\mathbf{v}_\mathbf{k}) \, dv_\mathbf{k}.$$

Essendo  $d\mathbf{v}_\mathbf{k} \circ \mathbf{k} = (d\mathbf{v}) \mathbf{F}_\mathbf{k}^{-1}$  e  $d\mathbf{v}_\mathbf{k} = J(\mathbf{k}) \, dv$ , ne segue che

■ Il tensore di PIOLA<sup>61</sup>

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}[\mathbf{T}_k] : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_{k(\Omega)} \circ \mathbf{k}),$$

corrispondente ad un tensore di CAUCHY  $\mathbf{T}_k : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)})$  è definito da

$$\boxed{\mathbf{P}[\mathbf{T}_k] := J(\mathbf{k})(\mathbf{T}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}.}$$

Si noti che nello spazio ambiente euclideo  $\mathbb{S}$  si ha che  $\mathbb{T}_{k(\Omega)} \circ \mathbf{k} = \mathbb{T}_\Omega$  per cui risulta  $\mathbf{P} = \mathbf{P}[\mathbf{T}_k] : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$ .

La condizione variazionale di equilibrio che lega un sistema di forze  $\mathbf{f}_k \in \mathcal{F}_k$  ed un campo di sforzo di CAUCHY  $\mathbf{T}_k \in \mathcal{S}_k$  nella configurazione  $\mathbf{k}(\Omega)$  si scrive

$$\langle \mathbf{f}_k, \mathbf{v}_k \rangle = \int_{k(T(\Omega))} (\mathbf{T}_k : d\mathbf{v}_k) d\mathbf{v}_k = \int_{T(\Omega)} (\mathbf{P}[\mathbf{T}_k] : d\mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}_k.$$

Il sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  corrispondente, nella configurazione  $\Omega$ , al sistema di forze  $\mathbf{f}_k \in \mathcal{F}_k$  nella configurazione  $\mathbf{k}(\Omega)$ , è definito dall'identità

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_k \circ \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{v}_k \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_k \in \mathcal{V}_k.$$

■ La condizione di equilibrio nella configurazione di riferimento si scrive pertanto

$$\boxed{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \int_{T(\Omega)} \mathbf{P} : d\mathbf{v} d\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.}$$

Osservando poi che la relazione  $\mathbf{P} = J(\mathbf{k})(\mathbf{T}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}$  può essere scritta anche

$$\mathbf{P} \mathbf{F}_k^T = J(\mathbf{k})(\mathbf{T}_k \circ \mathbf{k}),$$

si evince che la simmetria del tensore di CAUCHY  $\mathbf{T}_k$  si traduce nella simmetria del prodotto  $\mathbf{P} \mathbf{F}_k^T$ :

$$\boxed{\mathbf{P} \mathbf{F}_k^T = \mathbf{F}_k \mathbf{P}^T.}$$

**Osservazione 13.1.** Si noti che il tensore di PIOLA non è coniugato ad una misura di deformazione finita. Infatti il campo tensoriale del gradiente di velocità

$$d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}_k = (\mathbf{L}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega),$$

non è la derivata temporale di una misura di deformazione finita. ■

---

<sup>61</sup> GABRIELLO PIOLA, 1845 [8], GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF, 1852 [9].

### 13.2. Tensore di Kirchhoff

E' spesso utile considerare, al posto del tensore di CAUCHY, il *tensore di KIRCHHOFF* che, nella configurazione  $\mathbf{k}(\Omega)$ , è definito da

$$\boxed{\mathbf{K}_k = J(k) \mathbf{T}_k.}$$

In termini del tensore di KIRCHHOFF  $\mathbf{K}_k : k(\Omega) \mapsto L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)})$  il tensore di PIOLA si scrive

$$\mathbf{P} = (\mathbf{K}_k \circ k) \mathbf{F}_k^{-T}.$$

### 13.3. Tensore di Piola-Kirchhoff

Si assuma come misura di deformazione finita, nel trasferimento  $k : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  da  $\Omega$  a  $k(\Omega)$ , quella definita da un campo di tensori di GREEN su  $\Omega$ :

$$\boxed{\mathbf{E}(k) = \frac{1}{2} [\mathbf{C}(k) - \mathbf{I}],}$$

dove



- $\mathbf{C}(k) = \mathbf{F}_k^T \mathbf{F}_k : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  è il campo di tensori destri di CAUCHY-GREEN,
- $\mathbf{I} : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  è il campo tensoriale identità su  $\Omega$ .

Ne segue che  $\mathbf{E} : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$ .

Dalla relazione

$$d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}_k = (\mathbf{L}_k \circ k) \mathbf{F}_k,$$

si deduce che

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : d\mathbf{v} &= [(\mathbf{K}_k \circ k) \mathbf{F}_k^{-T}] : \dot{\mathbf{F}}_k = [\mathbf{F}_k \mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{K}_k \circ k) \mathbf{F}_k^{-T}] : \dot{\mathbf{F}}_k = \\ &= [\mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{K}_k \circ k) \mathbf{F}_k^{-T}] : [\mathbf{F}_k^T \dot{\mathbf{F}}_k]. \end{aligned}$$

- Il *tensore di PIOLA-KIRCHHOFF*  $\mathbf{S}$  nella configurazione  $\Omega$  è il tensore simmetrico

$$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{K}_k \circ k) \mathbf{F}_k^{-T} = \mathbf{F}_k^{-1} \mathbf{P}.}$$

Si ha quindi che  $\mathbf{S} : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$ .



Si consideri ora un flusso

$$\mathbf{k} : \mathbb{S} \times I \times I \mapsto \mathbb{S},$$

che passa per  $\Omega$  al tempo  $s \in I$  e per  $\mathbf{k}_{t,s}(\Omega)$  al tempo  $t \in I$ .

Ponendo  $\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{k}(\mathbf{x}, s, t)$ , al campo di velocità  $\mathbf{v}_k(\mathbf{x}, t)$  si associa l'equazione differenziale di evoluzione

$$\dot{\mathbf{k}}_s(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_k(\mathbf{k}_s(\mathbf{x}, t)),$$

con la condizione iniziale  $\mathbf{k}_s(\mathbf{x}, s) = \mathbf{x} \in \mathbb{S}$ .

Per semplificare la notazione si scriverà  $\mathbf{k}$  al posto di  $\mathbf{k}_{t,s}$ .

Allora per il campo di velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_k \circ \mathbf{k}$ , trasportato da  $\mathbf{k}(\Omega)$  in  $\Omega$ , vale la formula

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t).$$

Derivando rispetto al tempo l'espressione del tensore di GREEN, si ottiene

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = d\mathbf{E}(\mathbf{k}; \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [\mathbf{C}(\mathbf{k}) - \mathbf{I}]^{\cdot} = \text{sym}(\mathbf{F}_k^T \dot{\mathbf{F}}_k).$$

Dunque, essendo  $\mathbf{P} = \mathbf{F}_k \mathbf{S}$ ,  $d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}}_k$  e  $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$  si ha che

$$\mathbf{P} : d\mathbf{v} = (\mathbf{F}_k \mathbf{S}) : \dot{\mathbf{F}}_k = \mathbf{S} : (\mathbf{F}_k^T \dot{\mathbf{F}}_k) = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}.$$

Si può dunque concludere che

- Il tensore di PIOLA-KIRCHHOFF è lo *sforzo coniugato* alla misura di deformazione finita di GREEN.

Si ha inoltre che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) &= \text{sym}(\mathbf{F}_k^T \dot{\mathbf{F}}_k) = \text{sym}[\mathbf{F}_k^T (\mathbf{L}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k] = \\ &= \mathbf{F}_k^T \text{sym}[(\mathbf{L}_k \circ \mathbf{k})] \mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^T (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k. \end{aligned}$$

Esiste pertanto un isomorfismo, e cioè una relazione lineare invertibile, tra la derivata temporale del tensore di GREEN  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$  e  $\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}$  che è la deformazione tangente in  $\mathbf{k}(\Omega)$  trasportata in  $\Omega$ .

Questa proprietà è essenziale per poter esprimere la condizione di equilibrio in termini del tensore di sforzo coniugato ad una misura di deformazione.

All'espressione del tensore di PIOLA-KIRCHHOFF in funzione del tensore di KIRCHHOFF si può pervenire anche osservando che la potenza virtuale dello stato di sforzo per unità di volume in  $\Omega$  si deve poter scrivere nei due modi alternativi

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{K}_k \circ \mathbf{k}) : (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}).$$

Allora, essendo  $\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}_k^T (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k$ , deve risultare

$$\mathbf{S} : [\mathbf{F}_k^T (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k] = [\mathbf{F}_k \mathbf{S} \mathbf{F}_k^T] : (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) = (\mathbf{K}_k \circ \mathbf{k}) : (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}),$$

e cioè  $\mathbf{S} = \mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{K}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}$ .

**Osservazione 13.2.** In geometria differenziale, la relazione

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = \mathbf{F}_k^T (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k,$$

tra la derivata temporale del tensore di GREEN in  $\Omega$  e la deformazione tangente in  $\mathbf{k}(\Omega)$  si interpreta affermando che  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k})$  è la spinta inversa di  $\mathbf{D}_k = \text{sym } \mathbf{L}_k$  lungo il flusso  $\mathbf{k}$ .

Sia infatti  $\overline{\mathbf{D}}_k \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}, \mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathfrak{R})$  la forma bilineare due volte covariante  $(0, 2)$  associata al tensore misto di deformazione tangente  $\mathbf{D}_k \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)})$ , mediante l'identità

$$\overline{\mathbf{D}}_k(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{D}_k \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

dove  $g \in L(V, V; \mathfrak{R})$  è il tensore metrico.

Dalla definizione di spinta della sezione I.5 (p. 48) si deduce che la spinta inversa di  $\overline{\mathbf{D}}_k \in L(V, V; \mathfrak{R})$  lungo il flusso  $\mathbf{k}$  è la forma bilineare:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}^* \overline{\mathbf{D}}_k)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{k}^* [\overline{\mathbf{D}}_k(\mathbf{k}_* \mathbf{u}, \mathbf{k}_* \mathbf{v})] = \mathbf{k}^* [\overline{\mathbf{D}}_k(\mathbf{F}_k \mathbf{u}, \mathbf{F}_k \mathbf{v})] = \\ &= \mathbf{k}^* [g((\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k \mathbf{u}, \mathbf{F}_k \mathbf{v})] = g(\mathbf{F}_k^T (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k \mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{T}_\Omega$ .

La relazione  $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = \mathbf{F}_k^T (\mathbf{D}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k$  mostra che il tensore  $\dot{\mathbf{E}} \in L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  è la forma mista  $(1, 1)$  della spinta inversa della forma due volte covariante  $(0, 2)$   $\overline{\mathbf{D}}_k \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}, \mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathfrak{R})$  associata al tensore misto  $\mathbf{D}_k \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)})$ .

Anche l'espressione del tensore di PIOLA-KIRCHHOFF si interpreta convenientemente in termini di spinte.

Infatti la relazione  $\mathbf{S} = \mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{K}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}$  mostra che il tensore  $\mathbf{S} \in L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  è la forma mista  $(1, 1)$  della spinta inversa della forma due volte controvariante  $(2, 0)$  del tensore misto  $\mathbf{K}_k \in L(\mathbb{T}_{k(\Omega)}; \mathbb{T}_{k(\Omega)})$ .

Si noti che si può effettuare la contrazione completa tra un tensore di tipo  $(0, 2)$  solo con un tensore di tipo  $(2, 0)$ .

Inoltre la spinta secondo un flusso  $\mathbf{k}^{-1}$  di due tensori, uno covariante  $(0, 2)$  e l'altro controvariante  $(2, 0)$ , non altera il prodotto interno tra i tensori.

Le proprietà delle spinte sono illustrate in dettaglio nella sezione I.12.1 (p. 130) ■

**Osservazione 13.3.** Si noti che la definizione  $P[\mathbf{T}_k] := J(\mathbf{k})(\mathbf{T}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}$  del tensore di PIOLA  $\mathbf{P} = P[\mathbf{T}_k] : \Omega \mapsto L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$  richiede che lo spazio ambiente  $\mathbb{S}$  sia euclideo, perché solo allora si ha che  $\mathbb{T}_{k(\Omega)} \circ \mathbf{k} = \mathbb{T}_\Omega$ .

Per contro il tensore di PIOLA-KIRCHHOFF,  $\mathbf{S} \in L(\mathbb{T}_\Omega; \mathbb{T}_\Omega)$ , che è definito da  $\mathbf{S} = \mathbf{F}_k^{-1} (\mathbf{K}_k \circ \mathbf{k}) \mathbf{F}_k^{-T}$ , essendo esprimibile in termini di spinte e di tensori metrici, può invece essere introdotto anche se lo spazio ambiente è una varietà di RIEMANN. ■

## 14. COMPLEMENTI

Questa sezione è dedicata ad alcuni approfondimenti ed all'esposizione di altri importanti risultati di meccanica dei continui. Alcuni di essi sono classici, mentre altri sono contributi originali dell'autore.

### 14.1. Simmetria dello stato tensionale

Se lo stato tensionale nel continuo di CAUCHY fosse descritto da un campo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  di tensori non necessariamente simmetrici, la formula di GREEN si scriverebbe

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{T} : (\text{sym grad } \mathbf{v}) \, dv &= \int_{\Omega} \text{sym } \mathbf{T} : (\text{sym grad } \mathbf{v}) \, dv = \\ &= - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{T}\mathbf{v}) \, da - \int_{\Omega} (\text{emi } \mathbf{T}) : (\text{emi grad } \mathbf{v}) \, dv, \end{aligned}$$

per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  ed ogni  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ .

Il primo termine dell'identità rappresenta la potenza virtuale compiuta dallo stato di sforzo, mentre i tre termini a secondo membro rappresentano la potenza virtuale del sistema di forze.

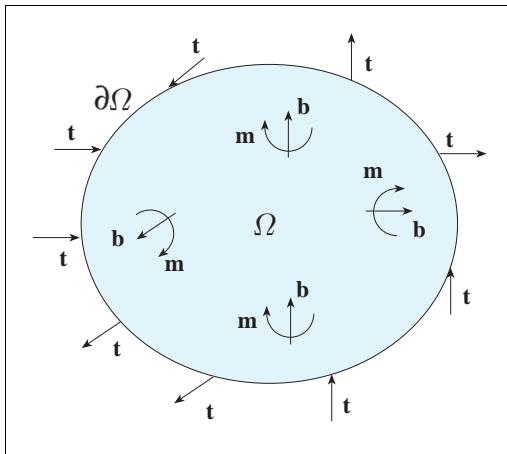
Le forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  in equilibrio con uno stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  sono pertanto costituite da:

- *forze di contatto:*  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = (\mathbf{T}\mathbf{n})(\mathbf{x})$  sulla frontiera  $\partial\Omega$ ,
- *forze di massa:*  $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = -\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x})$  di quadrato integrabile su  $\Omega$ ,
- *coppie di massa:*  $\mathbf{m}(\mathbf{x}) = -\text{emi } \mathbf{T}(\mathbf{x})$  di quadrato integrabile su  $\Omega$ ,

Si vuole ora mostrare che la presenza di coppie di massa è inessenziale.

Si osservi infatti che, in virtù della simmetria del tensore della deformazione tangente  $\text{sym grad } \mathbf{v}$ , la potenza virtuale compiuta dalla stato tensionale dipende solo dalla parte simmetrica di  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ .

Pertanto anche la potenza virtuale del sistema di forze deve dipendere solo dalla parte simmetrica del campo tensoriale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ .



*Forze di contatto,  
forze di massa  
e coppie di massa.*

Fig. 14.1

Deve dunque essere

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot (\mathbf{\Gamma v}) \, dv - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \, dv - \int_{\Omega} (\operatorname{emi} \mathbf{T}) : (\operatorname{emi} \operatorname{grad} \mathbf{v}) \, da = \\ &= \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} [(\operatorname{sym} \mathbf{T})\mathbf{n}] \cdot \mathbf{\Gamma v} \, da - \int_{\Omega} [\operatorname{div} (\operatorname{sym} \mathbf{T})] \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$



Per il modello del continuo di CAUCHY il sistema di forze di contatto, forze di massa e coppie di massa definito da

$$\begin{cases} \mathbf{t}(\mathbf{x}) := \mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) & \text{su } \partial\mathcal{T}(\Omega), \\ \mathbf{b}(\mathbf{x}) := -\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{m}(\mathbf{x}) := -\operatorname{emi} \mathbf{T}(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega, \end{cases}$$

risulta quindi equivalente al sistema di forze di contatto e di massa definito da:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) := [\operatorname{sym} \mathbf{T}(\mathbf{x})]\mathbf{n}(\mathbf{x}) & \text{su } \partial\mathcal{T}(\Omega), \\ \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x}) := -\operatorname{div} [\operatorname{sym} \mathbf{T}(\mathbf{x})] & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

Il sistema di coppie di massa è pertanto equivalente al sistema di forze di contatto e forze di massa dato da

$$\begin{cases} \mathbf{t}_m(\mathbf{x}) := \mathbf{m}(\mathbf{x})\mathbf{n} & \text{su } \partial\mathcal{T}(\Omega), \\ \mathbf{b}_m(\mathbf{x}) := -\operatorname{div} \mathbf{m}(\mathbf{x}) & \text{in } \Omega. \end{cases}$$



Una rappresentazione euristica è riportata in figura 14.2.

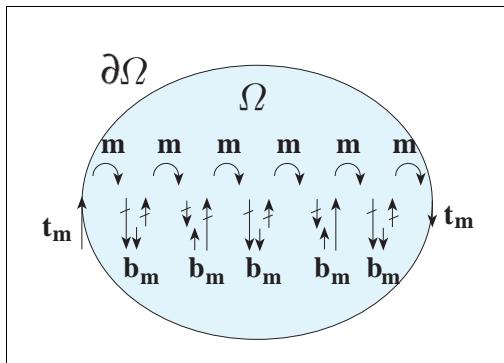


Fig. 14.2

Ogni sistema di coppie di massa è equivalente ad un sistema di forze di contatto e di forze di massa.

Nel modello del continuo di CAUCHY si assume che non agiscano coppie di massa e quindi che lo stato tensionale sia costituito da un campo di tensori simmetrici.

Tale ipotesi, in virtù dell’equivalenza dimostrata, non risulta limitativa.

Si osservi infine che, nel modello del continuo di CAUCHY, mentre è possibile, anche se non conveniente, considerare agente un campo di coppie di massa, non vi è invece alcuna possibilità di introdurre un campo di coppie di superficie.

Tali campi possono essere presi in considerazione adottando modelli di continuo con struttura cinematica più ricca.

Un esempio classico è il modello di *continuo polare* formulato agli inizi del ventesimo secolo dai fratelli EUGÈNE e FRANCOIS COSSERAT [14], [16].

Il modello di continuo polare è dotato di una cinematica più ricca in quanto le particelle puntiformi sono dotate di direttori che ne definiscono la rotazione nello spazio.

Più recentemente sono stati proposti modelli continui con struttura ancora più complessa, quali il *continuo micromorfo* che ha localmente la struttura di un continuo deformativamente omogeneo [26], [28], [38].

Un inquadramento della teoria del continuo polare dei COSSERAT e dei continui micromorfi nell’ambito di una trattazione basata su concetti e metodi di geometria differenziale è stato recentemente sviluppato in [48].

La trattazione di questi modelli richiede un livello alto di generalità e la relativa teoria, anche se complessa, è illuminante in quanto richiede che vengano attentamente valutate le diverse possibili scelte che possono essere fatte nel definire del modello.

Nella sezione IV.13 (p. 477) il lettore potrà trovare un’introduzione alla statica dei modelli dei continui con struttura, micromorfi e micropolari ed un’analisi critica delle proposte formulate al riguardo in letteratura.

### 14.2. Versione tensoriale della formula di Green

Uno sviluppo analogo a quello seguito per dedurre la formula di GREEN nella proposizione I.1.7 (p. 10), consente di mostrare che il teorema del gradiente conduce ad una identità che costituisce la versione tensoriale della formula di GREEN.

Se un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  ed un campo tensoriale  $\mathbf{T}$  sono di classe  $C^1(\overline{\Omega})$ , il lemma di GREEN assicura che sussiste l'identità integrale:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} T_{ik} n_k v_j \, da &= \int_{\partial\Omega} (T_{ik} v_j) n_k \, da = \int_{\Omega} (T_{ik} v_j)_{/k} \, dv = \\ &= \int_{\Omega} (T_{ik,k} v_j) \, dv + \int_{\Omega} (T_{ik} v_{j/k}) \, dv, \end{aligned}$$

che in notazione vettoriale si scrive

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \otimes \Gamma\mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{T} \otimes \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{T} (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \, dv.$$

In analogia alla trattazione svolta nella sezione 2.6 (p. 185), più in generale la formula vale per un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in H_{\operatorname{grad}}(\mathcal{T}(\Omega))$  ed un campo tensoriale  $\mathbf{T} \in H_{\operatorname{div}}(\mathcal{T}(\Omega))$ . Si perviene così alla *versione tensoriale della formula di GREEN*:

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \otimes \Gamma\mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \otimes \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{T} (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \, dv.$$

### 14.3. Valor medio dell'atto di deformazione

Se il campo tensionale  $\mathbf{T} \in H_{\operatorname{div}}(\mathcal{T}(\Omega))$  è identicamente pari all'identità  $\mathbf{I}$ , risulta

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{T} = \operatorname{div} \mathbf{I} = \mathbf{o}, \\ \mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{I}\mathbf{n} = \mathbf{n}, \end{cases}$$

e la versione tensoriale della formula di GREEN fornisce

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{n} \otimes \Gamma\mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} (\operatorname{grad} \mathbf{v})^T \, dv,$$

ovvero, trasponendo ambo i termini,

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\Gamma \mathbf{v}) \otimes \mathbf{n} \, da = \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{v} \, dv.$$

Sommando e dividendo per 2 si ottiene la formula

$$\int_{\Omega} \text{sym grad } \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \text{sym}(\Gamma \mathbf{v} \otimes \mathbf{n}) \, da.$$

che in temini di componenti si scrive

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \, dv = \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \frac{1}{2} [(\Gamma v_i) n_j + n_i (\Gamma v_j)] \, da.$$

Essa fornisce il valor medio dell'atto di deformazione associato ad un cinematismo  $\mathbf{v} \in H_{\text{grad}}(\mathcal{T}(\Omega))$ , in termini dei valori al contorno  $\Gamma \mathbf{v}$  del cinematismo.

#### 14.4. Relazione di Signorini

La versione tensoriale della formula di GREEN consente di dimostrare una interessante relazione dovuta ad A. SIGNORINI (1933 , [18]).

Detto  $\mathbf{f} = \{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  il sistema di forze in equilibrio con lo stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$ , le equazioni di equilibrio di CAUCHY forniscono la *relazione di Signorini*

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} (\text{grad } \mathbf{v})^T \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{b} \otimes \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \otimes (\Gamma \mathbf{v}) \, da, \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\text{grad}}(\mathcal{T}(\Omega)),$$

che in termini di componenti si scrive

$$\int_{\Omega} (T_{ik} v_{j/k}) \, dv = \int_{\Omega} b_i v_j \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} t_i (\Gamma v_j) \, da \quad \forall \mathbf{v} \in H_{\text{grad}}(\mathcal{T}(\Omega)).$$

La relazione di SIGNORINI fornisce la versione tensoriale della condizione variazionale di equilibrio.

Dalla relazione di SIGNORINI è possibile pervenire direttamente alla formula che fornisce il valor medio dello stato tensionale in termini delle forze attive di massa e di contatto e delle reazioni dei vincoli assoluti con esso in equilibrio.

#### 14.5. Valor medio dello stato tensionale

Si consideri un cinematismo  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}_o$  consistente in una omotetia di ragione unitaria e centro in  $\mathbf{x}_o \in V$ .

Ovviamente il cinematismo soddisfa la condizione  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in H_{\text{grad}}(\mathcal{T}(\Omega))$  e dà luogo ad un atto di deformazione omogeneo pari all'identità.

Risulta infatti  $\text{grad}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = \mathbf{I}$ . Senza ledere la generalità si può porre  $\mathbf{x}_o = \mathbf{o}$ .

Sostituendo quindi  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  nella relazione di SIGNORINI, si perviene alla formula che fornisce il valor medio dello stato tensionale in equilibrio col sistema di forze  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \, dv = \int_{\Omega} \mathbf{b} \otimes \mathbf{x} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} \, da .$$

*Formula del  
valor medio.*

che in temini di componenti si scrive

$$\int_{\Omega} T_{ij} \, dv = \int_{\Omega} b_i x_j \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} t_i x_j \, da .$$

Si noti che la condizione di equilibrio alla rotazione assicura che il tensore a secondo membro è simmetrico.

I sistemi di forze in equilibrio con uno stato tensionale a valor medio nullo godono di una proprietà caratteristica, detta di *equilibrio astatico*, che sarà discussa nella prossima sezione.

#### 14.6. Equilibrio astatico

Si consideri un sistema di forze  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  agente su di una struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$ .

- Un sistema di forze  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  in equilibrio è detto in *equilibrio astatico* se permane in equilibrio dopo una arbitraria rotazione.

Dalle equazioni cardinali della statica si deduce che l'equilibrio astatico consiste nella richiesta che, per ogni rotazione  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}$ , risulti

$$\mathbf{R}[\mathbf{Q}\mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{t}] = \int_{\Omega} \mathbf{Q}\mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{Q}\mathbf{t} \, da = \mathbf{o} ,$$

$$\mathbf{M}_o[\mathbf{Q}\mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{t}] = \text{emi} \left[ \int_{\Omega} (\mathbf{Q}\mathbf{b}) \otimes \mathbf{x} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (\mathbf{Q}\mathbf{t}) \otimes \mathbf{x} \, da \right] = \mathbf{O} .$$

Sussiste la seguente interessante caratterizzazione della proprietà di equilibrio astatico in termini dello stato tensionale.

**Proposizione 14.1. Condizione di equilibrio astatico.** *Un sistema di forze  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  in equilibrio su di una struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}, \mathbf{B})$ , soddisfa la condizione di equilibrio astatico, se e solo se ogni stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  con esso in equilibrio ha valor medio nullo. In altri termini la condizione di equilibrio astatico equivale a richiedere che*

$$\begin{aligned}\mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \, da = \mathbf{o}, \\ \mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] &= \int_{\Omega} \mathbf{b} \otimes \mathbf{x} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \otimes \mathbf{x} \, da = \mathbf{O}.\end{aligned}$$

Criterio di  
equilibrio astatico.

**Dim.** Si osservi che

$$\begin{cases} \mathbf{R}[\mathbf{Q}\mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{t}] = \mathbf{Q}\mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}], \\ \mathbf{M}_o[\mathbf{Q}\mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{t}] = \text{emi}(\mathbf{Q}\mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}]). \end{cases}$$

Dunque le condizioni  $\mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \mathbf{o}$  e  $\mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \mathbf{O}$  implicano che  $\mathbf{R}[\mathbf{Q}\mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{t}] = \mathbf{o}$  e  $\mathbf{M}_o[\mathbf{Q}\mathbf{b}, \mathbf{Q}\mathbf{t}] = \mathbf{o}$  e quindi l'equilibrio astatico.

Viceversa l'equilibrio astatico, ponendo  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ , implica che

$$\mathbf{R}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \mathbf{o}, \quad \text{emi } \mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \mathbf{o}.$$

Dunque  $\mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}]$  è un tensore simmetrico e la condizione

$$\text{emi}(\mathbf{Q}\mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}]) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth},$$

si traduce nella proprietà

$$\mathbf{Q}\mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}]\mathbf{Q} = \mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth} \iff \mathbf{A}[\mathbf{b}, \mathbf{t}] = \mathbf{O}.$$

Infatti l'implicazione  $\Leftarrow$  è banale e l'implicazione  $\Rightarrow$  può essere dedotta come segue. Si consideri un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  principale per  $\mathbf{A}$  ed i corrispondenti autovalori  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ . Ponendo  $\mathbf{Q}$  pari alla rotazione definita da

$$\begin{cases} \mathbf{Q}\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2, \\ \mathbf{Q}\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_3, \\ \mathbf{Q}\mathbf{d}_3 = \mathbf{d}_1, \end{cases}$$

si deduce che  $\lambda_1 \mathbf{d}_1 = \mathbf{A} \mathbf{d}_1 = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{d}_1 = \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{d}_2 = \lambda_2 \mathbf{Q} \mathbf{d}_2 = \lambda_2 \mathbf{d}_3$  e quindi che  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ . Analogamente  $\lambda_3 = 0$  e quindi  $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ .  $\square$

### 14.7. Teorema di Da Silva

La possibilità di effettuare una decomposizione polare di trasformazioni lineari anche singolari è assicurata dalla proposizione I.11.1 (p. 119) e consente di stabilire il seguente risultato, noto come *teorema di Da Silva* [40].

**Proposizione 14.2. Teorema di Da Silva.** *Sia assegnato un sistema  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$  di forze di massa e superficiali in una configurazione  $\Omega$  di un continuo. Allora, per ogni fissato punto dello spazio  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$  è possibile determinare una rotazione  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  tale che sia nullo il momento risultante rispetto a  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$  del sistema di forze ruotato  $\{\mathbf{Qb}, \mathbf{Qt}\} \in H \times \partial\mathcal{F}$ .*

**Dim.** Assumendo che  $\mathbf{x}_o \in \mathbb{S}$  sia l'origine del riferimento, si richiede di determinare una rotazione  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  tale che il tensore

$$\mathbf{G}(\mathbf{Q}) := \int_{\Omega} (\mathbf{Qb}) \otimes \mathbf{x} \, dv + \int_{\Omega} (\mathbf{Qt}) \otimes \mathbf{x} \, dv,$$

sia simmetrico.

Risulta  $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \mathbf{G}(\mathbf{I})$  e quindi effettuando una decomposizione polare  $\mathbf{G}(\mathbf{I}) = \mathbf{R} \mathbf{U}$  si ottiene che  $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{U}$ .

Dunque  $\mathbf{G}(\mathbf{R}^T) = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}$  con  $\mathbf{U}^2 = \mathbf{G}(\mathbf{I})^T \mathbf{G}(\mathbf{I})$ .

Ogni rotazione  $\mathbf{R}^T$  soddisfa pertanto la richiesta dell'enunciato.  $\square$

### 14.8. Rappresentazione delle autotensioni

Nella sezione 7.7 (p. 231) si è visto che in un continuo tridimensionale è possibile generare stati tensionali a divergenza nulla mediante da campi  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  di tensori simmetrici di classe  $C^3(\Omega)$  in quanto

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) := \text{rot} [\text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})]^T \Rightarrow \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{o} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Il campo tensoriale  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  è detto *funzione di sforzo* di BELTRAMI [12].

Si considerino il risultante ed il momento risultante del flusso dello stato tensionale attraverso qualsiasi superficie chiusa  $S$  contenuta nel dominio  $\overline{\Omega}$

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{T}) := \int_S \mathbf{T} \mathbf{n} \, dv, \quad \mathbf{M}_S(\mathbf{T}) := \int_S \mathbf{x} \times (\mathbf{T} \mathbf{n}) \, dv,$$

Facendo ricorso a risultati di teoria del potenziale è possibile mostrare che gli stati tensionali a divergenza nulla generati da una funzione di sforzo di BELTRAMI sono caratterizzati dalla seguente proprietà (GURTIN 1963 [24], CARLSON 1967 [29])

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{rot} [\text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{x})]^T \iff \begin{cases} \mathbf{R}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}, \\ \mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}. \end{cases}$$

Sussiste inoltre il seguente risultato.

**Proposizione 14.3.** *La frontiera  $\partial\Omega$  del dominio  $\Omega$  sia costituita da una singola superficie chiusa generalmente regolare. Allora uno stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  di classe  $C^\infty(\Omega)$  ha divergenza nulla se e solo se  $\mathbf{R}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}$  e  $\mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}$ . Sussiste cioè l'equivalenza*

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{o} \iff \begin{cases} \mathbf{R}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}, \\ \mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}, \end{cases} \quad \forall S \subset \Omega.$$

**Dim.** L'ipotesi su  $\partial\Omega$  assicura che ogni superficie chiusa  $S$  in  $\Omega$  racchiude un dominio  $\mathcal{P}_S$  contenuto in  $\Omega$ . Applicando il teorema della divergenza ed il lemma del valor medio, proposizione I.1.5 (p. 9), si ha che

$$\mathbf{R}_S(\mathbf{T}) = \int_S \mathbf{T}\mathbf{n} \, dv = \int_{\mathcal{P}_S} \text{div } \mathbf{T} \, dv = \mathbf{o} \quad \forall S \in \Omega \iff \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{o}.$$

Rimane da mostrare che se  $\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{o}$  risulta anche  $\mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}$ . A tal fine si osservi che se  $\mathbf{T}$  è un campo tensoriale di classe  $C^\infty(\Omega)$  e  $\mathbf{X}$  è il tensore antisimmetrico di cui  $\mathbf{x}$  è il vettore assiale,

$$\mathbf{X} = \text{anti } \mathbf{x} \iff \mathbf{x} = \text{axial } \mathbf{X},$$

sussiste l'identità

$$\text{div} (\mathbf{XT}) = \text{axial} (\text{emi } \mathbf{T}) + \mathbf{X} [\text{div } \mathbf{T}].$$

Osservando che  $\text{emi } \mathbf{T} = \mathbf{O}$  si deduce che

$$\mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \int_S \mathbf{x} \times (\mathbf{T}\mathbf{n}) \, dv = \int_S \mathbf{X}(\mathbf{T}\mathbf{n}) \, dv = \int_{\mathcal{P}_S} \text{div} (\mathbf{XT}) \, dv = \int_{\mathcal{P}_S} \mathbf{X} [\text{div } \mathbf{T}] \, dv.$$

Dunque

$$\text{div } \mathbf{T} = \mathbf{o} \Rightarrow \mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o},$$

e l'assunto è dimostrato.  $\square$

I risultati di questa sezione conducono alla seguente conclusione.

- Se la frontiera del dominio  $\Omega$  è costituita da una singola superficie chiusa, la rappresentazione degli stati tensionali a divergenza nulla mediante funzioni di sforzo di BELTRAMI è *completa*, nel senso che sussiste l'equivalenza

$$\mathbf{T} = \text{rot} [\text{rot } \mathbf{A}]^T \iff \begin{cases} \mathbf{R}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}, \\ \mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}. \end{cases} \iff \text{div } \mathbf{T} = \mathbf{o}.$$

Nel caso generale di domini la cui frontiera è costituita da più superfici chiuse è però possibile determinare stati tensionali a divergenza nulla che non soddisfano le condizioni  $\mathbf{R}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}$  e  $\mathbf{M}_S(\mathbf{T}) = \mathbf{o}$ .

Ne segue che la rappresentazione di BELTRAMI è in generale non completa.

H. SCHAEFER [21] ha formulato nel 1953 una rappresentazione degli stati tensionali a divergenza nulla che risulta completa nel caso generale.

La dimostrazione della completezza è dovuta a GURTIN (1963 [24]).

La rappresentazione di SCHAEFER è la seguente

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \text{rot} [\text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{x})]^T + \text{grad } \mathbf{h}(\mathbf{x}) + [\text{grad } \mathbf{h}(\mathbf{x})]^T - [\text{div } \mathbf{h}(\mathbf{x})] \mathbf{I},$$

in cui  $\mathbf{A}$  è un campo tensoriale simmetrico e  $\mathbf{h}$  è un campo vettoriale *armonico* nel dominio  $\Omega$ , cioè tale che

$$\Delta \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \text{div grad } \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Per una discussione esauriente della questione si rinvia all'articolo di GURTIN [33].

#### 14.9. Vincoli locali al contorno

In una struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  un sistema di *vincoli al contorno* consiste in un insieme di condizioni imposte, in corrispondenza della suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  di  $\Omega$ , sui valori al contorno  $\Gamma\mathbf{v}$  dei cinematismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -regolari  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ .

In questa sezione si considerano vincoli al contorno perfetti, lisci e bilaterali ed in particolare vincoli puntuali al contorno di tipo assoluto e di tipo relativo. Tali vincoli sono gli unici ammessi in problemi lineari.

##### 14.9.1. Vincoli assoluti

Un vincolo al contorno *assoluto* è definito dal sottospazio

- $\mathcal{V}_{\text{GDL}}^\alpha(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{V}$ , detto sottospazio dei *gradi di libertà locali*, cui devono appartenere i valori al contorno  $\Gamma\mathbf{v}(\mathbf{x})$  dei cinematismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  nei punti  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_\alpha \subset \partial\mathcal{T}(\Omega)$ ,

$$\Gamma\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}_{\text{GDL}}^\alpha(\mathbf{x}).$$

Il complemento ortogonale

$$\mathcal{R}_{\text{VINC}}^\alpha(\mathbf{x}) = [\mathcal{V}_{\text{GDL}}^\alpha(\mathbf{x})]^\perp,$$

è il sottospazio delle *reazioni vincolari* nel punto  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_\alpha$ .

Le reazioni dei vincoli assoluti sono anche dette *reazioni vincolari esterne*.

Le dimensioni

$$n_{\text{GDL}} = \dim \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha}(\mathbf{x}), \quad n_{\text{VINC}} = \dim \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x})$$

rappresentano rispettivamente il numero di gradi di libertà ed il numero dei vincoli semplici. I vincoli assoluti vengono così classificati

- se  $n_{\text{VINC}} = 0$  il vincolo è *inefficace*,
- se  $n_{\text{VINC}} = 1$  il vincolo è *semplice*,
- se  $n_{\text{VINC}} = 2$  il vincolo è *doppio*,
- se  $n_{\text{VINC}} = 3$  il vincolo è *totale*.

I vincoli assoluti possono essere espressi in forma esplicita od implicita.

- La *forma esplicita* di un vincolo *assoluto* si ottiene determinando una base  $\{\mathbf{d}_i^{\alpha}, i = 1, \dots, n_{\alpha}\}$  del sottospazio  $\mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha}(\mathbf{x})$  e ponendo

$$\mathbf{\Gamma v}_{\alpha}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\alpha}} \lambda_i^{\alpha}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i^{\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{P}_{\alpha} \subseteq \partial \mathcal{T}(\Omega),$$

con  $n_{\alpha} \leq 3$ .

I vettori  $\mathbf{d}_i(\mathbf{x})$  della base sono detti *direttori* e gli scalari  $\lambda_i(\mathbf{x})$  sono detti *parametri cinematici*.

- La *forma implicita* di un vincolo *assoluto* si ottiene determinando una base  $\{\boldsymbol{\rho}_i^{\alpha}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n_{\alpha}\}$  del sottospazio  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x})$  e ponendo

$$\mathbf{\Gamma v}_{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\rho}_i^{\alpha}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\rho}_i^{\alpha}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{P}_{\alpha} \subseteq \partial \mathcal{T}(\Omega).$$

I vettori direttori  $\mathbf{d}_i(\mathbf{x})$  e le tensioni  $\boldsymbol{\rho}_i(\mathbf{x})$  sono continui a pezzi su  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ .

#### 14.9.2. Vincoli relativi

Un vincolo al contorno *relativo* impone una condizione lineare sul salto di discontinuità  $[[\mathbf{\Gamma v}]]_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = (\mathbf{\Gamma v}_{\alpha} - \mathbf{\Gamma v}_{\beta})(\mathbf{x})$  dei valori al contorno dei cinematicismi  $\mathcal{M}$ -regolari  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  in corrispondenza dei punti  $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{P}_{\alpha\beta}$  delle interfacce  $\partial \mathcal{P}_{\alpha\beta}$  di una suddivisione  $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ .

Si denota con  $\mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei gradi di libertà locali cui devono appartenere i salti di discontinuità  $[[\mathbf{\Gamma v}]]_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  dei cinematicismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  nei punti  $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{P}_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ .

Il complemento ortogonale  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})^\perp$  forma il sottospazio delle *interazioni locali* in  $\mathbf{x}$ .

Le reazioni dei vincoli relativi sono anche dette *reazioni vincolari interne*.

Le dimensioni  $n_{\text{GDL}} = \dim \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  ed  $n_{\text{VINC}} = \dim \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  rappresentano rispettivamente il numero di gradi di libertà ed il numero di vincoli semplici imposti.

- La richiesta di  $\mathcal{T}(\Omega)$ -regolarità imposta sui cinematismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  costituisce anch'essa una condizione di vincolo relativo che è detto di *perfetta continuità* dei valori al contorno dei cinematismi ed è definito dai sottospazi

$$\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}, \quad \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{o}\}.$$

In corrispondenza di una interfaccia  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  i vincoli relativi possono essere posti in forma esplicita od implicita.

- La *forma esplicita* di un vincolo *relativo* si ottiene determinando una base  $\{\mathbf{d}_i^{\alpha\beta}, i = 1, \dots, n_{\alpha\beta}\}$  del sottospazio  $\mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  e ponendo

$$[[\Gamma\mathbf{v}]]_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\alpha\beta}} \lambda_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(\Omega),$$

con  $n_{\alpha\beta} \leq 3$ .

- La *forma implicita* di un vincolo *relativo* si ottiene determinando una base  $\{\boldsymbol{\rho}_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), i = 1, \dots, n_{\alpha\beta}\}$  del sottospazio  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$  e ponendo

$$[[\Gamma\mathbf{v}]]_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\rho}_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\rho}_i^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{M}}(\Omega).$$

Si denota con  $\mathcal{L}$  il sottospazio dei *cinematismi conformi* e cioè dei campi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  che soddisfano i vincoli puntuali al contorno, assoluti e relativi.

Il sottospazio  $\mathcal{R}$  delle *reazioni vincolari* è costituito dai sistemi di forze che compiono potenza virtuale nulla per ogni cinematismo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ .

#### 14.9.3. Operatori di vincolo

Le rappresentazioni esplicite (o parametriche) ed implicite dei vincoli assoluti e relativi possono essere espresse formalmente descrivendo i sottospazi dei gradi di libertà e delle reazioni vincolari come nucleo o come immagine di operatori lineari che si diranno *operatori di vincolo*.

Le rappresentazioni esplicita ed implicita del sottospazio dei *gradi di libertà* sono fornite da operatori  $\mathbf{P}_{\mathbf{x}} \in L\{\mathbf{V}, \mathbf{V}\}$  ed  $\mathbf{L}_{\mathbf{x}} \in L\{\mathbf{V}, \mathbf{V}\}$  tali che

$$\text{Ker } \mathbf{L}_{\mathbf{x}} = \text{Im } \mathbf{P}_{\mathbf{x}} = \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha}(\mathbf{x}).$$

Gli operatori duali  $\mathbf{L}'_{\mathbf{x}} \in L\{\mathbf{V}, \mathbf{V}\}$  e  $\mathbf{P}'_{\mathbf{x}} \in L\{\mathbf{V}, \mathbf{V}\}$  forniscono rispettivamente le rappresentazioni esplicita ed implicita del sottospazio delle *reazioni vincolari* in quanto risulta

$$\text{Ker } \mathbf{P}'_{\mathbf{x}} = (\text{Im } \mathbf{P}_{\mathbf{x}})^{\perp} = \text{Im } \mathbf{L}'_{\mathbf{x}} = (\text{Ker } \mathbf{L}_{\mathbf{x}})^{\perp} = \mathcal{R}_{\text{GDL}}^{\alpha}(\mathbf{x}).$$

L'unicità delle rappresentazioni esplicite richiede che  $\text{Ker } \mathbf{P}_{\mathbf{x}} = \text{Ker } \mathbf{L}'_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{o}\}$ .

#### 14.9.4. Vincoli ben posti

Si è visto che nei punti  $\mathbf{x} \in \mathcal{I}(\Omega)$  i vincoli al contorno vengono definiti assegnando

- sulle facce  $\partial\mathcal{P}_{\alpha}, \partial\mathcal{P}_{\beta} \in \mathcal{T}_{\mathcal{M}}(\Omega)$ , vincoli assoluti caratterizzati dai sottospazi  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x})$  e  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x})$ ,
- sulle interfacce  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \in \mathcal{I}(\Omega)$ , vincoli relativi caratterizzati dai sottospazi  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})$ .

Si osservi ora che le condizioni di vincolo assoluto impongono che

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x})^{\perp} \\ \Gamma \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x})^{\perp} \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \mathbf{v}_{\alpha}(\mathbf{x}) + \Gamma \mathbf{v}_{\beta}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x})^{\perp} + \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x})^{\perp}.$$

Quindi dall'eguaglianza

$$\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x})^{\perp} + \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x})^{\perp} = [\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x})]^{\perp},$$

si trae la condizione

$$[[\Gamma \mathbf{v}]]_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \in [\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x})]^{\perp}.$$

La condizione di vincolo relativo

$$[[\Gamma \mathbf{v}]]_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x})^{\perp}$$

è dunque indipendente dai vincoli assoluti se e solo se è rispettata la *condizione di non ridondanza*:

$$\boxed{\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{o}\}},$$

che espressa, in termini di gradi di libertà, assume la forma

$$\boxed{\mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}},$$

come è facile verificare eguagliando i complementi ortogonali.

Se il vincolo relativo è di perfetta continuità, risultando  $\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}$  e  $\mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{o}\}$ , la condizione di non ridondanza assume la forma ridotta

$$\mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha}(\mathbf{x}) \cap \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\beta}(\mathbf{x}) = \{\mathbf{o}\} \iff \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\beta}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}.$$

Un sistema di vincoli al contorno, assoluti e relativi, è detto *ben posto* se è soddisfatta la condizione di non ridondanza.

#### 14.9.5. Sistemi reattivi

Si presenta ora un risultato fondamentale che fornisce la rappresentazione parametrica dei sistemi reattivi dei vincoli al contorno assoluti, relativi e di continuità.

Il sottospazio  $\mathcal{R}$  delle reazioni vincolari, caratterizzato dalla condizione di ortogonalità dei sistemi reattivi ai cinematicismi conformi, viene perfettamente descritto mediante tale risultato e la descrizione risulta univoca se i vincoli sono ben posti.

Per semplificare la notazione, si omette l'indicazione esplicita della dipendenza dal punto  $\mathbf{x}$ , ponendo

$$\begin{cases} \mathcal{V}_\alpha = \mathcal{V}_{\text{GDL}}^\alpha(\mathbf{x}), & \mathcal{V}_\beta = \mathcal{V}_{\text{GDL}}^\beta(\mathbf{x}), & \mathcal{V}_{\alpha\beta} = \mathcal{V}_{\text{GDL}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{v}_\alpha = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}_\alpha(\mathbf{x}), & \mathbf{v}_\beta = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}_\beta(\mathbf{x}), & \mathbf{v}_{\alpha\beta} = [\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}]_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \\ \mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\text{VINC}}^\alpha(\mathbf{x}), & \mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_{\text{VINC}}^\beta(\mathbf{x}), & \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\text{VINC}}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \\ \boldsymbol{\rho}_\alpha = \boldsymbol{\rho}^\alpha(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\rho}_\beta = \boldsymbol{\rho}^\beta(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{\rho}^{\alpha\beta}(\mathbf{x}). \end{cases}$$

**Proposizione 14.4. Rappresentazione dei sistemi reattivi.** *Si consideri una struttura  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{LT}(\Omega), \mathbf{B})$  soggetta a vincoli assoluti e relativi. Un sistema  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \mathcal{F}$  di forze di massa e di contatto è reattivo, e cioè soddisfa la condizione di ortogonalità al sottospazio dei cinematicismi conformi*

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

se e solo se le forze di massa  $\mathbf{b}$  sono nulle e le tensioni di contatto  $\mathbf{t}$  ammettono, nei punti di continuità, la rappresentazione

$$\begin{cases} \mathbf{t}_\alpha = \boldsymbol{\rho}_\alpha + \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta}, & \mathbf{r}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha, & \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} \in \mathcal{R}_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{t}_\beta = \boldsymbol{\rho}_\beta - \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta}, & \mathbf{r}_\beta \in \mathcal{R}_\beta, & \end{cases}$$

dove  $\mathbf{t}_\alpha$  e  $\mathbf{t}_\beta$  sono le tensioni agenti sulle facce  $\partial\mathcal{P}_\alpha$  e  $\partial\mathcal{P}_\beta$  dell'interfaccia  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{T}_\mathcal{M}(\Omega)$ ,  $\boldsymbol{\rho}_\alpha$  e  $\boldsymbol{\rho}_\beta$  sono reazioni esplicate dai vincoli assoluti e  $\boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta}$  è un'interazione esplicata dal vincolo relativo.

La rappresentazione è univoca se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{\alpha\beta} \cap \mathcal{R}_\beta = \{\mathbf{o}\},$$

che esprime la proprietà di non ridondanza.

**Dim.** Se il sistema  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H \times \mathcal{F}$  è reattivo, la condizione di ortogonalità impone che, in corrispondenza di ogni suddivisione base  $\mathcal{T}(\Omega)$ , risulti

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v} \, da = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Se  $\overline{\mathcal{P}}$  è un elemento di  $\mathcal{T}(\Omega)$  i cinematismi  $\mathbf{v} \in C_o^\infty(\overline{\mathcal{P}})$  sono conformi e quindi si ha

$$\int_{\overline{\mathcal{P}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in C_o^\infty(\overline{\mathcal{P}}).$$

In virtù della continuità a pezzi di  $\mathbf{b}$  in ogni elemento di  $\mathcal{T}_{vf}(\Omega)$ , il lemma del calcolo delle variazioni assicura che  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$  in  $\Omega$ .

Si ottiene così la condizione variazionale

$$\int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v} \, da = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

In virtù della proposizione I.1.4 (p. 8), tale condizione equivale ad imporre che, in ogni punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{I}(\Omega)$  in cui le tensioni e le condizioni vincolari sono continue, sia soddisfatta la condizione locale di ortogonalità

$$\begin{vmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{t}_\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{v}_\beta \end{vmatrix} = \mathbf{t}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{t}_\beta \cdot \mathbf{v}_\beta = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{v}_\alpha \in \mathcal{V}_\alpha, \\ \forall \mathbf{v}_\beta \in \mathcal{V}_\beta, \\ \forall \mathbf{v}_{\alpha\beta} \in \mathcal{V}_{\alpha\beta}. \end{array} \right.$$

dove  $\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ .

Si consideri quindi nello spazio prodotto  $V \times V$  gli operatori duali  $\mathbf{G} \in L\{V \times V, V\}$  e  $\mathbf{G}' \in L\{V, V \times V\}$  definiti da

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G}' = \begin{vmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{vmatrix}.$$

La condizione di vincolo relativo si scrive allora

$$\mathbf{G} \begin{vmatrix} \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{v}_\beta \end{vmatrix} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta \in \mathcal{V}_{\alpha\beta} \iff \begin{vmatrix} \mathbf{v}_\alpha \\ \mathbf{v}_\beta \end{vmatrix} \in \mathbf{G}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta}.$$

Detto  $\mathcal{S}_{\alpha\beta} \subseteq V \times V$  il sottospazio  $\mathcal{S}_{\alpha\beta} := \mathbf{G}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta}$ , vale l'egualanza

$$[\mathbf{G}^{-1} \mathcal{V}_{\alpha\beta}]^\perp = \mathbf{G}' \mathcal{V}_{\alpha\beta}^\perp.$$

Dunque  $\mathcal{S}_{\alpha\beta}^\perp = \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta}$  e la condizione di ortogonalità assume la forma

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_\alpha \\ \boldsymbol{\rho}_\beta \end{vmatrix} \in [(\mathcal{V}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta) \cap \mathcal{S}_{\alpha\beta}]^\perp = [\mathcal{V}_\alpha \times \mathcal{V}_\beta]^\perp + \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\perp = [\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta] + \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta}.$$

Esistono dunque  $\boldsymbol{\rho}_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha$ ,  $\boldsymbol{\rho}_\beta \in \mathcal{R}_\beta$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}_{\alpha\beta}$ , tali che

$$\begin{vmatrix} \mathbf{t}_\alpha \\ \mathbf{t}_\beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_\alpha \\ \boldsymbol{\rho}_\beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} \end{vmatrix} \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} \iff \begin{cases} \mathbf{t}_\alpha = \boldsymbol{\rho}_\alpha + \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta}, \\ \mathbf{t}_\beta = \boldsymbol{\rho}_\beta - \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta}. \end{cases}$$

Viceversa tali condizioni implicano la condizione locale di ortogonalità e quindi *a fortiori* quella integrale.

L'unicità della rappresentazione richiede che

$$\begin{cases} \mathbf{t}_\alpha = \mathbf{o}, \\ \mathbf{t}_\beta = \mathbf{o}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\rho}_\alpha = \mathbf{o}, \\ \boldsymbol{\rho}_\beta = \mathbf{o}, \\ \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} = \mathbf{o}. \end{cases}$$

Essendo  $\text{Ker } \mathbf{G}' = \{\mathbf{o}\}$ , l'unicità della rappresentazione equivale a richiedere che la somma  $[\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta] + \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta}$  sia diretta e cioè che

$$[\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta] \cap \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \{\mathbf{o}\}.$$

Si osservi ora che, se  $\{\boldsymbol{\rho}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\beta\} \in [\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta] \cap \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta}$  allora esiste  $\boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} \in \mathcal{R}_{\alpha\beta}$  tale che

$$\begin{cases} \boldsymbol{\rho}_\alpha = -\boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} \in \mathcal{R}_{\alpha\beta} \cap \mathcal{R}_\alpha \\ \boldsymbol{\rho}_\beta = +\boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} \in \mathcal{R}_{\alpha\beta} \cap \mathcal{R}_\beta \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\rho}_\alpha, \boldsymbol{\rho}_\beta, \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} \in \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{\alpha\beta} \cap \mathcal{R}_\beta.$$

Viceversa, se  $\boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{\alpha\beta} \cap \mathcal{R}_\beta$ , ponendo

$$\boldsymbol{\rho}_\alpha = \boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho}_\beta = -\boldsymbol{\rho}, \quad \boldsymbol{\rho}_{\alpha\beta} = -\boldsymbol{\rho}$$

risulta  $\{\boldsymbol{\rho}, -\boldsymbol{\rho}\} \in [\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta] \cap \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta}$ . Sussite pertanto l'equivalenza

$$[\mathcal{R}_\alpha \times \mathcal{R}_\beta] \cap \mathbf{G}' \mathcal{R}_{\alpha\beta} = \{\mathbf{o}\} \iff \mathcal{R}_\alpha \cap \mathcal{R}_{\alpha\beta} \cap \mathcal{R}_\beta = \{\mathbf{o}\}.$$

La decomposizione è quindi unica se e solo se è soddisfatta la condizione di non ridondanza.  $\square$

La proprietà di ortogonalità ai cinematicismi conformi caratterizza completamente i sistemi di forze reattivi. In corrispondenza di una qualsiasi interfaccia  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \in \mathcal{I}(\Omega)$ , nei punti  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  nei punti che sono di continuità per le tensioni ed in cui non agiscono vincoli assoluti, sussiste la proprietà

$$\mathbf{t}_\alpha(\mathbf{x}) + \mathbf{t}_\beta(\mathbf{x}) = \mathbf{o},$$

caratteristica dei vincoli relativi e detta *principio locale di azione e reazione*.

### 14.10. Campi discontinui

Sia  $\mathcal{V}^0(\overline{\Omega})$  lo spazio lineare dei campi vettoriali continui a pezzi in  $\overline{\Omega}$ .

Ciò significa che per ogni campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0(\overline{\Omega})$  esiste una suddivisione  $\mathcal{T}_v^0(\Omega)$  di  $\Omega$  sui cui elementi il campo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0(\overline{\Omega})$  è continuo.

Analogamente si denoterà con  $\mathcal{W}^0(\overline{\Omega})$  lo spazio lineare dei campi tensoriali continui a pezzi in  $\overline{\Omega}$ .

Un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0(\overline{\Omega})$  è integrabile su ogni compatto in  $\Omega$  ed è quindi possibile definire la distribuzione ad esso associata mediante la formula

$$\mathbb{T}_{\mathbf{v}}(\varphi) := \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \varphi \, dv, \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

#### 14.10.1. Gradiente di campi discontinui

Per definire il gradiente della distribuzione  $\mathbb{T}_{\mathbf{v}} \in \mathbb{D}'(\Omega)$  l'idea è quella di far ricorso alla formula di GREEN per trasferire l'operazione di derivazione dal campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0(\overline{\Omega})$  ad un campo tensoriale  $\Phi \in \mathbb{D}(\Omega)$ .

- Il *gradiente generalizzato* o distribuzionale  $\boxed{\text{grad } \mathbb{T}_{\mathbf{v}}}$  di  $\mathbb{T}_{\mathbf{v}}$  viene definito mediante la condizione variazionale

$$(\text{grad } \mathbb{T}_{\mathbf{v}})(\Phi) := -\mathbb{T}_{\mathbf{v}}(\text{div } \Phi) = -\int_{\Omega} (\text{div } \Phi) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \Phi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Se il campo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0(\Omega)$  è di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  il gradiente può essere definito nel senso usuale. In tal caso per ogni  $\Phi \in \mathbb{D}(\Omega)$  risulta

$$(\text{grad } \mathbb{T}_{\mathbf{v}})(\Phi) = -\int_{\Omega} (\text{div } \Phi) \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\Omega} (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \Phi \, dv = \mathbb{T}_{\text{grad } \mathbf{v}}(\Phi),$$

e quindi

$$\text{grad } \mathbb{T}_{\mathbf{v}} = \mathbb{T}_{\text{grad } \mathbf{v}} = \text{grad } \mathbf{v},$$

per cui il gradiente distribuzionale coincide con quello usuale.

Si consideri ora lo spazio lineare  $\mathcal{V}^1(\Omega) \subset \mathcal{V}^0(\Omega)$  dei campi vettoriali che sono di classe  $C^1$  a pezzi in  $\Omega$ . Ciò significa che per ogni campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^1(\Omega)$  esiste una suddivisione  $\mathcal{T}_v^1(\Omega)$  di  $\Omega$  sui cui elementi il campo è di classe  $C^1$ .

- In generale il *gradiente distribuzionale* di un campo vettoriale discontinuo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^1(\Omega)$  è costituito da:

- una *parte regolare*, rappresentabile da un campo tensoriale continuo a pezzi in  $\Omega$ ,
- una *parte singolare* dovuta ai salti di discontinuità in corrispondenza delle interfacce tra gli elementi della suddivisione  $\mathcal{T}_v^1(\Omega)$ .

Più precisamente sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 14.5. Gradiente distribuzionale.** *Il gradiente di un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^1(\Omega)$  è costituito da un campo tensoriale  $\text{grad } \mathbf{v} \in \mathcal{D}^0(\Omega)$  continuo a pezzi in  $\Omega$  e da un campo vettoriale  $[[\Gamma \mathbf{v}]]$  continuo a pezzi sulle interfacce  $\mathcal{I}_v(\Omega)$  di una suddivisione  $\partial \mathcal{T}_v(\Omega)$ . Si ha quindi*

$$(\text{grad } \mathbb{T}_v)(\Phi) = \int_{\mathcal{T}_v(\Omega)} (\text{grad } \mathbf{v}) \cdot \Phi \, dv + \int_{\mathcal{I}_v(\Omega)} [[\Gamma \mathbf{v}]] \cdot \Phi \mathbf{n} \, da, \quad \forall \Phi \in \mathbb{D}(\Omega),$$

dove  $\Phi \in \mathbb{D}(\Omega)$  è un campo tensoriale e su ogni interfaccia  $\partial \mathcal{P}_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{I}_v(\Omega)$  si è posto  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\beta$  così che il salto di discontinuità è definito da

$$[[\Gamma \mathbf{v}]]_{\alpha\beta} := \Gamma \mathbf{v}_\alpha - \Gamma \mathbf{v}_\beta.$$

**Dim.** In ogni elemento  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  di  $\mathcal{T}_v^1(\Omega)$  il campo vettoriale  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^1(\Omega)$  è di classe  $C^1$ . Effettuando la trasformazione integrale di GREEN e sommando si ha che, per ogni campo tensoriale  $\Phi \in \mathbb{D}(\Omega)$ , risulta

$$-\sum_{\alpha=1}^n \int_{\mathcal{P}_\alpha} (\text{div } \Phi) \cdot \mathbf{v} \, dv = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\mathcal{P}_\alpha} \Phi : \text{grad } \mathbf{v} \, dv - \sum_{\alpha=1}^n \int_{\partial \mathcal{P}_\alpha} (\Phi \mathbf{n}_\alpha) \cdot \Gamma \mathbf{v} \, dv.$$

Dalla definizione di  $\text{grad } \mathbb{T}_v$  si evince quindi che

$$(\text{grad } \mathbb{T}_v)(\Phi) = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\mathcal{P}_\alpha} \Phi : \text{grad } \mathbf{v} \, dv - \sum_{\alpha=1}^n \int_{\partial \mathcal{P}_\alpha} (\Phi \mathbf{n}_\alpha) \cdot \Gamma \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \Phi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Osservando che  $\Phi$  è nulla sul contorno  $\partial \Omega$ , si sommino i contributi dei termini al contorno su tutte le interfacce di  $\mathcal{T}_v^1(\Omega)$ .

Poichè il flusso  $\Phi \mathbf{n}$  è continuo attraverso qualsiasi interfaccia, l'integrale può essere esteso solo all'insieme delle interfacce  $\mathcal{I}_v(\Omega)$  attraverso le quali vi è discontinuità di  $\Gamma \mathbf{v}$ .

Inoltre l'integrale al contorno su  $\mathcal{I}_v(\Omega)$  è nullo per ogni  $\Phi \in \mathbb{D}(\Omega)$  se e solo se il valore al contorno  $\Gamma \mathbf{v}$  è continuo attraverso qualsiasi interfaccia. Si supponga infatti che l'integrale al contorno sia nullo per ogni  $\Phi \in \mathbb{D}(\Omega)$  ed il salto di discontinuità  $[[\Gamma \mathbf{v}]]$  sia non nullo in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Esisterebbero allora

- un’interfaccia  $\partial\mathcal{P}_{12}$  tra due elementi  $\overline{\mathcal{P}}_1$  e  $\overline{\mathcal{P}}_2$  di  $\mathcal{T}_v^1(\Omega)$  con  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{12}$ ,
- un tensore  $\Phi \in \text{Lin}$ ,

tali che, ponendo  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ , risulta  $[\Gamma v_1(\mathbf{x}) - \Gamma v_2(\mathbf{x})] \cdot [\Phi \mathbf{n}(\mathbf{x})] \neq 0$ .

Per la continuità di  $v_1$  su  $\overline{\mathcal{P}}_1$  e di  $v_2$  su  $\overline{\mathcal{P}}_2$  esisterebbe allora

- un intorno  $I_{12}$  di  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{12}$ , contenuto  $\overline{\mathcal{P}}_1 \cup \overline{\mathcal{P}}_2$  e tale che

$$\int_{\partial I_{12}} [\Gamma v_1 - \Gamma v_2] \cdot \Phi \mathbf{n} \, dv = \int_{\partial \mathcal{T}_v(\Omega)} [[\Gamma v]] \cdot \Phi \mathbf{n} \, dv \neq 0.$$

dove  $\partial I_{12} = I_{12} \cap \partial\mathcal{P}_{12}$  e  $\Phi(\xi) = v_x(\xi) \Phi$  con  $v_x(\xi)$  mollificatore con supporto compatto in  $I_{12}$ .  $\square$

- Il campo  $\text{grad } v$  continuo a pezzi in  $\Omega$  costituisce la parte *regolare* del gradiente di  $v \in \mathcal{V}^1(\Omega)$ .
- Il campo  $[[\Gamma v]]$  continuo a pezzi su  $\partial\mathcal{T}_v(\Omega)$  costituisce la parte *singolare* del gradiente di  $v \in \mathcal{V}^1(\Omega)$ .

Dalla rappresentazione del gradiente distribuzionale si deduce che

**Proposizione 14.6. Regolarità del gradiente.** *Il gradiente distribuzionale  $\text{grad } \mathbb{T}_v$  di un cinematismo  $v \in \mathcal{V}^1(\Omega)$  è rappresentato da un campo tensoriale continuo a pezzi nel dominio  $\Omega$  se e solo se la parte singolare del gradiente è nulla e cioè se i valori al contorno  $\Gamma v$  di  $v \in \mathcal{V}^1(\Omega)$  sono continui attraverso ogni interfaccia in  $\Omega$ :*

$$\Gamma v|_\alpha(\mathbf{x}) = \Gamma v|_\beta(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}_{\alpha\beta},$$

dove  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  è una arbitraria interfaccia in  $\Omega$ .  $\square$

#### 14.10.2. Divergenza di campi discontinui

■ La divergenza generalizzata o distribuzionale  $\text{div } \mathbb{T}_T$  di un campo tensoriale  $T \in \mathcal{S}^1(\Omega)$  di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  a pezzi è definita dalla condizione variazionale

$$(\text{div } \mathbb{T}_T)(\varphi) := -\mathbb{T}_T(\text{grad } \varphi) = -\int_{\Omega} \mathbf{T} : \text{grad } \varphi \, dv \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega).$$

Se il campo  $\mathbf{T}$  è di classe  $C^1(\overline{\Omega})$  la divergenza distribuzionale coincide con quella usuale.

In analogia a quanto detto per il gradiente, anche la divergenza distribuzionale può essere decomposta in una parte regolare ed una singolare.

**Proposizione 14.7. Divergenza distribuzionale.** *La divergenza di un campo tensoriale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}^1(\Omega)$  è costituita da un campo vettoriale continuo a pezzi in  $\Omega$  e da un campo vettoriale  $-[[\mathbf{T}\mathbf{n}]]$  continuo a pezzi sulle interfacce  $\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\Omega)$  di una suddivisione  $\partial\mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega)$*

$$(\operatorname{div} \mathbb{T}_{\mathbf{T}})(\varphi) = \int_{\mathcal{T}_{\mathbf{T}}(\Omega)} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \cdot \varphi \, dv + \int_{\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\Omega)} [[\mathbf{T}\mathbf{n}]] \cdot \Gamma \varphi \, da \quad \forall \varphi \in \mathbb{D}(\Omega),$$

dove  $\varphi$  è un campo vettoriale ed il termine al contorno è definito dal salto di discontinuità

$$[[\mathbf{T}\mathbf{n}]]_{\alpha\beta} = (\mathbf{T}_\alpha - \mathbf{T}_\beta) [\mathbf{n}] = -(\mathbf{T}_\alpha \mathbf{n}_\alpha + \mathbf{T}_\beta \mathbf{n}_\beta),$$

avendo posto  $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_\alpha = \mathbf{n}_\beta$  su ogni interfaccia  $\partial\mathcal{P}_{\alpha\beta} \subseteq \mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\Omega)$ .  $\square$

Dalla rappresentazione della divergenza distribuzionale si deduce che

**Proposizione 14.8. Regolarità della divergenza.** *La divergenza  $\operatorname{div} \mathbf{T}$  di uno stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}^1(\Omega)$  è un campo vettoriale continuo a pezzi in un elemento  $\overline{\mathcal{P}} \subseteq \Omega$  se e solo se la parte singolare della divergenza è nulla e cioè se i valori al contorno  $\mathbf{T}\mathbf{n}$  dello stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}^1(\Omega)$  sono continui attraverso ogni interfaccia in  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$ .*  $\square$

#### 14.10.3. Deformazione tangente distribuzionale

Nel continuo di CAUCHY, in accordo alla condizione di EULER discussa nella sezione I.9.4 (p. 83), la deformazione tangente corrispondente ad un cinematzismo  $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})$  è il campo tensoriale definito da  $\mathbf{Bv} = \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{v} \in C^0(\overline{\Omega})$ .

Allora ad un cinematzismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^0(\overline{\Omega})$  continuo a pezzi in  $\Omega$ , corrisponde una *deformazione tangente distribuzionale*  $\mathbb{BT}_{\mathbf{v}}$  definita da

$$(\mathbb{BT}_{\mathbf{v}})(\Phi) := -\mathbb{T}_{\mathbf{v}}(\operatorname{div} \Phi) = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \Phi) \cdot \mathbf{v} \, dv \quad \forall \Phi \in \mathbb{D}_{\mathcal{S}}(\Omega),$$

dove  $\mathbb{D}_{\mathcal{S}}(\Omega) = \mathbb{D}(\Omega) \cap \operatorname{Sym}$  denota lo spazio lineare dei campi tensoriali simmetrici appartenenti a  $C_o^\infty(\overline{\Omega})$ .

La deformazione tangente distribuzionale  $\mathbb{BT}_{\mathbf{v}}$  corrispondente ad un cinematzismo discontinuo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}^1(\overline{\Omega})$  è costituita da una parte regolare e da una singolare, secondo la formula

$$(\mathbb{BT}_{\mathbf{v}})(\Phi) = \int_{\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)} (\mathbf{Bv}) \cdot \Phi \, dv + \int_{\mathcal{I}_{\mathbf{v}}(\Omega)} [[\Gamma \mathbf{v}]] \cdot \Phi \mathbf{n} \, da \quad \forall \Phi \in \mathbb{D}_{\mathcal{S}}(\Omega).$$

I salti di discontinuità dei valori al contorno di un cinematismo possono quindi essere considerati come atti di deformazione singolari.

Nella dimostrazione della proposizione 14.5 è possibile scegliere  $\Phi \in \text{Sym}$  e quindi vale il seguente risultato.

**Proposizione 14.9. Atti di deformazione regolari.** *L'atto di deformazione distribuzionale  $\text{sym grad } \mathbb{T}_v$  corrispondente ad un cinematismo  $v \in \mathcal{V}^1(\overline{\Omega})$  è rappresentato da un campo tensoriale continuo a pezzi in  $\Omega$  se e solo se i valori al contorno  $\Gamma v$  del cinematismo  $v \in \mathcal{V}^1(\overline{\Omega})$  sono continui attraverso ogni interfaccia giacente nel dominio  $\Omega$ .*  $\square$

## RIFERIMENTI

1. I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London 3rd ed. (1687).
2. L. EULER, Découverte d'un nouveau principe de mécanique, *Mem. Acad. Sci. Berlin* **6**, 185-217 (1776) *Opera Omnia* (2) **5**, 81-108 (1827).
3. L. EULER, *Formulæ generales pro translazione quacunque corporum rigidorum*, *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **20**, 189-207 (1776).
4. A.L. CAUCHY, Reserches sur l'équilibre et le movement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, *Bull. Soc. Philomath.*, 9-13 = Œuvres (2) **2**, 300-304 (1823).
5. A.L. CAUCHY, De la pression ou tension dans un corps solide, *Ex. de Mathématique* **2**, 42-56 = Œuvres (2) **7**, 60-78 (1827).
6. A.L. CAUCHY, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique, *Ex. de Mathématique*, **3**, 160-187 = Œuvres (2) **8**, 195-226 (1828).
7. G. PIOLA, La meccanica dei corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni, *Opusc. Mat. Fis. di Diversi Autori*, Giusti, Milano, **2**, 201-236 (1833).
8. G. PIOLA, Nouva analisi per tutte le questioni della meccanica, *Mem. Mat. Fis. Soc. Ital. Modena*, **24**, 1-186 (1845).
9. G. KIRCHHOFF, Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen verschreibungen seiner Theile, *Sitzgsber Akad. Wiss. Wien*, **9**, 762-7773 (1852).
10. G.B. AIRY, On the strains in the interior of beams, *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond.*, **153**, 49-80 (1863).
11. L. DONATI, Illustrazione al Teorema di Menabrea, *Mem. Accad. Sci. Bologna*, (4) **10**, 267-274 (1890).
12. E. BELTRAMI, Osservazioni sulla nota precedente, *Atti Acad. Lincei Rend.*, (5) **1**, 141-142 = Opere **4**, 510-512 (1892).
13. A. KORN, Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche. *Acad. Wiss., München, Math. phys.*, **36**, 351-402 (1906).
14. E., F. COSSERAT, Sur la mécanique générale. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **145**, 1139-1142 (1907).
15. A. KORN, Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de elasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, (2) **10**, 156-269. (1908).
16. E., F. COSSERAT, Théorie des Corps déformables, Hermann, Paris (1909).
17. S. BANACH, Théorie des Opérations Linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw (1932). Reprinted by Chelsea, New York (1955)
18. A. SIGNORINI, Sopra alcune questioni di statica dei sistemi continui, *Ann. Scuola Normale di Pisa.*, **2**, 231-257 (1933).
19. S.L. SOBOLEV, Sur un théorème d'analyse fonctionnelle., *Math. Sbornik*, **45**, 471-496 (1938).
20. L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, vol. I et II, Hermann, Paris (1950, 1951).

21. H. SCHAEFER, Die Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums und des elastischen Körpers, *Z. Angew. Math. Mech.*, **33**, 356-362 (1953).
22. G. GRIOLI, Elasticità Asimmetrica. *Ann. di Mat. Pura ed Appl. Ser. IV*, **50**, 389-417 (1960).
23. C. TRUESDELL, R.A. TOUPIN, The Classical Field Theories. *Handbuch der Physik III/I* Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (1960).
24. M.E. GURTIN, A generalization of the Beltrami stress functions in continuum mechanics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **13**, 321-329 (1963).
25. N. MEYERS, J. SERRIN,  $H = W$ , *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **51**, 1055-1056 (1964).
26. R.D. MINDLIN, Micro-structures in Linear Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16**, (1964).
27. R.D. MINDLIN, H.F. TIERSTEN, Effects of Couple Stresses in Linear Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, 415-448, (1964).
28. A.C. ERINGEN, E.S. ŞUHUBİ, Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids I & II, *Int. J. Engrg. Sci.*, **2**, 189-203 & 389-404 (1964).
29. D. CARLSON, A note on the Beltrami stress functions, *Z. Angew. Math. Mech.*, **47**, 206-207 (1967).
30. W.H. GREUB, Linear Algebra, Springer-Verlag, New York (1967).
31. J. NEČAS, Les Méthodes Directes en Théorie des Équations Elliptiques, Masson, Paris (1967).
32. G. FICHERA, Existence Theorems in Elasticity, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIa/2, 347-388 Springer-Verlag, New York (1972).
33. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIa/2, , 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).
34. G. DUVAUT, J.L. LIONS, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verlag, New York (1976), tradotto da *Les inéquations en mécanique et en Physique* Dunod, Paris (1972).
35. K. YOSIDA, Functional Analysis, 4<sup>th</sup> Ed. Springer-Verlag, New York (1974).
36. R.A. ADAMS, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975).
37. F. BREZZI , L.D. MARINI (1975) On the numerical solution of plate bending problems by hybrid methods, *R.A.I.R.O Ser. Rouge Anal. Numér.* **R-3**, 5-50.
38. A.C. ERINGEN, C.B. KAFADAR, Polar Field Theories, *Continuum Physics*, vol. IV, Ed. Cemal Eringen, Academic Press, New York (1976).
39. P.G. CIARLET, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, Amsterdam (1978).
40. M.E. GURTIN, An Introduction to Continuum Mechanics, Academic Press, San Diego (1981).
41. H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson Editeur, Paris (1983).
42. J.E. MARSDEN, T.J.R. HUGHES, Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice-Hall, Redwood City, Cal. (1983).
43. R. TEMAM, Problèmes Mathématiques en Plasticité, Gauthiers Villars, Paris (1983).

44. R. ABRAHAM, J.E. MARSDEN, T. RATIU, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, second edition, Springer Verlag, New York (1988).
45. F. BREZZI, M. FORTIN, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer Verlag, New York (1991).
46. G. ROMANO, On the necessity of Korn's inequality, *Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, STAMM 2000, National University of Ireland, Galway, July 9th-14th (2000).
47. G. ROMANO Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Univ. Napoli Fed. II, (2000).
48. G. ROMANO Theory of structural models, Part II, Structural models, Univ. Napoli Federico II, (2000).
49. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Napoli (2001).
50. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo II, Hevelius, Benevento (2001).

+

+

+

+

## III – STATO TENSIONALE PUNTUALE

In questo capitolo è illustrata la classica teoria di CAUCHY concernente l'equilibrio di un continuo e sono descritte in dettaglio le proprietà dello stato tensionale puntuale.

Nel capitolo II è stato adottato un approccio più moderno e generale che consente di dimostrare l'esistenza di uno stato tensionale corrispondente ad un sistema di forze attive in equilibrio.

Per completezza è comunque opportuno illustrare anche la trattazione classica.

Nella sezione 1 sono presentati i teoremi fondamentali dovuti a CAUCHY mentre nella sezione 2 (p. 325) è sviluppata un'idea originale concernente la formulazione della cinematica del continuo seguendo un approccio complementare a quello classico di CAUCHY.

La trattazione complementare consente di dimostrare che, basandosi su un principio di sezionamento cinematico e su di un postulato cinematico, è possibile dedurre l'esistenza di un cinematismo compatibile con un sistema di atti di deformazione e di cedimento impressi ad una struttura continua.

Nella sezione 3 (p. 330) sono poi descritte le principali proprietà dello stato tensionale puntuale ed infine nella sezione 4 (p. 343) è illustrata, con una trattazione originale, la rappresentazione grafica dello stato tensionale dovuta a MOHR e nota come *cerchio di MOHR*.

Come classica applicazione del cerchio di MOHR si deducono le espressioni della spinta attiva e passiva secondo RANKINE di un terrapieno con comportamento limite alla COULOMB.

### 1. TEORIA DI CAUCHY

I fondamenti della moderna meccanica del continuo sono stati posti da AUGUSTIN LOUIS CAUCHY [5, 6, 4] a partire dal 1822.

CAUCHY sviluppò una brillante trattazione mediante la quale, sulla base del principio di sezionamento statico e di un postulato statico, dimostrò l'esistenza di uno stato tensionale che descrive l'interazione di contatto tra parti del corpo continuo soggetto ad un sistema di forze in equilibrio.

La trattazione di CAUCHY è stata riprodotta senza eccezioni in tutti i trattati ed i libri di testo di meccanica dei continui redatti sino ad oggi.

L'unica notevole eccezione è costituita dall'interessante variante del metodo proposta da WALTER NOLL nel 1967 (vedi [10] pag. 48) e riprodotto in questo volume alla sezione 1.4 (p. 319).

Ad EULER e CAUCHY è dovuta la formulazione di un fondamentale assunto noto come *principio di sezionamento* della statica che si enuncia come segue.

- Se una struttura continua è in equilibrio sotto l'azione di un sistema di forze attive e reattive, allora ogni sottostruttura risulta in equilibrio sotto l'azione delle forze attive e reattive che agiscono su di essa.

Per inquadrare il principio di sezionamento nel contesto metodologico sviluppato nel capitolo II, si consideri una struttura soggetta ad un sistema di forze attive in equilibrio. Il teorema della potenza virtuale, proposizione II.6.4 (p. 215) assicura allora che esiste uno stato tensionale in equilibrio con il sistema di forze attive.

Ogni siffatto stato tensionale consente allora di determinare un sistema reattivo di contatto che insieme alle forze attive costituisce un sistema di forze in equilibrio sulla struttura non vincolata (vedasi sezione II.6.4 (p. 216)).

Se le forze attive sono costituite da campi di forze di massa e da forze di contatto superficiale, il teorema astratto di CAUCHY, proposizione II.7.2 (p. 225), mostra quindi che i sistemi reattivi sono costituiti, in corrispondenza di una suddivisione del dominio strutturale, da campi di forze di contatto agenti sulla frontiera della suddivisione e che il flusso dello stato tensionale attraverso tale frontiera è pari alla somma delle forze attive e reattive ivi agenti.

L'*assioma di riproducibilità* introdotto nella sezione II.2 (p. 175) con riferimento alla definizione dello spazio cinematico, assicura inoltre che è possibile considerare cinematici rigidi semplici di qualsiasi sottostruttura rispetto alla struttura complementare. Ciò implica la validità del principio di sezionamento della statica.

### 1.1. Postulato di Cauchy

Il punto di vista di CAUCHY fu necessariamente diverso in quanto egli non disponeva dell'apparato matematico fornito dalla moderna analisi funzionale.

In particolare all'epoca di CAUCHY non esisteva la teoria degli spazi normati completi e quella degli spazi di HILBERT e degli spazi di SOBOLEV e non erano ancora stati stabiliti il teorema dell'immagine chiusa e la diseguaglianza di KORN che hanno consentito di dimostrare il teorema dei lavori virtuali enunciato nella proposizione II.6.4 (p. 215).

La dimostrazione dell'esistenza di uno stato tensionale  $T \in \mathcal{S}$  in  $\Omega$  in equilibrio con un sistema di forze assegnato, fu condotta da CAUCHY sulla base di un postulato che porta il suo nome.

Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  un’arbitraria suddivisione di  $\Omega$ . Le azioni di contatto  $t_n$  sul contorno  $\partial\mathcal{P}$  di un qualsiasi elemento  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$  sono funzioni del punto  $x \in \partial\mathcal{P}$  e del versore normale  $n$  uscente da  $\mathcal{P}$ :

$$t_n = t(x, n).$$

Inoltre per ogni fissato versore  $n \in V$  la funzione  $t(x, n)$  è di classe  $C^1(\Omega)$  a pezzi, con supporto  $\mathcal{T}(\Omega)$ .

*Postulato  
di Cauchy*

**Osservazione 1.1.** In letteratura il postulato di CAUCHY viene formulato assumendo che le tensioni di contatto  $t_P$  siano continue e derivabili rispetto alla posizione  $x \in \Omega$  per ogni versore  $n \in V$ . Sono in tal modo esclusi dalla trattazione gli stati tensionali discontinui, peraltro usuali nelle applicazioni. ■

## 1.2. Lemma di Cauchy

Il postulato di CAUCHY consente di dedurre l’esistenza di uno stato tensionale compatibile con un sistema di forze esterne in equilibrio.

Il primo passo consiste nel dimostrare la validità del principio locale di azione e reazione.

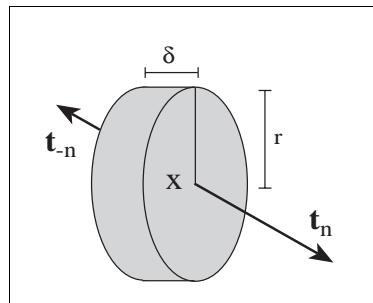


Fig. 1.1

Si consideri un elemento  $\bar{\mathcal{P}}$  contenuto nella suddivisione di supporto  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Per definizione ciò significa che la funzione  $t(x, n)$  è continua in  $\bar{\mathcal{P}}$ . Si disegni quindi un disco circolare  $\bar{\mathcal{P}}_x$  interno a  $\mathcal{P}$ , con centro in  $x$ , raggio  $r$  e spessore  $\delta$ . Siano  $n$  e  $-n$  le normali uscenti dalle facce opposte del disco. Si denotino con  $t_n$  e  $t_{-n}$  i valori medi delle tensioni sulle due facce di normali  $n$  e  $-n$  e di area  $A$ ,

Denotando con

- $\partial\mathcal{P}_{LAT}$  la superficie laterale del disco,  $A_{LAT}$  la sua area e  $t_{LAT}$  la tensione agente su di essa,
- $b$  il campo di forze di massa,

la condizione di equilibrio alla traslazione del disco è

$$(t_n + t_{-n}) A + \int_{\mathcal{P}_x} b dv + \int_{\partial\mathcal{P}_{LAT}} t_{LAT} da = \mathbf{0}.$$

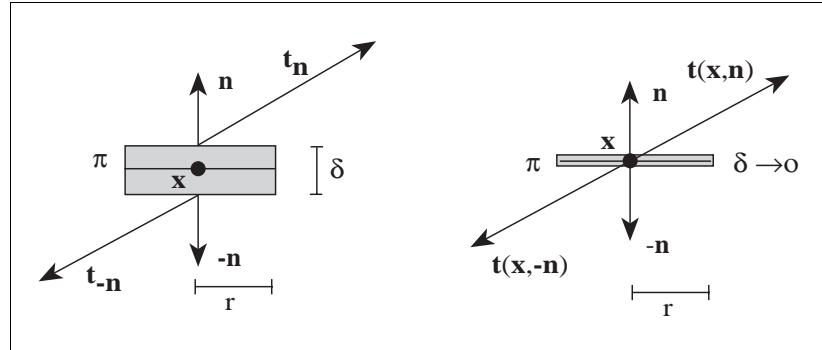
I campi di forze di massa  $\mathbf{b}$  e di tensione  $\mathbf{t}_{\text{LAT}}$  sono per ipotesi limitate. Facendo allora tendere a zero lo spessore del disco, si ottiene

$$(\mathbf{t}_n + \mathbf{t}_{-n}) A = \mathbf{o}.$$

Osservando poi che l'orientazione ed il raggio del disco sono arbitrari e che il campo di tensione è continuo, il lemma del valor medio, proposizione I.1.5 (p. 9), conduce all'eguaglianza

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n}),$$

che esprime il *principio locale di azione e reazione*.



### 1.3. Teorema fondamentale di Cauchy

E' ora possibile dimostrare l'esistenza di uno stato tensionale.

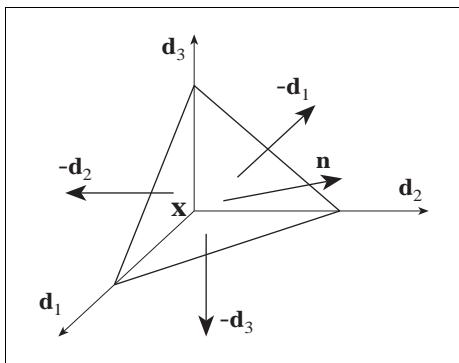
Si fissi un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  e si consideri un elemento  $\mathcal{P}_x$  a forma di tetraedro, contenuto in  $\mathcal{P}$  e con vertice in  $\mathbf{x}$ .

Tre facce sono parallele ai piani coordinati con normali uscenti pari a  $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$  e la quarta faccia ha giacitura definita da una normale uscente  $\mathbf{n}$  non parallela agli assi coordinati.

In virtù del principio di azione e reazione, sulle tre facce di normale  $\mathbf{e}_i$  ed area  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) agiscono le tensioni medie  $-\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Sulla faccia di normale  $\mathbf{n}$  ed area  $A$  agisce la tensione media  $\mathbf{t}_n$ . Nel dominio di volume  $V$  agisce la forza di massa media  $\mathbf{b}$ .

La condizione di equilibrio alla traslazione del tetraedro  $\mathcal{P}_x$  è espressa da

$$\mathbf{t}_n A - \mathbf{t}_1 A_1 - \mathbf{t}_2 A_2 - \mathbf{t}_3 A_3 + \mathbf{b} V = \mathbf{o}.$$



Tetraedro di CAUCHY.

Si osservi ora che

$$A_i = An_i \quad \{i = 1, 2, 3\}, \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{3}Ah,$$

dove  $n_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \quad \{i = 1, 2, 3\}$  sono le componenti del versore normale  $\mathbf{n}$ .

La condizione di equilibrio può dunque risciversi nella forma

$$(\mathbf{t}_n - \mathbf{t}_1 n_1 - \mathbf{t}_2 n_2 - \mathbf{t}_3 n_3)A + \mathbf{b}V = \mathbf{o}.$$

Si contragga il tetraedro attorno ad  $x$  facendo tendere a zero l'altezza  $h$ .

Dividendo per  $A$  e passando al limite si ottiene

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) - \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_1)n_1 - \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_2)n_2 - \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_3)n_3 = \mathbf{o}$$

e quindi

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) = \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_1)n_1 + \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_2)n_2 + \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_3)n_3.$$

Si può pertanto concludere che

$$\mathbf{t}(x, \mathbf{n}) = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}) \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_i) = \mathbf{T}(x)\mathbf{n},$$

con

$$\mathbf{T}(x) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(x, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i.$$

Il risultato ottenuto dimostra l'esistenza del tensore dello stato tensionale puntuale ed è noto come *teorema fondamentale di CAUCHY*.

In virtù della proprietà di regolarità assunta nel postulato di CAUCHY, il tensore  $\mathbf{T}(x)$  dello stato tensionale risulta essere di classe  $C^1(\Omega)$  a pezzi.

#### 1.4. Variante di Noll

Una diversa procedura per condurre la dimostrazione dell'esistenza dello stato tensionale è stata proposta da WALTER NOLL nel 1967 (vedi [10] pag. 48).

Si delimiti nel corpo  $\Omega$  un elemento  $\mathcal{P}_x$  a forma di *prisma triangolare* di lunghezza  $\delta$  in cui due facce laterali hanno area eguale  $A$ , normali uscenti  $\{-\mathbf{n}_1, -\mathbf{n}_2\}$  e si intersecano in uno spigolo cui appartiene il punto  $x$ .

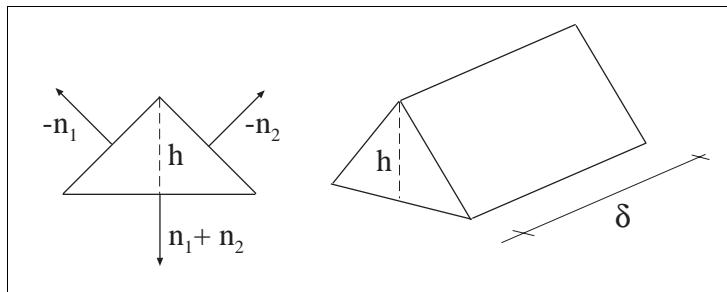
La terza faccia laterale ha area  $A_n$  e normale uscente

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2}{\|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\|}.$$

Detta  $h$  l'altezza relativa alla faccia  $A_n$  il volume  $V$  è dato da

$$V = \frac{1}{2} A_n h,$$

e le due facce terminali  $s_1$  e  $s_2$  del prisma hanno area  $A_s = V/\delta$ .



*Il prisma di NOLL*

La condizione di equilibrio alla traslazione del prisma  $\mathcal{P}_x$  fornisce

$$\mathbf{t}_n A_n + \mathbf{t}_{-\mathbf{n}_1} A + \mathbf{t}_{-\mathbf{n}_2} A + \mathbf{b} V + (\mathbf{t}_{s_1} + \mathbf{t}_{s_2}) A_s = \mathbf{0},$$

che, in virtù della proprietà  $\mathbf{t}_{-\mathbf{n}}(x) = -\mathbf{t}_n(x)$  derivante dall'equilibrio alla traslazione del *disco circolare*, si riscrive

$$\mathbf{t}_n A_n - \mathbf{t}_{\mathbf{n}_1} A - \mathbf{t}_{\mathbf{n}_2} A + \mathbf{b} V + (\mathbf{t}_{s_1} + \mathbf{t}_{s_2}) A_s = \mathbf{0}.$$

Dividendo quindi per  $A$  ed osservando che

$$A_n = A \|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\|,$$

si ottiene

$$\mathbf{t}_n \|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\| - \mathbf{t}_{\mathbf{n}_1} - \mathbf{t}_{\mathbf{n}_2} + \mathbf{b} \frac{V}{A} + (\mathbf{t}_{s_1} + \mathbf{t}_{s_2}) \frac{A_s}{A} = \mathbf{0}.$$

Ora risulta

$$V \propto h^2 \delta, \quad A \propto h \delta, \quad A_s \propto h^2,$$

dove il simbolo  $\propto$  significa "è proporzionale a".

Contraendo il prisma attorno ad  $\mathbf{x}$  facendo tendere a zero l'altezza  $h$  secondo la legge  $h = \delta^2$ , passando al limite e applicando il lemma del valor medio, si ottiene

$$\|\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2\| \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2).$$

Definendo per omogeneità

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \alpha \mathbf{n}) := \alpha \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

la relazione precedente si può scrivere

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_1) + \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}_2).$$

La funzione  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \cdot)$  che in ogni punto  $\mathbf{x}$  associa al vettore  $\mathbf{n}$  la tensione agente sulla giacitura di normale  $\mathbf{n}$  gode quindi anche della proprietà di additività.

La funzione  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \cdot)$  può pertanto considerarsi come la restrizione alla sfera unitaria di una funzione lineare. Essa rappresenta quindi il tensore dello stato tensionale  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

## 1.5. Verifica dell'equilibrio

Si mostra ora che il principio di sezionamento statico ed il postulato di CAUCHY consentono di dimostrare che lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  in  $\Omega$  soddisfa le equazioni di equilibrio di CAUCHY.

### ■ Equazione differenziale di equilibrio

L'equazione differenziale di equilibrio interno si deduce imponendo l'equilibrio alla traslazione di un arbitrario elemento  $\bar{\mathcal{P}}$  in  $\Omega$  in cui la forza di massa  $\mathbf{b}$  è continua e lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  è di classe  $C^1$ .

Denotando con  $\mathbf{t}_{\mathcal{P}}$  le forze di contatto agenti sulla frontiera  $\partial\mathcal{P}$  di  $\mathcal{P}$ , il principio di sezionamento impone che deve essere soddisfatto l'equilibrio alla traslazione

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}_{\mathcal{P}} \, da + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \, dv = \mathbf{o},$$

ed il teorema della divergenza fornisce l'eguaglianza

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{T} \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv.$$



Il teorema fondamentale di CAUCHY assicura che  $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}$  su  $\partial\mathcal{P}$  e pertanto la condizione di equilibrio impone che

$$\int_{\mathcal{P}} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b}) \, dv = \mathbf{o}.$$

Data l'arbitrarietà dell'elemento  $\overline{\mathcal{P}}$ , in forza del lemma I.1.5 (p. 9), deve risultare

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}, \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

e quindi l'equazione di equilibrio interno è soddisfatta nei punti di regolarità.

### ■ Simmetria dello stato tensionale

Dal principio di sezionamento e dall'ipotesi che non agiscano sul corpo coppie di massa distribuite per unità di volume, consegue anche la simmetria del tensore dello stato tensionale.

Il risultato si ottiene imponendo l'equilibrio alla rotazione, attorno all'origine del riferimento, di un arbitrario elemento  $\overline{\mathcal{P}}$  di  $\Omega$  in cui lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  è di classe  $C^1$

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{t}_{\mathcal{P}} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, da + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) \, dv = \mathbf{O}, \quad \forall \boldsymbol{\Omega} \text{ antisimmetrica}.$$

Essendo  $\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega} * (\mathbf{u} \otimes \mathbf{x}) = \boldsymbol{\Omega} * \operatorname{emi}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{x})$  si ottiene che

$$\int_{\partial\mathcal{P}} \operatorname{emi}(\mathbf{T}\mathbf{n} \otimes \mathbf{x}) \, da + \int_{\mathcal{P}} \operatorname{emi}(\mathbf{b} \otimes \mathbf{x}) \, dv = \mathbf{O}.$$

Il teorema della divergenza fornisce la trasformazione

$$\int_{\partial\mathcal{P}} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \otimes \mathbf{x} \, da = \int_{\mathcal{P}} (\operatorname{div} \mathbf{T}) \otimes \mathbf{x} \, dv + \int_{\mathcal{P}} \mathbf{T} \, dv.$$

Eguagliando allora le parti emisimmetriche e tenendo conto che l'equazione differenziale di equilibrio assicura che  $\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$  essenzialmente in  $\Omega$ , si ottiene

$$\int_{\mathcal{P}} \operatorname{emi} \mathbf{T} \, dv = \mathbf{O}.$$

Data l'arbitrarietà dell'elemento  $\overline{\mathcal{P}}$  dovrà quindi risultare

$$\operatorname{emi} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

e pertanto il tensore dello stato di tensione deve essere simmetrico.

### ■ Equazione di equilibrio al contorno

La condizione di equilibrio sul contorno può essere dedotta considerando un elemento  $\overline{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}_f(\Omega)$  ed un discoide  $\overline{\mathcal{P}}_x$  ottenuto traslando un tratto regolare  $S$  del contorno  $\partial\mathcal{P}$  verso l'interno di  $\mathcal{P}$  di una quantità positiva  $\varepsilon$ .

Denotando con  $S^+$  e con  $x^+$  i traslati di  $S$  e  $x$ , come mostrato in figura 1.2, la condizione di equilibrio alla traslazione del discoide si scrive

$$\int_{S^+} \mathbf{t}(x^+, -n) da + \int_S \mathbf{t}_S(x) da + \int_{\mathcal{P}_x} \mathbf{b} dv + \int_{\partial\mathcal{P}_{LAT}} \mathbf{t}_{LAT} da = \mathbf{o}.$$

Ricordando che le forze di massa  $\mathbf{b}$  e le tensioni  $\mathbf{t}_{LAT}$  sono limitate e passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene

$$\int_S [\mathbf{t}(x, -n) + \mathbf{t}_S(x)] da = \mathbf{o}.$$

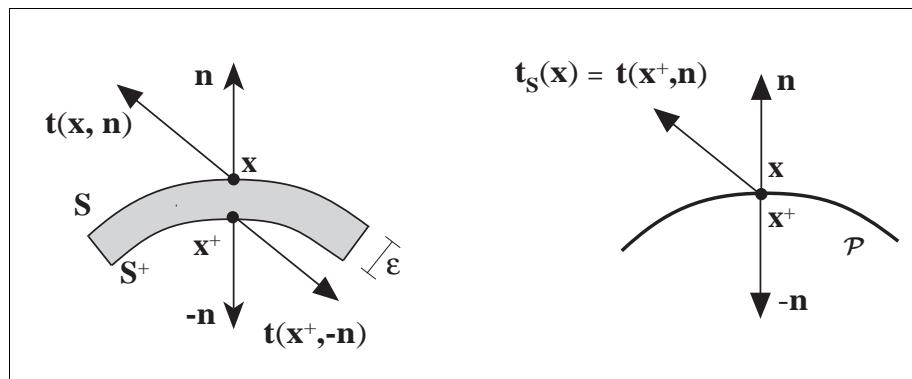


Fig. 1.2

Data l'arbitrarietà della parte  $\mathcal{P}$  si conclude che, per ogni suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  deve risultare

$$\mathbf{t}(x, -n) + \mathbf{t}_S(x) = \mathbf{o}, \quad x \in \partial\mathcal{T}(\Omega),$$

e quindi, in virtù del principio locale di azione e reazione

$$\mathbf{t}(x, n) = \mathbf{t}_S(x), \quad x \in \partial\mathcal{T}(\Omega).$$

Il teorema di CAUCHY assicura infine che

$$(\mathbf{T}n)(x) = \mathbf{t}(x, n) = \mathbf{t}_S(x), \quad x \in \partial\mathcal{T}(\Omega).$$

E' quindi soddisfatta la condizione di equilibrio al contorno.

**Osservazione 1.2.** Nella forma locale il principio di azione e reazione non ha validità generale in quanto può cadere in difetto nei punti che appartengono ad una superficie di discontinuità dello stato tensionale, anche in assenza di tensioni esterne su di essa applicate.

In tali punti risultano tra loro opposte solo le tensioni agenti sulle due facce della interfaccia di discontinuità.

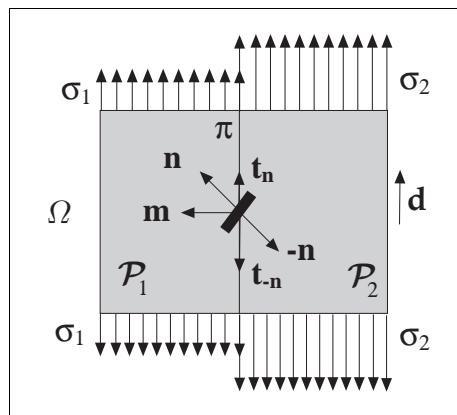
Si consideri infatti l'esempio mostrato in figura 1.3.

Le tensioni agenti sulle due facce del disco di normali  $\mathbf{n}$  e  $-\mathbf{n}$  inclinate di  $\pi/4$  rispetto alla normale  $\mathbf{m}$  alla superficie di discontinuità  $S_{12}$  valgono

$$\mathbf{t}_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 \mathbf{d}, \quad \mathbf{t}_{-n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_2 \mathbf{d},$$

e quindi risulta

$$\mathbf{t}_n + \mathbf{t}_{-n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_2) \mathbf{d} \neq \mathbf{0}.$$



La forma locale del principio di azione e reazione può cadere in difetto

$$\mathbf{t}_{-n} \neq -\mathbf{t}_n.$$

Fig. 1.3

Nella forma globale il principio di azione e reazione è invece sempre valido.

Infatti le risultanti delle azioni sulle due facce opposte di una qualsiasi superficie regolare  $S$  in  $\Omega$  sono gli integrali su  $S$  delle tensioni  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  e  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{n})$ , definite per continuità sulle facce di normali  $\mathbf{n}$  e  $-\mathbf{n}$ .

La forma locale del principio di azione e reazione può cadere in difetto solo in corrispondenza dell'insieme dei punti  $\mathbf{x}$  in cui  $S$  interseca superfici di discontinuità.

Tale insieme ha però misura superficiale nulla e pertanto i due integrali risulteranno eguali e di segno opposto. ■

## 2. TEORIA COMPLEMENTARE

E' possibile sviluppare una trattazione complementare a quella di CAUCHY.

Essa si basa sul principio di sezionamento cinematico e su di un postulato cinematico e permette di dimostrare l'esistenza di un cinematismo compatibile con un sistema congruente di atti di deformazione e di cedimenti vincolari.

Si enuncia un *principio di sezionamento cinematico* complementare di quello di EULER-CAUCHY formulato nella sezione 1 (p. 315).

Sia  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\}$  un sistema cinematico congruente, costituito da una deformazione tangente  $\mathbf{D}$  e da un atto di cedimento  $\partial\mathbf{w}$ . Risulta allora congruente anche il sistema cinematico che interessa una qualsiasi sottostruttura.

*Principio di sezionamento cinematico.*

La congruenza di un assegnato sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\}$  sulla sottostruttura  $\mathcal{M}(\mathcal{P})$ , posto  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ , è espressa dalla condizione variazionale

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{T} * \mathbf{D} \, dv = \int_{\partial\mathcal{T}(\mathcal{P})} (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot (\Gamma\mathbf{w} + \Gamma\mathbf{v}_o) \, da, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathcal{S}_o(\mathcal{P}),$$

nella quale i campi di prova  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_o(\mathcal{P})$  sono stati tensionali a divergenza nulla a pezzi in  $\mathcal{P}$ . Nella condizione variazionale compare il valore al contorno  $\Gamma\mathbf{v}_o$  di un cinematismo conforme  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  sulla frontiera  $\partial\mathcal{P}$  di  $\mathcal{P}$ .

Come si è mostrato nel capitolo II, sezione II.8 (p. 233), la validità del principio di sezionamento cinematico è conseguenza della condizione variazionale di congruenza.

La dimostrazione dell'esistenza di un cinematismo  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  in  $\Omega$  congruente con un sistema cinematico assegnato è basata su un postulato duale di CAUCHY.

### 2.1. Postulato cinematico

La trattazione che segue è una originale estensione per dualità della metodologia di CAUCHY relativa alla statica dei continui.

In essa si mostra come il principio di sezionamento cinematico consente di stabilire l'esistenza di un cinematismo ammissibile e compatibile con un assegnato sistema cinematico congruente.

Si consideri la struttura soggetta ad un sistema cinematico  $\{\mathbf{D}, \mathbf{w}\}$  che soddisfa le equazioni di congruenza e si assuma la validità del seguente postulato.

Sia  $\mathcal{T}(\Omega)$  un’arbitraria suddivisione di  $\Omega$ . I cinematismi  $\mathbf{v}_P$  dei punti del contorno  $\mathcal{P}$  di un qualsiasi elemento  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$  sono assunti essere funzioni del punto  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{P}$  e del versore  $\mathbf{n}$  normale uscente da  $\mathcal{P}$

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n}).$$

Per ogni fissato  $\mathbf{n}$  la funzione  $\mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  è assunta di classe  $C^1(\Omega)$  a pezzi.

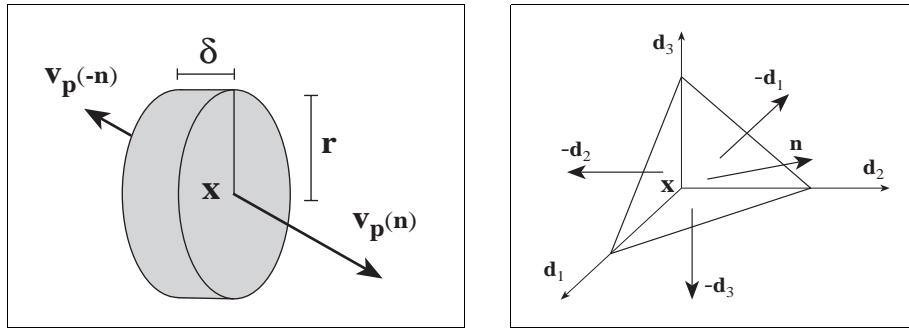
*Postulato cinematico*

Tale postulato consente di dedurre l’esistenza di un cinemismo compatibile col sistema congruente  $\{\mathbf{D}, \partial\mathbf{w}\}$ .

La dimostrazione è analoga a quella condotta nel caso statico ed è basata sull’imporre la condizione di compatibilità cinematica di due parti di forma speciale.

Detto  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  un riferimento ortonormale si consideri, nell’intorno di un punto  $\mathbf{x}$  interno ad un elemento di  $\mathcal{T}(\Omega)$ ,

- una parte  $\mathcal{P}_1$  a forma di *disco circolare* con centro in  $\mathbf{x}$ , raggio  $r$ , spessore  $\delta$  e le due facce parallele con normali uscenti  $\mathbf{n}$  e  $-\mathbf{n}$ ,
- una parte  $\mathcal{P}_2$  a forma di *tetraedro* avente un vertice in  $\mathbf{x}$ , tre facce parallele ai piani coordinati con normali uscenti pari a  $\{-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3\}$  e la quarta faccia con giacitura definita da una normale uscente  $\mathbf{n}$  non parallela agli assi coordinati.



## 2.2. Duale del Lemma di Cauchy

Si consideri una suddivisione di  $\Omega$  in elementi in ciascuno dei quali il campo vettoriale  $\mathbf{v}_P(\cdot, \mathbf{n})$  risulti di classe  $C^1$ . Sia  $\bar{\mathcal{P}}$  uno di tali elementi e  $\mathbf{x}$  un punto interno a  $\bar{\mathcal{P}}$ .

Nell’intorno del punto  $\mathbf{x}$  si disegni quindi un disco circolare con piano medio  $\pi$  di normale orientata  $\mathbf{n}$  e si denotino con

- $A$  l’area delle facce del disco,

- $\mathbf{v}_P(\mathbf{n})$  e  $\mathbf{v}_P(-\mathbf{n})$  i valori medi dei cinematismi sulle facce di normali  $\mathbf{n}$  e  $-\mathbf{n}$ ,
- $\partial\mathcal{P}_{\text{LAT}}$  la superficie laterale del disco e  $A_{\text{LAT}}$  la sua area.

Si imponga quindi la condizione variazionale di congruenza nella forma *iii)* della proposizione II.9.2 (p. 241) considerando un campo tensionale di prova  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_o$  che assume un arbitrario valore costante  $\mathbf{T}_o$  nel disco  $\mathcal{P}_x$  ed è nullo al di fuori del disco.

Si ottiene allora la relazione

$$\mathbf{T}_o \mathbf{n} \cdot [\mathbf{v}_P(\mathbf{n}) - \mathbf{v}_P(-\mathbf{n})] A + \int_{\partial\mathcal{P}_{\text{LAT}}} (\mathbf{T}_o \mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{v}_{\text{LAT}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{P}_x} \mathbf{T}_o * \mathbf{D}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

dove  $\mathbf{v}_{\text{LAT}}$  è il cinematismo della superficie laterale del disco.

Osservando che l'atto di deformazione  $\mathbf{D}$  ed il cinematismo  $\mathbf{v}_{\text{LAT}}$  sono limitati, si faccia tendere a zero lo spessore del disco. Data l'arbitrarietà del tensore  $\mathbf{T}_o$  si ottiene

$$[\mathbf{v}_P(\mathbf{n}) - \mathbf{v}_P(-\mathbf{n})] A = \mathbf{o}.$$

Poichè l'orientazione ed il raggio del disco sono arbitrari, la continuità dei cinematismi sulle facce consente di applicare il lemma del valor medio, proposizione I.1.5 (p. 9) e di concludere che, per ogni  $\mathbf{n}$ , deve risultare

$$\mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{v}_P(\mathbf{x}, -\mathbf{n}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Ciò esprime il *principio di continuità cinematica*.

### 2.3. Duale del Teorema di Cauchy

Si consideri un tetraedro con vertice in  $\mathbf{x}$  e contenuto in un intorno di  $\mathbf{x}$  in cui il cinematismo  $\mathbf{v}_P(\cdot, \mathbf{n})$  risulti continuo per ogni  $\mathbf{n}$ .

In virtù del risultato precedente, i cinematismi medi sulle prime tre facce di area  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), sono pari a  $\mathbf{v}_P(-\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_P(\mathbf{e}_i)$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

Sia inoltre  $\mathbf{v}_P(\mathbf{n})$  il cinematismo medio sulla faccia di area  $A$  e  $\mathbf{D}$  l'atto di deformazione medio nel dominio di volume  $V$ .

Nell'imporre la condizione variazionale di congruenza si consideri uno stato tensionale di prova  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_o$  che assume valore costante pari a  $\mathbf{T}_o$  nel tetraedro ed identicamente nullo al di fuori del tetraedro. Si ottiene

$$\sum_{i=1}^3 \left[ -(\mathbf{T}_o \mathbf{e})_i \cdot \mathbf{v} \mathbf{v}_P(\mathbf{e}_i) \right] A_i + \left[ \mathbf{T}_o \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_P(\mathbf{n}) \right] A + \left[ \mathbf{T}_o * \mathbf{D} \right] V = 0,$$

che, essendo

$$\mathbf{T}_o \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{T}_o \mathbf{e}_i), \quad A_i = An_i = A(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) \quad \{i = 1, 2, 3\}, \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{3} Ah,$$

può riscriversi

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) (\mathbf{T}_o \mathbf{e}_i) \cdot [\mathbf{v}_P(\mathbf{n}) - \mathbf{v}_P(\mathbf{e}_i)] + [\mathbf{T}_o * \mathbf{D}] \frac{1}{3} h = 0.$$

Si contragga ora il tetraedro attorno ad  $\mathbf{x}$  facendo tendere a zero l'altezza  $h$ . Passando al limite si ottiene

$$\sum_{i=1}^3 (\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i) [\mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)] \cdot (\mathbf{T}_o \mathbf{e}_i) = 0, \quad \forall \mathbf{T}_o.$$

Si considerino ora tre stati tensionali monoassiali  $\mathbf{T}_{oi}$  costanti, ciascuno con l'asse coincidente con un versore del riferimento cartesiano, quindi dati da

$$\mathbf{T}_{oi} = \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i, \quad \{i = 1, 2, 3\}.$$

Si ottiene allora

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{d}_i) [\mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n}) - \mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{d}_i)] \cdot \mathbf{d}_i = 0, \quad \{i = 1, 2, 3\},$$

e se  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i \neq 0$  risulterà

$$\mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{d}_i) \cdot \mathbf{d}_i, \quad \{i = 1, 2, 3\}.$$

Si può dunque concludere che le componenti di  $\mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  sui tre assi sono indipendenti da  $\mathbf{n}$ .

Il cinematismo definito da

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) := \mathbf{v}_P(\mathbf{x}, \mathbf{n}), \quad \forall \mathbf{n},$$

è dunque univocamente individuato in ogni punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  e risulta indipendente dalla parte  $\mathcal{P}$ .

Si è così dimostrato il *duale cinematico* del teorema fondamentale di CAUCHY.

Un'analogia dimostrazione può condursi applicando la condizione di compatibilità cinematica ad un prisma di NOLL.

#### 2.4. Verifica della congruenza

Si vuole ora mostrare che il cinematismo  $\mathbf{v}$  soddisfa le equazioni di congruenza in  $\Omega$ .

A tal fine si noti che il postulato cinematico ed il duale del teorema di CAUCHY assicurano che esiste una suddivisione finita di  $\Omega$  in elementi  $\overline{\mathcal{P}}_\alpha$  in ciascuno dei quali è definito un cinematismo  $\mathbf{v}$  di classe  $C^1$ .

## ■ Congruenza interna

Dalla continuità del gradiente del cinematicismo  $\mathbf{v}$  in ogni elemento  $\bar{\mathcal{P}}_\alpha$  e dalla conseguente continuità della deformazione tangente  $\mathbf{B}\mathbf{v}$  è possibile dedurre la validità della equazione di congruenza interna.

Si consideri infatti un arbitrario elemento  $\bar{\mathcal{P}} \subset \bar{\mathcal{P}}_\alpha$  ed uno stato tensionale  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  che assume valore costante in  $\bar{\mathcal{P}}$  e valore nullo in  $\bar{\mathcal{P}}_\alpha \setminus \bar{\mathcal{P}}$ . Si denoti col tensore simmetrico  $\mathbf{T}_o$  il valore costante del campo  $\mathbf{T}$  in  $\bar{\mathcal{P}}$ .

In virtù del principio di sezionamento, la condizione di compatibilità cinematica impone che

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{T}_o * \mathbf{D} dv = \int_{\partial\mathcal{P}} (\mathbf{T}_o \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{T}\mathbf{v} da.$$

Applicando il teorema della divergenza all'integrale al contorno, notando che la divergenza del campo tensionale costante  $\mathbf{T}_o$  è nulla ed invocando la simmetria di  $\mathbf{T}_o$  si ottiene

$$\int_{\mathcal{P}} \mathbf{T}_o * \mathbf{D} dv = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{T}_o * \mathbf{B}\mathbf{v} dv.$$

L'arbitrarietà del tensore simmetrico costante  $\mathbf{T}_o$  e dell'elemento  $\mathcal{P} \subset \bar{\mathcal{P}}_\alpha$  nonché la continuità di  $\mathbf{D}$  e di  $\mathbf{B}\mathbf{v}$  implicano, in virtù del lemma del valor medio, che

$$\mathbf{B}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}_\alpha,$$

e cioè la validità dell'equazione di congruenza interna.

## ■ Congruenza al contorno

La condizione di congruenza sul contorno può essere dedotta considerando una parte regolare  $\bar{\mathcal{P}}$  di un elemento di  $\mathcal{T}_w(\Omega)$  ed un discoide  $\mathcal{P}_x$  ottenuto traslando un tratto regolare  $S$  del contorno  $\partial\mathcal{P}$  verso l'interno di  $\mathcal{P}$  di una quantità positiva  $\varepsilon$ .

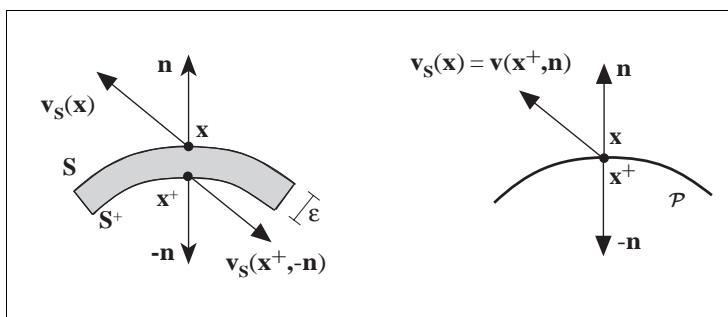


Fig. 2.1

Si imponga quindi la condizione di congruenza con un campo tensionale di prova  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}$  di valore costante  $\mathbf{T}_o$  nel discoide  $\mathcal{P}_x$  e nullo al di fuori di esso

$$\begin{aligned} & \int_{S^+} -(\mathbf{T}_o \mathbf{n}) \cdot \Gamma \mathbf{v}(\mathbf{x}^+) \, da + \int_S (\mathbf{T}_o \mathbf{n}) \cdot \Gamma \mathbf{v}_S(\mathbf{x}) \, da + \int_{\partial \mathcal{P}_{LAT}} (\mathbf{T}_o \mathbf{n}_{LAT}) \cdot \mathbf{v}_{LAT} \, da = \\ & = \int_{\mathcal{P}_x} \mathbf{T}_o * \mathbf{D} \, dv. \end{aligned}$$

Ricordando che gli atti di deformazione  $\mathbf{D}$  ed i cinematismi  $\mathbf{v}_{LAT}$  sono limitati e passando al limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene

$$\int_S (\mathbf{T}_o \mathbf{n}) \cdot [-\Gamma \mathbf{v}(\mathbf{x}) + \Gamma \mathbf{v}_S(\mathbf{x})] \, da = \mathbf{o}.$$

La continuità dei cinematismi assicura allora che deve risultare

$$\Gamma \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \Gamma \mathbf{v}_S(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in S \subset \partial \mathcal{P}.$$

### 3. STATO TENSIONALE PUNTUALE

Si consideri una struttura in equilibrio in una configurazione  $\Omega$  e sia  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega)$  uno stato di sforzo in equilibrio con le forze attive agenti sulla struttura.

Sia quindi  $\mathbf{x} \in \Omega$  un punto di continuità dello stato di sforzo  $\mathbf{T} \in \mathcal{S}(\Omega)$ .

Se  $\bar{\mathcal{P}} \in \mathcal{T}(\Omega)$  è un elemento di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  tale che  $\mathbf{x} \in \partial \bar{\mathcal{P}}$ , la tensione di contatto agente su  $\bar{\mathcal{P}}$  nel punto  $\mathbf{x} \in \partial \bar{\mathcal{P}}$  è allora data da

$$\mathbf{t}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}.$$

Al variare dell'elemento  $\bar{\mathcal{P}}$  in modo tale che il suo contorno  $\partial \bar{\mathcal{P}}$  passi sempre per il punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , la tensione di contatto varia in funzione della giacitura del piano tangente  $\pi$  a  $\partial \bar{\mathcal{P}}$  in  $\mathbf{x}$  individuata del versore della normale  $\mathbf{n}$  uscente da  $\bar{\mathcal{P}}$ .

■ Lo *stato tensionale puntuale* in  $\mathbf{x} \in \Omega$  è la mappa che ad ogni versore  $\mathbf{n} \in V$  associa il corrispondente vettore tensione  $\mathbf{t}_n(\mathbf{x}) \in V$ .

Sia ora  $\bar{\mathcal{P}}^c = \bar{\Omega} \setminus \mathcal{P}$  l'elemento di  $\Omega$  complementare a  $\bar{\mathcal{P}}$  e siano

- $\mathbf{n}^+$  la normale uscente da  $\mathcal{P}$  nel punto  $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{P} \cap \partial \mathcal{P}^c$ ,
- $\mathbf{n}^-$  la normale uscente da  $\mathcal{P}^c$  nel punto  $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{P} \cap \partial \mathcal{P}^c$ .

Le tensioni agenti nel punto  $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{P} \cap \partial \mathcal{P}^c$  rispettivamente su  $\partial \mathcal{P}$  e su  $\partial \mathcal{P}^c$  sono date da

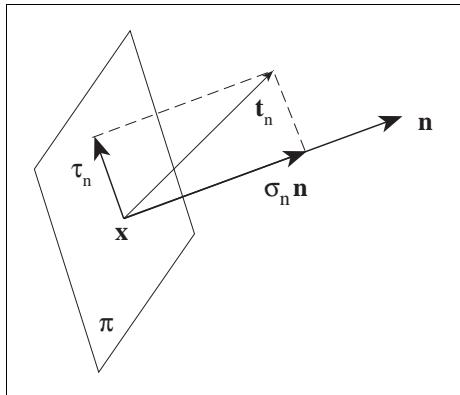
$$\mathbf{t}^+ = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}^+, \quad \mathbf{t}^- = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n}^-.$$

Essendo  $\mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$  risulta  $\mathbf{t}^+ = -\mathbf{t}^-$ , in accordo col principio di *azione e reazione*. Nel seguito sono discusse in dettaglio le principali proprietà del tensore dello stato tensionale in un punto di un corpo continuo.

### 3.1. Tensioni normali e tangenziali

La tensione  $\mathbf{t}_n = \mathbf{T}\mathbf{n}$  agente in  $\mathbf{x} \in \Omega$  sulla giacitura di normale  $\mathbf{n}$  può essere univocamente decomposta come somma di

- una tensione  $\sigma_n \mathbf{n}$  parallela alla normale  $\mathbf{n}$  detta *tensione normale*,
- una tensione  $\tau_n$  contenuta nel piano  $\pi$  detta *tensione tangenziale*.



**Componente normale  
e tangenziale  
del vettore tensione.**

Fig. 3.1

Si considerino i tensori complementari

$$\mathbf{P}_n := \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

$$\mathbf{P}_\pi := \mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$$

che effettuano rispettivamente la proiezione ortogonale su  $\mathbf{n}$  e sul piano  $\pi$ .

Le tensioni, normale  $\sigma_n \mathbf{n}$  e tangenziale  $\tau_n$ , sono legate al vettore tensione  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  dalle relazioni

$$\sigma_n \mathbf{n} = (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{t} = \mathbf{P}_n \mathbf{t},$$

$$\tau_n = \mathbf{t} - \sigma_n \mathbf{n} = (\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \mathbf{t} = \mathbf{P}_\pi \mathbf{t}.$$

Sulla giacitura  $\pi$  si ha

trazione se  $\sigma_n > 0$

compressione se  $\sigma_n < 0$ .

Lo scalare  $\sigma_n$  è detto *componente normale* della tensione agente sulla giacitura di normale  $\mathbf{n}$ .

### 3.2. Matrice dello stato tensionale

Per ottenere un'espressione del tensore  $\mathbf{T}$  dello stato tensionale in termini matriciali e per indagare sul significato meccanico delle relative componenti, si fissa un riferimento levogiro ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ .

Le tensioni agenti sulle giaciture di normali  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_1 &= \mathbf{T} \mathbf{e}_1 = T_{11}\mathbf{e}_1 + T_{21}\mathbf{e}_2 + T_{31}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{T} \mathbf{e}_2 = T_{12}\mathbf{e}_1 + T_{22}\mathbf{e}_2 + T_{32}\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_3 &= \mathbf{T} \mathbf{e}_3 = T_{13}\mathbf{e}_1 + T_{23}\mathbf{e}_2 + T_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}$$

La matrice rappresentativa del tensore dello stato tensionale  $\mathbf{T}$  si scrive quindi

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}.$$

Gli elementi della diagonale principale sono le *tensioni normali*, di trazione o di compressione a seconda che il loro segno sia positivo o negativo. Esse infatti si ottengono proiettando le tensioni  $\mathbf{t}_i$ , con  $i = 1, 2, 3$ , lungo la normale alla corrispondente giacitura

$$T_{ii} = \mathbf{T} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2, 3.$$

La proprietà di simmetria di  $\mathbf{T}$  implica che i termini fuori dalla diagonale principale  $T_{ij}$  e  $T_{ji}$  ( $i \neq j$ ) devono essere uguali. Tali tensioni sono *tangenziali* in quanto

$$T_{ij} = \mathbf{T} \mathbf{d}_j \cdot \mathbf{e}_i = \mathbf{t}_j \cdot \mathbf{e}_i \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Le componenti della matrice rappresentano quindi le tensioni normali e tangenziali agenti sulle giaciture parallele ai tre piani coordinati ortogonali.

Si noti che le tensioni tangenziali  $T_{ij}$  e  $T_{ji}$  ( $i \neq j$ ) relative alle giaciture di normali  $\mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{e}_j$  devono entrambe convergere (o divergere) nello spigolo parallelo al terzo versore.

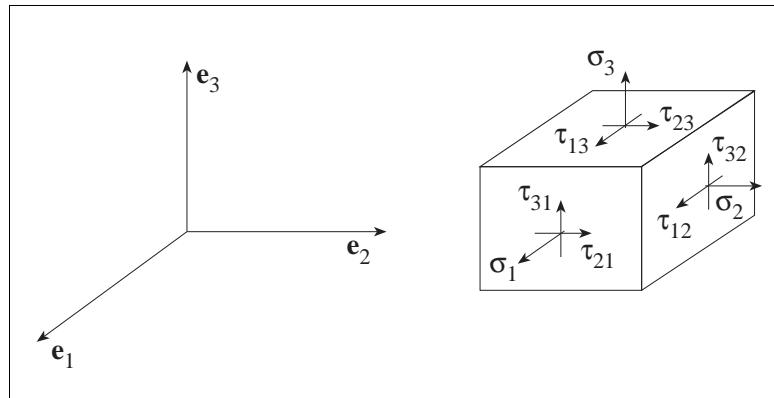


Fig. 3.2

La divergenza del campo tensoriale  $\mathbf{T}$  è il campo vettoriali di componenti

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1 \dots 3,$$

ed in forma esplicita

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_1 = \frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{13}}{\partial x_3}$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_2 = \frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3}$$

$$(\operatorname{div} \mathbf{T})_3 = \frac{\partial T_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{33}}{\partial x_3}$$

Il flusso del tensore  $\mathbf{T}$  relativo alla normale  $\mathbf{n}$  ha per componenti

$$(\mathbf{T}\mathbf{n})_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j, \quad i = 1 \dots 3,$$

ed esplicitando

$$(\mathbf{T}\mathbf{n})_1 = T_{11}n_1 + T_{12}n_2 + T_{13}n_3$$

$$(\mathbf{T}\mathbf{n})_2 = T_{21}n_1 + T_{22}n_2 + T_{23}n_3$$

$$(\mathbf{T}\mathbf{n})_3 = T_{31}n_1 + T_{32}n_2 + T_{33}n_3.$$

Nella trattazione dei problemi di elasticità lineare isotropa conviene denotare le componenti normali con il simbolo  $\sigma$ , senza ripetere gli indici eguali, ed adottare per le componenti tangenziali il simbolo specifico  $\tau$ . Le componenti tangenziali sono infatti, come si vedrà, direttamente proporzionali ai corrispondenti scorrimenti angolari.

La matrice dello stato tensionale si scrive pertanto

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Usualmente si individuano gli assi coordinati denotando con  $x$ ,  $y$  e  $z$  le coordinate lungo gli assi  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  e  $\mathbf{e}_3$ .

Nel seguito la matrice dello stato tensionale sarà quindi anche espressa adottando la seguente simbologia

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$



### 3.3. Rappresentazione di Voigt

Nelle trattazioni numeriche è spesso conveniente rappresentare il tensore simmetrico dello stato tensionale come combinazione lineare di una base dello spazio Sym dei tensori simmetrici del secondo ordine.

In analogia alla trattazione svolta nel capitolo I con riferimento al tensore dell'atto di deformazione si osservi che il tensore dello stato tensionale, può essere rappresentato come somma di tre stati di tensione semplice e di tre stati di puro taglio.

Se  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  sono due versori ortogonali in  $V$  si dice

- *stato di tensione semplice* di entità  $\sigma$  in direzione  $\mathbf{n}$  il tensore

$$\sigma (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}),$$

- *stato di puro taglio* di entità  $\tau$  tra  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  il tensore

$$2 \tau \operatorname{sym}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{m}).$$

Fissata quindi una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  in  $V$  sussiste la seguente formula di rappresentazione

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 2 \tau_{ij} \operatorname{sym}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j).$$

Le matrici rappresentative di  $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$  e di  $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$  sono date da

$$[\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

per cui la matrice rappresentativa di  $2 \operatorname{sym}(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$ , è data da

$$2 \operatorname{sym} [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sommando i 6 termini, la formula di rappresentazione espressa in termini di matrici restituisce la matrice  $[\mathbf{T}]$  dello stato tensionale.

Si noti che i tensori simmetrici  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$  e  $2 \operatorname{sym}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$  con  $i < j$  sono tra loro ortogonali per cui l'insieme dei sei tensori simmetrici

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \end{cases}$$

costituisce una base ortogonale per lo spazio  $\operatorname{Sym}$  dei tensori simmetrici che ha dimensione 6. Rispetto a tale base le componenti del tensore  $\mathbf{T}$  formano il vettore numerico

$$[\mathbf{T}] = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}\}.$$

Questa rappresentazione del tensore  $\mathbf{T}$  è detta rappresentazione ingegneristica o di VOIGT<sup>62</sup> ed è quella adottata nelle procedure di calcolo numerico.

Nel capitolo I per il tensore dell'atto di deformazione è stata adottata la formula di rappresentazione

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^3 \gamma_{ij} \operatorname{sym}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j).$$

Le basi rispetto alle quali sono state valutate le componenti ingegneristiche dell'atto di deformazione e dello stato tensionale sono entrambe ortogonali ma non ortonormali.

Infatti si ha

$$\| \operatorname{sym} [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] \| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\| 2 \operatorname{sym} [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2] \| = \sqrt{2}.$$

Le due basi sono però tra loro duali poichè risulta

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) = 1, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i) : (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j) = 0, \quad i \neq j,$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) : (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) = 1 \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{1}{2} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) : (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q + \mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_p) = 0, \quad \{i, j\} \neq \{p, q\}.$$

Quindi il prodotto interno tra i tensori  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$  può calcolarsi come somma dei prodotti delle componenti omonime

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = T_{ij} D_{ij} = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 + \tau_{12} \gamma_{12} + \tau_{13} \gamma_{13} + \tau_{23} \gamma_{23}.$$

Esso ha il significato meccanico di potenza virtuale per unità di volume.

---

<sup>62</sup> WOLDEMAR VOIGT (1850-1919).

### 3.4. Componenti tetraedrali

Una rappresentazione alternativa di un tensore simmetrico del secondo ordine è stata proposta da J.H. ARGYRIS [11].

Facendo riferimento al tensore dello stato tensionale, la rappresentazione di ARGYRIS consiste nell'assegnare le componenti normali lungo direzioni parallele agli spigoli di un tetraedro non degenere (vedi fig. 3.3).

Sia infatti  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una base di  $V$  costituita da versori.

Si ponga

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

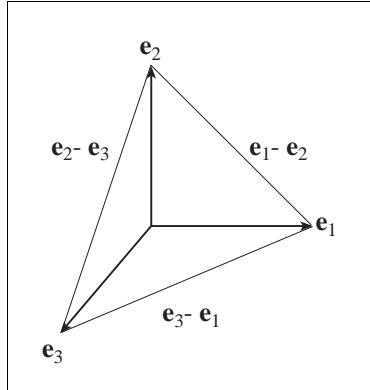


Fig. 3.3

Si definiscano quindi i versori

$$\begin{cases} \mathbf{n}_4 = \mathbf{e}_{23} := \frac{\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3\|}, \\ \mathbf{n}_5 = \mathbf{e}_{31} := \frac{\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_1\|}, \\ \mathbf{n}_6 = \mathbf{e}_{12} := \frac{\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\|}. \end{cases}$$

I versori  $\mathbf{n}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$  sono diretti lungo gli spigoli del tetraedro non degenere definito dalla base  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  di  $V$ .

Si considerino quindi i proiettori ortogonali  $\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$ ,  $i = 1, \dots, 6$ . e la base dello spazio  $\text{Sym}(V; V)$  dei tensori simmetrici formata da

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1 \end{cases}$$

La matrice delle componenti dei 6 proiettori rispetto a tale base, a meno della normalizzazione dei vettori  $n_4, n_5, n_6$ , è

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Poiché risulta  $\det M = -1$  i proiettori ortogonali lungo gli spigoli del tetraedro costituiscono una base di  $\text{Sym}(V; V)$ . Sia  $N_i$  la base duale definita dalle condizioni

$$N_i : (\mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_k) = \delta_{ik}.$$

Le componenti del tensore degli sforzi  $T \in \text{Sym}(V; V)$  nella base  $N_i$  sono

$$\sigma_{ni} = T : (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i) = (T\mathbf{n}_i) \cdot \mathbf{n}_i,$$

Esse sono dette *componenti tetraedrali* in quanto componenti normali del tensore degli sforzi in direzione degli spigoli di un tetraedro non degenere.

### 3.5. Direzioni principali

La simmetria del tensore degli sforzi  $T \in \text{Sym}(V; V)$  assicura che esiste una base ortonormale costituita da *autovettori* del tensore che esso ammette una rappresentazione spettrale con *autovalori* reali.

Gli autovettori sono detti *direzioni principali* dello stato di sforzo ed i relativi autovalori sono detti *tensioni principali*.

Fissata quindi una base principale ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ , ad essa si associerà una terna di tensioni principali  $\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$ .

- Se le tensioni principali sono distinte, ciascuna di esse è un autovalore semplice e la base principale è unica.
- Se una tensione principale è semplice e una è doppia, alla tensione semplice si associa un'unica direzione principale mentre a quella doppia si associa una qualunque direzione del piano ortogonale.
- Se la tensione principale è tripla ogni direzione è principale e lo stato tensionale si dice *idrostatico* o *sferico*.

Le tensioni  $t_i \{i = 1, \dots, 3\}$  agenti sulle giaciture ortogonali ai tre autovettori  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  sono dirette lungo le normali alle giaciture e pertanto le relative tensioni tangenziali sono nulle

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \mathbf{T} \mathbf{d}_1 = \sigma_1 \mathbf{d}_1, \\ \mathbf{t}_2 &= \mathbf{T} \mathbf{d}_2 = \sigma_2 \mathbf{d}_2, \\ \mathbf{t}_3 &= \mathbf{T} \mathbf{d}_3 = \sigma_3 \mathbf{d}_3, \end{aligned}$$

- Lo stato tensionale in un punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  è detto *piano* o *biassiale* se, al variare della normale  $\mathbf{n}$ , la tensione  $\mathbf{t}_n$  giace sempre su di un piano  $\pi$ . La direzione ortogonale alla giacitura  $\pi$  è principale e la corrispondente tensione principale è nulla.
- Lo stato tensionale si poi dice *monoassiale* se, al variare della normale  $\mathbf{n}$ , la tensione  $\mathbf{t}_n$  ha sempre la stessa direzione. Tale direzione risulta principale per lo stato tensionale e su tutte le normali ad essa ortogonali la tensione è nulla.

Dunque uno stato tensionale è

- *triassiale* se lo zero non è un autovalore,
- *biassiale* se lo zero è un autovalore semplice,
- *monoassiale* se lo zero è un autovalore doppio.

### 3.6. Quadriche delle tensioni

La simmetria del tensore  $\mathbf{T}$  consente di fornire rappresentazioni geometriche dello stato tensionale in temini di quadriche.

Gran parte della teoria della rappresentazione dello stato tensionale in temini di quadriche è implicita in lavori di FRESNEL<sup>63</sup> [2], [3] del 1822.

Formulazioni esplicite sono state sviluppate qualche anno dopo da CAUCHY, LAMÉ e CLAPEYRON e sono descritte nel seguito.

- La *quadrica di CAUCHY* [5] ha equazione

$$(\mathbf{T} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \pm 1.$$

Si adottano entrambi i segni se conducono a quadriche reali, altrimenti solo quello che conduce ad una quadrica reale.

- La *quadrica reciproca* introdotta da LAMÉ e CLAPEYRON [7] ha equazione

$$(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \pm 1,$$

---

<sup>63</sup> AUGUSTIN JEAN FRESNEL (1788-1827). Allievo dell'Ecole Polytechnique, fece parte del *Corps des Ponts et Chaussées*. È stato uno dei fondatori della teoria ondulatoria della luce. Con DOMINIQUE FRANÇOIS JEAN ARAGO (1786-1853) scoprì che onde luminose polarizzate su piani ortogonali non interferiscono. A FRESNEL è anche dovuto la formulazione di una teoria della diffrazione della luce

Anche in essa si adottano entrambi i segni se conducono a quadriche reali, altrimenti solo quello che conduce ad una quadrica reale.

- L'*ellissoide di CAUCHY* [5]

$$(\mathbf{T}^2 \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = 1.$$

- L'*ellissoide di LAMÉ* [7], [8]

$$(\mathbf{T}^{-2} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = 1.$$

Si noti che tutte le quadriche citate hanno gli stessi assi principali, diretti come gli autovettori di  $\mathbf{T}$ .

### 3.6.1. Quadrica di Cauchy

Alla rappresentazione di CAUCHY si perviene considerando l'espressione della tensione normale sulla generica giacitura di versore normale  $\mathbf{n}$ , data da

$$(\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \sigma_{\mathbf{n}}.$$

Ad ogni raggio vettore  $\mathbf{r}$  corrisponde un versore  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$ . Allora, ponendo

$$(\mathbf{T} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \|\mathbf{r}\|^2 (\mathbf{T} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{r}\|^2 \sigma_{\mathbf{n}} = \pm 1,$$

la norma del raggio vettore fornisce il reciproco della radice quadrata del valore assoluto della tensione normale sulla giacitura ortogonale al raggio vettore, cioè

$$\|\mathbf{r}\| = \frac{1}{\sqrt{|\sigma_{\mathbf{n}}|}}.$$

Se la tensione normale cambia segno al variare del versore  $\mathbf{n}$ , l'iperboloide associato al segno + corrisponde a tensioni normali di trazione, quello associato al segno - corrisponde a tensioni normali di compressione. Se invece la tensione normale ha sempre lo stesso segno la quadrica è un ellissoide.

Si noti che il vettore normale alla superficie della quadrica è proporzionale al gradiente della funzione

$$f(\mathbf{r}) := (\mathbf{T} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r},$$

di cui la quadrica è l'insieme di livello +1 o -1. Dunque, essendo

$$\text{grad } f(\mathbf{r}) = 2 \mathbf{T} \mathbf{r},$$

si deduce che la normale alla superficie della quadrica è proporzionale al vettore tensione agente sulla giacitura il cui versore normale è parallelo al raggio vettore.

### 3.6.2. Quadrica reciproca

La quadrica formulata da LAMÉ<sup>64</sup> e CLAPEYRON<sup>65</sup> in [7] è reciproca di quella di CAUCHY e da essa si ottiene assumendo che il tensore  $\mathbf{T}$  sia invertibile. In tal caso, ponendo  $\mathbf{r}^* = \mathbf{T}\mathbf{r}$ , si ha che  $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}^*) \cdot \mathbf{r}^* = (\mathbf{T}\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \pm 1$ .

Si osservi che il gradiente della funzione  $f^*(\mathbf{r}^*) := (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}^*) \cdot \mathbf{r}^*$ , di cui la *quadrica reciproca* è l'insieme di livello  $+1$  o  $-1$ , è dato da

$$\text{grad } f^*(\mathbf{r}^*) = 2\mathbf{T}^{-1}\mathbf{r}^* = 2\mathbf{r}.$$

Dunque nella quadrica reciproca i ruoli del raggio vettore e della normale alla superficie della quadrica si scambiano rispetto a quelli giocati nella quadrica di CAUCHY.

Il raggio vettore della quadrica reciproca è proporzionale al vettore tensione e la normale alla superficie della quadrica è proporzionale alla normale alla giacitura su cui agisce la tensione.

Se la quadrica è un iperboloido a due falde, il cono asintotico di equazione  $f^*(\mathbf{r}^*) = 0$  è detto *cono di LAMÉ* o *cono di taglio*.

Esso è il luogo delle direzioni ortogonali ai raggi vettori appartenenti al cono asintotico della quadrica di CAUCHY che ha equazione  $f(\mathbf{r}) = 0$ . Lungo le direzioni appartenenti al cono  $f(\mathbf{r}) = 0$  la tensione è puramente tangenziale ed è diretta lungo il cono  $f^*(\mathbf{r}^*) = 0$ .

### 3.6.3. Ellissoide di Cauchy

L'ellissoide di CAUCHY ha equazione  $(\mathbf{T}^2\mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = 1$ .

---

<sup>64</sup> GABRIEL LAMÉ (1795-1870). Ingegnere ferroviario e scienziato. Si laureò all'École Polytechnique nel 1818 ed all'École de Mines nel 1820 insieme all'amico EMILE CLAPEYRON. Subito dopo, su richiesta di ALESSANDRO I imperatore della Russia dal 1801 al 1825, fu inviato a San Pietroburgo con CLAPEYRON. LAMÉ fu nominato professore e ingegnere all'*Institut et Corps du Genie des Voies de Communication* di San Pietroburgo. LAMÉ restò in Russia per 12 anni e durante questo periodo progettò importanti strutture tra cui un ponte sospeso in San Pietroburgo e pubblicò molti lavori, alcuni dei quali con CLAPEYRON. Nel 1832 tornò a Parigi e LAMÉ divenne professore di fisica all'École Polytechnique. Nel 1836 partecipò alla costruzione della linea ferroviaria Parigi-St.Germain. Membro dell'Accademia Francese delle Scienze nel 1843 e professore di fisica matematica alla Sorbona dal 1850. Nel 1852 pubblicò "Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides" primo libro sulla teoria dell'elasticità. Due costanti elastiche prendono il nome da LAMÉ. GAUSS lo considerò il maggior matematico francese del suo tempo.

<sup>65</sup> BENOIT PAUL EMILE CLAPEYRON (1795-1870). Ingegnere formatosi all'École Polytechnique e all'École de Mines insieme all'amico GABRIEL LAMÉ. Dopo 12 anni passati in Russia con LAMÉ, tornato a Parigi ideò e realizzò la costruzione della linea ferroviaria Parigi-St.Germain. Nel 1844 divenne professore di fisica all'Ecole des Ponts et Chaussées. Nel 1848 fu eletto all'Accademia delle Scienze di Parigi, partecipando a commissioni per la realizzazione del canale di Suez e per l'impegno delle macchine a vapore in marina. A CLAPEYRON [9] è dovuta la formulazione analitica delle idee sul calore pubblicate nel 1824 da SADI NICOLAS LÉONARD CARNOT (1796-1832), nell'opera *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, ma praticamente sconosciute fino alla riformulazione di CLAPEYRON. Da lui prendono il nome il teorema sul lavoro di deformazione elastica

In termini del versore  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|$  si ha che

$$\|\mathbf{r}\|^2 (\mathbf{T}^2 \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \|\mathbf{r}\|^2 \|\mathbf{Tn}\|^2 = \|\mathbf{Tr}\|^2 = 1,$$

e quindi che

$$\|\mathbf{r}\| \|\mathbf{Tn}\| = 1.$$

Dunque il modulo del raggio vettore è pari al reciproco della norma del vettore tensione sulla giacitura ortogonale al raggio vettore.

### 3.6.4. Ellissoide di Lamé

Al variare della giacitura  $\pi$ , e quindi del versore normale  $\mathbf{n}$  sulla sfera unitaria, il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  descrive un ellissoide.

Si assuma in prima istanza che il tensore  $\mathbf{T}$  dello stato tensionale sia triassiale e cioè che non vi siano tensioni principali nulle. Risulta quindi  $\det \mathbf{T} \neq 0$  ed il tensore  $\mathbf{T}$  è invertibile. La relazione  $\mathbf{t}_n = \mathbf{Tn}$ , che esprime la tensione in funzione del versore della normale, fornisce allora

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{t}_n.$$

Dalla proprietà  $\|\mathbf{n}\|^2 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ , si deduce la relazione

$$(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{t}_n) \cdot (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{t}_n) = (\mathbf{T}^{-1} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{t}_n) \cdot \mathbf{t}_n = (\mathbf{T}^{-2} \mathbf{t}_n) \cdot \mathbf{t}_n = 1,$$

che è la rappresentazione implicita di un ellissoide in  $V$ , detto *ellissoide di LAMÉ* [8].

Il tensore  $\mathbf{T}^{-2}$  ha gli stessi autovettori di  $\mathbf{T}$  ed autovalori pari ai reciproci dei quadrati degli autovalori  $\sigma_i$  di  $\mathbf{T}$  ed è quindi definito positivo essendo le tensioni principali  $\sigma_i$  non nulle per ipotesi.

Questa proprietà assicura che al ruotare della normale  $\mathbf{n}$  il vettore tensione  $\mathbf{t}_n$  descrive un *ellissoide* con centro nell'origine.

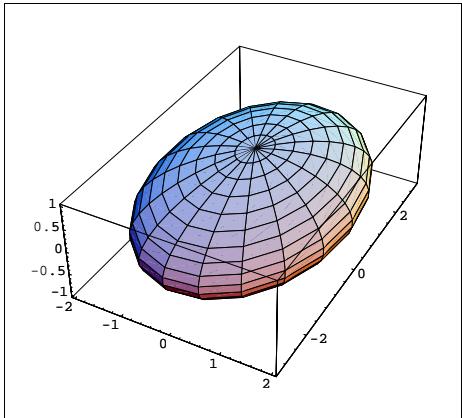
Rispetto ad una base ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$ , principale per il tensore  $\mathbf{T}$  dello stato tensionale, l'equazione dell'ellissoide assume la forma canonica

$$\left( \frac{t_{n1}}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{t_{n2}}{\sigma_2} \right)^2 + \left( \frac{t_{n3}}{\sigma_3} \right)^2 = 1,$$

dove  $t_{ni} = \mathbf{t}_n \cdot \mathbf{d}_i$ . Gli assi principali dell'ellissoide coincidono con quelli del tensore  $\mathbf{T}$  ed i semiasse hanno lunghezza pari ai moduli  $|\sigma_i|$  delle tensioni principali. Se lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  è piano l'ellissoide degenera in una *ellisse* contenuta nel piano delle direzioni principali con autovalori non nulli. Se lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  è monoassiale l'ellissoide degenera ulteriormente in un *segmento* contenuto nella retta individuata dalla direzione principale con autovalore non nullo. Alcune rappresentazioni grafiche dell'ellissoide di LAMÉ sono mostrate nelle figure seguenti.

---

e l'equazione differenziale per la determinazione del calore di vaporizzazione di un liquido.

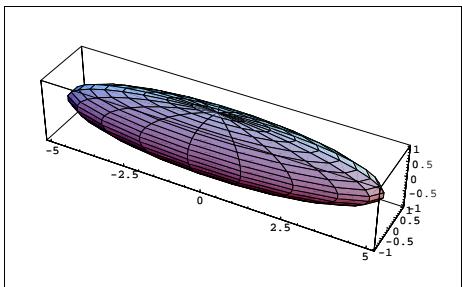


**Stato tensionale  
quasi piano**

$$\sigma_1 = 2$$

$$\sigma_2 = 3$$

$$\sigma_3 = 1$$

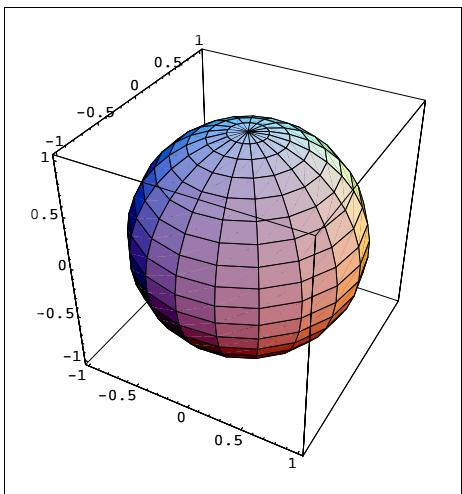


**Stato tensionale  
quasi monoassiale**

$$\sigma_1 = 5$$

$$\sigma_2 = 1$$

$$\sigma_3 = 1$$



**Stato tensionale  
sferico**

$$\sigma_1 = 1$$

$$\sigma_2 = 1$$

$$\sigma_3 = 1$$

### 3.7. Stati tensionali sferici e deviatorici

Il tensore delle tensioni  $\mathbf{T}$  si decompone additivamente nella *parte sferica*  $\mathbf{T}_S = \text{sph } \mathbf{T}$  e nella *parte deviatorica*  $\mathbf{T}_D = \text{dev } \mathbf{T}$  così definite

$$\mathbf{T}_S = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I}, \quad \mathbf{T}_D = \mathbf{T} - \mathbf{T}_S.$$

Denotando con  $-p = \text{tr } \mathbf{T}/3$  la media delle tensioni principali, le matrici di  $\mathbf{T}_S$  e  $\mathbf{T}_D$  rispetto ad una base ortonormale assumono la forma

$$[\mathbf{T}_S] = -p \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\mathbf{T}_D] = \begin{bmatrix} \sigma_1 + p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 + p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_3 + p \end{bmatrix}$$

E' facile riconoscere che

- La tensione normale media corrispondente ad  $\mathbf{T}_D$  è nulla mentre quelle corrispondenti a  $\mathbf{T}_S$  ed a  $\mathbf{T}$  sono uguali.
- Tutte le direzioni sono principali per  $\mathbf{T}_S$  con tensione principale pari a  $p$ .
- Le direzioni principali di  $\mathbf{T}_D$  e di  $\mathbf{T}$  coincidono.

Il tensore  $\mathbf{T}_S$  definisce quindi uno stato tensionale in cui le tensioni normali sono tutte eguali e le tensioni tangenziali sono assenti.

Il tensore  $\mathbf{T}_D$  definisce invece uno stato tensionale in cui il valor medio delle tensioni normali è nullo.

E' importante osservare che le componenti sferica e deviatorica sono tra loro ortogonali. Infatti

$$\mathbf{T}_S : \mathbf{T}_D = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} : \left[ \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T}) \mathbf{I} \right] = \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T})^2 - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{T})^2 = 0,$$

in quanto

$$\mathbf{I} : \mathbf{T} = \text{tr } \mathbf{T}, \quad \mathbf{I} : \mathbf{I} = 3.$$

Un caso notevole di stato tensionale sferico è fornito dai liquidi perfetti in quiete.

In essi, essendo  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}) \mathbf{I}$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$  lo stato tensionale è definito in ogni punto tramite un unico parametro scalare. La tensione agente su ogni giacitura è puramente normale ed il valore della compressione agente su ognuna di esse è detta la *pressione*  $p(\mathbf{x})$  nel fluido nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

#### 4. CERCHIO di MOHR

Ad OTTO MOHR<sup>66</sup> è dovuta una importante rappresentazione grafica dello stato tensionale in un punto. La costruzione di MOHR è un'estensione della dimostrazione grafica dell'esistenza del cerchio delle tensioni, fornita da KARL CULMANN<sup>67</sup> con riferimento allo stato tensionale nelle travi inflesse. La costruzione di MOHR ha carattere generale essendo applicabile a tensori simmetrici del secondo ordine, in dimensione due e tre.

La trattazione che viene svolta è originale ed è dovuta a GIOVANNI e MANFREDI ROMANO<sup>68</sup> che l'hanno illustrata nelle lezioni di Scienza delle Costruzioni dal 1980.

Essa ha il vantaggio di non far ricorso a formule trigonometriche e di dedurre la costruzione del cerchio direttamente dalla proprietà di riflessione caratteristica dei tensori antisimmetrici bidimensionali.

La rappresentazione di MOHR è qui descritta con riferimento al tensore dello stato tensionale ma, come risulterà evidente dalla esposizione, può essere applicata allo studio di tensori simmetrici bidimensionali o tridimensionali.

Il cerchio di MOHR trova importanti applicazioni in meccanica delle terre per valutare gli stati tensionali al limite del collasso per criteri di resistenza di tipo isotropo.

La costruzione di MOHR fornisce una semplice ed efficace descrizione della teoria di RANKINE<sup>69</sup> che definisce gli stati limite attivo e passivo di un terrapieno in funzione dell'angolo di attrito e della coesione del terreno, parametri caratteristici del criterio di resistenza di COULOMB.

La teoria di RANKINE verrà illustrata nel seguito come esempio di pratica applicazione del cerchio di MOHR.

##### 4.1. Stati tensionali bidimensionali

In primo luogo si prenda in esame il caso di un tensore bidimensionale  $\mathbf{T}$  che ad ogni versore  $\mathbf{n}$  di una giacitura nel piano associa la corrispondente tensione  $t_n = \mathbf{T}\mathbf{n}$ . L'idea fondamentale consiste nel considerare la decomposizione additiva dello stato tensionale come somma delle sue parti sferica e deviatorica

$$\mathbf{T} = \text{sph } \mathbf{T} + \text{dev } \mathbf{T}.$$

---

<sup>66</sup> OTTO MOHR (1835-1918). Ingegnere e professore al Politecnico di Stoccarda. Fu un pioniere della progettazione di strutture metalliche in Germania. Per primo applicò le linee d'influenza in ingegneria delle strutture.

<sup>67</sup> KARL CULMANN (1821-1881). Ingegnere ferroviario, studioso di strutture da ponte e di travature reticolari. Professore di teoria delle strutture al politecnico di Zurich. E' famoso il suo libro *Die Graphische Statik* pubblicato nel 1866.

<sup>68</sup> MANFREDI ROMANO (1941-1988). Ingegnere elettronico a Napoli e professore di Scienza delle Costruzioni a Napoli ed a Catania, brillante studioso di ingegneria delle strutture.

<sup>69</sup> WILLIAM JOHN MACQUORN RANKINE (1820-1872). Nato ad Edinburgo, ingegnere ferroviario e scienziato, fu professore di ingegneria civile e di meccanica a Glasgow.

Detto  $p$  il valor medio delle tensioni normali, considerato positivo se di compressione in analogia con il caso usuale della pressione idrostatica, le parti sferica e deviatorica dello stato tensionale sono individuate dalle proprietà

$$\text{sph } \mathbf{T} = -p \mathbf{I}; \quad p = -1/2 (\text{tr } \mathbf{T}); \quad \text{tr dev } \mathbf{T} = 0.$$

La parte sferica  $\text{sph } \mathbf{T}$  associa quindi ad ogni versore  $\mathbf{n}$  la tensione

$$(\text{sph } \mathbf{T})\mathbf{n} = -p \mathbf{n}$$

ad esso proporzionale tramite la pressione media  $p$ .

La parte deviatorica  $\text{dev } \mathbf{T}$  del tensore bidimensionale  $\mathbf{T}$  assume una forma caratteristica se si considera un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$  che sia principale per  $\mathbf{T}$ .

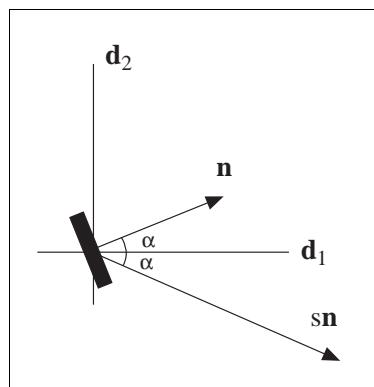
La matrice associata a  $\text{dev } \mathbf{T}$  assume infatti in tal caso la forma canonica

$$s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

dove  $s$  rappresenta l'autovalore positivo di  $\text{dev } \mathbf{T}$  che si suppone associato alla direzione  $\mathbf{d}_1$ . Il generico versore  $\mathbf{n}$  viene trasformato in

$$[\text{dev } \mathbf{T}] [\mathbf{n}] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} n_1 \\ n_2 \end{vmatrix} = s \begin{vmatrix} n_1 \\ -n_2 \end{vmatrix}.$$

Come illustrato in figura, la tensione deviatorica si ottiene quindi riflettendo il versore  $\mathbf{n}$  rispetto all'asse  $\mathbf{d}_1$  ed amplificandolo di  $s$ .

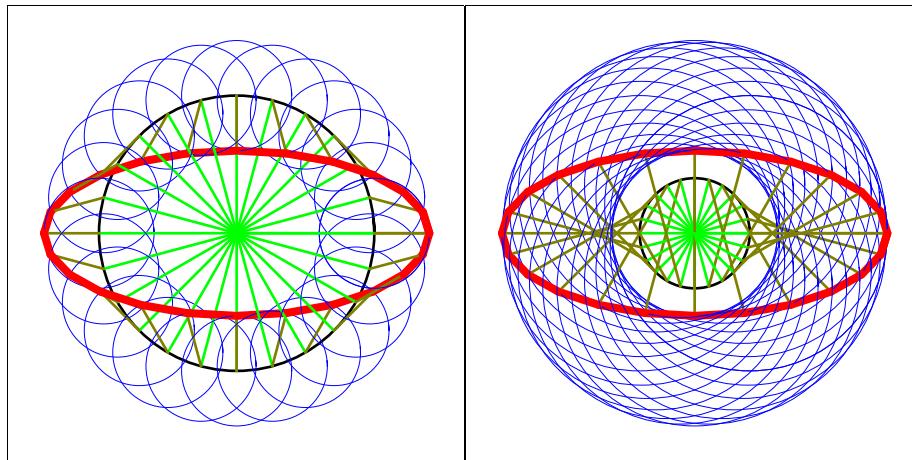
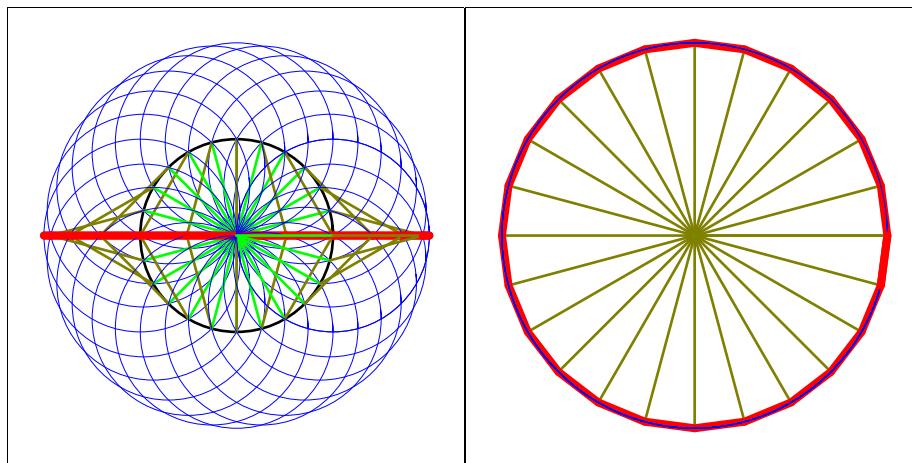


Tensione deviatorica sulla giacitura di normale  $\mathbf{n}$

Si possono trarre le seguenti conclusioni. Al variare del versore  $\mathbf{n}$  si ha che

- la tensione sferica ( $\text{sph } \mathbf{T}$ ) $\mathbf{n}$  varia mantenendo costante la sua ampiezza e descrive un cerchio di raggio  $p$ ;
- la tensione deviatorica ( $\text{dev } \mathbf{T}$ ) $\mathbf{n}$  mantiene anch'essa costante l'ampiezza e descrive un cerchio di raggio  $s$ .
- Se il versore  $\mathbf{n}$  ruota di un angolo  $\alpha$ , la tensione sferica ruota di un angolo  $\alpha$  mentre la tensione deviatorica ruota di un angolo  $-\alpha$ .

La tensione totale descrive quindi una ellisse come mostrato nelle figure 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 in cui le ellissi sono tracciate facendo ruotare la normale con un passo di  $\pi/12$ .

Fig. 4.1  $p = 5; s = 2$ Fig. 4.2  $p = 2; s = 5$ Fig. 4.3  $p = 5; s = 5$ Fig. 4.4  $p = 0; s = 5$

In ciascuna figura sono riportati

- il cerchio delle tensioni sferiche di raggio  $p$ ,
- le 24 tensioni sferiche,
- i 24 cerchi deviatorici di raggio  $s$ ,
- le relative tensioni deviatoriche,

relativi allo stato tensionale corrispondente ai valori indicati della pressione  $p$  e dell'intensità della tensione deviatorica  $s$ .

Congiungendo gli estremi delle 24 tensioni totali si ottiene con buona approssimazione l'ellisse, tracciata con un tratto più spesso.

Nelle figure seguenti sono riprodotte le 4 precedenti senza tracciare i cerchi deviatorici; ciò consente di evidenziare la costruzione dell'ellisse.

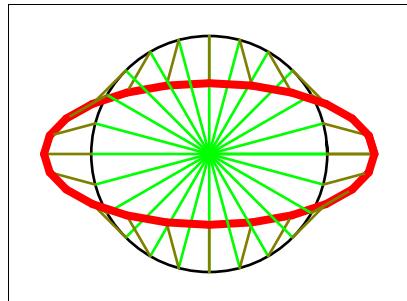


Fig. 4.5  $p = 5; s = 2$

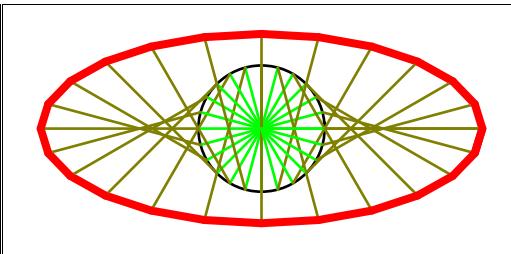


Fig. 4.6  $p = 2; s = 5$

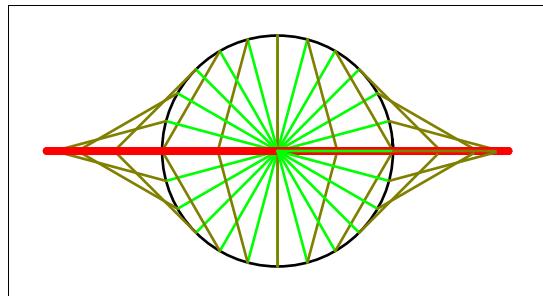


Fig. 4.7  $p = 5; s = 5$

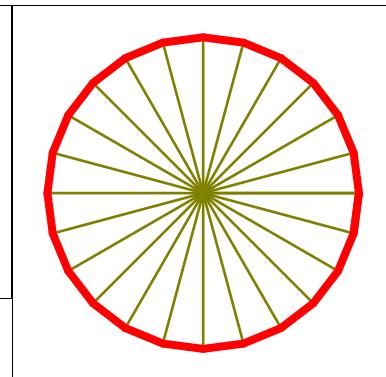


Fig. 4.8  $p = 0; s = 5$



## 4.2. Il riferimento di Mohr

L'idea di MOHR è quella di osservare il vettore tensione come se si fosse seduti su di una *sedia girevole* avendo sempre avanti a sè il versore  $\mathbf{n}$ .

In tal caso la tensione sferica appare fissa mentre quella deviatorica ruota in verso opposto a quello di cui ruota il versore (e quindi la sedia) e con velocità doppia, descrivendo il *cerchio* di MOHR.

Tale ultima proprietà è conseguenza della riflessione effettuata dalla parte deviatorica dello stato tensionale. Essa consente di individuare i vettori tensione nel riferimento di MOHR sfruttando la proprietà che gli angoli al centro e quelli alla circonferenza che sottendono archi uguali sono gli uni il doppio degli altri.

## 4.3. Costruzione del cerchio di Mohr

Il tensore simmetrico rappresentativo di uno stato tensionale bidimensionale è noto se si conoscono le tensioni  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  in corrispondenza di due normali non parallele  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ .

Se le normali  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  coincidono con i versori di un prefissato riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  la matrice associata allo stato tensionale avrà quali colonne le componenti dei corrispondenti vettori tensione  $\mathbf{t}_x$  e  $\mathbf{t}_y$

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{t}_x] = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \end{vmatrix}; \quad [\mathbf{t}_y] = \begin{vmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{vmatrix},$$

con  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

In generale, se si assegnano le tensioni corrispondenti a due qualsiasi normali non parallele  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ , la simmetria del tensore dello stato tensionale impone che

$$\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_1.$$

Le tensioni  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  non possono quindi essere assegnate in modo indipendente.

Si denoterà con l'apice  $M$  i vettori tensione secondo MOHR e cioè le tensioni viste dal riferimento  $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp\}$ .

Noti i vettori tensione  $\mathbf{t}_1$  e  $\mathbf{t}_2$  in corrispondenza di due normali non parallele  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$ , il tracciamento del cerchio di MOHR si effettua valutando i corrispondenti vettori tensione secondo MOHR  $\mathbf{t}_i^M$ ,  $i = 1, 2$ .

I vettori tensione secondo MOHR sono i vettori tensione visti da un osservatore solidale col versore normale alla giacitura su cui agisce la tensione.

Si consideri la tensione  $\mathbf{t}_n$  agente su di una generica giacitura di normale  $\mathbf{n}$  ed il vettore  $[\mathbf{t}_n]$  delle sue componenti in un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ .

Sia  $\mathbf{R}_n$  la rotazione che trasforma il riferimento  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  in quello  $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp\}$  solidale con la normale  $\mathbf{n}$  e ad esso equiverso, definita da

$$\begin{cases} \mathbf{R}_n \mathbf{e}_x = \mathbf{n} \\ \mathbf{R}_n \mathbf{e}_y = \mathbf{n}^\perp \end{cases}.$$

Se il riferimento di MOHR  $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp\}$  è ruotato di un angolo  $\alpha$  rispetto al riferimento fisso  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  le componenti del vettore tensione secondo MOHR  $\mathbf{t}_n^M$  nel riferimento  $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp\}$  sono uguali alle componenti nel riferimento fisso  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  del vettore  $\mathbf{R}_n^{-1}\mathbf{t}_n$  chè è il vettore  $\mathbf{t}_n$  ruotato dell'angolo  $-\alpha$ .

In termini di componenti e di matrici rispetto al riferimento  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  si ha che

$$[\mathbf{n}] = \begin{vmatrix} n_x \\ n_y \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{n}^\perp] = \begin{vmatrix} -n_y \\ n_x \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{R}_n] = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & +n_x \end{bmatrix}.$$

Per l'ortogonalità della matrice  $[\mathbf{R}_n]$  vale la relazione  $[\mathbf{R}_n]^{-1} = [\mathbf{R}_n]^T$ .

Le componenti del vettore tensione secondo MOHR  $\mathbf{t}_n^M$  nel riferimento  $\{\mathbf{n}, \mathbf{n}^\perp\}$  sono quindi date da

$$[\mathbf{t}_n^M]_M = [\mathbf{R}_n]^T [\mathbf{t}_n].$$

Noti i vettori tensione  $\mathbf{t}_i^M$ ,  $i = 1, 2$  relativi a due normali ortogonali, le rispettive parti deviatoriche risulteranno opposte tra loro.

Il centro del cerchio si calcola allora facilmente come punto medio delle due tensioni secondo MOHR

$$\mathbf{t}_c^M = 1/2(\mathbf{t}_1^M + \mathbf{t}_2^M).$$

Il raggio del cerchio è dato dal modulo di uno dei vettori  $\mathbf{t}_1^M - \mathbf{t}_c^M$  o  $\mathbf{t}_2^M - \mathbf{t}_c^M$ .

In termini di componenti cartesiane posto

$$[\mathbf{t}_x] = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{t}_y] = \begin{vmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{vmatrix}$$

risulta

$$[\mathbf{t}_x^M]_M = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \end{vmatrix}_M, \quad [\mathbf{t}_y^M]_M = \begin{vmatrix} \sigma_y \\ -\tau_{xy} \end{vmatrix}_M.$$

Il centro del cerchio è allora individuato dal vettore

$$[\mathbf{t}_c^M]_M = \frac{1}{2} ([\mathbf{t}_x^M - \mathbf{t}_y^M]_M) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \\ 0 \end{vmatrix}_M.$$

Osservando inoltre che

$$r^2 = \| \mathbf{t}_1^M - \mathbf{t}_c^M \|^2 = \frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2,$$

il raggio del cerchio risulta pari a

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \tau_{xy}^2}.$$

Tracciato il cerchio di MOHR, sia noto il versore della normale associato ad un vettore tensione secondo MOHR.

La proprietà di riflessione, caratteristica della parte deviatorica dello stato tensionale bidimensionale, consente di individuare un qualsiasi altro vettore tensione di MOHR od il relativo versore normale quando si conosca uno di essi.

La procedura consiste nel far ricorso alla seguente notevole proprietà.

Gli angoli al centro e quelli alla circonferenza che sottendono archi uguali sono gli uni il doppio degli altri.

La costruzione va condotta ricordando che

l'angolo formato dai vettori delle tensioni deviatoriche ha ampiezza doppia e verso opposto a quello formato dai relativi versori delle normali.

La procedura da seguire può essere pertanto così descritta.

- Se sono noti i versori  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  e la tensione di MOHR  $\mathbf{t}_1^M$ , la tensione  $\mathbf{t}_2^M$  si può valutare con la seguente costruzione  
dal punto  $\mathbf{t}_1^M$  si traccia la parallela al versore  $\mathbf{n}_2$  intersecando il cerchio nel punto  $\mathbf{t}_a^M$  e da questo si traccia la parallela al versore  $\mathbf{n}_1$  intersecando il cerchio nel punto  $\mathbf{t}_2^M$ .
- Analogamente se sono noti il versore  $\mathbf{n}_1$  e le tensioni di MOHR  $\mathbf{t}_1^M$  e  $\mathbf{t}_2^M$ , la direzione del versore  $\mathbf{n}_2$  si può valutare conducendo per il punto  $\mathbf{t}_2^M$  la parallela al versore  $\mathbf{n}_1$  intersecando il cerchio nel punto  $\mathbf{t}_a^M$ . La congiungente  $\mathbf{t}_a^M$  con  $\mathbf{t}_1^M$  fornisce quindi la direzione di  $\mathbf{n}_2$ .

#### 4.3.1. Esempi di costruzione del Cerchio

La costruzione descritta è stata implementata su elaboratore mediante il programma MATHEMATICA.

I risultati numerici e grafici relativi ad alcuni esempi notevoli di stati tensionali, sono esposti nel seguito.

Si riporta qui un esempio di ingresso dati che consente il rispetto della proprietà di simmetria  $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_1$ .

Assegnati  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  e  $\mathbf{t}_1$ , se risulta  $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$  allora si può assegnare ad arbitrio l'ampiezza  $k$  della tensione  $\mathbf{t}_2$  ponendo

$$\mathbf{t}_2 = k\mathbf{n}_1^\perp.$$

Se risulta invece  $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_2 \neq 0$  si può assegnare l'angolo antiorario  $\alpha \neq \pi/2$  che la direzione del vettore  $\mathbf{t}_2$  forma con  $\mathbf{n}_1$ .

La tensione  $\mathbf{t}_2$  è allora fornita dall'espressione

$$\mathbf{t}_2 = k\mathbf{R}_\alpha\mathbf{n}_1$$

dove  $\mathbf{R}_\alpha$  denota la rotazione di ampiezza  $\alpha$ .

La matrice associata a  $\mathbf{R}_\alpha$  nel riferimento  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$  è fornita da

$$[\mathbf{R}_\alpha] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & +\cos \alpha \end{bmatrix}$$

La condizione di simmetria  $\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{n}_1$  consente quindi di determinare lo scalare  $k$

$$k = (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{n}_2) / (\mathbf{R}\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1).$$

Se le normali  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{n}_2$  non sono ortogonali tra loro, per tracciare il cerchio di MOHR conviene calcolare la tensione associata alla normale ortogonale ad una di esse, e sia  $\mathbf{n}_1$ .

A tal fine, ponendo

$$\mathbf{n} = c_1\mathbf{n}_1 + c_2\mathbf{n}_2,$$

le condizioni  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$  ed  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  forniscono le equazioni

$$c_1 + c_2(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 0, \quad c_1^2 + c_2^2 + 2c_1c_2(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2) = 1.$$

La soluzione

$$c_2 = \sqrt{\frac{1}{1 - (\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)^2}}; \quad c_1 = -c_2(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2),$$

consente di valutare la tensione sulla giacitura di normale  $\mathbf{n}$  mediante la formula

$$\mathbf{t} = (c_1\mathbf{t}_1 + c_2\mathbf{t}_2) / \|c_1\mathbf{n}_1 + c_2\mathbf{n}_2\|.$$

**Esempio 1.**

In figura 4.9 sono riportati i dati.

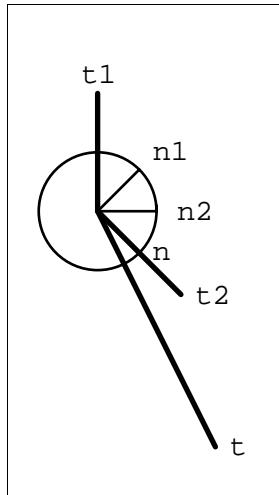


Fig. 4.9

Le normali e le rispettive tensioni sono

$$[\mathbf{n}_1] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}; \quad [\mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad [\mathbf{n}] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{t}_1] = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}; \quad [\mathbf{t}_2] = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}; \quad [\mathbf{t}] = \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \end{vmatrix}.$$

I vettori delle tensioni di MOHR risultano pari a

$$[\mathbf{t}_1^M]_M = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}_M; \quad [\mathbf{t}_2^M]_M = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}_M,$$

$$[\mathbf{t}^M]_M = \sqrt{2} \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}_M.$$

In figura 4.10 è disegnata la costruzione del cerchio di MOHR.

In figura 4.11 è indicata la costruzione che, noti  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{t}_1^M$ , permette di valutare  $\mathbf{n}_2$  o  $\mathbf{t}_2^M$  quando è noto uno di essi.

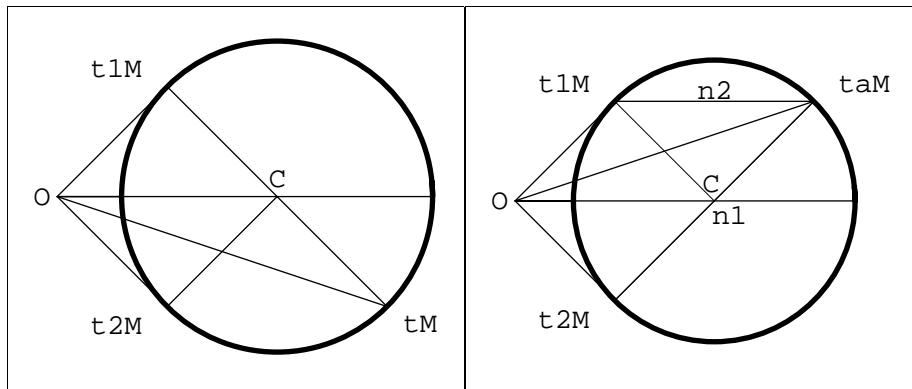


Fig. 4.10

Fig. 4.11

**Esempio 2.**

In questo secondo esempio si considera un caso in cui i due versori  $\mathbf{n}_1$  ed  $\mathbf{n}_2$  sono ortogonali.

In figura 4.12 sono riportati i dati.

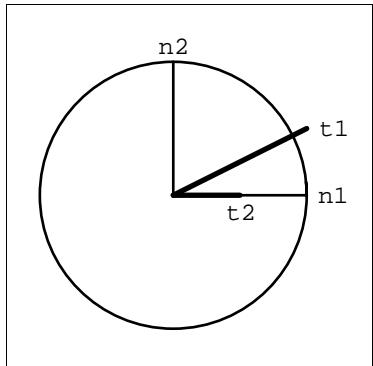


Fig. 4.12

Le normali e le rispettive tensioni sono

$$[\mathbf{n}_1] = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}; [\mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$[\mathbf{t}_1] = \begin{vmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{vmatrix}; [\mathbf{t}_2] = \begin{vmatrix} 0.5 \\ 0.0 \end{vmatrix}.$$

I vettori delle tensioni di MOHR sono dati da

$$[\mathbf{t}_1^M]_M = \begin{vmatrix} 1.0 \\ 0.5 \end{vmatrix}_M; [\mathbf{t}_2^M]_M = \begin{vmatrix} 0.0 \\ -0.5 \end{vmatrix}_M.$$

In figura 4.13 è disegnata la costruzione del cerchio di MOHR.

In figura 4.14 è indicata la costruzione che, noti  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{t}_1^M$ , permette di valutare  $\mathbf{n}_2$  o  $\mathbf{t}_2^M$  quando è noto uno di essi.

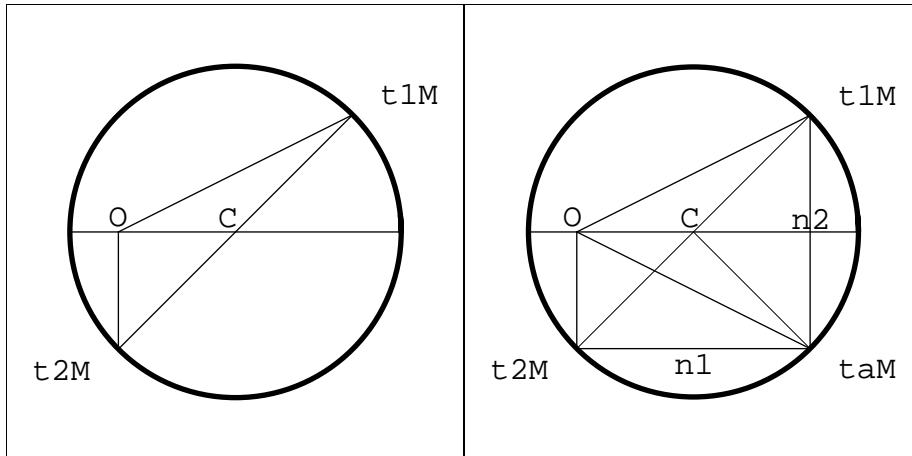


Fig. 4.13

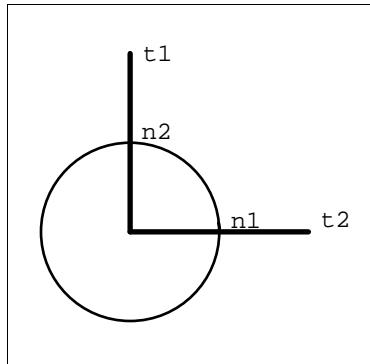
Fig. 4.14



**Esempio 3.**

Si consideri il caso particolare di uno stato tensionale da *puro taglio*.

In figura 4.15 sono riportati i dati.



Le normali e le rispettive tensioni sono

$$[\mathbf{n}_1] = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}; [\mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{t}_1] = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}; [\mathbf{t}_2] = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}.$$

I vettori delle tensioni di MOHR sono dati da

$$[\mathbf{t}_1^M]_M = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}_M; [\mathbf{t}_2^M]_M = \begin{vmatrix} 0 \\ -2 \end{vmatrix}_M.$$

Fig. 4.15

In figura 4.16 è disegnata la costruzione del cerchio di MOHR.

In figura 4.17 è indicata la costruzione che, noti  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{t}_1^M$ , permette di valutare  $\mathbf{n}_2$  o  $\mathbf{t}_2^M$  quando è noto uno di essi.

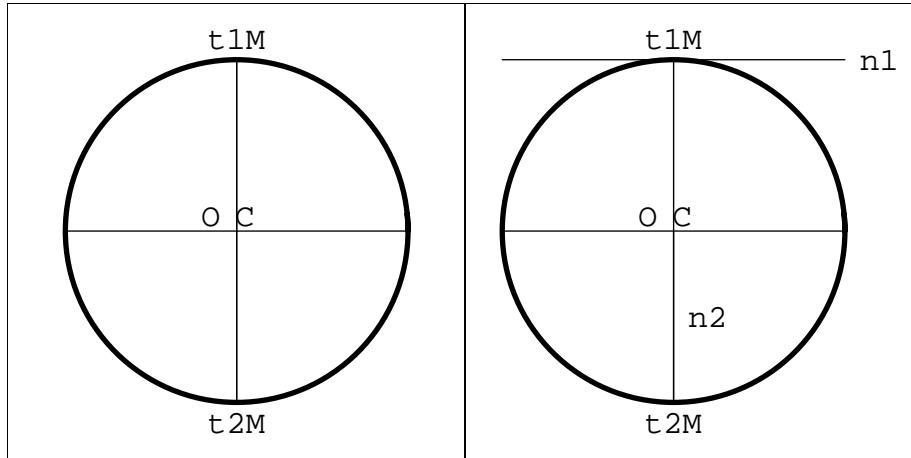


Fig. 4.16

Fig. 4.17

**Esempio 4.**

Come ultimo esempio si consideri il caso di uno stato tensionale *monoassiale* con asse  $e_2$ . In figura 4.18 sono riportati i dati.

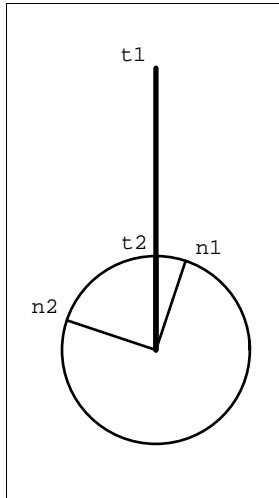


Fig. 4.18

Le normali e le rispettive tensioni sono

$$[\mathbf{n}_1] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}; [\mathbf{n}_2] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix},$$

$$[\mathbf{t}_1] = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \end{vmatrix}; [\mathbf{t}_2] = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

I vettori delle tensioni di MOHR sono dati da

$$[\mathbf{t}_1^M]_M = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 9 \\ 3 \end{vmatrix}_M; [\mathbf{t}_2^M]_M = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{vmatrix} 1 \\ -3 \end{vmatrix}_M.$$

In figura 4.19 è disegnata la costruzione del cerchio di MOHR. Il raggio del cerchio vale  $\sqrt{5/2}$ . In figura 4.20 è indicata la costruzione che, noti  $\mathbf{n}_1$  e  $\mathbf{t}_1^M$ , permette di valutare  $\mathbf{n}_2$  o  $\mathbf{t}_2^M$  quando è noto uno di essi.

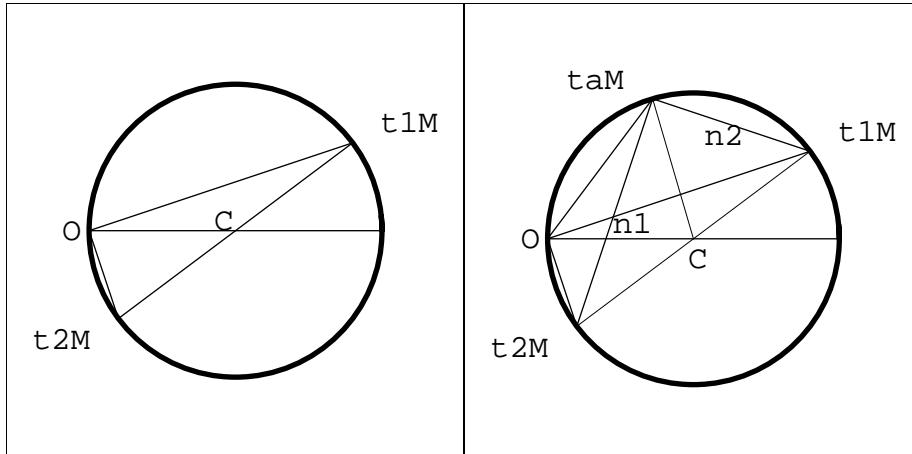


Fig. 4.19

Fig. 4.20

#### 4.4. Stati tensionali tridimensionali

La trattazione precedente può essere estesa per considerare uno stato tensionale  $\mathbf{T}$  tridimensionale.

Sia  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  un riferimento ortonormale principale per  $\mathbf{T}$ .

La matrice  $[\mathbf{T}]$  associata a  $\mathbf{T}$  assume la forma canonica

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Le tensioni relative alle normali contenute in un piano principale apparterranno anch'esse a tale piano ed è quindi possibile ripetere per ognuno dei piani principali la medesima costruzione descritta nel caso bidimensionale.

Si ottengono così tre cerchi principali di MOHR che descrivono il variare delle tensioni relative ai tre fasci di normali.

La rappresentazione delle tensioni relative a normali che siano comunque dirette nello spazio tridimensionale è più complessa ed è discussa nel seguito.

##### 4.4.1. Arbelo di Mohr

Si consideri ora il cerchio principale di MOHR relativo al piano  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$  definito da un centro di ascissa  $c_3$  e da un raggio  $r_3$  forniti rispettivamente dalle espressioni

$$c_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, \quad r_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

in cui si è supposto, senza ledere la generalità, che  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ .

La matrice canonica di  $\mathbf{T}$  può essere allora così decomposta

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_3 & 0 & 0 \\ 0 & -r_3 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 - \sigma_1 + \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

La tensione  $\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n}$  associata alla generica normale  $\mathbf{n}$  può essere scritta come

$$\mathbf{t} = c_3 \mathbf{n} + \mathbf{d}_3$$

e risulta quindi somma di un vettore di ampiezza  $c_3$  diretto come  $\mathbf{n}$  e di un vettore  $\mathbf{d}_3$  di componenti

$$[\mathbf{d}_3] = \begin{bmatrix} r_3 n_1 \\ -r_3 n_2 \\ (r_3 - \sigma_1 + \sigma_3) n_3 \end{bmatrix}$$

in cui  $\{n_1, n_2, n_3\}$  sono le componenti del versore  $\mathbf{n}$ .

Il modulo del vettore  $\mathbf{d}_3$  vale

$$\begin{aligned}\|\mathbf{d}_3\| &= \sqrt{r_3^2 n_1^2 + r_3^2 n_2^2 + (r_3 - \sigma_1 + \sigma_3)^2 n_1^2} \\ &= \sqrt{r_3^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3) n_3^2}\end{aligned}$$

pertanto, se la normale  $\mathbf{n}$  varia su di un cono di asse  $\mathbf{e}_3$  la componente  $n_3$  sarà costante e quindi anche il modulo di  $\mathbf{d}_3$  rimarrà costante.

Inoltre il modulo di  $\mathbf{d}_3$  sarà non maggiore di  $r_3$  se  $\sigma_3$  è la tensione principale intermedia e non minore di  $r_3$  in caso contrario.

Se si traccia un diagramma ottenuto sovrapponendo tutti i semipiani definiti dai versori  $\mathbf{n}$  e dalle corrispondenti tensioni  $\mathbf{t} = c_3 \mathbf{n} + \mathbf{d}_3$  e si disegnano in esso i tre cerchi principali di MOHR si può concludere che le estremità dei vettori tensione non possono uscire dalla zona a forma di falchetto, detta ARBELO di MOHR, compresa tra i tre cerchi.

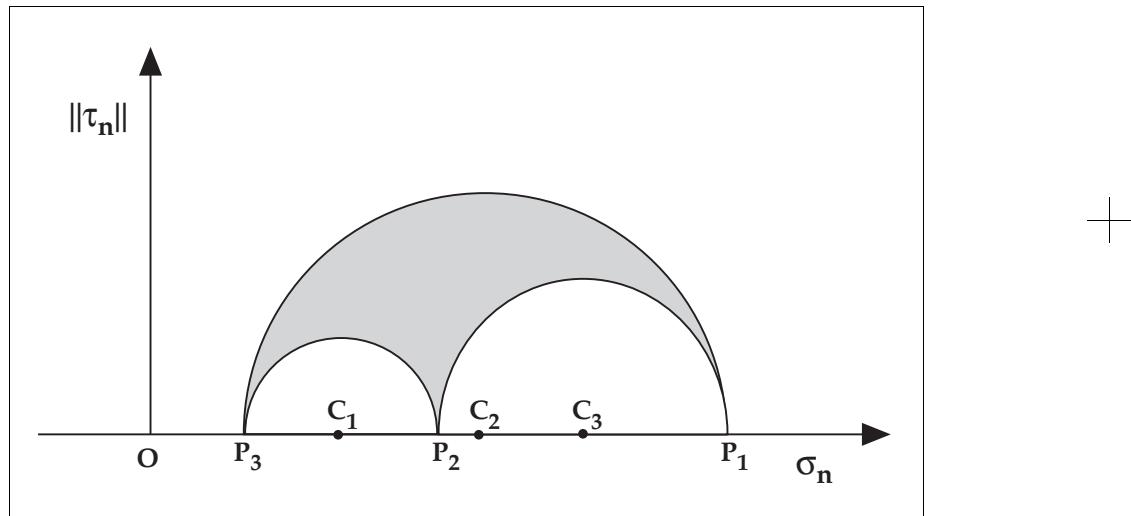


Fig. 4.21 Arbelo di Mohr

#### 4.5. Spinta delle terre. Teoria di Coulomb-Rankine

Una classica applicazione del cerchio di MOHR è quella che consente di valutare le spinte, attiva e passiva, di un terrapieno indefinito ed omogeneo in cui sia stato realizzato uno sbancamento.

Il problema viene studiato nel piano  $\pi$  ortogonale alla direzione dello sbancamento supponendo che la tensione principale parallela a tale direzione sia intermedia tra le altre due.

La teoria di RANKINE assume che il comportamento limite del terreno sia governato su ogni giacitura da un modello di COULOMB<sup>70</sup> con attrito e coesione descritto in figura 4.22.

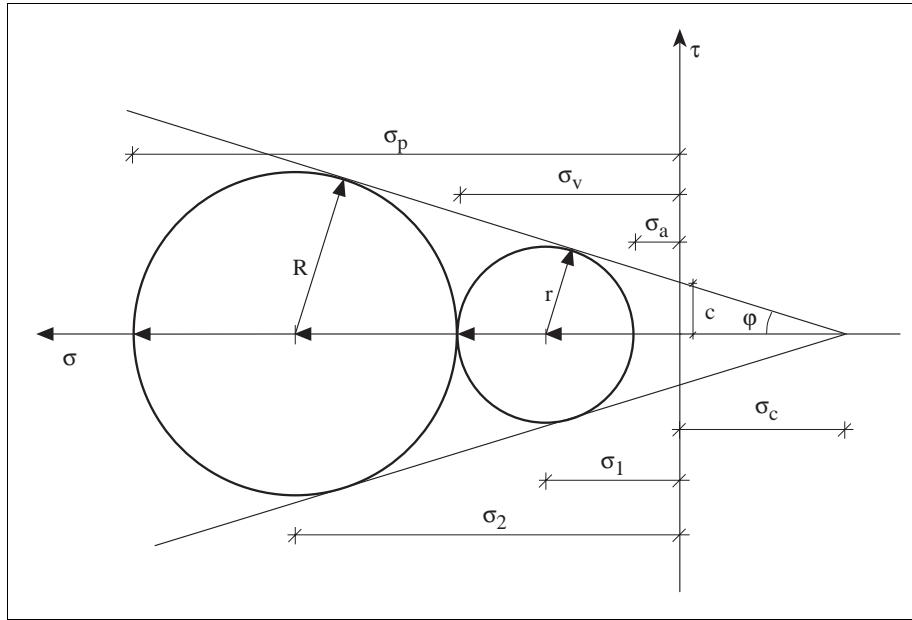


Fig. 4.22 Criterio di Coulomb

<sup>70</sup> CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736-1806). Nato ad Angoulême in Languedoc da famiglia benestante ebbe un'ottima educazione prima nella città natale e poi a Parigi. Nel 1770 entrò nell'Ecole du Génie a Mézières e dopo circa due anni divenne luogotenente del Corpo del Genio Militare. Dal 1764 al 1772 fu impegnato nella Martinique (indie orientali) nella costruzione del forte Bourbon. Questa esperienza fu importante per la formazione di COULOMB ma gli procurò seri malanni di cui egli soffri per il resto della vita. Nel 1773, tornato in Francia a Bouchain, presentò all'Académie des Sciences di Parigi il primo lavoro dal titolo *Essai sur une application des règles, de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* in cui studiava con i metodi del calcolo delle variazioni l'influenza dell'attrito e della coesione in problemi di statica. Nel 1777 sottopose all'Accademia un altro famoso lavoro sulla bussola magnetica in cui affrontò e risolse il problema della torsione di cilindri sottili e mostrò come la bilancia torsionale consenta di misurare le forze con grande precisione. Nel 1779 fu inviato a Rochefort per collaborare col MARCHESE DE MONTALEMBERT nella costruzione di un forte ed ivi ideò la *Théorie des machines simples* che gli valse il Gran Premio dell'Académie des Sciences nel 1781. COULOMB fu quindi eletto all'Accademia e si dedicò completamente alle ricerche di fisica pubblicando 25 memorie sull'elettricità ed il magnetismo tra il 1781 ed il 1806, lavorando in stretto contatto con BOSSUT, BORDA, DE PRONY e LAPLACE. A COULOMB è dovuta la scoperta che nella legge di attrazione tra le cariche elettriche di segno opposto compare l'inverso del quadrato della distanza, analogamente alla legge di attrazione delle masse formulata da NEWTON. Nel 1790 ebbe il primo figlio e nel 1797 il secondo da LOUISE FRANÇOISE LEPROUST DESORMEAUX che poi sposò nel 1802. Nel 1789, con la rivoluzione l'Accademia fu chiusa nel 1793 e sostituita dall'Institut de France dove COULOMB entrò nel 1795. Negli ultimi anni egli si interessò dell'organizzazione scolastica in Francia quale ispettore generale della pubblica istruzione.

La condizione limite impone che la tensione su ogni giacitura non possa uscire dal cono di attrito. E' conveniente assumere positive le tensioni normali di compressione.

L'attrito viene misurato mediante l'angolo  $\varphi$  di apertura del cono di attrito. La coesione  $c$  è la tensione tangenziale limite in assenza di tensione normale. Essa fornisce l'ordinata del punto intersezione del cono di attrito con l'asse delle tensioni tangenziali nel piano di MOHR. Il vertice del cono di attrito è ubicato sull'asse delle tensioni normali ed è individuato dall'ascissa

$$\sigma_c = -c / \tan \varphi.$$

La tensione principale verticale viene assunta pari a quella presente nel terrapieno prima dello sbancamento e pari a

$$\sigma_v = p + \gamma x$$

dove  $p$  è il valore del sovraccarico per unità di superficie agente sul terrapieno e diretto verso il basso,  $\gamma$  è il peso specifico del terreno ed  $x$  è la profondità.

Detta  $h$  l'altezza dello scavo, la tensione principale verticale alla quota fondo scavo vale quindi

$$\sigma_v = p + \gamma h.$$

La *spinta attiva*  $\sigma_a$  e la *spinta passiva*  $\sigma_p$  secondo RANKINE, mostrate in figura 4.23, sono i valori minimo e massimo della tensione principale orizzontale nel piano  $\pi$  che portano lo stato tensionale al limite di ammissibilità.

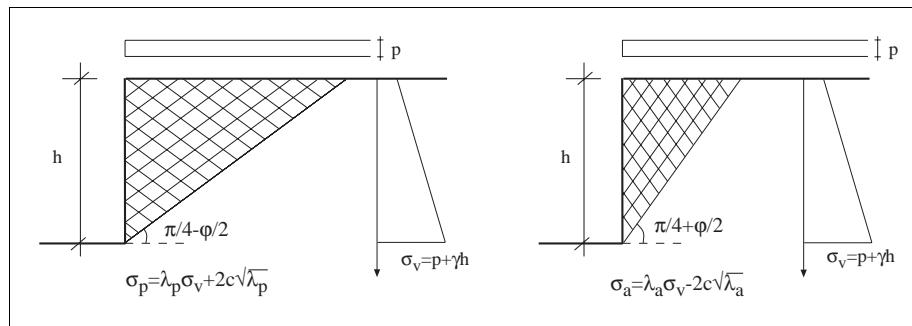


Fig. 4.23 Spinte attiva e passiva secondo Rankine

Esse rappresentano, alla quota considerata, le spinte di compressione per unità di superficie su di un'opera di sostegno dello scavo (che si dirà un *muro*) nelle due diverse condizioni limiti che si attingono rispettivamente quando il fronte dello scavo spinge sul muro (spinta attiva) ovvero quando il muro è spinto verso il fronte dello scavo (spinta passiva).

La costruzione del cerchio di MOHR fornisce un semplice strumento per analizzare gli stati limiti di spinta attiva e passiva.

Con riferimento alla figura 4.22 la spinta attiva è infatti fornita dalle relazioni

$$\sigma_a = \sigma_v - 2r,$$

$$(\sigma_1 - \sigma_c) \sin \varphi = r,$$

$$\sigma_1 + r = \sigma_v,$$

e quella passiva dalle relazioni

$$\sigma_p = \sigma_v + 2R,$$

$$(\sigma_2 - \sigma_c) \sin \varphi = R,$$

$$\sigma_2 - R = \sigma_v.$$

Un semplice calcolo fornisce allora le espressioni

$$\sigma_a - \sigma_c = (\sigma_v - \sigma_c) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi},$$

$$\sigma_p - \sigma_c = (\sigma_v - \sigma_c) \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}.$$

Definendo i coefficienti di spinta attiva e passiva

$$\lambda_a := \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}, \quad \lambda_p := \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2(\pi/4 + \varphi/2),$$

risulta

$$\lambda_a \lambda_p = 1,$$

e le spinte attiva e passiva si scrivono nella forma

$$\sigma_a - \sigma_c = \lambda_a (\sigma_v - \sigma_c),$$

$$\sigma_p - \sigma_c = \lambda_p (\sigma_v - \sigma_c).$$

Tali espressioni sono valide per  $\varphi > 0$ .

Nel caso di attrito nullo esse vanno sostituite dalle seguenti

$$\sigma_a = \sigma_v - 2 \sigma_c,$$

$$\sigma_p = \sigma_v + 2 \sigma_c,$$

come risulta evidente dalla figura 4.24.

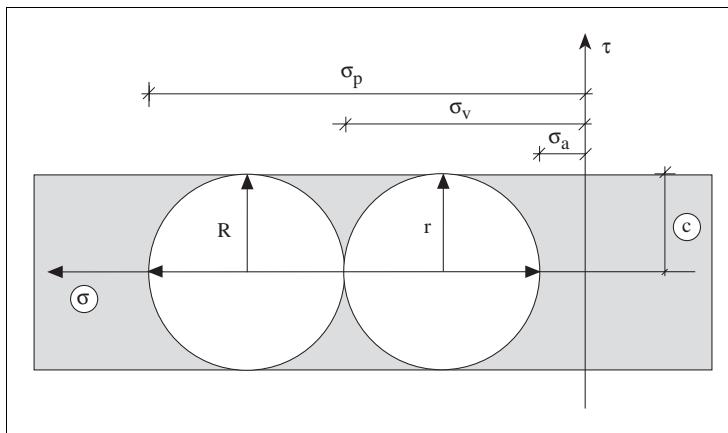


Fig. 4.24 Criterio di Coulomb in assenza di attrito

**Osservazione 4.1.** Ai coefficienti  $\lambda_a$  e  $\lambda_p$  può darsi una espressione diversa e valida per ogni valore di  $\varphi$ , osservando che

$$1 - \sin \varphi = \sin(\pi/2) - \sin \varphi = 2 \cos(\pi/4 + \varphi/2) \sin(\pi/4 - \varphi/2),$$

$$1 + \sin \varphi = \sin(\pi/2) + \sin \varphi = 2 \sin(\pi/4 + \varphi/2) \cos(\pi/4 - \varphi/2).$$

Risulta quindi

$$\lambda_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = \frac{\tan(\pi/4 - \varphi/2)}{\tan(\pi/4 + \varphi/2)}, \quad \lambda_p = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \frac{\tan(\pi/4 + \varphi/2)}{\tan(\pi/4 - \varphi/2)}.$$

Essendo inoltre

$$\tan(\pi/4 - \varphi/2) \tan(\pi/4 + \varphi/2) = 1,$$

si ottengono le formule

$$\lambda_a = \tan^2(\pi/4 - \varphi/2),$$

$$\lambda_p = \tan^2(\pi/4 + \varphi/2).$$

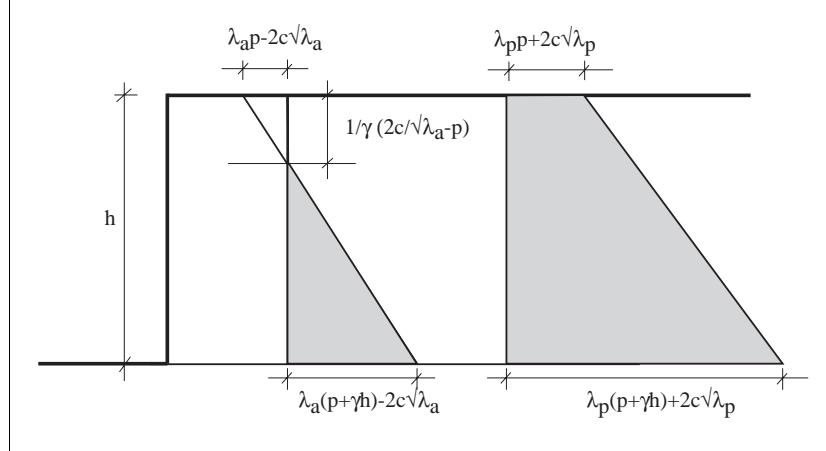


Fig. 4.25 Spinte attiva e passiva

In virtù della relazione

$$\tan(2\varphi) = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi},$$

risulta poi

$$\frac{2 \tan(\pi/4 - \varphi/2)}{1 - \tan^2(\pi/4 - \varphi/2)} = \tan(\pi/2 - \varphi) = \frac{1}{\tan \varphi},$$

$$\frac{2 \tan(\pi/4 + \varphi/2)}{1 - \tan^2(\pi/4 + \varphi/2)} = \tan(\pi/2 + \varphi) = -\frac{1}{\tan \varphi},$$

e quindi

$$\frac{1}{\tan \varphi} = \frac{2 \sqrt{\lambda_a}}{1 - \lambda_a} = -\frac{2 \sqrt{\lambda_p}}{1 - \lambda_p}.$$

Ricordando che  $\sigma_c = -c / \tan \varphi$  si deducono le espressioni

$$\sigma_a = \lambda_a \sigma_v - 2 c \sqrt{\lambda_a},$$

$$\sigma_p = \lambda_p \sigma_v + 2 c \sqrt{\lambda_p},$$

che forniscono formule alternative per le spinte attiva e passiva.

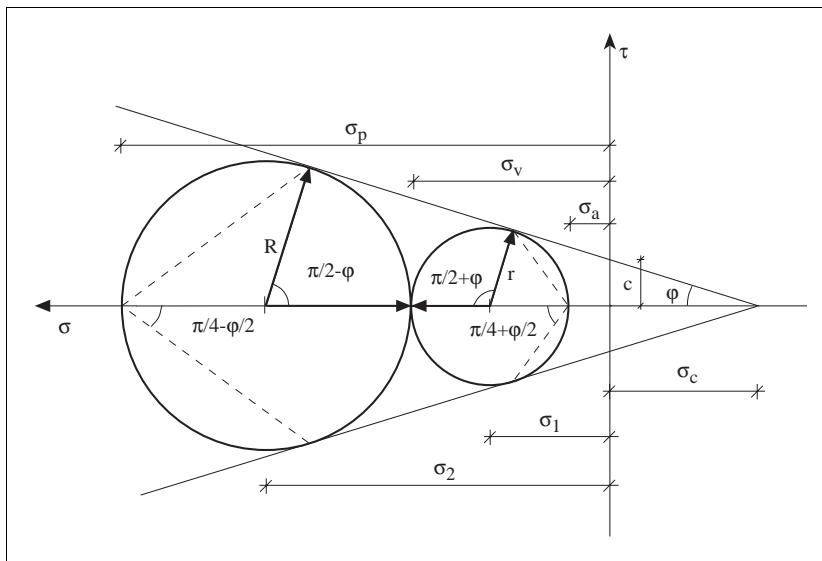


Fig. 4.26 Direzioni delle giaciture in spinta attiva e passiva

Poichè le spinte possono essere solo di compressione, per la spinta attiva deve risultare

$$\lambda_a (p + \gamma x) - 2 c \sqrt{\lambda_a} \geq 0.$$

Se la coesione è sufficientemente elevata in rapporto al sovraccarico da far sì che

$$\frac{2 c}{\sqrt{\lambda_a}} - p \geq 0,$$

la spinta attiva diventerà efficace solo a partire dalla *quota critica*

$$x_c = \frac{1}{\gamma} \left[ \frac{2 c}{\sqrt{\lambda_a}} - p \right],$$

come mostrato in figura 4.25. ■

In figura 4.23 sono rappresentati i cunei di terrapieno in stato limite attivo e passivo.

Le inclinazioni rispetto all'orizzontale delle giaciture su cui vengono attinti i valori limite delle tensioni possono essere desunti dalla costruzione dei cerchi di MOHR come indicato in figura 4.26.

I vettori rappresentativi delle tensioni deviatoriche sulle giaciture limite risultano infatti ruotati rispetto al vettore rappresentativo della tensione deviatorica sulla giacitura orizzontale rispettivamente di

- $\pi/2 - \varphi$  nel cerchio di MOHR relativo alla spinta passiva,
- $\pi/2 + \varphi$  nel cerchio di MOHR relativo alla spinta attiva.

Ne consegue, per la proprietà della rappresentazione di MOHR, che le rispettive normali formano tra loro un angolo pari alla metà e cioè

- $\pi/4 - \varphi/2$  per la spinta passiva,
- $\pi/4 + \varphi/2$  per la spinta attiva.

Tali quindi sono anche gli angoli tra le giaciture limiti e l'orizzontale.

Alcuni valori medi dell'angolo di attrito  $\varphi$  e della coesione  $c$  per vari tipi di terreno sono riportati nella seguente tabella.

TERRENO	$\phi$ (GRADI)	$c$ N/m <sup>2</sup>
<i>Ghiaia</i>	$34^\circ \div 37^\circ$	0
<i>Sabbia</i>	$30^\circ \div 35^\circ$	10
<i>Marna</i>	$16^\circ \div 30^\circ$	20
<i>Limo</i>	$20^\circ \div 27^\circ$	100
<i>Argilla sabbiosa</i>	$16^\circ \div 22^\circ$	$20 \div 50$
<i>Argilla plastica</i>	$11^\circ \div 17^\circ$	100
<i>Argilla solida</i>	$10^\circ \div 12^\circ$	$500 \div 1000$
<i>Tufi vulcanici</i>	$0^\circ$	$1000 \div 10000$

## RIFERIMENTI

1. C.A. COULOMB, Essai sur une application des règles, de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture, *Mém. divers savants*, **7**, 343-382 (1776).
2. A. FRESNEL, Supplément au mémoire sur la double réfraction (1822), *Œuvres*, (2) **4**, 343-367 (1866).
3. A. FRESNEL, Second supplément au mémoire sur la double réfraction (1822), *Œuvres*, (2) **4**, 369-422 (1866).
4. A.L. CAUCHY, Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, *Bull. Soc. Philomath.*, 9-13 = *Œuvres* (2) **2**, 300-304 (1823).
5. A.L. CAUCHY, De la pression ou tension dans un corps solide, *Ex. de Mathématique*, **2**, 42-56 (1822) = *Œuvres*, (2) **7**, 60-78 (1827).
6. A.L. CAUCHY, Sur les équations qui sont les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique, *Ex. de Mathématique*, **3**, 160-187 (1822) = *Œuvres*, (2) **8**, 195-226 (1828).
7. G. LAMÉ, P.E. CLAPEYRON, Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes, *Mém. divers savants*, (2) **4**, 465-562 (1833).
8. G. LAMÉ, Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité, Paris (1833), 2<sup>a</sup> ed. 1866.
9. P.E. CLAPEYRON, Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur, *J. École Polytech.*, **15**, 93-132 (1834).
10. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIa/2, , 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).
11. J.H. ARGYRIS, Continua and Discontinua, *Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech.*, AFFDL-TR-66-80 (Oct. 26-28, 1965), Wright-Patterson AFB, Ohio, (1966).

+

+

+

+

## IV – MODELLI STRUTTURALI

La trattazione del modello del continuo di CAUCHY è stata sviluppata in dettaglio nel capitolo II in modo tale che gli altri modelli strutturali di continui mono, bi e tridimensionali, anche con microstruttura, possano essere trattati in perfetta analogia.

Nella prima sezione di questo capitolo, ripercorrendo lo stesso iter logico e procedurale seguito nel capitolo II, saranno sinteticamente riformulati gli elementi fondamentali della teoria dei modelli continui allo scopo di richiamare ed illustrare le definizioni ed i risultati che sono alla base dell’analisi di ogni modello strutturale.

Nelle successive sezioni si sviluppa prima l’analisi dei modelli monodimensionali di asta, di fune e di trave con e senza deformabilità a taglio, e quindi quella dei modelli bidimensionali di piastra con e senza deformabilità a taglio.

La panoramica di modelli strutturali si chiude con un’analisi dei continui tridimensionali con microstruttura.

### 1. MODELLI CONTINUI

La sintesi che viene presentata in questa sezione consente di rivisitare le definizioni e le proprietà principali dei modelli continui in una visione sinottica che fornisce un quadro organico e comprensivo della teoria dell’equilibrio e della congruenza delle strutture.

Le notazioni sono identiche a quelle adottate nel capitolo II con la notevole eccezione del campo di sforzo che è denotato con la lettera greca  $\sigma$  per riservare il simbolo  $T$  al campo dello stato tensionale nel continuo di CAUCHY.

Il lettore potrà riformulare le dimostrazioni delle varie proposizioni consultando la trattazione svolta per il continuo di CAUCHY capitolo II.

Sia  $\Omega$  un dominio limitato con frontiera generalmente regolare  $\partial\Omega$  immerso in uno spazio euclideo  $\mathcal{E}^n$  di dimensione  $n = 1, 2, 3$ , e sia  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  la chiusura.

Sia poi  $\mathcal{T}(\Omega)$  un’arbitraria suddivisione finita di  $\Omega$  in elementi.

Un campo vettoriale su  $\mathcal{T}(\Omega)$  è una famiglia finita di funzioni ciascuna definita su un elemento di  $\mathcal{T}(\Omega)$  ed a valori in uno spazio vettoriale di dimensione finita.

Siano  $H(\Omega)$  e  $\mathcal{H}(\Omega)$  campi vettoriali di quadrato integrabile su  $\Omega$ .

Un modello strutturale continuo  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B})$  è definito dai seguenti ingredienti.

- L’operatore cinematico  $\mathbf{B} : C^m(\overline{\Omega}) \mapsto C^{k-m}(\overline{\Omega})$  è un operatore differenziale di ordine  $m$  che ad ogni campo vettoriale  $\mathbf{v} : \Omega \mapsto V$  di classe  $C^k(\overline{\Omega})$  associa un campo tensoriale  $\mathbf{B}\mathbf{v} : \Omega \mapsto L(V; V)$  di classe  $C^{k-m}(\overline{\Omega})$ .

Più in generale l'operatore cinematico può essere definito da una famiglia finita di operatori differenziali ciascuno dei quali opera su un campo appartenente ad una corrispondente famiglia finita di campi vettoriali su  $\Omega$ .

- L'*operatore statico*  $\mathbf{B}'_o : C^m(\overline{\Omega}) \mapsto C^{k-m}(\overline{\Omega})$  è un operatore differenziale di ordine  $m$  che ad ogni campo di sforzi  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \mapsto V$  di classe  $C^k(\overline{\Omega})$  associa un campo vettoriale sorgente  $\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} : \Omega \mapsto V$  di classe  $C^{k-m}(\overline{\Omega})$ .

Più in generale l'operatore statico, detto anche *operatore di equilibrio di massa*, è definito una famiglia finita di operatori differenziali ciascuno dei quali opera su un campo appartenente ad una corrispondente famiglia finita di campi vettoriali su  $\Omega$ .

- L'operatore di equilibrio di massa e l'operatore cinematico sono in *dualità formale* nel senso che sussitono le relazioni

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{B}\mathbf{v}) \, dv = \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in C^m(\Omega), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega),$$

$$\int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dv = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{B}\mathbf{v}) \, dv, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in C^m(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{D}_H(\Omega),$$

dove  $\mathbb{D}_H \subset H$  e  $\mathbb{D}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$  sono i sottospazi costituiti dai campi indefinitamente derivabili ed a supporto compatto nell'aperto  $\Omega$ .

- Lo *spazio ambiente cinematico*  $H(\Omega)$  è costituito da campi vettoriali di quadrato integrabile su  $\Omega$ . Ad ogni cinematicismo di  $H(\Omega)$  corrisponde una deformazione tangente distribuzionale  $\mathbb{B}\mathbf{v} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}$  definita da

$$(\mathbb{B}\mathbf{v})(\boldsymbol{\sigma}) := \int_{\Omega} (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{D}_{\mathcal{H}}(\Omega).$$

- Lo *spazio ambiente degli sforzi*  $\mathcal{H}(\Omega)$  è costituito da campi tensoriali di quadrato integrabile su  $\Omega$ . Ad ogni campo di sforzo di  $\mathcal{H}(\Omega)$  corrisponde una forza di massa distribuzionale  $\mathbb{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{D}'_H$  definita da

$$(\mathbb{B}'_o \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} (\mathbf{B}\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in H(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{D}_H(\Omega).$$

- Lo *spazio cinematico*  $\mathcal{V}(\Omega)$  è costituito dai campi cinematici  $\mathbf{v} \in H(\Omega)$  dotati di una *suddivisione di supporto*  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ .

Ciò significa che alle restrizioni  $\mathbf{v}|_{\mathcal{P}}$  di  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  agli elementi  $\overline{\mathcal{P}}$  di  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$  corrispondono deformazioni tangenti distribuzionali  $\mathbb{B}\mathbf{v}|_{\mathcal{P}} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}(\mathcal{P})$  di quadrato integrabile su  $\mathcal{P}$ .

Sia  $\mathbf{B} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathcal{H}(\Omega)$  con  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$  parte regolare della deformazione tangente distribuzionale associata a  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$ , costituita dal prodotto cartesiano dei campi  $\mathbf{B}\mathbf{v}|_{\mathcal{P}} \in \mathcal{H}(\mathcal{P})$  al variare di  $\mathcal{P}$  in  $\mathcal{T}_{\mathbf{v}}(\Omega)$ .

Si doti quindi lo spazio  $\mathcal{V}(\Omega)$  del prodotto interno

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{V}} := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{Bu} : \mathbf{Bv} \, dv,$$

e della corrispondente norma

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}}^2 := \int_{\Omega} \|\mathbf{v}\|^2 \, dv + \int_{\Omega} \|\mathbf{Bv}\|^2 \, dv.$$

E' questa per  $\mathcal{V}(\Omega)$  la più economica topologia di spazio pre-HILBERT che rende limitato l'operatore lineare  $\mathbf{B} : \mathcal{V}(\Omega) \mapsto \mathcal{H}(\Omega)$  e pertanto si può scrivere

$$\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}(\Omega); \mathcal{H}(\Omega)\}.$$

■ Lo spazio delle forze  $\mathcal{F}(\Omega)$  è il duale topologico dello spazio cinematico  $\mathcal{V}(\Omega)$ .  $\mathcal{F}(\Omega)$  è quindi uno spazio di BANACH.

■ Lo spazio degli sforzi  $\mathcal{S}(\Omega)$  è costituito dai campi di sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega)$  dotati di una suddivisione di supporto  $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\sigma}}(\Omega)$ .

Ciò significa che alle restrizioni  $\boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{P}}$  di  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\Omega)$  agli elementi  $\bar{\mathcal{P}}$  di  $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\sigma}}(\Omega)$  corrispondono sorgenti distribuzionali  $\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{P}} \in \mathbb{D}'_H(\mathcal{P})$  di quadrato integrabile su  $\mathcal{P}$ .

Sia  $\mathbf{B}'_o : \mathcal{S}(\Omega) \mapsto H(\Omega)$  con  $\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \in H(\Omega)$  parte regolare della forza di massa distribuzionale associata a  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\Omega)$ , costituita dal prodotto cartesiano dei campi  $\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}|_{\mathcal{P}} \in H(\mathcal{P})$  al variare di  $\mathcal{P}$  in  $\mathcal{T}_{\boldsymbol{\sigma}}(\Omega)$ .

Dotando lo spazio  $\mathcal{S}(\Omega)$  del prodotto interno

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathcal{S}} := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau} \, dv + \int_{\Omega} \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau} \, dv,$$

e della corrispondente norma

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}}^2 := \int_{\Omega} \|\boldsymbol{\sigma}\|^2 \, dv + \int_{\Omega} \|\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}\|^2 \, dv,$$

l'operatore lineare  $\mathbf{B}'_o : \mathcal{S}(\Omega) \mapsto H(\Omega)$  diventa limitato e dunque si può scrivere

$$\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}(\Omega); H(\Omega)\}.$$



- Un *vincolo perfetto, liscio e bilaterale* è definito assegnando una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ , considerando lo spazio  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  dei cinematismi  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}(\Omega)$  per i quali la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  è di supporto e definendo un sottospazio lineare chiuso dei *cinematismi conformi*:

$$\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) \subseteq \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)).$$

- Lo spazio dei *sistemi di forze reattive o reazioni vincolari* è il sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{R}(\Omega) \subseteq \mathcal{F}(\Omega)$  definito dalle seguenti condizioni di complementarietà

$$\mathcal{R}(\Omega) = \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))^{\perp}, \quad \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) = \mathcal{R}(\Omega)^{\perp},$$

dove il simbolo  $\perp$  indica il complemento ortogonale rispetto al prodotto scalare potenza virtuale.

- Un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}(\Omega)$  è in equilibrio se risulta  $\mathbf{f} \in \mathcal{V}_{\text{o}}^{\perp} = (\text{Ker } \mathbf{B})^{\perp}$ .
- Lo spazio delle *forze attive*  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\Omega)$  è lo spazio di HILBERT duale di  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$ . Un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\Omega)$  è in equilibrio se

$$\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} = (\text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)))^{\perp}.$$

L'operatore cinematico è un *operatore di KORN* se soddisfa la *seconda diseguaglianza di KORN*:

$$\| \mathbf{B}\mathbf{u} \|_{\mathcal{H}(\Omega)} + \| \mathbf{u} \|_{H(\Omega)} \geq \alpha \| \mathbf{u} \|_{H^m(\Omega)}, \quad \forall \mathbf{u} \in H^m(\Omega).$$

Tale diseguaglianza equivale ad assumere che per ogni sottospazio lineare  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  di cinematismi conformi, l'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in \text{L}(\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)); \mathcal{H}(\Omega))$  goda delle seguenti proprietà [30], [32]:

- Il nucleo  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)) = \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)$  è un sottospazio lineare di  $\mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  avente dimensione finita.
- Lo spazio immagine  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  è un sottospazio lineare chiuso di  $\mathcal{H}(\Omega)$ .

Sussiste allora il seguente fondamentale risultato.

**Proposizione 1.1. Teorema delle potenze virtuali.** *Per ogni sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^{\perp}$  in equilibrio sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)), \mathbf{B})$  esiste almeno uno stato di sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega)$  con esso in equilibrio e cioè tale che la potenza virtuale compiuta da  $\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^{\perp}$  per un qualsiasi cinemัsmo conforme  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  sia eguale alla potenza virtuale compiuta dallo stato di sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega)$  per la corrispondente deformazione tangente  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{H}(\Omega)$ . In formule*

$$\ell \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}(\Omega)^{\perp} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{L}}(\mathcal{T}(\Omega)) \iff \exists \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega) : \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega)).$$

□



### 1.1. Formula di Green e teorema di Cauchy

Si considerino gli spazi di HILBERT  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  e  $\mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega))$  costituiti dai campi cinematici e statici per i quali la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$  è di supporto. Sussiste allora la *formula di GREEN*:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{B}\mathbf{v} \, d\mathbf{v} = \int_{\Omega} \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{v} + \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)), \\ \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega)). \end{cases}$$

dove

- $\boldsymbol{\Gamma} \in L\{\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)); \partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))\}$  è l'operatore di traccia al contorno associato all'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)); \mathcal{H}(\Omega)\}$ .

Lo spazio  $\partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega)) \subset \mathcal{L}^2\partial\mathcal{T}(\Omega)$  è lo spazio lineare delle tracce sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  che può essere dotato di una struttura di spazio di HILBERT.

- $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega)); \partial\mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega))\}$  è l'operatore di flusso al contorno definito dalla formula di GREEN.

Lo spazio  $\partial\mathcal{F}(\mathcal{T}(\Omega))$  è lo spazio lineare dei flussi attraverso il contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ , duale dello spazio di HILBERT  $\partial\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

- La forma bilineare continua su  $\mathcal{S}(\mathcal{T}(\Omega)) \times \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$   $\langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \rangle\rangle$  è l'estensione per continuità dell'integrale

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \, da.$$



Nel seguito si ometterà l'argomento  $\mathcal{T}(\Omega)$  per cui si scriverà ad es.  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$ .

Vale il seguente fondamentale teorema.

**Proposizione 1.2. Teorema di Cauchy.** *Sia  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  una struttura vincolata con vincoli al contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  in corrispondenza di una suddivisione base  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Allora per un sistema di forze di massa e di contatto  $\{\mathbf{b}, \mathbf{t}\} \in H(\Omega) \times \partial\mathcal{F}$  ed uno stato di sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  vale la condizione variazionale di equilibrio*

$$(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{T}, \mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \mathbf{T} \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

se e solo se sono soddisfatte le equazioni

$\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b},$	equilibrio di massa,
$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{t} + [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}]^\perp$	equilibrio al contorno,

dette equazioni di equilibrio di CAUCHY, in cui  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ .

□



## 1.2. Congruenza

Un *sistema cinematico*  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{V}(\Omega)$  è *congruente* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  se, posto  $\mathbf{w} \in \mathcal{V} : \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{w} = \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  si ha che

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

ovvero

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{w} \in \mathcal{L} \iff \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}\mathbf{w} \in \mathbf{B}\mathcal{L}.$$

Il sottospazio lineare degli sforzi in *autoequilibrio*  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  è definito da

$$\boxed{\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^\perp \quad \text{in } \mathcal{H}(\Omega).}$$

Se  $\mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}, \mathcal{H}(\Omega)\}$  è un operatore di KORN, allora sussiste la relazione di ortogonalità

$$\boxed{\mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^{\perp\perp} = [\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp \quad \text{in } \mathcal{H}(\Omega),}$$

e quindi si ha che

*Proprietà di decomposizione dello spazio  $\mathcal{H}(\Omega)$ .*

- Il sottospazio lineare  $\mathbf{B}\mathcal{L}$  delle deformazioni tangentì congruenti ed il sottospazio lineare  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  degli sforzi autoequilibrati effettuano una decomposizione dello spazio di HILBERT  $\mathcal{H}(\Omega)$  delle *deformazioni tangentì regolari* come somma diretta di due complementi ortogonali.

$$\mathcal{H}(\Omega) = \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \dot{+} \mathbf{B}\mathcal{L},$$

con

$$\begin{cases} \mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\mathbf{B}\mathcal{L}]^\perp, \\ \mathbf{B}\mathcal{L} = [\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp. \end{cases}$$

Sussiste allora l'equivalenza

$$\langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \iff \exists \mathbf{u} \in \mathcal{L} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

Si ha inoltre che

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \Sigma \cap \mathcal{S}_\sigma,$$

essendo

$$\boxed{\Sigma = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} \in [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}]^\perp\} \iff \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\}.}$$

il sottospazio lineare degli *sforzi conformi* e

$$\boxed{\mathcal{S}_o := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o}\} = \text{Ker } \mathbf{B}'_o.}$$

il sottospazio lineare degli *sforzi in equilibrio con forze di massa nulle*.

**Proposizione 1.3.** *In una struttura vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  sia  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{w}\} \in \mathcal{H}(\Omega) \times \mathcal{V}$  un sistema cinematico costituito da un atto di distorsione  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega)$  e da un atto di cedimento vincolare  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ . Sussiste allora l'equivalenza*

$$(\!(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}\mathbf{w})\!) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \iff \exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}.$$

**Dim.** Basta porre  $\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B}\mathbf{w}$  al posto di  $\boldsymbol{\varepsilon}$  nella prelazione precedente.  $\square$

Sia  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  una struttura vincolata con  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  e  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H}(\Omega) \times \partial\mathcal{V}$  un sistema cinematico, costituito da un *atto di distorsione*  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega)$  e da un *atto di cedimento vincolare*  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$ .

Un sistema cinematico è *congruente* se esiste almeno un cinematismo  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  che soddisfa le *condizioni di congruenza*

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L}.$$

- $\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$  è la *condizione differenziale di congruenza*,
- $\Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L}$  è la *condizione di congruenza al contorno*.

La suriettività dell'operatore  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  dei valori al contorno dei cinematici assicura che per ogni atto di cedimento vincolare  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  esiste almeno un cinematismo  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  tale che  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

Pertanto una formulazione equivalente delle condizioni di congruenza consiste nel richiedere che esista almeno un cinematismo conforme  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  tale che

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{v}_o, \quad \Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}.$$

Vale il seguente risultato.

**Proposizione 1.4. Condizione variazionale di congruenza.** *Si consideri una struttura  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  vincolata con condizioni di vincolo imposte al contorno di una suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Allora un sistema cinematico  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \partial\mathbf{w}\} \in \mathcal{H}(\Omega) \times \partial\mathcal{V}$  è congruente e cioè*

$$\exists \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon},$$

*se e solo se è soddisfatta la condizione variazionale*

$$(\!(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon})\!) = (\!(\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w})\!) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

$\square$



Valgono i seguenti risultati per la cui dimostrazione si rinvia alla sezione II.10 (p. 243).

- *rappresentazione delle forze di massa in equilibrio*

$$\mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\}, \quad \boxed{\mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus \Rightarrow \text{Im } \mathbf{B}'_o = H.}$$

- *rappresentazione dei valori al contorno dei cinematismi conformi*

$$\mathbf{\Gamma L} = (\mathbf{N} \Sigma)^\perp.$$

- *rappresentazione del flusso al contorno degli sforzi conformi*

$$\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial \mathcal{F}\}, \quad \boxed{\mathbf{N} \Sigma = (\mathbf{\Gamma L})^\perp \Rightarrow \text{Im } \mathbf{N} = \partial \mathcal{F}.}$$

- *rappresentazione dei cinematismi rigidi conformi*

$$\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L} = [\mathbf{B}'_o \Sigma]^\oplus.$$

- *deformazioni associate a cinematismi conformi*

$$\mathbf{BL} = [\text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \Sigma]^\oplus = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}^\oplus.$$

- *decomposizione* dello spazio  $H(\Omega)$  come somma diretta di complementi ortogonali

$$H(\Omega) = \mathcal{V}_{\text{RIG}} \dot{+} \mathbf{B}'_o \Sigma, \quad \begin{cases} \mathcal{V}_{\text{RIG}} = [\mathbf{B}'_o \Sigma]^\oplus, \\ \mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus. \end{cases}$$

- *rappresentazione delle forze di contatto in equilibrio*

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\text{Ker } \mathbf{B}'_o) &= [\mathbf{\Gamma}(\text{Ker } \mathbf{B})]^\perp, \\ \mathbf{\Gamma}(\text{Ker } \mathbf{B}) &= [\mathbf{N}(\text{Ker } \mathbf{B}'_o)]^\perp. \end{aligned}$$

- *rappresentazione delle forze di contatto in equilibrio*

$$\boxed{\mathbf{NS}_o + [\mathbf{\Gamma L}]^\perp = \mathbf{N}(\mathcal{S}_o + \Sigma) = [\mathbf{\Gamma V}_{\text{RIG}}]^\perp \subseteq \partial \mathcal{F}.}$$

■ rappresentazione dei cinematismi al contorno congruenti

$$\boxed{\Gamma \mathcal{V}_o + [\mathbf{N}\Sigma]^\perp = \Gamma(\mathcal{V}_o + \mathcal{L}) = [\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}}]^\perp \subseteq \partial \mathcal{V}.}$$

■ rappresentazione delle forze reattive in equilibrio

$$\boxed{\mathbf{N}\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\Gamma\mathcal{L}]^\perp \cap [\Gamma\mathcal{V}_o]^\perp \subseteq \partial \mathcal{F} \Rightarrow \mathbf{N}\mathcal{S}_o = [\Gamma\mathcal{V}_o]^\perp.}$$

■ rappresentazione dei cinematismi conformi congruenti

$$\boxed{\Gamma\mathcal{V}_{\text{RIG}} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp \cap [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp \subseteq \partial \mathcal{V} \Rightarrow \Gamma\mathcal{V}_o = [\mathbf{N}\mathcal{S}_o]^\perp.}$$

■ condizioni variazionali di equilibrio

- |      |  |
|------|--|
| i)   | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$ |
| ii)  | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Bv} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$                     |
| iii) | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o,$  |
| iv)  | $(\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}.$   |

dove  $\mathbf{b} \in H$ ,  $\mathbf{t} \in \partial \mathcal{F}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in (\Gamma\mathcal{L})^\perp = \mathbf{N}\Sigma$ .

■ condizioni variazionali di congruenza

- |      |   |
|------|---|
| i)   | $\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} + \partial \mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S},$ |
| ii)  | $\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,$                            |
| iii) | $\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} + \partial \mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_o,$   |
| iv)  | $\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle\rangle - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$   |

dove  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega)$ ,  $\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V}$ ,  $\mathbf{u} \in H$ ,  $\partial \mathbf{v} \in (\mathbf{N}\Sigma)^\perp = \Gamma\mathcal{L}$ .

■ regole di complementarietà.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathbf{u} \in \mathcal{V} & \iff \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}, \\ \mathbf{v} \in \mathcal{L} & \iff \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ \mathbf{b} \in H & \iff \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega), \\ \mathbf{t} \in \partial \mathcal{F} & \iff \partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V}, \\ \mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \mathcal{H}(\Omega)\} & \iff \mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\}, \\ \Gamma \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\} & \iff -\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial \mathcal{F}\}. \end{array}}$$

### 1.3. Analogia di Mohr

In alcune strutture monodimensionali gli aspetti cinematici e statici del modello sono strettamente correlati.

Nel seguito si illustrano due circostanze di interesse per le applicazioni.

- Si assuma che l'operatore cinematico e l'aggiunto formale siano identici, risulti cioè  $H(\Omega) = \mathcal{H}(\Omega)$  e  $\mathbf{B}'_o = \mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; H(\Omega)\}$ . Ne segue che sussiste anche l'eguaglianza  $\mathcal{V}(\Omega) = \mathcal{S}(\Omega)$ .

In tal caso, essendo  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle = (\cdot, \cdot)$ , la formula di GREEN gode della *proprietà di antisimmetria*:

$$\begin{aligned}\gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &= (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u}) - (\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \\ &= (\mathbf{B}'_o\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) - (\mathbf{u}, \mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}) = -\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S},\end{aligned}$$

e cioè

$$\gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle = -\langle\langle \mathbf{N}\mathbf{u}, \Gamma\boldsymbol{\sigma} \rangle\rangle = -\gamma(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}.$$

Se  $\mathbf{B}'_o = \mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; H(\Omega)\}$  i problemi dell'equilibrio e della congruenza sono legati da una analogia. Per mostrarlo si consideri la formulazione variazionale del problema della congruenza

$$(\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,$$

e si effettuino le sostituzioni

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \in H(\Omega) &\iff \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega), \\ \mathbf{v} \in \mathcal{L} &\iff \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega) &\iff \mathbf{b} \in H(\Omega), \\ \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V} &\iff \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}.\end{aligned}$$

Si ponga inoltre  $\Gamma\mathbf{u}_w = \partial\mathbf{w}$  e  $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{t}$  con  $\mathbf{u}_w \in \mathcal{V}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_t \in \mathcal{S}$ .

Si ottiene così la condizione variazionale

$$(\mathbf{B}'_o\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) - \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{v}, \Gamma\boldsymbol{\sigma}_t \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \Sigma.$$

Tenendo conto dell'eguaglianza  $\mathbf{B}'_o = \mathbf{B}$  e dell'antisimmetria

$$\langle\langle \mathbf{Nv}, \Gamma\sigma_t \rangle\rangle = -\langle\langle \mathbf{N}\sigma_t, \Gamma v \rangle\rangle,$$

si perviene alla condizione variazionale di equilibrio per un *problema ausiliario*

$$(\sigma, \mathbf{Bv}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma v \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \Sigma.$$

E' importante osservare che il sottospazio dei cinematismi conformi da considerare nel problema ausiliario dell'equilibrio è eguale al sottospazio degli sforzi conformi dell'originario problema di congruenza.

Viceversa, una formulazione variazionale del problema dell'equilibrio

$$(\sigma, \mathbf{Bv}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma v \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

effettuando le sostituzioni inverse, si trasforma in un *problema ausiliario* di congruenza

$$(\mathbf{B}'_o \tau, \mathbf{u}) = (\tau, \varepsilon) - \langle\langle \mathbf{N}\tau, \Gamma w \rangle\rangle \quad \forall \tau \in \mathcal{L},$$

in cui il sottospazio degli sforzi conformi è eguale al sottospazio dei cinematismi conformi dell'originario problema dell'equilibrio.

Si ha quindi che

- se in un problema di congruenza (di equilibrio) i vincoli impongono che i cinematismi e gli sforzi conformi siano  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  e  $\tau \in \Sigma$ , nel problema ausiliario di equilibrio (di congruenza) sarà  $\mathbf{v} \in \Sigma$  e  $\tau \in \mathcal{L}$ . Dunque

Se il modello strutturale originario è  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  il *modello strutturale ausiliario* sarà  $\mathcal{M}\{\Omega, \Sigma, \mathbf{B}\}$ .

- Un analogo risultato sussiste se vale la relazione  $\mathbf{B}'_o = -\mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; H\}$  che induce la seguente *proprietà di simmetria*

$$\begin{aligned} \gamma(\sigma, \mathbf{u}) &= (\sigma, \mathbf{Bu}) - (\mathbf{B}'_o \sigma, \mathbf{u}) = \\ &= (\mathbf{u}, \mathbf{B}\sigma) - (\mathbf{B}'_o \mathbf{u}, \sigma) = \gamma(\mathbf{u}, \sigma), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Si ha cioè che

$$\gamma(\sigma, \mathbf{u}) = \langle\langle \mathbf{N}\sigma, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{Nu}, \Gamma\sigma \rangle\rangle = \gamma(\mathbf{u}, \sigma), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}.$$

I problemi dell'equilibrio e della congruenza risultano perfettamente analoghi a patto di effettuare le sostituzioni

$$\begin{aligned} -\mathbf{u} \in H(\Omega) &\iff \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega), \\ \mathbf{v} \in \mathcal{L} &\iff \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega) &\iff \mathbf{b} \in H(\Omega), \\ -\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V} &\iff \mathbf{t} \in \partial \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Per mostrarlo si effettuino le sostituzioni nella formulazione variazionale del problema di congruenza

$$(\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\varepsilon}) - \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{w} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma.$$

Tenendo conto dell'eguaglianza  $\mathbf{B}'_o = -\mathbf{B}$  e della simmetria

$$\langle \mathbf{N} \mathbf{v}, \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}_t \rangle = \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v} \rangle,$$

il problema originario si trasforma nella condizione variazionale di equilibrio

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{v}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \Sigma.$$

Ovviamente allo stesso risultato si perviene effettuando le sostituzioni

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \in H(\Omega) &\iff \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}(\Omega), \\ \mathbf{v} \in \mathcal{L} &\iff \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ -\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}(\Omega) &\iff \mathbf{b} \in H(\Omega), \\ -\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V} &\iff \mathbf{t} \in \partial \mathcal{F}. \end{aligned}$$

■ La prima formulazione di questa analogia con riferimento al modello di trave di EULER-BERNOULLI è dovuta ad OTTO MOHR<sup>71</sup> ed è nota in letteratura come *analogia di Mohr*.

L'analogia di MOHR sarà illustrata in dettaglio nel prossimo capitolo con riferimento ai modelli strutturali monodimensionali.

---

<sup>71</sup> OTTO MOHR (1835-1918)

## 2. MODELLI SU VARIETÀ

In questa sezione si mostra come, facendo ricorso agli strumenti di geometria differenziale illustrati nella sezione I.12 (p. 129), sia possibile formulare in completa generalità un modello strutturale le cui configurazioni sono varietà differenziabili immerse in una varietà ambiente.

Le nozioni ed i risultati di questa sezione saranno applicati alla trattazione del modello monodimensionale di fune e del modello bidimensionale di membrana che saranno illustrati in dettaglio nel seguito.

### 2.1. Configurazioni, flussi e spostamenti virtuali

Nel caso generale un modello strutturale continuo è caratterizzato dagli elementi di seguito definiti.

- Lo *spazio fisico* è una varietà differenziabile  $\mathbb{S}$  senza bordo e di dimensione finita, modellata su  $\mathbb{R}^n$ ,
- Un *piazzamento di riferimento* è una sottovarietà di  $\mathbb{B} \subset \mathbb{S}$  di dimensione  $m \leq n$ .
- Una *configurazione* della struttura è un'applicazione  $\chi : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$ .
- Lo *spazio delle configurazioni* è lo spazio funzionale lineare  $C^k(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  delle applicazioni  $\chi : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$  differenziabili con continuità fino ad un ordine  $k \geq 1$ .

Lo spazio delle configurazioni è una varietà differenziabile modellata sullo spazio di BANACH  $C^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ .

- Lo *spazio tangente* in corrispondenza di una configurazione  $\chi \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  è definito da

$$\mathbb{T}_\chi C^k(\mathbb{B}, \mathbb{S}) := \{\mathbf{v} \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{S}}) : \pi_{\mathbb{S}} \circ \mathbf{v} = \chi\},$$

dove l'operatore  $\pi_{\mathbb{S}} : \mathbb{T}_{\mathbb{S}} \mapsto \mathbb{S}$  è il *proiettore* che ad ogni vettore applicato  $\mathbf{v}(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{v}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  associa il punto base  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ .

In altri termini lo spazio tangente  $\mathbb{T}_\chi C^k(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  è costituito da campi di vettori applicati  $\{\chi(\mathbf{p}), \mathbf{v}_{\mathbb{S}}\}$  con  $\mathbf{v}_{\mathbb{S}} \in \mathbb{T}_{\mathbb{S}}(\chi(\mathbf{p}))$ .

- Una configurazione è detta *ammissibile* se l'applicazione  $\chi \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  è una *inclusione differenziabile*. Ciò richiede che la corrispondenza  $\mathbb{B} \mapsto \chi(\mathbb{B})$  sia un *diffeomorfismo* e cioè un'applicazione invertibile e differenziabile con l'inversa. (vedasi [33] e [28], sezione 5.25).

Dal teorema sulle funzioni implicate segue che

- L'insieme delle *configurazioni ammissibili*  $\mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  è una sottovarietà aperta di  $C^k(\mathbb{B}, \mathbb{S})$ .

- Lo spazio tangente alla varietà delle *configurazioni ammissibili*  $\mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  nel punto  $\chi \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  è definito da

$$\mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S}) = \{\mathbf{v}_B \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{S}}) : \pi_{\mathbb{S}} \circ \mathbf{v}_B = \chi\}.$$

- Gli elementi dello spazio tangente  $\mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  sono detti *spostamenti tangenti* (o *spostamenti virtuali*).

Gli spostamenti virtuali  $\mathbf{v}_B \in \mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S})$  sono dunque campi definiti sulla struttura di riferimento  $\mathbb{B}$  ed a valori nel fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  dello spazio fisico  $\mathbb{S}$ .

Un *moto* della struttura nell'intervallo temporale  $I = [t_{in}, t_{fin}]$  è una famiglia ad un parametro di configurazioni

$$\chi : I \mapsto \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S}).$$

La configurazione al tempo  $t \in I$  della struttura nel moto  $\chi$  è denotata da  $\chi_t$ .

- La *traiettoria* della struttura nel moto  $\chi$  è l'insieme

$$\mathcal{F}_\chi(\mathbb{B}) := \{\{\mathbf{x}, t\} \in \mathbb{S} \times I : \mathbf{x} \in \chi_t(\mathbb{B})\}.$$

La descrizione spaziale di un campo di spostamenti virtuali si ottiene considerando un piazzamento  $\chi_t(\mathbb{B})$  della struttura e la funzione composta

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_B \circ \chi_t^{-1} \in C^k(\chi_t(\mathbb{B}), \mathbb{T}_{\mathbb{S}}),$$

con  $\mathbf{v}_B \in \mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{S})$ . Si ponga  $\mathbb{M} = \chi_s(\mathbb{B})$ .

- Il *flusso* della struttura nel moto  $\chi : I \mapsto \mathcal{A}(\mathbb{S}, \mathbb{S})$  è la mappa

$$\varphi : I \times I \mapsto \mathcal{A}(\mathbb{S}, \mathbb{S})$$

con  $\varphi_{t,s} \in \mathcal{A}(\mathbb{S}, \mathbb{S})$  definita da

$$\varphi_{t,s} \circ \chi_s := \chi_t,$$

e con  $\text{dom } \varphi_{t,s} = \mathbb{M}$ .

Il flusso è soluzione dell'equazione differenziale

$$\frac{d}{dt} \varphi_{t,s} = \mathbf{v}_t \circ \varphi_{t,s},$$

ed è univocamente individuato dalla condizione iniziale  $\varphi_{s,s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in \mathbb{M}$ .

## 2.2. Misura di deformazione

Sia  $\{\mathbb{S}, g\}$  una varietà di RIEMANN,  $\{\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}}\}$  una sua sottovarietà e  $T_{\mathbb{M}}$  e  $T_{\mathbb{S}}$  i corrispondenti fibrati tangentici. Si considerino quindi i seguenti operatori lineari limitati:

- $I_{\mathbb{S}} \in L\{T_{\mathbb{S}}; T_{\mathbb{S}}\}$  operatore identità su  $T_{\mathbb{S}}$ ,
- $I_{\mathbb{M}} \in L\{T_{\mathbb{M}}; T_{\mathbb{M}}\}$  operatore identità su  $T_{\mathbb{M}}$ ,
- $\Pi \in L\{T_{\mathbb{S}}; T_{\mathbb{M}}\}$  proiettore ortogonale da  $T_{\mathbb{S}}$  su  $T_{\mathbb{M}} \subset T_{\mathbb{S}}$
- $J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} \in L\{T_{\mathbb{M}}; T_{\mathbb{S}}\}$  immersione canonica di  $T_{\mathbb{M}}$  in  $T_{\mathbb{S}}$ .

Sussistono le proprietà:

$$\Pi \circ J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} = I_{\mathbb{M}}, \quad (J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} \circ \Pi)\mathbf{a} = \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{a} \in J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} T_{\mathbb{M}}.$$

La metrica  $g \in L\{T_{\mathbb{S}}; T_{\mathbb{S}}\}$  su  $\mathbb{S}$  induce in modo naturale una metrica sulla sottovarietà  $\mathbb{M} \subset \mathbb{S}$  definendo il tensore metrico  $g_{\mathbb{M}} \in L\{T_{\mathbb{M}}; T_{\mathbb{M}}\}$  mediante la relazione

$$g_{\mathbb{M}}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) := g(J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}_1, J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}_2), \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in T_{\mathbb{M}}.$$

**Proposizione 2.1.** *L'operatore di immersione canonica  $J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} \in L\{T_{\mathbb{M}}; T_{\mathbb{S}}\}$  coincide con il trasposto  $\Pi^T \in L\{T_{\mathbb{M}}; T_{\mathbb{S}}\}$  dell'operatore di proiezione  $\Pi \in L\{T_{\mathbb{S}}; T_{\mathbb{M}}\}$ . Risulta cioè*

$$J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} = \Pi^T \iff g_{\mathbb{M}}(\Pi \mathbf{a}, \mathbf{h}) = g(\mathbf{a}, J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in T_{\mathbb{M}}, \quad \forall \mathbf{a} \in T_{\mathbb{S}}.$$

**Dim.** Dalla proprietà caratteristica della proiezione ortogonale

$$g(J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\Pi \mathbf{a}, J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}) = g(\mathbf{a}, J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}) \quad \forall \mathbf{h} \in T_{\mathbb{M}}, \quad \forall \mathbf{a} \in T_{\mathbb{S}},$$

e dalla definizione della metrica indotta su  $T_{\mathbb{M}}$  si deduce che

$$g_{\mathbb{M}}(\Pi \mathbf{a}, \mathbf{h}) = g(J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\Pi \mathbf{a}, J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}) = g(\mathbf{a}, J_{\mathbb{S}\mathbb{M}}\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in T_{\mathbb{M}}, \quad \forall \mathbf{a} \in T_{\mathbb{S}}.$$

Dunque  $J_{\mathbb{S}\mathbb{M}} = \Pi^T \in L\{T_{\mathbb{M}}; T_{\mathbb{S}}\}$ .  $\square$

■ La misura di deformazione di GREEN su  $\mathbb{M}$  associa al flusso  $\varphi_{t,s} \in \mathcal{A}(\mathbb{S}, \mathbb{S})$  il campo tensoriale due volte covariante  $D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s}) : \mathbb{M} \mapsto L(T_{\mathbb{M}}, T_{\mathbb{M}}; \mathbb{R})$  definito da

$$\begin{aligned} D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s})[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2] &:= \frac{1}{2} [(\varphi_{t,s}^* g)(\Pi^T \mathbf{h}_1, \Pi^T \mathbf{h}_2) - g(\Pi^T \mathbf{h}_1, \Pi^T \mathbf{h}_2)] = \\ &= \frac{1}{2} [g(d\varphi_{t,s}[\Pi^T \mathbf{h}_1], d\varphi_{t,s}[\Pi^T \mathbf{h}_2]) - g(\Pi^T \mathbf{h}_1, \Pi^T \mathbf{h}_2)], \end{aligned}$$

per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in T_{\mathbb{M}}$ . Si noti che

$$d\varphi_{s,s} = I_{\mathbb{S}} \in L\{T_{\mathbb{S}}; T_{\mathbb{S}}\}.$$

La misura di deformazione  $D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s})$  si annulla se e solo se il flusso  $\varphi_{t,s} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}, \mathbb{S})$  è un'isometria per la varietà  $\mathbb{M}$  e cioè se la metrica negli spazi tangentici alle varietà  $\varphi_{t,s}(\mathbb{M})$  è indipendente dal parametro evolutivo  $t \in I$ .



### 2.3. Deformazione tangente

Sia  $\mathbf{v} \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_S)$  il campo vettoriale di velocità della sottovarietà  $\mathbb{M}$  lungo una traiettoria nello spazio ambiente  $S$ .

- La *deformazione tangente* di  $\mathbb{M}$  relativa al cinematismo  $\mathbf{v} \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_S)$  è la derivata rispetto al tempo, calcolata all'istante iniziale  $s \in I$ , della misura di deformazione di GREEN  $D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s}) : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R})$ :

$$(\mathbf{B}\mathbf{v})_s := \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s}).$$

Dall'espressione della misura di deformazione di GREEN, osservando che la derivata di LIE  $(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} g_{\mathbb{M}}) \in L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R})$  del tensore metrico sulla varietà  $\mathbb{M}$  è definita da

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} g_{\mathbb{M}})_s(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) := (\mathcal{L}_{\mathbf{v}} g)_s(\Pi^T \mathbf{h}_1, \Pi^T \mathbf{h}_2) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} (\varphi_{t,s}^* g)(\Pi^T \mathbf{h}_1, \Pi^T \mathbf{h}_2),$$

per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ , si deduce che la deformazione tangente in  $\mathbb{M}$  può essere equivalentemente espressa mediante la *formula di KILLING*

$$\mathbf{B}\mathbf{v} := \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} g_{\mathbb{M}} \in C^{k-1}(\mathbb{M}; L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R})).$$

La trattazione della sezione I.12.7 (p. 156) mostra poi che sussiste l'eguaglianza

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} g_{\mathbb{M}})(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = g((\nabla \mathbf{v})[\Pi^T \mathbf{h}_1], \Pi^T \mathbf{h}_2) + g(\Pi^T \mathbf{h}_1, (\nabla \mathbf{v})[\Pi^T \mathbf{h}_2]).$$

La deformazione tangente in  $\mathbb{M}$  assume allora l'espressione

$$(\mathbf{B}\mathbf{v})[\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2] := \frac{1}{2} g_{\mathbb{M}}((\Pi \nabla \mathbf{v} \Pi^T + \Pi (\nabla \mathbf{v})^T) \Pi^T) \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2,$$

per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ . Il campo tensoriale due volte covariante

$$\mathbf{B}\mathbf{v} := \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} g_{\mathbb{M}} \in C^{k-1}(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R}\}),$$

può essere trasformato nel campo di tensori misti  $\mathbf{B}\mathbf{v} \in C^{k-1}(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\})$ , denotato con lo stesso simbolo e definito dall'identità

$$g_{\mathbb{M}}((\mathbf{B}\mathbf{v}) \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \frac{1}{2} g_{\mathbb{M}}((\Pi \nabla \mathbf{v} \Pi^T + \Pi (\nabla \mathbf{v})^T) \Pi^T) \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2,$$

per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ .

- La *deformazione tangente*  $\mathbf{Bv} \in C^{k-1}(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_M\})$  è dunque un campo di tensori misti simmetrici definito da

$$\boxed{\mathbf{Bv} := \text{sym}(\boldsymbol{\Pi} \nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\Pi}^T).}$$

Si noti che

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{v} &\in L\{\boldsymbol{\Pi}^T \mathbb{T}_M, \mathbb{T}_S\}, \quad \boldsymbol{\Pi} \in L\{\mathbb{T}_S; \mathbb{T}_M\}, \\ (\nabla \mathbf{v})^T &\in L\{\mathbb{T}_S; \boldsymbol{\Pi}^T \mathbb{T}_M\}, \quad \boldsymbol{\Pi}^T \in L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_S\}.\end{aligned}$$

La deformazione tangente si annulla nella configurazione  $\mathbb{M} = \chi_s(\mathbb{B})$  se e solo se il campo di velocità  $\mathbf{v} \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_S)$  definisce una *isometria infinitesima* per  $\mathbb{M}$ .

La deformazione tangente si annulla poi lungo il flusso  $\varphi_{t,s} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}, \mathbb{S})$  se e solo se il flusso è isometrico per  $\mathbb{M}$  e cioè se

$$D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s}) = \mathbf{O}, \quad \forall t \in I.$$

Infatti sussistendo la relazione

$$\varphi_{\tau,s}^* \mathbf{g} - \mathbf{g} = (\varphi_{t,s}^* \circ \varphi_{\tau,t}^*) \mathbf{g} - \mathbf{g} = \varphi_{t,s}^* (\varphi_{\tau,t}^* \mathbf{g} - \mathbf{g}) + (\varphi_{t,s}^* \mathbf{g} - \mathbf{g}),$$

la deformazione di GREEN soddisfa la proprietà di consistenza

$$D_{\mathbb{M}}(\varphi_{\tau,s}) = \varphi_{t,s}^* D_{\mathbb{M}}(\varphi_{\tau,t}) + D_{\mathbb{M}}(\varphi_{t,s}),$$

ed il risultato segue dalla formula

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} D_{\mathbb{M}}(\varphi_{\tau,s}) = \varphi_{t,s}^* (\mathbf{Bv})_t.$$

**Osservazione 2.1.** Se lo spazio ambiente è euclideo, all'espressione della deformazione tangente in  $\mathbb{M}$  si può pervenire anche mediante un semplice calcolo diretto. Infatti la spinta inversa del tensore metrico ha l'espressione

$$(\varphi_{t,s}^* \mathbf{g})(\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2) := \mathbf{g}(d\varphi_{t,s}[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1], d\varphi_{t,s}[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2]), \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_M.$$

Si può allora valutare la derivata di LIE per ottenere il risultato:

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{g}_{\mathbb{M}})(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{g}(d\varphi_{t,s}[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1], d\varphi_{t,s}[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2]) = \\ &= \mathbf{g}((d\mathbf{v})[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1], \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1, (d\mathbf{v})[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2]) = \\ &= \mathbf{g}_{\mathbb{M}}(\boldsymbol{\Pi}(d\mathbf{v})[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1], \mathbf{h}_2) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\Pi}(d\mathbf{v})^T \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1, [\mathbf{h}_2]) = \\ &= \mathbf{g}_{\mathbb{M}}((\boldsymbol{\Pi} d\mathbf{v} \boldsymbol{\Pi}^T + \boldsymbol{\Pi} (d\mathbf{v})^T) \boldsymbol{\Pi}^T) \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2.\end{aligned}$$

Si noti che la prima eguaglianza è stata ottenuta mediante uno scambio nell'ordine di derivazione rispetto al tempo ed allo spazio. ■



L'espressione generale della deformazione tangente cui si è pervenuti sarà applicata nelle prossime sezioni per formulare il problema dell'equilibrio dei modelli strutturali delle funi e delle membrane le cui configurazioni occupano sottovarietà rispettivamente mono e bidimensionali dello spazio fisico tridimensionale euclideo.

**Osservazione 2.2.** La trattazione svolta può essere specializzata al caso del continuo di CAUCHY notando che in tale modello strutturale lo spazio fisico  $\mathbb{S}$  è lo spazio euclideo tridimensionale e le varietà di configurazione della struttura  $\mathbb{M} \subset \mathbb{S}$  sono domini limitati in  $\mathbb{S}$  per cui risulta

$$\mathbb{T}_{\mathbb{M}} = \mathbb{T}_{\mathbb{S}}.$$

Quindi  $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\Pi}^T = \mathbf{I}_{\mathbb{S}} \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}; \mathbb{T}_{\mathbb{S}}\}$  con  $\mathbf{I}_{\mathbb{S}}$ .  
Inoltre la derivata covariante  $\nabla$  coincide con la derivata dirazionale  $d$ .

La deformazione tangente è pertanto data da

$$\mathbf{Bv} := \frac{1}{2} [d\mathbf{v} + (d\mathbf{v})^T] = \text{sym } d\mathbf{v},$$

che è la classica formula di EULER. ■

## 2.4. Equilibrio

L'ente duale della deformazione tangente  $\mathbf{Bv} \in C^{k-1}(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\})$ , definita da

$$\mathbf{Bv} := \text{sym}(\boldsymbol{\Pi} \nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\Pi}^T),$$

è il campo di *sforzo* nella struttura

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\}),$$

che è un campo di tensori simmetrici di quadrato integrabile su  $\mathbb{M}$ . Per pervenire all'espressione della formula di GREEN si premettono le seguenti definizioni.

Siano  $m$  ed  $m - 1$  le dimensioni delle varietà  $\mathbb{M}$  e  $\partial\mathbb{M}$ .

- $\mathbf{i} : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \times L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}^m; \mathfrak{R}\} \mapsto L\{\mathbb{T}_{\partial\mathbb{M}}^{(m-1)}; \mathfrak{R}\}$  è l'*operazione di contrazione* definita dall'identità

$$(\mathbf{i}_h \boldsymbol{\mu}_{\mathbb{M}})(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{(m-1)}) = \boldsymbol{\mu}_{\mathbb{M}}(\mathbf{h}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{(m-1)}),$$

per ogni  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{(m-1)} \in \mathbb{T}_{\partial\mathbb{M}}$ .



Tra le forme di volume  $\mu_M$  e  $\mu_{\partial M}$  sulle varietà  $M$  e  $\partial M$  ed il versore  $n \in T_M$  normale alla varietà  $\partial M$  sussistono le relazioni

$$\begin{aligned} i_n \mu_M &= \mu_{\partial M} \iff \\ i_w \mu_M &= g(w, n) \mu_{\partial M}, \quad \forall w \in T_M, \end{aligned}$$

Siano quindi

$$A \in C^k(M; L\{T_M; T_S\}), \quad A^T \in C^k(M; L\{T_S; T_M\})$$

un campo tensoriale ed il suo aggiunto, legati dall'identità

$$g(Ah, v) = g_M(h, A^T v), \quad \forall v \in C^k(M; T_S), \quad \forall h \in T_M.$$

La derivata covariante del campo tensoriale  $A^T \in C^k(M; L\{T_S; T_M\})$  è definita in modo che valga la formula di LEIBNIZ:

$$(\nabla_w A^T) v := \nabla_w (A^T v) - A^T \nabla_{\Pi^T w} v, \quad \forall v \in C^k(M; T_S) \quad \forall w \in C^k(M; T_M).$$

Definendo il campo tensoriale del terzo ordine  $(\nabla A^T)^T \in L\{T_S; L\{T_M; T_M\}\}$  mediante l'identità

$$(\nabla A^T)^T v [w] := (\nabla A^T)[w] v = (\nabla_w A^T) v,$$

si perviene quindi alla formula tensoriale

$$(\nabla A^T)^T v := \nabla(A^T v) - A^T \nabla v \Pi^T, \quad \forall v \in C^k(M; T_S).$$

Ne segue che tra gli invarianti lineari sussiste la relazione

$$\begin{aligned} \text{tr}((\nabla A^T)^T v) &= \text{tr}(\nabla(A^T v)) - \text{tr}(A^T \nabla v \Pi^T) = \\ &= \text{tr}(\nabla(A^T v)) - A : (\nabla v \Pi^T), \quad \forall v \in C^k(M; T_S). \end{aligned}$$

Si noti ora che, data una sottovarietà di RIEMANN  $M \subset S$  immersa in una varietà di RIEMANN  $S$ , sussistono le seguenti definizioni.

- *L'operatore divergenza*

$$\text{div} : C^k(M; T_M) \mapsto C^{k-1}(M; \Re),$$

associa ad un campo vettoriale  $w \in C^k(M; T_M)$  l'invariante lineare del gradiente del campo:

$$\text{div } w := \text{tr}(\nabla w).$$



• L'operatore divergenza

$$\text{Div} : C^k(M; L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_S\}) \mapsto C^{k-1}(M; \mathbb{T}_S),$$

associa ad un campo tensoriale  $\mathbf{A} \in C^k(M; L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_S\})$  il campo vettoriale  $\text{Div } \mathbf{A} \in C^{k-1}(M; \mathbb{T}_S)$  mediante l'identità locale

$$\boxed{\mathbf{g}(\text{Div } \mathbf{A}, \mathbf{v}) = \text{tr}((\nabla \mathbf{A}^T)^T \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in C^k(M; \mathbb{T}_S),}$$

La relazione precedente può pertanto porsi nella forma

$$\boxed{\mathbf{g}(\text{Div } \mathbf{A}, \mathbf{v}) = \text{div}(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) - \mathbf{A} : (\nabla \mathbf{v} \Pi^T), \quad \forall \mathbf{v} \in C^k(M; \mathbb{T}_S).}$$

Se lo spazio ambiente  $S$  è euclideo, a tale formula si può sostituire l'identità

$$\mathbf{g}(\text{Div } \mathbf{A}, \mathbf{a}) = \text{div}(\mathbf{A}^T \mathbf{a}), \quad \forall \mathbf{a} \in C^\infty(M; \mathbb{T}_S),$$

dove  $\mathbf{a} \in C^\infty(M; \mathbb{T}_S)$  è un campo vettoriale costante.

**Osservazione 2.3.** La divergenza di un campo vettoriale  $\mathbf{w} \in C^k(M; \mathbb{T}_M)$  può più in generale essere definita su una qualsiasi varietà orientata  $M$  dotata di un campo di forme di volume, ponendo

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mu_M = (\text{div } \mathbf{w}) \mu_M.$$

Se  $M$  è una varietà di RIEMANN, tale definizione coincide con quella in termini della derivata covariante:

$$\text{div } \mathbf{w} := \text{tr}(\nabla \mathbf{w}).$$

Per mostrarlo si osservi che, per ogni  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in C^k(M; \mathbb{T}_M)$

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mu_M)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \\ & \mathcal{L}_{\mathbf{w}}(\mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) - \mu_M(\mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mu_M(\mathbf{a}, \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mathbf{c}) = \\ & \nabla_{\mathbf{w}}(\mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) - \mu_M(\nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mu_M(\mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{b}, \mathbf{c}) - \mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \nabla_{\mathbf{w}} \mathbf{c}) = \\ & \quad + \mu_M(\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{w}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu_M(\mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{b}} \mathbf{w}, \mathbf{c}) + \mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{w}) = \\ & (\nabla_{\mathbf{w}} \mu_M)(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu_M(\nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{w}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mu_M(\mathbf{a}, \nabla_{\mathbf{b}} \mathbf{w}, \mathbf{c}) + \mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \nabla_{\mathbf{c}} \mathbf{w}) = \\ & = \text{tr}(\nabla \mathbf{w}) \mu_M(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}), \end{aligned}$$

poiché  $\nabla_{\mathbf{w}} \mu_M = 0$ . ■



Si consideri ora la *trasformazione integrale di AMPÈRE-KELVIN-HANKEL (teorema di STOKES)* che, espressa in termini di  $(n - 1)$ -forme sulla varietà  $n$ -dimensionale  $\mathbb{M}$ , si scrive

$$\int_{\mathbb{M}} d\omega = \int_{\partial\mathbb{M}} \omega.$$

dove il simbolo  $d$  denota la derivazione esterna.

Sia quindi  $\mathbf{w} \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$  un campo vettoriale.

In virtù della *formula magica di CARTAN o formula di omotopia*, per ogni forma esterna  $\alpha$  si ha che

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}} \alpha = d(\mathbf{i}_{\mathbf{w}} \alpha) + \mathbf{i}_{\mathbf{w}}(d\alpha).$$

Ponendo quindi  $\omega = \mathbf{i}_{\mathbf{w}} \mu_{\mathbb{M}}$  nella formula di STOKES e  $\alpha = \mu_{\mathbb{M}}$  nella formula di omotopia, notando che  $d\mu_{\mathbb{M}} = \mathbf{o}$ , si ottiene che

$$\int_{\mathbb{M}} \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mu_{\mathbb{M}} = \int_{\partial\mathbb{M}} \mathbf{i}_{\mathbf{w}} \mu_{\mathbb{M}}.$$

Sostituendo le relazioni

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}} \mu_{\mathbb{M}} = (\operatorname{div} \mathbf{w}) \mu_{\mathbb{M}},$$

$$\mathbf{i}_{\mathbf{w}} \mu_{\mathbb{M}} = \mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \mu_{\partial\mathbb{M}},$$

si perviene all'espressione del *teorema della divergenza*

$$\int_{\mathbb{M}} \operatorname{div} \mathbf{w} \, dv = \int_{\partial\mathbb{M}} \mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) \, da,$$

dove  $\mathbf{n} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è il versore normale al bordo  $\partial\mathbb{M}$  della varietà  $\mathbb{M}$ .

Applicando infine il teorema della divergenza al campo vettoriale  $\mathbf{w} = \mathbf{A}^T \mathbf{v} \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$ , con  $\mathbf{v} \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_{\mathbb{S}})$  e  $\mathbf{A}^T \in C^k(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\})$ , si ottiene l'espressione della formula di GREEN:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{M}} \mathbf{g}(\mathbf{A} \mathbf{n}, \mathbf{v}) \, da &= \int_{\partial\mathbb{M}} \mathbf{g}_{\mathbb{M}}(\mathbf{A}^T \mathbf{v}, \mathbf{n}) \, da = \int_{\mathbb{M}} \operatorname{div}(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) \, dv = \\ &= \int_{\mathbb{M}} \mathbf{g}(\operatorname{Div} \mathbf{A}, \mathbf{v}) \, dv + \int_{\mathbb{M}} \mathbf{A} : (\nabla \mathbf{v} \Pi^T) \, dv. \end{aligned}$$

Si ponga ora  $\mathbf{A} = \Pi^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}}$  e si assuma che il campo vettoriale  $\operatorname{Div}(\Pi^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}})$  sia di quadrato integrabile sulla varietà  $\mathbb{M}$ .

Si perviene così alla formula di GREEN:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{M}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}} : \mathbf{Bv} \, dv &= \int_{\mathbb{M}} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}} : (\mathbf{\Pi}(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{\Pi}^T) \, dv = \int_{\mathbb{M}} (\mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}}) : ((\nabla \mathbf{v}) \mathbf{\Pi}^T) \, dv = \\ &= \int_{\mathbb{M}} -\mathbf{g}(\operatorname{Div}(\mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}}), \mathbf{v}) \, dv + \int_{\partial \mathbb{M}} \mathbf{g}(\mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}} \mathbf{n}, \mathbf{v}) \, da, \end{aligned}$$

Si noti che i valori locali dei campi tensoriali

$$(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{\Pi}^T \in C^k(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_S\}), \quad \mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}} \in C^k(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_S\}),$$

sono omologhi ed è quindi lecito effettuarne il prodotto interno.

Dalla formula di GREEN si deducono le equazioni di equilibrio di CAUCHY, differenziali ed al contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{Div}(\mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}}) = \mathbf{p} & \text{carico distribuito,} \\ (\mathbf{\Pi}^T \boldsymbol{\sigma}_{\mathbb{M}}) \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{forze al contorno.} \end{array} \right.$$

Dunque  $\mathbf{p} \in \mathbb{T}_S$  e  $\mathbf{t} \in \mathbf{\Pi}^T \mathbb{T}_M \subset \mathbb{T}_S$  e cioè

- le forze distribuite sul contorno  $\mathbf{t} \in \mathbf{\Pi}^T \mathbb{T}_M$  appartengono al piano tangente alla varietà strutturale,
- il carico distribuito sulla varietà  $\mathbb{M}$  è comunque diretto nello spazio  $\mathbb{T}_S$  tangente allo spazio ambiente euclideo  $\mathbb{S}$ .

**Osservazione 2.4.** Sia  $\dim \mathbb{S} = n$ . Allora il proiettore  $\mathbf{\Pi} \in L\{\mathbb{T}_S; \mathbb{T}_M\}$  ha le seguenti espressioni.

- Se la varietà  $\mathbb{M}$  è monodimensionale,  $\mathbf{\Pi} \in L\{\mathbb{T}_S; \mathbb{T}_M\}$  è definito da

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{J}_{MS}(\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbf{J}_{SM} \mathbb{T}_M.$$

- Se la varietà  $\mathbb{M}$  è  $(n-1)$ -dimensionale,  $\mathbf{\Pi} \in L\{\mathbb{T}_S; \mathbb{T}_M\}$  è definito da

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{J}_{MS}(\mathbf{I}_S - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}),$$

dove  $\mathbf{I}_S \in L\{\mathbb{T}_S; \mathbb{T}_S\}$  è l'operatore identità su  $\mathbb{T}_S$  e  $\mathbf{n} \in \mathbb{T}_S$  è il versore normale alla varietà  $\mathbb{M}$ . ■

### 3. MODELLI MONODIMENSIONALI

In questo capitolo sono illustrati i modelli monodimensionali dell'asta rettilinea, della fune nello spazio, della trave di TIMOSHENKO<sup>72</sup> e della trave di BERNOULLI<sup>73</sup>-EULER<sup>74</sup>.

Tali modelli sono di rilevante interesse in ingegneria delle strutture in quanto costituiscono gli elementi componenti un'ampia classe di strutture portanti. Essi forniscono importanti esempi di come si specializzano le definizioni e le proprietà generali di un modello strutturale.

Il modello di trave di TIMOSHENKO fornisce un esempio di continuo monodimensionale con struttura in cui le configurazioni sono sezioni di varietà differenziabili e lo spazio ambiente è una varietà differenziabile. Ciò in quanto i parametri cinematici sono costituiti dai campi di velocità di traslazione e di rotazione delle sezioni rette e l'insieme dei campi di rotazione è un gruppo immerso in uno spazio lineare.

I modelli monodimensionali di trave spaziale sono l'idealizzazione di un solido di forma prismatica nello spazio Euclideo  $\mathcal{E}^3$  in cui una delle dimensioni, la lunghezza, è prevalente sulle altre.

La modellazione considera il prisma come un continuo monodimensionale  $\mathcal{B}$  costituito da un insieme di particelle materiali disposte lungo una curva regolare nello spazio, detta *asse della trave*, ed un insieme di *sezioni trasversali* che vengono assunte come corpi rigidi. Ad ogni punto della linea d'asse corrisponde una sezione trasversale e viceversa.

Il modello in cui alle sezioni trasversali è consentito di subire rotazioni indipendenti dallo spostamento della linea d'asse è detto *trave deformabile a taglio* o *trave di TIMOSHENKO*.

<sup>72</sup> STEPHEN P. TIMOSHENKO (1878-1972). Nato in Russia a San Pietroburgo frequentò il Politecnico. Iniziò ad insegnare nel 1903 divenendo professore nel 1913. Passò poi al Politecnico di Zagabria dove insegnò sino al 1922. Si trasferì quindi negli Stati Uniti dove lavorò per qualche tempo alla Westinghouse per divenire poi professore di Meccanica all'Università del Michigan. Ai seminari estivi in Meccanica Applicata presso l'Università del Michigan parteciparono dall'Europa eminenti scienziati quali PRANDTL, SOUTHWELL, WESTERGAARD e VON KARMAN. In quel periodo TIMOSHENKO pubblicò i volumi *Strength of Materials, Theory of Elasticity and Elastic Stability*. Nel 1936 si trasferì all'Università di Stanford dove ha insegnato fino al 1954 ed ha pubblicato i testi *Engineering Mechanics, Theory of Plates and Shells, Theory of Structures* e *Advanced Dynamics*. Il suo ultimo libro è stato *History of Strength of Materials*, storia della Meccanica da GALILEO agli anni 1940. A TIMOSHENKO è intitolato il laboratorio di Engineering Mechanics dell'Università di Stanford. È stato membro della U.S. National Academy of Science dal 1940 e della Royal Society of London ed è considerato il padre dell'Ingegneria Meccanica.

<sup>73</sup> JACOB BERNOULLI (1654-1705). Nato a Basilea, figlio maggiore di NICOLAUS BERNOULLI (1623-1708) un ricco commerciante di spezie. La madre apparteneva ad una potente famiglia di banchieri. La famiglia BERNOULLI originaria del Belgio, si era rifugiata in Svizzera nel 1567 quando FILIPPO DI SPAGNA aveva inviato nei Paesi Bassi un potente esercito al comando del DUCA DI ALBA per ricondurre quelle popolazioni all'obbedienza del governatorato Spagnolo e al Cattolicesimo. I BERNOULLI che erano protestanti fuggirono per sottrarsi alle persecuzioni. JACOB BERNOULLI era il fratello maggiore di JOHANN BERNOULLI (1667-1748) e zio di DANIEL BERNOULLI (1700-1782), figlio di JOHANN. Costretto a studiare filosofia e teologia dai genitori si laureò all'University of Basilea nel 1676. Viaggiò quindi per l'Europa, in Francia incontrò i seguaci di RENÉ DESCARTES (1596-1650), in Inghilterra incontrò ROBERT

Imponendo il vincolo di ortogonalità tra le sezioni trasversali e l'asse si ottiene il modello di *trave di BERNOULLI-EULER* o *trave indeformabile a taglio*.

Il modello di BERNOULLI-EULER è idoneo a descrivere il comportamento di travi in cui le dimensioni delle sezioni trasversali sono molto più piccole della lunghezza.

### 3.1. Geometria delle curve

Si premettono i richiami essenziali di geometria delle curve.

La derivata  $d\mathbf{r}(\lambda)/d\lambda$  definisce un vettore tangente alla linea d'asse. Se tale vettore è di modulo unitario l'ascissa  $\lambda$  è detta *ascissa curvilinea* e viene denotata col simbolo  $s$ . Si ha quindi che

$$\frac{ds}{d\lambda} = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} \right\|.$$

L'ascissa curvilinea misura col suo incremento la lunghezza del tratto di curva corrispondente. Infatti la lunghezza di un tratto di curva  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$  è fornita da

$$L(\lambda_1, \lambda_2) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left\| \frac{d\mathbf{r}(\lambda)}{d\lambda} \right\| d\lambda = \int_{s_1}^{s_2} \left\| \mathbf{t}(s) \right\| ds = \int_{s_1}^{s_2} ds = s_2 - s_1.$$

- Nel seguito si denoterà con un apice  $(\cdot)'$  la derivata rispetto all'ascissa curvilinea.

---

BOYLE (1627-1691) e ROBERT HOOKE (1635-1703). Studiando i lavori di JOHN WALLIS (1616-1703) e di ISAAC BARROW (1630-1677) si interessò al calcolo infinitesimale. JACOB BERNOULLI divenne professore di matematica a Basilea nel 1687 ed insieme al fratello minore JOHANN BERNOULLI iniziò a studiare il calcolo differenziale sviluppato nel lavoro *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus...* pubblicato negli *Acta Eruditorum* da GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716). Ben presto la collaborazione tra i due fratelli si trasformò in una accesa rivalità. Nel 1689 JACOB BERNOULLI pubblicò importanti lavori sulle serie e sulla teoria della probabilità formulando la sua *legge dei grandi numeri*. Nel 1690 pubblicò un famoso lavoro sulla curva *isocrona (descensus aequabilis)*, già studiata da Huygens nel 1687 e da Leibniz nel 1689, mostrando che la curva era soluzione di una equazione differenziale non lineare. In tale lavoro appare per la prima volta il termine *integralis* che, accettato da LEIBNIZ, entrò nel vocabolario della matematica. Nel 1696 JACOB BERNOULLI risolse l'equazione dell'isocrona  $y' = p(x)y + q(x)y^n$ , detta ora "equazione di BERNOULLI", inventando il *metodo di separazione delle variabili*. A JACOB BERNOULLI è anche dovuta la dimostrazione che la curva *brachistocrona (linea celerrimi descensus)* è una *cicloide*, risultato già trovato, ma con dimostrazione errata, dal fratello JOHANN che gli aveva proposto la dimostrazione del risultato come sfida. A lui sono dovuti molti importanti avanzamenti in algebra, calcolo differenziale, calcolo delle variazioni, meccanica, teoria delle serie, e teoria della probabilità. Sulla sua tomba volle incisa la frase *Eadem Mutata Resurgo* che evoca le magiche proprietà della *spirale logaritmica*. JACOB BERNOULLI è anche citato con i nomi JACQUES, JAMES E GIACOMO.

<sup>74</sup> LEONHARD EULER (1707-1783). Prima allievo e poi collega ed amico di DANIEL BERNOULLI (1700-1782), figlio di JOHANN BERNOULLI, è stato il più prolifico matematico di ogni tempo.

La posizione dei punti della curva può esprimersi in funzione dell'ascissa curvilinea mediante la formula di integrazione

$$\mathbf{r}(s) = \mathbf{r}(0) + \int_0^s \mathbf{t}(\xi) d\xi.$$

- Il *versore tangente*  $\mathbf{t}(s) = d\mathbf{r}(s)/ds$ , avendo norma unitaria, ha derivata ad essa ortogonale. Infatti, derivando l'espressione  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ , si ottiene

$$\mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{t}' = 2 \mathbf{t}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{0}.$$

- Il *versore normale* alla curva nel punto  $s$  è definito, se il vettore  $\mathbf{t}'(s)$  è non nullo, da

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}' / \| \mathbf{t}' \|,$$

- Il *versore binormale* è un terzo versore  $\mathbf{b}$  tale che la terna ortonormale orientata  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  sia levogira.

Si ha dunque che  $\mu(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = +1$  dove  $\mu$  è la funzione determinante che definisce l'orientamento levogiro dello spazio. La terna levogira  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  è detta *riferimento locale* sulla curva o *terna intrinseca*.

La famiglia ad un parametro della terna  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  dei versori tangente, normale e binormale in ogni punto definisce infatti le proprietà intrinseche della curva, quelle cioè indipendenti dal riferimento cartesiano fissato nello spazio.

La generica terna  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  è legata a quella cartesiana  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  da una relazione del tipo

$$\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\} = [\mathbf{M}] \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$$

dove la stringa  $\{\cdot, \cdot, \cdot\}$  denota, per motivi tipografici, un vettore colonna ed  $[\mathbf{M}]$  è la matrice della rotazione  $\mathbf{M}$  che porta  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  in  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ .

Derivando rispetto ad  $s$  si ottiene

$$\{\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'\} = [\mathbf{M}'] \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\},$$

e quindi

$$\{\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'\} = [\mathbf{M}' \mathbf{M}^{-1}] \{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}.$$

L'operatore  $C(\mathbf{M}) = \mathbf{M}' \mathbf{M}^{-1}$  è l'*operatore di CARTAN*<sup>75</sup> di  $\mathbf{M}$  (vedi [14]).

Per ogni coppia di operatori invertibili  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  vale la proprietà notevole

$$C(\mathbf{AB}) = C(\mathbf{A}) + \mathbf{AC}(\mathbf{B})\mathbf{A}^{-1}.$$

---

<sup>75</sup> ELIE JOSEPH CARTAN (1869-1951). Matematico francese cui sono dovuti contributi fondamentali alla geometria moderna.

Se l'operatore  $\mathbf{M}$  è ortogonale, essendo

$$\mathbf{MM}^T = \mathbf{I} \iff \mathbf{M}^T = \mathbf{M}^{-1},$$

l'operatore di CARTAN  $C(\mathbf{M})$  risulta antisimmetrico. Infatti

$$\mathbf{I}' = (\mathbf{MM}^T)' = \mathbf{M}'\mathbf{M}^T + \mathbf{MM}'^T = \mathbf{O},$$

e dunque

$$C(\mathbf{M})^T = (\mathbf{M}'\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{MM}'^T = -\mathbf{M}'\mathbf{M}^T = -C(\mathbf{M}).$$

Essendo la normale  $\mathbf{n}$  per definizione parallela e concorde a  $\mathbf{t}'$ , la matrice antisimmetrica di CARTAN delle componenti di  $\{\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'\}$  rispetto alla terna  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  ha la forma

$$[C(\mathbf{M})] = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & t \\ 0 & -t & 0 \end{bmatrix}.$$

La relazione  $\{\mathbf{t}', \mathbf{n}', \mathbf{b}'\} = C(\mathbf{M})\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  fornisce dunque le note *formule di FRÉNET*<sup>76</sup> - *SERRET*<sup>77</sup>.

$$\begin{cases} \mathbf{t}' = c \mathbf{n}, \\ \mathbf{n}' = -c \mathbf{t} + t \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' = -t \mathbf{n}. \end{cases}$$

Gli scalari positivi  $c$  e  $t$  sono rispettivamente la *curvatura* e la *torsione* della curva. Si noti che l'orientamento positivo (levogiro) della terna intrinseca  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  implica che risultì

$$\begin{cases} \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{b} = \mathbf{t}, \\ \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \mathbf{n}. \end{cases}$$

### 3.1.1. Espressione della curvatura

Nelle applicazioni è utile la formula che consente di valutare la curvatura della curva piana che diagramma una funzione reale  $f$  di una variabile reale  $x$  nel piano cartesiano  $\{x, y\}$ .

---

<sup>76</sup> JEAN FRÉDÉRIC FRÉNET (1816-1900). Pubblicò le prime sei formule nella tesi di dottorato nel 1847 e poi nel Jour. de Math. XVII (1852) pp. 437-447.

<sup>77</sup> JOSEPH ALFRED SERRET (1819-1885). Pubblicò le nove formule nel Jour. de Math. XVI (1851) pp. 193-207.

Sia  $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  una funzione e  $\mathbf{r}$  il raggio vettore che individua un punto del diagramma della funzione. Denotando con  $(\cdot)_{/x}$  la derivata rispetto all'ascissa cartesiana  $x$ , si ha che

$$\mathbf{r}(x) = \begin{vmatrix} x \\ f(x) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r}_{/x}(x) = \begin{vmatrix} 1 \\ f_{/x}(x) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r}_{/xx}(x) = \begin{vmatrix} 0 \\ f_{/xx}(x) \end{vmatrix}.$$

Il versore della tangente alla curva che diagramma la funzione è

$$\mathbf{t}(x) = \frac{\mathbf{r}_{/x}(x)}{\|\mathbf{r}_{/x}(x)\|}.$$

Derivando si ottiene

$$\mathbf{t}_{/x} = \frac{\mathbf{r}_{/xx}}{\|\mathbf{r}_{/x}\|} - \frac{1}{2} \frac{\mathbf{r}_{/x}}{\|\mathbf{r}_{/x}\|^3} 2 \mathbf{r}_{/x} \cdot \mathbf{r}_{/xx} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{/x}\|^3} \left[ \mathbf{r}_{/xx} \|\mathbf{r}_{/x}\|^2 - (\mathbf{r}_{/x} \otimes \mathbf{r}_{/x}) \mathbf{r}_{/xx} \right],$$

e cioè

$$\mathbf{t}_{/x} = \frac{1}{\|\mathbf{r}_{/x}\|^3} \left[ \|\mathbf{r}_{/x}\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{r}_{/x} \otimes \mathbf{r}_{/x}) \right] \mathbf{r}_{/xx}.$$

Essendo

$$\mathbf{r}_{/x} \otimes \mathbf{r}_{/x} = \begin{bmatrix} 1 & f_{/x} \\ f_{/x} & f_{/x}^2 \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{r}_{/x}\| = (1 + f_{/x}^2)^{1/2},$$

risulta

$$\begin{aligned} \left[ \|\mathbf{r}_{/x}\|^2 \mathbf{I} - (\mathbf{r}_{/x} \otimes \mathbf{r}_{/x}) \right] \mathbf{r}_{/xx} &= (1 + f_{/x}^2) \begin{vmatrix} 0 \\ f_{/xx} \end{vmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & f_{/x} \\ f_{/x} & f_{/x}^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ f_{/xx} \end{vmatrix}, \\ &= \begin{vmatrix} -f_{/x} f_{/xx} \\ (1 + f_{/x}^2) f_{/xx} - f_{/x}^2 f_{/xx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} f_{/xx}. \end{aligned}$$



Dunque

$$\mathbf{t}_{/x} = \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} f_{/xx},$$

Denotando con  $s$  l'ascissa parametrica si ha che  $ds/dx = \|\mathbf{r}_{/x}\|$  e quindi

$$\mathbf{t}' = \frac{\mathbf{t}_{/x}}{\|\mathbf{r}_{/x}\|} = \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)^2} \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} f_{/xx},$$

La curvatura ha pertanto l'espressione

$$c = \|\mathbf{t}'\| = \frac{\|\mathbf{t}_{/x}\|}{\|\mathbf{r}_{/x}\|} = \frac{(1 + f_{/x}^2)^{1/2}}{(1 + f_{/x}^2)^2} |f_{/xx}| = \frac{|f_{/xx}|}{(1 + f_{/x}^2)^{3/2}},$$

che è la formula cercata.



#### 4. L'ASTA

Il modello strutturale più semplice è quello di asta ad asse rettilineo che è illustrato come primo esempio di applicazione della teoria generale.

Si consideri un continuo a forma di prisma retto di lunghezza finita  $L$  e sia  $x$  un'ascissa che misura la posizione delle sezioni trasversali lungo l'asse e si denoti con l'apice  $(\cdot)'$  la derivata rispetto ad  $x$ .

Nel modello monodimensionale di asta rettilinea si assume che le sezioni trasversali possono soltanto traslare in direzione dell'asse del prisma senza ruotare. Una configurazione dell'asta è pertanto individuata da un segmento rettilineo  $\Omega = [x_1, x_2]$ , con  $L = |x_2 - x_1|$ . La cinematica dell'asta è nota se, in corrispondenza di ogni sezione, si conosce il valore del cinematicismo in direzione assiale.

- L'asta subisce un'atto di traslazione rigida se il cinematicismo è costante.

La deformazione tangente è pertanto associata ad una variabilità del cinematicismo ed è naturale definirla come la velocità di dilatazione  $\varepsilon$  che è data dalla derivata del cinematicismo rispetto ad  $x$ . Ne segue che

- L'operatore cinematico  $\mathbf{B}$  è la derivata prima lungo l'asse dell'asta.

Il campo di sforzo duale di quello di deformazione tangente è il campo scalare di *sforzo normale*  $N$  nell'asta. Denotando con  $n(x_1) = -1$  e  $n(x_2) = 1$  le normali uscenti dagli estremi dell'asta, la formula di GREEN relativa all'operatore di deformazione tangente  $\mathbf{B}$  si ottiene integrando per parti

$$\int_{x_1}^{x_2} N u' \, dx = - \int_{x_1}^{x_2} N' u \, dx + \sum_{i=1}^2 (N u n)(x_i).$$

Dalla formula di GREEN si deduce che:

- L'operatore differenziale di equilibrio  $\mathbf{B}'_o$  è pari all'opposto della derivata prima lungo l'asse dell'asta.

Gli operatori al contorno  $\Gamma$  e  $\mathbf{N}$  sono rispettivamente i campionatori dei valori agli estremi del cinematicismo e del prodotto dello sforzo normale con il versore normale.

In definitiva si ha quindi che

$$\mathbf{B}u = u',$$

$$\mathbf{B}'_o N = -N',$$

$$\Gamma u = \{u(x_1), u(x_2)\},$$

$$\mathbf{N}N = \{N(x_1) n_1, N(x_2) n_2\} = \{-N(x_1), N(x_2)\}.$$

Ponendo

$$\langle\langle N, \mathbf{B}u \rangle\rangle := \int_{x_1}^{x_2} N u' dx, \quad (\mathbf{B}'_o N, u) := \int_{x_1}^{x_2} -N' u dx,$$

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{N}N, \mathbf{\Gamma}u \rangle\rangle &:= \langle\langle \{-N(x_1), N(x_2)\}, \{u(x_1), u(x_2)\} \rangle\rangle = \\ &= N(x_1) u(x_1) n_1 + N(x_2) u(x_2) n_2, \end{aligned}$$

la formula di GREEN si può scrivere nella forma astratta

$$\langle\langle N, \mathbf{B}u \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o N, u) + \langle\langle \mathbf{N}N, \mathbf{\Gamma}u \rangle\rangle.$$

Nel modello di *asta semplice* si assume che i cinematicismi conformi  $u \in \mathcal{L}$  abbiano qualche suddivisione di supporto l'intero intervallo  $\Omega = [x_1, x_2]$ .

Si ha dunque che

- lo spazio  $\mathcal{V}$  dei cinematicismi GREEN-regolari con suddivisione di supporto  $\mathcal{T}(\Omega) = \Omega$  è  $H^1[x_1, x_2]$  a pezzi,
- lo spazio  $\mathcal{H}$  degli sforzi e delle deformazioni tangenti è  $L^2[x_1, x_2]$ ,
- lo spazio  $\mathcal{S}$  degli sforzi GREEN-regolari con suddivisione di supporto  $\mathcal{T}(\Omega) = \Omega$  è  $H^1[x_1, x_2]$  a pezzi,
- lo spazio  $\mathcal{F}$  delle forze è costituito da carichi distribuiti  $p \in L^2[x_1, x_2]$  e da forze assiali  $\{F_{i1}, F_{i2}\}, i = 1, \dots, n$  concentrate agli estremi dell'intervallo  $\Omega = [x_1, x_2]$

Dalla formula di GREEN si evince che lo spazio  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  delle forze attive è costituito da carichi distribuiti  $p \in L^2[x_1, x_2]$  e da forze assiali  $\{F_i, i = 1, \dots, n\}$  concentrate in un numero finito di punti di  $\Omega = [x_1, x_2]$ .

■ L'operatore cinematico è un operatore di KORN. Infatti la diseguaglianza

$$\|u'\|_0 + \|u\|_0 \geq \|u\|_1, \quad \forall u \in H^1[x_1, x_2],$$

fornisce il risultato.

■ Risultando  $\mathbf{B} = -\mathbf{B}'_o$  è valida l'analogia di MOHR con le sostituzioni (vedi sezione 1.3 (p. 376))

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{L} &\iff N \in \Sigma, \\ -p \in H &\iff \varepsilon \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

■ Si consideri ora un'asta priva di vincoli agli estremi. Allora il sottospazio lineare dei cinematismi conformi è

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} = H^1[x_1, x_2].$$

Si noti che, in virtù del lemma di SOBOLEV(vedi [33], proposizione 1.1, pag. 122), i cinematismi conformi sono funzioni continue. E' pertanto consentito applicare forze assiali concentrate in punti dell'asse dell'asta.

Nei problemi di valori al contorno i sistemi di forze attive sono dunque costituiti da un campo di forze distribuite

$$p \in \mathcal{L}^2[x_1, x_2],$$

di quadrato integrabile su  $[x_1, x_2]$ , e da un insieme finito di forze assiali

$$\{F_i, i = 1, \dots, n\},$$

concentrate in punti dell'asse dell'asta, nell'intervallo  $[x_1, x_2]$ .

Osservando che i cinematismi rigidi conformi sono funzioni costanti, si evince che il sottospazio lineare  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}$  è monodimensionale.

La condizione di equilibrio di un sistema di forze attive si scrive pertanto

$$\boxed{\int_{x_1}^{x_2} p \, dx + \sum_{i=1}^n F_i = 0.}$$

■ Dualmente si consideri il caso in cui agli estremi di  $\Omega = [x_1, x_2]$  siano assegnati vincoli assoluti che impongono ai cinematismi ammissibili di assumere valori assegnati  $w(x_1)$  e  $w(x_2)$ .

Risulta allora

$$\mathcal{L} = \text{Ker } \Gamma = H_o^1[x_1, x_2].$$

I campi di *autosforzi* normali, cioè di sforzi normali in autoequilibrio, sono allora funzioni costanti in quanto l'operatore di equilibrio di massa  $\mathbf{B}'_o$  è la derivata lungo l'asse ed il flusso agli estremi, rappresentato dalla coppia  $\{-N(x_1), N(x_2)\}$ , è arbitrario.

La condizione variazionale di congruenza di un sistema cinematico costituito da un campo  $\varepsilon$  di dilatazioni di quadrato integrabile su  $[x_1, x_2]$  e da una coppia di valori agli estremi  $\{w(x_1), w(x_2)\}$  dei cinematismi, si scrive quindi

$$\int_{x_1}^{x_2} \varepsilon \, dx = w(x_2) - w(x_1).$$

Si noti che tale condizione esprime semplicemente la richiesta che sia soddisfatto il teorema fondamentale del calcolo integrale da ogni primitiva di  $\varepsilon$  che assume i valori  $w(x_1)$  e  $w(x_2)$  agli estremi dell'intervallo  $[x_1, x_2]$ .

## 5. LA FUNE

Il modello strutturale della fune è la naturale estensione di quello di asta rettilinea. Il modello di fune considera un continuo monodimensionale le cui configurazioni sono varietà differenziabili di dimensione uno e cioè curve generalmente regolari nello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{S}$ .

Sia  $\gamma : I \mapsto \mathbb{S}$  una configurazione di riferimento della fune costituita da una curva regolare parametrizzata sull'intervallo  $I = [s_1, s_2]$  dall'ascissa curvilinea  $s$ . Allora il versore della tangente alla curva è dato da

$$\frac{d\gamma}{ds} = \mathbf{t}, \quad \|\mathbf{t}\| = 1.$$

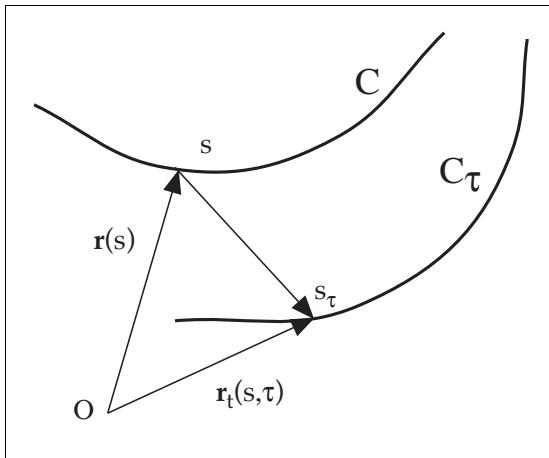


Fig. 5.1

Si consideri quindi la mappa di evoluzione  $\varphi : \gamma \times I \times I \mapsto \mathbb{S}$  della fune a partire dalla configurazione  $\gamma : I \mapsto \mathbb{S}$  (vedi fig. 5.1).

La mappa di evoluzione individua la posizione  $\varphi(\mathbf{x}, \tau, t) \in \mathbb{S}$  al tempo  $\tau$  dalla particella  $\mathbf{p} = p(\mathbf{x}, t)$  che al tempo  $t$  occupa la posizione  $\mathbf{x} = \gamma(s) \in \mathbb{S}$ . Dunque sussiste la condizione iniziale

$$\varphi_{t,t}(\gamma(s)) = \gamma(s).$$

dove, come d'uso, si è posto

$$\varphi_{\tau,t}(\gamma(s)) = \varphi_t(\gamma(s), \tau) = \varphi(\gamma(s), \tau, t).$$

La dilatazione lineare della fune, nel passaggio dal tempo  $t$  al tempo  $\tau$ , vale

$$\varepsilon_{\tau,t} = D(\varphi_{\tau,t} \circ \gamma) = \|d(\varphi_{\tau,t} \circ \gamma)/ds\| - 1.$$

Denotando con un punto la derivata rispetto al tempo valutata all’istante iniziale  $\tau \in I$ , la velocità nella configurazione  $\gamma(s)$  è quindi data da

$$\mathbf{v} := (\varphi_{\tau,t} \circ \gamma) \dot{\phantom{\gamma}} = \frac{d}{d\tau} (\varphi_{\tau,t} \circ \gamma) \Big|_{\tau=t} .$$

La *deformazione tangente* all’istante iniziale  $t \in I$  è la velocità di dilatazione lineare, definita da

$$(\varepsilon_{\tau,t}) \dot{\phantom{\gamma}} = \mathbf{B}\mathbf{v} := \frac{d}{d\tau} [D(\varphi_{\tau,t} \circ \gamma)] \Big|_{\tau=t} = dD(\varphi_{\tau,t} \circ \gamma)[\mathbf{v}] = (d\mathbf{v}/ds) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} .$$

**Osservazione 5.1.** Allo stesso risultato si può pervenire partendo dalla definizione della *deformazione tangente* in termini della derivata di LIE del tensore metrico della varietà  $\gamma$  che conduce alla formula di KILLING:

$$\boxed{\mathbf{B}\mathbf{v} := \text{sym}(\boldsymbol{\Pi} \nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\Pi}^T)} .$$

Poichè lo spazio fisico è euclideo, il tensore metrico  $\mathbf{g}$  in  $\mathbb{S}$  coincide con il prodotto interno  $(-\cdot-)$  e la derivata covariante  $\nabla$  coincide con quella direzionale  $d$ .

Notando che  $\mathbb{T}_M$  è monodimensionale, sia  $\mathbf{h} \in \mathbb{T}_M$  un vettore tangente alla fune e si ponga  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}$ . La deformazione tangente ha l’espressione

$$\mathbf{g}_M((\mathbf{B}\mathbf{v}) \mathbf{h}, \mathbf{h}) := \mathbf{g}_M(\boldsymbol{\Pi} d\mathbf{v} \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}, \mathbf{h}) = \mathbf{g}((d\mathbf{v}) \mathbf{t}, \mathbf{t}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbb{T}_M .$$

La derivata  $\mathbf{v}'$  del campo di velocità lungo la fune, percorsa con velocità unitaria, soddisfa la relazione

$$(d\mathbf{v}) \mathbf{t} = \mathbf{g}(\mathbf{t}, \mathbf{t}) \mathbf{v}' = \mathbf{g}_M(\mathbf{h}, \mathbf{h}) \mathbf{v}' ,$$

per cui si ha che

$$\mathbf{g}_M((\mathbf{B}\mathbf{v}) \mathbf{h}, \mathbf{h}) = \mathbf{g}((d\mathbf{v}) \mathbf{t}, \mathbf{t}) = \mathbf{g}(\mathbf{v}', \mathbf{t}) \mathbf{g}_M(\mathbf{h}, \mathbf{h}) .$$

Dunque  $\mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{v}', \mathbf{t})$ . ■

■ L’ente duale della velocità di dilatazione lineare è lo *sforzo normale*  $N$  nella fune.

In ogni tratto  $[s_1, s_2]$  di fune in cui la velocità è  $\mathbf{v} \in H^1[s_1, s_2]$  e lo sforzo normale è tale che  $d(N \mathbf{t})/ds \in \mathcal{L}^2[s_1, s_2]$  la formula di GREEN si ottiene integrando per parti

$$\int_{s_1}^{s_2} (N \mathbf{t}) \cdot (d\mathbf{v}/ds) ds = (N \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} d(N \mathbf{t})/ds \cdot \mathbf{v} ds ,$$

Le azioni esterne che possono agire sulla fune sono quindi del tipo

$\mathbf{F}(s_1) = -N(s_1)\mathbf{t}(s_1)$	forza assiale concentrata ad $s = s_1$
$\mathbf{F}(s_2) = +N(s_2)\mathbf{t}(s_2)$	forza assiale concentrata ad $s = s_2$
$\mathbf{p} = -d(N\mathbf{t})/ds$	carico distribuito per unità di lunghezza.

In virtù delle formule di FRÉNET-SERRET, l'equazione differenziale di equilibrio si può porre nella forma equivalente:

$$(dN/ds)\mathbf{t} + (N c)\mathbf{n} = -\mathbf{p},$$

Con le notazioni introdotte per il modello strutturale astratto si ha

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = (d\mathbf{v}/ds) \cdot \mathbf{t}, \quad \mathbf{B}'_o N = -d(N\mathbf{t})/ds$$

$$\Gamma\mathbf{v} = \{\mathbf{v}(s_1), \mathbf{v}(s_2)\}, \quad \mathbf{N}\mathbf{N} = \{-N(s_1)\mathbf{t}(s_1), N(s_2)\mathbf{t}(s_2)\}$$

e la formula di GREEN

$$\langle\langle N, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o N, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{N}\mathbf{N}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle,$$

si scrive esplicitamente

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} N(d\mathbf{v}/ds) \cdot \mathbf{t} \, ds &= \int_{s_1}^{s_2} -d(N\mathbf{t})/ds \cdot \mathbf{v} \, ds + \\ &\quad -N(s_1)\mathbf{t}(s_1) \cdot \mathbf{v}(s_1) + N(s_2)\mathbf{t}(s_2) \cdot \mathbf{v}(s_2). \end{aligned}$$

■ Il principio dei lavori virtuali è espresso dalla condizione variazionale

$$\int_{s_1}^{s_2} N(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{t}) \, ds = \int_{s_1}^{s_2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, ds - (N_1 \mathbf{t} \cdot \mathbf{v})(s_1) + (N_2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{v})(s_2),$$

per ogni  $\mathbf{v} \in H^1[s_1, s_2]$ . Gli scalari  $N_1$  e  $N_2$  sono i valori delle forze di trazione agli estremi della fune.

■ In un modello semplice di fune lo spazio lineare dei cinematismi GREEN-regolari è  $\mathcal{V} = H^1[0, L]$  dove  $L$  è la lunghezza della fune nella configurazione  $\Omega$ .

Allora la condizione variazionale di equilibrio delle forze distribuite ed ai limiti richiede l'annullarsi della potenza virtuale per ogni cinematismo rigido

$$(\mathbf{p}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{F}, \mathbf{\Gamma v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{Bv} = 0,$$

condizione che, in assenza di vincoli agli estremi, si scrive esplicitamente

$$\int_0^L \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, ds + \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{v}(0) + \mathbf{F}(L) \cdot \mathbf{v}(L) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H^1[0, L] : (d\mathbf{v}/ds) \cdot \mathbf{t} = 0.$$

La condizione di rigidità del cinematismo può essere convenientemente espressa in termini di componenti della velocità in direzione tangente e normale alla fune. Ponendo

$$\mathbf{v} = v_t \mathbf{t} + v_n \mathbf{n},$$

si deduce che

■ i *cinematismi rigidi* della fune sono caratterizzati dalla condizione

$$\frac{d\mathbf{v}}{ds} \cdot \mathbf{t} = \frac{dv_t}{ds} - c v_n = 0.$$

**Osservazione 5.2.** Si consideri una fune vincolata in un estremo con la condizione  $v_t(0) = 0$ . In tale caso i cinematismi rigidi per la fune si ottengono assegnando in modo arbitrario il campo scalare  $v_n(s) \in H^1[0, L]$  del cinematismo trasversale e valutando quindi il cinematismo assiale  $v_t(s) \in H^1[0, L]$  per integrazione dalla relazione

$$\frac{dv_t}{ds} = c v_n, \quad v_t(0) = 0.$$

Pertanto il sottospazio lineare dei cinematismi rigidi della fune ha dimensione infinita. La condizione di equilibrio della fune non è dunque esprimibile mediante un numero finito di equazioni lineari.

La trattazione del problema dell'equilibrio deve pertanto essere effettuata facendo ricorso alle equazioni di equilibrio differenziali ed ai limiti espresse in termini del campo di sforzo normale nella fune. ■

Nelle successive sezioni viene sviluppata la trattazione che consente di dedurre analiticamente la forma geometrica delle configurazioni di equilibrio (funicolari) di una fune fissa agli estremi e soggetta a due classiche semplici condizioni di carico verticale, il primo costante rispetto ad una ascissa orizzontale ed il secondo costante rispetto all'ascissa curvilinea.

### 5.1. Curva funicolare

Si consideri un riferimento cartesiano levogiro  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$  ed una fune fissata agli estremi a due punti  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  del piano  $\pi$  individuato dagli assi coordinati  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ .

La fune sia soggetta ad un carico distribuito lungo il suo asse con intensità  $p(s)$  e diretto in verso opposto all'asse coordinato  $\mathbf{e}_y$ , così che

$$\mathbf{p}(s) = -p(s) \mathbf{e}_y.$$

Sia  $\mathbf{t}$  il versore tangente all'asse della fune e si ponga

$$H = N(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x), \quad H_{\perp} = N(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z), \quad V = N(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y).$$

Dall'equazione differenziale di equilibrio  $(N\mathbf{t})' = -\mathbf{p}$ , si deduce che

$$H' = (N\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)' = (N\mathbf{t})' \cdot \mathbf{e}_x = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_x = 0,$$

$$H'_{\perp} = (N\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_z)' = (N\mathbf{t})' \cdot \mathbf{e}_z = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_z = 0,$$

$$V' = (N\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y)' = (N\mathbf{t})' \cdot \mathbf{e}_y = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_y = p.$$

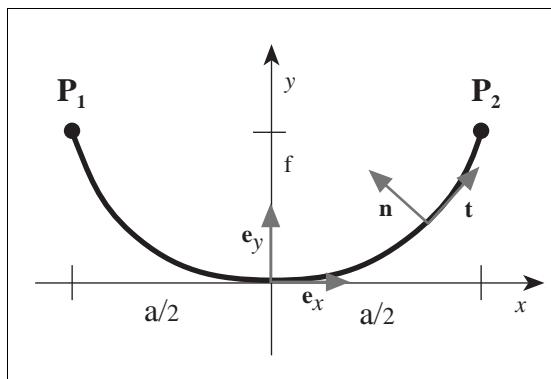


Fig. 5.2

Dalla condizione di equilibrio alla rotazione attorno ad un asse parallelo a  $\mathbf{e}_y$  e passante per  $\mathbf{P}_1$  o  $\mathbf{P}_2$  si deduce che il termine costante  $H_{\perp}$  deve essere identicamente nullo. Ne segue quindi che, nei tratti dove lo sforzo normale  $N$  è non nullo, deve annullarsi la componente di  $\mathbf{t}$  in direzione di  $\mathbf{e}_z$ . L'asse della fune giace pertanto nel piano  $\pi$ . Si dà la seguente definizione.

- Il *tiro* è la componente orizzontale  $H$  del vettore sforzo normale  $N\mathbf{t}$ .

Di può quindi concludere che

- Il tiro  $H$  è costante lungo la fune e la componente verticale  $V$  dello sforzo normale ha un tasso di variazione pari all'intensità del carico distribuito.

A questi risultati si può anche pervenire imponendo l'equilibrio alla traslazione nelle direzioni orizzontale e verticale di un qualsiasi tratto di fune ed osservando che il carico agente sulla fune è verticale.

La determinazione della curva funicolare del carico richiede di eliminare il campo di sforzo normale dall'equazione di equilibrio.

Ciò si consegue osservando che

$$\frac{V}{H} = \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x},$$

per cui, essendo costante il tiro  $H$ , risulta

$$V' = H \left[ \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x} \right]' = p.$$

Dunque la configurazione della fune deve soddisfare la seguente *equazione della funicolare*:

$$\boxed{\left[ \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x} \right]' = \frac{p}{H}.}$$

A tale formula si può dare un'espressione più semplice valutando la derivata

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x} \right]' &= \frac{\mathbf{t}' \cdot \mathbf{e}_y}{\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x} - \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y \frac{\mathbf{t}' \cdot \mathbf{e}_x}{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)^2} = \frac{c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x) - c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_y)}{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)^2} = \\ &= \frac{-c}{(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)^2} \left[ 2 \operatorname{emi}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y) \right] (\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}). \end{aligned}$$

La matrice associata al tensore emisimmetrico  $-2 \operatorname{emi}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y)$  è

$$\left[ -2 \operatorname{emi}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y) \right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque  $-2 \operatorname{emi}(\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y) = \mathbf{R}$  dove  $\mathbf{R}$  è il tensore emisimmetrico che effettua una rotazione antioraria di  $\pi/2$ .

Ne segue che

$$c = [(\mathbf{R} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}] (\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)^2 \frac{p}{H}.$$

dove  $(\mathbf{R} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = \pm 1$  a seconda che  $\mathbf{n} = \mathbf{R} \mathbf{t}$  o  $\mathbf{n} = -\mathbf{R} \mathbf{t}$ .

Se la funicolare è descritta come grafico di una funzione  $f(x)$  si ha che

$$c = \| \mathbf{t}' \| = \frac{\| \mathbf{t}_{/x} \|}{\| \mathbf{r}_{/x} \|} = \frac{(1 + f_{/x}^2)^{1/2}}{(1 + f_{/x}^2)^2} |f_{/xx}| = \frac{|f_{/xx}|}{(1 + f_{/x}^2)^{3/2}}.$$

Essendo poi

$$[\mathbf{t}] = \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)^{1/2}} \begin{vmatrix} 1 \\ f_{/x} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)^{1/2}},$$

si ha che

$$\frac{|f_{/xx}|}{(1 + f_{/x}^2)^{3/2}} = [(\mathbf{R} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}] \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)} \frac{p}{H}.$$

e cioè

$$|f_{/xx}| = (1 + f_{/x}^2)^{1/2} [(\mathbf{R} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}] \frac{p}{H}.$$

Per determinare il segno della derivata seconda  $f_{/xx}$  si osservi che il versore normale è dato da  $\mathbf{n} = \mathbf{t}_{/x}/\|\mathbf{t}_{/x}\|$  e che inoltre

$$\mathbf{t}_{/x} = \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} f_{/xx}.$$

Dunque  $(\mathbf{R} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n}$  ha lo stesso segno di  $f_{/xx}$ . Infatti

$$(\mathbf{R} \mathbf{t}) \cdot \mathbf{t}_{/x} = [\mathbf{R}] \begin{vmatrix} 1 \\ f_{/x} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} f_{/xx} = \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 1 \end{vmatrix} f_{/xx} = (1 + f_{/x}^2) f_{/xx}.$$

L'equazione della *funicolare* è pertanto

$$f_{/xx} = \frac{p}{H} \sqrt{1 + f_{/x}^2}.$$

## 5.2. Funi di sospensione

Si vuole ora calcolare lo sforzo assiale  $N$  nella configurazione di equilibrio di una fune di lunghezza  $a$  in orizzontale e di assegnata freccia  $f$  soggetta ad un carico verticale diretto verso il basso di intensità costante  $q_o$  per unità di lunghezza in orizzontale (vedi fig.5.3).



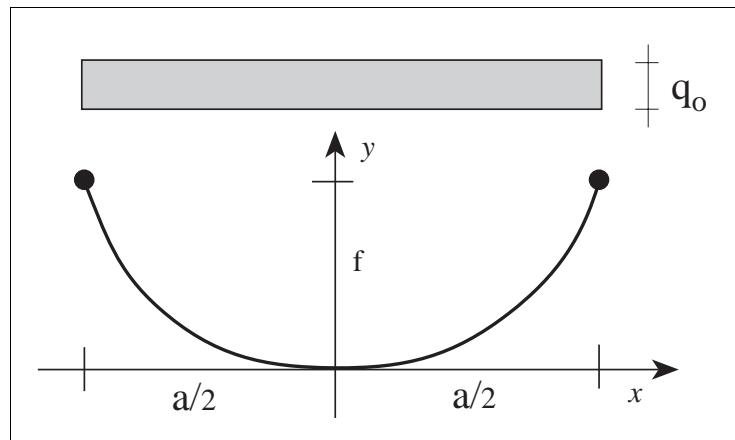


Fig. 5.3

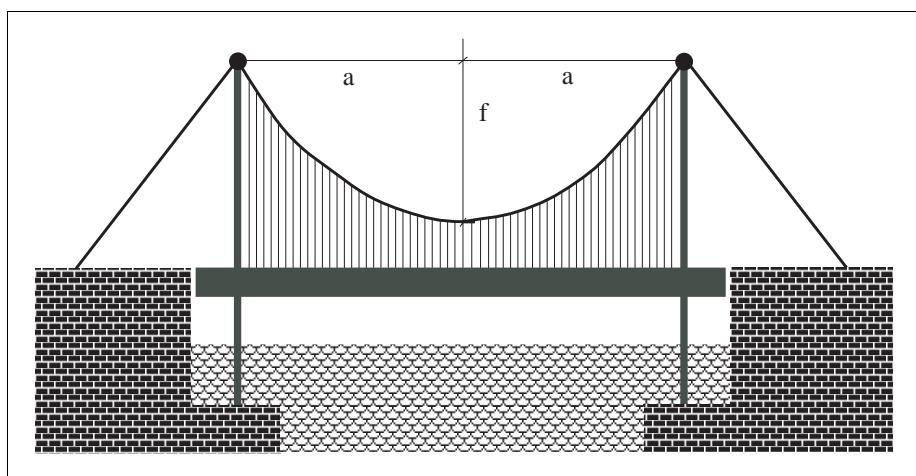


Fig. 5.4

La soluzione di questo problema strutturale consente di fornire un semplice dimensionamento del cavo di sospensione di un ponte sospeso in cui i pesi propri delle funi portanti e degli stralli verticali siano trascurabili rispetto al peso dell'impalcato ed ai carichi su di esso distribuiti (fig.5.4).

L'intensità  $p(s)$  del carico distribuito per unità di ascissa curvilinea  $s$  lungo la fune si esprime in funzione del carico  $q_o(x) = q_o$  per unità di ascissa orizzontale  $x$  mediante la relazione

$$p(s) = q_o \frac{dx}{ds},$$

ovvero in funzione di  $x$

$$p(s(x)) = \frac{q_o}{\sqrt{1 + f_{/x}(x)^2}}.$$

L'equazione differenziale della linea funicolare diviene allora

$$f_{/xx}(x) = \frac{q_o}{H}.$$

da cui, integrando due volte e notando che le costanti di integrazione risultano entrambe nulle, si deduce l'espressione parabolica della curva funicolare:

$$f(x) = \frac{q_o}{2H} x^2.$$

Il valore di  $f(x)$  all'estremità della fune è noto essendo  $f(a/2) = f$ . Sostituendo si ottiene la formula notevole

$$Hf = q_o \frac{a^2}{8}.$$

Essa consente di ricavare il valore del tiro  $H$  e quindi lo sforzo normale  $N$  in tutti i punti della fune una volta assegnata la freccia  $f$  ovvero di determinare la freccia conseguente ad un assegnato valore del tiro.

Tenendo conto dell'espressione precedente, l'espressione della curva funicolare si può riscrivere nella forma classica in termini della freccia e della semiluce:

$$f(x) = \frac{4f}{a^2} x^2.$$

Lo sforzo normale nella fune si ottiene dalla condizione  $H = N(\mathbf{t} \cdot \mathbf{e}_x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{N(x)}{H} &= \sqrt{1 + f_{/x}(x)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{q_o x}{H}\right)^2} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{8fx}{a^2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{16\eta x}{a}\right)^2}. \end{aligned}$$

Il valore massimo viene attinto agli estremi e vale

$$N_{\max} = H \sqrt{1 + \left(\frac{4f}{a}\right)^2} = H \sqrt{1 + (8\eta)^2},$$

dove  $\eta = f/(2a)$  è il *rappporto di ribassamento* della fune.

**Osservazione 5.3.** Si considerino due funi di uguale lunghezza. La prima costituita da un materiale elastico dotato di elevata rigidezza estensionale e la seconda costituita da un materiale molto deformabile. Le due funi siano soggette allo stesso carico distribuito. La formula  $H f = (p_o a^2)/8$ , mostra che il prodotto  $H f$  è indipendente dalle caratteristiche elastiche del materiale. Pertanto nel caso di fune rigida la freccia risulta piccola mentre la componente orizzontale di  $N$  è grande. Nel caso della fune cedevole la freccia sarà invece grande mentre il tiro  $H$  risulta piccolo. ■

### 5.3. La catenaria

Si assuma ora che il carico verticale agente sulla fune sia uniformemente distribuito lungo la fune. Ciò avviene ad esempio quando una fune a sezione costante è soggetta al solo peso proprio (vedi fig.5.5).

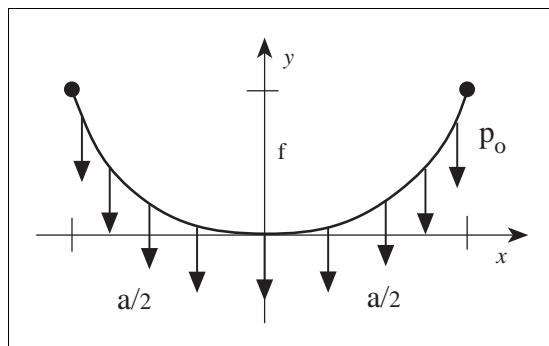


Fig. 5.5

Il problema di determinare la curva funicolare da peso proprio uniforme fu considerato da LEONARDO DA VINCI<sup>78</sup> nel XV secolo.

GALILEO<sup>79</sup> pensava che la funicolare fosse una parabola. Il problema fu poi posto nel 1690 da JACOB BERNOULLI<sup>80</sup> e risolto da JOHANN BERNOULLI<sup>81</sup> fratello minore di JACOB. Contemporaneamente, ma indipendentemente, il problema fu risolto da LEIBNIZ e da HUYGENS<sup>82</sup>.

<sup>78</sup> LEONARDO DA VINCI (1452-1516)

<sup>79</sup> GALILEO GALILEI (1564-1642)

<sup>80</sup> JACOB BERNOULLI (1654-1705), *Acta Erud.* 1690, pp. 217-219.

<sup>81</sup> JOHANN BERNOULLI (1667-1748) *Acta Erud.*, 1691, pp. 274-276.

<sup>82</sup> GOTTFRIED WILHELM VON LEIBNIZ (1646-1716), giurista, filosofo e matematico tedesco, e CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695), matematico, astronomo e fisico olandese, pubblicarono nello stesso giornale ed anno le soluzioni ottenute con metodologie diverse, geometrica quella di HUYGENS e fondate sul calcolo infinitesimale quelle di LEIBNIZ e di BERNOULLI.

Detto  $p_o$  il valore costante del carico verticale distribuito lungo la fune, l'equazione differenziale della linea funicolare si scrive

$$f_{/xx}(x) = \frac{p_o}{H} \sqrt{1 + f_{/x}(x)^2}.$$

Si ricordino ora le definizioni di seno e coseno iperbolico

$$\cosh(x) = \frac{1}{2} (\exp(x) + \exp(-x)), \quad \sinh(x) = \frac{1}{2} (\exp(x) - \exp(-x)),$$

e le relative proprietà:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x), \quad \frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x).$$

Se si pone  $z(x) = f_{/x}(x)$  e  $c = p_o/H$  l'equazione della linea funicolare diviene

$$z_{/x}(x) = c \sqrt{1 + z(x)^2}.$$

Il relativo integrale generale è dato da

$$z(x) = \sinh(c(x - \beta)).$$

Integrando nuovamente si ottiene

$$f(x) = \frac{1}{c} \cosh(c(x - \alpha)) + \beta,$$

che è l'*equazione della catenaria*.

Se la sospensione della fune è simmetrica con apertura  $a$  e l'ordinata nell'origine è nulla, ponendo  $f_{/x}(0) = 0$  si deduce che  $\alpha = 0$  e ponendo  $f(0) = 0$  si ottiene  $\beta = -1/c$ . L'equazione della catenaria diviene allora

$$f(x) = \frac{H}{p_o} \left[ \cosh\left(\frac{p_o x}{H}\right) - 1 \right].$$

Lo sforzo normale nella fune si ottiene dalla condizione

$$N = H \sqrt{1 + f_{/x}(x)^2} = H \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{p_o x}{H}\right)} = H \cosh\left(\frac{p_o x}{H}\right).$$

Il massimo valore di  $N$  viene attinto agli estremi e vale

$$N_{\max} = H \cosh\left(\frac{p_o a}{2H}\right).$$

La freccia  $f = f(a/2)$  è quindi fornita dall'espressione

$$f = \frac{H}{p_o} \left[ \cosh\left(\frac{p_o a}{2H}\right) - 1 \right] = \frac{N_{\max} - H}{p_o},$$

e pertanto risulta

$$N_{\max} = H + p_o f.$$



### 5.4. Principio di Torricelli

Per una fune sottoposta ad una forza peso comunque distribuita la curva funicolare è la configurazione geometrica di cui corrisponde la posizione più bassa del centro di gravità. Tale proprietà è un caso particolare di un risultato noto come principio di TORRICELLI<sup>83</sup>.

Si consideri una struttura vincolata che possa mutare configurazione senza che vengano indotte in essa deformazioni. Una configurazione è di equilibrio sotto il peso proprio se e solo se la quota del baricentro è stazionaria.

*Principio di  
TORRICELLI*

La dimostrazione di questo principio è sviluppata qui di seguito con specifico riferimento alle configurazioni di equilibrio di una fune, ma l'estensione al caso generale è immediata se si osserva che le trasformazioni rigide sono localmente isocore.

Si consideri una fune in una configurazione  $\Omega$ . Sia  $\mathbf{r} = \gamma(s)$  l'equazione parametrica che definisce la configurazione  $\Omega$  della fune in termini dell'ascissa curvilinea  $s \in [0, L]$  dove  $\mathbf{r}$  è il generico raggio vettore misurato a partire da una prefissata origine ed  $L$  è lunghezza della fune in  $\Omega$ .

La fune sia in equilibrio sotto l'azione delle reazioni vincolari agenti agli estremi fissi e del peso proprio di intensità  $p(s)$  per unità di lunghezza della fune.

Detto  $\mathbf{k}$  è il versore della direzione verticale verso il basso, la forza peso alla ascissa  $s$  vale  $\mathbf{f}(s) = p(s)\mathbf{k}$ .

- Si denoti con  $\mathcal{A}$  la varietà delle configurazioni che possono essere ottenute a partire da  $\Omega$  mediante trasformazioni  $\chi : V \mapsto V$  che non alterano la lunghezza di alcun tratto della curva  $\gamma$ . Le trasformazioni  $\chi$  sono quindi isometriche per la fune.

Tutte le configurazioni di  $\mathcal{A}$  ammettono pertanto rappresentazioni parametriche in funzione della medesima ascissa curvilinea  $s \in [0, L]$  e la legge  $p(s)$  di variazione del peso proprio risulta indipendente dalla particolare configurazione  $\Omega \in \mathcal{A}$ .

Si definisca quindi sulla varietà  $\mathcal{A}$  il funzionale

$$\Phi(\gamma) := \int_0^L p(s) \mathbf{k} \cdot \gamma(s) \, ds = \int_0^L p(s) z_\gamma(s) \, ds,$$

dove  $z_\gamma(s) := \mathbf{k} \cdot \gamma(s)$  è la quota del punto di ascissa  $s$  sulla curva  $\gamma$ .

---

<sup>83</sup> EVANGELISTA TORRICELLI (1608-1647). Nato a Roma studiò al Collegio Romano e poi all'Università della Sapienza. Fu allievo e segretario di GALILEO dal 1641 al 1642 e gli succedette alla corte del granduca FERDINANDO II di Toscana. A TORRICELLI sono anche dovute la prima realizzazione del vuoto spinto, la scoperta del principio del barometro e la realizzazione di lenti ottiche.

La fibra  $\mathcal{T}_\gamma(\mathcal{A})$  tangente alla varietà  $\mathcal{A}$  in corrispondenza dell'elemento  $\gamma \in \mathcal{A}$  è costituita dal sottospazio lineare dei cinematismi  $\mathbf{v}$  che sono rigidi per la fune nella configurazione  $\gamma$ :

$$\mathbf{v} \in \mathcal{T}_\gamma(\mathcal{A}) \iff \frac{d\mathbf{v}(s)}{ds} \cdot \mathbf{t}(s) = \mathbf{0}, \quad \forall s \in [0, L].$$

La potenza virtuale compiuta dalle forze peso per effetto di un cinematismo rigido della fune  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_\gamma(\mathcal{A})$  è pari alla variazione prima del funzionale  $\Phi$  valutata nel punto  $\gamma \in \mathcal{A}$  ed in direzione del campo tangente  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_\gamma(\mathcal{A})$ . Risulta infatti

$$d\Phi(\gamma)[\mathbf{v}] = \int_0^L p(s) \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(s) \, ds.$$

**Osservazione 5.4.** La variazione prima di un funzionale  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  definito su uno spazio lineare  $\mathcal{X}$  è per definizione la derivata di GATEAUX e cioè il limite

$$df(\mathbf{x})[\mathbf{v}] := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [f(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})],$$

assunto lineare nell'incremento  $\mathbf{v} \in \mathcal{X}$ .

Se il funzionale  $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$  è definito su una varietà differenziabile  $\mathcal{A}$  modellata su  $\mathcal{X}$  si considera una carta locale  $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathcal{A} \mapsto \mathcal{X}$  ed il funzionale  $f = \Phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ .

Si definisce quindi la variazione prima del funzionale  $\Phi : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$  mimando la regola di derivazione a catena:

$$d\Phi(\gamma)[\mathbf{v}] := df(\varphi(\gamma))[\varphi_*\mathbf{v}], \quad \mathbf{v} \in \mathcal{T}_\gamma(\mathcal{A}).$$

essendo  $\varphi_*\mathbf{v} := T\varphi[\mathbf{v}] \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{X}$ . ■

La condizione di equilibrio si esprime imponendo che la curva  $\gamma$  sia un punto di stazionarietà per il funzionale  $\Phi$  sulla varietà  $\mathcal{A}$  e cioè che risulti

$$d\Phi(\gamma)[\mathbf{v}] = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{T}_\gamma(\mathcal{A}).$$

D'altro canto la quota del baricentro delle forze peso agenti sulla fune nella configurazione  $\gamma$  è fornita dal rapporto

$$z_G(\gamma) := \frac{\int_0^L p(s) z_\gamma(s) \, ds}{\int_0^L p(s) \, ds} = \frac{\Phi(\gamma)}{P(\gamma)},$$



Per quanto osservato in precedenza,  $P(\gamma)$  con  $\gamma \in \mathcal{A}$  rappresenta il peso totale della fune e risulta indipendente da  $\gamma \in \mathcal{A}$ . Quindi la quota del baricentro  $z_G(\gamma)$  è proporzionale al valore del funzionale  $\Phi(\gamma)$  per  $\gamma \in \mathcal{A}$ .

La condizione di equilibrio può pertanto essere espressa affermando che la quota del baricentro dei pesi della fune deve essere stazionaria su  $\mathcal{A}$  (in effetti deve essere minima altrimenti la fune sarebbe compressa).

### 5.5. Calcolo delle variazioni

La catenaria è la forma geometrica di una fune a sezione costante cui corrisponde la posizione più bassa del centro di gravità.

La dimostrazione di tale proprietà è quindi del principio di TORRICELLI con riferimento ad una fune a sezione costante che, sospesa sotto il peso proprio, assume la forma di una catenaria, è dovuto a JACOB BERNOULLI<sup>84</sup>.

In questa sezione si perviene a questo classico risultato dimostrando più in generale che ogni curva di equilibrio di una fune soggetta ad un carico verticale soddisfa questa proprietà di estremo La metodologia di indagine fa ricorso al *calcolo delle variazioni*.

Per caratterizzare la configurazione di equilibrio di una fune, fissata agli estremi e appesa sotto il peso proprio, si osservi preliminarmente che il principio di TORRICELLI conduce ad un *problema di estremo vincolato*.

La soluzione fa ricorso al *metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE*<sup>85</sup> che in termini moderni si formula come segue.

**Proposizione 5.1. Metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE.** *Siano  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{H}$  spazi di HILBERT e  $\mathcal{X}'$  e  $\mathcal{H}'$  gli spazi duali. Si consideri quindi un funzionale  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  ed una varietà  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  definita dalla condizione  $\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{o}$  con  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  e  $\mathbf{G} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{H}$ . Si assuma che gli operatori  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  e  $\mathbf{G} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{H}$  siano differenziabili con derivate  $df(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{X}\}$  e  $d\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{H}\}$  lineari e limitate. La condizione di stazionarietà di  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  sulla varietà  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  si scrive*

$$df(\mathbf{x})[\mathbf{v}] = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} : d\mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{v}] = \mathbf{o}.$$

Una condizione sufficiente per la stazionarietà è che esista un funzionale  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{H}'$  tale che

$$df(\mathbf{x})[\mathbf{v}] = \langle \boldsymbol{\lambda}, d\mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{v}] \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}.$$

Se l'operatore lineare  $d\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{H}\}$  ha immagine chiusa la condizione è anche necessaria. Il funzionale  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{H}'$  è detto un moltiplicatore di LAGRANGE.

<sup>84</sup> JACOB BERNOULLI (1654-1705) pubblicò negli *Acta Erud.* del 1691 la dimostrazione del fatto che, tra le configurazioni di un cavo appeso agli estremi, la catenaria è quella che ha il baricentro più basso.

<sup>85</sup> JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813) matematico italo-francese. Contribuì a dare un fondamento matematico alla meccanica estendendo e completando le ricerche di NEWTON. Famosa la sua *Mécanique Analytique* (1ª ed. 1788).

**Dim.** La condizione di stazionarietà di  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  sulla varietà  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  si può scrivere nella forma  $df(\mathbf{x}) \in [\text{Ker } d\mathbf{G}(\mathbf{x})]^\perp$ . L'inclusione

$$\text{Im } [d\mathbf{G}(\mathbf{x})]' \subseteq [\text{Ker } d\mathbf{G}(\mathbf{x})]^\perp$$

fornisce la condizione sufficiente.

In virtù del teorema dell'immagine chiusa di BANACH, la chiusura dell'immagine di  $d\mathbf{G}(\mathbf{x})$  in  $\mathcal{H}$  implica che

$$\text{Im } [d\mathbf{G}(\mathbf{x})]' = [\text{Ker } d\mathbf{G}(\mathbf{x})]^\perp,$$

e prova quindi la necessità.  $\square$

Considerando il funzionale  $\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{H}' \mapsto \mathbb{R}$  definito da

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}),$$

la proposizione 5.1 può enunciarsi affermando che la condizione di stazionarietà del funzionale  $\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{H}' \mapsto \mathbb{R}$  nello spazio prodotto  $\mathcal{X} \times \mathcal{H}'$  è equivalente a quella del funzionale  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  sulla varietà  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ . Infatti la condizione di stazionarietà del funzionale  $\psi : \mathcal{X} \times \mathcal{H}' \mapsto \mathbb{R}$  si scrive

$$\begin{cases} d_{\mathbf{x}}\psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})[\mathbf{v}] = df(\mathbf{x})[\mathbf{v}] - \langle \boldsymbol{\lambda}, d\mathbf{G}(\mathbf{x})[\mathbf{v}] \rangle = 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{X}, \\ d_{\boldsymbol{\lambda}}\psi(\mathbf{x}; \boldsymbol{\lambda})[\boldsymbol{\mu}] = \mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{O}, & \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{H}', \end{cases}$$

ed equivale alla condizione della proposizione 5.1.

Tornando al principio di TORRICELLI applicato al problema della funicolare si tratta di determinare sulla varietà  $\mathcal{A}$  un punto di stazionarietà del funzionale

$$\Phi(\boldsymbol{\gamma}) := \int_0^L p(s) \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\gamma}(s) \, ds, \quad \boldsymbol{\gamma} \in \mathcal{A}.$$

A tal fine si consideri la mappa di evoluzione  $\boldsymbol{\varphi} : \mathbb{S} \times I \times I \mapsto \mathbb{S}$  della fune che individua la posizione  $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t, \tau) \in \mathbb{S}$  al tempo  $\tau$  dalla particella  $\mathbf{p} = p(\mathbf{x}, t)$  che al tempo  $t$  occupa la posizione  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}$ .

Sopprimendo l'indicazione dell'istante iniziale  $s$  si ponga

$$\boldsymbol{\varphi}_t(\boldsymbol{\gamma}(s), \tau) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\gamma}(s), t, \tau).$$

La dilatazione lineare della fune si scrive

$$\varepsilon = D(\boldsymbol{\varphi}_t \circ \boldsymbol{\gamma}) = \|d(\boldsymbol{\varphi}_t \circ \boldsymbol{\gamma})/ds\| - 1.$$

Denotando con un punto la derivata rispetto al tempo valutata al tempo iniziale  $s$ , e ponendo

$$\mathbf{v}(s) := \frac{d(\varphi_s \circ \gamma)}{ds},$$

la *deformazione tangente* è data da

$$\dot{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{v} := \frac{d}{dt} [D(\varphi_t \circ \gamma)] \Big|_{t=s} = dD(\varphi_t \circ \gamma) [\mathbf{v}] = (d\mathbf{v}/ds) \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t}.$$

Nella proposizione 5.1 si ponga

$$\mathbf{G} = D : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{H},$$

con  $\mathcal{X} = H^1(I)$  e  $\mathcal{H} = L^2(I)$ .

La derivata  $d\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{H}\}$  è data da  $dD(\varphi_t \circ \gamma) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{H}\}$ .

La condizione di stazionarietà di  $\Phi(\gamma)$  sulla varietà  $\mathcal{A}$  si impone quindi richiedendo che

$$d\Phi(\gamma; \mathbf{v}) = \int_0^L p(s) \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(s) \, ds = \int_0^L N(s) \mathbf{v}'(s) \cdot \mathbf{t}(s) \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(I),$$

dove  $N \in L^2(I)$  è il *moltiplicatore di LAGRANGE*.

Integrando per parti si ha che

$$\int_{x_1}^{x_2} (N \mathbf{t}) \cdot (d\mathbf{v}/ds) \, ds = (N \mathbf{t}) \cdot \mathbf{v} \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} d(N \mathbf{t})/ds \cdot \mathbf{v} \, ds,$$

e tenendo presente che le componenti tangenti del cinematicismo sono nulle agli estremi, la condizione di stazionarietà si riscrive

$$d\Phi(\gamma; \mathbf{v}) = \int_0^L p(s) \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}(s) \, ds = \int_0^L (N \mathbf{t})'(s) \cdot \mathbf{v}(s) \, ds, \quad \forall \mathbf{v} \in H^1(I).$$

La densità di  $H^1(I)$  in  $L^2(I)$  implica che valga la condizione differenziale di equilibrio

$$(N \mathbf{t})' + \mathbf{p} = \mathbf{o}.$$

Il moltiplicatore di LAGRANGE ha pertanto il significato di sforzo normale nella fune.

In accordo con l'analisi sviluppata nella sezione 5.1 (p. 400), si perviene all'*equazione della funicolare*

$$f_{/xx} = \frac{p}{H} \sqrt{1 + f_{/x}^2},$$

come soluzione del problema di estremo vincolato.

**Osservazione 5.5.** In letteratura la dimostrazione della proprietà di estremo della catenaria è condotta col ricorso alla seguente *condizione di stazionarietà di EULER*.<sup>86</sup>

**Proposizione 5.2. Condizione di stazionarietà.** *Sia  $I$  un intervallo limitato in  $\mathbb{R}$ ,  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita e  $F(u, v, x)$  una funzione  $F : V \times V \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$  continua e di classe  $C^2$  separatamente nei suoi argomenti. Sia inoltre  $\mathcal{M}$  una varietà differenziabile i cui elementi sono campi  $f : I \mapsto V$  di classe  $C^1(I)$ .*

*Si consideri quindi il funzionale*

$$\phi(f) = \int_I F(f(x), f_{/x}(x), x) dx, \quad f \in \mathcal{M}.$$

*Allora, se il funzionale  $\phi : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$  è stazionario in corrispondenza di un campo  $f : \Omega \mapsto V$  appartenente alla varietà  $\mathcal{M}$ , risulta soddisfatta la condizione di EULER*

$$\frac{d}{dx} \frac{dF}{dv}(f(x), f_{/x}(x), x) = \frac{dF}{du}(f(x), f_{/x}(x), x).$$

**Dim.** Derivando  $\phi(f)$  nella direzione  $h \in \mathbb{T}_f(\mathcal{M})$  tangente alla varietà  $\mathcal{M}$  nel punto  $f \in \mathcal{M}$  si ha che

$$d\phi(f)[h] = \int_I \left[ d_u F(f(x), f_{/x}(x), x)[h(x)] + d_v F(f(x), f_{/x}(x), x)[h_{/x}(x)] \right] dx.$$

La stazionarietà richiede che sia  $d\phi(f)[h] = 0$  per ogni  $h \in \mathbb{T}_f(\mathcal{M})$ . Integrando per parti si conclude che per ogni  $h \in \mathbb{D}(I)$  risulta

$$d\phi(f)[h] = \int_I \left[ d_u F(f(x), f_{/x}(x), x) - d_x d_v F(f(x), f_{/x}(x), x) \right] [h(x)] dx.$$

Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni impone che il termine in parentesi sotto il segno di integrale deve annullarsi e ciò prova l'asserto.  $\square$

A tal riguardo si veda l'analisi sviluppata in [21], esempio 3 pag. 27.

La discussione della proprietà di estremo della catenaria condotta in [21] sulla base della condizione di stazionarietà di EULER è però inficiata dal fatto che operando in tal modo non si tiene conto della condizione di vincolo.

La condizione di vincolo impone che i cinematicismi della fune lungo cui si effettua la derivata del funzionale  $\Phi(\gamma)$  siano rigidi.

La proprietà di estremo va infatti imposta sulla varietà  $\mathcal{A}$  e non nell'intero spazio delle configurazioni della fune. Nelle configurazioni da confrontare la fune deve infatti avere sempre la stessa lunghezza e così ogni suo tratto.  $\blacksquare$

<sup>86</sup> LEONHARD EULER (1707-1783), Comm. Acad. Sci. Petrop., VIII, 159-190 (1736). Nel 1744 fu dato alle stampe il volume *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes* contenente i risultati le ricerche di EULER sul calcolo delle variazioni.

### 5.6. Peculiarità del modello fune

La fune fornisce un esempio di un modello strutturale in cui l'operatore lineare di deformazione tangente non è un operatore di KORN. Infatti il sottospazio lineare dei cinematicismi rigidi conformi non ha dimensione finita e ciò esclude la possibilità che la diseguaglianza di KORN possa essere soddisfatta.

A tale conclusione si perviene richiamando la proposizione II.6.5 (p. 216) la quale mostra che la diseguaglianza di KORN implica che il sottospazio lineare dei cinematicismi rigidi conformi abbia dimensione finita.

In conseguenza del fatto che l'operatore di deformazione tangente non è un operatore di KORN, il teorema delle potenze virtuali costituisce una condizione sufficiente ma non necessaria di equilibrio. Non è infatti più possibile dimostrare l'esistenza di uno stato di sforzo in equilibrio con un sistema equilibrato di carichi.

Ciò comporta che

- nel formulare le condizioni di equilibrio è necessario assumere l'esistenza di uno stato di sforzo nella fune,
- le equazioni cardinali della statica sono necessarie ma non sufficienti ad assicurare l'equilibrio in quanto i cinematicismi equiproiettivi costituiscono solo un sottospazio esadimensionale del ben più ampio spazio dei cinematicismi rigidi conformi,
- la condizione di equilibrio va imposta o in forma variazionale tramite il principio dei lavori virtuali o mediante le equazioni di CAUCHY, differenziali ed ai limiti, e dunque in termini dello sforzo normale nella fune.

## 6. LA TRAVE DI TIMOSHENKO

Il modello monodimensionale di trave di TIMOSHENKO è caratterizzato dall’ipotesi cinematica che consente alle sezioni trasversali di subire rotazioni indipendenti dallo spostamento della linea d’asse. Il modello è pertanto anche detto *trave deformabile a taglio*<sup>87</sup>.

Nel modello di trave di TIMOSHENKO i cinematicismi delle sezioni rette consistono in atti di moto rigido composti da

- un atto di moto di traslazione con velocità pari a quella  $\mathbf{v}$  del baricentro della sezione,
- un atto di moto di rotazione attorno al baricentro con velocità angolare pari al vettore assiale  $\boldsymbol{\omega}$ .

Si assume che l’asse della trave sia un segmento curvilineo regolare  $\Omega$  rappresentato in forma parametrica dall’equazione vettoriale  $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(x)$  con  $x \in [x_1, x_2]$  ascissa curvilinea su  $\Omega$ .

Si denoti con un apice la derivata rispetto all’ascissa curvilinea, e sia  $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{r}}'$  il versore tangente all’asse. La cinematica della trave è pertanto determinata dai seguenti campi:

- Il campo  $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\}$  di *parametri cinematici* che è la coppia costituita dal campo vettoriale di velocità della linea d’asse e dal campo di vettori assiali della velocità di rotazione delle sezioni trasversali.

Si definiscano quindi le seguenti quantità cinematiche.

- La *curvatura tangente* della trave è la derivata della velocità di rotazione

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{\omega}'.$$

- L’*atto di scorrimento* in corrispondenza della sezione all’ascissa  $x$  è il gradiente della velocità di traslazione relativa tra le sezioni valutata da un osservatore solidale con la sezione in  $x$ .

L’espressione dell’atto di scorrimento in termini dei parametri cinematici  $\mathbf{v}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  si determina osservando che la velocità di traslazione relativa della sezione all’ascissa  $y$  vista da quella all’ascissa  $x$  si ottiene sommando:

- la *velocità di traslazione relativa*  $\mathbf{v}_{\text{REL}}(y; x)$  della sezione all’ascissa  $y$  rispetto a quella all’ascissa  $x$  data da

$$\mathbf{v}_{\text{REL}}(y; x) = \mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x),$$

---

<sup>87</sup> A tale modello strutturale A.E.H. LOVE dedica il capitolo XVIII del *Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. La meccanica delle travi sottili soggette a torsione e flessione è stata trattata da KIRCHHOFF in [1] e da KELVIN e TAIT in [2].

- la *velocità di trascinamento*  $\mathbf{v}_{\text{TRA}}(y; x)$  dovuta all'atto di moto di rotazione della sezione all'ascissa  $x$  data da

$$\mathbf{v}_{\text{TRA}}(y; x) = -\boldsymbol{\omega}(x) \times [\hat{\mathbf{r}}(y) - \hat{\mathbf{r}}(x)],$$

Infatti un osservatore solidale con la sezione in  $x$  che ruoti con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}(x)$  vede le altre sezioni della trave ruotare in verso opposto con velocità angolare  $-\boldsymbol{\omega}(x)$ .

Ne consegue che la *velocità di traslazione apparente* e cioè la velocità di traslazione relativa della sezione in  $y$  vista da un osservatore solidale con la sezione in  $x$  è fornita da

$$\mathbf{v}_{\text{APP}}(y; x) = [\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x)] - \boldsymbol{\omega}(x) \times [\hat{\mathbf{r}}(y) - \hat{\mathbf{r}}(x)] \quad \forall y \in [0, L],$$

dove il simbolo  $\times$  denota il prodotto vettoriale.

Valutando nel punto  $x$  la derivata di  $\mathbf{v}_{\text{APP}}(y; x)$  rispetto ad  $y$  e definendo l'*atto di scorrimento*  $\dot{\delta} := \mathbf{v}'_{\text{APP}}$ , si ottiene l'espressione

$$\dot{\delta} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t} = \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}.$$

La *deformazione tangente*  $\mathbf{D}$  è costituita dalla coppia  $\{\dot{\chi}, \dot{\delta}\}$  formata dalla velocità di curvatura e dall'atto di scorrimento tra le sezioni rette.

I cinematismi rigidi sono quelli per cui risulta

$$\mathbf{D} = \begin{vmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\delta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega' \\ \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix}.$$

Infatti dalla prima condizione si deduce che  $\boldsymbol{\omega}$  è costante.

Ponendo  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_o$  ed integrando la seconda condizione si ha poi che

$$\mathbf{v}(y) - \mathbf{v}(x) = \boldsymbol{\omega}_o \times [\mathbf{r}(y) - \mathbf{r}(x)],$$

che è l'espressione del campo di velocità di un atto di moto rigido con velocità di rotazione pari a quella delle sezioni trasversali.

■ L'operatore cinematico  $\mathbf{B}$  è dunque definito in forma matriciale da

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & d/dx \\ d/dx & \mathbf{t} \times \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega' \\ \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\delta} \end{vmatrix}.$$

Nel modello di *trave semplice* si assume che i cinematismi conformi  $u \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(\Omega))$  abbiano quale suddivisione di supporto l'intero intervallo  $\Omega = [x_1, x_2]$  e quindi che lo spazio cinematico  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  sia il prodotto cartesiano  $H^1(x_1, x_2) \times H^1(x_1, x_2)$ .

Si ricordi che lo spazio di SOBOLEV  $H^1(x_1, x_2)$  è costituito dai campi vettoriali di quadrato integrabile su  $\Omega = \{x_1, x_2\}$  insieme alla derivata prima distribuzionale.

- L'ente duale della deformazione tangente  $\mathbf{D} = \{\dot{\chi}, \dot{\delta}\}$  è un campo di sforzi

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix}$$

costituito dalla coppia di campi vettoriali

- $\mathbf{M}$  *sforzo torcente-flettente*,
- $\mathbf{F}$  *sforzo normale-tagliante*.

Alla formula di GREEN si perviene integrando per parti la potenza virtuale compiuta dal campo di sforzi per la deformazione tangente:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{M} \cdot \dot{\chi} + \mathbf{F} \cdot \dot{\delta}] dx &= \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega})] dx = \\ &= \sum_{i=1}^2 [\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_n \cdot \boldsymbol{\omega}] (x_i) - \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{F}' \cdot \mathbf{v} + (\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega}] dx, \end{aligned}$$

dove  $n(x_i)$  vale  $-1$  o  $+1$  a seconda che il punto  $x_i$  sia l'estremo iniziale o finale della trave.

La coppia  $\mathbf{M}_n$  e la forza  $\mathbf{F}_n$  sono rispettivamente l'*azione torcente-flettente* e l'*azione normale-tagliante* in corrispondenza degli estremi della trave.

Le equazioni differenziali di equilibrio impongono che in  $x \in \{0, L\}$  risultino

$$\begin{cases} -\mathbf{p} = \mathbf{F}' & \text{carico distribuito,} \\ -\mathbf{m} = \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F} & \text{coppia distribuita.} \end{cases}$$

- Il carico distribuito  $\mathbf{p} \in H(x_1, x_2)$  è costituito da un campo vettoriale di quadrato integrabile su  $\Omega = \{x_1, x_2\}$  e rappresenta un sistema di forze la cui potenza virtuale per unità di lunghezza è fornito dal prodotto  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$  con  $\mathbf{v} \in H^1(x_1, x_2)$  velocità della linea d'asse.
- La coppie distribuita  $\mathbf{m} \in H(x_1, x_2)$  è costituita da un campo vettoriale di quadrato integrabile su  $\Omega = \{x_1, x_2\}$  che rappresenta un sistema di forze la cui potenza virtuale per unità di lunghezza è fornito dal prodotto  $\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}$  con  $\boldsymbol{\omega} \in H^1(x_1, x_2)$  velocità di rotazione della sezione trasversale.

L'operatore differenziale di equilibrio è rappresentato in forma matriciale da

$$\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} := - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & d/dx \\ d/dx & \mathbf{t} \times \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{F}' \\ \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{vmatrix}.$$

Gli operatori al contorno sono

$$\boldsymbol{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} \mathbf{v}(x_i) \\ \boldsymbol{\omega}(x_i) \end{vmatrix}, \quad \mathbf{N} \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} \mathbf{F}n(x_i) \\ \mathbf{M}n(x_i) \end{vmatrix},$$

per cui risulta

$$\langle\langle \mathbf{N} \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix}, \boldsymbol{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} \rangle\rangle := \mathbf{N} \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} \cdot \boldsymbol{\Gamma} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{F}n \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}n \cdot \boldsymbol{\omega}](x_i).$$

Le equazioni di equilibrio al contorno impongono che

$$\begin{cases} \mathbf{F}n(x_i) = \mathfrak{F}(x_i) + \mathfrak{F}_{\mathbf{R}}(x_i), \\ \mathbf{M}n(x_i) = \mathfrak{M}(x_i) + \mathfrak{M}_{\mathbf{R}}(x_i). \end{cases}$$

dove  $\mathfrak{M}(x_i)$  e  $\mathfrak{F}(x_i)$  sono le coppie e le forze attive agenti agli estremi del trave. Con il pedice  $(\cdot)_{\mathbf{R}}$  si denotano gli analoghi enti reattivi.

In generale un modello di trave di TIMOSHENKO è definito da una suddivisione della linea d'asse in un numero finito di elementi.

In ciascuno di essi il sistema di forze agenti è costituito da un campo di coppie e forze distribuite lungo l'asse della trave e da coppie e forze concentrate agli estremi. Ne segue che il sistema di forze agenti sull'intera trave è costituito da un campo di coppie e forze distribuite e da un numero finito di coppie e forze concentrate lungo l'asse della trave.

Le forze attive in equilibrio nel modello di trave di TIMOSHENKO sono dunque costituite da coppie e forze distribuite e da un numero finito di coppie e forze concentrate lungo l'asse della trave.

Essendo  $\mathbf{B} = -\mathbf{B}'_o$  si ha che

■ l'analogia di MOHR sussiste effettuando le sostituzioni

$$\begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{vmatrix} \iff -\begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{vmatrix}.$$

L'analogia di MOHR è illustrata in maggior dettaglio nella prossima sezione.

### 6.1. Analogia di Mohr

Si consideri una trave di lunghezza  $L$  incastrata all'estremo  $s = 0$  e libera all'altra estremità. Dunque  $\mathbf{v}(0) = \mathbf{o}$  e  $\boldsymbol{\omega}(0) = \mathbf{o}$ . Integrando l'espressione della velocità di curvatura si ottiene la formula

$$\boldsymbol{\omega}(s) = \int_0^s \boldsymbol{\omega}'(\xi) \, d\xi = \int_0^s \dot{\boldsymbol{\chi}}(\xi) \, d\xi,$$

che consente di calcolare la velocità di rotazione della generica sezione all'ascissa  $s \in [0, L]$  in funzione delle curvature tangenti.

L'espressione della velocità di scorrimento fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t} = \dot{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = -\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\delta}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})' = \\ &= -\dot{\boldsymbol{\chi}} \times \mathbf{r} + \dot{\boldsymbol{\delta}} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})'. \end{aligned}$$

Integrando si ottiene

$$\mathbf{v}(s) = \int_0^s [\dot{\boldsymbol{\delta}}(\xi) - \dot{\boldsymbol{\chi}}(\xi) \times \mathbf{r}(\xi)] \, d\xi + \boldsymbol{\omega}(s) \times \mathbf{r}(s).$$

Sostituendo infine l'espressione della velocità di rotazione  $\boldsymbol{\omega}(s)$  si perviene alla formula

$$\mathbf{v}(s) = \int_0^s [\dot{\boldsymbol{\delta}}(\xi) + [\mathbf{r}(\xi) - \mathbf{r}(s)] \times \dot{\boldsymbol{\chi}}(\xi)] \, d\xi,$$

che consente di calcolare la velocità di spostamento della generica sezione alla ascissa  $s \in [0, L]$  in funzione della velocità di curvatura e della velocità di scorrimento.

Si consideri quindi una trave, detta *trave ausiliaria*, eguale a quella in esame ma incastrata all'ascissa  $s = L$  e libera all'altro estremo e caricata da

- un campo di forze fittizie distribuite  $\mathbf{p}^* = -\dot{\boldsymbol{\chi}}$ ,
- un campo di coppie fittizie distribuite  $\mathbf{m}^* = -\dot{\boldsymbol{\delta}}$ .

Le due formule precedenti mostrano che,

- la velocità di rotazione  $\boldsymbol{\omega}(s)$  è opposta al risultante delle forze fittizie distribuite  $\mathbf{p}^*(\xi)$  agenti sul tratto  $\xi \in [0, s]$ ,
- la velocità di spostamento  $\mathbf{v}(s)$  è opposta al momento risultante rispetto ad  $s$  delle coppie distribuite fittizie  $\mathbf{m}^*(\xi)$  e delle forze distribuite fittizie  $\mathbf{p}^*(\xi)$  agenti sul tratto  $\xi \in [0, s]$ .

In altri termini le velocità di rotazione  $\omega(s)$  e di spostamento  $v(s)$  sono rispettivamente il risultante ed il momento risultante della interazione in  $s$  come azioni sulla faccia di normale positiva. Essi sono dunque rispettivamente eguali agli sforzi normale-tagliante  $F^*(s)$  e torcente-flettente  $M^*(s)$  nella trave ausiliaria.

Queste osservazioni sono alla base della

■ *analogia statico-cinematica* di OTTO MOHR<sup>88</sup>.

La validità dell'analogia statico-cinematica di MOHR per la trave di TIMOSHENKO è legata alla *simmetria* della formula di GREEN

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega})] \, ds + \int_{x_1}^{x_2} [\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}' + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F})] \, ds = \\ & = \sum_{i=1}^2 [\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_n \cdot \boldsymbol{\omega}] (x_i), \end{aligned}$$

rispetto alla sostituzione

$$\begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix},$$

tra le variabili statiche e cinematiche.

Ogni problema di tipo cinematico può quindi essere tradotto in uno fittizio di tipo statico formulato in termini delle variabili statiche fittizie

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{v}, \quad \mathbf{F}^* = \boldsymbol{\omega}.$$

Viceversa ogni problema di tipo statico può essere tradotto in uno fittizio di tipo cinematico formulato in termini delle variabili cinematiche fittizie

$$\mathbf{v}^* = \mathbf{M}, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \mathbf{F}.$$

Nel formulare il problema fittizio (statico o cinematico) le condizioni di vincolo e la azioni sulle travi (forze o distorsioni) vanno ovviamente modificate in accordo all'analogia statico-cinematica. Inoltre, risultando

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \boldsymbol{\omega}' \\ \dot{\delta} = \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad \begin{cases} -\mathbf{p} = \mathbf{F}' \\ -\mathbf{m} = \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F} \end{cases}$$

nel formulare il problema statico fittizio corrispondente ad un assegnato problema cinematico si dovrà caricare la trave ausiliaria con forze e coppie distribuite opposte rispettivamente alla velocità di curvatura ed alla velocità di scorrimento agenti sulla trave

$$\mathbf{p}^* = -\dot{\chi}, \quad \mathbf{m}^* = -\dot{\delta},$$

e viceversa per formulare un problema cinematico fittizio.

---

<sup>88</sup> OTTO MOHR (1835-1918). Ingegnere e professore al Politecnico di Stoccarda. Progettò alcuni tra le prime strutture metalliche in Germania. Per primo applicò le linee d'influenza in ingegneria delle strutture.

**Osservazione 6.1.** L'analogia di MOHR può, a prima vista, sembrare priva di interesse in quanto il problema fittizio da risolvere è perfettamente identico a quello di partenza.

Ciò nonostante essa ha avuto un grande successo presso gli strutturisti che l'adoperano frequentemente per i loro calcoli come un metodo *magico* che consente di risolvere problemi cinematici traducendoli in problemi statici fittizzi che risultano di più agevole soluzione.

Una classica applicazione dell'analogia di MOHR, nell'ambito della teoria linearizzata delle travi, consiste nel calcolo di spostamenti o rotazioni di sezioni trasversali sulla base della conoscenza dei campi di scorrimento e curvatura. ■

## 6.2. Buona posizione

La buona posizione del modello di trave di TIMOSHENKO si stabilisce dimostrando che l'operatore cinematico è un operatore di KORN.

Poichè l'operatore di deformazione tangente della trave di TIMOSHENKO è un operatore differenziale del primo ordine, la *diseguaglianza di KORN* ha la forma astratta

$$\|\mathbf{B}\mathbf{u}\|_0 + \|\mathbf{u}\|_0 \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_1 \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega),$$

con  $\mathbf{u} = \{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\}$  e

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & d/dx \\ d/dx & \mathbf{t} \times \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix}.$$

In forma esplicita la diseguaglianza di KORN si può scrivere

$$\|\boldsymbol{\omega}'\|_0 + \|\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_0 + \|\mathbf{v}\|_0 + \|\boldsymbol{\omega}\|_0 \geq \alpha [\|\mathbf{v}\|_1 + \|\boldsymbol{\omega}\|_1]$$

$$\forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in H^1(\Omega).$$

La validità di tale diseguaglianza segue facilmente osservando che

$$\|\boldsymbol{\omega}'\|_0 + \|\boldsymbol{\omega}\|_0 \geq \|\boldsymbol{\omega}\|_1, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in H^1(\Omega),$$

e che per  $\beta > 1$  risulta

$$\|\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_0 + \|\mathbf{v}\|_0 + \beta \|\boldsymbol{\omega}\|_0 \geq \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in H^1(\Omega).$$

Infatti

$$\|\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_0 \geq \|\mathbf{v}'\|_0 - \|\mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_0 = \|\mathbf{v}'\|_0 - \|\boldsymbol{\omega}\|_0.$$

Quindi

$$\|\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}\|_0 + \|\mathbf{v}\|_0 + \beta \|\boldsymbol{\omega}\|_0 \geq$$

$$\|\mathbf{v}'\|_0 - \|\boldsymbol{\omega}\|_0 + \|\mathbf{v}\|_0 + \beta \|\boldsymbol{\omega}\|_0 \geq$$

$$\|\mathbf{v}'\|_0 + \|\mathbf{v}\|_0 \geq \|\mathbf{v}\|_1 \quad \forall \mathbf{v}, \boldsymbol{\omega} \in H^1(\Omega),$$

e la diseguaglianza di KORN segue ponendo  $\alpha = (1 + \beta)^{-1}$ .

### 6.3. Componenti assiali e trasversali

La formulazione delle relazioni costitutive che descrivono il comportamento elastico di una trave di TIMOSHENKO richiede che la deformazione tangente sia decomposta nelle componenti assiali e trasversali.

Sia  $\Pi = \mathbf{I} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \in L\{\mathbf{V}; \mathbf{V}\}$  il proiettore ortogonale sul piano della sezione trasversale.

La velocità di *curvatura* e la velocità di *scorrimento*

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \omega', \\ \dot{\delta} = \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \omega, \end{cases}$$

sono somma delle componenti

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \dot{\chi}_t \mathbf{t} + \Pi \dot{\chi}, \\ \dot{\delta} = \dot{\delta}_t \mathbf{t} + \Pi \dot{\delta}, \end{cases}$$

con

- $\dot{\chi}_t = \dot{\chi} \cdot \mathbf{t}$  velocità di *curvatura torsionale*,
- $\dot{\delta}_t = \dot{\delta} \cdot \mathbf{t}$  velocità di *scorrimento assiale*,
- $\Pi \dot{\chi}$  velocità di *curvatura flessionale*,
- $\Pi \dot{\delta}$  velocità di *scorrimento trasversale*.

Esprimendo le componenti assiali e trasversali delle velocità di curvatura e di scorrimento in termini delle corrispondenti componenti assiali e trasversali dei parametri cinematici

- $v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$  velocità di *traslazione assiale*,
- $\omega_t = \omega \cdot \mathbf{t}$  velocità di *rotazione torsionale*,
- $\Pi v$  velocità di *traslazione trasversale*,
- $\Pi \omega$  velocità di *rotazione flessionale*,

si perviene alle relazioni cinematiche

$$\begin{cases} \dot{\chi}_t = \omega' \cdot \mathbf{t} = (\omega \cdot \mathbf{t})' - c(\omega \cdot \mathbf{n}) = (\omega \cdot \mathbf{t})' - (c \mathbf{n}) \cdot (\Pi \omega), \\ \dot{\delta}_t = \dot{\delta} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} + (\mathbf{t} \times \omega) \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{t} \times \omega) \cdot \mathbf{t} = \\ = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - (c \mathbf{n}) \cdot (\Pi \mathbf{v}), \\ \Pi \dot{\chi} = \Pi \omega' = \Pi(\Pi \omega)' - \Pi \Pi' \omega = \Pi(\Pi \omega)' + c \mathbf{n}(\omega \cdot \mathbf{t}), \\ \Pi \dot{\delta} = \Pi \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \omega = \Pi(\Pi \mathbf{v})' - \Pi \Pi' \mathbf{v} + \mathbf{t} \times \omega = \\ = \Pi(\Pi \mathbf{v})' + c \mathbf{n}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times \Pi \omega. \end{cases}$$

Infatti

$$\boldsymbol{\Pi}' = -(\mathbf{t} \otimes \mathbf{t})' = -c (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}),$$

e quindi

$$-\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\Pi}' \mathbf{v} = c (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) \mathbf{v} = c \mathbf{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}),$$

$$-\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\Pi}' \boldsymbol{\omega} = c (\mathbf{n} \otimes \mathbf{t}) \boldsymbol{\omega} = c \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}).$$

Le componenti assiali e trasversali  $\{M_t, N, M_f, T\}$  dello sforzo duale della deformazione tangente  $\{\dot{\chi}_t, \dot{\delta}_t, \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi}, \boldsymbol{\Pi} \dot{\delta}\}$  prendono il nome di

- $M_t$  *sforzo torcente*,
- $N$  *sforzo normale*,
- $M_f$  *sforzo flettente*,
- $T$  *sforzo tagliante*.

In termini delle componenti assiali e trasversali la formula di GREEN si scrive

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L [M_t \dot{\chi}_t + N \dot{\delta}_t + \mathbf{M}_f \cdot \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} + \mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\Pi} \dot{\delta}] \, ds = \\
 & \int_0^L [M_t [(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})' - c \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega})] + N [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})] + \\
 & \quad \mathbf{M}_f \cdot [\boldsymbol{\Pi} (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega})' + c \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})] + \mathbf{T} \cdot [\boldsymbol{\Pi} (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})' + c \mathbf{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}]] \, ds = \\
 & = \sum_{i=1}^2 [M_t (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + N (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{M}_f \cdot (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{T} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})]_i n_i + \\
 & \quad - \int_0^L [M'_t (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + (c \mathbf{n} M_t) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}) + N' (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + (c \mathbf{n} N) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) + \\
 & \quad \mathbf{M}'_f \cdot (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}) - (c \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_f) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + \\
 & \quad \mathbf{T}' \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) - (c \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + (\mathbf{t} \times \mathbf{T}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega})]. 
 \end{aligned}$$

Denotando le componenti assiali e trasversali dei campi di forze agenti sulla trave con

- $p_t = \mathbf{p} \cdot \mathbf{t}$  *carico assiale*,
- $m_t = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}$  *coppia torsionale*,
- $\mathbf{p}_f$  *carico flessionale*,
- $\mathbf{m}_f$  *coppia flessionale*,

e le equazioni differenziali di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} N' - \mathbf{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} = -p_t, \\ M'_t - \mathbf{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_f = -m_t, \\ \Pi \mathbf{T}' + \mathbf{c} \mathbf{n} N = -\mathbf{p}_f, \\ \Pi \mathbf{M}'_f + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{c} \mathbf{n} M_t = -\mathbf{m}_f. \end{cases}$$

La forma matriciale degli operatori differenziali di equilibrio e di congruenza:

$$\boxed{\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \\ \Pi \mathbf{v} \\ \Pi \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & (\bullet)' & 0 & -\mathbf{c} \mathbf{n} \cdot (\bullet) \\ (\bullet)' & 0 & -\mathbf{c} \mathbf{n} \cdot (\bullet) & 0 \\ 0 & \mathbf{c} \mathbf{n} (\bullet) & 0 & \Pi (\bullet)' \\ \mathbf{c} \mathbf{n} (\bullet) & 0 & \Pi (\bullet)' & \mathbf{t} \times \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \\ \Pi \mathbf{v} \\ \Pi \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{\delta}_t \\ \Pi \dot{\chi} \\ \Pi \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{+ \quad \mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} M_t \\ N \\ \mathbf{M}_f \\ \mathbf{T} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & (\bullet)' & 0 & -\mathbf{c} \mathbf{n} \cdot (\bullet) \\ (\bullet)' & 0 & -\mathbf{c} \mathbf{n} \cdot (\bullet) & 0 \\ 0 & \mathbf{c} \mathbf{n} (\bullet) & 0 & \Pi (\bullet)' \\ \mathbf{c} \mathbf{n} (\bullet) & 0 & \Pi (\bullet)' & \mathbf{t} \times \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_t \\ N \\ \mathbf{M}_f \\ \mathbf{T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_t \\ m_t \\ \mathbf{p}_f \\ \mathbf{m}_f \end{vmatrix} +}$$

rivela che  $\mathbf{B} = -\mathbf{B}'_o$ .

Si ritrova così che sussiste l'analogia di MOHR con le sostituzioni

$$\begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \\ \Pi \mathbf{v} \\ \Pi \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} M_t \\ N \\ \mathbf{M}_f \\ \mathbf{T} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{x}_t \\ \dot{\delta}_t \\ \Pi \dot{\chi} \\ \Pi \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{vmatrix} \iff - \begin{vmatrix} p_t \\ m_t \\ \mathbf{p}_f \\ \mathbf{m}_f \end{vmatrix}.$$

■ Si noti che nell'analogia di MOHR,

- alla velocità di curvatura torsionale  $\dot{x}_t$  corrisponde il carico assiale  $-p_t$ ,
- alla velocità di dilatazione assiale  $\dot{\delta}_t$  corrisponde la coppia torcente  $-m_t$ .

#### 6.4. La trave piana

Si consideri ora il caso particolare in cui la geometria e la cinematica della trave di TIMOSHENKO sono simmetriche rispetto ad un piano  $\pi$ .

Detto  $\mathbf{t} \in \pi$  il versore tangente all'asse della trave, si fissi una terna ortonormale  $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}^\perp, \mathbf{k}\}$  con  $\mathbf{t}^\perp \in \pi$  e  $\Delta(\mathbf{t}, \mathbf{t}^\perp, \mathbf{k}) = 1$ , con  $\Delta$  forma di volume (vedi [33]).

Il versore  $\mathbf{k}$  è quindi ortogonale al piano  $\pi$ .

Si noti che il versore  $\mathbf{t}^\perp$  ha la direzione del versore  $\mathbf{n}$  normale alla curva d'asse, nei punti a curvatura non nulla dove il versore normale è definito, ma può avere verso ad esso opposto, se la coppia  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$  ha orientamento diverso dalla coppia  $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}^\perp\}$ . In generale si ha che

$$\mathbf{t}^\perp = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp = \pm 1.$$

La cinematica e la statica della trave piana sono caratterizzate dalle condizioni  $M_{\mathbf{t}} = \mathbf{o}$ ,  $\omega \cdot \mathbf{t} = \mathbf{o}$ ,  $\dot{\chi}_{\mathbf{t}} = \mathbf{o}$ ,  $m_{\mathbf{t}} = \mathbf{o}$ .

Effettuando le posizioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v \mathbf{t}^\perp + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}, \\ \omega = \omega \mathbf{k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \Pi \dot{\chi} = \dot{\chi} \mathbf{k}, \\ \Pi \dot{\delta} = \dot{\delta} \mathbf{t}^\perp, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{T} = T \mathbf{t}^\perp, \\ \mathbf{M}_f = M \mathbf{k}, \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{p}_f = p \mathbf{t}^\perp, \\ \mathbf{m}_f = m \mathbf{k}, \end{cases}$$

dove  $v = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp$  e  $\omega = \omega \cdot \mathbf{k}$ , le componenti della deformazione tangente si scrivono

$$\begin{cases} \dot{\delta}_t = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - (\mathbf{c} \mathbf{n}) \cdot (\Pi \mathbf{v}), \\ \Pi \dot{\chi} = \Pi (\Pi \omega)' + \mathbf{c} \mathbf{n} (\omega \cdot \mathbf{t}), \\ \Pi \dot{\delta} = \Pi (\Pi \mathbf{v})' + \mathbf{c} \mathbf{n} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times \Pi \omega. \end{cases}$$

Tenendo presente che

$$\Pi \omega = \omega \mathbf{k},$$

$$(\Pi \omega)' = \omega' \mathbf{k},$$

$$\mathbf{t} \times (\Pi \omega) = \mathbf{t} \times \mathbf{k} \omega = -\omega \mathbf{t}^\perp,$$

$$\Pi \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp) \mathbf{t}^\perp,$$

$$\mathbf{n}' = -\mathbf{c} \mathbf{t}, \quad \Pi \mathbf{k} = \mathbf{k},$$

$$\Pi (\Pi \mathbf{v})' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})' \mathbf{n} + \Pi (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})' \mathbf{n} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)' \mathbf{t}^\perp,$$

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp),$$



le relazioni cinematiche si possono riscrivere

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\delta}_{\mathbf{t}} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp), \\ \dot{\chi} &= \omega', \\ \dot{\delta} &= c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)' - \omega.\end{aligned}}$$

Dall'espressione della formula di GREEN

$$\begin{aligned}\int_0^L [N \dot{\delta}_{\mathbf{t}} + M_{\mathbf{f}} \cdot \dot{\chi} + T \cdot \dot{\delta}] \, ds &= \\ \int_0^L [N [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)] + \\ M \omega' + T [c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)' - \omega]] \, ds &= \\ = \sum_{i=1}^2 [N(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + M \omega - T(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)]_i n_i + \\ - \int_0^L [N'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + c N(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp) + \\ M' \omega - c T(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + T'(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp) + T \omega].\end{aligned}$$

si deduce che le equazioni differenziali di equilibrio sono date da

$$\begin{cases} N' - c T(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) = -p_{\mathbf{t}}, \\ T' + c N(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) = -p, \\ M' + T = -m. \end{cases}$$

Gli operatori differenziali di equilibrio e di congruenza hanno pertanto la forma matriciale

$$\boxed{\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp \\ \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\bullet)' & -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\bullet) & 0 \\ 0 & 0 & (\bullet)' \\ c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\bullet) & (\bullet)' & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp \\ \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\delta}_{\mathbf{t}} \\ \dot{\chi} \\ \dot{\delta} \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} N \\ M \\ T \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} (\bullet)' & 0 & -c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\bullet) \\ c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp)(\bullet) & 0 & (\bullet)' \\ 0 & (\bullet)' & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N \\ M \\ T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_t \\ p \\ m \end{vmatrix}$$

L'analogia di MOHR non sussiste.

Ciò dipende dal fatto che dalle equazioni sono stati eliminati la velocità di curvatura torsionale ed il momento torcente mentre sono presenti i campi di sforzo normale e di velocità di scorrimento assiale ad essi corrispondenti nell'analogia di MOHR.

## 6.5. La trave ad asse rettilineo

Se la curvatura della linea d'asse è nulla le componenti assiali e trasversali delle velocità di curvatura e di scorrimento assumono le espressioni

$$\begin{aligned} \dot{\chi}_t &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})', \\ \dot{\delta}_t &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})', \\ \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{k})' \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\Pi} \dot{\delta} &= [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp) - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})] \mathbf{t}^\perp. \end{aligned}$$

Specializzando le formule generali della sezione 6.3 (p. 421), si osserva che se  $c = 0$  le prime due equazioni di congruenza e di equilibrio si disaccoppiano.

Le ultime due equazioni di congruenza e di equilibrio si scrivono

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\Pi}(\bullet)' \\ \boldsymbol{\Pi}(\bullet)' & \mathbf{t} \times \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} \\ \dot{\delta}_f \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} \mathbf{M}_f \\ \mathbf{T} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & \boldsymbol{\Pi}(\bullet)' \\ \boldsymbol{\Pi}(\bullet)' & \mathbf{t} \times \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{M}_f \\ \mathbf{T} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{p}_f \\ \mathbf{m}_f \end{vmatrix}$$



### 6.6. La trave piana ad asse rettilineo

Si consideri ora una *trave piana ad asse rettilineo* e si effettuino le posizioni

$$\begin{cases} \mathbf{v} = v \mathbf{t}^\perp, & \begin{cases} \boldsymbol{\Pi} \dot{\delta} = \dot{\delta} \mathbf{t}^\perp, \\ \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} = \dot{\chi} \mathbf{k}, \end{cases} & \begin{cases} \mathbf{T} = -T \mathbf{t}^\perp, \\ \mathbf{M}_f = M \mathbf{k}, \end{cases} & \begin{cases} \mathbf{p}_f = p \mathbf{t}^\perp, \\ \mathbf{m}_f = m \mathbf{k}. \end{cases} \end{cases}$$

Si noti che, come si mostrerà nel seguito, il segno – nella posizione  $\mathbf{T} = -T \mathbf{t}^\perp$  è essenziale per instaurare l'analogia di MOHR. Si ha che

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Pi} \dot{\delta} = \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} = v' \mathbf{t}^\perp + (\mathbf{t} \times \mathbf{k}) \boldsymbol{\omega} = (v' - \omega) \mathbf{t}^\perp = \dot{\delta} \mathbf{t}^\perp \Rightarrow \dot{\delta} = v' - \omega, \\ \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} = \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}' \mathbf{k} = \dot{\chi} \mathbf{k} \Rightarrow \dot{\chi} = \omega'. \end{cases}$$

La formula di GREEN si scrive

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} [M \cdot \omega' + (-T) \cdot (v' - \omega)] dx = \\ & = \sum_{i=1}^2 [Mn \cdot \omega + (-T)n \cdot v](x_i) - \int_{x_1}^{x_2} [(-T)' \cdot v + (M' - T) \cdot \omega] dx. \end{aligned}$$

Infatti, tenendo conto delle definizioni  $\dot{\delta}_f = \dot{\delta} \mathbf{t}^\perp$  e  $\mathbf{T} = -T \mathbf{t}^\perp$ , il lavoro virtuale dello sforzo tagliante è  $\mathbf{T} \cdot \dot{\delta}_f = -T \dot{\delta}$ .

Le equazioni differenziali di equilibrio e di congruenza sono allora

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} v \\ \varphi \end{vmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & (\bullet)' \\ (\bullet)' & -1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} v \\ \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega' \\ v' - \omega \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\delta} \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} M \\ T \end{vmatrix} := \begin{bmatrix} 0 & (\bullet)' \\ (\bullet)' & -1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} M \\ T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T' \\ M' - T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p \\ -m \end{vmatrix}.$$

Risulta quindi  $\mathbf{B} = \mathbf{B}'_o$  e pertanto

■ l'*analogia di MOHR* sussiste effettuando le sostituzioni

$$\begin{vmatrix} M \\ T \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} v \\ \omega \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\delta} \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} p \\ -m \end{vmatrix}.$$

## 7. LA TRAVE DI BERNOULLI-EULER

Nel modello monodimensionale della *trave di BERNOULLI-EULER* le sezioni trasversali sono assunte solidali con l'asse della trave e ad esso ortogonali.

La condizione di ortogonalità tra le sezioni trasversali e l'asse della trave si esprime richiedendo che la velocità di scorrimento abbia componente trasversale identicamente nulla lungo l'asse della trave.

Per precisare tale richiesta si richiamano le seguenti definizioni.

Sia  $\Pi = \mathbf{I} - \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \in L\{V; V\}$  il proiettore ortogonale sul piano della sezione trasversale. Si considerino quindi le decomposizioni

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + \Pi \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + \Pi \boldsymbol{\omega},$$

dei campi di velocità e di rotazione nelle componenti assiali e trasversali, e si definiscano

- la velocità di *scorrimento*

$$\dot{\delta} = \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega},$$

- la velocità di *scorrimento assiale*

$$\dot{\delta}_t = \dot{\delta} \cdot \mathbf{t} = [\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega}] \cdot \mathbf{t} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t},$$

che misura la velocità di dilatazione delle fibre assiali,

- la velocità di *scorrimento trasversale*

$$\dot{\delta} - (\dot{\delta} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} = \Pi \dot{\delta},$$

che è la componente della velocità di scorrimento sul piano della sezione retta,

- la velocità di *curvatura*

$$\dot{\chi} = \boldsymbol{\omega}',$$

che è la derivata della velocità di rotazione  $\boldsymbol{\omega}$  delle sezioni rette,

- la velocità di *curvatura torsionale*

$$\dot{\chi}_t = \dot{\chi} \cdot \mathbf{t} = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{t},$$

che è la componente assiale della velocità di curvatura,

- la velocità di *curvatura flessionale*

$$\Pi \dot{\chi} = \Pi \boldsymbol{\omega}',$$

che è la componente della velocità di curvatura sul piano della sezione retta.

Dall'espressione della velocità di scorrimento si deduce che

$$\boldsymbol{\Pi} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}).$$

L'annullarsi della componente trasversale della velocità di scorrimento implica che

$$\mathbf{t} \times \boldsymbol{\Pi} \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times [\mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega})] = \mathbf{0},$$

e quindi, essendo  $\mathbf{t} \times [\mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega})] = -\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}$ , che

$$\boxed{\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}' = \mathbf{t} \times \mathbf{v}'.}$$

### 7.1. Espressioni della velocità di curvatura flessionale

Sussiste il seguente fondamentale risultato.

**Proposizione 7.1. Velocità di curvatura flessionale.** *Se la componente trasversale della velocità di scorrimento è nulla, la velocità di curvatura flessionale è fornita dalle formule*

$$\boxed{\begin{aligned} i) \quad & \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}' = c \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + \boldsymbol{\Pi} [c \mathbf{b} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})']', \\ ii) \quad & \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}' = c \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}')', \end{aligned}}$$

dove  $c$  è la curvatura dell'asse della trave e  $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$  è la terna intrinseca della curva d'asse orientata in modo che  $\Delta(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}) = 1$ .

**Dim.**

■ Dimostrazione della formula *i*).

Si consideri la decomposizione  $\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}$  del campo di velocità nella componenti assiale e trasversale. Derivando si ottiene che

$$\mathbf{v}' = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' \mathbf{t} + c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} + (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})',$$

e quindi

$$\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega} = \mathbf{t} \times \mathbf{v}' = c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})'.$$

Ne segue che

$$\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + \boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})',$$

e dunque

$$\boldsymbol{\omega}' = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})' \mathbf{t} + c (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} + [c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})']',$$

da cui

$$\boldsymbol{\Pi} \boldsymbol{\omega}' = c (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} + \boldsymbol{\Pi} [c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})']',$$

che è l'espressione della velocità di curvatura flessionale.

■ Dimostrazione della formula *ii*).

Derivando l'espressione  $\Pi \omega = \mathbf{t} \times \Pi \mathbf{v}'$  rispetto ad  $s$  si ha

$$(\Pi \omega)' = (\mathbf{t} \times \Pi \mathbf{v}')' = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' + \mathbf{t}' \times \Pi \mathbf{v}'$$

da cui, essendo  $\mathbf{t}' = c \mathbf{n}$ ,  $\Pi(\mathbf{n} \times \Pi \mathbf{v}') = \mathbf{o}$  e  $\Pi[\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')'] = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')'$ , si ha che

$$\boxed{\Pi(\Pi \omega)' = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' .}$$

Ora  $\Pi' = -(\mathbf{t}' \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}') = -c(\mathbf{n} \otimes \mathbf{t} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{n})$  e quindi  $\Pi \Pi' = -c \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$ .

Ne segue che

$$\Pi \omega' = (\Pi \omega)' - \Pi' \omega = \Pi(\Pi \omega)' - \Pi \Pi' \omega = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' + c(\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n},$$

in quanto  $\Pi \Pi' \omega = -c(\mathbf{n} \otimes \mathbf{t})\omega = -c(\omega \cdot \mathbf{t})\mathbf{n}$ . □

**Osservazione 7.1.** E' possibile verificare direttamente l'egualanza tra le formule *i*) e *ii*) procedendo come segue. Dalla relazione

$$\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})' = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}') + \mathbf{t} \times (\Pi' \mathbf{v}),$$

osservando che  $\mathbf{t} \times (\Pi' \mathbf{v}) = \mathbf{t} \times (\Pi \Pi' \mathbf{v})$  e che  $\Pi \Pi' = -c \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$ , si trae che

$$\begin{aligned} [\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})']' &= [\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')]' - [c(\mathbf{t} \times \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})]' = \\ &= \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' + \mathbf{t}' \times (\Pi \mathbf{v}') - [c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b}]' = \\ &= \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' + c \mathbf{n} \times (\Pi \mathbf{v}') - [c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b}]'. \end{aligned}$$

Da qui, notando che  $\Pi[\mathbf{n} \times (\Pi \mathbf{v}')] = \mathbf{o}$ , si deduce che

$$\Pi[\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})' + c(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b}]' = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')',$$

e quindi l'egualanza tra la *i*) e la *ii*). ■

## 7.2. Esempi

Il significato delle formule *i*) e *ii*) della proposizione 7.1 è illustrato dai seguenti esempi di applicazione.



### ■ Moto rigido

Si consideri una trave a forma di *anello circolare* con l'asse nel piano  $\pi$  che subisce un atto di moto rigido con velocità angolare  $\omega$  costante e parallela a  $\pi$ .

E' evidente che la velocità di curvatura è nulla essendo  $\omega' = \mathbf{0}$ . Si voglia verificare che l'espressione *ii)* fornisce correttamente il risultato nullo.

A tal fine si osservi che il cinematismo dell'asse della trave è dato da

$$\mathbf{v}(s) = \omega \times \mathbf{r}(s),$$

e dunque si ha che

$$\mathbf{v}' = \omega \times \mathbf{t}, \quad \Pi \mathbf{v}' = \mathbf{v}', \quad (\Pi \mathbf{v}')' = \mathbf{v}'' = c \omega \times \mathbf{n}.$$

Dalla *ii)* si trae quindi che

$$\Pi \omega' = c \mathbf{n} (\omega \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' = c [(\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (\omega \times \mathbf{n})].$$

Essendo

$$\omega \times \mathbf{n} = [(\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t} + (\omega \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}] \times \mathbf{n} = (\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} - (\omega \cdot \mathbf{b}) \mathbf{t},$$

risulta poi

$$\mathbf{t} \times (\omega \times \mathbf{n}) = (\omega \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{t} \times \mathbf{b}) = -(\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n},$$

e pertanto la velocità di curvatura flessionale risulta nulla, come era da attendersi in quanto l'atto di moto considerato è rigido.

### ■ Espansione radiale

Con riferimento allo stesso *anello circolare* con l'asse nel piano  $\pi$  si consideri un cinematismo in cui

- sia nulla la velocità di rotazione torsionale delle sezioni:  $\omega \cdot \mathbf{t} = 0$ ,
- il campo di velocità della linea d'asse rappresenti un'espansione radiale di intensità  $\dot{\alpha}$  costante lungo l'asse:  $\mathbf{v} = -\dot{\alpha} \mathbf{n}$ .

Risulta allora  $\mathbf{v}' = -\dot{\alpha} \mathbf{n}' = \dot{\alpha} c \mathbf{t}$  in quanto la linea d'asse, essendo piana, ha torsione  $\mathbf{t}$  nulla. Dunque

$$\Pi \mathbf{v}' = \mathbf{0}, \quad \Pi \omega = \mathbf{t} \times \Pi \mathbf{v}' = \mathbf{0}.$$

In definitiva  $\omega = \omega \cdot \mathbf{t} + \Pi \omega = \mathbf{0}$  ed anche la velocità di curvatura flessionale, valutata mediante la *ii)*, è nulla, infatti

$$\Pi \omega' = c (\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} + \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')' = \mathbf{0}.$$

La velocità di dilatazione assiale è data da  $\dot{\delta}_{\mathbf{t}} = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} = \dot{\alpha} c$ .

## ■ Eversione dell'anello

Sempre con riferimento all'*anello circolare* con l'asse nel piano  $\pi$  si consideri un cinematicismo in cui

- la velocità dei punti della linea d'asse sia nulla:  $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ ,
- la componente torsionale  $\omega \cdot \mathbf{t}$  della velocità di rotazione delle sezioni sia costante lungo l'asse.

La velocità di rotazione  $\omega = (\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$  è quindi puramente torsionale ed ha intensità  $\omega \cdot \mathbf{t}$  costante. Si ha allora che

$$\dot{\delta}_t = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{o}, \quad \omega' = c \mathbf{n} (\omega \cdot \mathbf{t}),$$

e cioè

- la velocità di dilatazione assiale è nulla,
- la velocità di curvatura torsionale è nulla,
- la velocità di curvatura flessionale è costante.

Osservando il piano  $\pi$  in modo da vedere i versori tangenti inseguirsi in verso antiorario, e chiamando lato superiore della trave quello così osservato, le fibre superiori della trave risultano dilatate e quelle inferiori risultano contratte dalla curvatura flessionale.

Infatti le fibre superiori hanno, per effetto della rotazione torsionale, una velocità di traslazione diretta verso l'esterno dell'anello, mentre quelle inferiori hanno una velocità di traslazione diretta verso il centro dell'anello.



## ■ Torsione dell'anello

Con riferimento ad un *anello circolare aperto* con l'asse nel piano  $\pi$  si consideri un cinematicismo in cui

- la velocità dei punti della linea d'asse sia nulla:  $\mathbf{v} = \mathbf{o}$ ,
- la componente torsionale  $\omega \cdot \mathbf{t}$  della velocità di rotazione delle sezioni sia variabile linearmente lungo l'asse. Si ponga  $\omega \cdot \mathbf{t} = \theta s$  avendo fissato l'origine dell'ascissa in una delle sezioni d'estremità.

La velocità di rotazione  $\omega = (\omega \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}$  è puramente torsionale. Allora

$$\dot{\delta}_t = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} = \mathbf{o}, \quad \omega' \cdot \mathbf{t} = \theta, \quad \Pi \omega' = c \theta s \mathbf{n},$$

e cioè

- la velocità di dilatazione assiale è nulla,
- la velocità di curvatura torsionale è costante e pari a  $\theta$ ,
- la velocità di curvatura flessionale varia linearmente lungo l'asse dell'anello.

Osservando il piano  $\pi$  in modo da vedere i versori tangenti inseguirsi in verso antiorario, e chiamando lato superiore della trave quello così osservato, le fibre superiori della trave risultano dilatate e quelle inferiori risultano contratte dalla curvatura flessionale.



### 7.3. Equilibrio

Gli operatori di equilibrio differenziali ed ai limiti sono definiti mediante la formula di GREEN cui si perviene integrando per parti. Si ha che

$$\begin{aligned}
 & \int_{x_1}^{x_2} \left[ N \dot{\delta}_{\mathbf{t}} + M_{\mathbf{t}} \dot{\chi}_{\mathbf{t}} + M_{\mathbf{f}} \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} \right] ds = \\
 & \int_{x_1}^{x_2} \left\{ N [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - \mathbf{c} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})] + M_{\mathbf{t}} [(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})' + \mathbf{c} \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})'] + \right. \\
 & \quad \left. \mathbf{M}_{\mathbf{f}} \cdot [\mathbf{c} \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{c} \mathbf{b} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})']'] \right\} ds = \\
 & = \sum_{i=1}^2 \left[ N (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + M_{\mathbf{t}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + (M_{\mathbf{t}} \mathbf{c} \mathbf{b}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) + (\mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{f}}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \right. \\
 & \quad \left. - (\mathbf{t} \times \mathbf{M}_{\mathbf{f}}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})' \right]_i n_i - \int_{x_1}^{x_2} \left[ N' (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \right] ds + \\
 & + \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{c} \mathbf{n} N) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) ds - \int_{x_1}^{x_2} M'_{\mathbf{t}} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) ds - \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{c} \mathbf{b} M_{\mathbf{t}})' \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) ds + \\
 & + \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{f}}) (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) ds - \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{M}'_{\mathbf{f}}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) ds + \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{t} \times \mathbf{M}'_{\mathbf{f}}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})' ds .
 \end{aligned}$$

Una seconda integrazione per parti mostra che

$$\int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{t} \times \mathbf{M}'_{\mathbf{f}}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})' ds = \left[ (\mathbf{t} \times \mathbf{M}'_{\mathbf{f}}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) \right]_i n_i - \int_{x_1}^{x_2} (\mathbf{t} \times \mathbf{M}'_{\mathbf{f}})' \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}) ds .$$

Le equazioni di equilibrio si scrivono

$$\begin{cases} N' + \mathbf{c} \mathbf{b} \cdot \mathbf{M}'_{\mathbf{f}} = -p_{\mathbf{t}}, \\ M'_{\mathbf{t}} - \mathbf{c} \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_{\mathbf{f}} = -m_{\mathbf{t}}, \\ \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{c} \mathbf{b} M_{\mathbf{t}}]' + \mathbf{c} \mathbf{n} N + \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{t} \times \mathbf{M}'_{\mathbf{f}}]' = -\mathbf{p}_{\mathbf{f}} . \end{cases}$$

L'operatore differenziale di equilibrio ha dunque la forma matriciale

$$-\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} N \\ M_t \\ M_f \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\bullet)' & c \mathbf{b} \cdot (\bullet)' \\ (\bullet)' & 0 & -c \mathbf{n} \cdot (\bullet) \\ \Pi [c \mathbf{b}(\bullet)]' & c \mathbf{n}(\bullet) & \Pi [\mathbf{t} \times (\bullet)']' \end{bmatrix} \begin{vmatrix} M_t \\ N \\ M_f \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} p_t \\ m_t \\ p_f \end{vmatrix}.$$

per cui risulta  $\mathbf{B}'_o = -\mathbf{B}$ . L'analogia di MOHR sussiste, con le sostituzioni

$$\begin{vmatrix} M_t \\ N \\ M_f \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \\ \Pi \mathbf{v} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{\chi}_t \\ \dot{\delta}_t \\ \Pi \dot{\chi} \end{vmatrix} \iff - \begin{vmatrix} p_t \\ m_t \\ p_f \end{vmatrix}.$$

#### 7.4. Buona posizione

Con riferimento alla proposizione 7.1 (p. 430), si noti che la formula *i*) è più conveniente dal punto di vista computazionale, mentre la *ii*) è idonea per l'analisi della buona posizione del modello di trave di BERNOULLI in quanto in essa la velocità di curvatura flessionale è espressa in termini delle componenti assiali e trasversali della velocità e delle loro derivate.

La deformazione tangente è espressa dalle componenti

$$\begin{cases} \dot{\delta}_t = \mathbf{v}' \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \\ \dot{\chi}_t = \boldsymbol{\omega}' \cdot \mathbf{t} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})' - c \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}, \\ \Pi \dot{\chi} = \Pi \boldsymbol{\omega}' = c (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{n} + \Pi [c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{b} + \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})']'. \end{cases}$$

Per esprimere esplicitamente le componenti di deformazione in funzione dei parametri cinematici

- $v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$  velocità di *traslazione assiale*,
- $\omega_t = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}$  velocità di *rotazione torsionale*,
- $\Pi v$  velocità di *traslazione trasversale*,

si può procedere nel modo seguente.

Si noti che  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (\Pi \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$  e che  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = (\Pi \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{t} \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n}$ .

Ora  $-(\mathbf{t} \times \mathbf{v}') \cdot \mathbf{n} = -[\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v}')] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot (\Pi \mathbf{v}') = \mathbf{b} \cdot [(\Pi \mathbf{v})' - (\Pi' \mathbf{v})]$ .

Inoltre, essendo  $\Pi \Pi' = -c \mathbf{n} \otimes \mathbf{t}$ , risulta

$$\mathbf{b} \cdot (\Pi' \mathbf{v}) = \mathbf{b} \cdot (\Pi \Pi' \mathbf{v}) = -c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{o}.$$

Dunque si può scrivere

$$\begin{aligned}\dot{\delta}_t &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}), \\ \dot{\chi}_t &= (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})' + c \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})', \\ \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} &= c \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + \boldsymbol{\Pi} [c \mathbf{b} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})']',\end{aligned}$$

Lo spazio cinematico è costituito dai campi di velocità di traslazione e di rotazione tali che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \in H^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \in H^1(\Omega), \quad \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \in H^2(\Omega).$$

L'operatore cinematico si scrive in forma matriciale

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\bullet)' & c \mathbf{b} \cdot (\bullet)' \\ (\bullet)' & 0 & -c \mathbf{n} \cdot (\bullet) \\ \boldsymbol{\Pi} [c \mathbf{b} (\bullet)]' & c \mathbf{n} (\bullet) & \boldsymbol{\Pi} [\mathbf{t} \times (\bullet)']' \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} \\ \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\chi}_t \\ \dot{\delta}_t \\ \boldsymbol{\Pi} \dot{\chi} \end{vmatrix}.$$

Si può mostrare [31] che l'operatore cinematico soddisfa la diseguaglianza di KORN nella forma

$$\| \mathbf{B} \mathbf{u} \|_{\mathcal{H}} + \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{U}} \geq c_{\mathbf{K}} \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{V}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}.$$

dove  $\mathbf{u} = \{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}), (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}), (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})\} \in \mathcal{V}$  e gli spazi funzionali sono

- $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ ,
- $\mathcal{U} = \mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$ ,
- $\mathcal{V} = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ .

con  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$ .

Si noti che l'iniezione di  $\mathcal{U}$  in  $\mathcal{V}$  è compatta e che la validità della precedente diseguaglianza implica che vale anche la seguente [31]:

$$\| \mathbf{B} \mathbf{u} \|_{\mathcal{H}} + \| \mathbf{u} \|_H \geq c_{\mathbf{K}} \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{V}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}.$$

dove  $H = \mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega) \times \mathcal{L}^2(\Omega)$ .

## 7.5. La trave piana

Si consideri il caso in cui la trave e le azioni su di essa agenti siano simmetriche rispetto ad un piano  $\pi$ .

Sia  $\mathbf{t} \in \pi$  il versore tangente all'asse della trave e si fissi una terna ortonormale  $\{\mathbf{t}, \mathbf{t}^\perp, \mathbf{k}\}$  con  $\mathbf{m} \in \pi$  e  $\Delta(\mathbf{t}, \mathbf{t}^\perp, \mathbf{k}) = 1$ . Il versore  $\mathbf{k}$  è quindi ortogonale al piano  $\pi$  ed il versore  $\mathbf{t}^\perp$  è parallelo al versore normale  $\mathbf{n}$  nei punti a curvatura non nulla.

La cinematica della trave piana è caratterizzata dalle condizioni

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp) \mathbf{t}^\perp + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) \mathbf{t}, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \mathbf{k} = 0.$$

Risulta quindi  $\Pi \mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp) \mathbf{t}^\perp$ . Le componenti della deformazione tangente

$$\dot{\delta}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c \mathbf{n} \cdot (\Pi \mathbf{v}),$$

$$\dot{\chi}_{\mathbf{t}} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t})' + c \mathbf{b} \cdot (\Pi \mathbf{v})',$$

$$\Pi \dot{\chi} = c \mathbf{n} (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t}) + \Pi [c \mathbf{b} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})']',$$

tenendo presente che

- $\mathbf{b} \cdot (\Pi \mathbf{v})' = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{t}^\perp) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)' = 0$ ,
- $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{t} = 0$ ,
- $\mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})' = (\mathbf{t} \times \mathbf{t}^\perp) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)' = \mathbf{k} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)'$ ,



si riscrivono quindi

$$\dot{\delta}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp),$$

$$\dot{\chi}_{\mathbf{t}} = 0,$$

$$\Pi \dot{\chi} = [c (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)']' \mathbf{k},$$

ovvero, tenendo conto che  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp$ ,

$$\dot{\delta}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' - c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp),$$

$$\Pi \dot{\chi} = [c (\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}^\perp) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}) + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^\perp)']' \mathbf{k},$$

In particolare, se la curvatura della linea d'asse è nulla, si ha che

$$\dot{\delta}_{\mathbf{t}} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})',$$

$$\Pi \dot{\chi} = (\mathbf{v}'' \cdot \mathbf{t}^\perp) \mathbf{k},$$



### 7.6. La trave ad asse rettilineo

Si è visto che nel caso generale di travi spaziali curve lo studio della trave di BERNOULLI risulta più complesso di quello della trave di TIMOSHENKO.

Ciò non deve sorprendere in quanto al modello di BERNOULLI si perviene imponendo nella trave di TIMOSHENKO il vincolo cinematico di indeformabilità a taglio. Una drastica semplificazione del modello di BERNOULLI si ottiene considerando travi ad asse rettilineo.

In tal caso infatti il versore  $\mathbf{t}$  ed il proiettore  $\Pi$  sul piano della sezione trasversale non variano con l'ascissa e la curvatura  $c$  è nulla.

Denotando con

- $\Pi \mathbf{v}$  la componente del cinematicismo sul piano della sezione trasversale, che è detta componente flettente,
- $v_t = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$  la componente assiale del cinematicismo,
- $w_t = \omega \cdot \mathbf{t}$  la componente assiale della velocità di rotazione,

risulta

$$(\Pi \mathbf{v})' = \Pi \mathbf{v}', \quad (\Pi \mathbf{v})'' = \Pi \mathbf{v}''.$$

Essendo nulla la curvatura della linea d'asse, le misure di deformazione tangente sono date da

$$\begin{cases} \dot{\chi}_t = \dot{\chi} \cdot \mathbf{t} = (\omega \cdot \mathbf{t})' = w_t' & \text{velocità di curvatura torsionale,} \\ \dot{\delta}_t = \dot{\delta} \cdot \mathbf{t} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})' = v_t' & \text{velocità di estensione assiale,} \\ \Pi \dot{\chi} = \mathbf{t} \times (\Pi \mathbf{v})'' & \text{velocità di curvatura flessionale.} \end{cases}$$

Le misure di deformazione tangente risultano quindi disaccoppiate in quanto in ciascuna di esse compare una sola delle componenti indipendenti del cinematicismo  $\{\mathbf{v} \cdot \mathbf{t}, \omega \cdot \mathbf{t}, \Pi \mathbf{v}\}$ .

L'operatore cinematico si scrive pertanto in forma matriciale

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \omega \cdot \mathbf{t} \\ \Pi \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & (\bullet)' & 0 \\ (\bullet)' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{t} \times (\bullet)'' \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \\ \omega \cdot \mathbf{t} \\ \Pi \mathbf{v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\chi}_t \\ \dot{\delta}_t \\ \Pi \dot{\chi} \end{vmatrix}.$$

Gli sforzi, duali delle componenti  $\{\dot{\chi}_t, \dot{\delta}_t, \Pi \dot{\chi}\}$  della deformazione tangente, sono  $\{M_t, N, M_f\}$ , rispettivamente lo *sforzo torcente*, lo *sforzo normale* e lo *sforzo flettente*.

Per semplificare la notazione conviene definire i vettori

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_f \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{k} = (\Pi \dot{\chi}) \times \mathbf{t}.$$

Si ha quindi che  $\dot{\mathbf{k}} = (\boldsymbol{\Pi} \dot{\mathbf{v}}) \times \mathbf{t} = \mathbf{t} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v})'' \times \mathbf{t} = (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}'')' = \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}''$ .

La formula di GREEN si decomponete in tre distinte identità

$$\begin{aligned} \int_0^L \mathbf{M}_f \cdot (\mathbf{t} \times \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}'') \, ds &= \int_0^L \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}'' \, ds = \\ \sum_{i=1}^2 \left[ \mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}' - \mathbf{M}' \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \right]_i n_i + \int_0^L \mathbf{M}'' \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \, ds &= \\ \sum_{i=1}^2 \left[ -(\mathbf{t} \times \mathbf{M}_f) \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v}' + (\mathbf{t} \times \mathbf{M}'_f) \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \right]_i n_i - \int_0^L (\mathbf{t} \times \mathbf{M}''_f) \cdot \boldsymbol{\Pi} \mathbf{v} \, ds, & \\ \int_0^L N v'_t \, ds &= \sum_{i=1}^2 [N v_t]_i n_i + \int_0^L -N' v_t \, ds, \\ \int_0^L M_t w'_t \, ds &= \sum_{i=1}^2 [M_t w_t]_i n_i + \int_0^L -M_t' w_t \, ds. \end{aligned}$$

Le forze distribuite  $\{p_t, m_t, p_f\}$ , le forze concentrate  $\{\mathfrak{F}_i, \mathfrak{M}_{ti}, \mathfrak{M}_i\}$ , e gli sforzi  $\{M_t, N, M\}$  soddisfano quindi le condizioni di equilibrio

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{p}_f = \mathbf{M}'' = -\mathbf{t} \times \mathbf{M}_f'' & \text{forze trasversali distribuite,} \\ p_t = -N' & \text{forze assiali distribuite,} \\ m_t = -M_t' & \text{coppie torcenti distribuite,} \\ \mathfrak{F}_i = [-\mathbf{M}']_i n_i & \text{forze trasversali di estremità,} \\ \mathfrak{F}_{ti} = [N\mathbf{t}]_i n_i & \text{forze assiali di estremità,} \\ \mathfrak{M}_i = [\mathbf{M}]_i n_i & \text{coppie flettenti di estremità,} \\ \mathfrak{M}_{ti} = M_{ti} n_i & \text{coppie torcenti di estremità.} \end{array} \right.$$

### 7.6.1. Analogia di Mohr

Nelle travi ad asse rettilineo è evidente che le espressioni della formula di GREEN in termini dei tre parametri cinematici indipendenti godono della proprietà di simmetria anche rispetto alle sostituzioni

$$\begin{vmatrix} M_t \\ N \\ M_f \end{vmatrix} \iff \begin{vmatrix} \omega \cdot t \\ v \cdot t \\ \Pi v \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \dot{\chi}_t \\ \dot{\delta}_t \\ \Pi \dot{\chi} \end{vmatrix} \iff -\begin{vmatrix} m_t \\ p_t \\ p_f \end{vmatrix}.$$

E' quindi possibile instaurare le tre analogie di MOHR corrispondenti a tali sostituzioni, in alternativa alle tre analogie corrispondenti alle sostituzioni già considerate per le travi ad asse curvilineo.

## 7.7. La trave rettilinea nel piano

Un modello usuale nelle applicazioni è quello di trave ad asse rettilineo i cui cinematicismi, per motivi di simmetria, appartengono ad un piano  $\pi$ .

In tal caso si perviene ad un'ulteriore semplificazione del modello di trave in cui i parametri cinematici sono tutti scalari.

Si fissi la terna ortonormale  $\{t, t^\perp, k\}$  con  $t^\perp \in \pi$  e  $\Delta(t, t^\perp, k) = 1$ . Il versore  $k$  è quindi ortogonale al piano  $\pi$  e si può porre

$$\Pi v = v t^\perp, \quad p = p t^\perp, \quad \omega = w k, \quad \Pi \dot{\chi} = \dot{\chi} k, \quad M_f = M k$$

Osservando che  $\Pi \dot{\chi} = t \times \Pi v''$  e che  $p = M_f'' \times t$  si ha

$$\dot{\chi} = (t \times \Pi v'') \cdot k = (t \times t^\perp) \cdot k v'' = \Delta(t, t^\perp, k) v'',$$

$$p = (M_f'' \times t) \cdot t^\perp = (k \times t) \cdot t^\perp M'' = \Delta(t, t^\perp, k) M'',$$

ed inoltre

$$(M_f \times t) \cdot \Pi v'' = (k \times t) \cdot t^\perp M v'' = \Delta(t, t^\perp, k) M v'',$$

$$-(t \times M_f) \cdot v'_f = (k \times t) \cdot t^\perp M v' = \Delta(t, t^\perp, k) M v',$$

$$(t \times M'_f) \cdot v_f = (t \times k) \cdot t^\perp M' v = -\Delta(t, t^\perp, k) M' v,$$

$$-(t \times M''_f) \cdot v_f = -(t \times k) \cdot t^\perp M'' v = \Delta(t, t^\perp, k) M'' v.$$

Assumendo positivo l'orientamento della terna  $\{t, t^\perp, k\}$  risulta  $\Delta(t, t^\perp, k) = +1$  e quindi la formula di GREEN relativa alla componente flessionale si scrive

$$\int_0^L M v'' ds = \sum_{i=1}^2 [M v' - M' v]_i n_i + \int_0^L M'' v ds,$$

e le corrispondenti condizioni di equilibrio assumono la forma scalare

$$\begin{cases} p = M'' & \text{forze trasversali distribuite,} \\ \mathfrak{F}_i = -M'_i n_i & \text{forze trasversali di estremità,} \\ \mathfrak{M}_i = M_i n_i & \text{coppie flettenti di estremità.} \end{cases}$$

- L'analogia di MOHR sussiste con la sostituzione

$$M \iff v$$

e la corrispondenza

$$p \iff \dot{\chi}$$

tra carichi e velocità di curvatura.

**Osservazione 7.2.** I modelli strutturali monodimensionali di interesse ingegneristico sono privi di coazioni nascoste. Infatti

- Nel modello di *asta* il dominio  $\Omega$  è l'intervallo reale  $[0, 1]$ , l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  è  $\mathbf{B} = D_x \in L\{H^1[0, 1], \mathcal{L}^2[0, 1]\}$  e l'operatore aggiunto formale è  $\mathbf{B}'_o = -D_x \in L\{H^1[0, 1], \mathcal{L}^2[0, 1]\}$ .

Le coazioni nascoste sono  $\sigma \in \text{Ker } \mathbf{B}' = \text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \text{Ker } \mathbf{N} \subset \mathcal{S}[0, 1] = H^1[0, 1]$ . Dunque deve essere  $\mathbf{B}'_o \sigma = \mathbf{o} \iff D_x \sigma = 0$  e pertanto lo *sforzo normale*  $\sigma \in \mathcal{S}[0, 1] = H^1[0, 1]$  nell'asta è costante a tratti. In ogni tratto  $[a, b]$  si ha che  $\mathbf{N}\sigma = \sigma \mathbf{n}$  con  $\mathbf{n} = -1$  in  $a$  e  $\mathbf{n} = +1$  in  $b$ .

I valori di  $\sigma \in \text{Ker } \mathbf{N}$  devono pertanto essere nulli agli estremi di ogni tratto  $[a, b]$ . Ne segue che le coazioni nascoste sono nulle.

- Un analogo risultato sussiste in una *trave inflessa* ad asse rettilineo in cui il dominio  $\Omega$  è l'intervallo reale  $[0, 1]$ , l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  è  $\mathbf{B} = D_x^2 \in L\{H^2[0, 1], \mathcal{L}^2[0, 1]\}$  e l'operatore aggiunto formale è  $\mathbf{B}'_o = D_x^2 \in L\{H^2[0, 1], \mathcal{L}^2[0, 1]\}$ .

Le coazioni nascoste sono  $\sigma \in \text{Ker } \mathbf{B}' = \text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \text{Ker } \mathbf{N} \subset \mathcal{S}[0, 1] = H^2[0, 1]$ . Dunque deve essere  $\mathbf{B}'_o \sigma = \mathbf{o} \iff D_x^2 \sigma = 0$  e pertanto lo *sforzo flettente*  $\sigma \in \mathcal{S} = H^2[0, 1]$  nella trave è lineare a tratti. In ogni tratto  $[a, b]$  si ha che

$$\mathbf{N}\sigma = \begin{vmatrix} \sigma \mathbf{n} \\ D_x \sigma \mathbf{n} \end{vmatrix} \quad \text{con } \mathbf{n} = -1 \text{ in } a \text{ e } \mathbf{n} = +1 \text{ in } b.$$

I valori di  $\sigma \in \text{Ker } \mathbf{N}$  devono pertanto essere nulli con le derivate prime agli estremi di ogni tratto  $[a, b]$ . Dunque non vi sono coazioni nascoste.

- Una via dimostrativa alternativa (e più semplice) dell'assenza di coazioni nascoste può essere perseguita considerando cinematici che generano arbitrari *atti di deformazione costanti* sugli elementi di una arbitraria suddivisione del dominio del modello strutturale.

A tal proposito si veda la dimostrazione condotta per il *continuo tridimensionale* di CAUCHY nella proposizione II.6.1 (p. 203). ■

## 8. DEFORMAZIONE FINITA DELLE TRAVI

In questa sezione si estende la trattazione della trave di TIMOSHENKO svolta nella sezione 6 (p. 415) considerando travi ad asse curvilineo nello spazio soggette a grandi spostamenti e deformazioni.

### 8.1. Configurazioni

Sia  $V$  lo spazio delle traslazioni associato allo spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{S} = \mathcal{E}^3$  e si denoti con  $\text{Orth}^+(V; V)$  il gruppo delle isometrie proprie in  $V$ .

Fissata un'origine  $O$  nello spazio  $\mathbb{S}$ , la linea d'asse  $\Omega$  è descritta da una funzione vettoriale  $\mathbf{r}(\lambda)$  di un parametro scalare  $\lambda \in [0, 1]$  che ad ogni valore di  $\lambda$  associa la posizione  $\mathbf{x} = \mathbf{r}(\lambda)$  nello spazio.

La giacitura nello spazio della generica sezione trasversale all'ascissa  $\lambda$  viene individuata da un campo tensoriale  $\mathbf{R}$  che ad ogni valore di  $\lambda \in [0, 1]$  associa l'isometria propria  $\mathbf{R}(\lambda) \in \text{Orth}^+(V; V)$  che descrive la rotazione della sezione trasversale all'ascissa  $\lambda$  rispetto ad una giacitura di riferimento.

Dal punto di vista geometrico le configurazioni della trave possono essere descritte considerando una *varietà differenziabile*  $M$  immersa nello spazio fisico  $\mathbb{S} \times \text{Orth}^+(V; V)$  che è il prodotto cartesiano dello spazio euclideo  $\mathbb{S}$  e della varietà compatta tridimensionale delle rotazioni  $\text{Orth}^+(V; V)$ .

La varietà  $M$  ha la struttura di un *fibrato*  $\pi : M \mapsto \Omega$  costituito da

- una *varietà base* che è la sottovarietà differenziabile monodimensionale  $\Omega \subset \mathbb{S}$ ,
- una *fibra tipica* che è la varietà compatta tridimensionale  $\text{Orth}^+(V, V)$ ,
- le *fibre*  $\pi^{-1}(\mathbf{x})$  attaccate ai punti di  $\mathbf{x} \in \Omega$  identiche alla *fibra tipica*.

Allora, nella terminologia della geometria differenziale, una *configurazione* della trave è una *sezione del fibrato*  $M$  e cioè una funzione  $s : \Omega \mapsto M$  con  $\pi \circ s = I_\Omega$  essendo  $s : M \mapsto \Omega$  il proiettore sulla varietà base e  $I_\Omega$  l'identità in  $\Omega$ .

In altri termini una configurazione della trave nello spazio è un campo regolare su  $\Omega$  i cui valori puntuali sono coppie  $\{\mathbf{r}, \mathbf{R}\} \in M = \Omega \times \text{Orth}^+(V; V)$ .

Una configurazione della trave è quindi costituita da coppie di parametri cinematici  $\{\mathbf{r}(\lambda), \mathbf{R}(\lambda)\}$  con  $\lambda \in [0, 1]$ ,  $\mathbf{r}(\lambda) \in V$  e  $\mathbf{R}(\lambda) \in \text{Orth}^+(V; V)$ .

### 8.2. Processi evolutivi

Si consideri un processo in cui la configurazione della trave nello spazio varia in funzione di un parametro evolutivo  $t \in [t_o, t_f]$  che convenzionalmente sarà detto *tempo*.

Si denoti con  $\Omega(t_o)$  la configurazione assunta dalla trave al tempo iniziale  $t = t_o$  e con  $s_o \in [0, L_o]$  la relativa ascissa curvilinea.

I parametri cinematici  $\{\mathbf{r}(t, s_o), \mathbf{R}(t, s_o)\}$  individuano le posizioni dei punti dell'asse e le giaciture delle sezioni della trave, nella generica la configurazione  $\Omega(t)$  al tempo  $t$ , in funzione dell'ascissa curvilinea  $s_o \in [0, L_o]$  riferita alla configurazione  $\Omega(t_o)$ .

Lo spostamento  $\mathbf{u}(t, s_o)$  dei punti dell'asse e la rotazione  $\mathbf{Q}(t, s_o)$  delle sezioni trasversali della trave nel passaggio dalla configurazione  $\Omega(t_o)$  alla configurazione  $\Omega(t)$  sono definiti dalle relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t, s_o) = \mathbf{r}(t_o, s_o) + \mathbf{u}(t, s_o), \\ \mathbf{R}(t, s_o) = \mathbf{Q}(t, s_o) \mathbf{R}(t_o, s_o). \end{cases}$$

Si noti la struttura di spazio vettoriale degli spostamenti e quella di gruppo, non commutativo, delle rotazioni.

Derivando rispetto all'ascissa  $s_o$  e posto  $\mathbf{t}_o(s_o) = \mathbf{r}'(t_o, s_o)$  si ha

$$\mathbf{r}'(t, s_o) = \mathbf{r}'(t_o, s_o) + \mathbf{u}'(t, s_o) = \mathbf{t}_o(s_o) + \mathbf{u}'(t, s_o).$$

L'ascissa curvilinea  $s \in [0, L(t)]$  in  $\Omega(t)$  è definita valutando la lunghezza di un arbitrario tratto di trave

$$\hat{s}(t, s_o) = \int_0^{s_o} \left\| \frac{d\mathbf{r}(t, s_o)}{ds_o} \right\| ds_o = \int_0^{s_o} \| \mathbf{t}_o(t, s_o) \| ds_o.$$

così che  $L(t) = s(t, L_o)$ . Assumendo che per ogni fissato tempo  $t \in [t_o, t_f]$  sia invertibile la funzione  $\hat{s}(t, s_o)$  che associa all'ascissa  $s_o$  in  $\Omega(t_o)$  la corrispondente ascissa  $s$  in  $\Omega$ , si denoti con  $\hat{s}_o(t, s)$  la funzione inversa. Si possono quindi definire i parametri cinematici

$$\boldsymbol{\rho}(t, s) = \mathbf{r}(t, \hat{s}_o(t, s)), \quad \boldsymbol{\Theta}(t, s) = \mathbf{R}(t, \hat{s}_o(t, s)).$$

che individuano le posizioni dei punti dell'asse e le giaciture delle sezioni della trave, nella generica la configurazione  $\Omega(t)$  in funzione dell'ascissa curvilinea  $s \in [0, L(t)]$ .

Nel seguito si denoterà con un apice la derivata rispetto alle ascisse curvilinee, sia  $s$  che  $s_o$ , che compaiono quali argomenti dei campi scalari, vettoriali o tensoriali e con un punto sovrapposto la derivata rispetto al tempo.

Il versore  $\mathbf{t}(t, s)$  della tangente alla linea d'asse in  $\Omega(t)$  è quindi definito da  $\mathbf{t}(t, s) = \boldsymbol{\rho}'(t, s)$  e valgono le relazioni

$$\mathbf{r}'(t, s_o) = \mathbf{t}_o(s_o) + \mathbf{u}'(t, s_o),$$

$$\mathbf{r}'(t, s_o) = \boldsymbol{\rho}'(t, s) \hat{s}'(t, s_o) = \mathbf{t}(t, s) \hat{s}'(t, s_o), \quad \text{con } s = \hat{s}(t, s_o),$$

$$s'(t, s_o) = \| \mathbf{r}'(t, s_o) \|,$$

$$\varepsilon(t, s_o) = \| \mathbf{r}'(t, s_o) \| - 1 = \frac{d\hat{s}}{ds_o} - 1,$$

dove  $\varepsilon(t, s_o)$  è la dilatazione della fibra tangente all'asse nel punto  $s_o$ .



In termini dello spostamento della linea d'asse, omettendo gli argomenti, si ha

$$\mathbf{r}' = \frac{d\hat{s}}{ds_o} \mathbf{t} = (1 + \varepsilon) \mathbf{t} = \mathbf{t}_o + \mathbf{u}', \quad \varepsilon = \|\mathbf{t}_o + \mathbf{u}'\| - 1.$$

E' conveniente riproporre qui di seguito la proposizione I.3.3 (p. 23) in quanto essa svolge un ruolo fondamentale nell'analisi della deformazione finita delle travi.

**Proposizione 8.1. Processi di rotazione.** *Una famiglia ad un parametro  $\lambda \in [0, 1]$  di trasformazioni lineari  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è un processo di rotazione se e solo se è soluzione dei problemi differenziali lineari del primo ordine, tra loro equivalenti*

- i)  $\mathbf{Q}'(\lambda) = \mathbf{G}(\lambda)\mathbf{Q}(\lambda), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_o$
- ii)  $\mathbf{Q}'(\lambda) = \mathbf{Q}(\lambda)\mathbf{G}_o(\lambda), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_o$

dove il valore iniziale  $\mathbf{Q}_o$  è una rotazione e  $\mathbf{G}, \mathbf{G}_o$  sono trasformazioni antisimmetriche legate dalla relazione  $\mathbf{G} = \mathbf{Q}\mathbf{G}_o\mathbf{Q}^T$ .

**Dim.** Una rotazione  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è caratterizzata dalle proprietà

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{Q} = +1,$$

e quindi derivando rispetto a  $\lambda$  si ha

$$\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\mathbf{Q}')^T = \mathbf{O}, \quad (\mathbf{Q}')^T\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}' = \mathbf{O}.$$

Ne consegue che  $\mathbf{G}(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T$  e  $\mathbf{G}_o(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}'$  sono trasformazioni antisimmetriche.

Viceversa se  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è soluzione del problema differenziale i) posto  $\mathbf{Z} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$  risulta  $\mathbf{Z}(0) = \mathbf{Q}_o\mathbf{Q}_o^T = \mathbf{I}$  e l'equazione differenziale del primo ordine

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}(\mathbf{Q}')^T = \mathbf{G}\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\mathbf{G} = \mathbf{G}\mathbf{Z} - \mathbf{Z}\mathbf{G}, \quad \mathbf{Z}(0) = \mathbf{I}$$

ammette l'unica soluzione  $\mathbf{Z}(\lambda) = \mathbf{I}$ . Ciò dimostra che  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è una isometria. Per continuità  $\det \mathbf{Q}(\lambda) = \det \mathbf{Q}_o = +1$  e pertanto  $\mathbf{Q}(\lambda)$  è una rotazione.  $\square$

**Osservazione 8.1.** Se la condizione iniziale in i) – ii) viene modificata in  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{Q}_o \mathbf{M}_o = \mathbf{M} \mathbf{Q}_o$ , la soluzione diventa  $\mathbf{Q}(\lambda)\mathbf{M}_o = \mathbf{M} \mathbf{Q}(\lambda)$ .  $\blacksquare$

**Proposizione 8.2. Commutatività.** *L'operazione axial e la rotazione di un tensore antisimmetrico  $\mathbf{A}$  sono commutative.*

$$\text{axial}(\mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \text{ axial } \mathbf{A} \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+.$$

**Dim.** Il prodotto vettoriale  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  è definito da

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in V,$$

dove  $\Delta$  è la funzione determinante. Allora, essendo  $\det \mathbf{Q} = +1$ , si ha

$$(\mathbf{Qa} \times \mathbf{Qb}) \cdot \mathbf{Qc} = \Delta(\mathbf{Qa}, \mathbf{Qb}, \mathbf{Qc}) = (\det \mathbf{Q})\Delta(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

e quindi

$$\boxed{\mathbf{Qa} \times \mathbf{Qb} = \mathbf{Q}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).}$$

Ne segue che, posto  $\mathbf{a} = \text{axial } \mathbf{A}$ , risulta

$$(\mathbf{QAQ}^T)\mathbf{b} = \mathbf{Q}[\mathbf{a} \times (\mathbf{Q}^T \mathbf{b})] = \mathbf{Qa} \times (\mathbf{QQ}^T \mathbf{b}) = \mathbf{Qa} \times \mathbf{b},$$

ed il risultato è provato.  $\square$

**Proposizione 8.3. Vettore assiale del commutatore.** *Il vettore assiale del tensore antisimmetrico definito dal commutatore  $[\mathbf{W}, \mathbf{K}] := \mathbf{WK} - \mathbf{KW}$  di due tensori antisimmetrici  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{K}$  è eguale al prodotto vettoriale dei rispettivi vettori assiali*

$$\boxed{\text{axial } [\mathbf{W}, \mathbf{K}] = \text{axial } \mathbf{W} \times \text{axial } \mathbf{K}.}$$

**Dim.** In termini dei vettori assiali

$$\dot{\mathbf{k}} = \text{axial } \dot{\mathbf{K}}, \quad \omega = \text{axial } \mathbf{W},$$

la formula  $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{W}' + [\mathbf{W}, \mathbf{K}]$  si scrive

$$\dot{\mathbf{k}} = \text{axial } [\mathbf{W}, \mathbf{K}] + \omega'.$$

D'altra parte per la proposizione 8.2 risulta

$$\mathbf{K} = \mathbf{QK}_o \mathbf{Q}^T \iff \mathbf{k} = \mathbf{Qk}_o, \quad \dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{Q}^T \mathbf{W}' \mathbf{Q} \iff \dot{\mathbf{k}}_o = \mathbf{Q}^T \omega'.$$

Derivando la prima rispetto al tempo si ha allora

$$\dot{\mathbf{k}} = (\mathbf{Qk}_o)' = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{k}_o + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{k}}_o = \mathbf{WQk}_o + \mathbf{QQ}^T \omega' = \omega \times \mathbf{k} + \omega'.$$

Confrontando con la prima espressione di  $\dot{\mathbf{k}}$  si ottiene il risultato.  $\square$



### 8.3. Deformazione finita

Una trave di TIMOSHENKO subisce un cambiamento di configurazione *rigido*, cioè non si deforma, se si verifica che

- un osservatore solidale ad una qualsiasi prefissata sezione trasversale della trave, che misura la posizione rispetto ad esso della linea d'asse e delle altre sezioni trasversali, non nota alcun cambiamento di configurazione durante il processo evolutivo.

Le rotazioni e le traslazioni delle sezioni trasversali viste da un tale osservatore saranno dette apparenti. La trave subisce quindi un cambiamento di configurazione *rigido* se non si verificano

- rotazioni apparenti delle sezioni rette,
- traslazioni apparenti delle sezioni rette.

Per definire una misura di deformazione è necessario esprimere tali condizioni in termini dei parametri cinematici spostamento-rotazione  $\{\mathbf{u}(t, s_o), \mathbf{Q}(t, s_o)\}$  che caratterizzano il passaggio della trave dalla configurazione  $\Omega(t_o)$  alla configurazione  $\Omega(t)$ . Si perviene così a definire la variazione di curvatura e lo scorrimento che subisce la trave.

Una traiettoria della trave è definita da una coppia di funzioni posizione-rotazione  $\{\mathbf{r}(t, s_o), \mathbf{Q}(t, s_o)\}$ . Ad esse si può associare una misura della deformazione finita della trave nel passaggio dalla configurazione  $\Omega(t_o)$  alla configurazione  $\Omega(t)$ .

In particolare, in accordo con la definizione data, un cambiamento di configurazione della trave da  $\Omega(t_o)$  a  $\Omega(t)$  è *rigido* se è caratterizzato da una rotazione uniforme  $\mathbf{Q}(t, s_o) = \mathbf{Q}(t)$  delle sezioni trasversali e da una posizione  $\mathbf{r}(t, s_o)$  della linea d'asse in  $\Omega(t)$  tale che la differenza tra due punti arbitrari è pari alla differenza tra i due punti corrispondenti in  $\Omega(t_o)$  ruotata di  $\mathbf{Q}(t)$ :

$$\mathbf{r}(t, s_o) - \mathbf{r}(t, \bar{s}_o) = \mathbf{Q}(t) [\mathbf{r}(t_o, s_o) - \mathbf{r}(t_o, \bar{s}_o)].$$

Un misura di deformazione finita è costituita da un operatore non lineare che ad ogni campo posizione-rotazione  $\{\mathbf{r}(t, s_o), \mathbf{Q}(t, s_o)\}$  associa un opportuno campo (di deformazioni) che risulta nullo se e solo se il cambiamento di configurazione della trave è rigido.

L'annullarsi della deformazione si avrà allora se e solo se sono soddisfatte le condizioni

- $\mathbf{Q}'(t, s_o) = \mathbf{O}$ .
- $\mathbf{r}'(t, s_o) - \mathbf{Q}(t) \mathbf{t}_o(s_o) = \mathbf{o}$ .

La condizione  $\mathbf{Q}'(t, s_o) = \mathbf{O}$  può esprimersi convenientemente imponendo l'annullarsi dei campi tensoriali antisimmetrici

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{K}_o(\mathbf{Q}) := \mathbf{Q}^T\mathbf{Q}'.$$

- Si noti che tra i tensori antisimmetrici  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{K}_o$  sussiste la relazione

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q} \mathbf{K}_o \mathbf{Q}^T.$$

Il tensore  $\mathbf{K}$  è quindi il ruotato secondo  $\mathbf{Q}$  del tensore  $\mathbf{K}_o$ .

La posizione occupata nelle formule  $\mathbf{Q}' = \mathbf{K}(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q} \mathbf{K}_o(\mathbf{Q})$  suggerisce per i tensori *antisimmetrici*  $\mathbf{K}(\mathbf{Q})$  e  $\mathbf{K}_o(\mathbf{Q})$  rispettivamente i nomi di

- $\mathbf{K}(\mathbf{Q})$  *tensore sinistro* e  $\mathbf{K}_o(\mathbf{Q})$  *tensore destro* della *curvatura* associata alla variazione di configurazione.

Con lo stesso nome si indicheranno anche i corrispondenti vettori assiali

$$\mathbf{k}(\mathbf{Q}) = \text{axial } \mathbf{K}(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{k}_o(\mathbf{Q}) = \text{axial } \mathbf{K}_o(\mathbf{Q}),$$

tra cui sussiste la relazione  $\mathbf{k} = \mathbf{Q} \mathbf{k}_o$ . Il vettore  $\mathbf{k}$  è quindi il ruotato secondo  $\mathbf{Q}$  del vettore  $\mathbf{k}_o$ .

La condizione  $\mathbf{r}'(t, s_o) - \mathbf{Q}(t) \mathbf{t}_o(t, s_o) = \mathbf{o}$  può scriversi anche nelle forme equivalenti

$$\mathbf{t} \hat{s}' - \mathbf{Q} \mathbf{t}_o = \mathbf{o}, \quad \mathbf{Q}^T [\mathbf{t} \hat{s}'] - \mathbf{t}_o = \mathbf{o}.$$

Si può allora affermare che



**Proposizione 8.4. Misure di deformazione.** *La trave subisce una trasformazione rigida se e solo se si annulla una delle equivalenti misure di deformazione finita*

$$\mathfrak{D}(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) := \begin{vmatrix} \delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{K}(\mathbf{Q}) \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{D}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) := \begin{vmatrix} \delta_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{K}_o(\mathbf{Q}) \end{vmatrix},$$

ovvero

$$D(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) := \begin{vmatrix} \delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{k}(\mathbf{Q}) \end{vmatrix}, \quad D_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) := \begin{vmatrix} \delta_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{k}_o(\mathbf{Q}) \end{vmatrix},$$

dove

$$\mathbf{k}(\mathbf{Q}) := \text{axial } \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} = \mathbf{Q}' \mathbf{Q}^T,$$

$$\mathbf{k}_o(\mathbf{Q}) := \text{axial } \mathbf{K}_o, \quad \mathbf{K}_o = \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}',$$

$$\delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) := \mathbf{t} \hat{s}' - \mathbf{Q} \mathbf{t}_o,$$

$$\delta_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) := \mathbf{Q}^T [\mathbf{t} \hat{s}'] - \mathbf{t}_o,$$

con  $\mathbf{k} = \mathbf{Q} \mathbf{k}_o$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{Q} \mathbf{K}_o \mathbf{Q}^T$  e  $\delta = \mathbf{Q} \delta_o$ .



**Dim.** In una trasformazione rigida, essendo uniforme la rotazione delle sezioni, si ha  $\mathbf{Q}' = \mathbf{O}$  e quindi  $\mathbf{k}(\mathbf{Q}) = \mathbf{o}$ . Derivando allora rispetto ad  $s_o$  l'espressione  $\mathbf{r}(t, s_o) = \mathbf{r}_o(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{r}(t_o, s_o)$  si ottiene

$$\mathbf{t} \hat{s}' = \mathbf{Q}(t) \mathbf{t}_o \iff \delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{o}.$$

Viceversa se  $\mathfrak{D}(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\mathbf{o}, \mathbf{o}\}$  la condizione  $\mathbf{k}(\mathbf{Q}) = \mathbf{o}$  assicura che la rotazione  $\mathbf{Q}$  è uniforme. La condizione  $\delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{o}$  assicura che  $\mathbf{r}'(t, s_o) = \mathbf{Q}(t) \mathbf{r}'(t_o, s_o)$ , ed integrando rispetto ad  $s_o$  si deduce la relazione

$$\mathbf{r}(t, s_o) = \mathbf{r}_o(t) + \mathbf{Q}(t) \mathbf{r}(t_o, s_o),$$

che è caratteristica di una trasformazione rigida. Resta solo da notare che  $\mathfrak{D}(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\mathbf{o}, \mathbf{o}\}$  equivale a  $\mathfrak{D}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\mathbf{o}, \mathbf{o}\}$ .  $\square$

**Osservazione 8.2.** Si noti esplicitamente che i tensori  $\mathbf{K}(\mathbf{Q})$  e  $\mathbf{K}_o(\mathbf{Q})$  misurano la curvatura associata alla variazione di configurazione e non la variazione di curvatura dell'asse della trave.

Si consideri l'esempio riportato in fig.8.1 di una trave a forma di anello circolare il cui asse subisce una diminuzione di raggio mentre le sezioni trasversali non ruotano. La curvatura dell'asse della trave, essendo pari al reciproco del raggio della circonferenza, ovviamente aumenta. La curvatura associata alla variazione di configurazione è invece nulla in quanto, verificandosi che  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  si ha che  $\mathbf{K}(\mathbf{Q}) = \mathbf{K}_o(\mathbf{Q}) = \mathbf{O}$ . Inoltre, risultando  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_o$ , si ha che

$$\delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \delta_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{t} \hat{s}' - \mathbf{Q} \mathbf{t}_o = (1 + \varepsilon) \mathbf{t} - \mathbf{t} = \varepsilon \mathbf{t}.$$

Lo scorrimento è quindi puramente assiale e di intensità pari alla dilatazione della linea d'asse.  $\blacksquare$

#### 8.4. Velocità di deformazione

Per caratterizzare lo stato di sforzo in una generica configurazione  $\Omega(t)$  della trave è necessario definire l'operatore cinematico che ad ogni moto tangente della struttura associa la corrispondente deformazione tangente.

Si consideri a tal fine la derivata temporale degli operatori di deformazione finita  $\mathfrak{D}(\mathbf{u}, \mathbf{Q})$  e  $\mathfrak{D}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q})$

$$\dot{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} \dot{\delta}(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \\ \dot{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) \end{vmatrix}, \quad \dot{\mathfrak{D}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} \dot{\delta}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \\ \dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}) \end{vmatrix}.$$

Si osservi quindi che in base alla proposizione 8.1 (p. 444) la derivata rispetto al tempo della rotazione può scriversi

$$\dot{\mathbf{Q}}(t, s) = \mathbf{W}(t, s) \mathbf{Q}(t, s) = \mathbf{Q}(t, s) \mathbf{W}_o(t, s).$$

I tensori antisimmetrici

$$\mathbf{W}(\mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T, \quad \mathbf{W}_o(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}},$$

sono rispettivamente detti *giratore sinistro* e *giratore destro*.

I vettori assiali ad essi associati, definiti dalle relazioni

$$\boldsymbol{\omega} = \text{axial } \mathbf{W} \iff \mathbf{W}\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

$$\boldsymbol{\omega}_o = \text{axial } \mathbf{W}_o \iff \mathbf{W}_o\mathbf{x} = \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

sono detti *giratori assiali* sinistro e destro.

Dalla proposizione 8.2 (p. 445) si deduce che valgono le relazioni

$$\mathbf{W} = \mathbf{Q} \mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T \iff \boldsymbol{\omega} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\omega}_o.$$

#### 8.4.1. Velocità di curvatura

Si osservi che per ogni  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  si ha che

$$\dot{\mathbf{Q}}' = (\mathbf{W}\mathbf{Q})' = \mathbf{W}'\mathbf{Q} + \mathbf{W}\mathbf{Q}' = \mathbf{W}'\mathbf{Q} + \mathbf{W}\mathbf{K}\mathbf{Q},$$

$$\dot{\mathbf{Q}}' = (\mathbf{K}\mathbf{Q})' = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{Q} + \mathbf{K}\dot{\mathbf{Q}} = \dot{\mathbf{K}}\mathbf{Q} + \mathbf{K}\mathbf{W}\mathbf{Q}.$$

Ne segue che deve sussistere l'eguaglianza

$$\mathbf{W}' + \mathbf{W}\mathbf{K} = \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{K}\mathbf{W}.$$

Analogamente per ogni  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  si ha che

$$\dot{\mathbf{Q}}' = (\mathbf{Q}\mathbf{W}_o)' = \mathbf{Q}'\mathbf{W}_o + \mathbf{Q}\mathbf{W}'_o = \mathbf{Q}\mathbf{K}_o\mathbf{W}_o + \mathbf{Q}\mathbf{W}'_o,$$

$$\dot{\mathbf{Q}}' = (\mathbf{Q}\mathbf{K}_o)' = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{K}_o + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{Q}\mathbf{W}_o\mathbf{K}_o + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{K}}_o.$$

Ne segue che deve sussistere l'eguaglianza

$$\mathbf{K}_o\mathbf{W}_o + \mathbf{W}'_o = \mathbf{W}_o\mathbf{K}_o + \dot{\mathbf{K}}_o.$$

Esprimendo entrambe le derivate sia in termini di  $\mathbf{W}$  che di  $\mathbf{W}_o$  si ha

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \mathbf{W}' + [\mathbf{W}, \mathbf{K}], \\ \dot{\mathbf{K}}_o &= \mathbf{W}'_o - [\mathbf{W}_o, \mathbf{K}_o], \end{aligned}$$

dove  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$  è il commutatore di due tensori antisimmetrici e cioè il tensore antisimmetrico definito da  $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ .

A tali espressioni si può anche pervenire effettuando:

- nella derivata  $\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) := (\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T)'$  la posizione  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}' = \mathbf{K}\mathbf{Q}$ ,
- nella derivata  $\dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}) := (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}')'$  la posizione  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{W}_o$  e  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}\mathbf{K}_o$ .

Se invece

- nella derivata  $\dot{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}) := (\mathbf{Q}'\mathbf{Q}^T)'$  si pone  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q}\mathbf{W}_o$  e  $\mathbf{Q}' = \mathbf{Q}\mathbf{K}_o$ ,
- nella derivata  $\dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}) := (\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}')'$  si pone  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W}\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{Q}' = \mathbf{K}\mathbf{Q}$ .

si perviene alle espressioni

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}\mathbf{W}'_o\mathbf{Q}^T, \quad \dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{Q}^T\mathbf{W}'\mathbf{Q},}$$

Infatti

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}} &= \dot{\mathbf{Q}}'\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}'\dot{\mathbf{Q}}^T = (\mathbf{Q}\mathbf{W}_o)' \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{K}_o \mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T = \\ &= \mathbf{Q}'\mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{W}'_o \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{K}_o \mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T = \\ &= \mathbf{Q}\mathbf{K}_o \mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{W}'_o \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q}\mathbf{K}_o \mathbf{W}_o \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}\mathbf{W}'_o \mathbf{Q}^T. \end{aligned}$$

Le espressioni precedenti possono anche scriversi

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{K}}_o + [\mathbf{W}_o, \mathbf{K}_o])\mathbf{Q}^T, \quad \dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{K}} - [\mathbf{W}, \mathbf{K}])\mathbf{Q}.}$$

In forza delle proposizioni 8.2 (p. 445) e 8.3 (p. 445) esprimendo le velocità di curvatura in termini dei vettori assiali si ottiene

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{k}} &= \boldsymbol{\omega}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\omega}'_o, \\ \dot{\mathbf{k}}_o &= \boldsymbol{\omega}'_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{k}_o = \mathbf{Q}^T\boldsymbol{\omega}', \end{aligned}}$$

e risulta

$$\boxed{\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{Q}(\dot{\mathbf{k}}_o + \boldsymbol{\omega}_o \times \mathbf{k}_o) \iff \dot{\mathbf{k}}_o = \mathbf{Q}^T(\dot{\mathbf{k}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}).}$$

#### 8.4.2. Velocità di scorrimento

La derivata rispetto al tempo dei vettori scorrimento

$$\delta_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T(\mathbf{t}_o + \mathbf{u}') - \mathbf{t}_o, \quad \delta(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{t}_o + \mathbf{u}' - \mathbf{Q}\mathbf{t}_o,$$

formisce le espressioni

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\delta}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) &= \dot{\mathbf{Q}}^T(\mathbf{t}_o + \mathbf{u}') + \mathbf{Q}^T\dot{\mathbf{u}}' = \mathbf{Q}^T[\dot{\mathbf{u}}' - \mathbf{W}(\mathbf{t}_o + \mathbf{u}')], \\ \dot{\delta}(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) &= \dot{\mathbf{u}}' - \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{t}_o = \dot{\mathbf{u}}' - \mathbf{W}\mathbf{Q}\mathbf{t}_o. \end{aligned}}$$

Valutando la derivata temporale in corrispondenza della configurazione  $\Omega(t_o)$  risulta  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$  e quindi  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_o = \mathbf{o}$ . Ne segue che  $\dot{\mathbf{k}} = \dot{\mathbf{k}}_o = \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}'_o$ . Si ottiene pertanto per la *velocità iniziale di scorrimento* l'espressione

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \dot{\boldsymbol{\delta}}_o = \dot{\mathbf{u}}' - \mathbf{W} \mathbf{t}_o = \dot{\mathbf{u}}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t}_o .$$

## 8.5. Equazioni di equilibrio

Le condizioni di equilibrio illustrate nella sezione 6 (p. 415) possono essere anche dedotte dall'analisi non lineare condotta nelle sezione 8 (p. 442).

Rappresentando il giratore  $\mathbf{W}$  ed il tensore velocità di curvatura  $\dot{\mathbf{K}}$  mediante i corrispondenti vettori assiali le formule precedenti assumono la forma

$$\dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\omega}' , \quad \dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{t} .$$

Nella configurazione  $\Omega(t)$  individuata, rispetto a quella di riferimento, dai parametri cinematici  $\{\mathbf{u}, \mathbf{Q}\}$ , le forze esterne sulla trave sono enti duali dei cinematicismi definiti in  $\Omega(t)$ .

Lo spazio dei cinematicismi virtuali in corrispondenza della generica configurazione  $\Omega(t)$  è costituito dalle coppie  $\{\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{Q}}\}$  delle derivate di  $\{\mathbf{u}, \mathbf{Q}\}$  lungo traiettorie partenti da  $\Omega(t)$ .

In virtù della proposizione 8.1 (p. 444) si ha che  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W} \mathbf{Q}$  e quindi, per ogni fissato  $\mathbf{Q}$ , lo spazio tangente è in corrispondenza biunivoca con lo spazio vettoriale costituito dalle coppie di campi  $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\}$ .

- Il campo  $\mathbf{v}$  è un atto di moto della linea d'asse della trave,
- il campo  $\boldsymbol{\omega}$  è costituito da vettori assiali che descrivono l'atto di rotazione delle sezioni trasversali della trave.

L'espressione della velocità di curvatura e di scorrimento in  $\Omega(t)$  in funzione di un cinematicismo  $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\}$  mostra che l'*operatore cinematico*  $\mathbf{B}$  in  $\Omega(t)$  è l'operatore differenziale del primo ordine definito da

$$\mathbf{B} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} := \begin{vmatrix} \boldsymbol{\omega}' \\ \mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & d/ds \\ d/ds & \mathbf{t} \times \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{k}} \\ \dot{\boldsymbol{\delta}} \end{vmatrix} .$$

Il campo di sforzi  $\{\mathbf{M}, \mathbf{F}\}$  duale della deformazione tangente  $\{\dot{\mathbf{k}}, \dot{\boldsymbol{\delta}}\}$  è costituito da campi di *coppie di interazione*  $\mathbf{M}$  e *forze di interazione*  $\mathbf{F}$  definite lungo l'asse della trave. Lo spazio cinematico dell'elemento trave di TIMOSHENKO è dunque lo spazio di SOBOLEV  $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ .

La formula di GREEN corrispondente all’operatore cinematico

$$\mathbf{B} \in \mathbf{L} \{ \mathcal{V}(\Omega), \mathcal{H}(\Omega) \},$$

si ottiene integrando per parti la potenza virtuale interna

$$\begin{aligned} \int_0^L (\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{k}} + \mathbf{F} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}) \, ds &= \int_0^L [\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{F} \cdot (\mathbf{v}' + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\omega})] \, ds = \\ &= \sum_{i=1}^2 [\mathbf{M}_i \cdot \boldsymbol{\omega}_i + \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i] n_i - \int_0^L [(\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F}) \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{F}' \cdot \mathbf{v}] \, ds \end{aligned},$$

dove  $n_1 = -1$  ed  $n_2 = +1$  sono le normali uscenti dall’intervallo  $[0, L]$ .

Le forze esterne in equilibrio con gli sforzi  $\{\mathbf{M}, \mathbf{F}\}$  sono quindi

$$\begin{cases} \mathbf{p} = -\mathbf{F}' & \text{forze distribuite} \\ \mathbf{m} = -(\mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F}) & \text{coppie distribuite} \\ \mathfrak{F}_i = \mathbf{F}_i n_i & \text{forze di estremità} \\ \mathfrak{M}_i = \mathbf{M}_i n_i & \text{coppie di estremità} \end{cases}$$

Tali espressioni mostrano che l’operatore di equilibrio di massa  $\mathbf{B}'_o$  in  $\Omega(t)$  è l’operatore differenziale del primo ordine definito da

$$\boxed{\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} := - \begin{vmatrix} \mathbf{M}' \\ \mathbf{M}' + \mathbf{t} \times \mathbf{F} \end{vmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{O} & d/ds \\ d/ds & \mathbf{t} \times \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{m} \end{vmatrix}.}$$

## 8.6. Relazioni cinematiche

Si consideri una trasformazione che porti la trave dalla configurazione  $\Omega(t)$  alla configurazione  $\Omega(\tau)$ .

Lo spostamento  $\mathbf{u}_t(\tau, s)$  dei punti dell’asse e la rotazione  $\mathbf{Q}_t(\tau, s)$  delle sezioni trasversali della trave nel passaggio dalla configurazione  $\Omega(t)$  alla configurazione  $\Omega(\tau)$  sono definiti dalle relazioni

$$\begin{cases} \mathbf{r}(\tau, s) = \mathbf{r}(t, s) + \mathbf{u}_t(\tau, s), \\ \mathbf{R}(\tau, s) = \mathbf{Q}_t(\tau, s) \mathbf{R}(t, s). \end{cases}$$

Col pedice  $t$  si denotano i campi definiti su  $\Omega(t)$ , funzioni dell'ascissa curvilinea  $s$  in  $\Omega(t)$ . Si consideri la corrispondente misura di deformazione finita

$$\mathfrak{D}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{Q}_t) := \begin{vmatrix} \boldsymbol{\delta}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{Q}_t) \\ \mathbf{K}_t(\mathbf{Q}_t) \end{vmatrix},$$

con  $\mathbf{K}_t(\mathbf{Q}_t) = \mathbf{Q}_t^T \mathbf{Q}'_t$ . Derivando rispetto a  $\tau$  la relazione

$$\mathbf{Q}(\tau, s_o) = \mathbf{Q}_t(\tau, \hat{s}(t, s_o)) \mathbf{Q}(t, s_o),$$

si ottiene che

$$\dot{\mathbf{Q}}(\tau, s_o) = \dot{\mathbf{Q}}_t(\tau, \hat{s}(t, s_o)) \mathbf{Q}(t, s_o).$$

Essendo poi

$$\dot{\mathbf{Q}}_t(\tau, s) = \mathbf{W}_t(\tau, s) \mathbf{Q}_t(\tau, s), \quad \dot{\mathbf{Q}}(\tau, s_o) = \mathbf{W}(\tau, s_o) \mathbf{Q}(\tau, s_o),$$

si deduce che

$$\mathbf{W}_t(\tau, \hat{s}(t, s_o)) \mathbf{Q}_t(\tau, \hat{s}(t, s_o)) = \mathbf{W}(\tau, s_o) \mathbf{Q}(\tau, s_o) \mathbf{Q}^T(t, s_o).$$

Valutando al tempo  $t$  ed osservando che  $\mathbf{Q}_t(t, \hat{s}(t, s_o)) = \mathbf{I}$  si perviene alla relazione

$$\mathbf{W}_t(t, \hat{s}(t, s_o)) = \mathbf{W}(t, s_o).$$

Essendo  $\dot{\mathbf{K}}_t = \mathbf{W}'_t$ , derivando la relazione precedente rispetto a  $s_o$  si può concludere che

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{K}}_t(\mathbf{Q}_t(t, \hat{s}(t, s_o))) \frac{d\hat{s}}{ds_o} &= \mathbf{W}'_t(t, \hat{s}(t, s_o)) \frac{d\hat{s}}{ds_o} = \mathbf{W}'(t, s_o) = \\ &= \mathbf{Q}(t, s_o) \dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}(t, s_o)) \mathbf{Q}^T(t, s_o), \end{aligned}$$

e, sinteticamente

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}}_t(\mathbf{Q}_t) \frac{d\hat{s}}{ds_o} = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T.}$$

Per quanto attiene alle velocità di scorrimento si osservi che risulta

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) &= \mathbf{Q}^T [\dot{\mathbf{u}}' - \mathbf{W}(\mathbf{t}_o + \mathbf{u}')], \\ \dot{\boldsymbol{\delta}}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{Q}_t) &= \dot{\mathbf{u}}'_t - \mathbf{W}_t \mathbf{t}. \end{aligned}}$$

Allora, essendo  $\dot{\mathbf{u}}' = \dot{\mathbf{u}}'_t \hat{s}'$ ,  $\mathbf{W} = \mathbf{W}_t$  e  $\mathbf{t}_o + \mathbf{u}' = \mathbf{t} \hat{s}'$ , risulta

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T [\dot{\mathbf{u}}'_t - \mathbf{W} \mathbf{t}] \hat{s}',$$



e quindi

$$\dot{\delta}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{Q}_t) \hat{s}' = \mathbf{Q} \dot{\delta}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}).$$

- Tra la misura della velocità di deformazione  $\dot{\mathcal{D}}_t(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\dot{\delta}_t, \dot{\mathbf{K}}_t\}$  in  $\Omega(t)$  e la derivata temporale della deformazione finita  $\dot{\mathcal{D}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\dot{\delta}_o, \dot{\mathbf{K}}_o\}$  da  $\Omega(t_o)$  a  $\Omega(t)$  esiste pertanto la relazione biunivoca lineare definita da

$$\dot{\mathbf{K}}_t(\mathbf{Q}_t) \hat{s}' = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T, \quad \dot{\delta}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{Q}_t) \hat{s}' = \mathbf{Q} \dot{\delta}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}).$$

L'esistenza di tale relazione consente di scrivere le condizioni di equilibrio in termini di forze e di sforzi definiti in modo opportuno su di una configurazione di riferimento, come sarà mostrato nella prossima sezione.

In particolare si ha che  $\dot{\mathcal{D}}_t(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{O}$  se e solo se  $\dot{\mathcal{D}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \mathbf{O}$ .

### 8.7. Equilibrio nella configurazione di riferimento

Nella configurazione  $\Omega(t)$  della trave sia  $\mathbf{f}_t$  un sistema di forze in equilibrio e cioè tale che sia nulla la potenza virtuale  $\langle \mathbf{f}_t, \mathbf{v}_t \rangle = 0$  per ogni cinematismo  $\mathbf{v}_t = \{\dot{\mathbf{u}}_t, \dot{\mathbf{Q}}_t\}$  rigido a pezzi che la trave può subire a partire da  $\Omega(t)$ .

L'operatore di deformazione tangente è definito da

$$\mathbf{B}\mathbf{v}_t = \dot{\mathcal{D}}_t(\mathbf{u}, \mathbf{Q}), \quad \forall \mathbf{v}_t = \{\dot{\mathbf{u}}_t, \dot{\mathbf{W}}_t\}.$$

Si noti che risulta  $\dot{\mathbf{Q}}_t = \mathbf{W}_t(t) \mathbf{Q}_t(t) = \mathbf{W}_t(t)$ , essendo  $\mathbf{Q}_t(t) = \mathbf{I}$ .

Il teorema delle potenze virtuali assicura che in  $\Omega(t)$  esiste uno stato di sforzo  $\mathfrak{S}_t = \{\mathbf{F}_t, \mathbf{M}_t\}$  tale che per ogni cinematismo  $\mathbf{v}_t = \{\dot{\mathbf{u}}_t, \dot{\mathbf{W}}_t\}$  sussista l'eguaglianza

$$\langle \mathbf{f}_t, \mathbf{v}_t \rangle = \langle \mathfrak{S}_t, \dot{\mathcal{D}}_t(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \rangle = \int_0^L \mathbf{F}_t \cdot \dot{\mathbf{b}}_t \, ds + \int_0^L \mathbf{M}_t : \dot{\mathbf{K}}_t \, ds.$$

Nella configurazione  $\Omega(t_o)$  si definisce uno sforzo  $\mathfrak{S}_o = \{\mathbf{F}_o, \mathbf{M}_o\}$  equivalente allo sforzo  $\{\mathbf{F}_t, \mathbf{M}_t\}$  nella configurazione  $\Omega(t)$  mediante l'identità

$$\langle \mathfrak{S}_t, \dot{\mathcal{D}}_t(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \rangle = \langle \mathfrak{S}_o, \dot{\mathcal{D}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \rangle,$$

che costituisce la formulazione del principio delle potenze virtuali nella configurazione di riferimento.

Esplicitamente si scrive

$$\boxed{\int_0^L \mathbf{F}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}_t \, ds + \int_0^L \mathbf{M}_t : \dot{\mathbf{K}}_t \, ds = \int_0^{L_o} \mathbf{F}_o \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}_o \, ds_o + \int_0^{L_o} \mathbf{M}_o : \dot{\mathbf{K}}_o \, ds_o,}$$

per ogni  $\dot{\mathfrak{D}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\dot{\boldsymbol{\delta}}_o, \dot{\mathbf{K}}_o\}$  e per ogni  $\dot{\mathfrak{D}}_t(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) = \{\dot{\boldsymbol{\delta}}_t, \dot{\mathbf{K}}_t\}$  tali che

$$\boxed{\dot{\mathbf{K}}_t(\mathbf{Q}_t) \hat{s}' = \mathbf{Q} \dot{\mathbf{K}}_o(\mathbf{Q}) \mathbf{Q}^T, \quad \dot{\boldsymbol{\delta}}_t(\mathbf{u}_t, \mathbf{Q}_t) \hat{s}' = \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\delta}}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}).}$$

Da tali relazioni e dalla formula del cambiamento della variabile di integrazione si deduce che

- posto  $\dot{\mathbf{K}}_t = \dot{\mathbf{K}}_o = \mathbf{O}$ , si ha che perogni  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_o$  deve avversi

$$\int_0^L \mathbf{F}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}_t \, ds = \int_0^{L_o} \mathbf{F}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}_t \frac{d\hat{s}}{ds_o} \, ds_o = \int_0^{L_o} \mathbf{F}_t \cdot \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\delta}}_o \, ds_o = \int_0^{L_o} \mathbf{F}_o \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}}_o \, ds_o,$$

- posto  $\dot{\boldsymbol{\delta}}_t = \dot{\boldsymbol{\delta}}_o = \mathbf{o}$ , si ha che perogni  $\dot{\mathbf{K}}_o$  deve avversi

$$\int_0^L \mathbf{M}_t : \dot{\mathbf{K}}_t \, ds = \int_0^{L_o} \mathbf{M}_t : \dot{\mathbf{K}}_t \frac{ds}{ds_o} \, ds_o = \int_0^{L_o} \mathbf{M}_t : \mathbf{Q} \dot{\mathbf{K}}_o \mathbf{Q}^T \, ds_o = \int_0^{L_o} \mathbf{M}_o : \dot{\mathbf{K}}_o \, ds_o.$$



Ne deriva che tra lo sforzo  $\mathfrak{S}_t = \{\mathbf{F}_t, \mathbf{M}_t\}$  nella configurazione  $\Omega(t)$  e quello equivalente  $\mathfrak{S}_o = \{\mathbf{F}_o, \mathbf{M}_o\}$  nella configurazione  $\Omega(t_o)$  sussistono le relazioni

$$\boxed{\mathbf{F}_t = \mathbf{Q} \mathbf{F}_o, \quad \mathbf{M}_t = \mathbf{Q} \mathbf{M}_o \mathbf{Q}^T.}$$

Sia  $\mathbf{f}_o$  il sistema di forze definito nella configurazione  $\Omega_o$  ed equivalente al sistema di forze  $\mathbf{f}_t$  agente nella configurazione  $\Omega(t)$  nel senso che vale l'identità

$$\langle \mathbf{f}_t, \mathbf{v}_t \rangle = \langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_t = \{\dot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{W}_t\}, \quad \forall \mathbf{v}_o = \{\dot{\mathbf{u}}_o, \mathbf{WQ}\},$$

essendo  $\dot{\mathbf{u}}_t(t, \hat{s}(t, s_o)) = \dot{\mathbf{u}}(t, s_o)$  e  $\mathbf{W}_t(t, \hat{s}(t, s_o)) = \mathbf{W}(t, s_o)$ .

La condizione di equilibrio

$$\langle \mathbf{f}_t, \mathbf{v}_t \rangle = (\mathfrak{S}_t, \mathbf{B} \mathbf{v}_t), \quad \forall \mathbf{v}_t = \{\dot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{W}_t\},$$

si può dunque riscrivere nella configurazione  $\Omega_o$  come

$$\langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle = (\mathfrak{S}_o, d\mathfrak{D}_o(\mathbf{u}, \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{v}_o), \quad \forall \mathbf{v}_o = \{\dot{\mathbf{u}}_o, \mathbf{WQ}\}.$$



## 9. MODELLI BIDIMENSIONALI

In questa sezione viene svolta la trattazione del modello strutturale di membrana curva e dei due modelli classici di piastra che rispettivamente costituiscono l'estensione dei modelli di fune e di trave di BERNOULLI-EULER e di TIMOSHENKO dal contesto monodimensionale a quello bidimensionale.

Il modello di piastra cinematicamente più ricco è quello di REISSNER-MINDLIN che, tenendo conto anche della deformabilità a taglio, è adatto a descrivere il comportamento di piastre di spessore anche non piccolo.

Il modello di piastra dovuto a KIRCHHOFF è l'estensione del modello di trave di BERNOULLI-EULER. Tenendo conto solo della deformabilità flessionale della trave, il modello di KIRCHHOFF descrive in modo sufficientemente accurato il comportamento di piastre di piccolo spessore.

Un aspetto notevole del modello di KIRCHHOFF è rappresentato dalla metodologia variazionale cui si fa ricorso per dedurre le equazioni di equilibrio.

Il metodo originale di KIRCHHOFF costituisce il primo esempio non banale di applicazione della formula di GREEN per dedurre le equazioni di equilibrio, differenziali ed al contorno.

### 9.1. Geometria delle superfici

Si premettono alcuni risultati di teoria delle superfici cui si farà riferimento nel formulare il modello strutturale di membrana. La trattazione è inquadrata in un contesto più generale che considera il modello strutturale quale varietà  $(n-1)$ -dimensionale immersa in una varietà di RIEMANN di dimensione  $n$ . Nella trattazione si farà riferimento ad alcune nozioni introdotte nella sezione 2.2 (p. 380). Si considerino quindi

- una varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{S}, g\}$  di dimensione  $n$ ,
- una sottovarietà  $\{\mathbb{M}, g_{\mathbb{M}}\}$  di dimensione  $n-1$  immersa in  $\{\mathbb{S}, g\}$  e dotata della metrica indotta dall'immersione.

Nel seguito la varietà  $\mathbb{M}$  sarà detta per brevità una *superficie* immersa in  $\mathbb{S}$ .

■ La *prima forma fondamentale* della superficie  $\mathbb{M}$  è la forma bilineare simmetrica e definita positiva

$$g_{\mathbb{M}} \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R}\},$$

della metrica indotta da quella di  $\{\mathbb{S}, g\}$ , definita dalla relazione

$$g_{\mathbb{M}}(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) := g(\mathbf{J}_{\mathbb{SM}}\mathbf{h}_1, \mathbf{J}_{\mathbb{SM}}\mathbf{h}_2), \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

Si denoti quindi con  $\mathbf{i} : \mathbb{T}_{\mathbb{S}} \times L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}^n; \mathfrak{R}\} \mapsto L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}^{(n-1)}; \mathfrak{R}\}$  l'operazione di contrazione definita dall'identità

$$(\mathbf{i}_{\mathbf{h}} \mu_{\mathbb{S}})(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{(n-1)}) = \mu_{\mathbb{S}}(\mathbf{h}, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{(n-1)}),$$

per ogni  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{(n-1)} \in \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$ .

■ Il versore normale  $\mathbf{n}$  è allora definito da

$$\mu_M = i_n \mu_S, \quad g(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1,$$

dove  $\mu_S$  e  $\mu_M$  sono le forme di volume sulle varietà orientate  $S$  e  $M$ .

Vale l'identità

$$g(\mathbf{n}, \mathbf{h}) \mu_M = i_h \mu_S, \quad \forall \mathbf{h} \in T_S.$$

Se  $S$  è lo spazio euclideo tridimensionale il versore normale può essere definito in via alternativa considerando un sistema di coordinate sulla superficie che localmente induce sugli spazi tangentici il riferimento  $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2\}$ . Ponendo  $\mathbf{t}_\alpha = \Pi^T \mathbf{h}_\alpha$  per  $\alpha = 1, 2$  il versore normale alla superficie è definito da

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{\|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2\|}.$$

■ L'applicazione di GAUSS<sup>89</sup>  $\gamma : M \mapsto S$  definita da

$$\gamma(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in M,$$

associa ad ogni punto della superficie  $M$  il corrispondente versore normale sulla sfera unitaria di  $S$ .

Si ricordi che la derivata covariante  $\nabla \mathbf{v} : J_{SM} T_M \mapsto T_S$  è restrizione a  $M$  della derivata covariante su  $S$  valutata lungo vettori del sottospazio lineare di  $T_S$

$$J_{SM} T_M = \Pi^T T_M,$$

tangente a  $M$ .

---

<sup>89</sup> JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855). Genio matematico tedesco, tra i maggiori di ogni tempo. Nato nel ducato di Brunswick-Wolfenbüttel all'età di sette anni iniziò la scuola e stupì il suo maestro BÜTTNER sommando istantaneamente i numeri da 1 a 100. Ottenuto uno stipendio dal DUCA DI BRUNSWICK entrò al Collegium Carolinum nel 1792. Nel 1795 GAUSS lasciò Brunswick per studiare all'Università di Göttingen, dove ebbe attese alle lezioni di matematica di KAESTNER, lezioni che GAUSS criticava per essere troppo elementari. Lasciata Göttingen nel 1798 senza aver conseguito il diploma si laureò nel 1799 a Brunswick. All'epoca GAUSS aveva già scoperto la costruzione con riga e compasso di un poligono di 17 lati, il maggior risultato in geometria dal tempo degli antichi greci. Con il supporto del DUCA DI BRUNSWICK conseguì il dottorato all'Università di Helmstedt dove ebbe quale tutore JOHANN FRIEDRICH PFAFF (1765-1825). La dissertazione di GAUSS fu sul teorema fondamentale dell'algebra. Nell'estate del 1801 pubblicò le *Disquisitiones Arithmeticae* dedicate alla teoria dei numeri ed alla costruzione del 17-gono. Nel giugno del 1801 calcolò col suo metodo dei minimi quadrati la posizione del piccolo pianeta Ceres scoperto il 1º gennaio 1801 dall'astronomo italiano L. PIAZZI ed i suoi calcoli furono confermati dalle osservazioni dell'astronomo ZACH. Nel 1802 iniziò a corrispondere con FRIEDRICH WILHELM BESSEL (1784-1846), che conobbe poi solo nel 1825, e con MARIE-SOPHIE GERMAIN (1776-1831). GAUSS sposò JOHANNA OSTOFF nel 1805 e nel 1807, dopo la morte in guerra del DUCA DI BRUNSWICK divenne direttore dell'osservatorio di Göttingen. Nel 1808 morì prima il padre, poi la moglie ed infine il secondo figlio. GAUSS sposò quindi MINNA, la migliore amica di JOHANNA, da cui ebbe tre figli. Nel 1809 pubblicò il trattato in due volumi *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium*, nel 1816 la *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodus nova tractata* dedicato alla teoria del potenziale ed alla geodesia e nel 1823 la *Theoria combinationis observationum*

L'applicazione tangente di  $\gamma$  è quindi definita da

$$T\gamma = (\nabla \mathbf{n})\Pi^T \in L\{\mathbb{T}_M; \Pi^T \mathbb{T}_M\}.$$

Infatti, essendo per definizione  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = 1$ , derivando si deduce che

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{n}))[\mathbf{a}] &= \mathbf{g}(\nabla \mathbf{n}[\mathbf{a}], \mathbf{n}) + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla \mathbf{n}[\mathbf{a}]) = \\ &= 2\mathbf{g}(\nabla \mathbf{n}[\mathbf{a}], \mathbf{n}) = 0, \quad \forall \mathbf{a} \in \Pi^T \mathbb{T}_M. \end{aligned}$$

Dunque  $\nabla \mathbf{n}[\mathbf{a}] \in \Pi^T \mathbb{T}_M$  per ogni  $\mathbf{a} \in \Pi^T \mathbb{T}_M$ .

- L'operatore di forma o operatore di WEINGARTEN<sup>90</sup> della superficie  $M$  è l'operatore lineare  $S_M \in L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_M\}$  definito da

$$S_M := J_{MS}(\nabla \mathbf{n})J_{SM} = \Pi(\nabla \mathbf{n})\Pi^T.$$

Si noti che l'operatore di proiezione  $\Pi$  è inessenziale, essendo  $\Pi(\nabla \mathbf{n}) = \nabla \mathbf{n}$ . Esso compare nella formula solo per motivi di simmetria formale.

- La seconda forma fondamentale della superficie  $\Pi \in L\{\mathbb{T}_M, \mathbb{T}_M; \mathcal{R}\}$  è la forma bilineare associata all'operatore di WEINGARTEN ed è quindi definita da

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M) &= g_M(S_M[\mathbf{a}_M], \mathbf{b}_M) = g_M(J_{MS}(\nabla \mathbf{n})J_{SM} \mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M) = \\ &= \mathbf{g}((\nabla \mathbf{n})\Pi^T \mathbf{a}_M, \Pi^T \mathbf{b}_M). \end{aligned}$$

Un risultato fondamentale è il seguente.

**Proposizione 9.1. Simmetria dell'operatore di forma.** *L'operatore di WEINGARTEN è simmetrico rispetto alla prima forma fondamentale.*

---

*erroribus minimis obnoxiae* dedicato alla statistica matematica ed al metodo dei minimi quadrati. Il famoso *Theorema Egregium* fu pubblicato nelle *Disquisitiones generales circa superficies curva* del 1828. Nel 1831 morì anche la seconda moglie ma arrivò a Göttingen il fisico WILHELM EDUARD WEBER (1804-1891) con il quale GAUSS condivise amicizia e collaborazione scientifica a problemi di elettricità e di magnetismo. Nel 1849 alla dissertazione del giubileo d'oro di GAUSS, cinquanta anni dopo la dissertazione del 1799, parteciparono JACOBI e DIRICHLET. Nel 1850 GAUSS, da sempre convinto dell'esistenza di geometrie non euclidee, ed estimatore delle idee di JÁNOS BOLYAI (1802-1860), figlio del suo amico FARKAS WOLFGANG BOLYAI (1775-1856), e di quelle di NIKOLAI IVANOVICH LOBACHEVSKY (1792-1856), approvò la dissertazione dottorale di RIEMANN. Famosi sono i contributi di GAUSS alla geometria differenziale delle superfici, alla soluzione dei sistemi lineari ed al metodo dei minimi quadrati, alla teoria del potenziale ed allo studio del magnetismo.

<sup>90</sup> JULIUS WEINGARTEN (1836-1910) (vedi la nota biografica).

**Dim.** La dimostrazione si conduce osservando che, essendo  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0$ , risulta

$$0 = \nabla(\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{b}))[\mathbf{a}] = \mathbf{g}(\nabla\mathbf{n}[\mathbf{a}], \mathbf{b}) + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla\mathbf{b}[\mathbf{a}]), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Pi^T \mathbb{T}_M.$$

Dunque, ponendo

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{J}_{MS} \mathbf{a}, \quad \mathbf{b}_M = \mathbf{J}_{MS} \mathbf{b},$$

la seconda forma fondamentale della superficie  $M$  si scrive

$$II(\mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M) = \mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla\mathbf{b}[\mathbf{a}]) = -\mathbf{g}(\nabla\mathbf{n}[\mathbf{a}], \mathbf{b}).$$

Si ha quindi che

$$II(\mathbf{a}_M, \mathbf{b}_M) - II(\mathbf{b}_M, \mathbf{a}_M) = \mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla\mathbf{b}[\mathbf{a}]) - \mathbf{g}(\mathbf{n}, \nabla\mathbf{a}[\mathbf{b}]) = \mathbf{g}(\mathbf{n}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]),$$

dove  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$  è la *parentesi di LIE-JACOBI* definita nella sezione I.12.3 (p. 135). L'ultima egualanza segue dalla simmetria della connessione che per definizione impone che (si veda la sezione I.12.5 (p. 148)):

$$\nabla\mathbf{b}[\mathbf{a}] - \nabla\mathbf{a}[\mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

La simmetria della seconda forma fondamentale si deduce allora dalla proprietà di ortogonalità,

$$\mathbf{g}(\mathbf{n}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = 0,$$

che deriva dall'implicazione  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Pi^T \mathbb{T}_M \Rightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \in \Pi^T \mathbb{T}_M$  che è una diretta conseguenza della definizione della derivata di LIE.  $\square$

La proprietà di simmetria stabilita nella proposizione 9.1 consente di affermare che esiste una base di autovettori dell'operatore di forma che è ortonormale rispetto alla prima forma fondamentale. L'operatore di forma ammette inoltre una rappresentazione spettrale con autovalori reali (si veda ad es. [33]).

- Gli autovalori dell'operatore di forma sono le *curvature principali* della superficie.
- L'invariante lineare (traccia)  $\text{tr } S_M$  dell'operatore di forma è pari a due volte la *curvatura media* della superficie.
- Il determinante  $\det S_M$  dell'operatore di forma è la *curvatura di GAUSS* della superficie.

Un risultato famoso e sorprendente dovuto a GAUSS (il *Theorema Egregium*) stabilisce l'invarianza della curvatura Gaussiana rispetto ad un'arbitraria trasformazione isometrica della superficie.

**Remark 9.1.**

La proprietà di simmetria della seconda forma fondamentale può essere dedotta più direttamente osservando che il versore normale alla superficie è il gradiente di una funzione distanza.

Si riconosce così che la seconda forma fondamentale è la derivata covariante seconda (ovvero l’Hessiano) della funzione distanza. Si conclude notando che l’Hessiano è simmetrico in virtù del fatto che la metrifica euclidea ha torsione nulla.

Una funzione distanza da una sottovarietà differenziabile  $\mathbb{M}$  di dimensione  $n - 1$  di una varietà riemanniana  $\{\mathbb{S}, g\}$  di dimensione  $n$  è una funzione scalare  $f : U \mapsto \mathbb{R}$  definita e differenziabile in un intorno aperto  $U \subset \mathbb{S}$  di  $\mathbb{M}$  ed avente gradiente con norma unitaria. Una funzione distanza soddisfa quindi l’equazione non lineare di HAMILTON-JACOBI

$$\|\nabla f(\mathbf{x})\| = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Per costruire una funzione distanza da una varietà differenziabile orientata  $\mathbb{M}$  si consideri una striscia aperta  $\mathcal{O} \subset \mathbb{S}$  di spessore opportunamente piccolo attorno ad  $\mathbb{M}$  in modo che ogni punto in tale striscia  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$  possa essere univocamente proiettato ortogonalmente su di un punto  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$  (quello che rende minima la distanza di  $\mathbf{x} \in \mathcal{O}$  da  $\mathbb{M}$ , misurata nella metrifica di  $\mathbb{S}$ ). Allora  $\mathbf{x} = \mathbf{m} + t \mathbf{n}$  e si possono definire

- la funzione distanza con segno

$$f(\mathbf{x}) = t, \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

che è differenziabile sull’aperto  $\mathcal{O} = U$ ,

- la funzione distanza

$$f(\mathbf{x}) = |t|, \quad \forall \mathbf{x} \in U \setminus \mathbb{M}.$$

che è differenziabile sull’aperto  $\mathcal{O} = U \setminus \mathbb{M}$ .

Allora  $\mathbf{n} = \nabla f$  e  $\nabla \mathbf{n} = \nabla^2 f$  per cui l’operatore di forma  $\mathbf{S}_{\mathbb{M}} \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\}$  può scriversi:

$$\mathbf{S}_{\mathbb{M}} = \mathbf{\Pi}(\nabla^2 f)\mathbf{\Pi}^T.$$

Tale espressione mostra che la simmetria dell’operatore di forma è una diretta conseguenza della simmetria dell’Hessiano della funzione distanza. ■

## 10. LA MEMBRANA

Una *membrana* è un modello strutturale definito da una superficie  $\mathbb{M}$  orientabile e regolare a pezzi nello spazio euclideo  $\mathbb{S}$ .

La deformazione della membrana è costituita dalla modifica delle proprietà metriche degli spazi tangenti alla varietà  $\mathbb{M}$ .

La trattazione svolta nella sezione 2 (p. 379) mostra che la *deformazione tangente* è descritta, in termini della derivata di LIE del tensore metrico, dal campo tensoriale simmetrico due volte covariante

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_v g_{\mathbb{M}} \in C^k(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R}\}),$$

ovvero, in termini della derivata covariante nello spazio ambiente, dal corrispondente campo tensoriale misto  $Bv \in C^k(\mathbb{M}; L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\})$  definito da

$$Bv = \text{sym} (\Pi \nabla v \Pi^T).$$

dove  $v \in C^k(\mathbb{M}; \mathbb{T}_{\mathbb{S}})$  è un campo di spostamenti virtuali della membrana.

Si noti che la derivata covariante coincide con quella direzionale in quanto lo spazio ambiente è euclideo.

Per esplicitare la formula della deformazione tangente è necessario fornire una espressione del proiettore ortogonale  $\Pi \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\}$ .

A tal fine si consideri

- un sistema di coordinate cartesiane corrispondente ad una base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  dello spazio euclideo,
- un sistema di coordinate sulla superficie che localmente induce sullo spazio tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  la base  $\{h_1, h_2\}$ .

Si ponga poi  $t_\alpha = \Pi^T h_\alpha \in \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  per  $\alpha = 1, 2$ .

Sia quindi

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{\|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2\|},$$

il versore normale alla superficie della membrana. Il proiettore ortogonale

$$\Pi = J_{\mathbb{MS}}(\mathbf{I} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\},$$

è rappresentato, rispetto alle basi  $\{e_1, e_2, e_3\}$  e  $\{h_1, h_2\}$  dalla matrice  $2 \times 3$  definita dalla relazione

$$\Pi e_i = J_{\mathbb{MS}}(e_i - g(e_i, n)n) = \Pi^\beta_i t_\beta, \quad i = 1, 2, 3, \quad \beta = 1, 2.$$

Dunque, essendo  $g(n, t_\alpha) = 0$  per  $\alpha = 1, 2$ , effettuando il prodotto interno per  $t_\alpha$  si deduce che

$$\Pi_{\alpha i} = G_{\alpha\beta} \Pi^\beta_i = g(t_\alpha, t_\beta) \Pi^\beta_i = g(t_\alpha, e_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

Explicitamente la matrice  $[\Pi] \in L\{\mathfrak{R}^3; \mathfrak{R}^2\}$  si scrive pertanto

$$[\Pi] = \begin{vmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}.$$



■ L'ente duale della deformazione tangente  $\mathbf{Bv} \in L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_M\}$  è lo *sforzo normale*

$$\mathbf{N} \in L\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_M\}$$

nella membrana che è un campo di tensori simmetrici di quadrato integrabile sulla superficie  $M$ .

La formula di GREEN si scrive

$$\begin{aligned} \int_M \mathbf{N} : \mathbf{Bv} \mu_M &= \int_M \mathbf{N} : (\Pi \nabla \mathbf{v} \Pi^T) \mu_M = \\ &= \int_M -[\operatorname{Div}(\Pi^T \mathbf{N})] \cdot \mathbf{v} \mu_M + \int_{\partial M} (\Pi^T \mathbf{N}) \mathbf{n} \cdot \Gamma \mathbf{v} \mu_{\partial M}, \end{aligned}$$

dove il versore  $\mathbf{n} \in \mathbb{T}_M$  è la normale uscente al contorno della superficie  $M$  ed appartiene allo spazio tangente alla superficie  $M$ .

Le equazioni di equilibrio della membrana si scrivono dunque

$$\begin{cases} -\operatorname{Div}(\Pi^T \mathbf{N}) = \mathbf{p} & \text{carico distribuito,} \\ (\Pi^T \mathbf{N}) \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{campo di tensioni al contorno.} \end{cases}$$

Pertanto

- Il carico distribuito  $\mathbf{p} \in \mathbb{T}_S$  ha dimensione  $[FL^{-2}]$  e può essere comunque diretto nella fibra dello spazio ambiente.
- Il campo di tensioni al contorno  $\mathbf{t} \in \Pi^T \mathbb{T}_M$  ha dimensione  $[FL^{-1}]$  e la condizione di equilibrio richiede che sia tangente alla superficie della membrana.

**Osservazione 10.1.** Ogni cinematismo  $\mathbf{v} : M \mapsto \mathbb{T}_S$  può essere univocamente decomposto come somma di una componente normale e di una componente tangente alla superficie:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||} + v_{\mathbf{n}} \mathbf{n}, \quad v_{\mathbf{n}} = \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{n}).$$

La derivata covariante di  $\mathbf{v} : M \mapsto \mathbb{T}_S$  nello spazio ambiente  $S$  si scrive allora

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}_{||} + (\nabla v_{\mathbf{n}}) \otimes \mathbf{n} + v_{\mathbf{n}} \nabla \mathbf{n}.$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{v}[\mathbf{a}], \mathbf{b}) &= \mathbf{g}(\nabla \mathbf{v}_{||}[\mathbf{a}], \mathbf{b}) + \\ &\quad + \mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{a}) \mathbf{g}(\nabla v_{\mathbf{n}}, \mathbf{b}) + \\ &\quad + v_{\mathbf{n}} \mathbf{g}(\nabla \mathbf{n}[\mathbf{a}], \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Pi^T \mathbb{T}_M. \end{aligned}$$

Ponendo quindi  $\mathbf{a} = \Pi^T \mathbf{h}_1$  e  $\mathbf{b} = \Pi^T \mathbf{h}_2$  con  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  ed osservando che  $\mathbf{g}(\mathbf{n}, \mathbf{a}) = 0$  in quanto  $\mathbf{a} \in \Pi^T \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ , si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\Pi \nabla \mathbf{v} \Pi^T [\mathbf{h}_1], \mathbf{h}_2) &= \mathbf{g}(\Pi \nabla \mathbf{v}_{||} \Pi^T [\mathbf{h}_1], \mathbf{h}_2) + \\ &+ v_{\mathbf{n}} \mathbf{g}(\Pi \nabla \mathbf{n} \Pi^T [\mathbf{h}_1], \mathbf{h}_2), \quad \forall \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}. \end{aligned}$$

Definendo poi  $\nabla_{\mathbb{M}||} \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\}$ , derivata covariante sulla superficie  $\mathbb{M}$ , mediante la proiezione

$$\nabla_{\mathbb{M}||} \mathbf{v}_{||} := \Pi(\nabla \mathbf{v}_{||}) \Pi^T,$$

e ricordando la definizione dell'operatore di WEINGARTEN

$$\mathbf{S}_{\mathbb{M}} := \Pi(\nabla \mathbf{n}) \Pi^T,$$

si perviene alla relazione notevole

$$\boxed{\Pi \nabla \mathbf{v} \Pi^T = \nabla_{\mathbb{M}||} \mathbf{v}_{||} + v_{\mathbf{n}} \mathbf{S}_{\mathbb{M}}}$$

La deformazione tangente della membrana può scriversi dunque nella forma

$$\boxed{\mathbf{B} \mathbf{v} = \text{sym}(\Pi \nabla \mathbf{v} \Pi^T) = \text{sym}(\nabla_{\mathbb{M}||} \mathbf{v}_{||}) + v_{\mathbf{n}} \mathbf{S}_{\mathbb{M}}}.$$

Se la curvatura della membrana è nulla risulta  $\mathbf{S}_{\mathbb{M}} = \mathbf{O}$  e dunque la componente normale del cinematismo non gioca nessun ruolo nel generare la deformazione tangente della membrana che assume allora l'espressione ridotta

$$\mathbf{B} \mathbf{v} = \text{sym}(\nabla_{\mathbb{M}||} \mathbf{v}_{||}).$$

coincidente con quella di un continuo bidimensionale in cui  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{||}$ .

La trattazione qui sviluppata è una versione modificata di quella svolta in [26]. La modifica essenziale riguarda la motivazione dell'eliminazione del termine  $(\nabla v_{\mathbf{n}}) \otimes \mathbf{n}$  dall'espressione della deformazione tangente. La trattazione in [26] adduce infatti al riguardo una motivazione non corretta. ■

**Osservazione 10.2.** La formulazione della deformazione tangente della membrana in termini delle componenti normale e tangenziale dei cinematicismi consente di esplicitare l'effetto della curvatura della superficie tramite la seconda forma fondamentale. Per la scrittura della condizione di equilibrio tale formulazione non è però di norma perseguita in quanto spesso non è conveniente adottare le componenti normale e tangenziale dei cinematicismi quali parametri cinematici e le entità duali quali parametri di forza. ■



### 10.1. La membrana ribassata e pretesa

A titolo esemplificativo si deduce l'equazione di equilibrio di una membrana soggetta ad un carico diretto lungo l'asse coordinato  $\mathbf{e}_3$ , del riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  dello spazio euclideo, e pretesa in modo da generare un campo di sforzo normale isotropo e costante. Dunque si assume che

$$\mathbf{p} = p \mathbf{e}_3, \quad p \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{N} = N \mathbf{I}, \quad N \in \mathbb{R},$$

con  $N$  costante e  $\mathbf{I} \in \mathbf{L}\{\mathbb{T}_M; \mathbb{T}_M\}$  identità in  $\mathbb{T}_M$ .

L'equazione differenziale di equilibrio della membrana si scrive allora

$$-\operatorname{Div} \mathbf{\Pi}^T = \frac{p}{N} \mathbf{e}_3,$$

ovvero

$$-(\operatorname{Div} \mathbf{\Pi}^T) \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{p}{N}.$$

In termini di componenti cartesiane l'equazione di equilibrio si scrive dunque

$$-(\Pi_{13/1} + \Pi_{23/2}) = \frac{p}{N}.$$

Osservando che  $\Pi_{13} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{e}_3$  e  $\Pi_{23} = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{e}_3$  si ha che

$$\Pi_{13/1} = \mathbf{t}_{1/1} \cdot \mathbf{e}_3, \quad \Pi_{23/2} = \mathbf{t}_{2/2} \cdot \mathbf{e}_3.$$

Sia  $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$  la funzione che fornisce la rappresentazione parametrica della superficie della membrana. Dette  $\{x, y, z\}$  le coordinate nel riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , i punti della superficie della membrana nello spazio  $\mathbb{S}$  sono quindi individuati dalle coordinate

$$\{x, y, f(x, y)\}, \quad \{x, y\} \in \Omega.$$

dove il dominio  $\Omega$  rappresenta la configurazione iniziale (piana) della membrana.

Dalla trattazione svolta nella sezione 3.1.1 (p. 392) si trae che

$$\mathbf{t}_{x/x} = \frac{1}{(1 + f_{/x}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad f_{/xx}, \quad \mathbf{t}_{y/y} = \frac{1}{(1 + f_{/y}^2)^{3/2}} \begin{vmatrix} 0 \\ -f_{/y} \\ 1 \end{vmatrix} \quad f_{/yy}$$

Se la configurazione di equilibrio della membrana è molto ribassata, e cioè *quasi piatta*, risulta  $f_{/x}^2 \ll 1$  e  $f_{/y}^2 \ll 1$  per cui si può porre

$$\mathbf{t}_{x/x} = \begin{vmatrix} -f_{/x} \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad f_{/xx}, \quad \mathbf{t}_{y/y} = \begin{vmatrix} 0 \\ -f_{/y} \\ 1 \end{vmatrix} \quad f_{/yy},$$

e quindi

$$\Pi_{13/1} = \mathbf{t}_{1/1} \cdot \mathbf{e}_3 = f_{/11}, \quad \Pi_{23/2} = \mathbf{t}_{2/2} \cdot \mathbf{e}_3 = f_{/22}.$$

L'equazione differenziale di equilibrio della membrana assume pertanto la forma approssimata

$$-(f_{/11} + f_{/22}) = \frac{p}{N},$$

ed in termini vettoriali

$$-\Delta f = \frac{p}{N},$$

dove  $\Delta$  è l'operatore di LAPLACE.

Si assuma quindi che la membrana sia fortemente pretesa e fissata al contorno del dominio  $\Omega$  nel piano  $\{x, y\}$ .

Dall'equazione di equilibrio e dalle condizioni di vincolo si traggono allora le seguenti condizioni del tipo di POISSON-DIRICHLET che definiscono la configurazione di equilibrio della membrana per effetto di un carico trasversale che ne provoca una lieve inflessione

$$\begin{cases} -\Delta f = \frac{p}{N} & \text{in } \Omega, \\ f = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Questa formulazione approssimata è alla base dell'*analogia della membrana* formulata da PRANDTL<sup>91</sup> per il problema della torsione delle travi elastiche (vedi [34]).

## 11. LA PIASTRA DI REISSNER-MINDLIN

Una *piastra* è definita da un dominio limitato  $\Omega$  appartenente ad un piano  $\pi$ , detto piano medio della piastra, e da uno spessore costante  $h$ .

Sia  $\mathbf{k}$  è un versore ortogonale al piano  $\pi$ .

L'assunto cinematico del modello di REISSNER-MINDLIN è che

- la generica fibra trasversale di lunghezza  $h$  subisce un atto di moto rigido caratterizzato da
  - una velocità di traslazione trasversale  $v(\mathbf{x})$  pari a quella del suo punto medio  $\mathbf{x} \in \pi$  e da
  - un atto di rotazione rigida di tipo flessionale con vettore assiale  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \in \pi$ .

---

<sup>91</sup> LUDWIG PRANDTL (1875-1953). Nato in Bavaria fu professore prima ad Hannover e quindi a Göttingen dal 1904 al 1953. PRANDTL è stato il fondatore del centro di ricerche aerodinamiche (AVA) che attualmente è il DLR (*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt*) di Göttingen ed è considerato il padre dell'aerodinamica. A PRANDTL è dovuta la scoperta nel 1904 dello *strato limite* che si crea alla superficie di un solido che si muove in un fluido a bassa viscosità. TEODORE VON KÁRMÁN (1881-1963) fu uno dei molti scienziati suoi allievi. Le idee di PRANDTL hanno influenzato la moderna aerodinamica e la meccanica dei fluidi in molti campi tra cui la teoria delle ali, i flussi in fluidi comprimibili, i tunnel del vento e le tecniche sperimentali. Altri importanti contributi di PRANDTL hanno riguardato la meteorologia, l'aeroelasticità e la plasticità. È stato uno dei fondatori del *Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik* (GAMM).



Si ponga la seguente definizione:

L'atto di scorrimento  $\dot{\delta}(\mathbf{x})$  in punto  $\mathbf{x} \in \pi$  è il gradiente della velocità relativa trasversale delle fibre rispetto ad un osservatore solidale con la fibra di centro  $\mathbf{x} \in \pi$ .

atto di  
scorrimento

Per valutare l'espressione dello atto di scorrimento si osservi che la velocità trasversale relativa della generica fibra di centro  $\mathbf{y} \in \pi$ , rispetto ad un osservatore solidale con la fibra di centro  $\mathbf{x} \in \pi$ , è data da

$$v_{\text{REL}}(\mathbf{y}) \mathbf{k} = [v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})] \mathbf{k} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} \in \pi.$$

La velocità trasversale relativa è somma di due aliquote

- la velocità trasversale relativa  $[v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x})] \mathbf{k}$  della fibra di centro  $\mathbf{y} \in \pi$  rispetto alla fibra di centro  $\mathbf{x} \in \pi$ ,
- e la velocità di trascinamento  $-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times (\mathbf{y} - \mathbf{x})$ . dovuta al fatto che la fibra di centro  $\mathbf{x} \in \pi$ , ruotando con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ , vede ruotare attorno ad essa, e con velocità angolare  $-\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$ , la fibra di centro  $\mathbf{y} \in \pi$ .

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{k}$  si ottiene

$$v_{\text{REL}}(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot [\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \times \mathbf{k}] \quad \forall \mathbf{y} \in \pi.$$

I vettori  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x})$  appartengono entrambi al piano  $\pi$  e sussiste la formula

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{k} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \pi \iff -\mathbf{R}\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}, \quad \forall \boldsymbol{\omega} \in \pi,$$

con  $\mathbf{R}$  tensore emissimetrico bidimensionale che effettua una rotazione di  $\pi/2$  in senso levogiro rispetto a  $\mathbf{k}$ . Si può quindi riscrivere l'espressione della velocità relativa nella forma

$$v_{\text{REL}}(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y}) - v(\mathbf{x}) - (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y} \in \pi.$$

Ricordando che l'atto di scorrimento  $\dot{\delta}(\mathbf{x})$  è per definizione la derivata della velocità  $v_{\text{REL}}(\mathbf{y})$  valutata nel punto  $\mathbf{x}$  si ha che

$$\dot{\delta}(\mathbf{x}) = \text{grad } v_{\text{REL}}(\mathbf{x}) = \text{grad } v(\mathbf{x}) - \mathbf{R}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}).$$

Negli sviluppi successivi conviene far riferimento al vettore *atto di rotazione* definito da

$$\boldsymbol{\varphi} := \mathbf{R}\boldsymbol{\omega},$$

che si ottiene ruotando il vettore assiale  $\boldsymbol{\omega}$  di  $\pi/2$  nel piano  $\pi$  in senso levogiro rispetto a  $\mathbf{k}$ .

Si ha dunque che

$$\dot{\delta} = \text{grad } v - \varphi.$$

La rotazione della fibra di centro  $\mathbf{x}$  avviene nel piano che il vettore  $\varphi(\mathbf{x})$  forma col versore  $\mathbf{k}$  e nel verso che porta  $\varphi(\mathbf{x})$  su  $\mathbf{k}$  con una rotazione di  $\pi/2$ .

Sia allora  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  un riferimento ortonormale in  $\pi$  tale che il riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}\}$  risulti levogiro. Si denoteranno con  $\{x, y, z\}$  le coordinate cartesiane secondo gli assi del riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}\}$

La matrice associata ad  $\mathbf{R}$  è data da

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad [\mathbf{R}]^T = -[\mathbf{R}].$$

In termini di componenti si ha

$$\begin{vmatrix} \dot{\delta}_x \\ \dot{\delta}_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial v / \partial x \\ \partial v / \partial y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\omega_y \\ \omega_x \end{vmatrix}.$$

I cinematismi rigidi sono caratterizzati dalla proprietà che gli atti di rotazione delle fibre sono tutti eguali e che il cinematismo trasversale del piano medio  $\pi$  tenda a preservarne l'ortogonalità con le fibre. Tale proprietà è espressa dalle condizioni

$$\begin{cases} \text{grad } \varphi = \mathbf{o}, \\ \text{grad } v = \varphi \iff \dot{\delta} = \mathbf{o}. \end{cases}$$

La seconda condizione implica che il gradiente di  $\varphi$  sia dato da

$$\text{grad } \varphi = \text{grad grad } v,$$

e dunque che sia simmetrico.

La prima condizione può quindi essere sostituita da una meno restrittiva che impone l'annullarsi della sola parte simmetrica di  $\text{grad } \varphi$ . La condizione di rigidità assume quindi la forma

$$\begin{cases} \dot{\chi} = \text{sym grad } \varphi = \mathbf{o}, \\ \dot{\delta} = \text{grad } v - \varphi = \mathbf{o}. \end{cases}$$

Gli atti di moto rigido sono pertanto caratterizzati dall'annullarsi degli atti di curvatura e degli atti di scorrimento.

Il valore locale del campo tensoriale  $\dot{\chi}$  è il tensore simmetrico bidimensionale

$$\dot{\chi}(\mathbf{x}) = \text{sym grad } \varphi(\mathbf{x}),$$

che rappresenta la *curvatura tangente* o *atto di curvatura* nel punto  $\mathbf{x}$ .

In termini di componenti il tensore atto di curvatura tangente è rappresentato dalla matrice simmetrica

$$[\dot{\chi}(\mathbf{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

La relazione di compatibilità cinematica si può quindi scrivere in forma matriciale

$$\begin{vmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\chi} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{grad} & -\mathbf{I} \\ 0 & \text{sym grad} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} v \\ \varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{grad } v - \varphi \\ \text{sym grad } \varphi \end{vmatrix}.$$

Con riferimento alla teoria astratta dei modelli strutturali, la trattazione svolta mostra che nel modello di piastra di REISSNER-MINDLIN l'operatore cinematico  $\mathbf{B}$ , il cinematicismo  $\mathbf{u}$ , e la deformazione tangente  $\boldsymbol{\varepsilon}$  sono definiti da

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \text{grad} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \text{sym grad} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{vmatrix} v \\ \varphi \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{\chi} \end{vmatrix}.$$

■ L'operatore cinematico è un *operatore di KORN*.

Infatti dalla classica diseguaglianza di KORN bidimensionale

$$\| \text{sym grad } \varphi \|_0 + \| \varphi \|_1 \geq \alpha \| \varphi \|_1, \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega),$$

si trae che per ogni  $v \in H^1(\Omega)$  e  $\varphi \in H^1(\Omega)$  vale la diseguaglianza

$$\| \text{grad } v - \varphi \|_0 + \| \text{sym grad } \varphi \|_0 + \| v \|_0 + \| \varphi \|_0 \geq c \left[ \| v \|_1 + \| \varphi \|_1 \right],$$

che in forma astratta si scrive

$$\| \mathbf{B}\mathbf{u} \|_0 + \| \mathbf{u} \|_0 \geq c_{\mathbf{B}} \| \mathbf{u} \|_1, \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega),$$

con  $c_{\mathbf{B}} = c/\sqrt{2}$ .

### 11.1. Formula di Green

Gli sforzi  $\boldsymbol{\sigma}$  sono costituiti da una coppia di enti duali rispettivamente degli atti di curvatura  $\dot{\chi}$  e degli atti di scorrimento  $\dot{\delta}$ . Essi sono

- il campo tensoriale simmetrico  $\mathbf{M}$  degli *sforzi flettenti e torsionali*,
- il campo vettoriale  $\mathbf{T}$  degli *sforzi taglienti*.

- La potenza virtuale compiuta da un campo di sforzi  $\sigma = \{\mathbf{T}, \mathbf{M}\}$  per una deformazione tangente congruente

$$\varepsilon = \{\dot{\delta}, \dot{\chi}\} = \{\operatorname{grad} v - \varphi, \operatorname{sym} \operatorname{grad} \varphi\} = \mathbf{B} \mathbf{u},$$

ha l'espressione

$$\int_{\Omega} \mathbf{M} : \dot{\chi} + \mathbf{T} \cdot \dot{\delta} = \int_{\Omega} [\mathbf{M} : \operatorname{sym} \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} v - \varphi)].$$

Applicando la regola di derivazione del prodotto si ha, in termini di componenti,

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ij} \varphi_{i,j} = (\mathbf{M}_{ij} \varphi_i)_{,j} - \mathbf{M}_{ij,j} \varphi_i \\ \mathbf{T}_i v_{,i} = (\mathbf{T}_i v)_i - \mathbf{T}_{i,i} v, \end{cases}$$

e quindi, in virtù della simmetria di  $\mathbf{M}$ ,

$$\begin{cases} \mathbf{M} * \operatorname{sym} \operatorname{grad} \varphi = \operatorname{div}(\mathbf{M} \varphi) - (\operatorname{div} \mathbf{M}) \cdot \varphi, \\ \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} v = \operatorname{div}(\mathbf{T} v) - (\operatorname{div} \mathbf{T}) v. \end{cases}$$

Sostituendo nella espressione della potenza virtuale ed applicando il teorema della divergenza si perviene alla formula di GREEN

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\mathbf{M} : \operatorname{sym} \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} v - \varphi)] \mu_{\Omega} \\ &= - \int_{\Omega} [(\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{T}) \cdot \varphi + (\operatorname{div} \mathbf{T}) v + \operatorname{div}(\mathbf{M} \varphi + \mathbf{T} v)] \mu_{\Omega} \\ &= - \int_{\Omega} [(\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{T}) \cdot \varphi + (\operatorname{div} \mathbf{T}) v] \mu_{\Omega} + \int_{\partial\Omega} [\mathbf{M} \mathbf{n} \cdot \varphi + (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) v] \mu_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{n}$  è la normale uscente dal contorno di  $\Omega$ .

Dalla formula di GREEN si deduce che in una piastra di REISSNER-MINDLIN:

- lo spazio dei cinematismi GREEN-regolari è costituito dalle coppie  $\{v, \varphi\}$  con  $v \in H^1(\Omega)$  a pezzi  $\varphi \in H^1(\Omega)$  a pezzi,
- lo spazio degli sforzi GREEN-regolari è costituito dalle coppie  $\{\mathbf{T}, \mathbf{M}\} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  con  $\operatorname{div} \mathbf{T} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  a pezzi e  $\operatorname{div} \mathbf{M} \in \mathcal{L}^2(\Omega)$  a pezzi,

Le forze agenti sulla piastra sono

$p = -\operatorname{div} \mathbf{T}$	forze trasversali distribuite in $\Omega$ ,
$\mathbf{m} = -(\operatorname{div} \mathbf{M} + \mathbf{T})$	coppie distribuite in $\Omega$ ,
$F = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$	forze trasversali distribuite sul contorno $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ ,
$\mathfrak{M} = \mathbf{M}\mathbf{n}$	coppie distribuite sul contorno $\partial\mathcal{T}(\Omega)$ ,

con  $\mathcal{T}(\Omega)$  suddivisione di  $\Omega$ .

Gli operatori al contorno  $\Gamma$  e  $\mathbf{N}$  e le forze al contorno  $\mathbf{F}$  sono definiti in forma vettoriale da

$$\mathbf{u} = \begin{vmatrix} v \\ \varphi \end{vmatrix}; \quad \Gamma\mathbf{u} = \begin{vmatrix} \Gamma v \\ \Gamma\varphi \end{vmatrix}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \begin{vmatrix} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{M}\mathbf{n} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{vmatrix} F \\ \mathfrak{M} \end{vmatrix}.$$

L'operatore differenziale di equilibrio e le forze di massa sono infine definite da

$$\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \operatorname{div} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{I} & -\operatorname{div} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{M} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{vmatrix} p \\ \mathbf{m} \end{vmatrix}.$$

Si consideri il versore  $\mathbf{t}$  della tangente al contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  nel piano medio  $\pi$  della piastra definito da

$$\mathbf{t} = \mathbf{k} \times \mathbf{n} = \mathbf{R}\mathbf{n},$$

in modo che la terna  $\{\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  sia levogira. In termini di componenti si ha

$$\begin{vmatrix} \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_x \end{vmatrix}.$$

Le coppie  $\mathfrak{M}$  distribuite sul contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  possono allora decomporse nelle componenti flettenti e torcenti. La velocità di rotazione  $\omega$  delle fibre di contorno ha componenti flettenti e torcenti date da

$$\begin{aligned} \varphi_f &= -\omega \cdot \mathbf{t} = \varphi \cdot \mathbf{n} && \text{atto di rotazione flessionale} \\ \varphi_t &= \omega \cdot \mathbf{n} = \varphi \cdot \mathbf{t} && \text{atto di rotazione torsionale} \end{aligned}$$

e pertanto le corrispondenti componenti delle coppie distribuite sul contorno sono

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_f &= \mathfrak{M} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} && \text{coppie flettenti} \\ \mathfrak{M}_t &= \mathfrak{M} \cdot \mathbf{t} = \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} && \text{coppie torcenti} \end{aligned}$$

In termini di componenti, ponendo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x & \mathbf{M}_{xy} \\ \mathbf{M}_{yx} & \mathbf{M}_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{T}_x \\ \mathbf{T}_y \end{vmatrix},$$

risulta

$$\mathfrak{M}_f = \mathbf{M}_x \mathbf{n}_x^2 + 2\mathbf{M}_{xy} \mathbf{n}_x \mathbf{n}_y + \mathbf{M}_y \mathbf{n}_y^2,$$

$$\mathfrak{M}_t = (\mathbf{M}_y - \mathbf{M}_x) \mathbf{n}_x \mathbf{n}_x + \mathbf{M}_{xy} (\mathbf{n}_x^2 - \mathbf{n}_y^2),$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}_x \mathbf{n}_x + \mathbf{T}_y \mathbf{n}_y.$$

In particolare

- le componenti  $\mathbf{M}_x$  e  $\mathbf{M}_y$  rappresentano le coppie flettenti agenti sulle giaciture di normali  $\mathbf{e}_1$  ed  $\mathbf{e}_2$ ,
- la componente  $\mathbf{M}_{xy} = \mathbf{M}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{M}_{yx} = \mathbf{M}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1$  fornisce la coppia torcente agente sulla giacitura di normale  $\mathbf{e}_1$  e l'opposto della coppia torcente agente sulla giacitura di normale  $\mathbf{e}_2$ . Infatti le coppie torcenti sono definite da  $\mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{t}$  con  $\{\mathbf{k}, \mathbf{n}, \mathbf{t}\}$  levogira. Ora la terna  $\{\mathbf{k}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  è levogira mentre la terna  $\{\mathbf{k}, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$  è destrogira.

## 11.2. Dal tridimensionale al bidimensionale

Il modello della piastra di REISSNER-MINDLIN può essere anche dedotto da quello del continuo tridimensionale di CAUCHY mediante una approssimazione dei campi cinematici.

Per mostrarlo si denotino con  $\{x, y, z\}$  le coordinate cartesiane secondo gli assi del riferimento ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}\}$  e con  $\mathbf{r}$  il vettore posizione nel piano  $\pi$ .

Si assuma quindi che la cinematica del continuo sia definita dalle funzioni di forma  $v(\mathbf{r})$  e  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r})$  mediante il legame

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = v(\mathbf{r})\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) \times z\mathbf{k} = v(\mathbf{r})\mathbf{k} - z\mathbf{R}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})\mathbf{k} - z\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}).$$

Il gradiente del cinematismo  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, z)$  è fornito da

$$\text{grad } \mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = \begin{bmatrix} -z \text{ grad } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) & -\boldsymbol{\varphi} \\ (\text{grad } v)^T & 0 \end{bmatrix},$$

e pertanto il tensore della deformazione tangente ha l'espressione

$$\text{sym grad } \mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = \begin{bmatrix} -z \text{ sym grad } \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{r}) & \frac{1}{2} [\text{grad } v - \boldsymbol{\varphi}] \\ \frac{1}{2} [\text{grad } v - \boldsymbol{\varphi}]^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordando la definizione dell'*atto di scorrimento* e dell'*atto di curvatura* si può porre il tensore della deformazione tangente nella forma

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} -z \dot{\chi} & \frac{1}{2} \dot{\delta} \\ \frac{1}{2} \dot{\delta}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La corrispondente partizione del tensore dello stato di tensione fornisce l'espressione

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_\Omega & \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau}^T & \sigma_z \end{bmatrix},$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega$  è il tensore di ordine due delle tensioni nel piano medio  $\pi$  della piastra

$$\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix},$$

e  $\boldsymbol{\tau}$  è il vettore delle tensioni tangenziali trasversali

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}.$$

Esprimendo la potenza virtuale interna in termini dell'*atto di scorrimento* e dell'*atto di curvatura* si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} \, dz \, dv_\Omega &= \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ -z (\boldsymbol{\sigma}_\Omega : \dot{\chi}) + \boldsymbol{\tau} \cdot \dot{\delta} \right] \, dz \, dv_\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \left[ \mathbf{M} : \dot{\chi} + \mathbf{T} \cdot \dot{\delta} \right] \, dz \, dv_\Omega, \end{aligned}$$

dove le posizioni

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \boldsymbol{\sigma}_\Omega \, dz, \quad \mathbf{T} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\tau} \, dz,$$

forniscono le espressioni del tensore di sforzo flesso-torsionale  $\mathbf{M}$  e del vettore di taglio  $\mathbf{T}$  nella piastra in funzione dello stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega$  nel piano della piastra e delle tensioni tangenziali trasversali  $\boldsymbol{\tau}$ .

## 12. LA PIASTRA DI KIRCHHOFF

Il modello della piastra di KIRCHHOFF è fondato sull'assunto che le fibre trasversali siano solidali con il piano medio della piastra.

Il modello può quindi essere dedotto da quello della piastra di MINDLIN imponendo che l'atto di scorrimento  $\dot{\delta}$  tra le fibre trasversali sia nullo.

La cinematica del modello è dunque completamente definita dal campo di velocità trasversali dei punti del piano medio della piastra.

Infatti, imponendo che l'atto di scorrimento sia nullo si ottiene

$$\dot{\delta} = \mathbf{0} \Rightarrow \varphi = \text{grad } v.$$

Sostituendo nell'espressione del tensore atto di curvatura  $\dot{\chi}$  si ha quindi che

$$\dot{\chi} = \text{sym grad } \varphi = \text{sym grad grad } v = \text{grad grad } v,$$

in quanto la derivata seconda di  $v$  è simmetrica.

Gli atti di moto rigido sono pertanto costituiti dalle velocità trasversali che non tendono a far variare la curvatura del piano medio e sono caratterizzati dall'essere

$$\text{grad } v = \text{costante},$$



e dunque da diagrammi di velocità trasversale con andamento lineare.

Gli sforzi  $\sigma$ , duali degli atti di curvatura  $\dot{\chi}$ , sono costituite dal campo di tensori simmetrici  $M$  dei momenti nella piastra. Risulta dunque

$$\mathbf{u} = v; \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\chi}; \quad \sigma = M.$$

L'operatore cinematico è

$$\mathbf{B} = \text{grad grad} \in \mathbf{L} \left\{ H^2(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega) \right\}.$$

■ L'operatore cinematico è un *operatore di KORN*.

Infatti sussiste la disegualanza del tipo di POINCARÉ

$$\| \text{grad grad } v \|_0 + \| v \|_0 \geq \alpha \| v \|_2, \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

che è una immediata conseguenza della proposizione II.6.5 (p. 216) e del principio di selezione di RELLICH (vedi [33], proposizione VIII.1.2 (p. 123))



### 12.1. Formula di Green

Una duplice applicazione del teorema della divergenza fornisce l'espressione della formula di GREEN:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \mathbf{M} : \operatorname{grad} \operatorname{grad} v \boldsymbol{\mu}_{\Omega} \\
 &= \int_{\Omega} \operatorname{div} [\mathbf{M}(\operatorname{grad} v)] \boldsymbol{\mu}_{\Omega} - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{M} \cdot \operatorname{grad} v \boldsymbol{\mu}_{\Omega} = \\
 &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{M} \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} v \boldsymbol{\mu}_{\partial\Omega} - \int_{\partial\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) v \boldsymbol{\mu}_{\partial\Omega} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M}) v \boldsymbol{\mu}_{\Omega}
 \end{aligned}$$

Formula  
di  
GREEN

dove  $\mathbf{n}$  è il versore della normale uscente dal contorno  $\partial\Omega$ .

Il vettore  $\mathbf{T}_M := -\operatorname{div} \mathbf{M}$  è detto lo *sforzo di taglio* nella piastra.

In termini di componenti si ha

$$[\mathbf{T}_M] = \begin{vmatrix} (\mathbf{T}_M)_x \\ (\mathbf{T}_M)_y \end{vmatrix} = -\operatorname{div} \mathbf{M} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathbf{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{M}_y}{\partial y} \end{vmatrix},$$

ed inoltre

$$\operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \mathbf{M}_y}{\partial y^2}.$$

Le forze agenti sulla piastra sono dunque costituite da

$\mathfrak{M} = \mathbf{M} \mathbf{n}$	coppie distribuite sul contorno
$T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = -(\operatorname{div} \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n}$	forze taglienti sul contorno
$p = \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M}$	forze trasversali per unità di superficie

- La formula di GREEN, nella versione considerata, non consente di fornire una rappresentazione completa dei sistemi di forze agenti sulla piastra. Essa infatti permette solo di affermare che esistono forze trasversali per unità di superficie pari a  $p = \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M}$  ed azioni di contatto distribuite sul contorno di cui non è fornita una rappresentazione esplicita. Ciò è dovuto al fatto che i campi cinematici  $v$  e  $\operatorname{grad} v$  non sono indipendenti.

E' pertanto necessario modificare l'espressione della formula di GREEN come descritto nella prossima sezione.

## 12.2. Forma canonica delle condizioni al contorno

Lungo ogni tratto regolare  $\partial\mathcal{T}(\Omega)_\alpha$ ;  $\alpha = 1, \dots, n$  del contorno  $\partial\mathcal{T}(\Omega)$  si possono decomporre le coppie  $\mathfrak{M}$  e gli atti di rotazione delle fibre  $\varphi = \mathbf{R}\omega = \operatorname{grad} v$  nelle componenti flettenti e torcenti

$$\mathfrak{M}_f = \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} \quad \text{coppie flettenti ,}$$

$$\mathfrak{M}_t = \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} \quad \text{coppie torcenti ,}$$

$$\varphi_f = -\omega \cdot \mathbf{t} = \varphi \cdot \mathbf{n} = (\operatorname{grad} v) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial n} \quad \text{atto di rotazione flessionale ,}$$

$$\varphi_t = \omega \cdot \mathbf{n} = \varphi \cdot \mathbf{t} = (\operatorname{grad} v) \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{atto di rotazione torsionale ,}$$

dove  $s$  denota l'ascissa curvilinea lungo il contorno e  $\mathbf{t}$  il versore tangente al contorno.

La potenza virtuale delle forze si scriverà allora

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathfrak{M}_f \frac{\partial v}{\partial n} d\mu_{\partial\Omega} + \sum_{\alpha} \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)_\alpha} \mathfrak{M}_t \frac{\partial v}{\partial s} \mu_{\partial\Omega} + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} T v da + \int_{\Omega} p v \mu_{\Omega} .$$

Integrando per parti il secondo integrale in corrispondenza di ogni tratto regolare del contorno si ottiene

$$\int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)_\alpha} \mathfrak{M}_t \frac{\partial v}{\partial s} da = \sum_{i=1}^2 [\mathfrak{M}_{ti} v_i n_i]_\alpha - \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)_\alpha} \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial s} v da ,$$

dove il pedice  $i = 1, 2$  denota l'estremo iniziale e finale del tratto e si è posto  $n_1 = -1$  e  $n_2 = 1$ . La formula di GREEN assume dunque la forma

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{M} : \operatorname{grad} \operatorname{grad} v \mu_{\Omega} = \\ & = \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathfrak{M}_f \frac{\partial v}{\partial n} \mu_{\partial\Omega} + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} (T - \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial s}) v \mu_{\partial\Omega} + \sum_k [[\mathfrak{M}_t]]_k v_k + \int_{\Omega} p v \mu_{\Omega} \end{aligned}$$

dove l'indice  $k$  varia nell'insieme dei punti angolosi del contorno e  $[[\mathfrak{M}_t]]_k$  è la discontinuità del momento torcente in tali punti.

In conclusione si è stabilito che nel modello flessionale di KIRCHHOFF le forze agenti sulla piastra sono costituite da

- forze trasversali  $p = \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M}$  distribuite sul piano medio,
- coppie flettenti  $\mathfrak{M}_f = \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$  distribuite sul contorno,
- forze taglienti  $F$ , distribuite sui tratti regolari di contorno, date da

$$F := T - \frac{\partial \mathfrak{M}_t}{\partial s} \quad \text{con} \quad T = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathfrak{M}_t = \mathbf{M}\mathbf{n} \cdot \mathbf{t},$$

- forze taglienti  $\mu \mathfrak{M}_t$  concentrate nei punti angolosi del contorno.

Gli operatori al contorno  $\Gamma$  e  $\mathbf{N}$  sono definiti da

$$\Gamma \mathbf{u} = \Gamma v; \quad \mathbf{N}\sigma = \mathbf{M}\mathbf{n}.$$

Le forze di massa sono  $\mathbf{b} = p$ , e l'operatore differenziale di equilibrio è definito da

$$\boxed{\mathbf{B}'_o \sigma = \operatorname{div} \operatorname{div} \mathbf{M} \in L\{\mathcal{S}(\Omega); \mathcal{L}^2(\Omega)\}}.$$

### 12.3. Dal tridimensionale al bidimensionale

Il modello della piastra di KIRCHHOFF può essere dedotto, in modo analogo a quanto visto per la piastra di REISSNER-MINDLIN, da quello del continuo tridimensionale di CAUCHY mediante una approssimazione cinematica.

Si assuma che la cinematica del continuo sia definita dalle funzioni di forma  $v(\mathbf{r})$  e  $\omega(\mathbf{r})$  mediante il legame

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = v(\mathbf{r})\mathbf{k} + \omega(\mathbf{r}) \times z\mathbf{k} = v(\mathbf{r})\mathbf{k} - z\mathbf{R}\omega(\mathbf{r}) = v(\mathbf{r})\mathbf{k} - z\varphi(\mathbf{r}),$$

dove si è posto

$$\varphi = \operatorname{grad} v.$$

Il gradiente del cinematismo  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, z)$  è fornito da

$$\operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = \begin{bmatrix} -z & \operatorname{grad} \operatorname{grad} v & -\operatorname{grad} v \\ (\operatorname{grad} v)^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Pertanto il tensore dell'atto di deformazione ha l'espressione

$$\text{sym grad } \mathbf{u}(\mathbf{r}, z) = \begin{bmatrix} -z & \text{grad grad } v & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & & 0 \end{bmatrix}.$$

Ricordando la definizione dell'*atto di curvatura* si può porre il tensore della deformazione tangente nella forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -z & \dot{\chi} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o}^T & & 0 \end{bmatrix}.$$

La corrispondente partizione del tensore dello stato di tensione fornisce l'espressione

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_\Omega & \boldsymbol{\tau} \\ \boldsymbol{\tau}^T & \sigma_z \end{bmatrix},$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega$  è il tensore di ordine due delle tensioni nel piano medio  $\pi$  della piastra

$$\boldsymbol{\sigma}_\Omega = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix},$$



e  $\boldsymbol{\tau}$  è il vettore delle tensioni tangenziali trasversali

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{vmatrix}.$$

Esprimendo la potenza virtuale interna in termini del parametro cinematico *atto di curvatura* si ottiene

$$\int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \, dz \, \boldsymbol{\mu}_\Omega = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} -z (\boldsymbol{\sigma}_\Omega : \dot{\chi}) \, dz \, \boldsymbol{\mu}_\Omega = \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{M} : \dot{\chi} \, dz \, \boldsymbol{\mu}_\Omega,$$

dove la posizione

$$\mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} -z \, \boldsymbol{\sigma}_\Omega \, dz,$$

fornisce l'espressione del tensore di sforzo flesso-torsionale  $\mathbf{M}$  in funzione dello stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma}_\Omega$  nel piano medio della piastra.



### 13. CONTINUI CON STRUTTURA

Un modello generale di continuo con struttura può essere ideato assumendo che la geometria del continuo possa essere descritta da una varietà fibrata. Definizioni e proprietà di tali oggetti geometrici e nozioni ad essi connesse possono essere trovati in testi di geometria differenziale (vedasi ad es. ABRAHAM et al. [27]).

#### 13.1. Varietà fibrate

L'idea intuitiva di *varietà fibrata* è quella di una varietà differenziabile, detta *varietà di base*, ad ogni punto della quale è attaccata un'altra varietà differenziabile detta *fibra*.

Deve quindi essere possibile stabilire per ogni fibra quale sia il punto alla quale essa è attaccata. Tale individuazione viene realizzata mediante una mappa che si dice la *proiezione* della varietà fibrata sulla varietà di base.

La definizione formale è pertanto la seguente.

- Una varietà fibrata avente quale fibra tipica una varietà  $\mathbb{F}$  è una mappa detta la *proiezione*

$$\pi : \mathbb{M} \mapsto \mathcal{S}$$

surrettiva e di classe  $C^k$  tra due varietà  $\mathbb{M}$  and  $\mathcal{S}$  di classe  $C^k$  dette rispettivamente *varietà totale* e *varietà di base*.

La mappa  $\pi : \mathbb{M} \mapsto \mathcal{S}$  è localmente un prodotto. Ciò significa che la varietà  $\mathcal{S}$  ammette un *atlante*  $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$  tale che:

- per ogni  $\alpha \in \mathcal{A}$  esiste un  $C^k$  diffeomorfismo  $\mu \in C^k(\pi^{-1}(U_\alpha), U_\alpha \times \mathbb{F})$  tale che  $\pi = p \circ \mu$ , dove  $p : U_\alpha \times \mathbb{F} \mapsto U_\alpha$  è la proiezione canonica

La controimmagine tramite  $\pi$  di un punto  $p \in \mathcal{S}$  della varietà base è una varietà chiusa  $\pi^{-1}(p) = M_p \subset \mathbb{M}$  detta la *fibra* in  $p$ .

Si dia ora le definizioni di spazio fisico o spazio ambiente e di struttura adatte allo sviluppo della teoria dei *continui con struttura*.

Si adotta il punto di vista proposto da M. EPSTEIN and R. SEGEV in [24] e riportato in [26], cap. 2, box 4.2.

L'operazione di compatibilità definita in [24] è però generalizzata tramite l'adozione di una misura di deformazione. Tale estensione consente di adeguare la trattazione al contesto più generale qui considerato (si veda anche [31]).

- Lo *spazio fisico* e la *struttura* sono varietà fibrate di dimensione finita

$$\pi_{\mathbb{S}} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}, \quad \pi_{\mathcal{B}} : \mathbb{B} \mapsto \mathcal{B},$$

con fibra tipica  $\mathbb{F}$ . La varietà di base  $\mathbb{S}$  dello spazio fisico è lo spazio euclideo e la varietà di base  $\mathcal{B}$  della struttura è una immersione differenziale in  $\mathbb{S}$  [28].

- La *configurazione materiale* di un *continuo micromorfo* è una *sezione* della varietà fibrata  $\pi_B : \mathbb{B} \mapsto \mathcal{B}$ , e cioè una mappa regolare  $s_B : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{B}$  tale che  $\pi_B \circ s_B =$  identità.
- Un *posizionamento* della struttura è una mappa  $\chi : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{S}$ , che conserva le fibre, e cioè tale che

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{B}, \quad \pi_B(\mathbf{e}_1) = \pi_B(\mathbf{e}_2) \Rightarrow (\pi_S \circ \chi)(\mathbf{e}_1) = (\pi_S \circ \chi)(\mathbf{e}_2).$$

La *mappa di base*  $\chi_B : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  associata alla mappa  $\chi : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{M}_S$  è definita dalla legge di composizione  $\chi_B \circ \pi_B = \pi_S \circ \chi$ .

- Una *configurazione spaziale* della struttura è una *sezione* della varietà fibrata  $\chi(\mathbb{B})$ .
- Lo *spazio delle configurazioni* di un continuo micromorfo è l'insieme  $C^k(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  delle mappe differenziabili con continuità  $\chi : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{M}_S$  di ordine  $k \geq 1$ .

Lo spazio delle configurazioni è una varietà differenziabile modellata su uno spazio di BANACH. In corrispondenza di una configurazione  $\chi \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  lo *spazio tangente* è dato da

$$\mathbb{T}_\chi C^k(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S) = \{\mathbf{v} \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}_S}) : \pi_S \circ \mathbf{v} = \chi\},$$

dove  $\pi_S : \mathbb{T}_{\mathbb{M}_S} \mapsto \mathbb{M}_S$  è il proiettore.



### 13.2. Configurazioni e spostamenti virtuali

Una configurazione è *ammissibile* se la mappa  $\chi \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  è un'inclusione differenziabile. Ciò significa che (vedasi [27], 3.5.6 e 3.5.9):

- la mappa tangente  $(T\chi)(\mathbf{p}) \in L\{\mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathbb{B}; \mathbb{T}_{\chi(\mathbf{p})}\mathbb{M}_S\}$  è iniettiva per ogni  $\mathbf{p} \in \mathbb{M}$  ed ha immagine chiusa nello spazio  $\mathbb{T}_{\chi(\mathbf{p})}\mathbb{M}_S$  nel punto  $\chi(\mathbf{p}) \in \chi(\mathbb{B})$ ,
- la mappa  $\chi \in C^k(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  è un diffeomorfismo sull'immagine  $\chi(\mathbb{B})$  che è una sottovarietà di  $\mathbb{M}_S$ .

In forza del teorema sulle funzioni implicite si ha che

- L'insieme delle *configurazioni ammissibili*  $\mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  è una sottovarietà aperta di  $C^k(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$ .

Si dicono allora

- *spostamenti tangentici* (o *spostamenti virtuali*) gli elementi dello spazio tangente nel punto  $\chi \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$ , definito da

$$\mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S) = \{\mathbf{v}_B \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}_S}) : \pi_S \circ \mathbf{v}_B = \chi\}.$$

Gli spostamenti virtuali  $\mathbf{v}_B \in \mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  sono dunque campi definiti sulla struttura  $\mathbb{B}$  ed a valori nel fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}_S}$  dello spazio fisico  $\mathbb{M}_S$ .



Un *moto* della struttura nell’intervallo temporale  $I = [t_{in}, t_{fin}]$  è una famiglia ad un parametro di configurazioni

$$\chi : I \mapsto \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_{\mathbb{S}}).$$

La configurazione al tempo  $t \in I$  della struttura nel moto  $\chi$  è denotata da  $\chi(t)$ .

La *traiettoria* della struttura nel moto  $\chi$  è l’insieme

$$\mathcal{F}_{\chi}(\mathbb{B}) := \{\{\mathbf{x}, t\} : \mathbf{x} \in \chi(\mathbb{B}, t), t \in I\}.$$

La descrizione spaziale di un campo di spostamenti virtuali si ottiene considerando un piazzamento  $\chi_t(\mathbb{B})$  della struttura e la funzione composta

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{B}} \circ \chi_t^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}_{\mathbb{S}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}_{\mathbb{S}}}),$$

con  $\mathbf{v}_{\mathcal{B}} \in \mathbb{T}_{\chi} \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_{\mathbb{S}})$  e  $\pi_{\mathbb{S}} \circ \mathbf{v} = \mathbf{I}$ .

Il campo spaziale  $\mathbf{v}$  è pertanto una *sezione* della varietà fibrata  $\mathbb{M}_{\mathbb{S}}$ .

- Il *flusso* della struttura nel moto  $\chi : I \mapsto \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_{\mathbb{S}})$  è la mappa

$$\varphi : I \times I \mapsto \mathcal{A}(\mathbb{M}_{\mathbb{S}}, \mathbb{M}_{\mathbb{S}})$$

definita da

$$\varphi_{t,s}(\chi(\mathbf{m}, s)) := \chi(\mathbf{m}, t), \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbb{B}.$$

**Osservazione 13.1.** Un continuo di CAUCHY è un insieme di particelle puntiformi dotato della struttura geometrica di una varietà differenziabile di dimensione finita.

Pertanto la varietà di base  $\mathcal{B}$  di un continuo con microstruttura  $\mathbb{M}$  può essere considerata come la varietà che definisce la geometria del continuo di CAUCHY soggiacente al continuo con microstruttura  $\mathbb{M}$ .

D’altro canto un continuo di CAUCHY può essere visto come un continuo con microstruttura con fibra tipica lineare di dimensione nulla.

Si ricordi però che alla varietà base  $\mathcal{B}$  è comunque associato il fibrato tangente  $\pi : \mathbb{T}\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$  che è un fibrato vettoriale le cui fibre  $\pi^{-1}(\mathbf{p})$  sono gli *spazi tangent*  $\mathbb{T}_{\mathbf{p}}\mathcal{B}$  a  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ . La dimensione della varietà  $\mathcal{B}$  è quella degli spazi tangent. ■

### 13.3. Continui micromorfi e micropolari

Un *continuo micromorfo* è un continuo con microstruttura in cui ogni particella può subire una deformazione omogenea.

La descrizione geometrica è pertanto fornita da una varietà fibrata la cui fibra tipica è la varietà delle mappe lineari non singolari  $L^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  sullo spazio lineare  $\mathbf{V}$ , delle traslazioni nello spazio euclideo ambiente  $\mathbb{S}$ .

Si pone pertanto la seguente definizione.

- Un *continuo micromorfo* è una *varietà fibrata* con fibra tipica  $\mathbb{F}$  costituita dalla varietà che ha per sostegno il gruppo  $L^+(V; V)$  dei tensori del secondo ordine non singolari. La non linearità della fibra tipica è dovuta alla condizione di volume positivo imposta alla deformazione al microlivello
- Un *continuo micropolare* si ottiene assumendo che la fibra tipica  $\mathbb{F}$  sia la varietà che ha per sostegno il gruppo  $Orth^+(V; V)$  delle rotazioni.

In un *continuo micromorfo* la deformazione omogenea dello spazio vettoriale  $V(\mathbf{p})$  dei direttori in corrispondenza delle particelle  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  descrive i cambiamenti al livello microscopico.

Queste modifiche non sono correlate a quelle che subiscono le fibre tangenti per effetto della macrodeformazione della struttura vista come insieme di particelle.

Altre tipologie particolari di continui con microstruttura si ottengono assumendo peculiari prerogative della deformazione omogenea al microlivello.

E' possibile ad esempio assumere che le microdeformazioni consistano in semplici omotetie, che producono solo variazioni di volume, ovvero che le microdeformazioni consistano nel prodotto di una rotazione e di un'omotetia.

#### 13.4. Misure di deformazione

- La misura di deformazione per un continuo *micromorfo* è definita da

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{Q}^T d\mathbf{Q}, & \text{microcurvatura,} \\ \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{k} - \mathbf{I}, & \text{divario della deformazione,} \\ 1/2(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), & \text{microdistorsione alla GREEN.} \end{cases}}$$

in cui  $\mathbf{k} : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$  è la mappa di trasferimento. Il tensore  $\mathbf{Q}^T d\mathbf{Q}$  è emisimmetrico in quanto

$$\mathbf{O} = d\mathbf{I} = d(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T (d\mathbf{Q}) + (d\mathbf{Q}^T) \mathbf{Q},$$

e pertanto può essere sostituito dal vettore assiale  $\boldsymbol{\Omega}$  definito da

$$\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{h}] := \text{axial}(\mathbf{Q}^T d\mathbf{Q}[\mathbf{h}]), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}.$$

In un *continuo micromorfo* così definito la misura di deformazione involve i campi tensoriali  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{k}, \mathbf{F}^T \mathbf{F}$  cui corrispondono  $3+9+9 = 21$  campi scalari componenti.

Una configurazione di un continuo micromorfo, che è una sezione di una varietà fibrata, è individuata da un campo di coppie  $\{\mathbf{k}, \mathbf{F}\}$ . Ne segue che le configurazioni sono varietà di dimensione  $3 + 9 = 12$ .

In un processo evolutivo caratterizzato dal flusso  $\mathbf{k}_t(\mathbf{x}, \tau)$  si ponga

- $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{k}}_t$  campo di macrovelocità,
- $\mathbf{L} := \dot{\mathbf{F}}_t$  campo di microdeformazione tangente,

La corrispondente misura di deformazione tangente è allora data da

$$\boxed{\begin{cases} d\mathbf{w}, & \text{microcurvatura tangente,} \\ d\mathbf{v} - \mathbf{L}, & \text{divario della deformazione tangente,} \\ \mathbf{D}, & \text{microdistorsione tangente.} \end{cases}}$$

dove  $\mathbf{w} = \text{axial } \mathbf{W} = \text{emi } \mathbf{L}$  e  $\mathbf{D} = \text{sym } \mathbf{L}$ . Il numero di campi scalari componenti è allora  $3 + 9 + 9 = 21$ .

■ La misura di deformazione per un continuo *micropolare* è definita da

$$\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{\Omega}, & \text{microcurvatura,} \\ \mathbf{Q}^T d\mathbf{k} - \mathbf{I}, & \text{divario della deformazione.} \end{cases}}$$

con

$$\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{h}] := \text{axial}(\mathbf{Q}^T d\mathbf{Q}[\mathbf{h}]), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}.$$

La misura di deformazione involve i campi tensoriali  $\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}^T d\mathbf{k}$  cui corrispondono  $3 + 9 = 12$  campi scalari componenti.

Una configurazione di un continuo micropolare, che è una sezione di una varietà fibrata, è individuata da un campo di coppie  $\{\mathbf{k}, \mathbf{Q}\}$ . Ne segue che le configurazioni sono varietà di dimensione  $3 + 3 = 6$ .

La misura di deformazione tangente per un continuo micropolare è

$$\boxed{\begin{cases} d\mathbf{w}, & \text{microcurvatura tangente,} \\ d\mathbf{v} - \text{anti } \mathbf{w}, & \text{divario della deformazione tangente,} \end{cases}}$$

dove  $\mathbf{w} = \text{axial } \mathbf{W}$  e  $\text{anti} = \text{axial}^{-1}$ .

Il numero di campi scalari componenti è quindi  $3 + 3 = 6$ .

### 13.5. Operatori cinematici

■ In un *continuo micromorfo* ai campi cinematici  $\{\mathbf{v}, \mathbf{L}\}$  corrispondono  $3 + 9 = 12$  campi scalari componenti. L'operatore cinematico ha la forma matriciale

$$\boxed{\mathbf{B}\{\mathbf{v}, \mathbf{L}\} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & d \text{ axial emi} \\ d & -\mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \text{sym} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d(\text{axial emi } \mathbf{L}) \\ d\mathbf{v} - \mathbf{L} \\ \text{sym } \mathbf{L} \end{vmatrix}.}$$

La misura di deformazione tangente involve  $9 + 9 + 6 = 24$  parametri scalari.

- Nel *continuo micropolare* dei COSSERAT risulta  $\mathbf{L} = \text{emi } \mathbf{L} = \mathbf{W}$ . Dunque, ponendo  $\mathbf{w} = \text{axial } \mathbf{W}$ , ( $\mathbf{W} = \text{anti } \mathbf{w}$ ), i campi cinematici  $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  sono rappresentati da  $3 + 3 = 6$  componenti scalari. L'operatore cinematico ha quindi la forma matriciale

$$\boxed{\mathbf{B}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & d \\ d & -\text{anti} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d\mathbf{w} \\ d\mathbf{v} - \text{anti } \mathbf{w} \end{vmatrix}.}$$

La misura di deformazione tangente involve  $9 + 9 = 18$  parametri scalari.

### 13.6. Equilibrio

Si consideri

- una configurazione ammissibile  $\chi \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$ ,
- il proiettore  $\pi_S : \mathbb{T}_{MS} \mapsto \mathbb{M}_S$ .

Un campo di spostamenti virtuali nella configurazione  $\chi \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  è un elemento dello spazio

$$\mathbb{T}_\chi \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S) = \{\mathbf{v}_B \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{T}_{MS}) : \pi_S \circ \mathbf{v}_B = \chi\}.$$

La descrizione spaziale  $\mathbf{v}$  dello spostamento virtuale materiale  $\mathbf{v}_B$  è

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_B \circ \chi^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}_\Omega, \mathbb{T}_{MS}), \quad \mathbb{M}_\Omega = \chi(\mathbb{B}).$$

Il campo  $\mathbf{v}$  è detto un *cinematismo*.

I sistemi di forze materiali appartengono allo spazio cotangente

$$\mathbb{T}_\chi^* \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S) = \{\mathbf{f}_B \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{T}_{MS}^*) : \pi_S^* \circ \mathbf{f}_B = \chi\},$$

dove  $\pi_S^* : \mathbb{T}_{MS}^* \mapsto \mathbb{M}_S$ .

Il corrispondente sistema spaziale di forze è

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_B \circ \chi^{-1} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}_\Omega, \mathbb{T}_{MS}^*), \quad \mathbb{M}_\Omega = \chi(\mathbb{B}).$$

Un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}_\Omega, \mathbb{T}_{MS}^*)$  è in equilibrio sulla struttura nella configurazione  $\chi \in \mathcal{A}(\mathbb{B}, \mathbb{M}_S)$  se il lavoro virtuale  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle$  si annulla per ogni cinematismo rigido  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}_\Omega, \mathbb{T}_{MS}) \cap \text{Ker } \mathbf{B}$ .

- In un *continuo micromorfo* uno spostamento virtuale è rappresentato da una coppia di campi  $\mathbf{u} = \{\mathbf{v}, \mathbf{L}\} \in H^1(\Omega)$  di quadrato integrabile su  $\Omega$  insieme alle derivate prime.

Un campo di sforzi  $\boldsymbol{\sigma} = \{\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{s}\} \in \mathcal{H}(\Omega)$  di quadrato integrabile su  $\Omega$  è in equilibrio con un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{A}(\mathbb{M}_\Omega, \mathbb{T}_{\text{MS}}^*)$  se sussiste l'identità dei lavori virtuali

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \{\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{s}\}, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle = \int_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d(\text{axial emi } \mathbf{L}) \\ d\mathbf{v} - \mathbf{L} \\ \text{sym } \mathbf{L} \end{vmatrix} \, dv .$$

- $\mathbf{m} \in L\{V; V\}$  è lo *sforzo di coppia* (tensore non simmetrico (0,2)),
- $\boldsymbol{\tau} \in L\{V; V\}$  è lo *sforzo* (tensore non simmetrico (0,2)),
- $\mathbf{s} \in \text{Sym}\{V; V\}$  è il *microsforzo* (tensore simmetrico (0,2)).

Nei problemi di valori al contorno, assumendo che lo sforzo sia GREEN-regolare, è possibile applicare la formula di GREEN

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle = (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) + \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u} \rangle ,$$

per ottenere le equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\{\mathbf{v}, \mathbf{L}\} \rangle &= \int_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d(\text{axial emi } \mathbf{L}) \\ d\mathbf{v} - \mathbf{L} \\ \text{sym } \mathbf{L} \end{vmatrix} \, dv = \\ &- \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{m}) \cdot (\text{axial emi } \mathbf{L}) \, dv - \int_{\Omega} (\text{div } \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} \, dv - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{L} \, dv + \\ &+ \int_{\Omega} \mathbf{s} : (\text{sym } \mathbf{L}) \, dv + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{m} \mathbf{n}) \cdot (\text{axial emi } \mathbf{L}) \, da + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, da . \end{aligned}$$

- L'operatore di equilibrio di massa  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}, H\}$  è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \mathbf{O} & -\text{div} & \mathbf{O} \\ -1/2 \text{ anti div} & -\mathbf{I} & \text{sym} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \\ &\begin{vmatrix} -\text{div } \boldsymbol{\tau} \\ -1/2 \text{ anti div } \mathbf{m} - \boldsymbol{\tau} + \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_v \\ \mathbf{b}_L \end{vmatrix} , \end{aligned}$$

dove per definizione  $\text{anti} = \text{axial}^{-1}$ .

La forza di massa è  $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_v, \mathbf{b}_L\} \in H(\Omega)$ .

- L'operatore di equilibrio al contorno  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}, \partial\mathcal{F}\}$  è espresso da

$$\boxed{\mathbf{N} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & [\cdot] \mathbf{n} & \mathbf{O} \\ [\cdot] \mathbf{n} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_v \\ \mathbf{t}_L \end{vmatrix}.}$$

Il sistema di forze di contatto è definito da  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_v, \mathbf{t}_L\} \in \partial\mathcal{F}$ .

- L'operatore dei valori al contorno  $\mathbf{T} \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  è espresso da

$$\boxed{\mathbf{T} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \text{axial emi} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \text{axial emi } \mathbf{L} \end{vmatrix}.}$$

- Nel *continuo micropolare* uno spostamento virtuale è  $\mathbf{u} = \{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$  e la misura dello stato di sforzo, duale di quella di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{d\mathbf{w}, d\mathbf{v} - \text{anti}(\mathbf{w})\} \in \mathcal{H}$ , è  $\boldsymbol{\sigma} = \{\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}\} \in \mathcal{H}$  e l'identità dei lavori virtuali è

$$\boxed{\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \{\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}\}, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle = \int_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d\mathbf{w} \\ d\mathbf{v} - \text{anti}(\mathbf{w}) \end{vmatrix} dv.}$$

dove

- $\mathbf{m} \in L(V, V)$  è lo *sforzo di coppia* (tenso non simmetrico (0,2)),
- $\boldsymbol{\tau} \in L\{V, V\}$  è lo *sforzo* (tenso non simmetrico (0,2)),

La formula di GREEN fornisce la relazione

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\} \rangle &= \int_{\Omega} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d\mathbf{w} \\ d\mathbf{v} - \text{anti}(\mathbf{w}) \end{vmatrix} dv = \\ &= - \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{m} \cdot \mathbf{w} dv - \int_{\Omega} \text{div } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} dv - \int_{\Omega} 2 \text{ axial emi } \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{w} dv + \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{m} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{w} dv + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\tau} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dv. \end{aligned}$$



- L'operatore di equilibrio di massa  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}, H\}$  è dato da

$$\boxed{\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & -\text{div} \\ -\text{div} & -2 \text{ axial emi} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\text{div} \boldsymbol{\tau} \\ -\text{div} \mathbf{m} - 2 \text{ axial emi} \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_v \\ \mathbf{b}_w \end{vmatrix}.}$$

La forza di massa è definita da  $\mathbf{b} = \{\mathbf{b}_v, \mathbf{b}_w\} \in H$ , dove  $\mathbf{b}_v$  e  $\mathbf{b}_w$  sono campi vettoriali.

- L'equilibrio al contorno è espresso da

$$\boxed{\mathbf{N} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & [\cdot] \mathbf{n} \\ [\cdot] \mathbf{n} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\tau} \mathbf{n} \\ \mathbf{m} \mathbf{n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_v \\ \mathbf{t}_w \end{vmatrix}.}$$

Il sistema di forze di contatto è definito da  $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}_v, \mathbf{t}_w\} \in \partial\mathcal{F}$  dove  $\mathbf{t}_v$  e  $\mathbf{t}_w$  sono campi vettoriali.

- L'operatore dei valori al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}, \partial\mathcal{V}\}$  è la restrizione al contorno, espressa da

$$\boxed{\Gamma \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix}.}$$

**Osservazione 13.2.** Si consideri la misura di defomazione finita proposta da ERINGEN e KAFADAR in [22]

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{F}^T d\mathbf{F}, & \text{gradiente della microdeformazione,} \\ \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{k} - \mathbf{I}, & \text{divario della deformazione,} \\ 1/2(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}), & \text{microdistorsione alla GREEN.} \end{cases}}$$

L'espressione della corrispondente deformazione tangente è

$$\boxed{\begin{cases} d\mathbf{L}, & \text{gradiente della microdeformazione tangente,} \\ d\mathbf{v} - \mathbf{L}, & \text{divario della deformazione tangente,} \\ \mathbf{D}, & \text{micro deformazione tangente,} \end{cases}}$$

con  $27 + 9 + 6 = 42$  parametri scalari coinvolti, contro i  $3 + 9 + 9 = 21$  campi scalari componenti la deformazione tangente definita all'inizio della sezione 8.4 (p. 448). ■

**Osservazione 13.3.** La misura di deformazione tangente proposta da MINDLIN in [15] può essere dedotta dalla misura di deformazione finita adottata da SUHUBI e ERINGEN in [17]

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{F}, & \text{gradiente della microdeformazione,} \\ \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{k} - \mathbf{I}, & \text{divario della deformazione,} \\ 1/2 [(d\mathbf{k})^T d\mathbf{k} - \mathbf{I}], & \text{microdistorsione alla GREEN.} \end{cases}$$

Questa misura di deformazione finita è ridondante. Infatti il teorema I.4.2 (p. 37) afferma che se  $(d\mathbf{k})^T d\mathbf{k} = \mathbf{I}$  allora il campo tensoriale  $d\mathbf{k}$  è costante. Dunque se la microdistorsione alla GREEN ed divario della deformazione sono nulli, dalla condizione  $\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{k} = \mathbf{I}$  segue che, essendo  $d\mathbf{k}$  costante, il campo tensoriale  $\mathbf{F}$  è anch'esso costante. Pertanto  $d\mathbf{F} = \mathbf{O}$  e la condizione  $\mathbf{F}^{-1}d\mathbf{F} = \mathbf{O}$  è ridondante.

La misura di deformazione tangente proposta da MINDLIN in [15] è

$$\begin{cases} d\mathbf{L}, & \text{gradiente della microdeformazione tangente,} \\ d\mathbf{v} - \mathbf{L}, & \text{divario della deformazione tangente,} \\ \text{sym } d\mathbf{v}, & \text{macro deformazione tangente,} \end{cases}$$

e corrisponde alla misura di deformazione finita proposta da SUHUBI ed ERINGEN.

Anche la misura di deformazione tangente di MINDLIN è dunque ridondante. Una dimostrazione diretta della ridondanza si conduce osservando che, in forza del teorema cinematico I.9.9 (p. 84), la condizione  $\text{sym } d\mathbf{v} = \mathbf{O}$  implica che  $d\mathbf{v}$  è costante ed emisimmetrica. La condizione  $d\mathbf{v} - \mathbf{L} = \mathbf{O}$  implica allora che il campo tensoriale  $\mathbf{L}$  è costante ed emisimmetrico. Pertanto la condizione  $d\mathbf{L} = \mathbf{O}$  è ridondante.

Si osservi infine che se la misura di deformazione tangente per continui micromorfi proposta da MINDLIN in [15] è depurata del termine ridondante  $d\mathbf{L}$ , si perviene alla seguente definizione dell'operatore cinematico

$$\boxed{\mathbf{B}\{\mathbf{v}, \mathbf{L}\} = \begin{bmatrix} d & -\mathbf{I} \\ \text{sym } d & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{L} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d\mathbf{v} - \mathbf{L} \\ \text{sym } d\mathbf{v} \end{vmatrix}.}$$

Applicando la formula di GREEN si ha

$$\begin{aligned} (\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\{\mathbf{v}, \mathbf{L}\} \rangle) &= \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\theta} : (d\mathbf{v} - \mathbf{L}) \, dv + \int_{\Omega(t)} \mathbf{s} : \text{sym } d\mathbf{v} \, dv = \\ &- \int_{\Omega(t)} \text{div } \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{v} \, dv - \int_{\Omega(t)} \boldsymbol{\theta} : \mathbf{L} \, dv - \int_{\Omega(t)} \text{div } \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} \, dv + \\ &+ \int_{\partial\Omega(t)} (\mathbf{s} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\Omega(t)} (\boldsymbol{\theta} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dv. \end{aligned}$$



Ne consegue che

- l'operatore di equilibrio di massa  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}, H\}$  è allora espresso da

$$\boxed{\mathbf{B}'_o \begin{vmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{div} & -\operatorname{div} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\operatorname{div}(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s}) \\ -\boldsymbol{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{b}_v \\ \mathbf{b}_L \end{vmatrix}},$$

dove  $\mathbf{b}_v \in V$  e  $\mathbf{b}_L \in L\{V, V\}$  e

- l'operatore di equilibrio al contorno  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}, \partial\mathcal{F}\}$  è espresso da

$$\boxed{\mathbf{N} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} [\cdot]\mathbf{n} & [\cdot]\mathbf{n} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{\theta} + \mathbf{s})\mathbf{n} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{t}_v \\ \mathbf{o} \end{vmatrix}},$$

dove  $\mathbf{t}_v \in V$ . Essendo  $-\boldsymbol{\theta} = \mathbf{b}_L$  si ha che

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\theta} = -\operatorname{div} \mathbf{b}_L, \quad \boldsymbol{\theta} \mathbf{n} = -\mathbf{b}_L \mathbf{n}.$$

Allora, ponendo  $\mathbf{b} = \mathbf{b}_v - \operatorname{div} \mathbf{b}_L$  e  $\mathbf{t} = \mathbf{t}_v - \mathbf{b}_L \mathbf{n}$ , le equazioni di equilibrio si scrivono

$$\boxed{-\operatorname{div} \mathbf{s} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{s} \mathbf{n} = \mathbf{t}.}$$

Queste sono le equazioni di equilibrio di CAUCHY per il campo di tensori simmetrici di sforzo  $\mathbf{s} \in \operatorname{Sym}(V; V)$ . Il modello del continuo micromorfo collassa quindi in quello classico di CAUCHY. ■

## 14. VARIAZIONE DEI VINCOLI

Nella meccanica della struttura è di grande interesse teorico ed applicativo determinare le modifiche indotte in un modello strutturale da una variazione dei vincoli.

In questa sezione si presenta una analisi rigorosa della questione svolta in termini geometrici. I risultati più direttamente connessi con le applicazioni alle travature sono illustrati nella sezione 14.5 (p. 499).

### 14.1. Relazioni di dualità

Siano  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  e  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$  due strutture che differiscono solo per l'insieme dei *vincoli lineari* imposti.

Per semplificare la notazione, nel seguito di questa sezione si ometterà di indicare esplicitamente la dipendenza dal dominio  $\Omega$ .

Dunque si denotteranno con  $\mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}$  gli spazi duali cinematico e statico e rispettivamente con

- $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{V}$  i sottospazi lineari chiusi dei *cinematismi conformi*,
- $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{F}$  i sottospazi lineari chiusi delle *reazioni vincolari*.

Sussiste la relazione di complementarietà ortogonale

$$\mathcal{L}_i = \mathcal{R}_i^\perp, \quad \mathcal{R}_i = \mathcal{L}_i^\perp, \quad i = 1, 2.$$

Per fissare le idee si assuma che

$$\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2 \iff \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1.$$

Si dia quindi la seguente definizione.

*Variazione dei vincoli.*

- L'inclusione  $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$  determina nell'insieme delle strutture vincolate associate ad un modello strutturale  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B}\}$  una *relazione d'ordine parziale* in cui la struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  è detta *più vincolata* della struttura  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$ .

Per analizzare le modifiche indotte da una variazione dei vincoli si richiama la definizione di *supplementare topologico*.

- In uno spazio di BANACH  $\mathcal{X}$  si dice che un sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$  ammette un supplementare topologico  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{X}$  se  $\mathcal{B}$  è un sottospazio lineare chiuso di  $\mathcal{X}$  tale che

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{A} + \mathcal{B} = \mathcal{X}.$$

Si consideri quindi il caso in cui

- nel passare dalla struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  alla struttura  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$  venga eliminato un sottospazio vincolare di *dimensione finita*. Ciò equivale ad assumere che il sottospazio  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$  abbia *codimensione finita* nello spazio di BANACH  $\mathcal{R}_1$  e cioè che  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_1$  ammetta in  $\mathcal{R}_1$  un supplementare topologico di dimensione finita.

Una variazione dei vincoli è allora descritta dai sottospazi lineari chiusi

$$\mathcal{L}_{12} \subseteq \mathcal{L}_2, \quad \mathcal{R}_{21} \subseteq \mathcal{R}_1,$$

tali che

- $\mathcal{L}_1$  e  $\mathcal{L}_{12}$  sono supplementari topologici in  $\mathcal{L}_2$ ,
- $\mathcal{R}_2$  e  $\mathcal{R}_{21}$  sono supplementari topologici in  $\mathcal{R}_1$  con  $\mathcal{R}_{21}$  di dimensione finita.

Risulta pertanto

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{12}, \quad \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{21},$$

con

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_{12} = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_{21} = \{\mathbf{o}\}.$$

Si noti che

- è possibile effettuare la decomposizione  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{12}$  poiché lo spazio lineare  $\mathcal{L}_2$  è uno spazio di HILBERT,
- è inoltre possibile effettuare la decomposizione  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{21}$  in quanto il sottospazio lineare  $\mathcal{R}_{21}$  ha dimensione finita nello spazio di BANACH  $\mathcal{R}_1$ .

Le condizioni che assicurano l'esistenza di un sottospazio supplementare topologico sono discusse in [30].

Considerando i complementi ortogonali, si ha che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_{12} &\iff \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{L}_{12}^\perp, \\ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{21} &\iff \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp. \end{aligned}$$

- Il sottospazio lineare  $\mathcal{L}_{12}$  è costituito dai *cinematismi conformi liberati*,
  - Il sottospazio lineare  $\mathcal{R}_{21}$  è costituito dai *vincoli eliminati*.
- Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 14.1. Dualità.** *I sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{L}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}$  sono duali e cioè*

$$\mathcal{L}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{L}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

**Dim.** Dalla relazione  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp$  segue che

$$\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_{12} = \{\mathbf{o}\} \Rightarrow \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp \cap \mathcal{L}_{12} = \mathcal{R}_{21}^\perp \cap \mathcal{L}_{12} = \{\mathbf{o}\},$$

in quanto  $\mathcal{L}_{12} \subseteq \mathcal{L}_2$ .

La seconda relazione si dimostra procedendo in modo duale.  $\square$

**Osservazione 14.1.** In una struttura continua  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  il sottospazio lineare  $\mathcal{L}$  dei cinematici conformi e quello  $\mathcal{R}$  delle reazioni vincolari hanno sempre dimensione infinita. Al contrario il sottospazio lineare  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \mathcal{L} \cap \mathcal{V}_o$  dei cinematici conformi rigidi ha dimensione finita se l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  è un operatore di KORN. (vedi la sezione II.6.3 (p. 210)).

La dualità tra i sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{L}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}$  assicura che

$$\dim \mathcal{R}_{21} < +\infty \iff \dim \mathcal{L}_{12} < +\infty.$$

In tal caso si ha che

$$\dim \mathcal{L}_{21} = \dim \mathcal{R}_{12} = n_{21}.$$

La dimensione  $n_{21}$  rappresenta il numero di *vincoli semplici indipendenti* che devono essere eliminati dalla struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  per pervenire alla struttura  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$ .

La proposizione 14.1 implica quindi che

- Se da una struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  si eliminano  $n_{21}$  vincoli semplici il sottospazio lineare dei cinematici conformi viene incrementato di un sottospazio lineare di dimensione  $n_{21}$ . ■

Si considerino ora i sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  dei *cinematici rigidi conformi* delle strutture  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  e  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{V}_o, \quad \mathcal{N}_2 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{V}_o,$$

Poichè l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  è un operatore di KORN i sottospazi  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  sono di dimensione finita.

L'assunto  $\mathcal{L}_1 \subset \mathcal{L}_2$  implica che  $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$ . Si ponga quindi

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 \dot{+} \mathcal{N}_{12} \iff \mathcal{N}_2^\perp = \mathcal{N}_1^\perp \cap \mathcal{N}_{12}^\perp.$$

con  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_{12}$  supplementari topologici in  $\mathcal{N}_2$  cioè tali che  $\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_{12} = \{\mathbf{o}\}$ .

#### Variazione della labilità.

- L'inclusione  $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_2$  determina nell'insieme delle strutture associate ad un modello strutturale  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B}\}$  una *relazione d'ordine parziale* in cui la struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  è detta *meno labile* della struttura  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$ .

- Il sottospazio lineare  $\mathcal{N}_{12}$  è costituito dai *cinematici rigidi conformi liberati*.

- La dimensione dei sottospazi  $\mathcal{N}_1$  e  $\mathcal{N}_2$  è detta *grado di labilità strutturale*, e la dimensione del sottospazio  $\mathcal{N}_{12}$  è la *variazione del grado di labilità strutturale*.

Sussiste la seguente proprietà.

**Proposizione 14.2. Controllo cinematico.** *I sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{N}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}$  godono della proprietà*

$$\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \{\mathbf{o}\},$$

e cioè non esiste alcun cinematismo rigido in  $\mathcal{N}_{12}$  per il quale compiano potenza virtuale nulla tutte le reazioni in  $\mathcal{R}_{21}$ .

**Dim.** Dalla relazione  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{21}$  prendendo i complementi ortogonali si deduce che  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp$  e quindi che

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{V}_\mathbf{o} = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp \cap \mathcal{V}_\mathbf{o} = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp.$$

Ne segue che

$$\mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_{12} = \{\mathbf{o}\} \Rightarrow \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp \cap \mathcal{N}_{12} = \mathcal{R}_{21}^\perp \cap \mathcal{N}_{12} = \{\mathbf{o}\},$$

in quanto  $\mathcal{N}_{12} \subseteq \mathcal{N}_2$ . □

**Osservazione 14.2.** La proprietà dimostrata nella proposizione 14.2 può enunciarsi dicendo che

- I cinematismi rigidi  $\mathcal{N}_{12}$  liberati dalla soppressione dei vincoli  $\mathcal{R}_{21}$  sono controllati dalle reazioni vincolari  $\mathcal{R}_{21}$ . ■
- Si noti che in generale è falsa la proprietà  $\mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}$  duale di quella della proposizione 14.2. In generale possono infatti esistere reazioni in  $\mathcal{R}_{21}$  che compiono potenza virtuale nulla per tutti i cinematismi rigidi in  $\mathcal{N}_{12}$ .

Il seguente risultato chiarisce la situazione generale fornendo una caratterizzazione più precisa della proprietà enunciata nella proposizione 14.2.

**Proposizione 14.3. Dualità efficace.** *Si consideri la decomposizione del sottospazio lineare  $\mathcal{R}_{21}$  nella seguente somma diretta di due supplementari topologici*

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^* + \mathcal{R}_{21}^{**}, \quad \text{con } \mathcal{R}_{21}^{**} = \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_2^\perp.$$

*Le reazioni del sottospazio lineare  $\mathcal{R}_{21}^*$  sono dette cinematicamente efficaci, quelle del sottospazio lineare  $\mathcal{R}_{21}^{**}$  sono dette cinematicamente inefficaci.*

Allora risulta

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp}.$$

ed i sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{N}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}^*$  sono duali e cioè

$$\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{R}_{21}^* \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

**Dim.** Prendendo i complementi ortogonali dalla relazione  $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^* + \mathcal{R}_{21}^{**}$  si ottiene che

$$\mathcal{R}_{21}^\perp = \mathcal{R}_{21}^{*\perp} \cap \mathcal{R}_{21}^{**\perp}.$$

e dalla relazione  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_{21}$  si deduce che

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} \cap \mathcal{R}_{21}^{**\perp}.$$

e quindi che  $\mathcal{N}_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{V}_o = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{V}_o \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} \cap \mathcal{R}_{21}^{**\perp}$ .

Ora per definizione  $\mathcal{R}_{21}^{**} \subseteq \mathcal{N}_2^\perp$  e quindi  $\mathcal{R}_{21}^{**\perp} \supseteq \mathcal{N}_2$  per cui

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp}.$$

La proprietà di controllo dimostrata nella proposizione 14.2 continua a valere se si sostituisce  $\mathcal{R}_{21}^*$  a  $\mathcal{R}_{21}$ . Sussiste infatti l'eguaglianza

$$\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp},$$



in quanto  $\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} \cap \mathcal{R}_{21}^{**\perp}$  e  $\mathcal{N}_{12} \subseteq \mathcal{R}_{21}^{**\perp}$ .

Per dimostrare quest'ultima inclusione si osservi che  $\mathcal{R}_{21}^{**\perp} = \mathcal{R}_{21}^\perp + \mathcal{N}_2$  e che  $\mathcal{N}_{12} \subseteq \mathcal{N}_2$  per cui  $\mathcal{N}_{12} + \mathcal{R}_{21}^\perp \subseteq \mathcal{N}_2 + \mathcal{R}_{21}^\perp = \mathcal{R}_{21}^{**\perp}$ .

Rimane da dimostrare che  $\mathcal{R}_{21}^* \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}$ . A tal fine si osservi che

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{12} \iff \mathcal{N}_2^\perp = \mathcal{N}_1^\perp \cap \mathcal{N}_{12}^\perp,$$

e che

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp \Rightarrow \mathcal{N}_1^\perp \supseteq \mathcal{N}_2^\perp + \mathcal{R}_{21}.$$

Allora risulta  $\mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_2^\perp = \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_1^\perp \cap \mathcal{N}_{12}^\perp$  che, essendo  $\mathcal{R}_{21} \subseteq \mathcal{N}_1^\perp$ , fornisce

$$\mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_2^\perp = \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_{12}^\perp.$$

Basta infine osservare che sussistendo la somma diretta

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^* + \mathcal{R}_{21}^{**}, \quad \text{con } \mathcal{R}_{21}^{**} = \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_{12}^\perp,$$

dove risulta  $\mathcal{R}_{21}^* \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}$ .  $\square$



**Osservazione 14.3.** La dualità tra i sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{N}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}^*$  assicura che  $\dim \mathcal{R}_{21}^* < +\infty \iff \dim \mathcal{N}_{12} < +\infty$ . In tal caso risulta

$$\dim \mathcal{R}_{21}^* = \dim \mathcal{N}_{12} = n_{21}.$$

Allora  $n_{21}$  è il numero di *vincoli semplici efficaci* eliminati dalla struttura  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$  ovvero il numero di cinematicismi rigidi aggiunti alla struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$ . ■

**Osservazione 14.4.** Se tutte le reazioni vincolari aggiuntive  $\mathcal{R}_{21}$  sono cinematicamente inefficaci, e cioè se  $\mathcal{R}_{21}^* = \{\mathbf{o}\}$  allora dalla relazione  $\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} = \{\mathbf{o}\}$  segue che  $\mathcal{N}_{12} = \{\mathbf{o}\}$  e quindi che  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1$ .

Viceversa, se l'eliminazione dei vincoli  $\mathcal{R}_{21}$  non altera la labilità della struttura, e cioè se  $\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1$  ovvero  $\mathcal{N}_{12} = \{\mathbf{o}\}$ , allora la relazione  $\mathcal{R}_{21}^* \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}$  implica che  $\mathcal{R}_{12}^* = \{\mathbf{o}\}$  e quindi che  $\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^{**}$ , per cui tutti i vincoli aggiuntivi sono cinematicamente inefficaci.

Si può quindi concludere affermando che

$$\boxed{\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 \iff \mathcal{R}_{21}^* = \{\mathbf{o}\} \iff \mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^{**},}$$

e cioè

- La *labilità* della struttura non varia se e solo se i vincoli aggiuntivi sono *cinematicamente inefficaci*. ■

**Osservazione 14.5.** Se il sottospazio lineare chiuso  $\mathcal{R}_{21}^*$  delle variazioni vincolari cinematicamente efficaci è di dimensione finita allora si ha che

$$\boxed{\mathcal{N}_1 = \mathcal{N}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} \iff \mathcal{N}_1^\perp = \mathcal{N}_2^\perp \dotplus \mathcal{R}_{21}^* .}$$

L'eguaglianza a secondo membro segue dalla proprietà  $\dim \mathcal{R}_{21}^* < +\infty$  la quale assicura che la somma dei sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{N}_2^\perp$  e  $\mathcal{R}_{21}^*$  è chiusa (vedi [30]). ■

## 14.2. Synopsis

Si fornisce ora un sommario dei risultati conseguiti.

- Siano  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  e  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$  due strutture e siano rispettivamente
  - $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \subset \mathcal{V}$  i sottospazi lineari chiusi dei *cinematicismi conformi*,
  - $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{F}$  i sottospazi lineari chiusi delle *reazioni vincolari*.

Se la struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  è più vincolata di  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$  si ponga

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &= \mathcal{L}_1 \dotplus \mathcal{L}_{12} \iff \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{L}_{12}^\perp, \\ \mathcal{R}_1 &= \mathcal{R}_2 \dotplus \mathcal{R}_{21} \iff \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{R}_{21}^\perp. \end{aligned}}$$

e nel caso opposto si scambino gli indici 1 e 2.

I sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{L}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}$ , sono detti rispettivamente

- $\mathcal{L}_{12}$  sottospazio dei *cinematismi conformi liberati*,
- $\mathcal{R}_{21}$  sottospazio dei *vincoli eliminati*,

e sono duali. Risulta cioè

$$\mathcal{L}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^\perp = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{L}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

Siano quindi

- $\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2 \subseteq \mathcal{V}$  i sottospazi lineari chiusi dei *cinematismi rigidi conformi*, definiti da

$$\mathcal{N}_1 = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{V}_\mathbf{o}, \quad \mathcal{N}_2 = \mathcal{L}_2 \cap \mathcal{V}_\mathbf{o},$$

e si considerino le somme dirette definite dalle decomposizioni

$$\mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_{12} \iff \mathcal{N}_2^\perp = \mathcal{N}_1^\perp \cap \mathcal{N}_{12}^\perp.$$

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^* + \mathcal{R}_{21}^{**}, \quad \text{con } \mathcal{R}_{21}^{**} = \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_2^\perp.$$

I sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{R}_{21}^*$ ,  $\mathcal{R}_{21}^{**}$  e  $\mathcal{N}_{12}$  sono costituiti rispettivamente

- $\mathcal{R}_{21}^*$  dalle *variazioni vincolari cinematicamente efficaci*,
- $\mathcal{R}_{21}^{**}$  dalle *variazioni vincolari cinematicamente inefficaci*.
- $\mathcal{N}_{12}$  dalle *variazioni dei cinematismi rigidi conformi*.

I sottospazi lineari  $\mathcal{N}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}^*$  sono *duali* e cioè

$$\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{R}_{21}^* \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

### 14.3. Autosforzi e iperstaticità

In una struttura  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  si consideri il sottospazio lineare

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{AUTO}}(\Omega) &:= (\mathbf{B}\mathcal{L})^\perp = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = \mathbf{B}'^{-1}\mathcal{R}(\Omega) = \\ &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\Omega) : (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\} = \\ &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\Omega) : (\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\} = \\ &= \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}(\Omega) : \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{L}^\perp = \mathcal{R}(\Omega)\} = \\ &= \{\mathbf{T} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \mathbf{T} = \mathbf{o}, \mathbf{N}\mathbf{T} \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp\}. \end{aligned}$$

Gli elementi di  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  sono gli sforzi in *autoequilibrio* e cioè in equilibrio con reazioni vincolari, detti anche *autosforzi* o *coazioni*.

**Iperstaticità.**

- L'inclusione  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}_1} \subset \mathcal{S}_{\text{AUTO}_2}$  determina nell'insieme delle strutture associate ad un modello strutturale  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{V}(\Omega), \mathbf{B}\}$  una *relazione d'ordine parziale* in cui la struttura  $\mathcal{M}_1\{\Omega, \mathcal{L}_1, \mathbf{B}\}$  è detta *meno iperstatica* della struttura  $\mathcal{M}_2\{\Omega, \mathcal{L}_2, \mathbf{B}\}$ .

Si consideri ora una qualsiasi eliminazione di vincoli agenti sulla struttura  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  e sia  $\mathcal{M}_o\{\Omega, \mathcal{L}_o, \mathbf{B}\}$  la struttura così generata. Si ponga

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \mu\mathcal{R}, \quad \mathcal{L}_o = \mathcal{L} + \mu\mathcal{L}, \quad \mathcal{N}_o = \mathcal{N} + \mu\mathcal{N}.$$

Il sottospazio di  $\mathcal{R}$  costituito dalle reazioni *cinematicamente inefficaci* è per definizione

$$\mu\mathcal{R} \cap \mathcal{N}_o^\perp = \mu\mathcal{R} \cap (\mu\mathcal{N})^\perp.$$

Si denoti quindi con  $\mathbf{B}' \in \mathbf{L}\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}$  l'operatore di equilibrio, duale dell'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$  secondo l'identità definitoria

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}.$$

- Le autotensioni  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Ker } \mathbf{B}'$  sono dette *coazioni nascoste* o *autosforzi nascosti*.
  - Una struttura  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  tale che  $\text{Ker } \mathbf{B}' = \{\mathbf{0}\}$  è detta *priva di coazioni nascoste*.
- Un sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  è detto in *autoequilibrio* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  se è in equilibrio sulla struttura  $\mathcal{M}_o\{\Omega, \mathcal{L}_o, \mathbf{B}\}$  generata eliminando il vincolo corrispondente al sistema reattivo.
- Il sottospazio dei *sistemi reattivi autoequilibrati* su  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  è quindi definito da

$$\mathcal{R}_{\text{AUTO}} := \{\mathbf{r} \in \mathcal{R} \cap \mathcal{N}_o^\perp : \mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \text{lin}\{\mathbf{r}\}\}.$$

Dalla definizione risulta che un sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  è in *autoequilibrio* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  se e solo se è *cinematicamente inefficace*.

- Un sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  è detto in *autoequilibrio* sulla struttura vincolata  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  con uno *stato di sforzo* autoequilibrato  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  se è in equilibrio con  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  sulla struttura  $\mathcal{M}_o\{\Omega, \mathcal{L}_o, \mathbf{B}\}$  generata eliminando il vincolo corrispondente al sistema reattivo.

L'insieme dei *sistemi reattivi in autoequilibrio* con uno sforzo  $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  su  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  è definito da

$$\mathcal{R}(\sigma) := \{ \mathbf{r} \in \mathcal{R} : \mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \text{lin}\{\mathbf{r}\}, \mathbf{r} \in \mathbf{B}'\sigma + \mathcal{R}_o \}.$$

Si noti che la definizione di  $\mathcal{R}(\sigma)$  implica che  $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  in quanto se  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\sigma)$  con  $\sigma \in \mathcal{H}$  allora si ha che  $\mathbf{B}'\sigma \in \mathcal{R}$  e quindi  $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$ .

Valgono le seguenti proprietà.

**Proposizione 14.4. Rappresentazione delle reazioni in autoequilibrio.** *In una struttura  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  il sottospazio dei sistemi reattivi in autoequilibrio è l'unione degli insiemi dei sistemi reattivi in autoequilibrio con un autosforzo:*

$$\mathcal{R}_{\text{AUTO}} = \bigcup \{ \mathcal{R}(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \}.$$

**Dim.** Sia  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\sigma)$  con  $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$ . Allora

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = (\sigma, \mathbf{B}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}_o \Rightarrow \mathbf{r} \in \mathcal{N}_o^\perp,$$

e quindi  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{\text{AUTO}}$ . Dunque

$$\mathcal{R}_{\text{AUTO}} \supseteq \bigcup \{ \mathcal{R}(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \}.$$

Viceversa se  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{\text{AUTO}}$  risulta  $\mathbf{r} \in \mathcal{N}_o^\perp$  ed il teorema delle potenze virtuali assicura che esiste uno sforzo  $\sigma \in \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{B}'\sigma = \mathbf{r} + \mathcal{R}_o \subseteq \mathcal{R}$ . Inoltre

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = (\sigma, \mathbf{B}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}_o \Rightarrow \sigma \in (\mathbf{B}\mathcal{L})^\perp = \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

Ne segue che  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\sigma)$ . Dunque

$$\mathcal{R}_{\text{AUTO}} \subseteq \bigcup \{ \mathcal{R}(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \},$$

e quindi sussiste il risultato.  $\square$

**Proposizione 14.5. Autosforzi e reazioni in equilibrio.** *In una struttura vincolata  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  ad ogni autosforzo non nullo corrisponde un insieme non nullo di sistemi reattivi con esso in autoequilibrio. Viceversa ad ogni sistema reattivo non nullo ed in autoequilibrio corrisponde una varietà lineare di autosforzi con essa in equilibrio, non nulla e parallela al sottospazio degli sforzi in autoequilibrio sulla struttura generata eliminando il vincolo corrispondente al sistema reattivo.*

**Dim.** Si supponga che  $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \setminus \{\mathbf{o}\}$ .

Essendo  $\text{Ker } \mathbf{B}' = \{\mathbf{o}\}$  si ha che  $\mathbf{B}'\sigma \in \mathcal{R} \setminus \{\mathbf{o}\}$ .

Poichè  $\mathbf{B}'\sigma \in \mathcal{R}(\sigma)$  risulta  $\mathcal{R}(\sigma) \neq \{\mathbf{o}\}$ .

Viceversa se  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{\text{AUTO}} \setminus \{\mathbf{o}\}$  risulta  $\mathbf{r} \in (\mathcal{R} \cap \mathcal{N}_o^\perp)$  e quindi il teorema delle potenze virtuali assicura che esiste un  $\sigma \in \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{B}'\sigma = \mathbf{r} + \mathcal{R}_o \subseteq \mathcal{R}$ .

Deve inoltre essere  $\sigma \neq \mathbf{o}$  in quanto altrimenti si avrebbe che  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_o$  e ciò è impossibile perché  $\mathcal{R}_o \cap \text{lin}\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{o}\}$ .

Dunque  $\sigma \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \setminus \{\mathbf{o}\}$ .

Infine due autosforzi  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  sono in autoequilibrio con un sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{\text{AUTO}} \setminus \{\mathbf{o}\}$  se

$$\mathbf{B}'\sigma_1 = \mathbf{r} + \mathcal{R}_o, \quad \mathbf{B}'\sigma_2 = \mathbf{r} + \mathcal{R}_o.$$

Ciò è possibile se solo se  $\mathbf{B}'(\sigma_1 - \sigma_2) \in \mathcal{R}_o$ . □

**Osservazione 14.6.** Per contraddizione il risultato precedente può enunciarsi affermando che sussiste l'equivalenza

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = (\mathbf{B}\mathcal{L})^\perp = \{\mathbf{o}\} \iff \mu\mathcal{R} \cap \mathcal{N}_o^\perp = \{\mathbf{o}\}, \quad \forall \mu\mathcal{R} \subseteq \mathcal{R},$$

ovvero che

- non esistono autosforzi non nulli se e solo se ogni eliminazione di vincoli è cinematicamente efficace e cioè genera almeno un cinematismo rigido conforme. ■

**Proposizione 14.6. Eliminazione degli sforzi in autoequilibrio.** *Uno sforzo  $\sigma \in (\mathbf{B}\mathcal{L})^\perp$  non nullo che è in autoequilibrio sulla struttura  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  certamente non è in autoequilibrio sulla struttura  $\mathcal{M}_o\{\Omega, \mathcal{L}_o, \mathbf{B}\}$  ottenuta dalla soppressione di un sistema reattivo  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}(\sigma)$  con esso in autoequilibrio.*

**Dim.** Si supponga che  $\sigma \in (\mathbf{B}\mathcal{L}_o)^\perp \setminus \{\mathbf{o}\}$  e cioè che  $\sigma \neq \mathbf{o}$  e che  $\mathbf{B}'\sigma \in \mathcal{R}_o$ . Allora essendo  $\mathbf{B}'\sigma - \mathbf{r} \in \mathcal{R}_o$  dovrebbe aversi che  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_o \setminus \{\mathbf{o}\}$ , ma ciò è impossibile poichè la decomposizione in somma diretta  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \text{lin}\{\mathbf{r}\}$  impone che  $\mathcal{R}_o \cap \text{lin}\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{o}\}$ . □

Ne segue che tra gli elementi  $\mathcal{S}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  di una famiglia finita di sottospazi di sforzi in autoequilibrio, eliminati con la soppressione di sistemi reattivi cinematicamente inefficaci, sussistono le relazioni

$$\mathcal{S}_i \cap \sum_{j \neq i} \mathcal{S}_j = \{\mathbf{o}\}.$$

#### 14.4. Variazioni finite dell'iperstaticità e della labilità

Dalla proposizione 14.1 (p. 490) si deduce che la dimensione del sottospazio  $\mathcal{R}_{21}$  dei vincoli eliminati è pari alla dimensione del sottospazio  $\mathcal{L}_{21}$  dei cinematici liberati.

Dalla proposizione 14.6 si deduce poi che la dimensione del sottospazio  $\mathcal{R}_{21}^*$  dei vincoli cinematicamente inefficaci eliminati è pari alla dimensione del sottospazio degli autosforzi eliminati.

Si dirà che i vincoli hanno subito una *variazione finita* pari a

$$\dim \mathcal{R}_{21} = \dim \mathcal{L}_{12}.$$

- Il valore assoluto della *variazione della labilità* strutturale è la dimensione del sottospazio  $\mathcal{R}_{21}^*$  delle variazioni dei *vincoli cinematicamente efficaci*, pari alla dimensione del sottospazio  $\mathcal{N}_{12}$  delle variazioni dei *cinematici rigidi conformi*.
- Il valore assoluto della *variazione dell'iperstaticità* strutturale, è la dimensione del sottospazio  $\mathcal{R}_{21}^{**}$  delle variazioni vincolari *cinematicamente inefficaci*.

Dalla decomposizione del sottospazio lineare  $\mathcal{R}_{21}$  nella somma diretta

$$\mathcal{R}_{21} = \mathcal{R}_{21}^* + \mathcal{R}_{21}^{**}, \quad \text{con } \mathcal{R}_{21}^{**} = \mathcal{R}_{21} \cap \mathcal{N}_{12}^\perp,$$

e dalla dualità tra i sottospazi lineari chiusi  $\mathcal{N}_{12}$  e  $\mathcal{R}_{21}^*$  espressa dalle condizioni

$$\mathcal{N}_{12} \cap \mathcal{R}_{21}^{*\perp} = \{\mathbf{o}\}, \quad \mathcal{R}_{21}^* \cap \mathcal{N}_{12}^\perp = \{\mathbf{o}\},$$

si deduce la relazione di complementarietà

$$\dim \mathcal{R}_{21} = \dim \mathcal{R}_{21}^* + \dim \mathcal{R}_{21}^{**} = \dim \mathcal{N}_{12} + \dim \mathcal{R}_{21}^{**}.$$

Sussistono quindi le seguenti proprietà.

##### *Proprietà di complementarietà*

- Ogni *variazione finita* dei vincoli è pari alla somma dei valori assoluti della *variazione dell'iperstaticità* e della *variazione della labilità*.

Le due variazioni sono di segno opposto.

##### *Teorema dell'alternativa*

- La variazione di un *vincolo semplice* produce in alternativa
  - una *variazione dell'iperstaticità* di valore unitario,
  - una *variazione della labilità* di valore unitario.

Le due variazioni sono di segno opposto.

### 14.5. Strutture semplici

In una struttura  $\mathcal{M}\{\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B}\}$  si consideri il sottospazio lineare dei *vincoli cinematicamente inefficaci* e cioè quelli la cui eliminazione non produce incremento della *labilità*. Si dia quindi la seguente definizione.

■ Le *strutture semplici* quelle tali che il sottospazio lineare degli *sforzi autoequilibrati* ed il sottospazio lineare dei *cinematismi rigidi conformi* hanno entrambi *dimensione finita*.

Si dirà in tal caso

- *grado di labilità* strutturale, la dimensione del sottospazio dei cinematismi rigidi conformi,
- *grado di iperstaticità* strutturale, la dimensione del sottospazio degli sforzi autoequilibrati.

Una struttura è quindi detta

- *labile* se il sottospazio dei cinematismi rigidi conformi è non nullo,
- *staticamente indeterminata* o *ipersstatica* se il sottospazio degli sforzi autoequilibrati è non nullo,
- *staticamente determinata* se non è iperstatica,
- *isostatica* se è non labile e non iperstatica.

Sulla base dei risultati precedenti si può affermare che in una struttura semplice sostengono le seguenti relazioni tra il *grado di labilità* ed il *grado di iperstaticità* strutturale.

*Proprietà di complementarietà*

■ Ogni variazione finita dei vincoli è pari alla somma dei valori assoluti delle variazioni del *grado di iperstaticità* e del *grado di labilità*.

Le due variazioni sono di segno opposto.

**Teorema dell'alternativa**

- La variazione di un *vincolo semplice* produce in alternativa
  - una modifica unitaria del *grado di iperstaticità*,
  - una modifica unitaria della *grado di labilità*.

con modifiche di segno opposto

Entrambi i risultati sono utili nelle applicazioni per valutare uno dei due gradi (di iperstaticità e di labilità) quando è noto l'altro o per controllare la valutazione diretta dei due gradi.

**Osservazione 14.7.** Si noti che anche in una struttura continua *semplice* il sottospazio delle reazioni in autoequilibrio con uno stato di sforzo è di dimensione non finita. A fortiori tale è anche il sottospazio  $\mathcal{R}_{\text{AUTO}}$  delle reazioni in autoequilibrio. ■

**Osservazione 14.8.** In una *struttura semplice* iperstatica una rappresentazione parametrica di  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  si può determinare mediante il seguente procedimento.

Si individua un sistema reattivo semplice  $\text{Gen}(\mathbf{r})$ , con  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}_{\text{AUTO}}$ , in autoequilibrio e si elimina il vincolo corrispondente. In tal modo si elimina anche il sottospazio monodimensionale di sforzi in autoequilibrio con il sistema reattivo.

Si procede con passi analoghi finché si perviene ad una struttura *staticamente determinata*, caratterizzata dall'essere priva di stati di sforzo in autoequilibrio non nulli. Il numero  $\text{IPER}$  di vincoli semplici cinematicamente inefficaci soppressi fornisce il *grado di iperstaticità* della struttura. Lo spazio  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  è descritto dalle combinazioni lineari degli stati di sforzo in autoequilibrio mediante un insieme di  $\text{IPER}$  parametri reali detti *incognite iperstatiche*.

In corrispondenza di ogni sistema reattivo eliminato si determina quindi l'unico sforzo con esso in equilibrio sulla struttura *staticamente determinata*. I campi di sforzo così individuati costituiscono una base del sottospazio  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  che è generato dalle loro combinazioni lineari per arbitrari valori delle incognite iperstatiche.

In modo duale si può determinare in una struttura labile una rappresentazione parametrica del sottospazio  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}$  dei cinematismi rigidi conformi.

La procedura consiste nell'aggiungere vincoli semplici cinematicamente efficaci che eliminano un sottospazio monodimensionale  $\text{Gen}(\mathbf{v})$ , con  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ , di cinematismi rigidi conformi, procedendo sino a pervenire ad una struttura non labile, cioè priva di cinematismi rigidi conformi non nulli. Il numero  $\text{LAB}$  dei vincoli cinematicamente efficaci aggiunti fornisce il *grado di labilità* della struttura. Lo spazio  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}$  è quindi descritto parametricamente mediante le combinazioni lineari dei cinematismi rigidi conformi soppressi, mediante un insieme di  $\text{LAB}$  *parametri cinematici*.

Dalla proprietà di complementarietà di deduce che il *grado di iperstaticità*  $\text{IPER}$

ed il *grado di labilità*  $\text{LAB}$  sono legati dalla relazione di complementarietà

$$\text{IPER} - \text{LAB} = \text{costante}.$$

Il valore *costante* può essere determinato valutando la differenza  $\text{IPER} - \text{LAB}$  su di una conveniente variazione del modello strutturale. ■

## RIFERIMENTI

1. G. KIRCHHOFF, Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünen elastischen Stabes, *J. reine angew. Math.*, **56**, 285-313 (1859)
2. W. THOMSON, P.G. TAIT, Treatise on Natural Philosophy, Cambridge (1867)
3. P. DUHEM, Le potentiel thermodynamique et la pression hydrostatique, *Ann. Ecole Norm.* (3) **10**, 187-230 (1893)
4. A. KORN, Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche. *Acad. Wiss., München, Math. phys. Kl. Sitz.* **36**, 351-402 (1906).
5. E., F. COSSERAT, Sur la mécanique générale. *C. R. Acad. Sci.*, Paris **145**, 1139-1142 (1907).
6. A. KORN, Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de elasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (2) **10**, 156-269 (1908).
7. E., F. COSSERAT, Théorie des Corps déformables, Hermann, Paris (1909).
8. A. KORN, Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen. *Akad. Umiejet. Kracow Bulletin Int.*, 705-724 (1909).
9. J.L. ERICKSEN E C. TRUESDELL, Exact theory of stress and strain in rods and shells. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **1**, 295-323 (1958).
10. G. GRIOLI, Elasticità Asimmetrica. *Ann. di Mat. Pura ed Appl.*, Ser. IV, **50**, 389-417 (1960).
11. C. TRUESDELL E R. A. TOUPIN, The Classical Field Theories. *Handbuch der Physik III/I* Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (1960).
12. A. C. ERINGEN, Nonlinear Theory of Continuous Media McGraw-Hill, New York (1962).
13. R. A. TOUPIN, Elastic materials with couple-stresses, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, 385-414 (1962).
14. H. GUGGENHEIMER, Differential Geometry, McGraw-Hill book Co., New York, (1963).
15. R. D. MINDLIN, Micro-structures in Linear Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **16**, (1964).
16. R. D. MINDLIN, H. F. TIERSTEN, Effects of Couple Stresses in Linear Elasticity, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **11**, 415-448, (1964).
17. A. C. ERINGEN, E. S. SUHUBI, Nonlinear Theory of Simple Microelastic Solids I & II, *Int. J. Engrg. Sci.*, **2**, 189-203 & 389-404 (1964).
18. A. E. GREEN, R. S. RIVLIN, Multipolar Continuum Mechanics, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **17**, 113-147 (1964).
19. A. E. GREEN, Micro-Materials and Multipolar continuum Mechanics, *Int. J. Engrg. Sci.*, **3**, 5, 533-537 (1965).
20. A. C. ERINGEN, Mechanics of Micromorphic Continua, in *Mechanics of Generalized Continua*, Ed. Kröner, Springer-Verlag, Berlin, pp. 18-35 (1968).
21. F. GANTMACHER, Lectures in Analytical Mechanics, MIR publ., Moscow (1970).
22. A. C. ERINGEN, C. B. KAFADAR, Polar Field Theories, *Continuum Physics*, vol. IV Ed. Cemal Eringen, Academic Press, New York (1976).

23. J.L. LIONS, E. MAGENES, Problèmes aux limites non homogènes (3 volumes), Dunod, Paris (1978).
24. M. EPSTEIN, R. SEGEV, Differentiable Manifolds and the Principle of Virtual Work in Continuum Mechanics, *J. Math. Phys.*, **3**, 21, 1243-1245 (1980).
25. R. TEMAM, Problèmes Mathématiques en Plasticité, Gauthiers Villars, Paris (1983).
26. J. E. MARSDEN, T.J.R. HUGHES, Mathematical Foundations of Elasticity, Prentice-Hall, Redwood City, Cal. (1983).
27. R. ABRAHAM, J. E. MARSDEN, T. RATIU, Manifolds, Tensor Analysis, and Applications, second edition, Springer Verlag, New York (1988).
28. E. SERNESI, Geometria 2, Bollati Boringhieri, Torino (1994).
29. A. C. ERINGEN, Microcontinuum Field Theories Springer, Berlin, (1998).
30. G. ROMANO, Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2000).
31. G. ROMANO, Theory of structural models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2000).
32. G. ROMANO, On the necessity of Korn's inequality, *Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, STAMM 2000, National University of Ireland, Galway, July 9th-14th (2000).
33. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni - Tomo Zero - Elementi di Algebra Lineare ed Analisi Vettoriale, Hevelius, Benevento, (2001).
34. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo II, Hevelius, Benevento (2001).

## + INDICE ANALITICO

- $H$ , decomposizione dello spazio, 248  
 $\mathcal{H}(\Omega)$ , decomposizione dello spazio, 372  
 $\mathcal{H}$ , decomposizione dello spazio, 235  
 $T(\Omega)$ -conformi, cinematicismi, 194  
AIRY, funzione di, 115, 233  
ALMANSI, misura di deformazione, 48  
ALMANSI, tensore di, 50  
ARCHIMEDE, spinta di, 276  
BANACH, spazio di, 177  
BANACH, teorema di, 215, 223  
BELTRAMI, 100, 107  
BELTRAMI, soluzione di, 107, 233  
BERNOULLI, def. dell'equilibrio, 201  
BERNOULLI-EULER, trave di, 387, 426  
BIANCHI, prima identità, 165  
BIANCHI, seconda identità, 165  
CAPURSO, 101  
CARTAN, operatore di, 388  
CARTESIO, diavoletto di, 277  
CAUCHY, continuo di, 11  
CAUCHY, ellissoide di, 338  
CAUCHY, lemma di, 317  
CAUCHY, postulato di, 316  
CAUCHY, quadrica di, 338  
CAUCHY, successione di, 177  
CAUCHY, tensore destro di, 26  
CAUCHY, tensore di, 48  
CAUCHY, tensore di deformazione, 48  
CAUCHY, tensore sinistro di, 26  
CAUCHY, teorema di, 225  
CAUCHY, teorema fondamentale, 319  
CAUCHY, tetraedro di, 318  
CAUCHY-GREEN, tensore destro di, 48  
CAUCHY-GREEN, tensore sinistro di, 48  
CESÀRO, 101  
CESÀRO, formula di, 108, 115  
CHAPMAN-KOLMOGOROV, legge di, 18  
CHRISTOFFEL, simboli di, 53, 149  
CORIOLIS, accelerazione di, 99, 158  
COSSEYAT, continuo di, 292  
COULOMB, criterio di, 357  
DA SILVA, teorema di, 297  
DONATI, teorema di, 237  
EULER, condizione di, 156  
EULER, condizione di stazionarietà di, 409  
EULER, criterio di, 83  
EULER, equazioni di, 272  
EULER, formula di, 66  
EULER, formula di espansione, 65  
EULER, formule di, 61  
FINGER, tensore di, 48  
FOURIER, legge di, 282  
FRÉNET-SERRET, formule di, 389  
GAUSS, applicazione di, 454  
GAUSS, curvatura di, 456  
GAUSS, teorema egregium di, 456  
GREEN, formula di, 9  
GREEN, formula generale di, 187  
GREEN, misura di deformazione, 48, 381  
GREEN-regolare, sforzo, 227  
GURTIN, 101  
HADAMARD, lemma di, 123  
HAHN, teorema di estensione, 199, 279  
HILBERT, spazio di, 177, 235, 372  
HILBERT-pre, spazio, 177  
JACOBI, identità di, 136  
KELVIN, teorema di, 79  
KILLING, condizione di, 156  
KILLING, formula di, 382  
KIRCHHOFF, 100  
KIRCHHOFF, tensore di, 286  
KLEIN, bottiglia di, 2  
KORN, diseguaglianza di, 418  
KORN, operatore di, 187, 212  
KORN, prima diseguaglianza di, 92  
KORN, seconda diseguaglianza di, 187, 212  
KOSZUL, formula di, 150  
LAGRANGE, moltiplicatori di, 407  
LAGRANGE-CAUCHY, teorema di, 80  
LAMÉ, cono di, 340  
LAMÉ, ellissoide di, 339, 341  
LAMÉ-CLAPEYRON, quadrica di, 338  
LEIBNIZ, regola di, 67  
LEVI-CIVITA, connessione di, 149  
LIE, algebra di, 136  
LIE, derivata di, 133, 134  
LIE, parentesi di, 135  
LIE-JACOBI, parentesi di, 455



- MAXWELL, soluzione di, 107  
 MAXWELL, teorema di, 124  
 MOHR, analogia di, 378, 415, 425  
 MOHR, arbolo di , 357  
 MOHR, cerchio di, 315, 343  
 MORERA, soluzione di, 108  
 NANSON, formula di, 31, 33  
 NAVIER-STOKES, equazioni di, 269  
 NOLL, prisma di, 319  
 PIOLA, identità di, 33, 34  
 PIOLA, tensore di, 48  
 PIOLA, trasformata di, 32  
 PIOLA-GREEN, tensore di, 48  
 RANKINE, spinta attiva di, 359  
 RANKINE, spinta passiva di, 359  
 RANKINE, teoria di, 357  
 RELLICH, principio di selezione, 216  
 REYNOLDS, numero di, 272  
 REYNOLDS, teorema del trasporto, 66  
 RICCI, alternatore di, 102  
 RIEMANN, connessione di, 149  
 RIEMANN, varietà di, 147  
 ROMANO M., 344  
 SAINT VENANT, 100  
 SCHAEFER, rappresentazione di, 299  
 SIGNORINI, relazione di, 294  
 SOBOLEV, spazio di, 180  
 SOKOLNIKOFF, 108  
 TIMOSHENKO, trave di, 386  
 TORRICELLI, principio di, 404, 407  
 TORRICELLI, teorema di, 268  
 VOIGT, rappresentazione di, 89, 334  
 VOLTERRA, 101, 108, 111  
 ZAREMBA-ZORAWSKI, teorema di, 98
- accelerazione, 60, 157  
 accelerazione di trascinamento, 98, 158  
 accelerazione di CORIOLIS, 99, 158  
 affine, insieme, 195  
 affine, vincolo, 196  
 aggiunto formale, 10, 183, 187  
 algebra di LIE, 136  
 alternativa, teorema della, 495, 497
- ammissibile, configurazione, 475  
 ammissibili, variazioni, 195  
 analogia di MOHR, 378, 415, 425, 438  
 anello circolare, 428, 429  
 anello circolare aperto, 430  
 angolare, velocità, 76  
 applicazione di GAUSS, 454  
 arbolo di MOHR, 357  
 armonico, campo vettoriale, 299  
 ascissa curvilinea, 387  
 asse centrale, 207  
 asse della trave, 386  
 asse di rotazione, 21  
 assiale, carico, 420  
 assiale, scorrimento, 419, 426  
 assiale, traslazione, 419, 432  
 assioma dell'equilibrio, 202  
 assioma di riproducibilità, 176, 316  
 asta, 438  
 astatico, equilibrio, 295  
 atlante, 13, 474  
 atto di cedimento vincolare, 234, 236, 373  
 atto di curvatura, 463  
 atto di deformazione, 78  
 atto di distorsione, 234, 236, 373  
 atto di estensione, 90  
 atto di rotazione, 78, 462  
 atto di scorrimento, 90  
 attrito, 359  
 ausiliario, modello strutturale, 377  
 autoequilibrati, sistemi reattivi, 493  
 autoequilibrio, 492  
 autoequilibrio, reazioni in, 493  
 autoequilibrio, sforzi in, 218, 232  
 autosforzi, 219, 492  
 autosforzi nascosti, 202, 226, 492  
 autovalori, 93, 337  
 autovettori, 93, 337  
 azione e reazione, principio di, 305, 330  
 azione normale-tagliante, 414  
 azione torcente-flettente, 414
- base di una fibra lineare orientata, 12

- base, suddivisione, 221  
bilanciato, insieme, 195  
bilaterale, vincolo, 196  
bilinearità, proprietà di, 192  
binormale, versore, 388  
bottiglia di KLEIN, 2
- calcolo delle variazioni, 407  
calcolo delle variazioni, lemma, 7  
calore, densità di flusso, 282  
cambiamento di osservatore, 54  
campi di prova, 179  
campo covettoriale, 130  
campo di spostamento, 64  
campo di temperatura virtuale, 278  
campo di KILLING, 155  
campo materiale, 60  
campo scalare, 130  
campo solenoidale, 107  
campo spaziale, 60  
campo tensoriale, 131  
campo vettoriale, 130  
campo vettoriale armonico, 299  
campo vettoriale tangente, 129  
campo vettoriale, flusso, 130  
caratteristiche, curve, 139  
caratteristiche, metodo delle, 139  
carichi, 198  
carico assiale, 420  
carico flessionale, 420  
carte locali, 13  
catenaria, equazione della, 404  
centrale, asse, 207  
cerchio di MOHR, 315  
cinematicamente efficaci, reazioni, 489  
cinematicamente efficaci, vincoli, 491  
cinematicamente inefficaci, reazioni, 489  
cinematicamente inefficaci, vincoli, 491  
cinematico, operatore, 82, 185  
cinematismi, 75, 175  
cinematismi  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformi, 194  
cinematismi conformi, 197, 221, 301, 485, 491  
cinematismi conformi liberati, 486, 491  
cinematismi Green-regolari, 185  
cinematismi rigidi, 200, 201  
cinematismi rigidi conformi, 203, 491  
cinematismi rigidi conformi liberati, 487  
cinematismi rigidi semplici, 75, 200  
cinematismi GREEN-regolari, 184  
cinematismo, 479  
cinematismo rigido relativo, 204  
cinetica, energia, 261  
circolazione, trasporto della, 79  
coazioni, 219, 492  
coazioni nascoste, 202, 226, 492  
codimensione finita, 486  
coesione, 359  
commutatore, 53, 136  
compatibilità, condizione superficiale di, 123  
completamento, 177  
completo, spazio, 177  
componenti tetraedrali, 337  
cond. locali d'equilibrio dinamico, 264  
condizione di  $\mathcal{T}(\Omega)$ -conformità, 194, 198  
condizione di congruenza, 51  
condizione di congruenza al contorno, 237, 373  
condizione di congruenza locale, 52  
condizione di non ridondanza, 302  
condizione di stazionarietà di EULER., 409  
condizione di EULER, 156  
condizione di KILLING, 156  
condizione differenziale di congruenza, 237, 373  
condizione superficiale di compatibilità, 123  
condizione variazionale di congruenza, 235, 372  
condizione variazionale di equilibrio, 208  
condizione variazionale di equilibrio dinamico, 262  
condizioni di congruenza, 236, 373  
condizioni geometriche, 224  
condizioni naturali, 223, 224  
condizioni variazionali di congruenza, 240, 375  
condizioni variazionali di equilibrio, 239, 375  
conducibilità termica, 283  
configurazione, 15, 379, 439  
configurazione ammissibile, 475  
configurazione materiale, 12, 14, 474  
configurazione spaziale, 14, 15, 475  
configurazioni ammissibili, 379, 475

- congettura, 215  
 congruente, deformazione tangente , 234  
 congruente, sistema cinematico, 371  
 congruenza bidimensionale, 113  
 congruenza esterna, 51  
 congruenza in deformazione finita, 51  
 congruenza interna, 51, 100  
 congruenza locale, condizione di, 52  
 congruenza, condizione al contorno, 236, 373  
 congruenza, condizione di, 51  
 congruenza, condizione differenziale, 236, 373  
 congruenza, condizione variazionale di, 235, 372  
 congruenza, condizioni di, 236, 373  
 congruenza, condizioni variazionali, 240  
 connessione affine, 148  
 connessione di LEVI-CIVITA, 53, 149  
 connesso, 2  
 cono di taglio, 340  
 cono di LAMÉ, 340  
 conservazione della massa, 258  
 continuo con struttura, 473  
 continuo di CAUCHY, 11  
 continuo di COSSERAT, 292  
 continuo micromorfo, 292, 474, 476  
 continuo polare, 292  
 contorno di una suddivisione, 3  
 controllo, volume di, 260, 267  
 convesso, insieme, 195  
 coppia flessionale, 420  
 coppia torsionale, 420  
 corpo, 12  
 corpo, posizionamento del, 14  
 corpo, posizione spaziale del, 14  
 covettoriale, campo, 130  
 criterio di EULER, 83, 199  
 critica, quota, 363  
 curva materiale, 70  
 curvatura, 163, 389, 419, 426  
 curvatura di GAUSS, 456  
 curvatura flessionale, 419, 426  
 curvatura media, 456  
 curvatura tangente, 463  
 curvatura torsionale, 419, 426  
 curvatura, atto di, 463  
 curvatura, tensore, 162  
 curvature principali, 456  
 curve caratteristiche, 139  
 curvilinea, ascissa, 387  
 decomposizione dello spazio  $H$  , 248  
 decomposizione dello spazio  $\mathcal{H}(\Omega)$  , 372  
 decomposizione dello spazio  $\mathcal{H}$  , 235  
 decomposizione polare, 19, 24  
 deform. monoassiale, atto di, 94  
 deformazione finita, 19  
 deformazione omogenea, 35  
 deformazione omogenea, atto di, 83  
 deformazione pura, 40  
 deformazione tangente, 78, 382, 413  
 deformazione tangente , parte regolare, 185  
 deformazione tangente congruente, 234  
 deformazione tangente deviatorica, 95  
 deformazione tangente distribuzionale, 183, 309  
 deformazione tangente sferica, 95  
 deformazione tangente, parte regolare, 185  
 deformazione tangente, stato piano, 94  
 deformazione, atto di, 78  
 deformazione, gradiente della, 16  
 deformazione, misura di, 47  
 deformazione, operatore di, 47  
 deformazioni infinitesime, 19  
 deformazioni omogenee, 38  
 deformazioni tangenti regolari, 235, 372  
 densità del flusso di calore, 278  
 densità del flusso di freddo, 280  
 densità di flusso di calore, 282  
 densità di forza d'inerzia, 261  
 densità, proprietà di, 180  
 denso, sottospazio, 180  
 derivata autonoma di LIE, 142  
 derivata covariante, 53, 148  
 derivata di LIE, 129, 133, 142  
 derivata distribuzionale, 178, 180  
 derivata generalizzata, 178, 180  
 derivata materiale, 61  
 derivata spaziale, 60  
 derivata temporale materiale, 157

- derivate tangenziali, 123  
descrizione materiale, 12, 60  
descrizione spaziale, 60  
determinante jacobiano, 29, 65  
diavolotto di CARTESIO, 277  
diffeomorfismo, 13, 17, 379  
dilatazione, 27  
dilatazione volumetrica, 28  
dilatazione, atto di, 87  
dinamica, legge fondamentale della, 262  
direttore di una fibra lineare orientata, 12  
direttori, 300  
direzioni principali, 93  
direzioni principali di tensione, 337  
discontinuità, salto di, 123  
discontinuità, superfici di propagazione, 126  
diseguaglianza di KORN, 418  
diseguaglianza di KORN, seconda, 187  
distorsioni omogenee, 36  
distribuzione, 178  
divergenza di un campo tensoriale, 155  
divergenza di un campo vettoriale, 155  
divergenza distribuzionale, 183, 308  
divergenza generalizzata, 308  
dominio, 2  
duali, sottospazi lineari, 491  
dualità, 191  
dualità formale, 368
- efficaci, reazioni, 489  
elementi di una suddivisione, 3  
ellissoide di CAUCHY, 338  
ellissoide di LAMÉ, 339  
energia cinetica, 261  
energia di forma, 96  
energia di volume, 96  
energia, tasso di produzione di, 280  
enti duali, 191  
equazione della catenaria, 404  
equazione della funicolare, 399, 400  
equazione ridotta di conservazione dell'energia, 282  
equazioni cardinali, 205  
equazioni cardinali della dinamica, 264
- equazioni di bilancio, 281, 284  
equazioni di EULER, 272  
equazioni di NAVIER-STOKES, 269  
equazioni di NAVIER-STVENANT-STOKES, 271  
equilibrio, 201  
equilibrio alla rotazione, 231  
equilibrio alla traslazione, 231  
equilibrio astatico, 295  
equilibrio dinamico, 262  
equilibrio dinamico, cond. locali, 264  
equilibrio dinamico, materiale, 265  
equilibrio dinamico, spaziale, 269  
equilibrio dinamico, volume di controllo, 267  
equilibrio referenziale, 284  
equilibrio, assioma dell', 202  
equilibrio, condizione variazionale, 208  
equilibrio, condizioni variazionali, 239  
equilibrio, def. di BERNOULLI, 201  
equilibrio, operatore di, 202  
equiproiettività, 76  
equiproiettività, proprietà di, 76  
equivalezza statica, 205  
esplicita, rappresentazione, 221  
estensione semplice, 40  
estensione, proprietà di, 199  
estremo vincolato, problema di, 407  
evolutivo, processo, 15  
evoluzione, mappa di, 17  
evoluzione, operatore di, 63  
evoluzione, trasformazione tangente, 18
- facce, 5  
fibra, 474  
fibra lineare, 12  
fibra lineare orientata, base, 12  
fibra lineare orientata, direttore, 12  
fibra tangente, 12  
fibra tipica, 439  
fibrata varietà, 473  
fibrato, 439  
fibrato tangente, 12  
fibre, 439  
flessionale, coppia, 420

- flessionale, curvatura, 419, 426  
 flessionale, rotazione, 419  
 flettente, sforzo, 420  
 fluido Newtoniano, 270  
 fluidodinamica, 265  
 flusso, 17, 63, 141, 380, 476  
 flusso di calore, densità di, 282  
 flusso di freddo, densità del, 280  
 flusso di un campo vettoriale, 130  
 flusso stazionario, 267  
 flusso, spinta del, 132  
 forma della potenza virtuale, 192  
 forma di volume, 29  
 forma esplicita, 300, 301  
 forma fondamentale, prima, 453  
 forma fondamentale, seconda, 455  
 forma implicita, 300, 301  
 forma parametrica, 76  
 formula di espansione di EULER, 65  
 formula di trasporto, 206  
 formula di CESÀRO, 115  
 formula di EULER, 66, 71  
 formula di GREEN, 9, 33, 187  
 formula di GREEN tensoriale, 293  
 formula di KILLING, 382  
 formula di KOSZUL, 150  
 formula di LAMB, 71  
 formula di NANSON, 31, 33  
 formula generale di GREEN, 187  
 formule di EULER, 61  
 formule di FRÉNET-SERRET, 389  
 forza concentrata, 229  
 forza d'inerzia, 261  
 forza d'inerzia, densità di, 261  
 forze attive, 370  
 forze di contatto, 220  
 forze di massa, 220  
 forze, sistema di, 191  
 freddo, densità del flusso, 280  
 funicolare, 409  
 funicolare, equazione della, 399, 400  
 funzionali lineari limitati, 191  
 funzione di sforzo, 297  
 funzione di AIRY, 115, 233  
 funzioni a supporto compatto, 178  
 funzioni di sforzo, 106  
 gradi di libertà locali, 299  
 gradiente della deformazione, 16  
 gradiente della mappa di evoluzione, 64  
 gradiente di velocità, decomp., 77  
 gradiente distribuzionale, 183, 306, 307  
 gradiente generalizzato, 306  
 grado di indeterminazione statica, 218  
 grado di iperstaticità, 218, 496  
 grado di labilità, 488, 496, 498  
 grafico, 194  
 Green-regolari, cinematici, 185  
 griglia di due suddivisioni, 4  
 gruppo delle isometrie, 21  
 Hessiano, 160  
 identità di BIANCHI, 165  
 identità di JACOBI, 136  
 identità di PIOLA, 33, 34  
 idrostatico, stato tensionale, 337  
 immagine chiusa, teorema, 214  
 implicita, rappresentazione, 221  
 inclusione differenziabile, 379  
 incognite iperstatiche, 497  
 inefficaci, reazioni, 489  
 inerzia, densità della forza, 261  
 inerzia, forza di, 261  
 inerzia, operatore di, 261  
 insieme affine, 195  
 insieme bilanciato, 195  
 insieme convesso, 195  
 insieme, bilanciato, 195  
 interazione, 191  
 interfacce, 4  
 interfacce di taglio, 4  
 intervallo di osservazione, 15  
 invariante scalare, 206  
 invariante, sottospazio lineare, 21  
 iperstaticità, relazione di, 492

- isometria, 20  
isometria infinitesima, 383  
isometria infinitesimale, 156  
isometria propria, 21  
isometria tra varietà di RIEMANN, 153  
isometrici, processi, 22  
isometrie proprie, sottogruppo delle, 21  
isometrie, gruppo delle, 21  
isostatica, 496
- jacobiano, determinante, 29, 65
- l'atto di scorrimento, 413  
labile, 496  
labilità, relazione d'ordine, 487  
labilità, variazione della, 487  
laplaciano di un campo scalare, 162  
lavori virtuali, principio dei, 208  
lavoro virtuale, 193  
legge di bilancio, 283  
legge di determinismo, 18, 142  
legge di CHAPMAN-KOLMOGOROV, 18  
legge di FOURIER, 282  
legge fondamentale della dinamica, 262  
leggi di EULER, 264  
lemma del valor medio, 8  
lemma di CAUCHY, 317  
lemma di HADAMARD, 123  
lemma fondamentale, 7  
linea di vortice, 81  
lineare, problema, 211  
lineare, varietà, 195  
linee di corrente, 63  
linee di flusso, 64  
liscio, vincolo, 197  
localizzazione, 5  
lunghezza, 20  
lunghezza, stazionarietà della, 84
- mappa di base, 475  
mappa di evoluzione, 17, 63
- mappa di evoluzione, gradiente, 64  
mappa di posizionamento, 14, 54, 63  
mappa di riferimento, 15  
mappa di trasferimento, 23  
massa, conservazione della, 258  
materiale, configurazione, 474  
materiale, curva, 70  
materiale, descrizione, 12  
materiale, equilibrio dinamico, 265  
materiale, superficie, 70  
membrana, 456  
metodo dei moltiplicatori di LAGRANGE, 407  
metodo delle caratteristiche, 139  
micromorfo, continuo, 292, 476  
micropolare, continuo, 477  
microsforzo, 480  
misura di deformazione, 47  
misura di deformazione di ALMANSI, 48, 50  
misura di deformazione di GREEN, 48, 50, 381  
misure di deformazione, 47  
modello strutturale ausiliario, 377  
mollificatore, 7  
moltiplicatore di LAGRANGE, 407  
momento della quantità di moto, 264  
momento risultante, 205, 231  
moti isocori, 69  
moto, 380, 475  
moto stazionario, 64  
multi-indice, 178
- Newtoniano, fluido, 271  
non ridondanza, condizione di, 302  
norma, 20, 177  
normale, sforzo, 420  
normale, versore, 388  
nucleo ed immagine, ortogonalità tra, 213  
numero di REYNOLDS, 272
- omotetie, 41  
operatore cinematico, 82, 83, 185, 199, 211, 367, 448  
operatore d'inerzia, 261  
operatore dei valori al contorno, 10, 186  
operatore del flusso al contorno, 10, 186

- operatore di deformazione, 47  
operatore di deformazione tangente, 83  
operatore di equilibrio, 202, 212  
operatore di equilibrio di massa, 368, 449  
operatore di evoluzione, 141  
operatore di forma, 455  
operatore di traccia, 182  
operatore di CARTAN, 388  
operatore di KORN, 187, 212, 215, 370, 464, 469  
operatore di WEINGARTEN, 455  
operatore lineare trasposto, 20  
operatore statico, 368  
operatori di vincolo, 301  
ortogonalità tra nucleo ed immagine, 213  
osservatore, cambiamento di, 54
- parallelismo, trasporto, 285  
parametri cinematici, 221, 300, 412, 497  
parametri di controllo, 221  
parametrizzazione, 13  
parentesi di JACOBI-LIE, 53, 136  
parentesi di LIE, 135  
parentesi di LIE-JACOBI, 455  
parte deviatorica, 95  
parte regolare, 279  
parte regolare della deformazione tangente, 185  
parte regolare, deformazione tangente, 185  
parte sferica, 95  
parte singolare, 279  
partizione di un dominio, 2  
parziale, relazione d'ordine, 485, 487, 492  
parziale, relazione di iperstaticità, 492  
perfetta continuità, 300  
piastra, 461  
piatta, varietà, 167  
polare, continuo, 292  
posizionamento, 475  
posizionamento nello spazio, 14  
posizionamento, mappa di, 14, 54  
posizione spaziale, 14  
postulato di CAUCHY, 316  
potenza compiuta, teorema della, 263  
potenza delle forze attive, 262
- potenza meccanica, 261  
potenza virtuale, 191  
potenza virtuale interna, 209  
potenza virtuale, principio dinamico, 262  
potenze virtuali, principio delle, 208, 227  
potenziale, 273  
pre-HILBERT, spazio, 177  
pressione, 270, 272  
prima diseguaglianza di KORN, 92  
prima forma fondamentale, 453  
prima identità di BIANCHI, 165  
primo principio della termodinamica, 278  
principio dei lavori virtuali, 208, 227  
principio del flusso di calore, 282  
principio delle forze virtuali, 236  
principio delle potenze virtuali, 208  
principio delle temperature virtuali, 278, 280  
principio di azione e reazione, 305  
principio di selezione di RELLICH, 216  
principio di sezionamento, 176, 202, 315  
principio di TORRICELLI, 404  
principio di TORRICELLI-BERNOULLI, 407  
principio dinamico della potenza virtuale, 262  
principio locale di azione e reazione, 225  
prisma di NOLL, 319  
problema ausiliario, 376  
problema di estremo vincolato, 407  
problema lineare, 211  
problemi di valori al contorno, 220  
processi isometrici, 22  
processo evolutivo, 15  
prodotto interno, 177  
produzione di energia, tasso di, 280  
proiettore, 379  
proiezione, 474  
proiezione, varietà fibrata, 474  
proprietà del segmento, 181  
proprietà di bilinearità, 192  
proprietà di densità, 180  
proprietà di equiproiettività, 76  
proprietà di estensione, 199  
proprietà di gruppo, 130  
proprietà di separazione, 192  
pseudo tempo, 15

- punto fisso, 37  
quadrato integrabile, 180  
quadrica di CAUCHY, 338  
quadrica reciproca, 338, 339  
quantità di moto, 264  
quota critica, 363  
  
rapporto di ribassamento, 402  
rappresentazione di SCHAEFER, 299  
rappresentazione di VOIGT, 90  
rappresentazione esplicita, 221  
rappresentazione implicita, 221  
rappresentazione ingegneristica, 90  
rappresentazione spettrale, 93  
reazioni cinematicamente efficaci, 489  
reazioni cinematicamente inefficaci, 489  
reazioni in autoequilibrio, 493  
reazioni vincolari, 197, 301, 369, 485, 491  
reazioni vincolari al contorno, 222  
reazioni vincolari esterne, 299  
reazioni vincolari interne, 300  
referenziale, equilibrio, 284  
regione, 2, 12, 35  
regione regolare, 2  
regola di LEIBNIZ, 67  
regole di complementarietà, 242, 375  
relazione d'ordine, 3  
relazione d'ordine parziale, 485, 487, 492  
relazione di SIGNORINI, 294  
ribassamento, rapporto di, 402  
riferimento locale, 388  
riferimento, mappa di, 15  
riflessione, 21  
rigidi semplici, cinematici, 75  
rigidi, cinematici, 201  
risultante, 231  
risultante, momento, 205, 231  
risultante, vettore, 205, 231  
rotazione, 21, 39  
rotazione flessionale, 419  
rotazione tangente, 78  
rotazione torsionale, 419, 432  
rotazione, asse di, 21  
rotazione, atto di, 78  
rotazione, equilibrio alla, 231  
rotazioni, sottogruppo delle, 21  
  
salto di discontinuità, 123  
scalare, campo, 130  
scorrimento, 419, 426  
scorrimento angolare, 27  
scorrimento angolare, atto di, 87  
scorrimento assiale, 419, 426  
scorrimento trasversale, 419, 426  
seconda diseguaglianza di KORN, 187, 212, 370  
seconda forma fondamentale, 455  
seconda identità di BIANCHI, 165  
semplicemente connesso, 2  
semplici, strutture, 496  
separazione, proprietà di, 192  
sezionamento, principio di, 176  
sezione, 474  
sezione del fibrato, 439  
sezioni trasversali, 386  
sferico, stato tensionale, 337  
sforzi conformi, 223, 372  
sforzi flettenti e torsionali, 464  
sforzi in autoequilibrio, 218, 232  
sforzi in equilibrio con forze di massa nulle, 373  
sforzi taglienti, 464  
sforzo, 480, 481  
sforzo coniugato, 288  
sforzo di coppia, 480, 481  
sforzo di taglio, 470  
sforzo equivalente, 265  
sforzo flettente, 420, 435, 438  
sforzo normale, 420, 435, 438  
sforzo normale-tagliente, 414  
sforzo tagliente, 420  
sforzo torcente, 420, 435  
sforzo torcente-flettente, 413  
sforzo GREEN-regolare, 227  
simboli di CHRISTOFFEL, 53, 149  
singolare, superficie, 123

- sistema cinematico, 234, 236, 371, 373  
 sistema cinematico congruente, 371  
 sistema di forze, 191  
 sistema di forze attive, 370  
 sistemi di coordinate, 13  
 sistemi di forze attive, 198, 199  
 sistemi di forze reattive, 369  
 sistemi reattivi autoequilibrati, 493  
 sistemi reattivi, rappresentazione dei, 303  
 solenoidale, campo, 107  
 soluzione di BELTRAMI, 107, 233  
 soluzione di MAXWELL, 107  
 soluzione di MORERA, 108  
 sorgente superficiale, 283  
 sorgente volumetrica, 283  
 sottogruppo delle rotazioni, 21  
 sottospazi lineari duali, 491  
 sottospazio dei cinematicismi rigidi, 200  
 sottospazio denso, 180  
 sottospazio lineare invariante, 21  
 spazi tangentici, 476  
 spaziale, equilibrio dinamico, 269  
 spazio ambiente, 474  
 spazio ambiente cinematico, 368  
 spazio ambiente degli sforzi, 368  
 spazio cinematico, 75, 175, 184, 368  
 spazio completo, 177  
 spazio degli sforzi, 369  
 spazio delle configurazioni, 379, 475  
 spazio delle forze, 369  
 spazio di BANACH, 177  
 spazio di HILBERT, 177, 235, 372  
 spazio di SOBOLEV, 180  
 spazio fisico, 379, 474  
 spazio pre-HILBERT, 177  
 spazio quoziante, 182  
 spazio tangente, 12, 379, 475  
 spazio vettoriale duale, 191  
 spettro, 93  
 spinta, 49, 128, 130  
 spinta attiva, 359  
 spinta attiva di RANKINE, 359  
 spinta del flusso, 132  
 spinta di ARCHIMEDE, 276  
 spinta inversa, 49, 130  
 spinta passiva, 359  
 spinta passiva di RANKINE, 359  
 spostamenti tangentici, 75, 175, 379, 475  
 spostamenti virtuali, 75, 175, 379, 475  
 spostamento, 18  
 staticamente determinata, 496  
 staticamente determinata, struttura, 219  
 staticamente indeterminata, 496  
 stato di sforzo, 208  
 stato tensionale, 208  
 stato tensionale biassiale, 338  
 stato tensionale idrostatico, 337  
 stato tensionale monoassiale, 338  
 stato tensionale piano, 338  
 stato tensionale puntuale, 330  
 stato tensionale sferico, 337  
 stato tensionale, definizione, 208  
 stato tensionale, simmetria, 290  
 stazionarietà della lunghezza, 84  
 stazionarietà, condizione di EULER, 409  
 stazionario, flusso, 267  
 stiramento, 40  
 struttura, 474  
 struttura continua, 194  
 struttura di riferimento, 379  
 struttura non vincolata, 198  
 struttura staticamente determinata, 219  
 struttura vincolata, 198  
 struttura, continuo con, 473  
 strutture semplici, 496  
 successione di CAUCHY, 177  
 suddivisione base, 221  
 suddivisione base del modello, 193  
 suddivisione di supporto, 184, 185, 368, 369  
 suddivisione di un dominio, 3  
 superfici di propagazione delle discontinuità, 126  
 superficie materiale, 70  
 superficie singolare, 123  
 supplementare topologico, 485  
 supporto, 6  
 supporto compatto, 6  
 suriettività, 220  
 synopsis cinematica, 46

- tagliante, sforzo, 420  
taglio, 4  
taglio completo, 4  
taglio, cono di, 340  
tangente, campo vettoriale, 129  
tangente, deformazione, 78  
tangente, fibrato, 12  
tangente, rotazione, 78  
tangente, trasformazione, 16  
tangente, versore, 388  
tasso di produzione di energia, 280  
temperatura virtuale, campo di, 278  
temperature virtuali, principio delle, 280  
tempo, pseudo, 15  
tensione deviatorica, 343  
tensione normale, 331  
tensione sferica, 343  
tensione tangenziale, 331  
tensioni principali, 337  
tensioni, ellissoide di LAMÉ, 341  
tensore curvatura, 162  
tensore destro di CAUCHY-GREEN, 48  
tensore di torsione, 149  
tensore di CAUCHY, 48  
tensore di FINGER, 48  
tensore di KIRCHHOFF, 286  
tensore di PIOLA, 48, 285  
tensore di PIOLA-GREEN, 48  
tensore di PIOLA-KIRCHHOFF, 287  
tensore ruotato, 23  
tensore sinistro di CAUCHY-GREEN, 48  
tensori simmetrici GREEN-regolari, 186  
tensoriale, campo, 131  
teorema dei lavori virtuali, 215, 228  
teorema del trasporto, 145  
teorema del trasporto di REYNOLDS, 66  
teorema dell'alternativa, 495, 497  
teorema dell'immagine chiusa, 214  
teorema della potenza compiuta, 263  
teorema delle potenze virtuali, 228  
teorema di estensione di HAHN, 199  
teorema di CAUCHY, 225  
teorema di DA SILVA, 297  
teorema di KELVIN, 79  
teorema di LAGRANGE-CAUCHY, 80  
teorema di MAXWELL, 124  
teorema di TORRICELLI, 267  
teorema di ZAREMBA-ZORAWSKI, 98  
teorema egregium di GAUSS, 456  
teorema fond. geometria di RIEMANN, 150  
teorema fondamentale di CAUCHY, 319  
termodinamica, primo principio, 278  
terna intrinseca, 388  
tetraedrali, componenti, 337  
tetraedro di CAUCHY, 318  
Theorema Egregium, 456  
tiro, 398  
torcente, sforzo, 420  
torsionale, coppia, 420  
torsionale, curvatura, 419, 426  
torsionale, rotazione, 419, 432  
torsione, 389  
torsione della connessione, 149  
torsione, tensore di, 149  
traccia al contorno, 181  
traiettoria, 15, 380, 476  
trascinamento, accelerazione di, 99, 158  
trasformata di PIOLA, 32  
trasformazione rigida, 42  
trasformazione tangente, 16, 18  
trasformazioni isocore, 30  
trasformazioni isometriche, 19  
traslazione, 37  
traslazione assiale, 419, 432  
traslazione destra, 38  
traslazione sinistra, 38  
traslazione trasversale, 419, 432  
traslazione, equilibrio alla, 231  
traslazione, velocità di, 76  
trasporto del volume, 69  
trasporto della circolazione, 79  
trasporto parallelo, 285  
trasporto, formula di, 206  
trasporto, teorema del, 66, 145  
trasposto parallelo, 150  
trasversale, carico, 420  
trasversale, scorrimento, 419, 426  
trasversale, traslazione, 419, 432

- trasversali, sezioni, 386  
 trave ausiliaria, 416  
 trave deformabile a taglio, 386, 412  
 trave di BERNOULLI-EULER, 387, 426  
 trave di TIMOSHENKO, 386  
 trave indeformabile a taglio, 386  
 trave inflessa, 438  
 trave, asse della, 386  
  
 valor medio, formula del, 295  
 valor medio, lemma del, 8  
 valori principali, 93  
 variazionali, condizioni di congruenza, 240  
 variazionali, condizioni di equilibrio, 239  
 variazione dei vincoli, 485  
 variazione del grado di labilità, 488  
 variazione dell'iperstaticità, 495  
 variazione della labilità, 487, 495  
 variazione di un volume materiale, 65  
 variazione di una linea materiale, 66  
 variazione di una superficie materiale, 65  
 variazione finita dei vincoli, 495, 497  
 variazioni ammissibili, 195  
 variazioni, calcolo delle, 407  
 varietà base, 439  
 varietà di base, 474  
 varietà di RIEMANN, 147  
 varietà di RIEMANN isometrica, 153  
 varietà differenziabile, 12, 439  
 varietà fibrata, 474, 476  
 varietà lineare, 195  
 varietà piatta, 167  
 varietà totale, 474  
 velocità, 60, 75, 175  
 velocità angolare, 76, 78  
 velocità di dilatazione, 87  
 velocità di scorrimento angolare, 87  
 velocità di trascinamento, 412  
 velocità di traslazione, 76, 200  
 velocità di traslazione apparente, 413  
 velocità di traslazione relativa, 412  
 velocità spaziale, 60  
 velocità tangentì, 175  
 velocità virtuali, 175  
  
 versore binormale, 388  
 versore normale, 388, 453  
 versore tangente, 388  
 vettore assiale del momento risultante, 205  
 vettore assiale della velocità angolare, 200  
 vettore momento risultante, 231  
 vettore risultante, 205, 231  
 vettori caratteristici, 76, 200, 205, 231  
 vettori tensione secondo MOHR, 348  
 vettoriale, campo, 130  
 vettoriale, campo tangente, 129  
 vincoli al contorno, 299  
 vincoli ben posti, 302  
 vincoli cinematicamente efficaci, 491  
 vincoli cinematicamente inefficaci, 491  
 vincoli di continuità, 198  
 vincoli di interfaccia, 198  
 vincoli eliminati, 486, 491  
 vincoli lineari, 485  
 vincoli semplici efficaci, 490  
 vincoli semplici indipendenti, 487  
 vincoli, relazione d'ordine, 485  
 vincoli, variazione dei, 485  
 vincoli, variazione finita, 495, 497  
 vincolo cinematico, 194  
 vincolo liscio, 197  
 vincolo perfetto e bilaterale, 196  
 vincolo semplice, 495, 497  
 vincolo, bilaterale, 196  
 virtuale, lavoro, 193  
 virtuale, potenza, 193  
 virtuali, principio delle potenze, 227  
 virtuali, spostamenti, 75  
 virtuali, velocità, 75  
 viscosità cinematica, 270  
 viscosità dinamica, 270  
 volume di controllo, 260, 267  
 volume di controllo, equilibrio dinamico, 267  
 volume materiale, 67  
 vortice, linea di, 81  
 vorticità, 78  
  
 zoom, 42

## INDICE DELLE NOTE BIOGRAFICHE

- ABEL, NIELS, 133  
AIRY, GEORGE, 115  
ALEKSANDROV, PAVEL, 18  
AMPÈRE, ANDRÉ MARIE, 24  
ARAGO, DOMINIQUE, 338  
ARCHIMEDE, 276  
BELTRAMI, EUGENIO, 100  
BERNOULLI, JACOB, 201, 386, 403  
BERNOULLI, JOHANN, 201, 403  
BESSEL, FRIEDRICH, 29  
BESSEL, WILHELM, 454  
BETTI, ENRICO, 147, 165  
BIANCHI, LUIGI, 124, 165  
BIOT, JEAN-BAPTISTE, 24  
BOLYAI, FARKAS, 454  
BOLYAI, JÁNOS, 454  
BORCHARDT, CARL, 147  
BRIDGMAN, PERCY, 96  
BUNSEN, ROBERT, 100  
CAPURSO, MICHELE, 101  
CARNOT, LAZARE, 282  
CARNOT, SADI, 339  
CARTAN, ELIE, 388  
CARTAN, HENRI, 17  
CAUCHY, AUGUSTIN, 24  
CAVALIERI, BONAVENTURA, 270  
CAVENDISH, HENRY, 9  
CESÀRO, ERNESTO, 101  
CHAPMAN, SYDNEY, 18  
CHASLES, MICHEL, 133  
CHRISTOFFEL, ELWIN, 100, 149  
CLAPEYRON, EMILE, 339  
CLEBSCH, RUDOLF, 100, 133, 269  
CORIOLIS, GASPARD, 269  
CORIOLIS, GUSTAVE, 158  
COULOMB, CHARLES, 357  
CULMANN, KARL, 343  
D'ALEMBERT, JEAN, 69, 174, 201, 260  
DARBOUX, JEAN, 133  
DESCARTES, RENÉ, 270  
DIEUDONNÉ, JEAN, 17  
DINI, ULLISSE, 165  
DIRICHLET, LEJEUNE, 52, 147  
EISENSTEIN, GOTTHOLD, 147  
ENGEL, FRIEDRICH, 133  
EULER, LEONHARD, 29, 61, 174, 201, 386, 409  
FERMAT, PIERRE DE, 270  
FOURIER, JOSEPH, 29, 282  
FREDHOLM, ERIK, 101  
FRESNEL, AUGUSTIN, 338  
FRÉNET, JEAN, 389  
GALILEI, GALILEO, 403  
GALOIS, EVARISTE, 133  
GAUSS, FRIEDRICH, 29, 52, 454  
GELFAND, ISRAIL, 180  
GERMAIN, SOPHIE, 454  
GRASSMANN, HERMANN, 100  
GREEN, GEORGE, 9  
GREGORY, DUNCAN, 9  
HADAMARD, JACQUES, 123  
HELMHOLTZ, HERMANN, 72, 100  
HESSE, LUDWIG, 160  
HILBERT, DAVID, 101, 176  
HUYGENS, CHRISTIAAN, 403  
JACOBI, CARL, 29, 147  
JOACHIMSTHAL, FERDINAND, 149  
JORDAN, CAMILLE, 123, 133  
KEPLER, JOHANNES, 270  
KILLING, WILHELM, 84  
KIRCHHOFF, GUSTAV, 100  
KLEIN, FELIX, 2, 133, 165  
KOLMOGOROV, ANDREY, 18  
KRONECKER, LEOPOLD, 133  
KUMMER, ERNST, 133, 147  
KÁRMÁN, TEODORE VON, 461  
L'HÔPITAL, GUILLAME, 201  
LAGRANGE, JOSEPH-LOUIS, 24, 74, 282, 407  
LAMB, HORACE, 66  
LAMÉ, GABRIEL, 339  
LAPLACE, PIERRE-SIMON, 24, 282  
LEGENDRE, ADRIEN-MARIE, 29  
LEIBNIZ, GOTTFRIED, 67, 403  
LEVI-CIVITA, TULLIO, 149  
LIE, MARIUS, 133  
LIOUVILLE, JOSEPH, 9  
LIPSCHITZ, RUDOLF, 100  
LOBACHEVSKY, NIKOLAI, 454  
MAXWELL, JAMES, 107



- MOHR, OTTO, 343, 378, 416  
MONGE, GASPARD, 282  
NANSON, EDWARD, 31  
NAVIER, CLAUDE, 269  
NEUMANN, FRANZ, 29  
NEWTON, ISAAC, 270  
NOBEL, ALFRED, 96  
OHM, GEORG, 100  
PASCAL, BLAISE, 270  
PFAFF, FRIEDRICH, 454  
PIOLA, GABRIO, 32  
POINCARÉ, HENRI, 123  
POISEUILLE, JEAN, 271  
POISSON, SIMÉON-DENIS, 29  
PONCELET, JEAN, 100  
PRANDTL, LUDWIG, 461  
RANKINE, WILLIAM, 344  
REYE, THEODOR, 133  
REYNOLDS, OSBORNE, 66  
RICCI-CURBASTRO, GREGORIO, 102  
RIEMANN, GEORG, 52, 147  
ROMANO, MANFREDI, 344  
SAINT-VENANT, ADHÉMAR, 100, 269  
SCHICKARD, WILHELM, 270  
SCHWARTZ, LAURENT, 180  
SERRET, JOSEPH, 389  
SMIRNOV, VLADIMIR, 180  
SOBOLEV, SERGEI, 180  
STEINER, JAKOB, 147  
STEKLOV, VLADIMIR, 180  
STOKES, GABRIEL, 100, 269  
STRUTT, JOHN, LORD RAYLEIGH, 180  
STURM, JACQUES, 9  
SYLOW, PETER, 133  
SYLVESTER, JAMES, 9  
THOMSON, WILLIAM, LORD KELVIN, 9, 74  
TIMOSHENKO, STEPHEN, 386  
TORRICELLI, EVANGELISTA, 404  
VARIGNON, PIERRE, 201  
VOIGT, WOLDEMAR, 90, 334  
VOLTERRA, VITO, 101  
WEBER, WILHELM, 147, 454  
WEIERSTRASS, KARL, 133, 147  
WEINGARTEN, JULIUS, 124, 165, 455  
ZAREMBA, STANISLAW, 97  
ZORAWSKI, KASIMIERZ, 72, 97