

## INDICE

### PREMESSA

<b>I – ELASTICITA'</b> . . . . .	1
<b>1. ELEMENTI DI TERMODINAMICA DEI CONTINUI</b> . . . . .	1
1.1. Diseguaglianza di Clausius-Duhem . . . . .	3
<b>2. RELAZIONI COSTITUTIVE</b> . . . . .	5
2.1. Principio di indifferenza materiale . . . . .	6
2.2. Materiali ipoelastici . . . . .	7
<b>3. ELASTICITA' LINEARIZZATA</b> . . . . .	11
3.1. Legge di Hooke . . . . .	12
3.2. Cedevolessa e rigidezza elastica . . . . .	12
3.3. Cedevolessa e rigidezza tangenti . . . . .	14
3.4. Conservatività del legame elastico . . . . .	15
3.5. Energia di deformazione elastica . . . . .	18
3.6. Energia elastica complementare . . . . .	18
3.7. Synopsis . . . . .	22
3.8. Legame elastico lineare . . . . .	23
3.9. Costanti elastiche . . . . .	25
<b>4. SIMMETRIE MATERIALI ED ISOTROPIA</b> . . . . .	26
4.1. Gruppi di simmetria materiale . . . . .	29
4.2. Elasticità lineare isotropa . . . . .	30
4.3. Elasticità isotropa non lineare . . . . .	39
4.4. Elasticità anisotropa . . . . .	41
4.4.1. <i>Materiali monoclini</i> . . . . .	42
4.4.2. <i>Materiali ortotropi</i> . . . . .	42
4.4.3. <i>Materiali trasversalmente isotropi</i> . . . . .	43
4.5. Stati piani di deformazione . . . . .	44
4.6. Stati piani di tensione . . . . .	45
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>II – STRUTTURE ELASTICHE</b> . . . . .	49

<b>1. TEORIA LINEARIZZATA</b>	49
<b>2. EQUILIBRIO ELASTICO</b>	50
2.1. Formulazione in termini di spostamenti	51
2.2. Unicità della soluzione elastostatica	53
2.3. Elastodinamica	53
2.4. Teorema di Clapeyron	55
2.5. Teorema di Betti	59
2.6. Estensione del teorema di Clapeyron	62
2.7. Estensione del teorema di Betti	63
2.8. Metodo degli spostamenti	66
2.8.1. <i>Applicazione alle travature</i>	69
2.9. Esistenza della soluzione in elastostatica	73
2.10. Equazioni differenziali di equilibrio elastico	76
<b>3. CONGRUENZA ELASTICA</b>	79
3.1. Formulazione in termini di sforzi	79
3.1.1. <i>Metodo delle forze</i>	80
3.2. Equazione differenziale di congruenza elastica	81
<b>4. PRINCIPI DI ESTREMO</b>	82
4.1. Energia potenziale	83
4.2. Energia potenziale complementare	84
<b>5. ONDE ELASTICHE</b>	86
5.1. Onde progressive	90
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>III – ELASTICITA' GENERALIZZATA</b>	95
<b>1. LEGAMI MULTIVOCI</b>	95
1.1. Legami conservativi	98
1.2. Legami elastici generalizzati	101
<b>2. POTENZIALI CONVESSI</b>	102
2.1. Potenziali coniugati	107

2.2. Relazioni di coniugio . . . . .	112
2.3. Stretta monotonia, stretta convessità e differenziabilità . . . . .	114
2.4. Convessità e sottodifferenziabilità locali . . . . .	116
<b>3. CALCOLO SUBDIFFERENZIALE</b> . . . . .	117
<b>4. STRUTTURE CON ELASTICITÀ GENERALIZZATA</b> . . . . .	122
4.1. Problema elastico generalizzato . . . . .	125
4.2. Esistenza della soluzione . . . . .	127
<b>5. ANALISI LIMITE</b> . . . . .	131
5.1. Frontiera e frontiera relativa di un convesso . . . . .	132
5.2. Processi evolutivi in un convesso . . . . .	133
5.3. Separazione di convessi . . . . .	134
5.4. Processi di traslazione relativa tra due convessi . . . . .	138
5.5. Forma variazionale delle condizioni di compatibilità . . . . .	139
5.6. Teorema fondamentale dell'analisi limite . . . . .	139
5.7. Processi di carico . . . . .	141
<b>6. FORMULAZIONI VARIAZIONALI</b> . . . . .	143
6.1. Funzionali misti . . . . .	147
6.2. L'albero variazionale . . . . .	149
6.3. Diseguaglianze variazionali . . . . .	150
6.4. Unicità della soluzione . . . . .	151
<b>7. TEOREMI DI CASTIGLIANO E DI MENABREA</b> . . . . .	151
<b>8. MODELLI ULTRAELASTICI</b> . . . . .	156
8.1. Plasticità perfetta . . . . .	156
8.2. Plasticità incrementale . . . . .	158
8.3. Viscoplasticità . . . . .	162
8.4. Un modello generale . . . . .	163
8.5. Elastoplasticità incrementale . . . . .	168
8.5.1. <i>Principi variazionali in elastoplasticità incrementale</i> . . . . .	170
<b>9. ALGORITMI SOLUTIVI</b> . . . . .	172

9.1. Teoremi di confronto . . . . .	173
9.2. Metodo iterativo . . . . .	174
9.3. Convergenza dell'algoritmo . . . . .	175
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>V – TRAVATURE PIANE</b> . . . . .	179
<b>1. INTERPOLAZIONE</b> . . . . .	179
1.1. Interpolazione lineare . . . . .	182
1.2. Sottospazi interpolanti . . . . .	182
1.2.1. <i>Proprietà di identificazione</i> . . . . .	183
1.2.2. <i>Proprietà di complementarietà</i> . . . . .	183
1.2.3. <i>Proprietà di proiezione</i> . . . . .	184
1.2.4. <i>Proprietà di isomorfismo quoziante</i> . . . . .	184
1.3. Interpolazione in spazi non finitamente generabili . . . . .	185
1.4. Interpolazione in spazi di dimensione finita . . . . .	186
1.5. Esercizi . . . . .	190
1.6. Soluzione degli esercizi . . . . .	190
1.7. Discussione degli esempi . . . . .	191
1.8. Polinomi di Hermite . . . . .	192
1.8.1. <i>Interpretazione meccanica</i> . . . . .	194
<b>2. METODO DEGLI SPOSTAMENTI</b> . . . . .	195
2.1. Assemblaggio . . . . .	196
2.1.1. <i>Equilibrio elastico della struttura assemblata</i> . . . . .	197
2.1.2. <i>Definizione parametrica dei vincoli</i> . . . . .	197
2.2. Analisi dell'elemento trave . . . . .	198
2.3. Lo schema discreto . . . . .	200
2.4. Lo schema continuo . . . . .	202
2.4.1. <i>Carico affine</i> . . . . .	202
2.4.2. <i>Distorsione di curvatura costante</i> . . . . .	206
2.5. Matrice di rigidezza . . . . .	206

2.6. Assemblaggio della travatura . . . . .	207
2.7. Vincoli e cedimenti . . . . .	211
2.7.1. <i>Vincoli e cedimenti nodali</i> . . . . .	211
2.8. Vincoli e cedimenti alle estremità delle travi . . . . .	216
2.9. Risultati . . . . .	219
<b>3. TRAVATURE RETICOLARI</b> . . . . .	219
3.1. Analisi delle singole aste . . . . .	220
3.2. Assemblaggio della travatura reticolare . . . . .	220
3.3. Vincoli esterni e cedimenti imposti . . . . .	222
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>VI – FORMULAZIONI VARIAZIONALI</b> . . . . .	227
<b>1. PROPRIETA' FUNZIONALI</b> . . . . .	228
1.1. Legame costitutivo lineare . . . . .	228
1.2. Vincoli elastici lineari . . . . .	231
1.3. Problemi elastici al contorno . . . . .	232
<b>2. FORMULAZIONE PRIMALE</b> . . . . .	233
2.1. Problema misto primale . . . . .	234
2.2. Formulazione in termini di operatori . . . . .	236
2.3. Buona posizione . . . . .	238
2.4. Condizioni di ammissibilità dei dati . . . . .	240
2.5. Condizioni di buona posizione . . . . .	242
2.6. Elasticità non singolare . . . . .	243
2.7. Funzionale di HELLINGER-REISSNER . . . . .	245
2.8. Funzionale energia potenziale . . . . .	246
<b>3. FORMULAZIONE COMPLEMENTARE</b> . . . . .	248
3.1. Problema misto complementare . . . . .	248
3.2. Funzionale misto complementare . . . . .	254
3.3. Funzionale energia complementare . . . . .	255
<b>4. FORMULAZIONI IBRIDE</b> . . . . .	260

4.1. Formulazioni ibride primali . . . . .	260
<i>4.1.1. Il caso generale</i> . . . . .	260
4.2. Formulazioni ibride complementari . . . . .	268
<b>5. SYNOPSIS</b> . . . . .	274
<b>6. COMPLEMENTI</b> . . . . .	277
6.1. Teorema primale . . . . .	277
<i>6.1.1. Dimostrazione del teorema primale</i> . . . . .	278
<i>6.1.2. Il modello strutturale ridotto</i> . . . . .	281
6.2. Condizioni sufficienti per la buona posizione . . . . .	284
6.3. Maggiorazione della soluzione . . . . .	288
6.4. Teorema complementare . . . . .	292
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>VII – MODELLI DISCRETI</b> . . . . .	297
<b>1. MODELLO MISTO DISCRETO</b> . . . . .	297
1.1. Equilibrio . . . . .	297
1.2. Congruenza . . . . .	299
<b>2. DISCRETIZZAZIONE DEI PROBLEMI MISTI</b> . . . . .	301
2.1. Stima dell'errore . . . . .	302
2.2. Condizione <i>LBB</i> e convergenza . . . . .	303
<b>3. APPROXIMAZIONI CONFORMI</b> . . . . .	306
3.1. Metodo di Rayleigh-Ritz . . . . .	306
3.2. Lemma di Céa e stima dell'errore . . . . .	309
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>VIII – TRAVI ELASTICHE IN GRANDI SPOSTAMENTI</b> . . . . .	315
<b>1. CONTINUI CON STRUTTURA</b> . . . . .	316
1.1. Continui elasticci . . . . .	322
1.2. Equilibrio elastico . . . . .	322
1.3. Equilibrio incrementale . . . . .	323
<b>2. LA TRAVE ELASTICA DI TIMOSHENKO</b> . . . . .	329

2.1. Equilibrio elastico . . . . .	331
2.2. Rigidezza tangente . . . . .	331
2.3. Rigidezza tangente geometrica . . . . .	332
2.3.1. <i>Metrica di Riemann</i> . . . . .	334
2.3.2. <i>Parentesi di Lie</i> . . . . .	334
2.3.3. <i>Formula di Koszul per la derivata covariante</i> . . . . .	335
2.3.4. <i>Completamento del calcolo della rigidezza geometrica</i> . . . . .	336
2.4. Forma matriciale della rigidezza tangente . . . . .	337
2.4.1. <i>Rigidezza tangente elastica</i> . . . . .	338
2.4.2. <i>Rigidezza tangente geometrica</i> . . . . .	339
2.4.3. <i>Rigidezza tangente</i> . . . . .	341
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>IX – GEOMETRIA delle MASSE</b> . . . . .	345
<b>1. MOMENTI DI UN CAMPO DI PESI</b> . . . . .	345
1.1. Formule notevoli . . . . .	348
1.2. Figure poligonali . . . . .	350
1.3. Cambiamento di riferimento . . . . .	354
<b>2. TENSORE DI INERZIA</b> . . . . .	357
2.1. Ellisse centrale di inerzia . . . . .	357
2.2. Ellisse di Culmann . . . . .	358
2.3. Antipolarità . . . . .	361
2.3.1. <i>Proprietà della corrispondenza tra rette e centri relativi</i> . . . . .	364
2.4. Il nocciolo di inerzia . . . . .	367
2.5. Polarità . . . . .	367
<b>3. ESEMPI</b> . . . . .	369
3.1. La sezione rettangolare . . . . .	369
3.2. Il settore circolare . . . . .	371
3.3. La sezione circolare . . . . .	373
3.4. La corona circolare . . . . .	374

**RIFERIMENTI**

<b>X – IL SOLIDO TRAVE</b>	377
<b>1. PROBLEMA di SAINT-VENANT</b>	377
1.1. Principio di Saint Venant	377
1.2. Ipotesi sullo stato tensionale	379
<i>1.2.1. Direzioni principali</i>	383
1.3. Condizioni di equilibrio	384
1.4. Caratteristiche della sollecitazione	386
1.5. Relazioni costitutive	387
1.6. Programma della trattazione	389
<b>2. SFORZO NORMALE E FLESSIONE</b>	389
2.1. Equilibrio elastico	391
2.2. Gli assi della flessione e le relazioni di coniugio	396
2.3. Flessione semplice	398
2.4. Sforzo normale centrato	399
2.5. Sforzo normale eccentrico	400
2.6. Le sezioni omogenee	403
2.7. Il campo di spostamenti	406
2.8. La linea elastica	410
<i>2.8.1. La linea elastica nel caso di flessione retta</i>	412
2.9. Materiali non resistenti a trazione	414
<b>3. LA SOLLECITAZIONE DI TORSIONE</b>	416
3.1. La sezione circolare e a corona circolare	417
<i>3.1.1. Effetto del rapporto tra spessore e raggio</i>	422
3.2. Sezioni di forma qualsiasi	424
3.3. Il problema di Neumann per l'ingobbamento	428
3.4. Funzioni armoniche coniugate	432
<i>3.4.1. Il problema di Dirichlet per l'armonica coniugata</i>	435
3.5. La torsione come problema di Dirichlet	438

3.6. La funzione di Prandtl . . . . .	439
3.7. Analogia idrodinamica . . . . .	443
3.8. Soluzioni notevoli . . . . .	444
3.8.1. <i>Torsione del cilindro ellittico</i> . . . . .	444
3.8.2. <i>Torsione del prisma triangolare equilatero</i> . . . . .	447
3.8.3. <i>Effetto d'intaglio</i> . . . . .	450
<b>4. COMPLEMENTI</b> . . . . .	451
4.1. Analogia col problema dell'equilibrio elastico . . . . .	459
<b>5. LA SOLLECITAZIONE DI TAGLIO E FLESSIONE</b> . . . . .	463
5.1. La trattazione di Jourawski . . . . .	464
5.1.1. <i>Corda parallela all'asse neutro</i> . . . . .	468
5.2. La deformabilità a taglio della sezione . . . . .	472
5.2.1. <i>Il tensore dei fattori di taglio</i> . . . . .	472
5.2.2. <i>La sezione rettangolare</i> . . . . .	477
5.2.3. <i>La sezione a C</i> . . . . .	477
5.3. Il centro di taglio . . . . .	479
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>XI – LE TRAVI CON PARETI SOTTILI</b> . . . . .	483
<b>1. SEZIONI SOTTILI</b> . . . . .	483
1.1. Le tensioni tangenziali da torsione . . . . .	491
1.1.1. <i>I tubi sottili</i> . . . . .	492
1.1.2. <i>Le sezioni sottili aperte con spessore costante</i> . . . . .	494
1.1.3. <i>Le sezioni multicellulari</i> . . . . .	496
1.1.4. <i>Le sezioni sottili composte</i> . . . . .	499
1.2. Le tensioni tangenziali da taglio . . . . .	501
1.3. Le sezioni sottili aperte . . . . .	502
1.4. Le sezioni sottili tubolari . . . . .	504
1.5. Le sezioni sottili multicellulari . . . . .	505
1.6. Il centro di taglio delle sezioni sottili . . . . .	506

<i>1.6.1. Il centro di taglio delle sezioni sottili aperte</i>	507
<i>1.6.2. Il centro di taglio delle sezioni sottili multicellulari</i>	508
<i>1.7. Il tensore dei fattori di taglio per sezioni sottili</i>	509
<i>1.7.1. Il tensore dei fattori di taglio per sezioni sottili aperte</i>	509
<i>1.7.2. Il tensore dei fattori di taglio per sezioni sottili multicellulari</i>	510
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>XII – COMPORTAMENTI ULTRA ELASTICI</b>	513
<b>1. INTRODUZIONE</b>	513
<b>2. PROVA DI TRAZIONE</b>	514
<b>3. ASPETTI MICROSCOPICI</b>	521
3.1. La struttura cristallina	521
3.2. Forze di legame	524
3.3. Vacanze e difetti interstiziali	525
3.4. Dislocazioni	528
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>XIII – CRITERI di RESISTENZA</b>	537
<b>1. PREMESSA</b>	537
<b>2. CRITERI ISOTROPI</b>	542
2.1. Rappresentazione nel piano deviatorico	547
<b>3. CRITERI PER MATERIALI FRAGILI</b>	552
3.1. Criterio della massima tensione normale	553
3.2. Criterio della massima dilatazione	554
3.3. Criterio del potenziale elastico	555
<b>4. CRITERI PER MATERIALI METALLICI</b>	556
4.1. Criterio di Tresca-Saint Venant	557
4.2. Criterio di Maxwell-Huber-von Mises	560
<i>4.2.1. Criterio del potenziale elastico di forma</i>	561
<i>4.2.2. Criterio dell'invariante quadratico del deviatore degli sforzi</i>	562
<i>4.2.3. Criterio della tensione tangenziale ottaedrale</i>	565

4.2.4. Criterio della tensione tangenziale media quadratica . . . . .	566
4.3. Criterio di Schleicher . . . . .	568
4.4. Criterio di Hill . . . . .	569
<b>5. CRITERI PER MATERIALI ANISOTROPI . . . . .</b>	<b>571</b>
5.1. Criterio di Hill per materiali anisotropi . . . . .	571
5.2. Criterio di Tsai-Hill . . . . .	572
<b>6. CRITERIO DI MOHR-CAQUOT . . . . .</b>	<b>575</b>
6.1. Criterio di Coulomb-Mohr . . . . .	579
6.2. Criterio di Drucker-Prager . . . . .	581
<b>7. STATI TENSIONALI SPECIALI . . . . .</b>	<b>582</b>
7.1. Stati tensionali equibiaxiali . . . . .	582
7.2. Stati tensionali alla Saint Venant . . . . .	582
7.2.1. Criterio di Tresca . . . . .	583
7.2.2. Criterio di von Mises . . . . .	583
<b>RIFERIMENTI</b>	
<b>INDICE ANALITICO . . . . .</b>	<b>587</b>
<b>INDICE DELLE NOTE BIOGRAFICHE . . . . .</b>	<b>600</b>



## PREMESSA

Questo secondo tomo del testo di Scienza delle Costruzioni è per gran parte dedicato all'analisi delle strutture in campo elastico e dei relativi metodi solutivi, sia esatti che approssimati. Gli ultimi due capitoli forniscono invece gli elementi essenziali del comportamento ultraelastico dei materiali ed una panoramica dei principali criteri di resistenza per materiali fragili e duttili.

In accordo con la trattazione svolta nel Tomo I, la formulazione variazionale occupa una posizione privilegiata negli sviluppi sia teorici che applicativi.

Il primo capitolo descrive la modellazione del comportamento elastico nel quadro della teoria linearizzata. Dopo una disamina delle proprietà di un materiale elastico alla GREEN sono illustrati i risultati essenziali relativi ai gruppi di simmetria materiale. Segue la classica trattazione delle relazioni di NAVIER-LAMÉ per materiali elastici isotropi ed alcuni cenni sui comportamenti anisotropi con particolare riferimento ai materiali ortotropi e trasversalmente isotropi.

Il secondo capitolo è dedicato alla formulazione del problema dell'equilibrio elastico. Nell'approccio in termini di spostamento sono illustrati e discussi i classici teoremi di CLAPEYRON e MAXWELL-BETTI-RAYLEIGH, il principio di estremo dell'energia potenziale, il metodo degli spostamenti per la soluzione del problema dell'equilibrio elastico, le equazioni differenziali dell'equilibrio elastico di NAVIER-CAUCHY e gli aspetti essenziali della propagazione del suono in un mezzo elastico lineare ed isotropo. Nell'approccio in termini di tensioni sono trattati il principio di estremo dell'energia complementare, il metodo delle forze e le equazioni differenziali di congruenza elastica di BELTRAMI-DONATI-MICHELL.

Il terzo capitolo è dedicato all'illustrazione degli elementi di base dell'Analisi Convessa ed allo sviluppo di una teoria variazionale dell'equilibrio in presenza di legami costitutivi monotonici multivoci. Le condizioni di esistenza di una soluzione conducono naturalmente alla discussione dell'Analisi Limite delle strutture ed alla formulazione del relativo teorema fondamentale. Si mostra quindi come i risultati della teoria possano essere direttamente applicati alla formulazione variazionale dei problemi di viscoplasticità e di elastoplasticità incrementale.

Nel quarto capitolo, dopo una presentazione degli elementi essenziali della interpolazione lineare, viene illustrata la procedura di implementazione del metodo degli spostamenti.

E' affrontata quindi in dettaglio la soluzione di una travatura elastica piana costituita dall'assemblaggio di travi semplici ad asse rettilineo, considerando il caso generale in cui le travi possono essere vincolate ai nodi mediante vincoli di non completa solidarietà. La trattazione è poi ridisegnata per adattarla al caso particolare delle travature reticolari.

Il quinto capitolo è più impegnativo essendo dedicato alla teoria della formulazione variazionale del problema elastico di strutture con elasticità lineare anche singolare.

In tale contesto generale il problema deve essere necessariamente espresso in forma mista, imponendo cioè sia la condizione di equilibrio che quella di congruenza ed assumendo quali campi incogniti sia il campo degli spostamenti che quello degli sforzi.

La trattazione mostra che sono perseguiti due approcci, corrispondenti alle forme miste primale e complementare del problema elastico lineare.

Una precisa definizione degli spazi funzionali in cui sono posti i problemi consente di sviluppare una teoria che, basandosi su risultati classici di Analisi Lineare, fornisce le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema elastico.

Segue quindi una trattazione generale delle cosiddette formulazioni ibride del problema elastico lineare.

Le formulazioni ibride sono caratterizzate da un rilassamento delle condizioni di continuità dei campi incogniti in corrispondenza delle interfacce di una suddivisione finita del dominio di definizione della struttura, e dal ripristino della continuità violata mediante l'imposizione di condizioni variazionali poste in forma integrale sulle interfacce. I relativi risultati di esistenza ed unicità sono dedotti da quelli stabiliti per le formulazioni miste primale e complementare.

Il sesto capitolo fornisce una introduzione generale all'approssimazione interna del problema elastico. Si mostra come dalla formulazione variazionale si pervenga in modo diretto alle formulazioni approssimate, trattando prima il caso generale delle formulazioni miste e quindi quello della formulazione negli spostamenti.

Nel settimo capitolo si affronta lo studio delle travi elastiche in grandi spostamenti. La trattazione è svolta con riferimento al modello di TIMOSHENKO di trave deformabile a taglio e fornisce l'espressione della rigidezza tangente facendo ricorso a concetti e risultati di geometria differenziale esposti nel Tomo I.

I capitoli VIII, IX e X sono dedicati ad argomenti tradizionali della disciplina quali la geometria delle masse, la trave di SAINT VENANT e le travi con pareti sottili. La geometria delle masse è trattata con un approccio analitico e con metodologie generali orientate al calcolo automatico.

Un approccio analogo è seguito nell'analisi della trave di SAINT VENANT e delle travi con pareti sottili.

Tra gli aspetti non tradizionali si evidenziano: l'applicazione della formula di CESÀRO al calcolo degli spostamenti elastici da flessione composta, la metodologia iterativa per la soluzione del problema non lineare della pressoflessione di travi costituite da materiali non reagenti a trazione, dovuta a MANFREDI ROMANO, la trattazione della torsione per le travi con sezione a connessione multipla, e le formule per il calcolo del centro di taglio e dei fattori di taglio delle travi con pareti sottili.

Negli ultimi due capitoli XI e XII, è fornita una descrizione del comportamento ultraelastico dei materiali ed una panoramica dei principali criteri di resistenza per materiali fragili e duttili.

Come nel Tomo I, anche in questo Tomo il lettore troverà, accanto ad argomenti tradizionali, formulazioni e risultati originali che fanno riferimento all'attività di ricerca svolta dall'autore nel settore della meccanica delle strutture.

I capitoli III, IV, V, VI e VII contengono i principali contributi derivanti dall'attività di ricerca riguardante applicazioni dell'Analisi Convessa alla teoria delle strutture, le formulazioni miste ed ibride in elasticità, le corrispondenti formulazioni approssimate e l'analisi di travi elastiche spaziali in regime di grandi spostamenti.

Devo qui rinnovare i più sentiti ringraziamenti ai miei allievi ed amici ELIO SACCO, LUCIANO ROSATI, FRANCESCO MAROTTI DE SCIARRA e soprattutto a MARINA DIACO che con il suo incoraggiamento e la costante attività di collaborazione e di revisione, che ha interessato l'intera opera, ha reso possibile giungere a completare questi due volumi. Un grazie infine all'ingegnere dei materiali CARMEN SELLITTO che ha con noi collaborato alla stesura del capitolo XII del Tomo II ed alla mia adorata nipote ALESSANDRA ROMANO nuova adepta della Meccanica dei Continui.

A mia moglie CHIARA devo confidare che la lunga attesa per il termine di questo lavoro è finita; presto però, spero, dovrò nuovamente contare sulla sua comprensione per affrontare nuove sfide scientifiche.

Napoli, settembre 2002

GIOVANNI ROMANO



# I – ELASTICITA'

Questo capitolo è dedicato alla trattazione del modello di comportamento elastico dei mezzi materiali modellati come continui di CAUCHY.

Nelle parte iniziale si fornisce un quadro generale che, dopo un breve excursus sulla termodinamica dei mezzi continui, illustra i modelli termoelastico, elastico ed ipoelastico in presenza di grandi spostamenti e deformazioni ed introduce il principio di indifferenza materiale.

Si illustra quindi in dettaglio la teoria dell'elasticità nella formulazione linearizzata applicabile nel quadro di piccoli spostamenti e deformazioni.

## 1. ELEMENTI DI TERMODINAMICA DEI CONTINUI

La *termodinamica dei continui* è fondata su due principi fondamentali cui sono soggetti tutti i fenomeni fisicamente accettabili:

- il *primo* ed il *secondo principio della termodinamica*.

Il primo principio, già illustrato nella sezione II.12 (p. 278) del Tomo I, è qui richiamato per convenienza.

- Il *primo principio della termodinamica* asserisce che per ogni corpo  $\mathcal{B}$ , e per ogni parte di esso, vale la *legge di conservazione dell'energia* che si scrive

$$\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{M} + \mathcal{Q},$$

dove

- $\dot{\mathcal{E}}$  è il *tasso di incremento dell'energia interna*,
- $\mathcal{M}$  è la *potenza meccanica compiuta*,
- $\mathcal{Q}$  è il *tasso di calore apportato*.

Per potenza meccanica si intende la potenza compiuta da tutti i sistemi di forze agenti sul corpo ivi incluse le forze d'inerzia. Denotando con  $\rho$  la densità e con  $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{v}$  la velocità di deformazione associata al campo di velocità  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_a(\mathcal{T}(\Omega))$  del corpo lungo la traiettoria dinamica, si ha che

$$\mathcal{M} = \int_{\Omega} (\mathbf{b} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da = \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{D} \, dv,$$

L'energia cinetica  $\mathcal{K}$  e la potenza  $\mathcal{W}$  compiuta dal sistema di forze di massa e di contatto agenti sul corpo nell'atto di moto  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_a(\mathcal{T}(\Omega))$ , sono definite da

$$\boxed{\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad \mathcal{W} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da,}$$

La potenza meccanica compiuta è dunque pari a  $\mathcal{M} = \mathcal{W} - \dot{\mathcal{K}}$  e quindi la legge di conservazione dell'energia si scrive

$$\boxed{\dot{\mathcal{E}} = \mathcal{M} + \mathcal{Q} \iff \dot{\mathcal{E}} + \dot{\mathcal{K}} = \mathcal{W} + \mathcal{Q}.}$$

Si introducano le densità volumetriche e superficiali

- $\dot{\varepsilon}$  il tasso di incremento dell'energia interna per unità di volume,
- $\rho q$  il tasso di apporto di calore per unità di volume,
- $\partial q$  il tasso di apporto di calore per unità di superficie,

e si ponga

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{E}} &= \int_{\Omega} \rho \dot{\varepsilon} \, dv, \\ \mathcal{M} &= \int_{\Omega} \mathbf{T} : \mathbf{B} \mathbf{v} \, dv, \\ \mathcal{Q} &= \int_{\Omega} \rho q \, dv + \int_{\partial\mathcal{T}(\Omega)} \partial q \, da,\end{aligned}$$

Il primo principio della termodinamica si scrive allora in forma locale

$$\boxed{\begin{cases} \rho \dot{\varepsilon} = \rho q + \operatorname{div} \mathbf{h} + \mathbf{T} : \mathbf{D} & \text{in } \Omega, \\ \partial q = \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} & \text{su } \partial\mathcal{T}(\Omega), \end{cases}}$$

in cui  $\mathbf{h} \in H^1(\mathcal{T}(\Omega))$  è il campo vettoriale della densità di flusso di freddo.

- $\operatorname{div} \mathbf{h}$  è la sorgente volumetrica del flusso di freddo.
- La relazione  $\mathbf{h} \cdot \mathbf{n} = \partial q$  è detta *principio del flusso di calore* di FOURIER.

Il bilancio energetico enunciato nel primo principio è fondato sul concetto di apporto di calore e della funzione di stato estensiva *energia interna*. Alla base del principio vi sono le prime fondamentali osservazioni del conte ROBERT RUMFORD (1753-1814) sul fatto che l'energia meccanica può trasformarsi in calore, e le successive sperimentazioni

in proposito effettuate nel 1842 dal fisico tedesco ROBERT JULIUS VON MAYER (1814-1878) e nel 1847 dall'inglese JAMES PRESCOTT JOULE (1818-1889).

- Il secondo principio della termodinamica asserisce che per ogni corpo  $\mathcal{B}$ , e per ogni parte di esso, è non negativa la produzione di entropia, definita come differenza tra il tasso d'incremento di entropia e l'apporto di entropia.

Il secondo principio trae origine dall'osservazione che mentre il lavoro meccanico può essere integralmente trasformato in calore, viceversa, come osservato nel 1824 da NICOLAS LÉONARD SADI CARNOT (1796-1832), può essere trasformata in lavoro solo un'aliquota del calore che è funzione delle differenze tra le temperature dei corpi che si scambiano il calore.

### 1.1. Diseguaglianza di Clausius-Duhem

Tale proprietà è espressa dalla *diseguaglianza di CLAUSIUS*<sup>1</sup> -DUHEM<sup>2</sup>

$$\dot{H} \geq \int_{\Omega} \frac{1}{T} \rho q \, dv + \int_{\partial T(\Omega)} \frac{1}{T} \partial q \, da,$$

dove

- $H$  è l'*entropia*, così che  $\dot{H}$  è il *tasso di incremento di entropia*,
- $T > 0$  è la *temperatura assoluta* introdotta da KELVIN nel 1848,
- $\rho q/T$  è il tasso di *apporto volumetrico di entropia*,
- $\partial q/T$  è il tasso di *apporto superficiale di entropia*,

---

<sup>1</sup> RUDOLF JULIUS EMMANUEL CLAUSIUS (1822-1888). Nato in Prussia sesto figlio di un ministro protestante, si laureò alla Università di Berlino nel 1840. CLAUSIUS pubblicò il primo lavoro sulla teoria meccanica del calore nel 1850. Per la fama che ne derivò divenne professore alla Università di Berlino e quindi nel 1855 alla Università di Zurigo. Nel 1867 si trasferì alla Università di Würzburg e nel 1869, accettò una cattedra alla Università di Bonn. Fervente patriota partecipò alla guerra Franco-Tedesca del 1870-71 come direttore del corpo delle ambulanze e riportò una ferita alle gambe che lo menomò per il resto della vita. Nel 1865 CLAUSIUS formulò per primo entrambi i principi della termodinamica e rivendicò la priorità della scoperta di von MAYER su quella di JOULE. I suoi contributi gli valsero molti riconoscimenti quali l'associazione alla Royal Society of London nel 1868, la Medaglia COBLEY nel 1879 e la Medaglia HUYGENS nel 1870, il Premio PONCELET nel 1883.

<sup>2</sup> PIERRE MAURICE MARIE DUHEM (1861-1916). Nato a Parigi da famiglia fiamminga studiò scienze alla Ecole Normale Supérieure, dove tre anni dopo entrò anche JACQUES SALOMON HADAMARD (1865-1963). Tra i due nacque una sincera amicizia. DUHEM è stato un grande fisico matematico ed ha portato contributi fondamentali alla assiomatizzazione della termodinamica nelle memorie *Etude sur les travaux thermodynamiques de J. Willard Gibbs* (1887) e *Commentaire aux principes de la thermodynamique* (1892). I principali trattati sono *Thermodynamique et chimie* (1902), il lavoro in due volumi *Recherches sur l'hydrodynamique* (1903-4), e *Recherches sur l'élasticité* (1906).

Definendo

- $\rho \eta$  la *densità di entropia* per unità di volume,

risulta

$$H = \int_{\Omega} \rho \eta \, dv.$$

Applicando il teorema della divergenza si ottiene poi che

$$\int_{\partial T(\Omega)} \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\Omega} \operatorname{div} \frac{\mathbf{h}}{T} \, dv = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{T} \operatorname{div} \mathbf{h} - \frac{1}{T^2} \mathbf{h} \cdot (\operatorname{grad} T) \right] \, dv,$$

e dunque la diseguaglianza di CLAUSIUS-DUHEM si scrive in forma locale

$$\rho \dot{\eta} \geq \rho q + T \operatorname{div} \frac{\mathbf{h}}{T} = \rho q + \operatorname{div} \mathbf{h} - \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot (\operatorname{grad} T).$$

Eliminando il termine

$$\rho q + \operatorname{div} \mathbf{h},$$

che compare nelle espressioni locali del primo e del secondo principio, ed introducendo l’energia libera di HELMHOLTZ per unità di massa

$$\psi = \varepsilon - T \eta,$$

si perviene alla *forma ridotta della diseguaglianza della dissipazione*:

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} + \frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot (\operatorname{grad} T) \geq 0.$$

Si assume poi che tale diseguaglianza sia soddisfatta in forma più forte imponendo che siano separatamente positivi i termini:

- densità volumetrica di *dissipazione intrinseca*

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} = \mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \dot{\varepsilon} + \rho \dot{\eta} T \geq 0,$$

- densità volumetrica di *dissipazione termica*

$$\frac{1}{T} \mathbf{h} \cdot (\operatorname{grad} T) \geq 0.$$

Quest’ultima diseguaglianza impone che il vettore flusso di freddo abbia una componente non negativa con il gradiente di temperatura e cioè che il freddo si trasmetta verso i punti a temperatura superiore.

I processi per cui si verificano le seguenti condizioni sono rispettivamente detti

- $\mathbf{h} = \mathbf{0}$  *processo adiabatico*,
- $T = 0$  *processo isotermo*,
- $\dot{\eta} = 0$  *processo isoentropico*,
- $\operatorname{grad} \eta = \mathbf{0}$  *processo omoentropico*.

## 2. RELAZIONI COSTITUTIVE

La trattazione della termodinamica dei materiali sviluppata nel seguito è rivolta allo studio di materiali in cui i valori locali le funzione di stato *energia interna*  $\varepsilon$ , *temperatura assoluta*  $T$ , *flusso di freddo*  $\mathbf{h}$  e *stato tensionale*  $\mathbf{T}$  dipendono dai valori locali delle variabili indipendenti costituite dall'*entropia*  $\eta$ , del *gradiente di deformazione*  $\mathbf{F}$ , misurato a partire da una configurazione di riferimento, e di un insieme finito di *variabili interne* rappresentato da un campo vettoriale  $\boldsymbol{\alpha}$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}), & \mathbf{h} &= \hat{\mathbf{h}}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}), \\ T &= \hat{T}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}), & \mathbf{T} &= \hat{\mathbf{T}}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}).\end{aligned}$$

Derivando l'energia interna rispetto al tempo si ha che

$$\dot{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) = d_\eta \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) \cdot \dot{\eta} + d_{\boldsymbol{\alpha}} \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} + d_{\mathbf{F}} \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) \cdot \dot{\mathbf{F}}.$$

- Il *postulato di HELMHOLTZ* assicura che è possibile assegnare arbitrari tassi di variazione di entropia  $\dot{\eta}$  con  $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{o}$  e  $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{O}$ . Allora la diseguaglianza della dissipazione intrinseca deve essere una eguaglianza e si ha che

$$T = d_\eta \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}).$$

Assumendo che l'energia interna sia una funzione differenziabile e strettamente convessa della variabile entropia, la *trasformata di LEGENDRE* dell'energia interna, rispetto alla coppia di parametri duali entropia-temperatura è la funzione di stato  $\hat{\varepsilon}^*$  definita da:

$$\hat{\varepsilon}^*(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) = T\eta - \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}), \quad \begin{cases} T = d_\eta \hat{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}), \\ \eta = d_T \hat{\varepsilon}^*(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}). \end{cases}$$

- L'*energia libera di HELMHOLTZ* è definita come l'opposta della trasformata di LEGENDRE dell'energia interna, rispetto alla coppia  $\eta, T$ :

$\psi(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) = -\hat{\varepsilon}^*(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}).$

Si introduca quindi il vettore *affinità termodinamica* duale del vettore delle variabili interne:

$$\boldsymbol{\chi} = -d_{\boldsymbol{\alpha}} \psi(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) = d_{\boldsymbol{\alpha}} \varphi^*(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}),$$

Decomponendo lo stato tensionale in parte reversibile ed irreversibile  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{\text{rev}} + \mathbf{T}^{\text{irr}}$  con la parte reversibile  $\mathbf{T}^{\text{rev}}$  definita da

$$\mathbf{T}^{\text{rev}} = \rho d_{\mathbf{F}} \psi(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}) \mathbf{F}^T,$$

si ha che

$$\begin{aligned}\mathbf{T} : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} - \rho \eta \dot{T} &= \mathbf{T} : \mathbf{L} - \rho d_{\mathbf{F}} \psi : (\mathbf{L} \mathbf{F}) - \rho d_{\alpha} \psi \cdot \boldsymbol{\alpha} - \rho d_T \psi \cdot T - \rho \eta \dot{T} = \\ &= (\mathbf{T} - \rho d_{\mathbf{F}} \psi \mathbf{F}^T) : \mathbf{L} - \rho d_{\alpha} \psi \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \rho (\eta + d_T \psi) \cdot \dot{T} \geq 0.\end{aligned}$$

La diseguaglianza della dissipazione intrinseca assume quindi la forma

$$\boxed{\mathbf{T}^{\text{irr}} : \mathbf{D} + \rho \boldsymbol{\chi} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0.}$$

Si osservi che in termini del tensore di PIOLA (vedi Tomo I sezione II.13.1 (p. 285)):

$$\mathbf{P} = J \mathbf{T} \mathbf{F}^{-T},$$

la parte reversibile  $\mathbf{T}^{\text{rev}}$  dello stato tensionale è data da

$$\mathbf{P}^{\text{rev}} = \rho_0 d_{\mathbf{F}} \psi(T, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{F}),$$

in quanto  $J \rho = \rho_0$ .

Se nella definizione delle funzioni di stato *energia interna*  $\varepsilon$ , *temperatura assoluta*  $T$ , *flusso di freddo*  $\mathbf{h}$  e *stato tensionale*  $\mathbf{T}$  si eliminano le *variabili interne*  $\boldsymbol{\alpha}$  si ottiene la descrizione di

- un *materiale termoelastico* caratterizzato dalle relazioni

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\eta, \mathbf{F}), \quad \mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}(\eta, \mathbf{F}),$$

$$T = \hat{T}(\eta, \mathbf{F}), \quad \mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\eta, \mathbf{F}).$$

La definizione di

- un *materiale iperelastico* o *elastico secondo GREEN* è basata su una teoria puramente meccanica in cui la temperatura e l'entropia non giocano nessun ruolo, e l'unica variabile indipendente è il gradiente di deformazione.

$$\varepsilon = \hat{\varepsilon}(\mathbf{F}),$$

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}).$$

L'energia libera di HELMHOLTZ coincide con l'energia interna e la funzione  $\varepsilon = \psi$  prende il nome di potenziale elastico. Il legame costitutivo è allora

$$\mathbf{T} = \rho d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}) \mathbf{F}^T, \quad \mathbf{P} = \rho_0 d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}).$$

In termoelasticità è possibile dimostrare, [20], [23], [24], che la diseguaglianza di CLAUSIUS-DUHEM si decompone nelle diseguaglianze della *dissipazione intrinseca* e della *dissipazione termica* facendo ricorso al seguente

- *assioma di località* dovuto a NOLL [15]: *Le funzioni costitutive sono locali.*

Una funzione costitutiva  $\psi(T, \boldsymbol{\chi})$  per la termoelasticità è *locale* se per ogni aperto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$  accade che: se una coppia di posizionamenti  $\boldsymbol{\chi}_1, \boldsymbol{\chi}_2 : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{S}$  ed una coppia di funzioni di temperatura  $T_1, T_2 : \mathcal{B} \mapsto \mathfrak{R}^+$  coincidono su  $\mathcal{U}$ , allora le risposte  $\psi(T_1, \boldsymbol{\chi})_1$  e  $\psi(T_2, \boldsymbol{\chi})_2$  coincidono su  $\mathcal{U}$ .

## 2.1. Principio di indifferenza materiale

- Il *principio di indifferenza materiale (PIM)* afferma che il comportamento dei materiali non dipende dall'osservatore che effettua la sperimentazione.

Per un materiale elastico questa basilare richiesta si esprime affermando che osservatori in moto relativo devono misurare la stessa energia elastica.

Si consideri la legge di trasformazione del gradiente di deformazione al cambiare dell'osservatore

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \mathbf{F},$$

dove  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  è la rotazione dell'osservatore  $O$  rispetto all'osservatore  $O^*$ . (vedi Tomo I sezione I.6 (p. 55)). Applicando il **PIM** ai materiali iperelastici si ottiene dunque la condizione

$$\psi(\mathbf{F}^*) = \psi(\mathbf{Q} \mathbf{F}) = \psi(\mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(V; V).$$

Effettuando la decomposizione polare  $\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U}$  e ponendo  $\mathbf{Q} = \mathbf{R}^T$  si evince che deve essere

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi(\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U}) = \psi(\mathbf{U}).$$

Ricordando la definizione del tensore destro di CAUCHY-GREEN

$$\mathbf{C}(\mathbf{F}) = \mathbf{F}^T \mathbf{F},$$

si può definire il potenziale elastico

$$\bar{\psi}(\mathbf{C}(\mathbf{F})) = \psi(\mathbf{F}), \quad \forall \mathbf{F} \in \text{Lin}(V; V).$$

Allora risulta

$$d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}) : \mathbf{H} = d_{\mathbf{C}} \bar{\psi}(\mathbf{C}(\mathbf{F})) : (d\mathbf{C}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{H}).$$

Essendo poi  $d\mathbf{C}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \mathbf{H}$ , in virtù della simmetria di  $\mathbf{C}$  si ottiene che

$$d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}) = 2 \mathbf{F} d_{\mathbf{C}} \bar{\psi}(\mathbf{C}(\mathbf{F})),$$

e quindi che

$$\mathbf{T} = \rho d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}) \mathbf{F}^T = 2 \rho \mathbf{F} d_{\mathbf{C}} \bar{\psi}(\mathbf{C}(\mathbf{F})) \mathbf{F}^T.$$

In termini del *tensore di PIOLA*  $\mathbf{P}$  e del *tensore di PIOLA-KIRCHHOFF*  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$  (vedi Tomo I sezione II.13.3 (p. 287)) si ha:

$$\mathbf{P} = 2 \rho_0 \mathbf{F} d_{\mathbf{C}} \bar{\psi}(\mathbf{C}(\mathbf{F})), \quad \mathbf{S} = 2 \rho_0 d_{\mathbf{C}} \bar{\psi}(\mathbf{C}(\mathbf{F})).$$

Si noti che il **PIM** equivale alla proprietà di simmetria

$$d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}) \mathbf{F}^T = \mathbf{F} (d_{\mathbf{F}} \psi(\mathbf{F}))^T.$$

## 2.2. Materiali ipoelastici

Un ulteriore esempio del ruolo giocato dal **PIM**, nell'imporre restrizioni alle relazioni costitutive, è fornito dalla definizione della risposta dei *materiali ipoelastici*.

Per tali materiali si assume che il tasso di variazione dello stato tensionale  $\dot{\mathbf{T}}$  sia funzione del valore attuale dello stato tensionale  $\mathbf{T}$  e del gradiente di deformazione  $\mathbf{L} = \text{grad } \mathbf{v}$ :

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{L}).$$

Se tale è la risposta registrata da un osservatore  $O$ , sia  $O^*$  un osservatore ruotato di  $\mathbf{Q}^T \in \text{Orth}^+$  rispetto all'osservatore  $O^*$ .

Si osservi ora che la potenza virtuale è invariante (indipendente dall'osservatore), e che il gradiente di velocità varia con la legge (vedi Tomo I sezione I.9.13 (p. 97))

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{W}_Q + \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T.$$

dove  $\mathbf{W}_Q = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T \in \text{Emi}(V; V)$ . Ne segue che

■ la deformazione tangente  $\mathbf{D} = \text{sym } \mathbf{L}$  è *indifferente* e cioè varia con la legge

$$\mathbf{D}^* = \mathbf{Q}\mathbf{D}\mathbf{Q}^T.$$

Da ciò si deduce che lo stato tensionale  $\mathbf{T}$  è anch'esso indifferente. Infatti l'identità

$$\mathbf{T}^* : \mathbf{D}^* = \mathbf{T} : \mathbf{D}, \quad \forall \mathbf{D} \in \text{Sym}(V; V),$$

impone che deve essere

$$\text{tr}(\mathbf{T}^* \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T) = \text{tr}(\mathbf{Q}^T \mathbf{T}^* \mathbf{Q} \mathbf{D}) = \text{tr}(\mathbf{T} \mathbf{D}), \quad \forall \mathbf{D} \in \text{Sym}(V; V),$$

e cioè che sia

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T.$$

Per quanto detto l'osservatore  $O^*$  misurerà il legame ipoelastico

$$(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \mathbf{W}_Q + \mathbf{Q}\mathbf{L}\mathbf{Q}^T),$$

dove

$$\begin{aligned} (\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)\dot{\mathbf{Q}} &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T = \\ &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) + (\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = \\ &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{W}_Q(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) + (\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)\mathbf{W}_Q^T, \end{aligned}$$

Si assuma quindi che la rotazione di  $O$  rispetto a  $O^*$  sia definita dalla legge esponenziale

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(-t \mathbf{W}) \dot{\mathbf{Q}}(t) = -\mathbf{W} \circ \mathbf{Q}(t).$$

soluzione dell'equazione differenziale

$$\dot{\mathbf{Q}}(t) = -\mathbf{W} \circ \mathbf{Q}(t), \quad \mathbf{Q}(0) = \mathbf{I},$$

dove  $\mathbf{W}$  è l'atto di moto di rotazione dello spazio tangente al corpo nel punto considerato. Risulta allora  $\mathbf{W}_Q(0) = -\mathbf{W} = \text{emi } \mathbf{L}$  e quindi al tempo  $t = 0$  deve essere

$$\dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W} = \mathbf{f}(\mathbf{T}, -\mathbf{W} + \mathbf{L}) = \mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{D}).$$

Il primo membro rappresenta il tasso di variazione dello stato tensionale misurato dall'osservatore  $O^*$  che all'istante iniziale  $t = 0$  subisce lo stesso atto di moto di rotazione dello spazio tangente al corpo nel punto considerato. Si definisce quindi la

■ *derivata co-rotazionale o derivata di JAUMANN* [6]

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W},$$

e l'equazione costitutiva dei materiali ipoelastici si scrive nella forma

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{D}).$$

Si noti che il **PIM** impone che risulti

$$\mathbf{Q} \overset{\circ}{\mathbf{T}} \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} \mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{D}) \mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{D} \mathbf{Q}^T), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

e cioè che la funzione  $\mathbf{f}$  sia isotropa simultaneamente nei due argomenti  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$ .

Si assuma inoltre che lo stato di sforzo dipenda dalla storia deformativa ma non dalla legge oraria con cui tale storia è stata percorsa. Detto  $\alpha$  il rapporto all'istante attuale tra le scale dei tempi relative a due leggi orarie diverse, denotate con 2 e 1, risulta

$$\mathbf{D}_2 = \alpha \mathbf{D}_1, \quad \mathbf{W}_2 = \alpha \mathbf{W}_1, \quad \dot{\mathbf{T}}_2 = \alpha \dot{\mathbf{T}}_1, \quad \overset{\circ}{\mathbf{T}} = \alpha \overset{\circ}{\mathbf{T}}.$$

Deve allora essere

$$\mathbf{f}(\mathbf{T}, \alpha \mathbf{D}) = \alpha \mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{D}), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assumendo che la funzione di risposta  $\mathbf{f}$  sia differentiable con continuità in un intorno di  $\mathbf{D} = \mathbf{O}$ , l'omogeneità implica che la dipendenza da  $\mathbf{D}$  deve essere lineare.

In definitiva il legame ipoelastico si scrive

$$\boxed{\overset{\circ}{\mathbf{T}} = \mathbf{g}(\mathbf{T}) [\mathbf{D}],}$$

con  $\mathbf{g} : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \times \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  funzione tensoriale lineare in  $\mathbf{D}$  ed isotropa in  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{D}$ .

**Osservazione 2.1.** La derivata temporale di JAUMANN può essere sostituita con altre espressioni che risultano indifferenti ad un cambiamento di osservatore. Tale proprietà è assicurata se si effettua una *derivata di LIE* del tensore dello stato tensionale lungo un flusso arbitrario.

La questione è stata illustrata nel Tomo I alla sezione I.12.3 (p. 142).

Sia  $\mathbf{T}_t$  il campo tensoriale dello stato tensionale e  $\mathbf{v}_t$  il campo di velocità corrispondente ad un flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{v}(t,s)}$ , misurati dall'osservatore  $O$  al tempo  $t$ . Si denoti con

- $\varphi_t : V \mapsto V$  il diffeomorfismo che definisce la deformazione dell'osservatore  $O$  visto dall'osservatore  $O^*$ .

L'osservatore  $O^*$  misura quindi il flusso (vedi Tomo I, sezione I.12.13 (p. 145))

$$\mathbf{k}_{\mathbf{w}(t,s)} = \varphi_t \circ \mathbf{k}_{\mathbf{v}(t,s)} \circ \varphi_s^{-1},$$

ed il campo di velocità

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{u}_t + \varphi_{t*} \mathbf{v}_t,$$

dove

- $\mathbf{u}_t$  è il campo di velocità relativo al flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{u}(t,s)} = \varphi_t \circ \varphi_s^{-1}$  generato dal diffeomorfismo  $\varphi_t$ ,
- $\varphi_{t*} \mathbf{v}_t$  è la *spinta* del campo vettoriale  $\mathbf{v}_t$  per effetto del diffeomorfismo  $\varphi_t$  (o *differenziale* del diffeomorfismo  $\varphi_t$  secondo il campo vettoriale  $\mathbf{v}_t$ ), definita dalla derivazione puntuale:

$$(\varphi_{t*} \mathbf{v}_t)(f) := \mathbf{v}_t(\varphi_t \circ f), \quad \forall f \in C^1(\mathbf{x}, \Omega),$$

avendo indicato con  $C^1(\mathbf{x}, \Omega)$  il germe delle funzioni scalari derivabili con continuità in un intorno del punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

La proposizione I.12.14 (p. 146) del Tomo I assicura che per la derivata di LIE del campo  $\mathbf{T}_t$ , definita da

$$(\mathcal{L}_{\mathbf{Y}} \mathbf{T})_s := \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{T}_t = \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{T}_t + \frac{d}{dt} \Big|_{t=s} \mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{T}_s,$$

sussiste la legge di trasformazione

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}_t} (\varphi_{t*} \mathbf{T}_t) = \varphi_{t*} (\mathcal{L}_{\mathbf{v}_t} \mathbf{T}_t).$$

Ponendo  $\varphi_{t*} = \mathbf{Q}$  e quindi  $\varphi_t^* = \varphi_{t*}^{-1} = \mathbf{Q}^T$ , ed osservando che

$$\varphi_{t*} \mathbf{T}_t = \varphi_t^{*T} \mathbf{T}_t \varphi_t^* = \mathbf{Q} \mathbf{T}_t \mathbf{Q}^T,$$

si ottiene la relazione

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}_t} (\mathbf{Q} \mathbf{T}_t \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} (\mathcal{L}_{\mathbf{v}_t} \mathbf{T}_t) \mathbf{Q}^T,$$

che garantisce l'indifferenza della derivata di LIE.

Si considera un flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{v}(t,s)}$  tale che al tempo  $s$  il corrispondente campo di velocità sia l'atto di moto di rotazione dello spazio tangente al corpo nel punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ . Allora la derivata di LIE coincide con l'espressione della

■ *derivata co-rotazionale o derivata di JAUMANN:*

$$\overset{\circ}{\dot{\mathbf{T}}} := \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t} \mathbf{T}_t = (\mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F}) \dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{W}.$$

Assumendo che il flusso  $\mathbf{k}_{\mathbf{v}(t,s)}$  sia quello che definisce la deformazione del corpo misurata dall'osservatore  $O$ , la derivata di LIE fornisce invece l'espressione della

■ *derivata convettiva o derivata di OLDROYD [10]:*

$$\overset{\Delta}{\dot{\mathbf{T}}} := \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t} \mathbf{T}_t = (\mathbf{F}^T \mathbf{T} \mathbf{F}) \dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{L}^T \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{L}.$$

In [11] e [12] TRUESDELL ha introdotto la derivata del prodotto tensoriale  $\mathbf{T} \Delta$  tra il tensore dello stato tensionale  $\mathbf{T}$  e la forma di volume  $\Delta$ . Osservando che

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}(\mathbf{T}_t \Delta_t) = \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}(\mathbf{T}_t) \Delta_t + \mathbf{T}_t \mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}(\Delta_t),$$

e ricordando che (Tomo I, sezione I.12.4 (p. 146))

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}_t}(\Delta_t) = (\operatorname{div} \mathbf{v}_t) \Delta_t,$$

si perviene all'espressione della *derivata di TRUESDELL*:

$$(\overset{\Delta}{\dot{\mathbf{T}}} + \mathbf{T} \operatorname{div} \mathbf{v}_t) \Delta_t.$$

Si noti infine che la derivata di LIE non commuta con l'operazione di alterazione di un tensore in quanto la spinta di vettori e covettori si effettua con operazioni duali.

Se dunque, prima di effettuare la derivata di LIE, si trasforma la forma mista del tensore dello stato tensionale in quella due volte covariante od in quella due volte contravariante, si perviene ad una diversa espressione che comunque fornisce ancora una misura tensoriale che si trasforma in modo indifferente nel cambiamento di osservatore.

Le diverse forme dei tassi indifferenti di variazione dello stato tensionale differiscono tra di loro per un termine lineare nello stato tensionale. Ad esempio tra le derivate temporali di JAUMANN e di OLDROYD si ha la relazione

$$\overset{\Delta}{\dot{\mathbf{T}}} - \overset{\circ}{\dot{\mathbf{T}}} = \mathbf{D} \mathbf{T} + \mathbf{T} \mathbf{D}.$$

Le diverse derivate temporali indifferenti costituiscono scelte equivalenti e non sussiste alcun motivo per preferirne una ad un'altra (vedi [21]).

Ne segue che è necessario assumere che le diverse funzioni di risposta  $\mathbf{g}$ , che rappresentano lo stesso materiale ipoelasticco al variare della derivata temporale indifferente prescelta, siano almeno polinomiali di primo grado in  $\mathbf{T}$ . Pertanto relazioni omogenee di grado zero del tipo

$$\overset{\circ}{\dot{\mathbf{T}}} = \mathbf{g}[\mathbf{D}],$$

non sono accettabili. ■

### 3. ELASTICITÀ LINEARIZZATA

La trattazione che sarà sviluppata nel seguito di questo capitolo concerne la teoria del comportamento elastico dei materiali sotto l'ipotesi di *piccoli spostamenti e piccole deformazioni* misurati da una configurazione di riferimento.

Si assume cioè che sia ammissibile approssimare la deformazione puntuale trascurando i termini non lineari nel campo di spostamento e valutare lo stato tensionale nella configurazione di riferimento, imponendo la condizione di equilibrio senza tener conto del cambiamento di configurazione. Per ulteriori considerazioni sull'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni si veda la sezione II.1 (p. 49).

#### 3.1. Legge di Hooke

L'osservazione che in una struttura elastica esiste una legge di proporzionalità tra forza applicata e spostamento duale è dovuta a ROBERT HOOKE<sup>3</sup> che la formulò nel 1676 sotto forma di un anagramma *CEIIINOSSSTTVV* del quale poi svelò il significato:

*vt tensio sic vis*

che in latino esprime la proporzionalità tra l'estensione (*(ex)-tensio*) e la forza (*vis*).

Nel modello di comportamento elastico si assume che esista un legame biunivoco tra lo stato puntuale di deformazione e quello puntuale di sforzo e che tale legame sia integrabile così che possa esprimersi come gradiente di una funzione scalare detta *potenziale elastico*.

Il concetto di *potenziale elastico* fu introdotto da GREEN<sup>4</sup> nel 1839 in [4].

Il potenziale del legame inverso, che ad ogni stato puntuale di sforzo associa il corrispondente stato puntuale di deformazione elastica è detto *potenziale elastico complementare* ed è stato studiato da CASTIGLIANO<sup>5</sup> nel 1873.

---

<sup>3</sup> ROBERT HOOKE (1635-1702). Nato nell'isola di Wight nel 1653 andò al Christ College di Oxford dove conobbe BOYLE e lo aiutò a costruire la pompa ad aria. Per 30 anni fu professore di geometria al Gresham College di Londra, a partire dal 1665, anno in cui pubblicò il libro *Micrographia* che contiene osservazioni e scoperte fatte mediante un microscopio di sua costruzione. HOOKE inventò il pendolo conico, costruì per primo il telescopio riflettente e concepì l'idea che la luce consiste in una vibrazione trasversale di lunghezza d'onda molto corta. Fece importanti osservazioni astronomiche e nel 1666 propose di misurare la gravità mediante un pendolo. Per la sua riconosciuta competenza fu nominato City Surveyor e partecipò con grande impegno alla ricostruzione di Londra dopo il grande incendio del 1666. Nel 1672 osservò che la terra si muove con orbita ellittica attorno al sole e nel 1678 propose la legge di gravitazione secondo il reciproco del quadrato della distanza ed ebbe con NEWTON un'aspra polemica circa la priorità della scoperta. Nel 1678 pubblicò il lavoro *De Potentia restitutiva* che contiene i risultati dei suoi esperimenti con corpi elastici.

<sup>4</sup> GEORGE GREEN (1793-1841). Mugnaio e matematico autodidatta inglese. L'opera fondamentale di GREEN del 1828, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, fu pubblicata nel 1850 per merito di SIR WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN, 1824-1907).

<sup>5</sup> CARLO ALBERTO CASTIGLIANO (1847-1884). Nato ad Asti (Piemonte) dopo quattro anni di studi

### 3.2. Cedevolezza e rigidezza elastica

Si ricordi che  $\text{Sym}(V; V) \subset \text{Lin}(V; V)$  denota il sottospazio lineare dei tensori simmetrici del secondo ordine sullo spazio  $V$  delle traslazioni associato allo spazio affine euclideo  $\mathbb{S}$ .

Sia  $T\mathcal{B}$  un corpo continuo che occupa nello spazio una posizione  $\Omega \subset \mathbb{S}$ .

- Il comportamento del materiale di cui è costituito un corpo  $T\mathcal{B}$  è *elastico* se in ogni punto  $x \in \Omega$  in cui agisce uno stato tensionale  $\sigma(x) \in \text{Sym}(V; V)$  si produce istantaneamente uno stato deformativo  $e(x) \in \text{Sym}(V; V)$  che dipende unicamente dal valore locale ed attuale dello stato tensionale.

Il legame che allo stato tensionale  $\sigma(x) \in \text{Sym}(V; V)$  agente in un punto  $x \in \Omega$  associa la corrispondente deformazione elastica linearizzata  $e(x) \in \text{Sym}(V; V)$  è detto *cedevolezza elastica* del materiale e si scrive

$$e(x) = \mathcal{C}(\sigma(x), x) \quad x \in \Omega.$$

Un materiale elastico è *privo di memoria*, nel senso che la sua risposta deformativa puntuale non tiene in alcun conto la storia passata dello stato tensionale puntuale.

Si assume inoltre che allo stato tensionale nullo corrisponda una deformazione elastica nulla

$$\mathcal{C}(\mathbf{0}, x) = \mathbf{0} \quad x \in \Omega.$$

Nel seguito, per semplificare la notazione, ometteremo di indicare esplicitamente la dipendenza dalla posizione  $x \in \Omega$ .

Una caratteristica peculiare di un materiale elastico è quella della

- *stabilità della risposta elastica*.

Tale proprietà si esprime in termini analitici richiedendo che il grafico del legame elastico sia *strettamente monotono* (crescente).

Formalmente la proprietà di *stabilità* si enuncia come segue.

- Se si considerano due qualsiasi coppie distinte  $\{\sigma_1, e_1\}$  e  $\{\sigma_2, e_2\}$  di stati tensionali e deformativi legati dal legame elastico, il relativo lavoro incrementale risulta positivo

$$(\sigma_2 - \sigma_1) : (e_2 - e_1) > 0.$$

---

a Terni (Umbria) divenne studente del Politecnico di Torino dove si laureò nel 1873 con una dissertazione dal titolo *Intorno ai sistemi elastici* che lo rese famoso. Dopo la laurea si impiegò alle Ferrovie Italiane del Nord delle quali diresse l'Ufficio Tecnico sino alla prematura scomparsa. Il nome di CASTIGLIANO è legato al suo principio che costituisce una estensione di quello formulato da LUIGI FEDERICO MENABREA (1809-1896) e che fu causa di una lunga disputa tra i due.

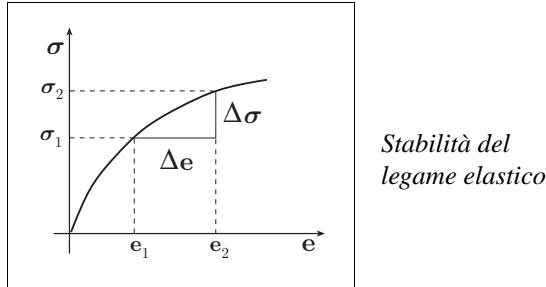


Fig. 3.1

Il legame elastico, essendo strettamente monotono, risulta *localmente invertibile* e cioè invertibile per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ . La legge

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{e}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \quad \mathcal{E} = \mathcal{C}^{-1},$$

che in ogni punto associa ad una deformazione elastica lo stato tensionale corrispondente è detta *rigidezza elastica* del materiale.

### 3.3. Cedevolezza e rigidezza tangenti

Se il legame elastico è derivabile, la proprietà di *stabilità* comporta la definizione positiva della sua derivata.

Si osservi infatti che per definizione la derivata direzionale di  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$  secondo l'incremento  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  è fornita dal limite

$$d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}; \bar{\boldsymbol{\sigma}}) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} [\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})],$$

La dipendenza dall'incremento  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  è omogenea e, se è anche additiva, definisce un operatore lineare  $d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$  che è la derivata di  $\mathcal{C}$  nel punto  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$

$$d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] := d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}; \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}).$$

Ora la stretta monotonia del legame elastico assicura che

$$[\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})] : \alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}} > 0 \quad \forall \alpha > 0 \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \setminus \{\mathbf{0}\},$$

e quindi anche che

$$[\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})] : \bar{\boldsymbol{\sigma}} > 0, \quad \forall \alpha > 0, \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Ne consegue che risulta

$$d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})[\bar{\boldsymbol{\sigma}}] : \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} [\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma} + \alpha \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})] : \bar{\boldsymbol{\sigma}} > 0, \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \setminus \{\mathbf{0}\},$$

ed il risultato è dimostrato.

La derivata  $d\mathcal{C}(\sigma)$  è detta *cedevolezza elastica tangente*.

- La *rigidezza elastica tangente*, è la derivata del legame elastico inverso  $\mathcal{E}(\mathbf{e})$  ed è quindi rappresentata dall'operatore lineare  $d\mathcal{E}(\mathbf{e})$  inverso della cedevolezza elastica tangente

$$d\mathcal{E}(\mathbf{e}) = [d\mathcal{C}(\sigma)]^{-1}, \quad \mathbf{e} = \mathcal{C}(\sigma).$$

La rigidezza elastica tangente è anch'essa *definita positiva*

$$d\mathcal{E}(\mathbf{e})[\bar{\mathbf{e}}] : \bar{\mathbf{e}} > 0, \quad \forall \bar{\mathbf{e}} \in \text{Sym}(V; V) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

La differenziabilità dei legami elastici diretto ed inverso consente di esprimere la proprietà di stabilità del legame elastico mediante l'equivalente richiesta che la cedevolezza e la rigidezza elastiche tangenti siano definite positive.

### 3.4. Conservatività del legame elastico

Una proprietà caratteristica dei materiali elastici è quella di non dar luogo a fenomeni dissipativi il che equivale a richiedere che il legame elastico sia *conservativo* e cioè che il lavoro compiuto dallo stato tensionale lungo un qualsiasi ciclo chiuso di deformazione elastica sia nullo.

Si consideri quindi un circuito  $\mathbf{c} \in \text{Sym}(V; V)$  nello spazio dei tensori simmetrici del secondo ordine su  $V$ .

La proprietà di conservatività impone che

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e} = 0, \quad \forall \mathbf{c} \in \text{Sym}(V; V).$$

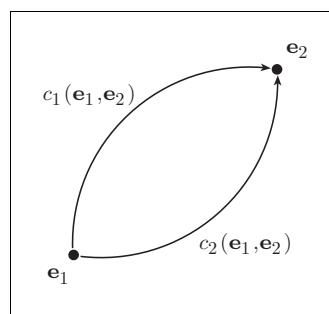
Se si considerano due percorsi qualsiasi  $c_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  e  $c_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  che portano dallo stato deformativo elastico

$$\mathbf{e}_1 \in \text{Sym}(V; V)$$

allo stato deformativo elastico

$$\mathbf{e}_2 \in \text{Sym}(V; V)$$

si ha che



$$\int_{c_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e} = \int_{c_2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e}.$$

La nozione di potenziale elastico fu introdotta nel 1828 da GREEN [4] ed un materiale elastico che ammette un potenziale di deformazione è perciò detto *materiale elastico alla GREEN*.

Il modello elastico che non richiede l'esistenza di un potenziale è talvolta detto *materiale elastico alla CAUCHY*.

Il potenziale  $\varphi : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathbb{R}$  del legame elastico  $\mathcal{E} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \text{Sym}(V; V)$  è definito dalla relazione

$$\varphi(\mathbf{e}_2) - \varphi(\mathbf{e}_1) = \int_{c(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e},$$

dove  $c_1(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  è un qualsiasi percorso tra gli stati deformativi  $\mathbf{e}_1$  e  $\mathbf{e}_2$ .

Assumendo poi che  $\varphi(\mathbf{o}) = 0$  si può scrivere

$$\varphi(\mathbf{e}) = \int_{c(\mathbf{o}, \mathbf{e})} \mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}}) : d\bar{\mathbf{e}} = \int_{c(\mathbf{o}, \mathbf{e})} \mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}})_{ij} d\bar{\mathbf{e}}_{ij},$$

dove è sottintesa una sommatoria sugli indici uguali delle componenti cartesiane dei tensori. Essendo l'integrale indipendente dal percorso, conviene integrare lungo un segmento rettilineo di equazione parametrica

$$\hat{\mathbf{e}}(\xi) = \mathbf{e} + \xi \boldsymbol{\eta} \quad \xi \in \{0, 1\}.$$

Si ottiene così la formula semplice

$$\varphi(\mathbf{e}) = \int_0^1 \mathcal{E}(\xi \mathbf{e}) : \mathbf{e} d\xi.$$

Sussistono le seguenti fondamentali proprietà.

**Proposizione 3.1.** *Il gradiente del potenziale  $\varphi(\mathbf{e})$  è pari a  $\mathcal{E}(\mathbf{e})$ .*

**Dim.** Si ha infatti:

$$\varphi(\mathbf{e} + \alpha \boldsymbol{\eta}) - \varphi(\mathbf{e}) = \int_0^\alpha \mathcal{E}(\mathbf{e} + \xi \boldsymbol{\eta}) : \boldsymbol{\eta} d\xi,$$

e pertanto

$$d_\alpha \varphi(\hat{\mathbf{e}}(\alpha)) = d\varphi(\mathbf{e}) \left[ \frac{d\hat{\mathbf{e}}}{d\alpha} \right] = d\varphi(\mathbf{e}) [\boldsymbol{\eta}].$$

Il teorema fondamentale del calcolo assicura peraltro che

$$d_\alpha \varphi(\hat{\mathbf{e}}(\alpha)) = \mathcal{E}(\mathbf{e}) : \boldsymbol{\eta},$$

e quindi risulta

$$d\varphi(\mathbf{e}) [\boldsymbol{\eta}] = \mathcal{E}(\mathbf{e}) : \boldsymbol{\eta} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \iff \mathcal{E}(\mathbf{e}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{e}),$$

che è il risultato che si voleva dimostrare.  $\square$

Il dominio della rigidezza elastica  $\mathcal{E}$  è l'intero spazio  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  e quindi è semplicemente connesso. Ne segue che, se la rigidezza elastica è derivabile con continuità, l'esistenza del potenziale elastico  $\varphi$  è assicurata dalla seguente condizione necessaria e sufficiente dovuta a VOLTERRA<sup>6</sup>.

$$d\mathcal{E}(\mathbf{e}) \mathbf{e}_1 : \mathbf{e}_2 = d\mathcal{E}(\mathbf{e}) \mathbf{e}_2 : \mathbf{e}_1, \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}).$$

*Simmetria  
della rigidezza  
elastica tangente*

Essendo

$$\mathcal{E}(\mathbf{e}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{e}).$$

la necessità della condizione di VOLTERRA è conseguenza diretta della proprietà di simmetria della derivata seconda del potenziale  $\varphi(\mathbf{e})$

$$d^2\varphi(\mathbf{e})[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = d^2\varphi(\mathbf{e})[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1].$$

La dimostrazione della sufficienza è più delicata e per essa si rimanda alla letteratura specialistica [18]. Ecco un'altra importante proprietà.

**Proposizione 3.2.** *Il legame elastico è strettamente monotono se e solo se il potenziale elastico  $\varphi(\mathbf{e})$  è strettamente convesso.*

**Dim.** Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \times \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  una arbitraria coppia di deformazioni elastiche. Il segmento tra tali estremi ha equazione parametrica

$$\hat{\mathbf{e}}(\xi) = \mathbf{e}_1 + \xi (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \quad \xi \in \{0, 1\}.$$

Ora la stretta monotonia del legame elastico comporta che la funzione

$$f(\xi) := \mathcal{E}(\hat{\mathbf{e}}(\xi)) : (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1),$$

risulta strettamente crescente in quanto

$$\begin{aligned} [f(\xi_2) - f(\xi_1)](\xi_2 - \xi_1) &= [\mathcal{E}(\hat{\mathbf{e}}(\xi_2)) - \mathcal{E}(\hat{\mathbf{e}}(\xi_1))] : (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1)(\xi_2 - \xi_1) = \\ &= [\mathcal{E}(\hat{\mathbf{e}}(\xi_2)) - \mathcal{E}(\hat{\mathbf{e}}(\xi_1))] : (\hat{\mathbf{e}}(\xi_2) - \hat{\mathbf{e}}(\xi_1)) > 0, \end{aligned}$$

per ogni  $\xi_1 \neq \xi_2$ . Ne consegue la diseguaglianza

$$\varphi(\mathbf{e}_2) - \varphi(\mathbf{e}_1) = \int_0^1 \mathcal{E}(\hat{\mathbf{e}}(\xi)) : (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) \, d\xi = \int_0^1 f(\xi) \, d\xi > f(0) = \mathcal{E}(\mathbf{e}_1) : (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1),$$

che esprime la stretta convessità del potenziale (vedi fig.3.2).

---

<sup>6</sup> VITO VOLTERRA (1860-1940). Fu successore di BELTRAMI alla cattedra di fisica matematica a Roma. Per primo contribuì a fondare la teoria generale delle equazioni integrali, cui poi diedero contributi decisivi lo svedese ERIK IVAR FREDHOLM (1866-1927) ed il tedesco DAVID HILBERT (1862-1943).

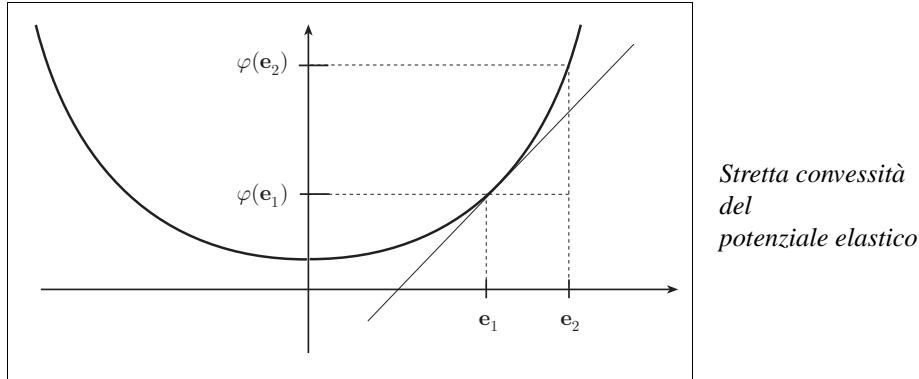


Fig. 3.2 Potenziale elastico

Viceversa, se il potenziale elastico è strettamente convesso, per ogni  $e_1 \neq e_2$  si ha

$$\varphi(e_2) - \varphi(e_1) > \mathcal{E}(e_1) : (e_2 - e_1),$$

e, scambiando gli indici 1 e 2

$$\varphi(e_1) - \varphi(e_2) > -\mathcal{E}(e_2) : (e_2 - e_1).$$

Sommando si ottiene

$$\mathcal{E}(e_2) - \mathcal{E}(e_1) : (e_2 - e_1) > 0,$$

che esprime la stretta monotonia del legame elastico.  $\square$

### 3.5. Energia di deformazione elastica

Il potenziale  $\varphi(\mathbf{e})$  del legame  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\mathbf{e})$  con  $\varphi(\mathbf{o}) = 0$  è detto *energia di deformazione elastica* e la legge di rigidezza elastica si può scrivere

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\mathbf{e}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{e}).$$

L'energia di deformazione elastica si può valutare integrando lungo un raggio il lavoro incrementale

$$\varphi(\mathbf{e}) = \int_{\mathbf{c}(\mathbf{o}, \mathbf{e})} \mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}}) : d\bar{\mathbf{e}} = \int_0^1 \mathcal{E}(\xi \mathbf{e}) : \mathbf{e} d\xi.$$

*Energia di deformazione elastica*

### 3.6. Energia elastica complementare

L'invertibilità del legame elastico comporta che se la legge  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\mathbf{e})$  ammette un potenziale anche la legge inversa  $\mathbf{e} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$  ammette un potenziale.

Infatti ad ogni circuito  $c_e \subset \text{Sym}(V; V)$  nello spazio delle deformazioni corrisponde un circuito  $c_\sigma \subset \text{Sym}(V; V)$  in quello degli stati tensionali e viceversa.

Considerando quindi un arbitrario circuito  $c_e \subset \text{Sym}(V; V)$  nello spazio delle deformazioni, risulta

$$\oint_{c_e} d[\mathcal{E}(\mathbf{e}) : \mathbf{e}] = 0,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \oint_{c_e} d[\mathcal{E}(\mathbf{e}) : \mathbf{e}] &= \oint_{c_e} [\mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e}] + \oint_{c_e} [\mathbf{e} : d\mathcal{E}(\mathbf{e})] = \\ &= \oint_{c_e} [\mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e}] + \oint_{c_\sigma} [\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}) : d\boldsymbol{\sigma}] = 0. \end{aligned}$$

La conservatività del legame  $\mathcal{E}(\mathbf{e})$  implica quindi quella del legame  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$  e viceversa.

- Il potenziale  $\psi : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathbb{R}$  del legame inverso  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$  prende il nome di *energia elastica complementare* e la legge di cedevolezza elastica si scrive

$$\mathbf{e} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{grad } \psi(\boldsymbol{\sigma}).$$

E' conveniente porre  $\psi(\mathbf{0}) = 0$ .

Se il legame  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$  è differenziabile, l'esistenza dell'energia elastica complementare  $\psi(\boldsymbol{\sigma})$  è assicurata dalla condizione di integrabilità di VOLTERRA.

$$d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}_1 : \boldsymbol{\sigma}_2 = d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})\boldsymbol{\sigma}_2 : \boldsymbol{\sigma}_1$$

*Simmetria della cedevolezza elastica tangente*

L'energia elastica complementare  $\psi(\boldsymbol{\sigma})$  risulta anch'essa strettamente convessa ed è fornita dall'espressione

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{C}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) : d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \int_0^1 \mathcal{C}(\xi \boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma} \, d\xi$$

*Energia elastica complementare*

Il nome di energia elastica complementare è dovuto al sussistere del seguente risultato dovuto a LEGENDRE<sup>7</sup>.

**Proposizione 3.3.** *L'energia di deformazione elastica e quella complementare soddisfano la relazione di complementarietà*

$$\varphi(\mathbf{e}) + \psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\mathbf{e}),$$

*detta trasformazione di LEGENDRE.*

**Dim.** Basta osservare che, essendo  $\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\mathbf{e})$ , si ha

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{e}) + \psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{e}} \mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}}) : d\bar{\mathbf{e}} + \int_{\mathbf{o}}^{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{C}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) : d\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \\ &= \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{e}} \mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}}) : d\bar{\mathbf{e}} + \int_{\mathbf{o}}^{\mathcal{E}(\mathbf{e})} \bar{\mathbf{e}} : d\mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}}) = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{e}} d[\mathcal{E}(\bar{\mathbf{e}}) : \bar{\mathbf{e}}] = \mathcal{E}(\mathbf{e}) : \mathbf{e}, \end{aligned}$$

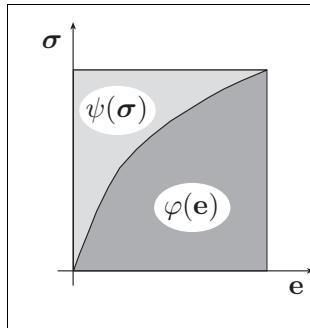
e quindi il risultato è dimostrato.  $\square$

La relazione tra energia di deformazione elastica ed energia elastica complementare consente di ottenere l'espressione di uno di tali potenziali una volta noto l'altro ed il legame elastico. Ciascun potenziale è la *trasformata di LEGENDRE* dell'altro.

La relazione di complementarietà è schematicamente illustrata in fig.3.3.

---

<sup>7</sup> ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833). Nato a Parigi da famiglia ricca, studiò al Collège Mazarin dove nel 1770, all'età di 18 anni difese la tesi di matematica e fisica. Dal 1775 to 1780, segnalato da D'ALEMBERT insegnò con LAPLACE all'Ecole Militaire. Nel 1782 il suo lavoro *Recherches sur la trajectoire des projectiles dans les milieux résistants* vinse il premio dell'Accademia di Berlino di cui a quel tempo era direttore LAGRANGE. Nel 1783, su segnalazione di LAPLACE fu eletto all'Académie des Sciences di Parigi. Nel lavoro del 1784, *Recherches sur la figure des planètes* introdusse i polinomi di Legendre. Nel 1794 LEGENDRE pubblicò gli *Éléments de géométrie* che costituirono il testo di base sull'argomento per circa un secolo. Nel 1795 l'Académie des Sciences, chiusa durante la rivoluzione nel 1793, fu riaperta sotto il nome di Institut National des Sciences et des Arts. Nel 1806 in un'appendice al libro sulla determinazione delle orbite delle comete pubblicò il metodo dei minimi quadrati. GAUSS lo pubblicò nel 1809 rivendicando la priorità dell'idea. Un'analogia disputa avvenne circa la priorità nella scoperta della distribuzione asintotica dei numeri primi e sulla legge della reciprocità quadratica. Nel 1824 LEGENDRE si rifiutò di votare per il candidato del governo nell'Institut National. Di conseguenza perse la pensione e morì in povertà.



*Energia di deformazione  
elastica e complementare  
in elasticità non lineare*

Fig. 3.3

**Osservazione 3.1.** E' possibile definire legami elastici più generali di quello descritto in precedenza consentendo che la relazione tra deformazione linearizzata e stato tensionale sia multivoca e rilassando la richiesta di stretta monotonia crescente in quella molto meno restrittiva di semplice monotonia crescente del grafico.

A tal fine, posto  $\text{Sym} = \text{Sym}(V; V)$ , si osservi che ad una relazione

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \text{Sym} \times \text{Sym},$$

si associano due *mappe multivoche*

$$\mathcal{E} : \text{Sym} \mapsto \text{Sym}, \quad \mathcal{E}^{-1} : \text{Sym} \mapsto \text{Sym},$$

definite da

$$\mathcal{E}(\varepsilon) := \{\sigma \in \text{Sym} : \{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})\},$$

$$\mathcal{E}^{-1}(\sigma) := \{\varepsilon \in \text{Sym} : \{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})\}.$$

I *domini efficaci*  $\text{dom } \mathcal{E}$  e  $\text{dom } \mathcal{E}^{-1}$  sono definiti dalle condizioni

$$\text{dom}(\mathcal{E}) := \{\varepsilon \in \text{Sym} : \mathcal{E}(\varepsilon) \neq \emptyset\},$$

$$\text{dom}(\mathcal{E}^{-1}) := \{\sigma \in \text{Sym} : \mathcal{E}^{-1}(\sigma) \neq \emptyset\}.$$

Si definisce

■ *legame elastico generalizzato* il grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  di una relazione tra  $\text{Sym}(V; V)$  e  $\text{Sym}(V; V)$  che soddisfa le proprietà

- i)  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  è monotono massimale,
- ii)  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  è conservativo,
- iii)  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  sono insiemi convessi.

La *conservatività* del legame  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  richiede che sia nullo il lavoro associato al legame  $\mathcal{E}$  lungo ogni polilinea chiusa  $\mathbf{c}$  contenuta in  $\text{dom}(\mathcal{E}) \subseteq \text{Sym}$  :

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathcal{E}(\mathbf{e}) : d\mathbf{e} = 0 \quad \forall \mathbf{c} \subseteq \text{dom}(\mathcal{E}),$$

o equivalentemente, lungo ogni polilinea chiusa contenuta in  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1}) \subseteq \text{Sym}$  :

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}) : d\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \forall \mathbf{c} \subseteq \text{dom}(\mathcal{E}^{-1}).$$

La corrispondenza tra stati tensionali e deformativi non è più univoca ma è possibile far ricorso ad una generalizzazione della teoria del potenziale per definire l'energia di deformazione elastica e quella complementare [25].

I potenziali complementari sono convessi ma in generale non differenziabili per cui è necessario far ricorso alla nozione di sottodifferenziabilità definita da

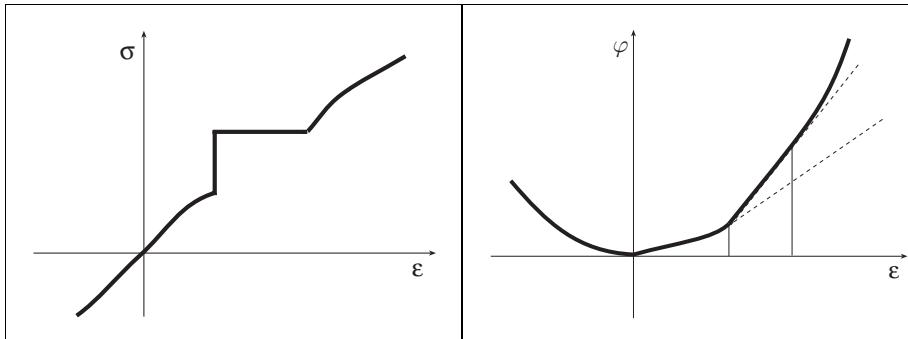
$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\mathbf{e}) \iff \varphi(\bar{\mathbf{e}}) - \varphi(\mathbf{e}) \geq \boldsymbol{\sigma} : (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e}), \quad \forall \bar{\mathbf{e}} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

$$\mathbf{e} \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma}) \iff \psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \psi(\boldsymbol{\sigma}) \geq \mathbf{e} : (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}).$$

La relazione di complementarietà vale ancora ed è nota come

■ *trasformata di LEGENDRE-FENCHEL.*

I grafici di un legame elastico generalizzato e del relativo potenziale sono schematicamente mostrati nelle figg.3.4 e 3.5.



Nel capitolo III sarà sviluppata in dettaglio la teoria che consente di modellare comportamenti costitutivi non univoci ma governati da potenziali convessi.

Viene inoltre mostrato come la discussione dell'esistenza di una soluzione del problema elastico generalizzato conduca naturalmente alla formulazione dei teoremi dell'Analisi Limite e come il contesto formale dell'elasticità generalizzata consenta di sviluppare una teoria sistematica dei principi variazionali e di trattare in modo unitario i problemi strutturali di plasticità, viscoplasticità e plasticità incrementale.

### 3.7. Synopsis

Le proprietà del legame elastico sono raccolte nel quadro riassuntivo che segue.

$\mathbf{e} = \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})$ ,	$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\mathbf{e})$ ,	$\mathcal{E} = \mathcal{C}^{-1}$ ,	<i>invertibilità</i>
$\mathcal{C}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ ,	$\mathcal{E}(\mathbf{o}) = \mathbf{o}$ ,		<i>stato naturale</i>
$\Delta[\boldsymbol{\sigma}] : \Delta[\mathbf{e}] > 0 \quad \forall \Delta[\boldsymbol{\sigma}] \neq \mathbf{o}, \quad \forall \Delta[\mathbf{e}] \neq \mathbf{o}$ ,			<i>monotonia stretta</i>
$d\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma})\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \geq 0$ ,	$d\mathcal{E}(\mathbf{e})\bar{\mathbf{e}} : \bar{\mathbf{e}} \geq 0$ ,		<i>stabilità</i>
$\mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \text{grad } \psi(\boldsymbol{\sigma})$ ,	$\mathcal{E}(\mathbf{e}) = \text{grad } \varphi(\mathbf{e})$ ,		<i>conservatività</i>
$\varphi(\bar{\mathbf{e}}) - \varphi(\mathbf{e}) > \mathcal{E}(\mathbf{e}) : (\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{e})$ ,		$\forall \bar{\mathbf{e}} \neq \mathbf{e}$ ,	<i>convessità stretta</i>
$\psi(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \psi(\boldsymbol{\sigma}) > \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}) : (\bar{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma})$ ,		$\forall \bar{\boldsymbol{\sigma}} \neq \boldsymbol{\sigma}$ ,	<i>convessità stretta</i>
$\varphi(\mathbf{e}) + \psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}$ ,			<i>complementarietà</i>

### 3.8. Legame elastico lineare

Si considerino ora lo spazio lineare dei tensori del quarto ordine ed il sottospazio lineare dei tensori del quarto ordine simmetrici che operano tra spazi di tensori simmetrici

$$\mathbb{L}\text{in}(V) := \text{Lin}(\text{Lin}(V; V); \text{Lin}(V; V)),$$

$$\mathbb{S}\text{ym}(V) := \text{Sym}(\text{Sym}(V; V); \text{Sym}(V; V)).$$

Se il legame elastico è lineare si scrive

$$\mathbf{e} = \mathbb{C} \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E} \mathbf{e}$$

ed in termini di componenti cartesiane

$$\mathbf{e}_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \boldsymbol{\sigma}_{kl}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl} \mathbf{e}_{kl},$$

con

$$\mathbb{C} \in \mathbb{S}\text{ym}(V), \quad \mathbb{E} \in \mathbb{S}\text{ym}(V),$$

tensori simmetrici del quarto ordine.

Essendo  $\sigma$  ed  $e$  tensori simmetrici, i tensori elastici soddisfano le seguenti proprietà di *simmetria minore*

$$\mathbb{C}_{ijks} = \mathbb{C}_{jiks} = \mathbb{C}_{ijsk} = \mathbb{C}_{jisk},$$

$$\mathbb{E}_{ijks} = \mathbb{E}_{jiks} = \mathbb{E}_{ijsk} = \mathbb{E}_{jisk}.$$

Si osservi inoltre che, in virtù della linearità del legame, la derivata della rigidezza elastica risulta costante

$$\begin{aligned} d\mathbb{E}(e) &= \mathbb{E} & \forall e \in \text{Sym}(V; V), \\ d\mathbb{C}(\sigma) &= \mathbb{C} & \forall \sigma \in \text{Sym}(V; V), \end{aligned}$$

e quindi la condizione di integrabilità di VOLTERRA consiste nel richiedere la simmetria dei tensori elastici

$$\begin{aligned} \mathbb{E} e_1 : e_2 &= \mathbb{E} e_2 : e_1, & \forall e_1, e_2 \in \text{Sym}(V; V), \\ \mathbb{C} \sigma_1 : \sigma_2 &= \mathbb{C} \sigma_2 : \sigma_1, & \forall \sigma_1, \sigma_2 \in \text{Sym}(V; V). \end{aligned}$$

Per un materiale elastico alla GREEN sussiste quindi un’ulteriore proprietà di simmetria dei tensori elastici, detta *simmetria maggiore*

$$\mathbb{C}_{ijks} = \mathbb{C}_{ksij}, \quad \mathbb{E}_{ijks} = \mathbb{E}_{ksij}.$$

L’energia di deformazione elastica e quella complementare sono forme quadratiche

$$\varphi(e) = \int_0^1 \mathbb{E}(\xi e) : e \, d\xi = (\mathbb{E} e : e) \int_0^1 \xi \, d\xi = \frac{1}{2} \mathbb{E} e : e.$$

$$\psi(\sigma) = \int_0^1 \mathbb{C}(\xi \sigma) : \sigma \, d\xi = (\mathbb{C} \sigma : \sigma) \int_0^1 \xi \, d\xi = \frac{1}{2} \mathbb{C} \sigma : \sigma,$$

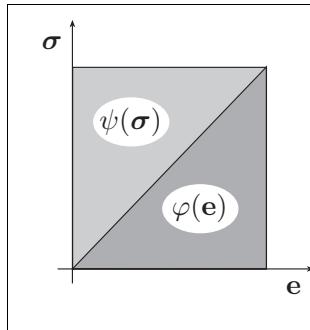
che, per la proprietà di stabilità, sono *definite positive*

$$\mathbb{E} e : e > 0 \quad \forall e \in \text{Sym}(V; V) \setminus \{\mathbf{0}\},$$

$$\mathbb{C} \sigma : \sigma > 0 \quad \forall \sigma \in \text{Sym}(V; V) \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

- La linearità del legame comporta inoltre che l’energia di deformazione elastica e quella complementare assumono lo stesso valore se gli stati tensionali e deformativi sono legati dalla legge di elasticità.

La relazione di complementarietà è schematicamente illustrata in fig.3.6.



*Energia di deformazione  
elastica e complementare  
in elasticità lineare*

### 3.9. Costanti elastiche

Lo spazio vettoriale  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  dei tensori simmetrici del secondo ordine, cui appartengono gli stati di tensione e di deformazione, ha dimensione 6.

Fissato un riferimento ortonormale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  è possibile rappresentare i tensori simmetrici come vettori numerici assumendo nello spazio  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  una base ortonormale costituita dai 6 tensori simmetrici

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i & i = 1, 2, 3, \\ \sqrt{2} \text{ sym}(\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j), & j > i \neq k \quad k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

In meccanica del continuo si preferisce adottare basi duali cui riferire rispettivamente le componenti dello stato tensionale e le componenti della deformazione linearizzata, secondo la notazione introdotta da VOIGT (vedi Tomo I, sezione I.9.7 (p. 90) e sezione III.3.3 (p. 333)). Si assuma infatti per gli stati tensionali la base di  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i & i = 1, 2, 3, \\ 2 \text{ sym}(\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j), & j > i \neq k, \quad k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

e per le deformazioni linearizzate la base duale in  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$

$$\begin{cases} \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i, & i = 1, 2, 3, \\ \text{sym}(\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_j), & j > i \neq k, \quad k = 1, 2, 3. \end{cases}$$

I vettori numerici delle componenti dello stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  e della

deformazione linearizzata  $\mathbf{e} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  sono allora rispettivamente dati da

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix} \quad [\mathbf{e}] = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix}.$$

ed il prodotto interno  $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e}$  assume l'espressione canonica

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} = \sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3 + \tau_{23} \gamma_{23} + \tau_{13} \gamma_{13} + \tau_{12} \gamma_{12}.$$

Al tensore di rigidezza elastica  $\mathbb{E} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  è quindi associata una matrice quadrata d'ordine 6, per cui il legame elastico si può scrivere

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix}.$$

La matrice di rigidezza elastica ha 36 componenti che definiscono le costanti elastiche del materiale. Di esse però solo 21 sono indipendenti in virtù della simmetria del legame elastico che implica la simmetria della matrice  $[\mathbb{E}]$ . Infatti delle 36 componenti della matrice elastica le 15 del triangolo alto sono eguali a quelle del triangolo basso e ad esse vanno sommate le restanti 6 componenti sulla diagonale principale.

#### 4. SIMMETRIE MATERIALI ED ISOTROPIA

Un materiale elastico si dice *isotropo* quando ha le stesse proprietà elastiche in ogni direzione.

In termini più precisi ciò significa che nell'effettuare un esperimento meccanico su di un provino del materiale, che induce in esso un qualsivoglia stato tensionale, la deformazione elastica che viene misurata è indifferente rispetto ad una arbitraria rotazione relativa tra provino e macchina di prova.

La caratterizzazione formale della proprietà di isotropia del materiale in corrispondenza di una particella del corpo  $\mathbb{TB}$  consiste nell'imporre che la legge di risposta elastica non vari se si ruota arbitrariamente lo stato di tensione, nel senso che lo stato di deformazione subisce anch'esso la medesima rotazione.

Si consideri una rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  dello spazio tangente  $\mathbf{V}$  nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega$  al corpo  $\mathbb{TB}$  nella configurazione  $\Omega$ .

Lo stato tensionale in  $\mathbf{x} \in \Omega$  sia definito dal tensore  $\boldsymbol{\sigma}$  e la corrispondente deformazione elastica dal tensore  $\mathbf{e} = \mathbb{C}\boldsymbol{\sigma}$ .

Per ogni rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  il tensore ruotato  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{R}}$  è definito come il tensore che associa al generico versore  $\mathbf{R}\mathbf{n} \in \mathbf{V}$ , il vettore  $\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \in \mathbf{V}$ . Dunque

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{n} \in S^2(1).$$

Risulta quindi

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma} \iff \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{R}} = \mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T.$$

Per ogni coppia di tensori  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  si considerino ora i prodotti tensoriali

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathbf{V}),$$

$$\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathbf{V}),$$

definiti da

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{C} = (\mathbf{B} : \mathbf{C})\mathbf{A}, \quad \forall \mathbf{C} \in \text{Lin}(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

$$(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}^T, \quad \forall \mathbf{C} \in \text{Lin}(\mathbf{V}; \mathbf{V}).$$

Il prodotto tensoriale  $\boxtimes$  gode delle seguenti proprietà.

$$i) \quad (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \boxtimes \mathbf{B}^T,$$

$$ii) \quad (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \boxtimes \mathbf{B}^{-1},$$

$$iii) \quad (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{C})(\mathbf{B} \boxtimes \mathbf{D}),$$

$$iv) \quad (\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A}\mathbf{C}\mathbf{B}^T) \otimes \mathbf{D},$$

$$v) \quad (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \boxtimes \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{C}^T \mathbf{B} \mathbf{D}),$$

dove  $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \text{Lin}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  e nella seconda si è assunto che i tensori  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \text{Lin}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  siano invertibili.

Si noti che il trasposto di un tensore del quarto ordine  $\mathbb{A} \in \text{Lin}(\mathbf{V})$  è definito da

$$(\mathbb{A}\mathbf{C}) : \mathbf{D} = (\mathbb{A}^T \mathbf{D}) : \mathbf{C}, \quad \forall \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \text{Lin}(\mathbf{V}; \mathbf{V}).$$

In termini di componenti cartesiane si ha che

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})_{ijkl} = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{ks},$$

$$(\mathbf{A} \boxtimes \mathbf{B})_{ijkl} = \mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{js}.$$

Da tali proprietà segue immediatamente che per ogni isometria  $\mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V)$  il tensore del quarto ordine definito da  $\mathbb{R} = \mathbf{R} \boxtimes \mathbf{R}$  è una isometria. Risulta infatti

$$\mathbb{R}^T \mathbb{R} = \mathbb{R} \mathbb{R}^T = (\mathbf{R} \boxtimes \mathbf{R})(\mathbf{R} \boxtimes \mathbf{R})^T = \mathbf{I} \boxtimes \mathbf{I} = \mathbb{I},$$

dove  $\mathbb{I}$  è l'identità in  $\text{Lin}(V)$ .

Per ogni  $\mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V)$  il tensore del secondo ordine ruotato può quindi essere definito da

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \boldsymbol{\sigma},$$

ed il tensore del quarto ordine ruotato è definito da

$$\mathbb{C}_{\mathbf{R}} = \mathbb{R} \mathbb{C} \mathbb{R}^T, \quad \forall \mathbb{R} = \mathbf{R} \boxtimes \mathbf{R}.$$

Si consideri ora una rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+(V; V)$  dello stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(V; V)$ . Se il materiale elastico è isotropo nel punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , la risposta elastica non deve cambiare.

Dunque allo stato tensionale ruotato  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{R}} \in \text{Sym}(V; V)$  deve corrispondere una deformazione elastica  $\mathbf{e}_{\mathbf{R}} \in \text{Sym}(V; V)$  che si può ottenere effettuando la medesima rotazione su  $\mathbf{e} \in \text{Sym}(V; V)$ .

In termini analitici si ha che

- Un materiale elastico non lineare è *isotropo* se il legame di cedevolezza elastica

$$\mathbb{C} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \text{Sym}(V; V),$$

soddisfa la relazione

$$\mathbb{C}(\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T) = \mathbf{R} \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{R}^T,$$

per ogni  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(V; V)$  e per ogni  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+(V; V)$   
ovvero

$$\mathbb{C} \mathbb{R} = \mathbb{R} \mathbb{C} \iff \mathbb{C}_{\mathbf{R}} = \mathbb{C},$$

per ogni rotazione  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+(V; V)$ .

*Elasticità  
isotropa*

Si osservi ora che

$$(-\mathbf{R}) \boldsymbol{\sigma} (-\mathbf{R}^T) = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T, \quad -\mathbf{R} \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) (-\mathbf{R})^T = \mathbf{R} \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{R}^T.$$

Inoltre, se  $\mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V)$  è una isometria, allora una delle isometrie  $\{\mathbf{R}, -\mathbf{R}\}$  è una rotazione (isometria propria).

La validità della condizione

$$\mathbb{C}(\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T) = \mathbf{R} \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{R}^T,$$

sotto l'azione del sottogruppo delle rotazioni  $\text{Orth}^+(V; V)$  comporta dunque la sua validità sotto l'azione dell'intero gruppo delle isometrie  $\text{Orth}(V; V)$ .

La biunivocità del legame elastico consente quindi di mostrare che l'isotropia della rigidezza elastica implica quella della cedevolezza elastica e viceversa.

**Proposizione 4.1.** *Se la cedevolezza elastica  $\mathbb{C} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \text{Sym}(V; V)$  gode della proprietà di isotropia tale proprietà sussiste anche per la rigidezza elastica  $\mathbb{E} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \text{Sym}(V; V)$ . L'isotropia è quindi una proprietà caratteristica del grafico della relazione elastica.*

**Dim.** L'identità che definisce l'isotropia della cedevolezza elastica

$$\mathbb{C}(\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T) = \mathbf{R}\mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{R}^T, \quad \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V),$$

può essere riscritta nella forma equivalente

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R}^T = \mathbb{E}(\mathbf{R}\mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma})\mathbf{R}^T), \quad \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V),$$

da cui, ponendo  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{E}(\mathbf{e})$  e  $\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma})$  si ottiene

$$\mathbb{E}(\mathbf{R}\mathbf{e}\mathbf{R}^T) = \mathbf{R}\mathbb{E}(\mathbf{e})\mathbf{R}^T, \quad \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V).$$

che è il risultato cercato.  $\square$

#### 4.1. Gruppi di simmetria materiale

Una famiglia di tensori misti  $\mathcal{A}(V) \subseteq \text{Lin}(V; V)$  è *invariante* rispetto al gruppo delle isometrie  $\text{Orth}(V; V)$  se

$$\mathbf{A} \in \mathcal{A}(V) \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{A}\mathbf{R}^T \in \mathcal{A}(V), \quad \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V).$$

Un legame costitutivo

$$\mathbb{C} : \mathcal{A}(V) \mapsto \text{Lin}(V; V),$$

definito sulla *famiglia invariante*  $\mathcal{A}(V) \subseteq \text{Lin}(V; V)$  è un *legame invariante* rispetto al sottogruppo  $\mathcal{G}(V) \subset \text{Orth}(V; V)$  se sussiste la relazione

$$\mathbb{C} = \mathbf{R}\mathbb{C}\mathbf{R}^T, \quad \forall \mathbf{R} \in \mathcal{G}(V).$$

L'insieme  $\mathcal{G}(V)$  è detto *gruppo di simmetria materiale*.

L'insieme  $\mathcal{G}(V)$  è un sottogruppo di  $\text{Orth}(V; V)$  in quanto sono soddisfatte le proprietà caratteristiche di un gruppo:

- i)  $\mathbf{I} \in \mathcal{G}(V),$
- ii)  $\mathbf{R} \in \mathcal{G}(V) \Rightarrow \mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} \in \mathcal{G}(V),$
- iii)  $\mathbf{R}, \mathbf{Q} \in \mathcal{G}(V) \Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{Q} \in \mathcal{G}(V).$

Si osservi inoltre che

- Il più piccolo gruppo di simmetria materiale è costituito dalla coppia  $\{\mathbf{I}, -\mathbf{I}\}$  ed è caratteristico dei *materiali aelotropi*.
- Il più grande gruppo di simmetria materiale è  $\text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  ed è caratteristico dei *materiali isotropi*.
- Il gruppo di simmetria materiale  $\text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  è caratteristico dei *materiali emitropi*.

#### 4.2. Elasticità lineare isotropa

Se il materiale è linearmente elastico ed isotropo le costanti elastiche indipendenti si riducono a due.

**Proposizione 4.2.** *In un materiale elastico lineare ed isotropo le direzioni principali degli stati di tensione e di deformazione coincidono.*

**Dim.** Il tensore dello stato tensionale può essere decomposto nella somma di tre stati tensionali monoassiali facendo ricorso alla rappresentazione spettrale

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{P}_i,$$

dove:

- $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  è una terna ortonormale di direzioni principali,
- $\mathbf{P}_i = \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i$  è il proiettore ortogonale sulla direzione principale  $\mathbf{d}_i$
- $\sigma_i$  è la tensione principale relativa alla direzione  $\mathbf{d}_i$ .

In virtù della linearità, la risposta elastica può essere ottenuta sovrapponendo le risposte elastiche ai tre stati tensionali monoassiali principali.

Si consideri la risposta elastica del materiale ad uno stato tensionale monoassiale  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}}$  con versore principale  $\mathbf{d}$  cui compete la tensione principale  $\sigma$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}} = \sigma \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}.$$

Si osservi che lo stato tensionale monoassiale  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}}$  è invariante rispetto alle rotazioni attorno al suo asse, caratterizzate dalla proprietà

$$\mathbf{R} \in \text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) : \mathbf{R} \mathbf{d} = \mathbf{d}.$$

Infatti si ha che

$$\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}} \mathbf{R}^T = \sigma \mathbf{R} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \mathbf{R}^T = \sigma (\mathbf{R} \mathbf{d}) \otimes (\mathbf{R} \mathbf{d}) = \sigma \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}}.$$

La proprietà di isotropia comporta che lo stato deformativo elastico  $\mathbf{e}_d = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}_d)$  corrispondente a  $\boldsymbol{\sigma}_d$  è anch'esso invariante rispetto alle rotazioni attorno all'asse  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{R} \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}_d) \mathbf{R}^T = \mathbb{C}(\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}_d \mathbf{R}^T) = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}_d), \quad \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V) : \mathbf{R} \mathbf{d} = \mathbf{d}.$$

Ne segue che l'asse  $\mathbf{d}$  è principale per lo stato deformativo elastico  $\mathbf{e}_d$  e che tale è anche ogni asse giacente nel piano ortogonale all'asse  $\mathbf{d}$ .

Infatti la proprietà di invarianza di  $\mathbf{e}_d$  rispetto alle rotazioni attorno all'asse  $\mathbf{d}$ :

$$\mathbf{R} \mathbf{e}_d \mathbf{R}^T = \mathbf{e}_d \iff \mathbf{R} \mathbf{e}_d = \mathbf{e}_d \mathbf{R}, \quad \forall \mathbf{R} \in \text{Orth}(V; V) : \mathbf{R} \mathbf{d} = \mathbf{d},$$

implica che

$$\mathbf{R} \mathbf{e}_d \mathbf{d} = \mathbf{e}_d \mathbf{R} \mathbf{d} = \mathbf{e}_d \mathbf{d}.$$

Dunque il vettore  $\mathbf{e}_d \mathbf{d}$  appartiene al sottospazio lineare invariante per una qualsiasi rotazione attorno all'asse  $\mathbf{d}$  ed è pertanto proporzionale a  $\mathbf{d}$ .

Ciò significa che  $\mathbf{d}$  è principale per  $\mathbf{e}_d$ .

Sia quindi  $\mathbf{d}^\perp$  un versore ortogonale a  $\mathbf{d}$  e principale per  $\mathbf{e}_d$ . Se  $\mu$  è il corrispondente autovalore, si ha che

$$\mathbf{e}_d \mathbf{R} \mathbf{d}^\perp = \mathbf{R} \mathbf{e}_d \mathbf{d}^\perp = \mu \mathbf{R} \mathbf{d}^\perp.$$

Dunque tutti i versori ortogonali a  $\mathbf{d}$  sono principali per  $\mathbf{e}_d$  con autovalore  $\mu$ .

Il tensore simmetrico  $\mathbf{e}_d$  ammette pertanto la rappresentazione spettrale

$$\mathbf{e}_d = \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}] = \varepsilon \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} + \varepsilon_t (\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}),$$

con

- $\varepsilon$  dilatazione principale in direzione  $\mathbf{d}$ ,
- $\varepsilon_t$  dilatazione principale trasversale, nel piano ortogonale a  $\mathbf{d}$ .

Sovrapponendo gli effetti dei tre stati tensionali monoassiali principali si giunge alla conclusione che ogni direzione principale dello stato tensionale risulta principale anche per lo stato di deformazione elastica.

Si noti ora che se il legame elastico è isotropo anche il legame elastico inverso risulta isotropo.

Si può quindi percorrere un iter analogo a quello sin qui seguito per dimostrare che ogni direzione principale per lo stato di deformazione elastica risulta principale anche per lo stato tensionale. Ne consegue che le direzioni principali dello stato deformativo elastico  $\mathbf{e} \in \text{Sym}(V; V)$  coincidono con quelle dello stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(V; V)$ .  $\square$

**Osservazione 4.1.** Il risultato della proposizione 4.2 può essere esteso a legami elastici isotropi non lineari. La dimostrazione di questa proprietà generale dei legami isotropi tra tensori simmetrici è riportata nella sezione 4.3 (p. 39).  $\blacksquare$

Si è visto che la risposta di un materiale elastico, lineare ed isotropo, ad uno stato tensionale monoassiale di asse  $\mathbf{d}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}} = \sigma \mathbf{d} \otimes \mathbf{d},$$

consiste in una dilatazione longitudinale  $\varepsilon$  della fibra principale  $\mathbf{d}$  ed in dilatazioni trasversali, tutte eguali tra loro, delle fibre ortogonali a  $\mathbf{d}$ .

La dilatazione principale lungo  $\mathbf{d}$  è proporzionale alla tensione principale  $\sigma$  ed il relativo fattore  $E$  è detto *modulo di elasticità longitudinale* o modulo di YOUNG<sup>8</sup>

$$\sigma = E \varepsilon.$$

Si noti che il modulo di YOUNG ha le dimensioni di una tensione  $[FL^{-2}]$ .

In direzione trasversale si verifica invece una contrazione uniforme e proporzionale alla dilatazione  $\varepsilon$  tramite un coefficiente  $\nu$  che viene detto *rapporto di Poisson*<sup>9</sup>

$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon = -\nu \sigma/E.$$

Il rapporto di Poisson è adimensionale.

In termini analitici si può concludere affermando che ad uno stato tensionale monoassiale

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{d}} = \sigma \mathbf{d} \otimes \mathbf{d},$$

corrisponde una deformazione elastica espressa da

$$\mathbf{e}_{\mathbf{d}} = \mathbb{C}[\sigma \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}] = \frac{\sigma}{E} \left[ \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} - \nu(\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \right].$$

---

<sup>8</sup> THOMAS YOUNG (1773-1829). Naturalista e scienziato, formulò per primo la teoria ondulatoria della luce. Il modulo che prende il suo nome fu in effetti introdotto per la prima volta da LEONHARD EULER nel 1727. YOUNG sviluppò un'idea simile nel 1807.

<sup>9</sup> SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840). Illustré fisico matematico, professore all'Ecole Polytechnique, pubblicò nel 1835 la *Théorie mathématique de la chaleur*.

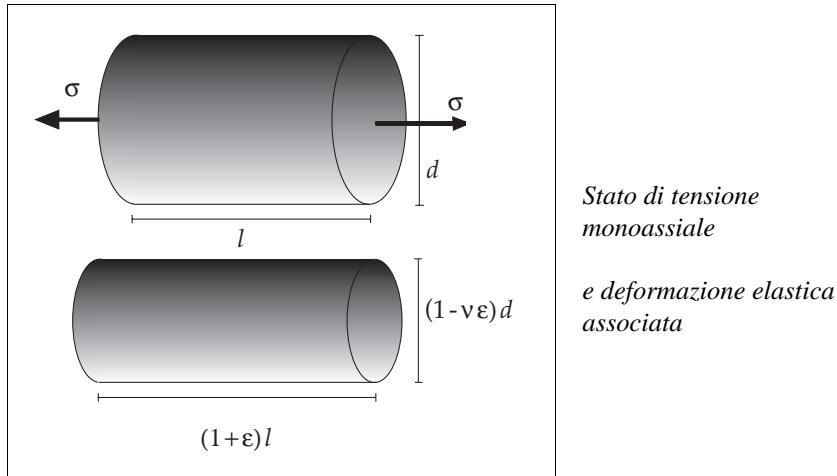


Fig. 4.1

Assumendo un riferimento principale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  con l'asse  $\mathbf{d}_1$  coincidente con  $\mathbf{d}$ , le tre dilatazioni principali valgono

$$\varepsilon_1 = +\frac{1}{E} \sigma, \quad \varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E} \sigma, \quad \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma.$$

Il comportamento di un cilindro di materiale elastico isotropo soggetto ad uno stato tensionale monoassiale è schematicamente rappresentato in fig.4.1.

Sovrapponendo le risposte deformative ai tre stati tensionali monoassiali principali, si perviene all'espressione delle dilatazioni elastiche lungo una terna principale

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_2 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1+\nu}{E} \sigma_3 - \frac{\nu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).\end{aligned}$$

Le rappresentazioni spettrali dei tensori di tensione e di deformazione

$$\mathbf{e} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \mathbf{P}_i, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{P}_i,$$

forniscono quindi l'espressione del legame di cedevolezza elastica isotropa

$$\mathbf{e} = \frac{1+\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{P}_i - \frac{\nu}{E} \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{I}.$$

Essendo  $\text{tr } \sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  e definendo poi la *prima costante elastica di LAMÉ*<sup>10</sup> o *modulo di elasticità tangenziale*

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \begin{array}{l} \text{Prima costante} \\ \text{di LAMÉ} \end{array}$$

il legame elastico si può scrivere

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2G} \sigma - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I}.$$

I proiettori sui sottospazi sferici e deviatorici  $\text{sph} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  e  $\text{dev} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  sono definiti da

$$\text{sph} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

$$\text{dev} = \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

dove  $\mathbb{I} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  è l'identità in  $\text{Lin}(\mathbf{V})$  (vedi sezione 4 (p. 26)).

Si noti che, per definizione

$$\text{sph } \sigma = \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I}, \quad \text{dev } \sigma = \sigma - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I}.$$

Dalla relazione elastica

$$\mathbf{e} = \frac{1}{E} [(1+\nu) \sigma - \nu (\text{tr } \sigma) \mathbf{I}],$$

eguagliando gli invarianti lineari e notando che  $\text{tr } \mathbf{I} = 3$ , si deduce la relazione tra la deformazione elastica volumetrica e la traccia dello stato tensionale

$$\text{tr } \mathbf{e} = \frac{1-2\nu}{E} \text{tr } \sigma.$$

Introducendo il *modulo volumetrico*

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

risulta  $\text{tr } \sigma = 3k \text{tr } \mathbf{e}$  ovvero  $\text{sph } \sigma = 3k \text{ sph } \mathbf{e}$  e quindi

$$p(\sigma) = k \text{ sph } \mathbf{e},$$

dove  $p(\sigma) = (1/3) \text{tr } \sigma$  è la tensione media.

---

<sup>10</sup> GABRIEL LAMÉ (1795-1870). Ingegnere e matematico, famoso per lo studio dell'equazione del calore e per l'introduzione delle coordinate curvilinee.

- Il modulo volumetrico è dunque definito dal rapporto tra la tensione media e la corrispondente dilatazione elastica volumetrica.

La relazione tra le parti deviatoriche si scrive poi

$$\text{dev } \boldsymbol{\sigma} = 2G \text{ dev } \mathbf{e}.$$

Ne segue che

$$\boldsymbol{\sigma} = 3k \text{ sph } \mathbf{e} + 2G \text{ dev } \mathbf{e},$$

e che

$$\mathbf{e} = \frac{1}{3k} \text{ sph } \boldsymbol{\sigma} + \frac{1}{2G} \text{ dev } \boldsymbol{\sigma}.$$

Introducendo la *seconda costante elastica di LAMÉ*

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

*Seconda costante  
di LAMÉ*

è facile vedere che risulta

$$3k = 2G + 3\lambda.$$

La relazione elastica

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \mathbf{e} + (3k - 2G) \text{ sph } \mathbf{e},$$

si può dunque riscrivere in funzione delle costanti di LAMÉ

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \mathbf{e} + \lambda (\text{tr } \mathbf{e}) \mathbf{I} = \frac{\lambda}{\nu} [(1-2\nu)\mathbf{e} + \nu (\text{tr } \mathbf{e}) \mathbf{I}].$$

In termini di tensioni principali, il legame di rigidezza elastica si scrive

$$\sigma_1 = (2G + \lambda) \varepsilon_1 + \lambda (\varepsilon_2 + \varepsilon_3),$$

$$\sigma_2 = (2G + \lambda) \varepsilon_2 + \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_3),$$

$$\sigma_3 = (2G + \lambda) \varepsilon_3 + \lambda (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

I tensori del quarto ordine  $\mathbb{E} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  e  $\mathbb{C} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  che rappresentano la rigidezza e la cedevolezza del materiale elastico lineare ed isotropo hanno dunque le espressioni

$$\mathbb{E} = 3k \text{ sph} + 2G \text{ dev} = k \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2G \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) = 2G \mathbb{I} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

$$\mathbb{C} = \frac{1}{3k} \text{ sph} + \frac{1}{2G} \text{ dev} = \frac{1}{k} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \frac{1}{2G} \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right) = \frac{1}{2G} \mathbb{I} - \frac{\nu}{E} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I},$$

in quanto

$$\frac{1}{3} \left( \frac{1}{3k} - \frac{1}{2G} \right) = -\frac{\nu}{E}.$$

La prossima proposizione fornisce condizioni necessarie e sufficienti da imporre alle costanti elastiche per assicurare che la forma quadratica dell'energia elastica risulti definita positiva.

**Proposizione 4.3.** *La stabilità del legame elastico equivale ad assumere che il modulo volumetrico e il modulo di elasticità tangenziale risultino positivi.*

**Dim.** Si decomponga la deformazione elastica nelle parti sferica e deviatorica:

$$\varphi(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} (\mathbb{E} \mathbf{e}) : \mathbf{e} = \frac{1}{2} [3k \operatorname{sph} \mathbf{e} + 2G \operatorname{dev} \mathbf{e}] : [\operatorname{sph} \mathbf{e} + \operatorname{dev} \mathbf{e}].$$

In virtù dell'ortogonalità tra tensori sferici e deviatorici

$$\operatorname{sph} \mathbf{e} : \operatorname{dev} \mathbf{e} = 0,$$

l'energia di deformazione elastica si può scrivere nella forma

$$\varphi(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} \left[ 3k \|\operatorname{sph} \mathbf{e}\|^2 + 2G \|\operatorname{dev} \mathbf{e}\|^2 \right].$$

La forma quadratica  $\varphi(\mathbf{e})$  risulta dunque definita positiva se e solo se

$$k > 0 ; \quad G > 0,$$

cioè se il modulo volumetrico e il modulo di elasticità tangenziale risultano positivi.  $\square$

La positività del modulo volumetrico comporta che un corpo elastico lineare ed isotropo soggetto ad uno stato di compressione idrostatica subisce una contrazione di volume. L'interpretazione meccanica della positività del modulo di elasticità tangenziale sarà illustrata nella prossima sezione, fig.4.2.

Dalla proposizione 4.3 si deduce un equivalente risultato in termini del modulo di YOUNG e del rapporto di POISSON.

**Proposizione 4.4.** *La stabilità del legame elastico equivale ad assumere che il modulo di YOUNG sia positivo e che il rapporto di POISSON soddisfi le limitazioni*

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}.$$

**Dim.** Ricordando le espressioni di  $k$  e di  $G$  in funzione di  $E$  e di  $\nu$

$$3k = \frac{E}{1-2\nu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

si deduce che la positività di  $k$  e di  $G$  equivale a richiedere che

$$E > 0 ; \quad -1 < \nu < \frac{1}{2},$$

e cioè che il modulo di YOUNG sia positivo e che il rapporto di POISSON sia maggiore di  $-1$  e minore di  $1/2$ .  $\square$

**Osservazione 4.2.** E' da rilevare che l'evidenza sperimentale mostra che i materiali con comportamento elastico lineare isotropo presentano in genere valori positivi del rapporto di POISSON.

Si verifica cioè di norma un fenomeno di contrazione trasversale per effetto di una trazione longitudinale.

Quando il rapporto di POISSON tende al valore  $1/2$  il modulo volumetrico tende all'infinito e quindi il materiale elastico isotropo tende a divenire incomprimibile.

Un esempio di materiali comuni che risultano praticamente incomprimibili è fornito dalle gomme. ■

Si consideri l'espressione dello scorrimento angolare  $\gamma$  tra due fibre lineari ortogonali di vettori  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$ :

$$\gamma = 2(\mathbf{e}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m},$$

e l'espressione della relativa tensione tangenziale

$$\tau = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m}.$$

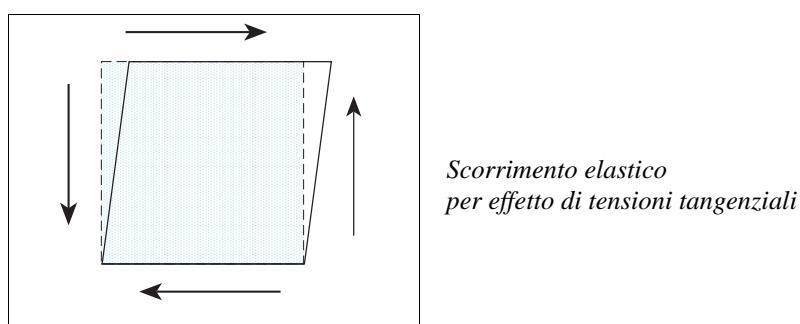
In un materiale elastico lineare isotropo sussiste una semplice relazione di proporzionalità tra tensioni tangenziali e scorrimenti angolari.

Infatti, essendo  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$ , si ha che

$$\boxed{\tau = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 2G(\mathbf{e}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} + \lambda(\text{tr } \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{m}) = G\gamma.}$$

Tale relazione rivela il significato della prima costante di LAMÉ  $G$  che è pertanto detta anche *modulo di elasticità tangenziale*.

La positività del modulo  $G$  comporta che per effetto di tensioni tangenziali la deformazione di un corpo elastico isotropo sia del tipo illustrato in fig.4.2.



Nella notazione di VOIGT la matrice di rigidezza di un materiale elastico lineare isotropo si scrive

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix},$$

e quella di cedevolezza ha l'espressione

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu E^{-1} & E^{-1} & -\nu E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu E^{-1} & -\nu E^{-1} & E^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix}.$$

Alla espressione della cedevolezza si può anche pervenire invertendo la matrice di rigidezza. Ciò si consegue osservando che la sottomatrice

$$\begin{bmatrix} 2G + \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 2G + \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 2G + \lambda \end{bmatrix},$$

ha determinante pari a  $8G^3 + 12G^2\lambda = 4G^2(2G + 3\lambda) = 12G^2k$  ed inversa data da

$$\begin{aligned} \frac{1}{12G^2k} \begin{bmatrix} 4G^2 + 4G\lambda & -2G\lambda & -2G\lambda \\ -2G\lambda & 4G^2 + 4G\lambda & -2G\lambda \\ -2G\lambda & -2G\lambda & 4G^2 + 4G\lambda \end{bmatrix} &= \\ \frac{1}{6Gk} \begin{bmatrix} 2G + 2\lambda & -\lambda & -\lambda \\ -\lambda & 2G + 2\lambda & -\lambda \\ -\lambda & -\lambda & 2G + 2\lambda \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

L'espressione della cedevolezza si ottiene osservando che sussistono le relazioni

$$2G + 2\lambda = \frac{2}{3} (G + 3k),$$

$$-\lambda = \frac{1}{3} (2G - 3k),$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{3k + G}{3kG} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{3k} \right) = E^{-1},$$

$$\frac{1}{3} \left( \frac{2G - 3k}{3k2G} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3k} - \frac{1}{2G} \right) = -\nu E^{-1}.$$

Nella tabella che segue sono riportati i valori del modulo di YOUNG e del rapporto di POISSON per alcuni materiali elastici lineari isotropi di uso comune.

Materiale	$E$ (MPa)	$\nu$
<i>Acciaio</i>	$(2.0 \div 2.1) \times 10^5$	$0.25 \div 0.33$
<i>Alluminio</i>	$6.5 \times 10^4$	0.36
<i>Piombo</i>	$(1.65) \times 10^4$	0.44
<i>Zinco</i>	$(1.05 \div 1.15) \times 10^5$	$0.20 \div 0.30$
<i>Ghisa grigia</i>	$(8.3 \div 11.3) \times 10^4$	$0.22 \div 0.30$
<i>Ghisa malleabile</i>	$(1.6 \div 1.7) \times 10^5$	$0.22 \div 0.30$
<i>Calcestruzzo</i>	$(2.0 \div 4.0) \times 10^4$	$0.10 \div 0.16$
<i>Tufi vulcanici</i>	$(3.0 \div 15.0) \times 10^3$	$0.10 \div 0.15$

### 4.3. Elasticità isotropa non lineare

Il legame elastico isotropo, dedotto nella sezione 4.2 (p. 30) nel caso lineare, può essere ottenuto come caso particolare da un risultato generale concernente i materiali elasticci isotropi non lineari. A tal fine è necessario estendere il risultato della proposizione 4.2 (p. 31) mediante il seguente fondamentale teorema.

Una prima dimostrazione incompleta fu data da RICHTER in [9]. Una dimostrazione per  $n = 3$  data da RIVLIN e ERICKSEN in [13]. La dimostrazione riportata nel seguito è presa da TRUESDELL e NOLL [21] ed è simile a quella di SERBIN [16].

**Proposizione 4.5.** *In un materiale elastico isotropo le direzioni principali degli stati di tensione e di deformazione coincidono.*

**Dim.** Si consideri un vettore  $\mathbf{d} \in V$  principale per  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(V; V)$ , così che

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{d} = \sigma \mathbf{d},$$

e la riflessione  $\mathbf{R}_d \in \text{Orth}(V; V)$  rispetto al piano ortogonale all'autovettore  $\mathbf{d} \in V$ .

Posto  $\Pi_d = \mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}$ , si ha che

$$\mathbf{R}_d \mathbf{d} = -\mathbf{d}, \quad \mathbf{R}_d \Pi_d \mathbf{d} = \Pi_d \mathbf{d}.$$

Dalla rappresentazione spettrale

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i,$$

con  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}$  e  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  base principale ortonormale, segue che  $\mathbf{R}_d \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}_d^T = \boldsymbol{\sigma}$ .

L'isotropia del legame elastico  $\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma})$  richiede che

$$\mathbb{C}(\mathbf{R} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}^T) = \mathbf{R} \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{R}^T,$$

per ogni  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(V; V)$  e per ogni  $\mathbf{R} \in \text{Orth}^+(V; V)$  e quindi che

$$\mathbf{R}_d \mathbf{e} \mathbf{R}_d^T = \mathbf{R}_d \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{R}_d^T = \mathbb{C}(\mathbf{R}_d \boldsymbol{\sigma} \mathbf{R}_d^T) = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{e}.$$

Allora, essendo  $\mathbf{R}_d^T = \mathbf{R}_d^{-1}$  si ha che  $\mathbf{R}_d^T \mathbf{d} = -\mathbf{d}$  e quindi

$$\mathbf{e} \mathbf{d} = \mathbf{R}_d \mathbf{e} \mathbf{R}_d^T \mathbf{d} = -\mathbf{R}_d (\mathbf{e} \mathbf{d}).$$

Poiché gli unici vettori che  $\mathbf{R}_d$  trasforma negli opposti sono quelli proporzionali a  $\mathbf{d}$ , si può concludere che

$$\mathbf{e} \mathbf{d} = \varepsilon \mathbf{d},$$

con  $\varepsilon$  autovalore di  $\mathbf{e} \in \text{Sym}(V; V)$  associato all'autovettore  $\mathbf{d}$ . Dunque ogni autovettore di  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(V; V)$  è anche autovettore di  $\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \in \text{Sym}(V; V)$ . L'invertibilità del legame elastico conduce infine all'enunciato.  $\square$

Per pervenire ad una formula di rappresentazione del legame elastico isotropo si osservi che gli autovalori della deformazione elastica  $\mathbf{e} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  sono funzioni degli autovalori dello stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  e si può porre

$$\varepsilon_i = \varphi_o + \varphi_1 \sigma_i + \varphi_2 \sigma_i^2,$$

con  $\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2$  funzioni di  $\{\sigma_i, i = 1, 2, 3\}$ . Tali relazioni costituiscono un sistema di equazioni lineari nelle incognite  $\varphi_o, \varphi_1, \varphi_2$  la cui matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}.$$

Sia  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  una base principale ortonormale.

- Se  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  ha 3 autovalori semplici, la formula di VANDERMONDE<sup>11</sup> mostra che il determinante del sistema lineare è non nullo essendo eguale a

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_3 - \sigma_1).$$

Rappresentando i tensori  $\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  e  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  nella forma canonica, si ottiene la relazione

$$\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \varphi_o \mathbf{I} + \varphi_1 \boldsymbol{\sigma} + \varphi_2 \boldsymbol{\sigma}^2,$$

- Se  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  ha un autovalore semplice ed un autovalore doppio la formula di rappresentazione diventa

$$\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \varphi_o \mathbf{I} + \varphi_1 \boldsymbol{\sigma},$$

ed è dunque un caso particolare della precedente.

Se il legame elastico è lineare la formula di rappresentazione si specializza poi in

$$\mathbf{e} = \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) = \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} + 2 G \boldsymbol{\sigma}.$$

---

<sup>11</sup> ALEXANDRE-THÉOPHILE VANDERMONDE (1735-1796). Musicista e genio matematico fu eletto all'Académie des Sciences nel 1771 sulla base del suo primo lavoro di matematica dal titolo *Mémoire sur la résolution des équations*. VANDERMONDE pubblicò solo altri tre lavori di matematica nel periodo 1771-1772, *Remarques sur des problèmes de situation* (1771), *Mémoire sur des irrationnelles de différens ordres avec une application au cercle* (1772), e *Mémoire sur l'élimination* (1772). KRONECKER nel 1888 affermò che lo studio dell'algebra moderna inizia col primo lavoro di VANDERMONDE e CAUCHY sostenne che VANDERMONDE prima di LAGRANGE ebbe le idee fondamentali che condussero alla teoria dei gruppi. VANDERMONDE è poi considerato il fondatore della teoria dei determinanti, anche se il determinante che porta il suo nome non compare nei suoi lavori. Nel 1778 VANDERMONDE presentò all'Académie un lavoro in due parti sulla teoria della musica *Système d'harmonie applicable à l'état actuel de la musique* in cui sostenne che la musica era un'arte e non parte della matematica. Nel 1777 VANDERMONDE pubblicò i risultati di esperimenti sulle basse temperature condotti con BEZOUT e LAVOISIER. Dieci anni dopo pubblicò due lavori sulla manifattura dell'acciaio in collaborazione con MONGE e BERTHOLET. Scopo della ricerca era di migliorare l'acciaio per le baionette calibrando il contenuto di carbonio. Fu legato da profonda amicizia con MONGE, tanto da essere noto come la *femme de Monge*, e con lui condivise l'entusiasmo per la rivoluzione che scoprì il 14 luglio 1789.

#### 4.4. Elasticità anisotropa

La prima analisi completa delle proprietà di simmetria dei cristalli è dovuta a W. VOIGT<sup>12</sup> [5] nel 1882. Una trattazione dettagliata dei principali gruppi di simmetria materiale e delle relative classi cristallografiche è stata condotta più recentemente da B. COLEMAN e W. NOLL in [20] ed è riportata in [22].

##### 4.4.1. Materiali monoclini

Un *materiale monoclino* è caratterizzato dall'esistenza di un *piano di simmetria*.

Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una terna ortonormale tale che il piano di simmetria coincida col piano coordinato  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Il gruppo di simmetria materiale è costituito da

$$\mathcal{G}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{I}, -\mathbf{I}, \mathbf{Q}_3\},$$

con  $\mathbf{Q}_3$  riflessione rispetto alla direzione  $\mathbf{e}_3$ , definita da

$$\mathbf{Q}_3 \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{Q}_3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{Q}_3 \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_3,$$

La matrice rappresentativa di  $\mathbf{Q}_3$  nel riferimento  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è quindi

$$[\mathbf{Q}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Imponendo che risulti

$$\mathbb{C}(\mathbf{Q}_3 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}_3^T) = \mathbf{Q}_3 \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q}_3^T,$$

per ogni  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  si conclude che il materiale è monoclino se e solo se

$$E_{14} = E_{24} = E_{34} = E_{46} = E_{15} = E_{25} = E_{35} = E_{56} = 0.$$

La matrice di rigidezza elastica assume dunque la forma

$$\left| \begin{array}{c} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{array} \right| = \left[ \begin{array}{cccccc} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & E_{36} \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & E_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{54} & E_{55} & 0 \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & 0 & 0 & E_{66} \end{array} \right] \left| \begin{array}{c} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{array} \right|,$$

ed è caratterizzata da 13 costanti elastiche indipendenti.

Si noti che la matrice di cedevolezza elastica ha una forma analoga.

---

<sup>12</sup> WOLDEMAR VOIGT (1850-1919). Allievo di FRANZ NEUMANN a Königsberg e poi professore di fisica teorica a Göttingen, ha portato importanti contributi sia teorici che sperimentali all'elasticità anisotropa. A VOIGT è dovuta la prova sperimentale che l'elasticità isotropa è descritta da due costanti e l'introduzione della nozione di tensore nella teoria dell'elasticità.

#### 4.4.2. Materiali ortotropi

Un *materiale ortotropo* è caratterizzato dall'esistenza di tre *piani di simmetria* a due a due ortogonali.

Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  una terna ortonormale tale che i piani di simmetria coincidano con i piani coordinati.

Si noti che se esistono due piani di simmetria tra loro ortogonali allora anche il piano ortogonale ad entrambi è un piano di simmetria.

Siano infatti  $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$  le riflessioni rispetto alle direzioni  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . La proprietà di gruppo impone che

$$\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{G}(\mathbf{V}) \Rightarrow \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \in \mathcal{G}(\mathbf{V}).$$

Allora risulta

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_1 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1, \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_2 = \mathbf{Q}_1 (-\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 \mathbf{e}_3 = \mathbf{Q}_1 \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Ne segue che  $\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2 = -\mathbf{Q}_3$  e quindi che  $\mathbf{Q}_3 = (-\mathbf{I})(-\mathbf{Q}_3) \in \mathcal{G}(\mathbf{V})$ . Pertanto

- Un materiale avente due piani di simmetria tra loro ortogonali è un *materiale ortotropo*.

Imponendo che risulti

$$\mathbb{C}(\mathbf{Q}_i \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}_i^T) = \mathbf{Q}_i \mathbb{C}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{Q}_i^T, \quad i = 1, 2, 3$$

per ogni  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  si giunge a concludere che il materiale è ortotropo se e solo se

$$E_{14} = E_{24} = E_{34} = E_{46} = 0$$

$$E_{15} = E_{25} = E_{35} = E_{45} = 0$$

$$E_{16} = E_{26} = E_{36} = E_{16} = 0.$$

La matrice elastica assume dunque la forma generale

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{66} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix},$$

ed è caratterizzata da 9 costanti elastiche indipendenti.

#### 4.4.3. Materiali trasversalmente isotropi

Un *materiale trasversalmente isotropo* è un materiale ortotropo in cui uno dei piani di simmetria (e sia il piano  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ ) è un *piano di isotropia*.

Imponendo la simmetria rispetto ad uno scambio degli assi  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  e l'invarianza rispetto ad una arbitraria rotazione attorno all'asse  $\mathbf{e}_3$ , la matrice elastica assume la forma

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{11} & E_{13} & 0 & 0 & 0 \\ E_{31} & E_{31} & E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(E_{11} - E_{12}) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix},$$

La matrice di cedevolezza elastica si può porre nella forma

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} E^{-1} & -\nu E^{-1} & -\mu E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\nu E^{-1} & E^{-1} & -\mu E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu E_3^{-1} & -\mu E_3^{-1} & E_3^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{13}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G^{-1} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{vmatrix},$$

dove  $G = \frac{1}{2}E/(1+\nu)$ . Si hanno dunque 5 costanti elastiche indipendenti.

#### 4.5. Stati piani di deformazione

Sia  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  una base ortonormale principale per lo stato di deformazione in un punto del continuo.

Si assuma che nel materiale elastico lineare ed isotropo lo stato di deformazione sia piano con un valore nullo della dilatazione principale in direzione dell'asse  $\mathbf{d}_3$ .

Allora si ha che

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)] = 0,$$

e quindi

$$\sigma_3 = \nu (\sigma_1 + \sigma_2).$$

Sostituendo nelle relazioni elastiche si ha

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (2G + \lambda)\varepsilon_1 + \lambda(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{\lambda}{\nu} [(1 - \nu)\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2], \\ \sigma_2 &= (2G + \lambda)\varepsilon_2 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) = \frac{\lambda}{\nu} [(1 - \nu)\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1], \\ \sigma_3 &= (2G + \lambda)\varepsilon_3 + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Si noti che la terza relazione è conseguenza delle prime due e dell'espressione della  $\sigma_3$  precedentemente dedotta.

Denotando con  $\boldsymbol{\sigma}_2$  e  $\mathbf{e}_2$  i tensori bidimensionali che sono la restrizione dei tensori tridimensionali  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\mathbf{e}$  al piano delle deformazioni, il legame elastico si può riscrivere in modo formalmente analogo al caso tridimensionale:

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_2 = 2G\mathbf{e}_2 + \lambda(\text{tr } \mathbf{e}_2)\mathbf{I} = \frac{\lambda}{\nu} [(1 - 2\nu)\mathbf{e}_2 + \nu(\text{tr } \mathbf{e}_2)\mathbf{I}].}$$

Adottando la rappresentazione di VOIGT per gli stati bidimensionali di tensione e di deformazione e denotando con  $x, y$  una coppia di assi nel piano delle deformazioni, si ha che

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix},$$

e le matrici associate ai tensori bidimensionali di rigidità e di cedevolezza elastici si scrivono

$$[\mathbb{E}_2] = \frac{\lambda}{\nu} \begin{bmatrix} 1 - \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & (1 - 2\nu)/2 \end{bmatrix},$$

$$[\mathbb{C}_2] = \frac{1}{2G} \begin{bmatrix} 1 - \nu & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Gli stati piani di deformazione trovano applicazione nell'analisi elastica di solidi cilindrici di lunghezza notevole rispetto alle dimensioni della sezione trasversale.

Essi forniscono una modellazione sufficientemente accurata nelle zone non prossime alle estremità.

#### 4.6. Stati piani di tensione

Sia  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  una base ortonormale principale per lo stato tensionale in un punto del continuo.

Si assuma che nel materiale elastico lineare ed isotropo lo stato di tensione sia piano con un valore nullo della tensione principale in direzione dell'asse  $\mathbf{d}_3$  ( $\sigma_3 = 0$ ).

Allora si ha che

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu \sigma_2),$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu \sigma_1),$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

e quindi

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Adottando la rappresentazione di VOIGT per gli stati bidimensionali di tensione e di deformazione e denotando con  $x, y$  una coppia di assi nel piano delle deformazioni, si ha che

$$\boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix}.$$

Le matrici associate ai tensori bidimensionali di rigidezza e di cedevolezza elastici si scrivono

$$[\mathbb{E}_2] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbb{C}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

Gli stati piani di tensione trovano applicazione nell'analisi elastica di lastre piane di spessore piccolo rispetto alle dimensioni longitudinale e trasversale.

## RIFERIMENTI

1. G. GREEN, An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, Nottingham (1828).
2. G. LAMÉ, P.E. CLAPEYRON, Mémoire sur l'Equilibre des Corps Solides Homogènes, *Mém. divers savants*, (2) **4**, 465-562 (1833).
3. P.E. CLAPEYRON, Mémoire sur la Puissance Motrice de la Chaleur, *J. École Polytech.*, **15**, 93-132 (1834).
4. G. GREEN, On the Propagation of Light in Crystallized Media, *Trans. Cambridge Phil. soc.*, **7**, 1, 121-140 (1839)= Papers, 293-311 (1841).
5. W. VOIGT, Allgemeine Formeln für die Bestimmung der Elasticitätsconstanten von Krystallen durch die Beobachtung der Biegung und Drillung von Prismen, *Ann. Phys.*, (2), **16**, 273-321, 398-416 (1882).
6. G. JAUMANN, Geschlossenes system physikalischer und chemischer Differenzialgesetze, *Sitzber. Akad. Wiss. Wien*, (11a), **120**, 385-530 (1882).
7. O. D. KELLOGG, Foundation of Potential Theory, Springer, Berlin (1929).
8. A. E. H. LOVE, A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Dover, New York, (1949).
9. H. RICHTER, Das isotrope elasticizitätsgesetz, *Z. Ang. Math. Mech.*, **28**, 205-209 (1948).
10. J.G. OLDRYD, On the formulation of rheological equations of state, *Proc. Roy. Soc. London.*, **A200**, 523-541 (1950).
11. C. TRUESDELL, The simplest rate theory of pure elasticity, *Comm. Pure Appl. Math.*, **8**, 123-132 (1955).
12. C. TRUESDELL, Hypoelasticity, *J. Rational Mech. Anal.*, **4**, 1-29 (1955).
13. R.S. RIVLIN, J.L. ERICKSEN, Stress-deformation relations for isotropic materials, *J. Rational Mech. Anal.*, **4**, 681-702 (1955).
14. I. S. SOKOLNIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, Mc-GRAW-HILL, (1956).
15. W. NOLL, A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media, *Arch. Rational Mech. anal.*, **2** 197-226, (1958).
16. J. SERRIN, Mathematical principles of classical fluid mechanics, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIII/1, 165-263 Springer-Verlag, Berlin (1959).
17. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, The Classical Field Theories, *Encyclopædia of Physics*, vol. III/1, 226-793 Springer-Verlag, Berlin (1960).
18. M.M. VAINBERG, Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day (1964).
19. B.D. COLEMAN, W. NOLL, Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations, *Arch. Rational Mech. anal.*, **15** 87-111, (1964).
20. B.D. COLEMAN, W. NOLL, Material Symmetry and Thermostatic Inequalities in Finite Elastic Deformations, *Arch. Rational Mech. anal.*, **15** 87-111, (1964).
21. C. TRUESDELL, W. NOLL, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, *Encyclopædia of Physics*, vol. III/3, 1-602 Springer-Verlag, Berlin (1965).
22. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIa/2, , 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).

23. M.E. GURTIN, Modern continuum thermodynamics, in *Mechanics today*, vol. I, ed. Nemat-Nasser (1972).
24. J.E. MARSDEN AND T.J.R. HUGHES, Mathematical Foundation of Elasticity, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1983).
25. G. ROMANO ET AL., A Potential Theory for Monotone Multi-Valued Operators, *Quat. Appl. Math. Anal.*, Vol 1.1, **4**, 613-631, (1993).
26. L. NUNZIANTE, Scienza delle Costruzioni, Il Continuo, Jovene, Napoli (1997).
27. G. ROMANO, Theory of Structural Models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2001).
28. G. ROMANO, Theory of Structural Models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2001).
29. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
30. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).

## II – STRUTTURE ELASTICHE

### 1. TEORIA LINEARIZZATA

Nella *teoria linearizzata* si assume che, nel corso del processo evolutivo, le configurazioni della struttura rimangano sufficientemente vicine ad una di riferimento.

Tale assunto va sotto il nome di *ipotesi di piccoli spostamenti* e trae motivazione ed interesse applicativo dal fatto che i materiali di cui sono costituite le strutture hanno usualmente rigidezza elastica molto elevata. Sotto le azioni di esercizio gli spostamenti e le deformazioni della struttura sono in molti casi tanto piccoli da rendere significativa una analisi geometricamente linearizzata in cui si confonde la geometria della struttura deformata con quella della configurazione di riferimento.

Ciò consente di condurre l'analisi strutturale valutando la deformazione prodotta da un campo di spostamenti mediante l'operatore di deformazione tangente che invece *a rigore* definisce la corrispondenza lineare esistente tra un atto di moto e l'atto di deformazione da esso generato.

Il campo così ottenuto è quindi detto la *deformazione* corrispondente al campo di spostamento, omettendo l'aggettivo *tangente*, e sono detti *spostamenti rigidi* i campi di spostamento cui corrisponde una deformazione (tangente) nulla.

Questa terminologia, che è adottata in tutti i testi di meccanica delle strutture, può però essere fonte di equivoci e talvolta di errori. Per tale motivo nel seguito il termine *rigido* sarà scritto in italico quando è riferito a campi di spostamento per evidenziare il fatto che tali campi hanno la proprietà di avere lo stesso andamento di un cinematismo rigido ma in generale danno luogo a deformazioni.

Nella teoria linearizzata si trattano dunque gli spostamenti come se fossero atti di moto della configurazione a partire dalla quale si valutano gli spostamenti.

L'adozione di una teoria geometricamente linearizzata richiede sempre una attenta verifica della sua ammissibilità. Infatti in alcune importanti situazioni la particolare geometria della struttura e la condizione di carico sono tali da rendere una siffatta semplificazione del tutto insufficiente per l'analisi della risposta strutturale.

Cionondimeno la teoria linearizzata costituisce un formidabile strumento che consente di pervenire a trattazioni e soluzioni concretamente applicabili ad una vastissima classe di problemi strutturali che, se affrontati con una metodica esatta, risulterebbero di ardua, se non inattaccabile, soluzione.

La principale difficoltà consiste nella impossibilità di valutare *a priori* la validità dei risultati e pertanto di fornire dei criteri generali di accettabilità.

Lo studio dei fenomeni geometricamente non lineari che possono insorgere nelle strutture anche in presenza di spostamenti molto piccoli fornisce un campanello di allarme che induce gli strutturisti a prendere opportuni provvedimenti nell'analisi e nella progettazione di alcune tipologie strutturali, quali ad esempio le travi rettilinee soggette a carico assiale di compressione.

La teoria linearizzata delle strutture elastiche è illustrata sviluppando dapprima l'approccio in termini di spostamenti. Sono così formulati i problemi elastostatico ed elastodinamico e per entrambi è discussa l'unicità della soluzione.

Segue poi l'illustrazione del teorema di CLAPEYRON sulla valutazione dell'energia di deformazione elastica e dei principi di reciprocità dovuti a MAXWELL e a BETTI. Si dimostra infine un teorema di decomposizione che fornisce le condizioni di unicità ed esistenza della soluzione dei problemi di elastostatica.

Successivamente è descritto l'approccio alle tensioni che conduce alle equazioni di congruenza elastica di BELTRAMI-DONATI-MICHELL.

Sono infine dimostrati i due principi di estremo della *energia potenziale* e della *energia complementare*.

Nel capitolo VI sarà fornito un quadro più completo delle formulazioni variazionali del problema dell'equilibrio elastico cui si fa ricorso nelle metodologie computazionali.

Nel capitolo III è sviluppata poi una trattazione più generale che estende a comportamenti costitutivi governati da potenziali convessi le formulazioni variazionali del problema dell'equilibrio elastico e consente di discutere i fondamenti dell'analisi limite e dei modelli di comportamento di strutture in campo elastico-visco-plastico.

## 2. EQUILIBRIO ELASTICO

Si consideri una struttura elastica che occupi una configurazione  $\Omega$  dello spazio ambiente e sia soggetta a vincoli al contorno lisci, perfetti e bilaterali (vedi Tomo I sezione II.4 (p. 194)).

- Gli *spostamenti ammissibili* appartengono dunque ad una varietà affine

$$\mathcal{L}_a = \mathbf{w} + \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  è il sottospazio degli spostamenti conformi e  $\mathbf{w}$  è un cedimento vincolare.

- Le *forze ammissibili* costituiscono anch'esse una varietà affine

$$\mathcal{F}_a = \ell + \mathcal{R}$$

dove  $\ell$  è il carico imposto e  $\mathcal{R}$  è il sottospazio delle reazioni vincolari.

Poichè i vincoli sono lisci sussistono le seguenti proprietà di ortogonalità tra reazioni vincolari e spostamenti conformi

$$\mathcal{L} = \mathcal{R}^\perp \quad \mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp.$$

- L'operatore di rigidezza elastica  $\mathbf{E} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  ed il suo inverso  $\mathbf{C} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  instaurano una corrispondenza lineare e biunivoca tra il campo di deformazione  $\mathbf{e} \in \mathcal{H}$  e quello di tensione  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{e} \quad \mathbf{e} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma},$$

che è definita dalle relazioni puntuali

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = (\mathbf{E} \mathbf{e})(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}) \mathbf{e}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = (\mathbf{C} \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}).$$

- Uno stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  è detto *elasticamente congruente* se è la risposta elastica ad uno stato di deformazione congruente e cioè se il campo di deformazione  $\mathbf{e} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  è congruente con un campo di spostamenti ammissibili  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$ .
- Il problema dell'equilibrio elastico per una struttura con vincoli perfetti, lisci e bilaterali consiste nel determinare un insieme di reazioni vincolari  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$  che, insieme al carico assegnato  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , costituisca un sistema di forze in equilibrio con uno stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$  elasticamente congruente con un campo di spostamenti ammissibili  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$ .

Devono quindi essere soddisfatte le relazioni:

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\delta} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}_a, \quad \mathbf{e} \in \mathcal{H} \quad \text{compatibilità cinematica,}$$

$$\mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma} = \ell + \mathbf{r} \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}, \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R} \quad \text{equilibrio,}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \mathbf{e} \quad \text{legame elastico.}$$

*Problema  
dell'equilibrio  
elastico*

Nel seguito sono descritte le due classiche formulazioni del problema dell'equilibrio elastico in termini di spostamenti e di tensioni.

## 2.1. Formulazione in termini di spostamenti

La formulazione più naturale delle leggi che governano l'equilibrio elastico consiste nell'assumere quale incognita un campo di spostamenti ammissibili ed imporre che lo stato di sforzo associato alla deformazione elastica sia in equilibrio con il sistema di forze agenti sulla struttura.

L'operatore di rigidezza elastica  $\mathbf{E} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  è simmetrico e definito positivo:

$$\begin{cases} \langle \mathbf{E} \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{E} \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle, & \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{H}, \\ \langle \mathbf{E} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle > 0, & \forall \mathbf{e} \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{0}\}. \end{cases}$$

Quest'ultima proprietà è conseguenza della più forte *condizione di ellitticità* in  $\mathcal{H}$

$$\langle\langle \mathbf{E}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle\rangle \geq c \|\mathbf{e}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{H}.$$

L'ellitticità dell'operatore  $\mathbf{E} \in L(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  in  $\mathcal{H}$  sussiste se il corpo elastico ha una elasticità non singolare nel senso che vale, quasi ovunque in  $\Omega$  la disegualanza locale

$$\langle\langle \mathbb{E}(\mathbf{x})\mathbf{e}(\mathbf{x}), \mathbf{e}(\mathbf{x}) \rangle\rangle \geq c_x \|\mathbf{e}(\mathbf{x})\|^2, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{H},$$

e il minimo autovalore  $c_x$  di  $\mathbb{E}(\mathbf{x})$  è uniformemente limitato da una quantità positiva. Si consideri ora la condizione variazionale di equilibrio

$$\langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Sia quindi  $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{H}$  un campo di distorsioni impresse e  $\mathbf{u}_o \in \mathcal{L}_a$  il campo di spostamento soluzione del problema dell'equilibrio elastico, così che

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}[\mathbf{B}\mathbf{u}_o - \boldsymbol{\delta}] = \mathbf{E}[\mathbf{B}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) - \boldsymbol{\delta}].$$

Sostituendo nella condizione variazionale di equilibrio si perviene all'espressione

$$\langle\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}_o, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{E}\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle + (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \mathbf{u}_o \in \mathcal{L}_a, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Per ottenere un problema lineare si assume quale incognita il campo di spostamenti conformi  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_o - \mathbf{w} \in \mathcal{L}$  così che il campo incognito ed i campi di prova appartengono entrambi al sottospazio lineare  $\mathcal{L}$ :

$$\langle\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{E}(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}\mathbf{w}), \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle + (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

E' conveniente poi assumere che il campo di spostamenti  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ , che compare nella definizione della varietà varietà affine  $\mathcal{L}_a = \mathbf{w} + \mathcal{L}$  degli spostamenti ammissibili, sia soluzione del problema dell'equilibrio elastico per il continuo soggetto solo a cedimenti  $\mathbf{T}\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$  impressi al contorno.

In tal caso infatti il termine  $\langle\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle$  è nullo per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ , come si evince dalla condizione di equilibrio elastico ponendo  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o}$  e  $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{o}$ .

Effettuando tale scelta, il campo di spostamento  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  scompare quindi dalla condizione di equilibrio elastico che si scrive

$$\langle\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{E}\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle + (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

La soluzione del problema si ottiene come somma  $\mathbf{u}_o = \mathbf{u} + \mathbf{w}$  delle due soluzioni.

La forma bilineare simmetrica

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \langle\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

è detta *forma bilineare dell'energia elastica*. L'operatore lineare  $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{F})$  definito da

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

fornisce la *risposta elastica*  $\mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{F}$  al campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ .

Il sistema di forze  $\mathbf{f}_\delta \in \mathcal{F}$  definito da

$$\langle \mathbf{f}_\delta, \mathbf{v} \rangle := (\mathbf{E} \boldsymbol{\delta}, \mathbf{B} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

è il *sistema di forze equivalente alle distorsioni*.

Definendo il *carico efficace*  $\ell_{\text{eff}} = \ell + \mathbf{f}_\delta$ , il problema dell'equilibrio elastico si scrive infine

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

E' questa l'equazione fondamentale dell'*elastostatica* e cioè del capitolo della meccanica che studia le proprietà delle soluzioni dei problemi di equilibrio elastico.

## 2.2. Unicità della soluzione elastostatica

La soluzione di un problema di equilibrio elastico posto in termini di campi di spostamento è detta la *deformata elastica* della struttura. In elastostatica sussiste il seguente criterio di unicità noto come *principio di KIRCHHOFF*<sup>13</sup> [11]

In una struttura con elasticità lineare in presenza di vincoli lisci e bilaterali la deformata elastica è unica a meno di spostamenti *rigidi* conformi addizionali. E' quindi unico lo stato di tensione e di deformazione.

*Principio di Kirchhoff*

La dimostrazione del principio di KIRCHHOFF si conduce osservando che, in virtù della linearità del problema dell'elastostatica, la differenza di due soluzioni deve soddisfare la condizione omogenea

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

La definizione positiva dell'operatore di rigidezza elastica implica quindi che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{B} \mathbf{u}) \Rightarrow \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{o} \iff \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L},$$

e dunque il risultato.

---

<sup>13</sup> GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887). Allievo di FRIEDRICH GAUSS a Göttingen e di FRANZ NEUMANN a Königsberg e poi professore di fisica a Breslau (1850-54) e ad Heidelberg (1854-74) dove insegnavano anche ROBERT WILHELM BUNSEN (1811-1899) e HERMANN LUDWIG FERDINAND VON HELMHOLTZ (1821-1894). Nel 1854 enunciò le leggi sui circuiti elettrici che estendono e generalizzano quelle di GEORG SIMON OHM (1789-1854). Il suo studio sulla radiazione del corpo nero è stato fondamentale per lo sviluppo della teoria dei quanti. Basandosi sulla spettroscopia KIRCHHOFF spiegò per primo la presenza delle bande nere (linee di FRAUNHOFER) nella radiazione solare inaugurando una nuova era nell'astrofisica. Insieme a BUNSEN scoprì gli elementi cesium e rubidium. Dal 1875 ricopre la cattedra di fisica matematica a Berlino. KIRCHHOFF era disabile e passò gran parte della vita con le grucce e sulla sedia a rotelle.

### 2.3. Elastodinamica

Si consideri il percorso dinamico di una struttura elastica che evolve in un intervallo di tempo  $[t_o, t_f]$  sotto l'azione di un sistema di forze attive  $\ell(t) \in \mathcal{F}$ .

La condizione variazionale di equilibrio dinamico si scrive (vedi Tomo I sezione II.11.2 (p. 260))

$$\langle (\sigma, \mathbf{B}\mathbf{v}) \rangle = \langle \ell - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) \in \mathcal{F}$  è la forza d'inerzia. In assenza di cedimenti vincolari e di distorsioni impresse, ponendo  $\sigma = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}$  il problema elastodinamico si scrive

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

La seguente proprietà specializza alle strutture elastiche il teorema della potenza compiuta (Tomo I proposizione II.11.2 (p. 263)).

**Proposizione 2.1. Potenza meccanica ed energia elastica.** *In una struttura elastica la potenza compiuta in ogni istante dal sistema di forze attive  $\ell(t) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è pari al tasso di variazione della somma dell'energia di deformazione elastica e dell'energia cinetica:*

$$\langle \ell(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle \right].$$

**Dim.** Ponendo  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  nella condizione variazionale di equilibrio dinamico si ha che

$$\langle \ell(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) + \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle.$$

La simmetria dell'operatore di rigidezza elastica  $\mathbf{A} \in L(\mathcal{V}; \mathcal{F})$  e dell'operatore d'inerzia  $\mathbf{M} \in L(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  mostrano poi che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle,$$

e dunque che sussiste il risultato.  $\square$

Più in generale, in presenza anche di un campo di distorsioni, la proposizione 2.1 va così modificata.

**Proposizione 2.2.** *In una struttura elastica la potenza compiuta in ogni istante da un sistema di forze attive  $\ell(t) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e da un campo di distorsioni impresse  $\delta(t) \in \mathcal{H}$  è pari a*

$$\langle \ell(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle + \langle \delta(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle - \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}\delta(t), \delta(t) \rangle \right].$$

*Se è presente anche un cedimento impresso  $\mathbf{w}(t) \in \mathcal{V}$  il risultato sussiste sostituendo al cedimento  $\delta(t) \in \mathcal{H}$  il cedimento equivalente  $\delta(t) - \mathbf{B}\mathbf{w}(t) \in \mathcal{H}$ .*

**Dim.** Si osservi che  $\dot{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \dot{\delta})$  e quindi che la potenza del sistema di forze equivalente alle distorsioni è data da

$$\langle\langle \delta, \mathbf{E}\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} \rangle\rangle = \langle\langle \delta, \dot{\sigma} \rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{E}\delta, \dot{\delta} \rangle\rangle = \langle\langle \delta, \dot{\sigma} \rangle\rangle + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle\langle \mathbf{E}\delta, \delta \rangle\rangle.$$

Ponendo  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  nella condizione variazionale  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle$  e sostituendo si ottiene il risultato.  $\square$

Un immediato ma importante corollario è il seguente.

**Proposizione 2.3.** *Durante la traiettoria dinamica di una struttura elastica, in assenza di forze attive e di distorsioni, si ha che*

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle \right] = 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2],$$

risulta cioè costante l'energia totale, somma dell'energia di deformazione elastica e dell'energia cinetica.  $\square$

E' fondamentale il seguente risultato di unicità [29].

**Proposizione 2.4. Unicità della traiettoria elastodinamica.** *La traiettoria dinamica di una struttura elastica definita dalla condizione variazionale*

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eff}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},}$$

è univocamente determinata dalle condizioni iniziali sui campi di spostamento e di velocità.

**Dim.** La proposizione 2.3 assicura che la differenza  $\mathbf{u}(t)$  di due soluzioni del problema elastodinamico soddisfa la condizione

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle \right] = 0, \quad \forall t \in [t_o, t_f],$$

e le condizioni iniziali  $\mathbf{u}(t_o) = \dot{\mathbf{u}}(t_o) = \mathbf{o}$ . Si ha allora che

$$\frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0, \quad \forall t \in [t_o, t_f].$$

La positività dell'energia elastica e la positività dell'energia cinetica implicano quindi che entrambe devono essere identicamente nulle. Ne segue che è identicamente nullo il campo di velocità e quindi anche il campo di spostamento.  $\square$

## 2.4. Teorema di Clapeyron

Si consideri il percorso dinamico di una struttura elastica che, partendo in quiete da una configurazione indeformata, si evolve in un intervallo di tempo  $[t_o, t_f]$  sotto l'azione di un assegnato sistema di carichi  $\ell(t) \in \mathcal{F}$ . L'equilibrio dinamico al tempo  $t \in [t_o, t_f]$  impone che (vedi Tomo I sezione II.11.2 (p. 260))

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \ell(t) - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{f}_d(\dot{\mathbf{u}}(t)), \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}(t) \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) \in \mathcal{F}$  è la forza d'inerzia e  $\mathbf{f}_d(\dot{\mathbf{u}}(t)) \in \mathcal{F}$  è un sistema di *forze dissipanti* che svaniscono quando si annulla il campo di velocità  $\dot{\mathbf{u}}(t) \in \mathcal{L}$ .

Il lavoro compiuto dal sistema di forze  $\ell(t) \in \mathcal{F}$  nell'intervallo di tempo  $[t_o, t_f]$  è pari all'integrale su tale intervallo della potenza istantanea

$$\int_{t_o}^{t_f} \langle \ell(t) + \mathbf{f}_d(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \int_{t_o}^{t_f} \mathbf{a}(\mathbf{u}(t), \dot{\mathbf{u}}(t)) dt + \int_{t_o}^{t_f} \langle \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle dt.$$

In virtù della simmetria dell'operatore di rigidezza elastica  $\mathbf{A} \in \mathbf{L}(\mathcal{V}; \mathcal{F})$  e della simmetria dell'operatore d'inerzia  $\mathbf{M} \in \mathbf{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  l'integrazione fornisce la relazione

$$\boxed{\int_{t_o}^{t_f} \langle \ell(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle + \mathcal{E}_d,}$$

dove  $\mathcal{E}_d$  è l'energia dissipata dalle forze  $\mathbf{f}_d$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t_f)$  è lo spostamento finale.

Il lavoro compiuto dal sistema di forze produce pertanto una variazione dell'energia elastica e dell'energia cinetica, entrambe nulle al tempo iniziale  $t_o$ , e dà luogo inoltre ad una dissipazione di energia.

Nei problemi di elastostatica si assume che durante il processo di carico, a partire da un certo istante successivo a  $t_o$  e fino al tempo *finale* di osservazione  $t_f$ , le forze attive rimangano costantemente pari ad un valore  $\ell$  per un periodo di tempo sufficientemente lungo da consentire alle forze di dissipazione di porre la struttura in uno stato di quiete. E' in questa accezione che nel seguito va inteso il termine *finale*.

Al tempo *finale* di osservazione essendo nullo il campo di velocità, anche l'energia cinetica è nulla:

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{o} \Rightarrow \frac{1}{2} \langle \mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}} \rangle = 0.$$

Il lavoro compiuto dalle forze attive  $\ell(t)$  si è quindi trasformato, parte in energia elastica e parte in energia dissipata:

$$\int_{t_o}^{t_f} \langle \ell(t), \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle dt = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathcal{E}_d.$$

Lo spostamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$  è in equilibrio elastico con il sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e dunque, essendo

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}_a, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

al tempo finale di osservazione l'energia elastica presente nella struttura è pari a

$$\boxed{\frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \ell, \mathbf{u} \rangle.}$$

E' questo l'enunciato del *teorema di CLAPEYRON*<sup>14</sup> [12].

L'energia di deformazione elastica di una struttura, inizialmente indeformata ed in quiete, che all'istante di osservazione si ritrova in quiete ed in equilibrio elastico sotto le forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  avendo subito uno spostamento conforme  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ , è pari alla metà del lavoro virtuale  $\langle \ell, \mathbf{u} \rangle$ .

*Teorema di  
Clapeyron*

**Osservazione 2.1.** Si consideri una molla elastica scarica che simula una qualsiasi struttura elastica indeformata e si poggi su di essa un peso, costituito ad esempio da un bidone pieno d'acqua del peso di una tonnellata ( $10^4$  Newton), lasciandolo libero appena a contatto con la molla.

Sotto l'azione del carico la molla oscilla e finalmente raggiunge una posizione di quiete con un abbassamento di due centimetri, come in fig.2.0. In virtù del teorema di CLAPEYRON l'energia elastica immagazzinata nella molla è di  $1 \text{ tcm}$ . Poichè l'energia potenziale del bidone è variata di  $2 \text{ tcm}$  ciò comporta che l'altra metà del lavoro compiuto sia stata dissipata. Infatti il carico è applicato con legge a gradino e dunque rimane costante a partire dall'istante di contatto.

Il lavoro della forza costante è dunque eguale al lavoro virtuale della forza per lo spostamento duale e coincide con la variazione di energia potenziale del campo gravitazionale che è pari a  $2 \text{ tcm}$ .

<sup>14</sup> BENOIT PAUL EMILE CLAPEYRON (1795-1870). Ingegnere formatosi all'École Polytechnique e all'École de Mines insieme all'amico GABRIEL LAMÉ. Dopo 12 anni passati in Russia con LAMÉ, tornato a Parigi ideò e realizzò la costruzione della linea ferroviaria Parigi-St.Germain. Nel 1844 divenne professore di fisica all'Ecole des Ponts et Chaussées. Nel 1848 fu eletto all'Accademia delle Scienze di Parigi, partecipando a commissioni per la realizzazione del canale di Suez e per l'impegno delle macchine a vapore in marina. A CLAPEYRON [8] è dovuta la formulazione analitica delle idee sul calore pubblicate nel 1824 da SADI NICOLAS LÉONARD CARNOT (1796-1832), nell'opera *Réflexions sur la puissance motrice du feu et sur les machines propres à développer cette puissance*, ma praticamente sconosciute fino alla riformulazione di CLAPEYRON. Da lui prendono il nome il teorema sul lavoro di deformazione elastica e l'equazione differenziale per la determinazione del calore di vaporizzazione di un liquido.

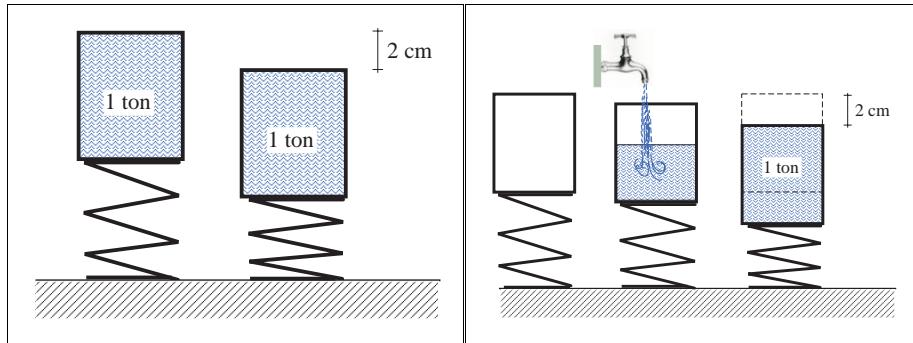


Fig. 2.1 Carico a gradino

Fig. 2.2 Carico quasi statico

Si supponga ora di poggiare il bidone ancora vuoto sulla molla e di riempirlo con estrema lentezza fino a fargli raggiungere il peso finale di 1 t. In tal caso non si verificano fenomeni dinamici significativi e tutto il lavoro compiuto viene trasformato in energia elastica immagazzinata nella molla.

La situazione è illustrata in fig.2.2. In definitiva il lavoro compiuto dalle forze applicate dipende dalla loro legge oraria di applicazione e dal processo dinamico effettuato dalla struttura elastica nel passaggio dalla configurazione iniziale a quella finale deformata ed in quiete.

L'energia elastica immagazzinata nella struttura è invece indipendente dalla modalità di applicazione del carico e può essere valutata conoscendo unicamente la configurazione iniziale a quella finale deformata ed in quiete.

La differenza tra il lavoro compiuto dalle forze applicate e l'energia elastica immagazzinata nella struttura si trasforma in energia dissipata. ■

**Osservazione 2.2.** Il teorema di CLAPEYRON viene spesso enunciato in termini non corretti affermando che l'energia di deformazione elastica immagazzinata nella struttura è pari alla metà del lavoro compiuto dalle forze applicate sulla struttura indeformata (vedi ad. es. [29]).

In effetti al termine lavoro va assolutamente associato l'aggettivo virtuale in quanto in generale il lavoro effettivamente compiuto dalle forze applicate non è noto essendo dipendente dalla legge oraria di applicazione delle forze e dal processo dinamico percorso dalla struttura.

Nell'enunciare il teorema di CLAPEYRON viene inoltre talvolta richiesto esplicitamente che il sistema di forze agenti sulla struttura sia conservativo e che non vi siano azioni dissipanti. Dalle considerazioni svolte risulta invece come tali ipotesi siano non solo superflue ma addirittura inaccettabili.

Per convincersi di ciò si osservi che, in assenza di azioni dissipative, la struttura elastica effettuerrebbe un percorso dinamico sotto l'azione del carico variabile, e quindi successivamente, sotto il carico costante, continuerebbe ad oscillare indefinitamente senza mai raggiungere lo stato di quiete.

Anche l'ipotesi di carico conservativo è inutile ed inaccettabile. Ogni carico variabile nel tempo è infatti non-conservativo e per caricare una struttura inizialmente scarica è ovvio che tale variabilità sia indispensabile. Nè vale far riferimento ad un carico quasi statico che rappresenta un caso limite molto particolare che renderebbe i risultati di scarsissima rilevanza.

Del tutto superflua è inoltre l'ipotesi, talvolta formulata in letteratura, di carico variabile proporzionalmente ad un parametro scalare (*messa in carico semplice*). Indispensabile e sufficiente per la validità del risultato è invece che il comportamento costitutivo sia elastico lineare conservativo e che quindi non si verifichino fenomeni anelastici irreversibili quali deformazioni visco-plastiche o fratture. ■

Il teorema di CLAPEYRON nella forma precedentemente enunciata si riferisce all'energia elastica immagazzinata in una struttura elastica nel passaggio da una configurazione scarica a quella finale in equilibrio statico sotto un sistema di carichi.

Si consideri invece un processo di carico così definito:

- la configurazione di partenza è in equilibrio sotto un carico  $\ell_o \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ ,
- si applica un ulteriore carico  $\ell(t) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  fino ad un valore *finale*  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  cui corrisponde un incremento di spostamento elastico  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ .

L'incremento di energia elastica nel passaggio dalla configurazione di partenza a quella *finale* è allora data da

$$\boxed{\langle \ell_o, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle \ell, \mathbf{u} \rangle.}$$

Sia infatti  $\sigma_o$  lo stato di sforzo in equilibrio con il sistema di forze  $\ell_o \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

Allora lo stato di sforzo in equilibrio con il sistema di forze  $\ell_o + \ell(t) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è  $\sigma_o + \sigma(t)$  con  $\sigma(t) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$  e quindi l'incremento di energia elastica è

$$\int_{t_o}^{t_f} (\langle \sigma_o + \sigma(t), \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}}(t) \rangle) dt = (\langle \sigma_o, \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} \rangle) + \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \ell_o, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle \ell, \mathbf{u} \rangle.$$

## 2.5. Teorema di Betti

Si considerino due deformate elastiche conformi  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{L}$  e  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{L}$  di una medesima struttura rispettivamente prodotte dai carichi  $\ell_1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e  $\ell_2 \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

In virtù della simmetria del legame elastico lineare  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ , risulta simmetrica anche la forma bilineare dell'energia elastica  $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(\mathcal{L}^2; \mathfrak{R})$  in quanto

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = (\langle \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_1, \mathbf{B} \mathbf{u}_2 \rangle) = (\langle \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_2, \mathbf{B} \mathbf{u}_1 \rangle) = \mathbf{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1),$$

e sussiste pertanto l'equaglianza

$$\boxed{\langle \ell_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbf{a}(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) = \langle \ell_2, \mathbf{u}_1 \rangle.}$$

Si può quindi enunciare il *principio di reciprocità* dovuto a BETTI<sup>15</sup> [14] (1872)

I lavori virtuali mutui, relativi a due deformate elastiche conformi che una struttura subisce per effetto di due diverse condizioni di carico, sono uguali.

*Teorema di Betti*

Al teorema di BETTI si può anche pervenire mediante un'applicazione del teorema di CLAPEYRON, ragionando come segue.

Si consideri una struttura elastica che si trova inizialmente in una configurazione scarica e si considerino due processi di carico.

- Un primo processo in cui la struttura viene caricata con un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$  sino alla configurazione *finale* caratterizzata da uno spostamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ .
- Un secondo processo che consiste nel suddividere il carico  $\ell \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$  in due aliquote  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ . Si applica prima l'aliquota  $\ell_1 \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$  che induce uno spostamento  $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{L}$  e poi l'aliquota  $\ell_2 \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$  che induce uno spostamento  $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{L}$ .

Il teorema di CLAPEYRON consente di affermare che l'incremento di energia di deformazione nel primo processo di carico è pari a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \ell, \mathbf{u} \rangle &= \frac{1}{2} \langle \ell_1 + \ell_2, \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \ell_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \ell_2, \mathbf{u}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \ell_1, \mathbf{u}_2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \ell_2, \mathbf{u}_1 \rangle. \end{aligned}$$

mentre nel secondo processo di carico è

$$\frac{1}{2} \langle \ell_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \frac{1}{2} \langle \ell_2, \mathbf{u}_2 \rangle + \langle \ell_1, \mathbf{u}_2 \rangle.$$

Eguagliando le due espressioni si perviene alla relazione

$$\langle \ell_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \ell_2, \mathbf{u}_1 \rangle,$$

che esprime il *principio di reciprocità* di BETTI.

<sup>15</sup> ENRICO BETTI (1823-1892). Nato a Pistoia perse il padre in tenera età. Studiò matematica e fisica all'Università di Pisa ed ebbe per maestro MOSSOTTI. Laureatosi nel 1846 divenne assistente all'Università. Partecipò alle battaglie di Curtatone e Montanara unendosi ad un battaglione comandato da MOSSOTTI. Nel 1849 tornò a Pistoia e nel 1857 fu nominato professore di algebra superiore all'Università di Pisa. Nel 1858 viaggiò per l'Europa con BRIOSCHI e CASORATI, visitando i maggiori centri matematici, A Göttingen incontrò RIEMANN del quale divenne amico. Nel 1859 si spostò sulla cattedra di Analisi e Geometria Superiore. si dedicò alla carriera politica e nel 1862 divenne membro del Parlamento del Regno d'Italia costituito il 17 Marzo 1861. Nell'autunno del 1863 RIEMANN visitò l'Italia ed a Pisa incontrò l'amico BETTI. BETTI fu rettore dell'Università di Pisa e nel 1864 divenne direttore della *Scuola Normale Superiore* posto che occupò sino alla morte facendo divenire la Scuola il maggior centro italiano per la ricerca e l'insegnamento della matematica. BETTI si interessò della teoria dei gruppi di GALOIS, di teoria del potenziale e di elasticità. Nel 1871 pubblicò un lavoro di topologia in cui introdusse quelli che JULES HENRI POINCARÉ (1854-1912) chiamò *numeri di BETTI*.

Si noti che la validità dei teoremi di CLAPEYRON e di BETTI è basata sulla conservatività e linearità del legame elastico. Tali proprietà assicurano infatti la simmetria della rigidezza elastica che è fondamentale per la loro validità.

**Osservazione 2.3.** Nelle applicazioni alle travature spesso la matrice di rigidezza elastica è di tipo diagonale o addirittura si riduce ad un unico scalare. I teoremi di CLAPEYRON e di BETTI sono allora suscettibili di una dimostrazione diretta, basata su un'applicazione del principio dei lavori virtuali. ■

Il teorema di BETTI contiene come caso particolare il *principio di reciprocità* formulato da MAXWELL<sup>16</sup> nel 1870 [13] con riferimento alle travature reticolari.

**Osservazione 2.4.** Si vuole ora mostrare un esempio di applicazione del teorema di BETTI al tracciamento delle *linee di influenza* degli spostamenti delle strutture elastiche.

Si consideri la trave di fig.2.3 soggetta all'azione di una forza concentrata  $F_x$  applicata ad una ascissa  $x$ . I vincoli nodali sono esplicitamente definiti indicando i gradi di libertà nodali da essi consentiti.

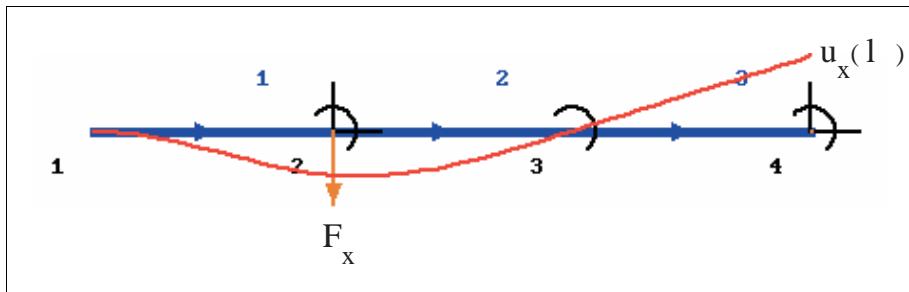


Fig. 2.3

<sup>16</sup> JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879). Nato ad Edimburgo in Scozia frequentò la Edinburgh Academy con TAIT che fu suo amico per l'intera vita. A 16 anni, nel 1847 andò con TAIT all'Università di Edimburgo e nel 1850 entrò al Trinity college di Cambridge dove si laureò in Matematica nel 1854 distinguendosi per le sue eccezionali capacità. Uno dei contributi più importanti di MAXWELL fu l'estensione e la formulazione matematica delle leggi di FARADAY. Il lavoro *On Faraday's lines of force* fu letto alla Cambridge Philosophical Society in due parti, nel 1855 e nel 1856. Nel 1856 MAXWELL si trasferì ad Aberdeen dove divenne professore di Natural Philosophy al Marischal College. Nel 1857 il St John's College di Cambridge pose quale argomento dell'Adams Prize *The Motion of Saturn's Rings*. MAXWELL vinse il premio con un saggio del quale AIRY disse *It is one of the most remarkable applications of mathematics to physics that I have ever seen*. Nel 1860 Maxwell ottenne la cattedra di Natural Philosophy al King's College di Londra. Due anni dopo mostrò che i campi elettromagnetici si propagano con la stessa velocità della luce e ne dedusse che la luce fosse un fenomeno elettromagnetico. Nel 1865 lasciò il King's College e tornò in Scozia nella casa di famiglia a Glenlair dove si potette dedicare con tutte le energie all'attività di ricerca ed alla redazione del celebre trattato *Electricity and Magnetism* pubblicato nel 1873. Nel 1866 formulò la teoria cinetica dei gas (teoria di MAXWELL-BOLTZMANN). Nel 1871 accettò a malincuore l'offerta di tornare a Cambridge per diventare il primo Cavendish Professor of Physics al Trinity College. Progettò l'HENRY CAVENDISH laboratory che fu inaugurato il 16 June 1874. MAXWELL è stato uno straordinario fisico matematico che ha apportato contributi eccezionali alla teoria dell'elettromagnetismo, all'ottica, alla teoria dell'elasticità ed alla teoria cinetica dei gas.

Si ponga quindi il problema di determinare l'abbassamento  $\mathbf{u}_x(\ell)$  dell'estremità libera della trave. A tal fine si carica la trave come in fig.2.4 e cioè con l'ente duale di quello da determinare.

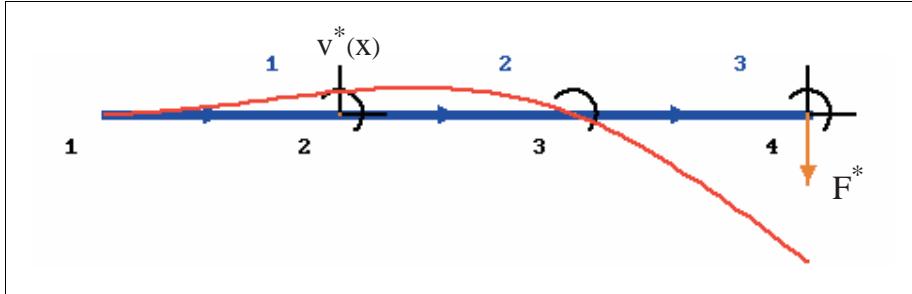


Fig. 2.4

Nel caso in esame si applica una forza tagliente  $\mathbf{F}^*$  concentrata all'estremo libero e si determina la linea elastica  $\mathbf{v}^*(x)$  della trave.

La forza concentrata  $\mathbf{F}^*$  campiona il valore della componente dell'abbassamento  $\mathbf{u}_x(\ell)$  dell'estremo libero della trave in direzione della forza  $\mathbf{F}^*$ . Il teorema di BETTI stabilisce che

$$\mathbf{F}_x \mathbf{v}^*(x) = \mathbf{F}^* \mathbf{u}_x(\ell).$$

Quindi la deformata elastica  $\mathbf{v}^*(x)$  consente di determinare la componente dello abbassamento  $\mathbf{u}_x(\ell)$  in direzione di  $\mathbf{F}^*$  per ogni posizione  $x$  della forza  $\mathbf{F}_x$ . ■

Nelle prossime sezioni si mostra come la presenza di cedimenti e di distorsioni modifichi l'enunciato dei teoremi di CLAPEYRON e di BETTI. Tale estensione è di grande importanza per le applicazioni.

## 2.6. Estensione del teorema di Clapeyron

La determinazione dell'energia di deformazione elastica in una struttura in presenza di cedimenti vincolari e di distorsioni impresse si effettua valutando l'espressione del potenziale elastico  $\phi \in \mathbf{L}(\mathcal{H}; \mathfrak{R})$  tenendo presente che

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\delta}.$$

Ponendo dunque  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}$  si ha che

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}) &:= \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}), \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta} \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta} \rangle, \end{aligned}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta})$  è lo stato di sforzo nella struttura e  $\mathbf{f} = \mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}_\ell \in \mathcal{F}$  è il sistema di forze agenti sulla struttura. Essendo  $\mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L}$  si ha che

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{f}_\ell, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell, \mathbf{w} \rangle.$$

Il risultato si può quindi scrivere esplicitamente nella forma

$$\phi(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}_\ell, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{r}_\ell, \mathbf{w} \rangle - \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta} \rangle,$$

ed enunciare come segue.

Si consideri una struttura inizialmente indeformata ed in quiete che all'istante di osservazione si ritrova in quiete ed in equilibrio elastico sotto l'azione del sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  e del campo di distorsioni  $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{H}$  avendo subito uno spostamento ammissibile  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$ . L'energia di deformazione elastica della struttura è allora pari alla metà della differenza tra il lavoro virtuale compiuto dal sistema di forze per effetto dello spostamento ammissibile ed il lavoro virtuale compiuto dal campo di sforzi per effetto delle distorsioni impresse.

*Estensione del teorema di Clapeyron*

## 2.7. Estensione del teorema di Betti

Si consideri una struttura elastica con vincoli lisci e bilaterali, soggetta a due diverse azioni costituite da carichi, cedimenti imposti e distorsioni impresse.

Siano

$$\ell_1 \in \mathcal{F}_L, \quad \mathbf{w}_1 \in \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{\delta}_1 \in \mathcal{H},$$

$$\ell_2 \in \mathcal{F}_L, \quad \mathbf{w}_2 \in \mathcal{V}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 \in \mathcal{H},$$

le azioni sul primo e sul secondo schema strutturale. Si considerino quindi

- una coppia di sistemi di forze estensioni dei carichi  $\ell_1, \ell_2 \in \mathcal{F}_L$

$$\mathbf{f}_{\ell_1} \in \mathcal{F}, \quad \mathbf{f}_{\ell_2} \in \mathcal{F},$$

- le deformate elastiche della struttura nei due schemi

$$\mathbf{u}_1 \in \mathbf{w}_1 + \mathcal{L}, \quad \mathbf{u}_2 \in \mathbf{w}_2 + \mathcal{L},$$

- i campi di sforzo nella struttura

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u}_i - \boldsymbol{\delta}_i), \quad i = 1, 2,$$

- i sistemi reattivi nella struttura  $\mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\sigma}_i) \in \mathcal{R}$ ,  $i = 1, 2$  definiti dall'identità

$$\langle \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\sigma}_i), \mathbf{v} \rangle := (\langle \boldsymbol{\sigma}_i, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}_{\ell_i}, \mathbf{v} \rangle), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad i = 1, 2.$$

Ponendo  $\mathbf{r}_\ell(\mathbf{u}_i) = \mathbf{r}_\ell(\mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u}_i - \boldsymbol{\delta}_i))$  la condizione di equilibrio elastico si scrive

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}_{\ell i}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\mathbf{u}_i), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad i = 1, 2.$$

Dunque il lavoro virtuale della risposta elastica del sistema 1 per la deformata elastica del sistema 2 è dato da

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = \langle \mathbf{f}_{\ell i}, \mathbf{u}_j \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\mathbf{u}_i), \mathbf{u}_j \rangle + \langle \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{B}\mathbf{u}_j \rangle, \quad i = 1, 2.$$

Ora, essendo  $\boldsymbol{\sigma}_j = \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \boldsymbol{\delta}_j)$ , si ha che

$$\langle \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}_i, \mathbf{B}\mathbf{u}_j \rangle = \langle \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\delta}_j \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\delta}_i \rangle,$$

e dunque

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) - \langle \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}_i, \boldsymbol{\delta}_j \rangle = \langle \mathbf{f}_{\ell i}, \mathbf{u}_j \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\delta}_i \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\mathbf{u}_i), \mathbf{w}_j \rangle, \quad \forall i, j = 1, 2.$$

Ne segue che vale la *proprietà di reciprocità*

$$\langle \mathbf{f}_{\ell 1}, \mathbf{u}_2 \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\sigma}_1), \mathbf{w}_2 \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\delta}_2 \rangle = \langle \mathbf{f}_{\ell 2}, \mathbf{u}_1 \rangle + \langle \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\sigma}_2), \mathbf{w}_1 \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\delta}_1 \rangle.$$

La proprietà si enuncia come segue.

Si considerino due deformate elastiche di una struttura, dovute a due condizioni di carico, distorsioni e cedimenti, Allora sono uguali le differenze tra i lavori virtuali mutui dei sistemi di forze e dei campi di sforzo.

*Teorema di Betti generalizzato*

La proprietà di reciprocità enunciata dal teorema di BETTI generalizzato fornisce il risultato di base per lo sviluppo della teoria delle *linee di influenza* per le strutture elastiche.

Per illustrare un'applicazione del teorema di BETTI generalizzato si considera il tracciamento di una linea d'influenza per una travatura piana ad asse rettilineo.

Precisamente si ponga il problema di determinare il massimo e il minimo momento flettente nella sezione  $S$  della trave per effetto di una distorsione termica a farfalla che genera una curvatura di intensità  $\alpha \Delta T / h$  costante a pezzi lungo la trave, con  $\alpha$  coefficiente di dilatazione termica e  $\Delta T / h$  gradiente di temperatura (fig. 2.5). La soluzione del problema richiede di determinare la linea d'influenza del momento flettente in  $S$  per effetto di una distorsione di rotazione relativa concentrata, viaggiante sulla trave (fig. 2.5 a)). In forza del teorema di BETTI generalizzato, la linea d'influenza coincide con il diagramma del momento flettente dovuto ad una distorsione di rotazione relativa  $\Delta\varphi$  concentrata nella sezione  $S$  (fig. 2.5 c)). Nell'ambito della teoria linearizzata la rotazione relativa è misurata dal salto di pendenza  $\Delta\varphi = \Delta v / d$  della deformata elastica in corrispondenza della sezione  $S$ . Infatti nelle travi ad asse rettilineo, il principio dei lavori virtuali, che è alla base del teorema di BETTI, è formulato in termini di spostamenti virtuali e delle relative derivate prime e seconde.

L'ente cinematico duale delle coppie concentrate è infatti la pendenza dello spostamento virtuale e l'ente cinematico duale del momento flettente è la derivata della pendenza e cioè la curvatura linearizzata.

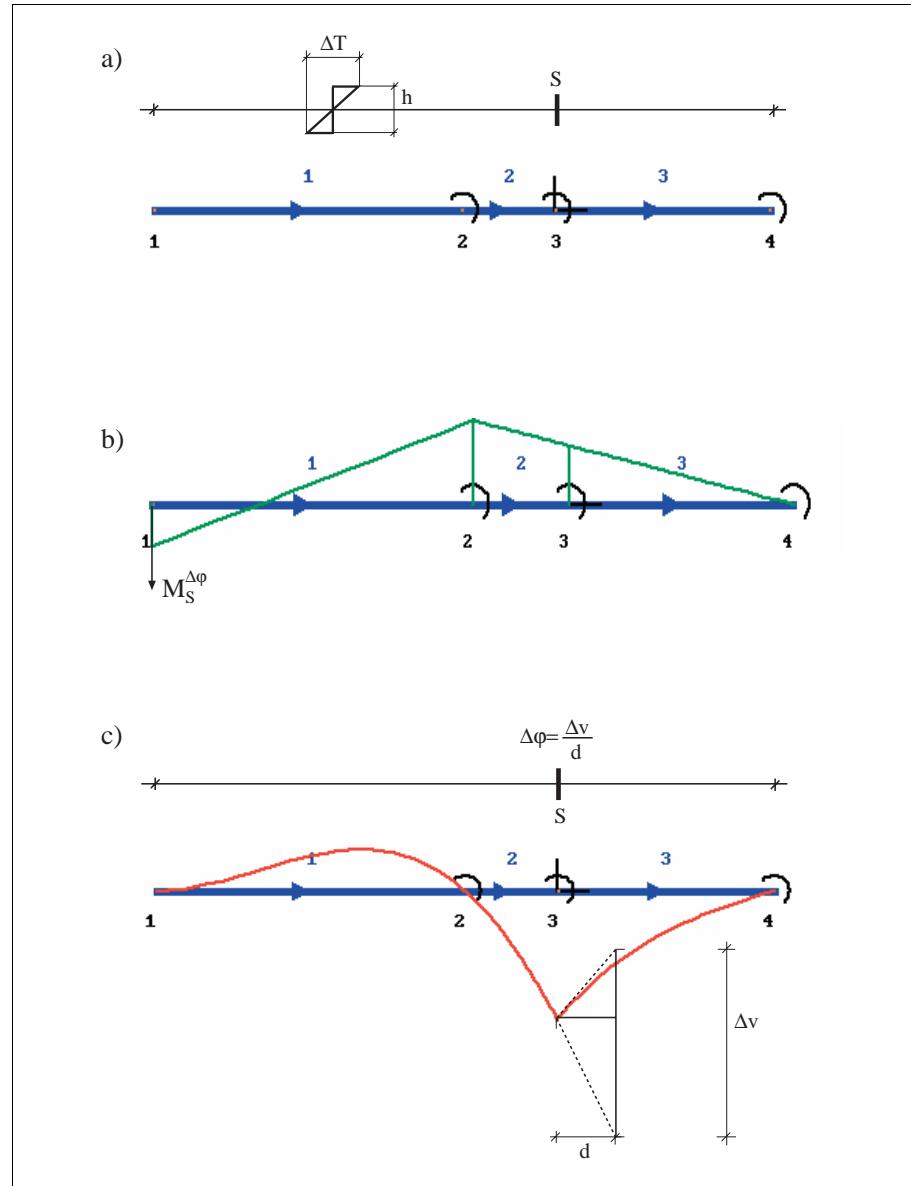


Fig. 2.5

## 2.8. Metodo degli spostamenti

La procedura più conveniente per la soluzione delle strutture elastiche lineari è il *metodo degli spostamenti* che è suscettibile di una semplice implementazione in un codice di calcolo automatico, come sarà mostrato nella sezione V.2 (p. 195).

Per inquadrare la trattazione si consideri, nell'ambito della teoria linearizzata, una struttura elastica, con comportamento elastico lineare, soggetta a vincoli perfetti, lisci e bilaterali.

La cinematica della struttura è quindi descritta da

- una varietà affine  $\mathcal{L}_a = \mathbf{w} + \mathcal{L}$  di campi di spostamento ammissibili, che è somma di un campo di spostamento  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  e del sottospazio  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  degli spostamenti conformi.

I sistemi di forze ammissibili costituiscono anch'esse

- una varietà affine  $\mathcal{F}_a = \mathbf{f}_\ell + \mathcal{R}$  che è somma di un sistema di forze  $\mathbf{f}_\ell \in \mathcal{F}$  estensione del carico assegnato  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e di un sottospazio di reazioni vincolari  $\mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp$ .

L'elasticità della struttura è governata dalla *forma bilineare simmetrica* dell'energia elastica  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  definita su  $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ .

In assenza di spostamenti *rígidi* conformi, la forma dell'energia elastica è *non degenera*. Il problema dell'equilibrio elastico si pone nella forma variazionale

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  e  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ . Nel carico efficace  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  sono incluse anche le forze attive equivalenti ai cedimenti  $\ell_w$  e quelle equivalenti alle distorsioni impresse  $\ell_\delta$ , definite rispettivamente da

$$\begin{aligned} \langle \ell_w, \mathbf{v} \rangle &= -\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \langle \ell_\delta, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{E}\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Nel seguito per semplificare la notazione il carico efficace sarà denotato con  $\ell$ .

Poiché l'energia elastica  $\mathbf{a}$  è definita positiva, il problema dell'equilibrio elastico ammette un'unica soluzione per ogni dato  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

Da un punto di vista generale, il *metodo degli spostamenti* consiste nel riformulare il problema come due schemi da risolvere in cascata.

Nelle applicazioni alle strutture composte da travi (*travature*) il primo schema è un problema continuo del quale si sa determinare la soluzione esatta, mentre il secondo schema è discreto.

La stessa metodologia può essere applicata per la ricerca di una soluzione approssimata di problemi strutturali elastici. In questo caso lo schema continuo è risolto in modo approssimato adottando una base finita di funzioni di forma per il campo di spostamento.

L'idea è quella di *partizionare* il sottospazio lineare  $\mathcal{L}$  degli spostamenti ammissibili come somma diretta

$$\mathcal{L} = L_o \oplus L_n,$$

di due sottospazi lineari

- $L_o$  è un sottospazio lineare di dimensione infinita,
- $L_n$  è un sottospazio lineare di dimensione finita  $n$ .

I sottospazi lineari  $L_o$  e  $L_n$  sono tra loro *ortogonali in energia elastica*, cioè tali che

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}_o, \mathbf{v}_n) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_o \in L_o, \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n.$$

Il problema si decomponete allora nei due schemi:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}_o, \mathbf{v}_o) &= \langle \ell, \mathbf{v}_o \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_o \in L_o, \quad \text{schema continuo}, \\ \mathbf{a}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) &= \langle \ell, \mathbf{v}_n \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n, \quad \text{schema discreto}. \end{aligned}$$

*Partizione  
del problema  
elastico  
negli schemi  
continuo  
e discreto*

In corrispondenza della partizione  $\mathcal{L} = L_o \oplus L_n$  dello spazio degli spostamenti conformi, anche lo spazio duale dei carichi  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  viene partizionato nella somma diretta  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = L_o^\perp \oplus L_n^\perp$ , dei sottospazi lineari  $L_o^\perp$  ed  $L_n^\perp$ . Infatti dalle due relazioni caratteristiche della partizione di  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = L_o + L_n, \quad \{\mathbf{o}\} = L_o \cap L_n,$$

prendendo i complementi ortogonali si ottengono le relazioni

$$\{\mathbf{o}\} = L_o^\perp \cap L_n^\perp, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{L}} = L_o^\perp + L_n^\perp.$$

La prossima proposizione fornisce una utile interpretazione alternativa di questa partizione di  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

**Proposizione 2.5.** *Si considerino le risposte elastiche attive della struttura,  $\ell_o \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  ed  $\ell_n \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , a deformate appartenenti ad  $L_o$  e ad  $L_n$ :*

$$\langle \ell_o, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{a}(\mathbf{u}_o, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

$$\langle \ell_n, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{a}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

e siano  $\mathcal{F}_o$  ed  $\mathcal{F}_n$  i sottospazi rispettivamente costituiti da tali risposte.

Allora sussiste la decomposizione

$$\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_o \oplus \mathcal{F}_n \quad \text{con} \quad \mathcal{F}_o = L_n^\perp, \quad \mathcal{F}_n = L_o^\perp.$$

**Dim.** Dalla definizione di  $\ell_o$ , essendo i due sottospazi  $L_o$  ed  $L_n$  ortogonali in energia elastica, risulta che

$$\langle \ell_o, \mathbf{v}_n \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{u}_o, \mathbf{v}_n) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n \iff \ell_o \in L_n^\perp.$$

Ne segue che vale l'inclusione  $\mathcal{F}_o \subset L_n^\perp$ . D'altronde se si considera un carico  $\ell \in L_n^\perp$  esiste una (unica) deformata  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  della struttura in equilibrio elastico con esso, cioè tale che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

In particolare, essendo per ipotesi  $\ell \in L_n^\perp$ , si ha che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) = \langle \ell, \mathbf{v}_n \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n \iff \mathbf{u} \in L_o.$$

Il carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  appartiene dunque al sottospazio lineare  $\mathcal{F}_o$ . Ciò dimostra l'inclusione  $L_n^\perp \subset \mathcal{F}_o$ . Dalle due opposte inclusioni segue in definitiva che  $\mathcal{F}_o = L_n^\perp$ . In modo perfettamente analogo si dimostra che anche  $\mathcal{F}_n = L_o^\perp$ . Dunque  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}_o \oplus \mathcal{F}_n$ .  $\square$

Si ha quindi che

- Ogni carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  può essere univocamente decomposto come somma di
- una risposta elastica attiva  $\ell_o \in \mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  dello schema continuo e di
  - una risposta elastica attiva  $\ell_n \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  dello schema discreto.

Ogni risposta elastica attiva dello schema continuo compie lavoro virtuale nullo per ogni funzione di forma dello schema discreto.

Ogni risposta elastica attiva dello schema discreto compie lavoro virtuale nullo per ogni funzione di forma dello schema continuo.

Tale risultato consente di affermare che sullo schema discreto il carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  può essere sostituito da uno ad esso equivalente  $\ell_n \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  pari alla differenza tra il carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e la risposta elastica attiva  $\ell_o \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  dello schema continuo

$$\ell_n = \ell - \ell_o.$$

Infatti, essendo  $\langle \ell_o, \mathbf{v}_n \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n$ , si ha che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_n) = \langle \ell, \mathbf{v}_n \rangle = \langle \ell_n, \mathbf{v}_n \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n.$$

Si osservi ora che la risposta elastica reattiva  $\mathbf{r}_o \in L_o^\perp$  dei vincoli addizionali imposti sullo schema continuo è definita dall'identità

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_o, \mathbf{v}) = \langle \ell_o, \mathbf{v} \rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{r}_o, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

ne segue che  $\ell_n = -\mathbf{r}_o$ . La condizione di equilibrio elastico dello schema discreto si può quindi scrivere

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) = -\langle \mathbf{r}_o, \mathbf{v}_n \rangle \quad \forall \mathbf{v}_n \in L_n.$$

La procedura per la soluzione del problema dell'equilibrio elastico della struttura consiste in definitiva nei seguenti *due passi successivi*.

Nel primo passo si calcola la risposta elastica dello schema continuo. In particolare si valuta l'azione reattiva  $\ell_n = -\mathbf{r}_o$  sui vincoli addizionali imposti allo schema continuo e cioè quelli che definiscono il sottospazio lineare  $L_o$  degli spostamenti conformi  $\mathcal{L}$ . Ciò consente di determinare il carico da imporre sullo schema discreto.

*passo 1*

Nel secondo passo si risolve il problema discreto fissando una base  $\{\mathbf{d}_i, i = 1, \dots, n\}$  in  $L_n$ . Ponendo quindi

$$\mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^n u_j \mathbf{d}_j \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n v_i \mathbf{d}_i$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_n) &= \sum_{i,j=1}^n \mathbf{a}(\mathbf{d}_j, \mathbf{d}_i) u_j v_i = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} u_j v_i = \\ &= [\mathbf{A}] [\mathbf{u}_n] \cdot [\mathbf{v}_n], \end{aligned}$$

*passo 2*

$$\langle \ell_n, \mathbf{v}_n \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \ell_n, \mathbf{d}_i \rangle v_i = \sum_{i=1}^n \ell_i v_i = [1] \cdot [\mathbf{v}_n],$$

dove  $[\mathbf{A}]$  è la matrice di rigidezza elastica dello schema discreto ed  $[1]$  è il vettore del carico equivalente.

La matrice elastica  $[\mathbf{A}]$  è simmetrica e definita positiva e pertanto il problema lineare

$$[\mathbf{A}] [\mathbf{u}] = [1],$$

ammette un'unica soluzione per ogni dato  $[1]$ .

La deformata elastica della struttura si ottiene quindi come somma della deformata  $\mathbf{u}_o \in L_o$  dello schema continuo e della deformata  $\mathbf{u}_n \in L_n$  dello schema discreto.

### 2.8.1. Applicazione alle travature

Nelle applicazioni alle strutture composte da travi, dette *travature*, il metodo degli spostamenti viene implementato mediante la seguente procedura.

Si individuano

- una famiglia di nodi suscettibili solo di *spostamenti rigidi*,
- un insieme di travi semplici ad asse rettilineo i cui estremi sono solidali a nodi della famiglia.

I *parametri nodali* incogniti sono le componenti delle traslazioni e delle rotazioni dei nodi non soggetti a condizioni vincolari.

Si risolve quindi lo schema elastostatico a *nodi fissi* in cui i parametri nodali sono assunti nulli e quindi si considerano le travi semplici incastrate agli estremi e soggette ai carichi, alle distorsioni ed ai cedimenti su di esse agenti.

Nello schema a *nodi fissi* si determinano le reazioni esplicate dagli estremi delle travi sui nodi cui afferiscono.

Si considera quindi la struttura soggetta ai cedimenti nodali assegnati, ai carichi direttamente assegnati sui nodi ed alle reazioni trasmesse ai nodi dalle travi, nello schema a *nodi fissi*.

In questo schema, detto a *nodi spostabili* le travi sono scariche ed incastrate ai nodi ed i parametri incogniti sono le componenti delle traslazioni e delle rotazioni dei nodi non soggetti a condizioni vincolari. La eventuale presenza di vincoli di collegamento delle estremità delle aste con i nodi può essere trattata attraverso una tecnica di condensazione che consente di ricondurre il calcolo della deformata elastica delle singole aste a quello di travi incastrate agli estremi (vedi la sezione V.2.8 (p. 216)).

L'applicazione del metodo al calcolo di un telaio incastrato alle basi è illustrata schematicamente in fig. 2.6. Il portale è soggetto a carichi uniformi trasversali sulle aste 1 e 2 e ad una coppia concentrata sul nodo 2.

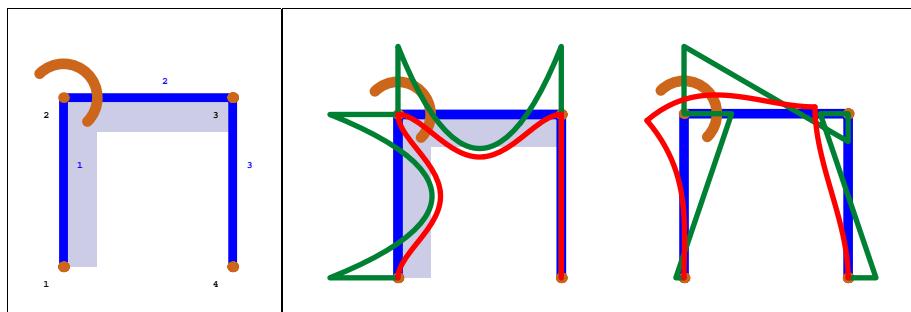


Fig. 2.6 portale

Fig. 2.7 a) nodi fissi - b) nodi spostabili

Il sottospazio lineare  $L_o$  è costituito dalle deformate delle travi semplici che sono compatibili con l'essere i nodi fissi.

Il sottospazio lineare  $L_n$  è costituito dalle deformate delle travi semplici per effetto degli spostamenti dei nodi compatibili con i vincoli nodali.

Il sottospazio lineare  $L_n$  è generato dai *polinomi di HERMITE* relativi alle singole travi che sono le deformate delle travi incastrate agli estremi e soggette a spostamenti e rotazioni unitari delle sezioni di estremità.

I polinomi cubici di HERMITE costituiscono una base per le deformate elastiche della trave doppiamente incastrata soggetta a cedimenti imposti agli estremi. L'espressione analitica e la forma caratteristica dei polinomi di HERMITE normalizzati all'intervallo  $[-1, 1]$  è mostrata in fig. 2.8.

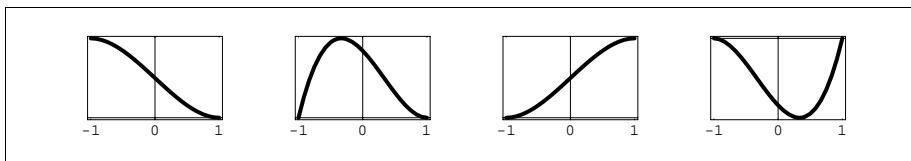


Fig. 2.8 Polinomi di Hermite

Sulla base di un'analisi dettagliata che sarà illustrata nella sezione V.2 (p. 195), l'autore ha implementato un codice di calcolo automatico delle travature piane con condizioni di vincolo molto generali, facendo ricorso al codice MATHEMATICA di STEPHEN WOLFRAM che consente, tra l'altro, di manipolare in modo simbolico stringhe ed espressioni algebriche e di fornire una rappresentazione grafica dei risultati. Nelle figure seguenti si riporta, a titolo esemplificativo, la soluzione di alcune travature elastiche piane.

- I vincoli nodali sono rappresentati riportando in corrispondenza di ciascun nodo quelli attivi tra i parametri traslazione orizzontale, traslazione verticale e rotazione.
- Il primo esempio, riportato nelle figg. 2.9, 2.10 è una travatura costituita da un montante ed un traverso.
- Lo schema è costituito da 6 nodi e 5 elementi trave ad asse rettilineo.
- Il nodo 1 alla base del montante è incastrato.
- I nodi 4 e 5 sono vincolati con carrelli a piano di scorrimento orizzontale. Gli altri nodi sono liberi.
- Il nodo 2 è caricato da una coppia antioraria.
- Sulle aste 3 e 5 agiscono carichi trasversali uniformi, diretti verso il basso.

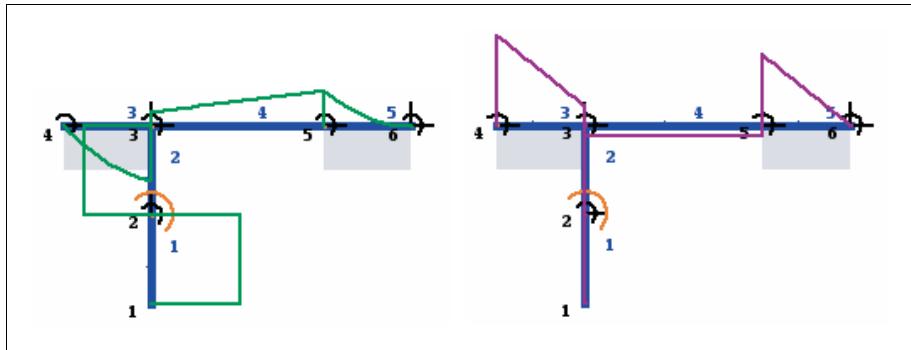


Fig. 2.9 Diagrammi  $M$  e  $T$

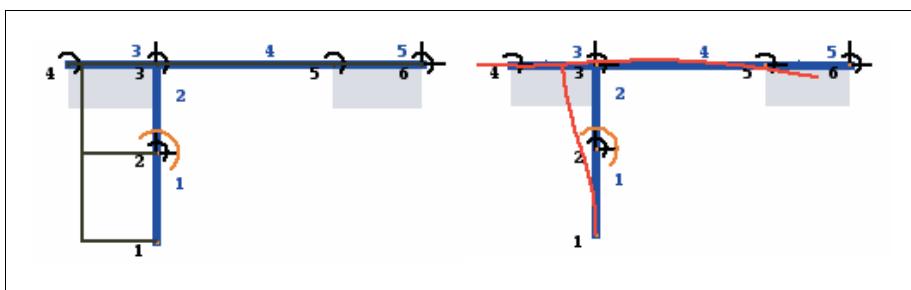
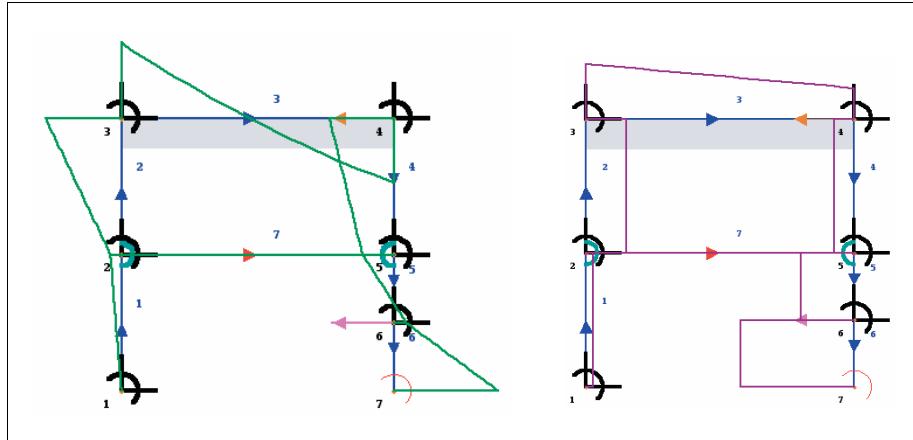
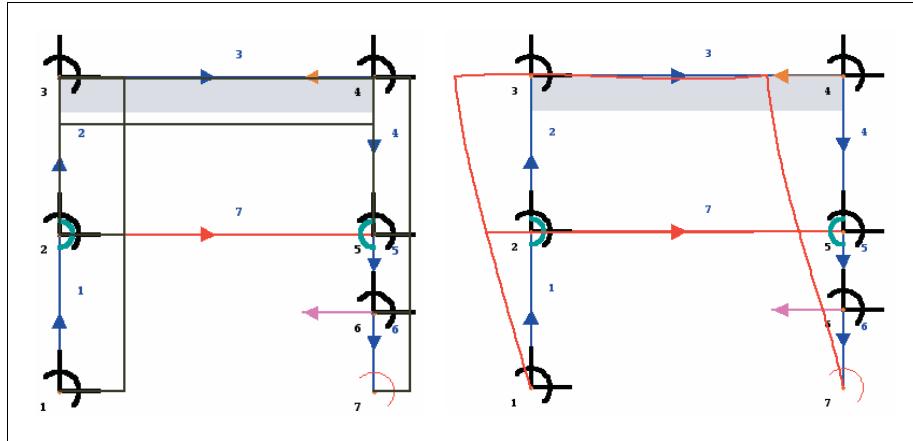


Fig. 2.10 Diagrammi  $N$  e  $u$

■ Il secondo esempio, riportato nelle figg. 2.11, 2.12 è un telaio a due piani.

- Lo schema è costituito da 7 nodi e 7 elementi trave ad asse rettilineo.
- Alla base, il nodo 1 è incastrato mentre il nodo 7 è incernierato con una molla elastica rotazionale. Gli altri nodi sono liberi.
- La trave 7 è incernierata agli estremi ai nodi 2 e 5.
- Il nodo 6 è caricato da una forza orizzontale diretta verso sinistra.
- La trave 3 è soggetta ad un carico trasversale uniforme, diretto verso il basso.
- Il pendolo 7 è soggetto ad un incremento uniforme di temperatura.

Fig. 2.11 Diagrammi **M** e **T**Fig. 2.12 Diagrammi **N** e **u**

## 2.9. Esistenza della soluzione in elastostatica

Una struttura è in equilibrio elastico sotto un assegnato carico solo se il carico è in equilibrio e cioè se (vedi Tomo I sezione II.6.4 (p. 216))

$$\exists \mathbf{r} \in \mathcal{R} : \ell + \mathbf{r} \in (\text{Ker } \mathbf{B})^\perp \iff \ell \in \mathcal{R} + (\text{Ker } \mathbf{B})^\perp = (\mathcal{L} \cap \text{Ker } \mathbf{B})^\perp.$$

Il risultato fondamentale dell'elastostatica stabilisce che sussiste anche la proprietà inversa e cioè che la condizione di equilibrio del carico è anche sufficiente ad assicurare l'esistenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico.

Per dimostrarlo si premettono i seguenti risultati. Il primo stabilisce che l'energia elastica e la risposta elastica si annullano se e solo se il campo di spostamenti è rigido.

**Proposizione 2.6.** *La forma bilineare dell'energia elastica  $\mathbf{a} \in L(\mathcal{V}^2; \mathbb{R})$  è positiva:*

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

e risulta

$$\text{Ker } \mathbf{a} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0\} = \text{Ker } \mathbf{A} = \text{Ker } \mathbf{B}.$$

**Dim.** La rigidezza elastica soddisfa la condizione

$$\langle \mathbf{E}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{H} \setminus \{\mathbf{o}\},$$

e quindi ponendo  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u}$  si ha che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

ed il valore zero si ottiene se e solo se  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{o}$ . Dunque  $\text{Ker } \mathbf{a} = \text{Ker } \mathbf{B}$ .

Inoltre se  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$  il campo  $\mathbf{u}$  è un punto di minimo assoluto per il funzionale  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ . Ne segue che la derivata deve essere nulla e quindi che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \iff \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Dunque  $\text{Ker } \mathbf{a} = \text{Ker } \mathbf{A}$ . □

Il secondo risultato stabilisce che la risposta elastica indotta da un campo di spostamenti conformi non può essere puramente reattiva.

**Proposizione 2.7.** *In una struttura con elasticità lineare soggetta a vincoli lisci e bilaterali sia  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$  l'operatore che ad ogni cinematismo conforme  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  associa la risposta elastica  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  definita dall'identità*

$$\langle \mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Allora si ha che

$$\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \text{Ker } \mathbf{A} \cap \mathcal{L},$$

dove

$$\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{R}\}.$$

**Dim.** L'inclusione  $\text{Ker } \mathbf{A} \cap \mathcal{L} \subseteq \text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$  è banale. Sia quindi  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ . Allora

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{o} \iff \mathbf{A}\mathbf{u} \in \mathcal{R}, \mathbf{u} \in \mathcal{L} \iff \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0, \mathbf{u} \in \mathcal{L} \iff \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{A} \cap \mathcal{L}.$$

L'inclusione  $\text{Ker } \mathbf{A} \cap \mathcal{L} \supseteq \text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$  segue allora dalla proposizione 2.6. □

Il terzo risultato stabilisce la semiellitticità dell'energia elastica.

**Proposizione 2.8.** *La forma bilineare dell'energia elastica  $\mathbf{a} \in L(\mathcal{L}^2; \mathfrak{R})$  gode della proprietà di semiellitticità sul sottospazio  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  dei cinematici conformi e cioè soddisfa la diseguaglianza*

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

**Dim.** La proprietà di  $\mathcal{H}$ -ellitticità dell'operatore elastico è espressa da

$$(\mathbf{E}\mathbf{e}, \mathbf{e}) \geq c_{\mathbf{E}} \|\mathbf{e}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \mathbf{e} \in \mathcal{H},$$

La diseguaglianza di KORN per l'operatore cinematico implica che

$$\|\mathbf{B}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \geq c_{\mathbf{B}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

Ponendo  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u}$  si ottiene che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (\mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{E}} \|\mathbf{B}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \geq c_{\mathbf{E}} c_{\mathbf{B}}^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

Dalle proposizioni 2.6 e 2.7 si ha poi che  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$  e quindi il risultato.  $\square$

Dalla proposizione 2.7 si deduce la chiusura dell'immagine dell'operatore di risposta elastica  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \in L(\mathcal{L}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}})$ . Infatti con l'ausilio della *diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ* [31] si deduce che

$$\|\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{u}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}} \geq \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

Sussiste quindi la diseguaglianza

$$\|\mathbf{A}_{\mathcal{L}}\mathbf{u}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}} \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

che, in forza del teorema dell'immagine chiusa di BANACH [21], [31], equivale alla condizione di ortogonalità

$$\text{Im } \mathbf{A}_{\mathcal{L}} = (\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}})^\perp.$$

Si consideri ora il caso generale in cui sono assegnati un carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , un cedimento vincolare  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  ed un campo di distorsioni  $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{H}$ .

Il problema dell'equilibrio elastico si scrive allora

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.}$$

dove  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è il *carico efficace* definito dalla relazione

$$\langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle := \langle \ell, \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{E}(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}\mathbf{w}), \mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Si noti che la condizione di equilibrio è soddisfatta dal carico efficace  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  se e solo se è soddisfatta dal carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

Cedimenti vincolari e distorsioni impresse giocano dunque un ruolo tramite la definizione di carichi aggiuntivi ad essi equivalenti. Tali carichi equivalenti sono equilibrati sulla struttura e la loro presenza non altera la discussione sull'esistenza e l'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico.

Il teorema concernente l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema dell'equilibrio elastico può essere enunciato come una proprietà di decomposizione.

**Proposizione 2.9. Teorema di decomposizione.** *Si consideri una struttura con elasticità lineare soggetta a vincoli lisci e bilaterali, in assenza di cedimenti imposti. Un qualsiasi sistema di forze in equilibrio è allora univocamente decomponibile come somma di una risposta elastica e di un sistema reattivo.*

$$(\mathcal{L} \cap \text{Ker } \mathbf{A})^\perp = \mathbf{A}\mathcal{L} \oplus \mathcal{R}.$$

**Dim.** Si noti preliminarmente che dalle proposizioni 2.6 e 2.7 si deducono le relazioni

$$\text{Ker } \mathbf{A}_\mathcal{L} = \text{Ker } \mathbf{A} \cap \mathcal{L} = (\mathbf{A}\mathcal{L})^\perp \cap \mathcal{L},$$

$$\mathbf{A}\mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

La seconda enuncia che non esistono risposte elastiche a spostamenti conformi che siano puramente reattive. Se il carico  $\ell \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$  è in equilibrio sulla struttura e cioè se

$$\ell \in (\text{Ker } \mathbf{B}_\mathcal{L})^\perp = (\text{Ker } \mathbf{A}_\mathcal{L})^\perp = (\mathcal{L} \cap \text{Ker } \mathbf{A})^\perp,$$

dalla relazione di ortogonalità

$$\text{Im } \mathbf{A}_\mathcal{L} = (\text{Ker } \mathbf{A}_\mathcal{L})^\perp,$$

si ha che

$$\exists \mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{A}\mathbf{u} = \ell.$$

Definendo allora il sistema reattivo  $\mathbf{r}_\ell \in \mathcal{R}$  mediante l'identità

$$\langle \mathbf{r}_\ell, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \ell, \mathbf{v} \rangle,$$

si conclude che

$$\ell \in \mathbf{A}\mathcal{L} + \mathcal{R}.$$

Dunque

$$(\mathcal{L} \cap \text{Ker } \mathbf{A})^\perp \subseteq \mathbf{A}\mathcal{L} \oplus \mathcal{R}.$$

L'inclusione inversa è banale e ciò fornisce il risultato.  $\square$

## 2.10. Equazioni differenziali di equilibrio elastico

Si considerino le equazioni di equilibrio di CAUCHY, differenziali ed ai limiti (vedi Tomo I sezione II.7.3 (p. 224)).

Sostituendo l'espressione del campo di sforzi in funzione del campo di spostamenti si ottengono le equazioni

$$\begin{cases} (\mathbf{B}'_o \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{b} + \mathbf{B}'_o \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}, \mathbf{v}), & \mathbf{u} \in \mathcal{L} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ (\mathbf{N} \mathbf{E} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{N} \mathbf{E} \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{v} \rangle, \end{cases}$$

Nel continuo elastico di CAUCHY, come mostrato nella sezione 2 (p. 50), l'operatore di rigidezza elastica  $\mathbb{E} \in L(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  è definita localmente da un tensore simmetrico del quarto ordine

$$\mathbb{E} \in \text{Sym}(V) := \text{Sym}(\text{Sym}(V; V); \text{Sym}(V; V)).$$

In assenza di distorsioni impresse e di vincoli e forze al contorno, essendo

$$\mathbf{B} = \text{sym grad}, \quad \mathbf{B}'_o = -\text{div},$$

la condizione differenziale di equilibrio elastico si scrive

$$\text{div } \mathbb{E} \text{ sym grad } \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Se l'elasticità è omogenea ed isotropa si perviene all'equazione differenziale dell'equilibrio elastico formulata da NAVIER<sup>17</sup> nel 1821, [1].

A tal fine si osservi che per un materiale lineare ed isotropo il tensore di rigidezza elastica ha l'espressione (vedi sezione I.4.2 (p. 30))

$$\mathbb{E} = 2G\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}.$$

dove  $\mathbb{I} = \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}$  è l'identità in  $\text{Lin}(V) := \text{Lin}(\text{Lin}(V; V); \text{Lin}(V; V))$ .

Sostituendo e tenendo presente la relazione

$$\text{div}(\mathbf{I} \text{ div } \mathbf{u}) = \text{grad div } \mathbf{u},$$

la condizione differenziale di equilibrio elastico diventa

$$2G \text{ div sym grad } \mathbf{u} + \lambda \text{ grad div } \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

---

<sup>17</sup> CLAUDE LOUIS MARIE HENRI NAVIER (1785-1836). Rimasto orfano di padre all'età di 8 anni fu allevato dallo zio della madre EMILAND GAUTHHEY che lavorava nel Corps des Ponts et Chaussées ed era considerato il maggior ingegnere civile francese del tempo. Nel 1802 entrò alla Ecole Polytechnique dove ebbe come professore di analisi JEAN BAPTISTE JOSEPH FOURIER (1768-1830). FOURIER ebbe molta influenza su NAVIER di cui divenne amico. Nel 1804 NAVIER entrò all'Ecole des Ponts et Chaussées dove si laureò nel 1806. Dal 1819 tenne corsi di meccanica applicata all'Ecole des Ponts et Chaussées dove nel 1830 fu nominato professore. Dal 1831 prese il posto di CAUCHY all'Ecole Polytechnique. Fu nominato membro dell'Académie des Sciences di Parigi del 1824 e divenne Chevalier de la Legion d'Honour nel 1831. NAVIER fu un grande ingegnere civile esperto in costruzioni stradali ed in costruzioni di ponti. Fu il primo a sviluppare una teoria dei ponti sospesi e ne progettò uno sulla Senna che non fu finito per l'opposizione del Municipio. A NAVIER è dovuta la prima trattazione esatta del problema della flessione delle travi elastiche nel piano, che egli pose nel *Résumé des Leçons de Mécanique* pubblicato nel 1826. Nel 1821 dedusse le equazioni differenziali del moto di un fluido incomprensibile ora dette equazioni di NAVIER-STOKES e nel 1822 quelle di un fluido viscoso, basandosi sull'analogia formale con le equazioni dell'equilibrio elastico. E' sorprendente come le equazioni di Navier fossero corrette nonostante egli non avesse nozione degli sforzi tangenziali

Facendo poi ricorso alle identità

$$\begin{cases} 2 \operatorname{div} \operatorname{sym} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T, \\ \operatorname{div} (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{cases}$$

si ottiene l'equazione differenziale di NAVIER

$$(\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + G \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

In effetti la formulazione originaria di NAVIER, basata su di un modello molecolare, si riferiva al caso in cui  $G = \lambda$ .

La formulazione con due costanti elastiche indipendenti è dovuta a CAUCHY [3] (1828) ed appare nelle trattazioni di POISSON [4] (1828), LAMÉ e CLAPEYRON [7] (1833), STOKES [10] (1845) e LAMÉ [12] (1852).

Tramite l'identità differenziale

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u},$$

l'equazione di NAVIER si può riscrivere nella forma

$$(\lambda + 2G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - G \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Questa forma dell'equazione differenziale dell'equilibrio elastico è dovuta a LAMÉ<sup>18</sup> e CLAPEYRON [7].

Operando sull'equazione differenziale di NAVIER prima con la divergenza e poi con il rotore, ed osservando che

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{u} \in C^2(\Omega),$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \mathbf{0}, \quad \forall f \in C^2(\Omega),$$

---

<sup>18</sup> GABRIEL LAMÉ (1795-1870). Ingegnere ferroviario e scienziato. Si laureò all'École Polytechnique nel 1818 ed all'École de Mines nel 1820 insieme all'amico EMILE CLAPEYRON. Subito dopo, su richiesta di ALESSANDRO I imperatore della Russia dal 1801 al 1825, fu inviato a San Pietroburgo con CLAPEYRON. LAMÉ fu nominato professore e ingegnere all'*Institut et Corps du Genie des Voies de Communication* di San Pietroburgo. LAMÉ restò in Russia per 12 anni e durante questo periodo progettò importanti strutture tra cui un ponte sospeso in San Pietroburgo e pubblicò molti lavori, alcuni dei quali con CLAPEYRON. Nel 1832 tornò a Parigi e LAMÉ divenne professore di fisica all'École Polytechnique. Nel 1836 partecipò alla costruzione della linea ferroviaria Parigi-St.Germain. Divenne membro dell'Accademia Francese delle Scienze nel 1843 e professore di fisica matematica alla Sorbona dal 1850. Nel 1852 pubblicò le *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides* primo libro sulla teoria dell'elasticità. Due costanti elastiche prendono il nome da LAMÉ. GAUSS lo considerò il maggior matematico francese del suo tempo.

si ottengono le relazioni

$$\begin{cases} (\lambda + 2G) \Delta \operatorname{div} \mathbf{u} = -\operatorname{div} \mathbf{b}, \\ G \Delta \operatorname{rot} \mathbf{u} = -\operatorname{rot} \mathbf{b}. \end{cases}$$

dove  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  è l'operatore di LAPLACE.

Da tali relazioni si deduce il seguente importante risultato dovuto a LAMÉ [12].

La dimostrazione è tratta da [29].

**Proposizione 2.10. Teorema di Lamé.** *In un corpo elastico isotropo ed omogeneo, soggetto ad un campo di forze di massa avente rotore e divergenza nulli, il campo di spostamenti è biammonico e quindi analitico.*

**Dim.** Le condizioni  $E > 0$ ,  $G > 0$  e  $k > 0$  assicurano che  $\lambda + 2G > 0$ . Dalle identità

$$\begin{cases} \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}, \end{cases}$$

segue che deve risultare

$$\begin{cases} \operatorname{div} \Delta \mathbf{u} = -\operatorname{div} \mathbf{b}, \\ \operatorname{rot} \Delta \mathbf{u} = -\operatorname{rot} \mathbf{b}. \end{cases}$$

Vale dunque l'implicazione

$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{b} = \mathbf{o} \Rightarrow \Delta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{o},$

in quanto l'identità

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u},$$

assicura che un campo con rotore e divergenza nulli è armonico. □

### 3. CONGRUENZA ELASTICA

Un procedimento alternativo per formulare il problema elastico consiste nello scegliere il campo di sforzi quale incognita primaria.

Questo approccio ha l'inconveniente che il campo di spostamenti va determinato per integrazione del campo di deformazioni, operazione questa non sempre agevole e non idonea all'implementazione in un codice di calcolo automatico.

Per contro l'approccio alle tensioni è spesso da privilegiare per la soluzione di alcuni problemi campione e di semplici travi elastiche iperstatiche.

Nel seguito si espone la formulazione variazionale del problema elastico posto in termini di tensioni e si forniscono le condizioni differenziali di congruenza da imporre sul campo di sforzi del continuo di CAUCHY.

### 3.1. Formulazione in termini di sforzi

Per eliminare il campo di spostamenti dal problema dell'equilibrio elastico si decompone il campo di deformazioni totali  $\varepsilon \in \mathcal{H}$  come somma della deformazione elastica e della distorsione imposta.

$$\varepsilon = \mathbf{e} + \boldsymbol{\delta}.$$

La deformazione elastica viene quindi espressa in termini di tensioni  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{e} = \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}.$$

Rimane da imporre la condizione di congruenza delle deformazioni totali e la condizione di compatibilità statica tra tensioni e forze, attive e reattive. In forma variazionale si scrive

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\delta} - \mathbf{B} \mathbf{w} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

$$\langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle\rangle = \langle \mathbf{f}_\ell + \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

dove  $\mathbf{w}$  è il campo di cedimenti impressi.

Definendo la varietà lineare delle tensioni in equilibrio con il carico  $\ell \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$  e con le reazioni vincolari

$$\boxed{\mathcal{S}_\ell := \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} : \langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle\rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \right\}}.$$

il problema dell'equilibrio elastico in termini di tensioni si può scrivere nella forma variazionale

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_o + \boldsymbol{\delta} - \mathbf{B} \mathbf{w} \rangle\rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_o \in \mathcal{S}_\ell.$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}_o$  è il campo di tensioni soluzione del problema.

Osservando poi che la varietà  $\mathcal{S}_\ell$  è somma di un campo di tensioni  $\boldsymbol{\sigma}_\ell \in \mathcal{S}_\ell$  in equilibrio e del sottospazio  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  delle autotensioni, ponendo  $\boldsymbol{\sigma}_o = \boldsymbol{\sigma}_\ell + \boldsymbol{\tau}_o$  con  $\boldsymbol{\tau}_o \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  la condizione variazionale si pone nella forma

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{C} \boldsymbol{\tau}_o \rangle\rangle = \langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B} \mathbf{w} - \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_\ell - \boldsymbol{\delta} \rangle\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}, \quad \boldsymbol{\tau}_o \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

Si noti inoltre che dalla formula di GREEN segue che

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B} \mathbf{w} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) + \langle\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \mathbf{G} \mathbf{w} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} \rangle\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

in quanto  $\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau} = 0$  e  $\mathbf{N} \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{R}$ .

Il problema elastico si può quindi esprimere mediante la condizione variazionale

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{C} \boldsymbol{\tau}_o \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} \rangle\rangle - \langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_\ell + \boldsymbol{\delta} \rangle\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}, \quad \boldsymbol{\tau}_o \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

La soluzione di tale problema lineare è il campo di autotensioni  $\boldsymbol{\tau}_o \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  che sommato al campo di tensioni equilibrato  $\boldsymbol{\sigma}_\ell \in \mathcal{S}_\ell$  fornisce il campo di tensioni  $\boldsymbol{\sigma}_o = \boldsymbol{\sigma}_\ell + \boldsymbol{\tau}_o$  soluzione del problema elastico, equilibrato ed elasticamente congruente.

### 3.1.1. Metodo delle forze

Le *strutture semplici*, secondo la definizione posta nella sezione IV.14.5 (p. 496) del Tomo I, sono quelle caratterizzate dal fatto che entrambi i sottospazi lineari,  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}$  dei *cinematismi rigidi conformi* e  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  delle autotensioni, hanno dimensione finita. La dimensione di  $\mathcal{V}_{\text{RIG}}$  è il *grado di labilità*  $l$  della travatura. La dimensione di  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  è il *grado di iperstaticità*  $n$  della travatura.

Le strutture composte da travi sono strutture semplici.

Si assuma che il carico agente sulla struttura sia in equilibrio e che esista pertanto un campo di sforzi  $\boldsymbol{\sigma}_\ell \in \mathcal{S}_\ell$  in equilibrio con il carico.

Sia quindi  $\{\boldsymbol{\tau}_i ; i = 1, \dots, n\}$  una base di  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  e si denoti con

$$[\boldsymbol{\lambda}] = \{\lambda_i ; i = 1, \dots, n\},$$

il vettore numerico delle componenti delle autotensioni in tale base.

Posto allora

$$\mathbf{A}_{ij} = \langle\langle \boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{C}\boldsymbol{\tau}_j \rangle\rangle, \quad \mathbf{p}_i = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_i, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle - \langle\langle \boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_\ell + \boldsymbol{\delta} \rangle\rangle,$$

il problema dell'equilibrio elastico si scrive in forma algebrica

$$[\mathbf{A}][\boldsymbol{\lambda}] = [\mathbf{p}],$$

ed il campo di sforzi in soluzione è dato da

$$\boldsymbol{\sigma}_o = \sum_{i=1}^n \lambda_i \boldsymbol{\tau}_i + \boldsymbol{\sigma}_\ell.$$

E' questo il *metodo delle forze*. Il metodo fornisce un potente strumento di calcolo delle travature elastiche ed è anche alla base del *metodo degli spostamenti*, introdotto nella sezione 2.8 (p. 66).

Nella sezione V.2 (p. 195) sarà illustrata una procedura di calcolo automatico delle travature elastiche piane in cui si fa ricorso ad entrambi i metodi.

### 3.2. Equazione differenziale di congruenza elastica

Per esprimere l'equazione differenziale di congruenza in termini di stato di sforzo è conveniente far ricorso alla seguente identità [29].

**Proposizione 3.1.** *Sia  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  un campo di tensori simmetrici del secondo ordine con  $\boldsymbol{\varepsilon} \in C^2(\Omega)$ . Allora  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \text{Sym}(\mathbf{V})$  soddisfa la condizione differenziale di congruenza se e solo se*

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \nabla (\text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}) - 2 \text{ sym } \nabla \text{ div } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{O}.$$

dove  $\nabla$  è l'operatore gradiente.

**Dim.** Posto

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \nabla \nabla (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) - 2 \operatorname{sym} \nabla \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon},$$

sussiste l'identità

$$\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}]^T = [\operatorname{tr} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}),$$

con

$$\operatorname{tr} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 2 [\Delta (\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) - \operatorname{div} \operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}].$$

Dunque se  $\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}]^T = \mathbf{O}$  si ha che

$$\operatorname{tr} \operatorname{rot} [\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}]^T = \operatorname{tr} ([\operatorname{tr} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})) = 2 \operatorname{tr} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = 0,$$

e dunque

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = [\operatorname{tr} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

Viceversa se  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{O}$  si ha che  $\operatorname{rot} [\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}]^T = [\operatorname{tr} \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon})] \mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{O}$ .  $\square$

Se l'elasticità è omogenea ed isotropa, il tensore di cedevolezza elastica è dato da (vedi sezione I.4.2 (p. 30))

$$\mathbb{C} = \frac{1}{2G} \mathbb{I} - \frac{\nu}{E} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \frac{1}{2G} \left[ \mathbb{I} - \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right],$$

e quindi risulta

$$2G \mathbf{A}(\mathbb{C}\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}) - \frac{\nu}{1+\nu} \mathbf{A}((\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}).$$

Ora si ha che

$$\mathbf{A}((\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}) = (\Delta \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} + \nabla \nabla (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}),$$

ed essendo  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ , risulta

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma}) = \Delta \boldsymbol{\sigma} + \nabla \nabla (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) + 2 \operatorname{sym} \nabla \mathbf{b},$$

da cui

$$\frac{1-\nu}{1+\nu} \Delta \operatorname{tr} (\boldsymbol{\sigma}) = -\operatorname{div} \mathbf{b}.$$

In definitiva l'equazione differenziale di congruenza si scrive

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) + 2 \operatorname{sym} \nabla \mathbf{b} + \frac{\nu}{1-\nu} (\operatorname{div} \mathbf{b}) \mathbf{I} = \mathbf{O}.}$$

Questa forma generale è dovuta a DONATI [18] (1894) ed a MICHELL [19] (1900).

Se il campo di forze di massa è nullo l'equazione differenziale di congruenza assume la forma semplice

$$\boxed{\Delta \boldsymbol{\sigma} + \frac{\nu}{1+\nu} \nabla \nabla (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{O},}$$

che è il contributo originale di BELTRAMI<sup>19</sup> [16] (1892).

<sup>19</sup> EUGENIO BELTRAMI (1835-1900). Professore di matematica a Bologna ed in altre Università italiane. Con RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832-1903) e ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL (1829-1900) fu un prosecutore dell'opera di RIEMANN.

## 4. PRINCIPI DI ESTREMO

Si vuole ora mostrare come la determinazione dell'equilibrio elastico di una struttura possa essere ricondotta alla soluzione di un problema di estremo condizionato.

Questa tematica rientra nel più ampio capitolo che tratta della formulazione di principi variazionali di stazionarietà o di estremo equivalenti ad un problema posto in termini di operatori.

Ci si limiterà qui ad illustrare una derivazione per via diretta dei due classici principi di estremo della elastostatica.

Una trattazione più completa della teoria dei principi variazionali è presentata nel capitolo VI.

### 4.1. Energia potenziale

Il primo principio di estremo è noto come principio della *minima energia potenziale* ed è associato alla soluzione del problema dell'equilibrio elastico in termini di spostamenti.

Sia  $\mathbf{u}_o \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}}$  la deformata elastica della struttura soggetta ai carichi  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  ed alle distorsioni  $\delta \in \mathcal{H}$ . In termini variazionali la condizione di equilibrio elastico si scrive

$$\langle \mathbf{A}\mathbf{u}_o, \mathbf{v} \rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E}\delta, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

ovvero

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u}_o - \delta), \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle - \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

In virtù della simmetria della rigidezza elastica  $\mathbf{E} \in \mathbf{L}(\mathcal{H}; \mathcal{H})$ , il primo membro risulta essere la derivata direzionale del funzionale quadratico completo:

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) := \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u} - \delta), \mathbf{B}\mathbf{u} - \delta \rangle - \langle \ell, \mathbf{u} \rangle \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}},$$

nel punto  $\mathbf{u}_o \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}}$  e secondo l'incremento  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ .

Il funzionale  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  *energia potenziale* è somma di due aliquote.

- Il funzionale

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{u} - \delta), \mathbf{B}\mathbf{u} - \delta \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E}\mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}},$$

è l'energia di deformazione elastica della struttura.

Infatti  $\mathbf{e} = \mathbf{B}\mathbf{u} - \delta$  è la deformazione elastica associata allo spostamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}}$  ed alla distorsione  $\delta \in \mathcal{H}$ .

- Il funzionale

$$-\langle \ell, \mathbf{u} \rangle$$

ha la struttura formale della energia potenziale del carico  $\ell \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , se considerato come sistema di forze posizionale (e cioè dipendente solo dalla configurazione) e costante.

La definizione positiva di  $\mathbf{E}$  assicura che la forma quadratica  $\langle \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle$  è semidefinita positiva e che quindi il funzionale  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  è convesso.

L'annullarsi della derivata direzionale di  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  nel punto  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  e lungo ogni variazione  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  significa che la deformata elastica  $\mathbf{u}_o$  è un punto di stazionarietà per  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  nella varietà  $\mathcal{L}_a$ .

La convessità di  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  assicura infine che ogni punto di stazionarietà in  $\mathcal{L}_a$  è un punto di minimo assoluto in  $\mathcal{L}_a$ .

La deformata elastica  $\mathbf{u}_o \in \mathcal{L}_a$  può quindi essere caratterizzata come punto di minimo assoluto del funzionale  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$ :

$$\boxed{\mathbf{u}_o = \arg \min \{\mathbf{P}(\mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in \mathcal{L}_a\}.}$$

Il risultato può essere enunciato affermando che:

La deformata elastica di una struttura costituisce un punto di minimo assoluto per il funzionale energia potenziale nell'insieme degli spostamenti ammissibili.

*Principio di minimo della E.P.*

La condizione di minimo della *E.P.* permette quindi di individuare tra tutte le deformate ammissibili quelle in equilibrio elastico. Il punto di minimo è unico se non vi sono spostamenti *rigidi* compatibili.

**Osservazione 4.1.** Nell'enunciato del principio della minima *E.P.* il lavoro virtuale del carico per uno spostamento ammissibile viene spesso interpretato come l'opposto della variazione di una energia potenziale.

Pertanto il funzionale viene detto *energia potenziale totale* (*E.P.T.*) in quanto somma dell'energia elastica e di quella potenziale dei carichi.

Tale terminologia è in effetti assolutamente da evitare in quanto ingenera nel lettore il dubbio che i risultati di cui trattasi siano condizionati dall'essere valida la proprietà di conservatività delle forze esterne.

Nell'ambito della teoria linearizzata delle strutture, in cui si fa riferimento ad un'unica configurazione di riferimento per imporre l'equilibrio, ogni discorso sulla conservatività delle forze esterne è del tutto priva di significato.

Il concetto stesso di conservatività, e quindi di esistenza di una energia potenziale, richiede infatti di verificare se il lavoro virtuale del sistema di forze sia o meno nullo quando la struttura compie un arbitrario percorso chiuso nello spazio delle configurazioni.

Ciò è del tutto impossibile se si prescinde dall'assegnare la legge con cui le forze esterne variano in conseguenza di un cambiamento di configurazione della struttura. ■

## 4.2. Energia potenziale complementare

Il secondo principio di estremo è noto come principio della *minima energia complementare* ed è associato alla soluzione del problema dell'equilibrio elastico in termini di tensioni.

La condizione di congruenza per il campo di deformazione totale  $\varepsilon_o \in \mathcal{H}$  della struttura si scrive nella forma variazionale

$$\langle \tau, \varepsilon_o - \mathbf{B}\mathbf{w} \rangle = 0, \quad \forall \tau \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

in cui

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \{\sigma \in \mathcal{S} \mid \mathbf{B}'\sigma \in \mathcal{R}\},$$

è il sottospazio delle tensioni autoequilibrate. Denotando con  $\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1} \in L(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  l'operatore *cedevolezza elastica*, si può esprimere la deformazione totale  $\varepsilon_o \in \mathcal{H}$  in termini di tensioni e di distorsioni impresse

$$\varepsilon_o = \mathbf{e}_o + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}\sigma_o + \boldsymbol{\delta},$$

dove  $\sigma_o \in \mathcal{H}$  è il campo di tensioni in soluzione.

Denotando con

$$\mathcal{S}_\ell := \{\sigma \in \mathcal{H} : (\sigma, \mathbf{B}\mathbf{v}) = (\ell, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\},$$

la varietà affine delle tensioni in equilibrio col carico  $\ell$ , la condizione di equilibrio impone allora che  $\sigma_o \in \mathcal{S}_\ell$ .

La condizione variazionale di congruenza si può quindi riscrivere

$$\langle \tau, \mathbf{C}\sigma_o + \boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}\mathbf{w} \rangle = 0, \quad \sigma_o \in \mathcal{S}_\ell, \quad \forall \tau \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}.$$

In virtù della simmetria della cedevolezza elastica  $\mathbf{C}$ , il primo membro risulta essere la derivata direzionale del funzionale quadratico completo

$$\mathbf{P}^C(\sigma) = \frac{1}{2} \langle \sigma, \mathbf{C}\sigma \rangle + \langle \sigma, \boldsymbol{\delta} \rangle - \langle \sigma, \mathbf{B}\mathbf{w} \rangle, \quad \sigma \in \mathcal{S}_\ell,$$

nel punto  $\sigma_o \in \mathcal{S}_\ell$  e secondo l'incremento  $\tau \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$ .

Il funzionale  $\mathbf{P}^C(\sigma)$  prende il nome di *energia potenziale complementare* in quanto il funzionale quadratico

$$\frac{1}{2} \langle \sigma, \mathbf{C}\sigma \rangle, \quad \sigma \in \mathcal{S}_\ell,$$

rappresenta l'energia elastica complementare nella struttura, in presenza del campo di tensioni  $\sigma \in \mathcal{S}$ .

Osserviamo che per  $\sigma \in \mathcal{S}_\ell$  si ha  $\mathbf{B}'\sigma - \ell \in \mathcal{R}$ .

Ponendo quindi  $\mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} - \ell$  il funzionale  $\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma})$ , a meno del termine costante  $-\langle \ell, \mathbf{w} \rangle$  si può riscrivere

$$\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \langle \mathbf{r}(\boldsymbol{\sigma}), \partial \mathbf{w} \rangle,$$

in cui l'ultimo termine rappresenta il lavoro virtuale delle reazioni vincolari, in equilibrio con lo stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma}$ , per i relativi cedimenti.

La definizione positiva di  $\mathbf{C}$  assicura che la forma quadratica  $\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma} \rangle$  è definita positiva e che quindi il funzionale  $\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma})$  è strettamente convesso.

L'annullarsi della derivata direzionale di  $\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma})$  nel punto  $\boldsymbol{\sigma}_o$  e lungo ogni variazione  $\tau \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  significa che il campo di tensioni  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \mathcal{S}_\ell$  è un punto di stazionarietà per  $\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma})$  nella varietà  $\mathcal{S}_\ell$ .

La stretta convessità di  $\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma})$  assicura infine che tale punto di stazionarietà in  $\mathcal{S}_\ell$  è il punto di minimo assoluto in  $\mathcal{S}_\ell$ .

Il campo di tensioni in equilibrio elastico  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \mathcal{S}_\ell$  può quindi essere caratterizzato come punto di minimo assoluto del funzionale  $\mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma})$  in  $\mathcal{S}_\ell$ :

$$\boldsymbol{\sigma}_o = \arg \min \{ \mathbf{P}^C(\boldsymbol{\sigma}) \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_\ell \}.$$

Il risultato può essere enunciato affermando che:

Il campo di tensioni in equilibrio elastico in una struttura costituisce un punto di minimo assoluto per il funzionale energia potenziale complementare nell'insieme dei campi di tensione in equilibrio col carico.

*Principio di minimo della E.P.C.*

La condizione di minimo della E.P.C. permette quindi di individuare tra tutti i campi di tensione equilibrati quello cui si associa una deformazione elastica che, sommata alle distorsioni impresse, risulta congruente.

**Osservazione 4.2.** Come si mostrerà nel capitolo VI, i funzionali che compaiono nel principio della minima energia potenziale e nel principio della minima energia complementare non sono tra loro complementari.

Per trasformare un problema elastico, posto in termini di spostamenti, in uno complementare, posto in termini di sforzi, vanno infatti seguite precise *regole di complementarietà* che sono esplicitate e discusse in dettaglio nel capitolo VI. ■

## 5. ONDE ELASTICHE

L'equazione differenziale del moto di un mezzo elastico isotropo ed omogeneo si deduce dall'equazione differenziale di equilibrio della sezione 2.10 (p. 76) sommando al campo di forze di massa  $\mathbf{b}$  il campo di forze d'inerzia  $-\rho \ddot{\mathbf{u}}$ .

Si perviene così all'equazione del moto di NAVIER

$$a) \quad \frac{G}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\lambda + G}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \ddot{\mathbf{u}},$$

che, essendo

$$\lambda + G = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \frac{\lambda + G}{G} = \frac{1}{1-2\nu},$$

si può anche scrivere

$$a) \quad \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{G} \mathbf{b} = \frac{\rho}{G} \ddot{\mathbf{u}}.$$

Tramite l'identità differenziale

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u},$$

l'equazione del moto si può scrivere nella forma di LAMÉ-CLAPEYRON

$$b) \quad \frac{\lambda + 2G}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{G}{\rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \ddot{\mathbf{u}},$$

ovvero

$$c) \quad \frac{\lambda + 2G}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\lambda + G}{\rho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \ddot{\mathbf{u}},$$

Definendo le costanti

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

l'equazione del moto si può scrivere

$$b) \quad c_l^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \ddot{\mathbf{u}},$$

ed introducendo gli *operatori d'onda*

$$\square_l \mathbf{u} = c_l^2 \Delta \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}}, \quad \square_t \mathbf{u} = c_t^2 \Delta \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}},$$

si perviene alla forma

$$a) \quad \square_t \mathbf{u} + (c_l^2 - c_t^2) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \mathbf{o},$$

Si assuma ora che  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ .

Dalle equazioni *a)* e *c)* segue che

$$\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{o} \Rightarrow \square_l \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \mathbf{o} \Rightarrow \square_t \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

- La costante  $c_l$  è la *velocità irrotazionale* o *velocità longitudinale* del suono,
- la costante  $c_t$  è la *velocità isocora* o *velocità trasversale* del suono.

Si noti che risulta

$$\frac{c_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}.$$

Per  $\nu = 1/3$  si ha quindi che  $c_l = 2c_t$ . Per  $0 < \nu < 1/2$  si ha che  $c_l > \sqrt{2}c_t$

Operando sull'equazione *b)* con l'operatore  $\text{div}$  e sull'equazione *a)* con l'operatore  $\text{rot}$  si ottiene che

$$i) \quad \square_l \text{div } \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

$$ii) \quad \square_t \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Dunque

- la divergenza  $\text{div } \mathbf{u}$  del campo di spostamento soddisfa l'equazione delle onde con *velocità irrotazionale*  $c_l$ ,
- il rotore  $\text{rot } \mathbf{u}$  del campo di spostamento soddisfa l'equazione delle onde con *velocità isocora*  $c_t$ .

Applicando quindi l'operatore  $\square_l$  all'equazione *a)* con  $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ , si ottiene che

$$\square_l (c_l^2 \Delta \mathbf{u} - \ddot{\mathbf{u}}) + \square_l c_l^2 \text{grad div } \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Osservando poi che per la *i)*

$$\square_l c_l^2 \text{grad div } \mathbf{u} = c_l^2 \text{grad} (\square_l \text{div } \mathbf{u}) = \mathbf{o},$$

si giunge alla relazione

$$\square_l \square_t \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

che costituisce l'analogo dinamico della proprietà di biarmonicità del campo di spostamenti elasticci stabilita nella proposizione 2.10 (p. 79).

Lo studio delle onde elastiche può essere anche condotto facendo ricorso alla decomposizione di un campo vettoriale mediante il teorema di HELMHOLTZ (vedi Tomo Zero [33] proposizione IX.1.3 (p. 145)).

Il teorema di HELMHOLTZ assicura che il campo di spostamenti ed il campo di forze di massa ammettono le decomposizioni

$$\begin{aligned} i) \quad & \mathbf{u} = \operatorname{grad} \phi + \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0, \\ ii) \quad & -\frac{\mathbf{b}}{\rho} = \operatorname{grad} \alpha + \operatorname{rot} \boldsymbol{\beta}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\beta} = 0, \end{aligned}$$

con  $\phi$  e  $\alpha$  potenziali scalari e  $\boldsymbol{\psi}$  e  $\boldsymbol{\beta}$  potenziali vettori (solenoidali).

Sostituendo nell'equazione del moto nella forma di LAMÉ-CLAPEYRON

$$b) \quad c_l^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \ddot{\mathbf{u}},$$

si ottiene l'equazione

$$\operatorname{grad} (c_l^2 \Delta_1 \phi - \ddot{\phi} - \alpha) - \operatorname{rot} (c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{\psi} + \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{o},$$

Dall'identità differenziale

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u},$$

si ottiene quindi che

$$\operatorname{grad} (c_l^2 \Delta_1 \phi - \ddot{\phi} - \alpha) + \operatorname{rot} (c_t^2 \Delta_2 \boldsymbol{\psi} - \ddot{\boldsymbol{\psi}} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{o},$$

ovvero

$$\operatorname{grad} (\square_l \phi - \alpha) + \operatorname{rot} (\square_t \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{\beta}) = \mathbf{o}.$$

L'equazione del moto è quindi soddisfatta se sono soddisfatte le equazioni

$$\square_l \phi = \alpha,$$

$$\square_t \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\beta},$$

rispettivamente dette *equazione scalare del moto* e *equazione vettoriale del moto*.

A SOMIGLIANA<sup>20</sup> è dovuta la dimostrazione che, viceversa, se  $\mathbf{u}$  è soluzione dell'equazione del moto allora i potenziali scalare e vettore definiti dalle *i)* e *ii)* soddisfano le equazioni scalare e vettoriale del moto [17], [29].

---

<sup>20</sup> CARLO SOMIGLIANA (1860-1955). Iniziò gli studi universitari a Pavia dove fu allievo di E. BELTRAMI. Passò poi alla Scuola Normale di Pisa dove ebbe per maestri BETTI e DINI e come condiscepolo e amico V. VOLTERRA. Laureatosi nel 1881, nel 1887 iniziò l'insegnamento come assistente di Analisi Matematica all'Università di Pavia e nel 1892 fu nominato professore di Fisica Matematica. Nel 1903 passò a Torino, ove rimase sino al collocamento a riposo nel 1935. SOMIGLIANA fu un fisico-matematico del tipo più classico, e di lui si può ripetere quel che egli stesso scrisse a proposito di V. VOLTERRA: è un classico puro, rimasto fedele alla scuola di BETTI e di BELTRAMI nella quale era cresciuto. La sua Fisica Matematica, pur tanto ricca di originalità, è affine a quella di HELMHOLTZ, di LORD KELVIN, di KIRCHHOFF.

Dal teorema di HELMHOLTZ segue che il campo di spostamenti può essere univocamente decomposto come somma di due aliquote, una solenoidale e l'altra irrotazionale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_t, \quad \text{con} \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}_l = \mathbf{o}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0.$$

Analogamente, posto  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/\rho$ , si può effettuare la decomposizione

$$\bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}}_l + \bar{\mathbf{b}}_t, \quad \text{con} \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{b}}_l = \mathbf{o}, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{b}}_t = 0.$$

L'equazione del moto

$$b) \quad c_l^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - c_t^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} + \bar{\mathbf{b}} = \ddot{\mathbf{u}},$$

si scrive

$$b) \quad \square_l \mathbf{u}_l + \bar{\mathbf{b}}_l + \square_t \mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{b}}_t = \mathbf{o}.$$

Operando prima con la divergenza e poi con il rotore l'equazione del moto fornisce le condizioni

$$\operatorname{div} (\square_l \mathbf{u}_l + \bar{\mathbf{b}}_l) = 0,$$

$$\operatorname{rot} (\square_t \mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{b}}_t) = \mathbf{o}.$$

Si osservi quindi che

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_l = \mathbf{o}, \quad \operatorname{rot} \bar{\mathbf{b}}_l = \mathbf{o} \Rightarrow \operatorname{rot} (\square_l \mathbf{u}_l + \bar{\mathbf{b}}_l) = \mathbf{o},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_t = 0, \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{b}}_t = 0 \Rightarrow \operatorname{div} (\square_t \mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{b}}_t) = 0,$$

e che un campo vettoriale in  $\mathcal{E}^3$  è univocamente determinato dai relativi campi di divergenza e di rotore. Le componenti, solenoidale ed irrotazionale, del campo di spostamenti soddisfano dunque rispettivamente le equazioni del moto

$$\square_l \mathbf{u}_l + \bar{\mathbf{b}}_l = \mathbf{o},$$

$$\square_t \mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{b}}_t = \mathbf{o}.$$

Le onde soluzioni della prima equazione sono le *onde volumetriche*, quelle soluzioni della seconda equazione sono le *onde di taglio*.

**Osservazione 5.1.** In sismologia le onde che si propagano con velocità  $c_l$  sono dette *onde primarie* (onde P), quelle con velocità  $c_t$  sono dette *onde secondarie* (onde S). ■

### 5.1. Onde progressive

Un campo di spostamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  della forma

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a} \sin(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct), \quad \|\mathbf{m}\| = 1,$$

è detto un'onda progressiva sinusoidale di ampiezza  $\mathbf{a}$ , direzione  $\mathbf{m}$ , e velocità  $c$ .

- Si ha un'onda longitudinale se il vettore ampiezza è parallelo alla direzione di propagazione, cioè se  $\mathbf{a} \times \mathbf{m} = \mathbf{0}$ .
- Si ha invece un'onda trasversale se il vettore ampiezza è ortogonale alla direzione di propagazione, cioè se  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{m} = 0$ .

Si ponga ora il compito di determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinché il campo di spostamento soddisfi l'equazione del moto di NAVIER-CAUCHY:

$$a) \quad \frac{G}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\lambda + G}{\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\mathbf{b}}{\rho} = \ddot{\mathbf{u}}.$$

A tal fine si osservi che, posto

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct,$$

la derivata direzionale secondo  $\mathbf{h}$  è data da

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{h} &= \mathbf{a} \operatorname{grad} [\sin(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} - ct)] \cdot \mathbf{h} = \mathbf{a} \cos \varphi(\mathbf{r}, t) (\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}) = \\ &= \cos \varphi(\mathbf{r}, t) c \mathbf{h}. \end{aligned}$$

ed il gradiente del campo è quindi

$$\operatorname{grad} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \cos \varphi(\mathbf{r}, t) (\mathbf{a} \otimes \mathbf{m}).$$

Si ha dunque che

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}) \cos \varphi(\mathbf{r}, t),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = (\mathbf{m} \times \mathbf{a}) \cos \varphi(\mathbf{r}, t).$$

in quanto

- $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{tr} \operatorname{grad} \mathbf{u}$  e  $\operatorname{tr} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{m}) = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{a})$ ,
- $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 2 \text{ axial emi } \operatorname{grad} \mathbf{u}$  e  $(\mathbf{m} \times \mathbf{a}) = \text{axial emi } (\mathbf{a} \otimes \mathbf{m})$ .

Dunque l'onda progressiva è longitudinale se  $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \mathbf{0}$  e trasversale se  $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ .

Si ha inoltre che

$$\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{a} \sin \varphi(\mathbf{r}, t),$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{m} \sin \varphi(\mathbf{r}, t) = -(\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \mathbf{a} \sin \varphi(\mathbf{r}, t),$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = -c^2 \mathbf{a} \sin \varphi(\mathbf{r}, t).$$

Dunque il campo di spostamento soddisfa l'equazione del moto se e solo se

$$a) \quad \left[ \frac{G}{\rho} \mathbf{I} + \frac{\lambda + G}{\rho} (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) \right] \mathbf{a} = c^2 \mathbf{a}.$$

Definendo il *tensore acustico*

$$\mathbf{A}(\mathbf{m}) := c_l^2 (\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}) + c_t^2 (\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}),$$

l'equazione del moto impone che il vettore  $\mathbf{a}$  ampiezza dell'onda sia una direzione principale per il *tensore acustico*:

$$\mathbf{A}(\mathbf{m}) \mathbf{a} = c^2 \mathbf{a}.$$

Si osservi che

- il tensore simmetrico  $\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$  è il proiettore ortogonale nella direzione del versore  $\mathbf{m}$  che individua la direzione di propagazione,
- il tensore simmetrico  $\mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$  è il proiettore ortogonale sul piano perpendicolare alla direzione di propagazione.

Dall'espressione del tensore acustico, si deduce che esistono due autospazi:

- l'autospazio monodimensionale generato dalla direzione di propagazione  $\mathbf{m}$  a cui corrisponde l'autovalore  $c_l^2$ ,
- l'autospazio bidimensionale ortogonale alla direzione di propagazione a cui corrisponde l'autovalore  $c_t^2$ .

Si può dunque concludere che

**Proposizione 5.1. Onde progressive.** *In un continuo elastico lineare, omogeneo ed isotropo esistono solo due tipi di onde progressive sinusoidali. Le onde longitudinali che hanno velocità irrotazionale e le onde trasversali che hanno velocità isocora.*  $\square$

In un mezzo elastico anisotropo le onde non sono in generale né longitudinali né trasversali e la velocità delle onde progressive cambia al variare della direzione di propagazione.

### ■ Onde superficiali.

Nella vicinanza della superficie di un corpo si possono propagare onde elastiche che non penetrano all'interno, smorzandosi secondo una legge esponenziale con la distanza dalla superficie. Le *onde superficiali* sono anche dette *onde di RAYLEIGH*<sup>21</sup> (vedi ad es. [26]).

---

<sup>21</sup> JOHN WILLIAM STRUTT LORD RAYLEIGH (1842-1919). *On waves propagated along the plane*

## RIFERIMENTI

1. C.L.M.H. NAVIER, Sur le Lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, *Bull. Soc. Philomath.*, 177-181 (1821).
2. C.L.M.H. NAVIER, Mémoire sur le lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques, *Mèm. Acad. Sci. Inst. France* (2) **7**, 375-393 (1827).
3. A.L. CAUCHY, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique, *Ex. de Mathematique*, **3**, 160-187 = Œuvres (2) **8**, 195-226 (1828).
4. S.D. POISSON, Mémoire sur l'équilibre et le mouvement de corps élastiques, *Mèm. Acad. Sci. Inst. France* (2) **8**, 357-570 (1828).
5. S.D. POISSON, Addition au mémoire sur l'équilibre et le mouvement de corps élastiques, *Mèm. Acad. Sci. Inst. France* (2) **8**, 623-627 (1828).
6. G. GREEN, An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, Nottingham (1828).
7. G. LAMÉ, P.E. CLAPEYRON, Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes, *Mém. divers savants*, (2) **4**, 465-562 (1833).
8. P.E. CLAPEYRON, Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur, *J. École Polytech.*, **15**, 93-132 (1834).
9. G. GREEN, On the propagation of light in crystallized media, *Trans. Cambridge Phil. soc.*, **7**, 1, 121-140 (1839) = Papers, 293-311 (1841).
10. G.G. STOKES, On the theories of the internal friction of fluids in motion and of the equilibrium and motion of elastic solids, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, **8**, 287-319 (1845).
11. G. KIRCHHOFF, Über die Gleichungen des Gleichgewicht und die Bewegung eines elastischen Körpers bei nicht unendlich Verschiebungen seiner Theile, *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien*, **9**, 762-773 (1852).
12. G. LAMÉ, Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité, Paris (1852), 2<sup>a</sup> ed. 1866.
13. J.C. MAXWELL, On reciprocal figures, frames and diagrams of forces, *Trans.Roy.Soc.Edinburgh.* **26** = Papers **2**, 161-207, (1870).
14. E. BETTI, Teoria dell'Elasticità. *Nuovo Cimento*. **2** = Opere **2**, 291-390, (1872).
15. E. BETTI, Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi elastici. *Ann. Mat.* (2) **6** 101-111 = Opere **2**, 379-390, (1874).
16. E. BELTRAMI, Osservazioni sulla nota precedente, *Atti Acad. Lincei Rend.*, (5) **1**, 141-142 = Opere **4**, 190-223 (1892).
17. C. SOMIGLIANA, Sulle espressioni analitiche generali dei movimenti oscillatori, *Atti.Accad.Lincei Red.*, (5) **1**, 111-119 (1892).

---

*surface of an elastic solid*, 1885. RAYLEIGH è stato uno dei maggiori fisici matematici di ogni tempo. A lui è dovuta la teoria della diffrazione della luce che ha spiegato correttamente perché il cielo appare azzurro, la scoperta nel 1895 del primo gas inerte, l'argon, che gli valse il Premio NOBEL nel 1904, importanti contributi nella teoria delle onde e le prime idee sulla teoria dei solitonni. Il suo famoso lavoro *The Theory of Sound* fu scritto durante un viaggio in Egitto nel 1877-78. Dal 1879 to 1884 RAYLEIGH fu il secondo CAVENDISH professor of experimental physics a Cambridge, succedendo a MAXWELL.

18. L. DONATI, Ulteriori osservazioni intorno al Teorema del Menabrea, *Mem. Accad. Sci. Bologna*, (5) **4**, 449-474 (1894).
19. J.H. MICHELL, On the direct determination of stress in an elastic solid, with applications to the theory of plates, *Proc. Lond. Math. Soc. Bologna*, **31**, 100-124 (1900).
20. O. D. KELLOGG, Foundation of Potential Theory, Springer, Berlin (1929).
21. S. BANACH, Théorie des Opérations Linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw (1932). Reprinted by Chelsea, New York (1955)
22. A. E. H. LOVE, A Treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York, (1949).
23. I. S. SOKOLNIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, Mc-GRAW-HILL, (1956).
24. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, The Classical Field Theories, *Encyclopædia of Physics*, vol. III/1, 226-793 Springer-Verlag, Berlin (1960).
25. J. MANDEL, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Gauthier-Villars, Paris (1966).
26. L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Théorie de l'Élasticité, Edition Mir, Moscou (1967).
27. VAINBERG, Potential Operators, (1968).
28. B.D. COLEMANN, W. NOLL, Material symmetry and thermostatic inequalities in finite elastic deformations, *Arch. Rational Mech. anal.*, **15** 87-111,(1964).
29. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopædia of Physics*, vol. VIa/2, , 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).
30. G. ROMANO ET AL., A potential theory for monotone multi-valued operators, *Quat. Appl. Math. Anal.*, Vol 1.1, **4**, 613-631, (1993).
31. G. ROMANO, Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2001).
32. G. ROMANO, Theory of structural models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2001).
33. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
34. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).

## III – ELASTICITA' GENERALIZZATA

La teoria dell'elasticità rappresenta un capitolo fondamentale della Fisica Matematica e conduce a risultati che trovano applicazioni in moltissimi altri contesti apparentemente diversi ma che con essa condividono peculiari proprietà formali.

Intorno alla metà del ventesimo secolo, partendo dai primi importanti contributi di FENCHEL [5], [6], si è andata sviluppando una nuova disciplina, l'*Analisi Convessa*, che consente la trattazione di modelli descritti da mappe multivoche.

In questo capitolo, dopo una presentazione degli strumenti essenziali dell'Analisi Convessa che include anche contributi originali dell'autore [38], [40], si mostra come sia possibile discutere una formulazione generalizzata del problema dell'equilibrio elastico.

Il problema dell'esistenza di una soluzione del problema elastico generalizzato conduce naturalmente allo sviluppo di una teoria che presenta in forma geometrica risultati e metodi che fanno parte del capitolo della meccanica delle strutture detta *Analisi Limite*.

La generalità della trattazione e gli strumenti illustrati nelle sezioni introduttive consentono di sviluppare in modo diretto e completo una formulazione variazionale.

Si mostra infine come il quadro teorico possa essere direttamente applicato all'analisi di modelli strutturali caratterizzati da comportamenti costitutivi anelastici ed in particolare a modelli plastici, viscosi e viscoplastici.

La teoria viene sviluppata seguendo un percorso che procede dal caso più generale introducendo via via ipotesi aggiuntive che consentono di ottenere risultati particolari.

### 1. LEGAMI MULTIVOCI

Si consideri un modello strutturale definito su di un dominio  $\Omega$  e siano  $\mathcal{D}$  ed  $\mathcal{S}$  spazi lineari in dualità cui appartengono rispettivamente i campi di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  ed i campi di sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ .

La topologia negli spazi  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  è quella di HILBERT definita dal prodotto interno in  $L^2(\Omega)$ <sup>6</sup>:

$$\langle\langle \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle\rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 \, dv, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathcal{D},$$

$$\langle\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle\rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \, dv, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in \mathcal{S}.$$

Dal punto di vista topologico ed algebrico i due spazi possono dunque essere identificati con uno spazio pivot

$$\mathcal{H} = \mathcal{D} = \mathcal{S} = L^2(\Omega)^6.$$

E' però opportuno adoperare notazioni distinte per gli spazi di HILBERT  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$  per evidenziare il diverso significato meccanico dei campi ad essi afferenti e pertanto adoperare per il prodotto scalare tra elementi di  $\mathcal{D}$  e di  $\mathcal{S}$  il simbolo che denota in generale il prodotto di dualità, ponendo

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, dv.$$

Si premettono alcune definizioni generali. Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio lineare.

- Un *insieme lineare*  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{X}$  è caratterizzato dalla proprietà

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{L} \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Re \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{L}.$$

- Un *insieme affine*  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$  è caratterizzato dalla proprietà

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A} \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Re \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{A}.$$

- Un *insieme convesso*  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{X}$  è caratterizzato dalla proprietà

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S} \\ \alpha_1, \alpha_2 \in \Re \\ \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 \in \mathcal{S}.$$

- Un *cono*  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{X}$  è caratterizzato dalla proprietà

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x} \in \mathcal{C} \\ \alpha \in \Re \\ \alpha \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \mathbf{x} \in \mathcal{C}.$$

- Il *grafico di una relazione* nello spazio prodotto  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}$  è un sottoinsieme

$$\mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{S}.$$

- Ad ogni relazione  $\mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{S}$  si associano due *mappe multivoche*

$$\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}, \quad \mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D},$$

definite da

$$\mathcal{E}(\varepsilon) := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : \{\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})\},$$

$$\mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) := \{\varepsilon \in \mathcal{D} : \{\varepsilon, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})\}.$$

I *domini efficaci*  $\text{dom } \mathcal{E}$  e  $\text{dom } \mathcal{E}^{-1}$  sono definiti dalle condizioni

$$\text{dom } \mathcal{E} := \{\varepsilon \in \mathcal{D} : \mathcal{E}(\varepsilon) \neq \emptyset\},$$

$$\text{dom } \mathcal{E}^{-1} := \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}) \neq \emptyset\}.$$

La *proprietà di monotonia* di un grafico si definisce estendendo ad un contesto generale le proprietà essenziali di un diagramma cartesiano che venga tracciato sul foglio  $\mathcal{R}_2$  effettuando sempre incrementi dello stesso segno sui due assi.

Il grafico può presentare tratti orizzontali e tratti verticali ma non tratti decrescenti, come illustrato in fig. 1.1.

La *proprietà di monotonia massimale* di un grafico in  $\mathcal{R}_2$  può essere descritta in modo *naïve* richiedendo che il diagramma venga tracciato senza mai staccare la matita dal foglio e prolungando idealmente il diagramma in entrambi i versi, così che esso non abbia estremi.

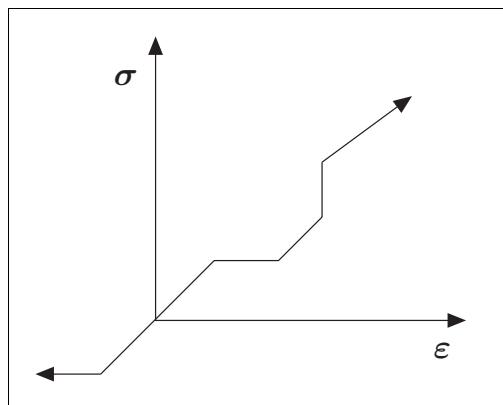


Fig. 1.1 Diagramma  $\varepsilon - \sigma$

Le definizioni formali sono le seguenti.

- La *proprietà di monotonia* richiede che per ogni coppia di punti  $\{\varepsilon_1, \sigma_1\}$  e  $\{\varepsilon_2, \sigma_2\}$  di  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}$  appartenenti al grafico risulti:

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1, \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \rangle \geq 0.$$

- La proprietà di massimalità impone che, se un punto  $\{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$  può essere aggiunto al grafico senza invalidare la proprietà di monotonia, allora tale punto deve appartenere al grafico:

$$\langle \sigma - \sigma_g, \varepsilon - \varepsilon_g \rangle \geq 0, \quad \forall \{\varepsilon_g, \sigma_g\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}) \Rightarrow \{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}).$$

**Osservazione 1.1.** La dimostrazione dell'esistenza di almeno un grafico monotono massimale fa ricorso al *lemma di ZORN* (o all'*Assioma della Scelta*), pilastro logico fondamentale nella costruzione della matematica moderna. A tal fine si osservi che

- l'insieme  $\mathcal{G}_{\text{mono}}$  dei grafici monotoni è infatti parzialmente ordinato dalla relazione di inclusione  $\subseteq$  ed inoltre
- ogni sottoinsieme  $\{\mathcal{G}_\alpha \in \mathcal{G}_{\text{mono}} \mid \alpha \in \mathcal{A}\}$  totalmente ordinato ammette come estremo superiore l'unione

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{G}_\alpha.$$

Il *lemma di ZORN* assicura allora che l'insieme  $\mathcal{G}_{\text{mono}}$  contiene almeno un elemento massimale. ■

**Osservazione 1.2.** La monotonia del legame multivoco  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  assicura che lungo un qualsiasi segmento

$$(1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2 \subset \text{dom } \mathcal{E}, \quad t \in [0, 1],$$

esiste l'integrale:

$$\int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \langle \mathcal{E}(\varepsilon), d\varepsilon \rangle := \int_0^1 \langle \mathcal{E}((1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2), \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \rangle dt.$$

Si noti che nella valutazione dell'integrale risulta ininfluente la scelta di una particolare determinazione del legame multivoco.

Infatti il legame multivoco  $f : \mathfrak{R} \cup \{+\infty\} \mapsto \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$  definito da

$$f(t) := \langle \mathcal{E}((1-t)\varepsilon_1 + t\varepsilon_2), \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \rangle,$$

è monotono sull'intervallo  $[0, 1]$  e si può mostrare che l'insieme di punti di  $[0, 1]$  in cui  $f$  è multivoco è finito o numerabile e pertanto ha misura nulla secondo LEBESGUE [38]. Il valore ivi attribuito ad un rappresentante univoco di  $f(t)$  è quindi inessenziale nella valutazione dell'integrale. ■

### 1.1. Legami conservativi

- La proprietà di conservatività del legame  $\mathcal{E}$  richiede che sia nullo il lavoro associato al legame  $\mathcal{E}$  lungo una qualsiasi polilinea chiusa  $\overset{\circ}{\Pi}_\varepsilon$  contenuta in  $\text{dom } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$ . Deve quindi risultare

$$\oint_{\overset{\circ}{\Pi}_\varepsilon} \langle \mathcal{E}(\varepsilon), d\varepsilon \rangle = 0, \quad \forall \overset{\circ}{\Pi}_\varepsilon \in \mathcal{D}.$$

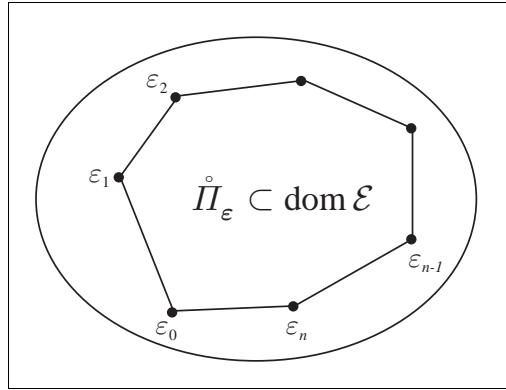


Fig. 1.2

Si consideri ora una  $n$ -polilinea  $\Pi_\varepsilon$  in  $\mathcal{D}$  e sia  $i = 0, \dots, n$  l'indice dei suoi vertici. Si ponga inoltre la seguente definizione.

- Un raffinamento di  $\Pi_\varepsilon$  è una  $m$ -polilinea ( $m \geq n$ ) contenuta in  $\Pi_\varepsilon$ .

In virtù della monotonia del legame  $\mathcal{E}$  (vedi fig. 1.3), sussiste la seguente

- formula fondamentale per l'integrale lungo una polilinea  $\Pi_\varepsilon \subset \text{dom } \mathcal{E}$ :

$$\sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_i, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rangle \right\} = \int_{\Pi_\varepsilon} \langle \mathcal{E}(\varepsilon), d\varepsilon \rangle = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_i, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rangle \right\},$$

dove le  $\sum$  si riferiscono ad arbitrari raffinamenti di  $\Pi_\varepsilon$  e la scelta di  $\sigma_i \in \mathcal{E}(\varepsilon_i)$  è inessenziale.

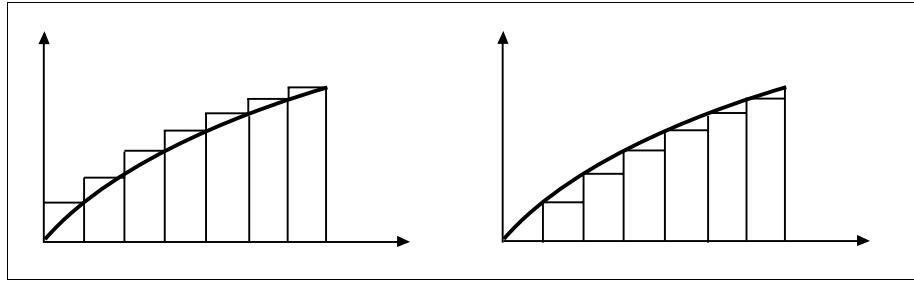


Fig. 1.3

- Un grafico gode della proprietà di *monotonia ciclica* se comunque si assegni una  $n$ -polilinea chiusa di vertici  $\{\varepsilon_i\} \subset \mathcal{D}$  con  $i = 0, \dots, n$ , ( $\varepsilon_n = \varepsilon_0$ ) ed una corrispondente  $n$ -upla di vettori duali  $\sigma_i \in \mathcal{E}(\varepsilon_i) \subset \mathcal{S}$ , sussistono le diseguaglianze:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_i, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rangle \leq 0, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_{i+1}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rangle \geq 0.$$

Sussistono inoltre le seguenti proprietà.

**Proposizione 1.1. Equivalenza tra monotonia ciclica e conservatività.** *Un legame multivoco  $\mathcal{E}$  è conservativo se e solo se gode della proprietà di monotonia ciclica.*

**Dim.** Dalla formula fondamentale che definisce l'integrale lungo una polilinea si evince che l'annullarsi dell'integrale lungo una qualsiasi polilinea chiusa  $\overset{\circ}{\Pi}_\varepsilon \subset \text{dom } \mathcal{E}$  implica la proprietà di monotonia ciclica.

Viceversa la monotonia ciclica del legame  $\mathcal{E}$  implica la conservatività. Infatti l'integrale lungo una qualsiasi polilinea chiusa  $\overset{\circ}{\Pi}_\varepsilon \subset \text{dom } \mathcal{E}$  è nullo in quanto estremo superiore di un insieme di numeri non positivi ed estremo inferiore di un insieme di numeri non negativi.  $\square$

**Proposizione 1.2. Monotonia ciclica del legame inverso.** *Un legame  $\mathcal{E}$  è ciclicamente monotono se e solo tale è il legame inverso  $\mathcal{E}^{-1}$ .*

**Dim.** Per ogni  $n$ -upla di punti  $\{\varepsilon_i, \sigma_i\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ , con  $i = 0, \dots, n$  e  $\{\varepsilon_n, \sigma_n\} = \{\varepsilon_0, \sigma_0\}$ , valgono le egualianze

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_i, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rangle &= - \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_{i+1} - \sigma_i, \varepsilon_{i+1} \rangle, \\ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_{i+1}, \varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i \rangle &= - \sum_{i=0}^{n-1} \langle \sigma_{i+1} - \sigma_i, \varepsilon_i \rangle. \end{aligned}$$

Ne consegue che la monotonia ciclica del legame  $\mathcal{E}$  implica quella del legame inverso  $\mathcal{E}^{-1}$  e cioè che per ogni  $n$ -upla di vettori  $\{\sigma_i\}$  con  $i = 0, \dots, n$  ed  $\sigma_n = \sigma_0$ , sussistono

le diseguaglianze:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle \leq 0; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \rangle \geq 0,$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_i)$ . Si può quindi attribuire la proprietà di *monotonia ciclica* al grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ .  $\square$

**Proposizione 1.3. Conservatività del legame inverso.** *Un legame  $\mathcal{E}$  è conservativo se e solo se tale è il legame inverso  $\mathcal{E}^{-1}$  e cioè:*

$$\oint_{\Pi_\varepsilon} \langle \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}), d\boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0 \quad \forall \dot{\Pi}_\varepsilon \in \mathcal{D} \iff \oint_{\dot{\Pi}_\sigma} \langle \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}), d\boldsymbol{\sigma} \rangle = 0 \quad \forall \dot{\Pi}_\sigma \in \mathcal{S},$$

**Dim.** Il risultato segue dalle proposizioni 1.1 e 1.2. Si può quindi attribuire la proprietà di *conservatività* al grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ .  $\square$

**Osservazione 1.3.** Ovviamente anche per l'integrale lungo una qualsiasi polilinea  $\Pi_\sigma \in \text{dom } \mathcal{E}^{-1}$  sussiste la *formula fondamentale*:

$$\sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle \right\} = \int_{\Pi_\sigma} \langle \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}), d\boldsymbol{\sigma} \rangle = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \rangle \right\}$$

dove le  $\sum$  si riferiscono ad arbitrari raffinamenti di  $\Pi_\sigma$  e la scelta di  $\boldsymbol{\varepsilon}_i \in \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}_i)$  è inessenziale.  $\blacksquare$

## 1.2. Legami elastici generalizzati

I *legami elastici generalizzati*

$$\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}, \quad \mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D},$$

sono mappe multivoche associate ad una *relazione* con *grafico*  $\mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{S}$ , che godono delle seguenti proprietà:

i)	$\mathcal{G}(\mathcal{E})$	è <i>monotono massimale</i> ,
ii)	$\mathcal{G}(\mathcal{E})$	è <i>conservativo</i> ,
iii)	$\text{dom } \mathcal{E}$ e $\text{dom } \mathcal{E}^{-1}$	sono <i>insiemi convessi</i> .

L'appartenenza di un punto  $\{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}$  al grafico della relazione elastica si esprime nei seguenti modi equivalenti

$$\{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}) \iff \sigma \in \mathcal{E}(\varepsilon) \iff \varepsilon \in \mathcal{E}^{-1}(\sigma).$$

In termini meccanici la monotonia del legame significa che la *rigidezza tangente* del materiale è sempre non negativa ed anche eventualmente infinitamente positiva. In tal senso il materiale ha quindi un comportamento *non instabile*.

## 2. POTENZIALI CONVESSI

Ad ogni grafico conservativo  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  si possono associare due

- *potenziali complementari*  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $\psi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  corrispondenti rispettivamente ai due legami conservativi

$$\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}, \quad \mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}.$$

Per studiare le proprietà dei potenziali complementari si fissi un insieme finito di punti

$$\{\varepsilon_i, \sigma_i\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D} \times \mathcal{S} \quad i = 0, \dots, n+1,$$

con  $\{\varepsilon_{n+1}, \sigma_{n+1}\} = \{\varepsilon, \sigma\}$ .

Si considerino quindi le polilinee:

- $\Pi_\varepsilon \subset \mathcal{D}$  di vertici  $\{\varepsilon_i\} \quad i = 0, \dots, n+1$ ,
- $\Pi_\sigma \subset \mathcal{S}$  di vertici  $\{\sigma_i\} \quad i = 0, \dots, n+1$ .

La proprietà di convessità dei domini efficaci  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  del grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  assicura che le polilinee  $\Pi_\varepsilon$  e  $\Pi_\sigma$  giacciono in  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  (fig.2.1).

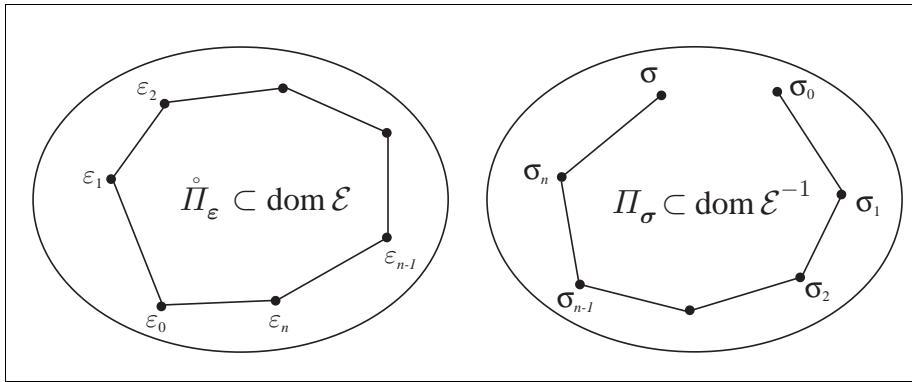


Fig. 2.1

Integrando lungo le polilinee  $\Pi_\varepsilon$  e  $\Pi_\sigma$  i potenziali complementari  $\varphi$  e  $\psi$  sono definiti sui domini di  $\mathcal{E}$  e di  $\mathcal{E}^{-1}$  dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) &= \int_{\boldsymbol{\varepsilon}_o}^{\boldsymbol{\varepsilon}} \langle \mathcal{E}(\eta), d\eta \rangle, \\ \psi(\boldsymbol{\sigma}) - \psi(\boldsymbol{\sigma}_o) &= \int_{\boldsymbol{\sigma}_o}^{\boldsymbol{\sigma}} \langle \mathcal{E}^{-1}(\tau), d\tau \rangle.\end{aligned}$$

*Potenziali complementari*

I potenziali complementari  $\varphi$  e  $\psi$  sono posti eguali a  $+\infty$  al di fuori dei rispettivi domini efficaci  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$ .

- Il *dominio efficace* di un funzionale a valori reali estesi  $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è definito da

$$\text{dom } f := \{ \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D} : f(\boldsymbol{\varepsilon}) < +\infty \}.$$

Per i potenziali complementari associati ad un grafico conservativo  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  si ha pertanto che

$$\text{dom } \varphi = \text{dom}(\mathcal{E}), \quad \text{dom } \psi = \text{dom}(\mathcal{E}^{-1}).$$

Si noti che, accettando che lo spazio dei valori dei potenziali sia il campo esteso dei numeri reali  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  si ha che

- il potenziale  $\varphi$  risulta definito su tutto lo spazio  $\mathcal{D}$ ,
- il potenziale  $\psi$  risulta definito su tutto lo spazio  $\mathcal{S}$ .

Per ottenere le espressioni dei potenziali in forma chiusa l'integrazione può essere convenientemente effettuata lungo segmenti rettilinei che uniscono il punto iniziale e quello terminale:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) = \int_0^1 \langle \mathcal{E}[\boldsymbol{\varepsilon}_o + t(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o)], \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \rangle dt,$$

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) - \psi(\boldsymbol{\sigma}_o) = \int_0^1 \langle \mathcal{E}^{-1}[\boldsymbol{\sigma}_o + t(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o)], \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_o \rangle dt.$$

L'analisi delle proprietà dei potenziali  $\varphi$  e  $\psi$  si conduce facendo ricorso alle formule fondamentali scritte in precedenza.

Sussistono dunque le seguenti *formule notevoli*.

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle \right\} \\ \text{con } \boldsymbol{\varepsilon} \in \text{dom}(\mathcal{E}) \text{ e } \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(\boldsymbol{\sigma}) - \psi(\boldsymbol{\sigma}_o) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \right\} \\ \text{con } \boldsymbol{\sigma} \in \text{dom}(\mathcal{E}^{-1}) \text{ e } \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}).\end{aligned}$$

dove le  $\sum$  si riferiscono ad arbitrari raffinamenti di  $\Pi_\varepsilon$  e di  $\Pi_\sigma$ .

- L'*epigrafo* di un funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è l'insieme dei punti dello spazio prodotto  $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$  delimitato inferiormente dal grafico del funzionale:

$$\text{epi } \varphi := \{(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \mid \alpha \geq \varphi(\boldsymbol{\varepsilon})\}.$$

- Un *funzionale convesso*  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è caratterizzato dall'avere un epigrafo convesso.
- Un *funzionale sublineare*  $p : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è caratterizzato dalle proprietà
  - i)  $p(\alpha \boldsymbol{\varepsilon}) = \alpha p(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\forall \alpha \geq 0$ ,  $\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$ , *positiva omogeneità*,
  - ii)  $p(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + p(\boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq p(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ ,  $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathcal{D}$ , *subadditività*.

Ovviamente un funzionale sublineare è convesso. Un esempio notevole di funzionale sublineare è

- una *seminorma* in uno spazio lineare  $\mathcal{D}$ , che è un funzionale caratterizzato dalle proprietà
  - i)  $p(\alpha \boldsymbol{\varepsilon}) = |\alpha| p(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$ ,
  - ii)  $p(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + p(\boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq p(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2)$ ,  $\forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathcal{D}$ , *subadditività*.

Una seminorma gode delle proprietà:

$$p(\mathbf{0}) = 0,$$

$$p(\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2) \geq |p(\boldsymbol{\varepsilon}_1) - p(\boldsymbol{\varepsilon}_2)|, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathcal{D},$$

$$p(\boldsymbol{\varepsilon}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}.$$

Un altro esempio notevole è fornito da

- una *norma* in uno spazio lineare  $\mathcal{D}$  che è una seminorma definita positiva e cioè una seminorma che si annulla solo in corrispondenza del vettore nullo.
- Un *funzionale inferiormente semicontinuo*  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è caratterizzato dalla proprietà

$$\liminf_{\boldsymbol{\varepsilon}_n \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}} \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_n) \geq \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}).$$

Un funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  inferiormente semicontinuo è anche detto un *funzionale chiuso* e si scrive  $\varphi = \overline{\varphi}$  in quanto sussiste la seguente proprietà [19], [20].

**Proposizione 2.1. Chiusura dell'epigrafo e inferiore semicontinuità.** *Un funzionale convesso  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è inferiormente semicontinuo se e solo se ha un epigrafo chiuso in  $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$ .*  $\square$

**Proposizione 2.2. Convessità dei potenziali.** *I potenziali  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $\psi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sono convessi.*

**Dim.** Dalle *formule notevoli* si deduce che gli epigrafi dei potenziali sono intersezioni di famiglie di semispazi negli spazi prodotto  $\mathcal{D} \times \mathbb{R}$  e  $\mathcal{S} \times \mathbb{R}$  e dunque sono convessi in quanto intersezioni di famiglie di convessi.  $\square$

**Osservazione 2.1.** Si osservi che i potenziali  $\varphi$  e  $\psi$  assumono per definizione il valore  $+\infty$  al di fuori dei rispettivi domini e dunque i loro epigrafi sono intersezione di semipiani anche verticali.

I potenziali  $\varphi$  e  $\psi$  sono quindi restrizioni rispettivamente a  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  dei funzionali inferiormente semicontinui definiti dai secondi membri delle *formule notevoli*.

Tali funzionali sono infatti inviluppi superiori di famiglie di funzionali affini continui definiti rispettivamente sugli interi spazi  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{S}$ .

I potenziali  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $\psi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  in generale non sono però inferiormente semicontinui.

Si osservi comunque che, se  $\text{dom}(\mathcal{E})$  è chiuso, il potenziale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è inferiormente semicontinuo. Analoga osservazione vale per  $\psi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .  $\blacksquare$

Una basilare *proprietà di invarianza* lega i potenziali complementari  $\varphi$  e  $\psi$ . Risulta infatti

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_n \rangle \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_i - \boldsymbol{\sigma}_{i+1}, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}_n - \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \right\} + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\varepsilon}_o \rangle = \\ &= -\inf \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \langle \boldsymbol{\sigma}_{i+1} - \boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_n, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \right\} + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\varepsilon}_o \rangle = \\ &= \psi(\boldsymbol{\sigma}_o) - \psi(\boldsymbol{\sigma}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\varepsilon}_o \rangle.\end{aligned}$$

Vale quindi la *proprietà di invarianza*

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_1) + \psi(\boldsymbol{\sigma}_1) - \langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_2) + \psi(\boldsymbol{\sigma}_2) - \langle \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle,$$

$$\forall \{\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\sigma}_1\}, \{\boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\sigma}_2\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}).$$

Tale proprietà si enuncia affermando che:

**Proposizione 2.3. Invarianza del trinomio fondamentale.** *Il trinomio fondamentale definito sullo spazio prodotto  $\mathcal{D} \times \mathcal{S}$  dal funzionale convesso*

$$I(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) := \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \psi(\boldsymbol{\sigma}) - \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle,$$

è invariante sul grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ . □

La monotonia del grafico implica che per ogni coppia  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_g, \boldsymbol{\sigma}_g\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})$  sussiste la

■ *proprietà di sottodifferenziabilità*

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_g) &\geq \langle \boldsymbol{\sigma}_g, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_g \rangle, & \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}, \\ \psi(\boldsymbol{\sigma}) - \psi(\boldsymbol{\sigma}_g) &\geq \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_g, \boldsymbol{\varepsilon}_g \rangle, & \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S},\end{aligned}}$$

Nelle relazioni precedenti il segno di egualanza sussiste se e solo se rispettivamente  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}_g\} \in \mathcal{G}(\partial\varphi)$  e  $\{\boldsymbol{\varepsilon}_g, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{G}(\partial\psi)$ .

Le proprietà di sottodifferenziabilità si denotano simbolicamente con le inclusioni

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}_g \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_g), \quad \boldsymbol{\varepsilon}_g \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma}_g).}$$

■ Gli insiemi  $\partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_g) \subset \mathcal{S}$  e  $\partial\psi(\boldsymbol{\sigma}_g) \subset \mathcal{D}$  sono i *sottodifferenziali* dei potenziali  $\varphi$  e  $\psi$  nei punti  $\boldsymbol{\varepsilon}_g \in \mathcal{D}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_g \in \mathcal{S}$ .

I sottodifferenziali sono insiemi convessi chiusi in quanto intersezioni di semispazi lineari chiusi

La proprietà di sottodifferenziabilità equivale ad affermare che sussistono le inclusioni  $\mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}(\partial\varphi)$  e  $\mathcal{G}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{G}(\partial\psi)$ .

E' facile verificare che i grafici  $\mathcal{G}(\partial\varphi)$  e  $\mathcal{G}(\partial\psi)$  sono monotoni (anzi ciclicamente monotoni) e pertanto la massimalità del grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  impone che risulti:

$$\boxed{\mathcal{G}(\mathcal{E}) = \mathcal{G}(\partial\varphi) = \mathcal{G}(\partial\psi).}$$

Sulla base di queste proprietà si può immediatamente dimostrare che

**Proposizione 2.4. Proprietà di minimo.** *Il trinomio  $I(\varepsilon, \sigma) = \varphi(\varepsilon) + \psi(\sigma) - \langle \sigma, \varepsilon \rangle$  assume sul grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  un minimo assoluto.*

**Dim.** La proprietà di sottodifferenziabilità equivale a richiedere che per ogni coppia  $\{\varepsilon_g, \sigma_g\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})$  sia

$$\begin{aligned} I(\varepsilon, \sigma_g) &\geq I(\varepsilon_g, \sigma_g), \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{D}, \\ I(\varepsilon_g, \sigma) &\geq I(\varepsilon_g, \sigma_g), \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}, \end{aligned}$$

con egualianza se e solo se rispettivamente

$$\{\varepsilon, \sigma_g\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}) \quad \text{e} \quad \{\varepsilon_g, \sigma\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}).$$

Ciò significa che, spostandosi dal grafico in direzione di uno qualsiasi degli assi, il valore del trinomio  $I(\varepsilon, \sigma)$  aumenta.

Se infatti  $\{\varepsilon, \sigma\} \notin \text{dom}(\mathcal{E}) \cap \text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  si ha che  $I(\varepsilon, \sigma) = +\infty$ .

Daltronde per ogni  $\{\varepsilon_g, \sigma\} \in \text{dom}(\mathcal{E}) \cap \text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  esiste almeno un  $\sigma_g \in \text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  tale che  $\{\varepsilon_g, \sigma_g\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E})$  e quindi  $I(\varepsilon_g, \sigma) \geq I(\varepsilon_g, \sigma_g)$ .

Il grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  è dunque l'insieme minimale per il trinomio  $I(\varepsilon, \sigma)$ .  $\square$

## 2.1. Potenziali coniugati

I potenziali complementari sono definiti dal grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$  a meno di due arbitrarie costanti additive di integrazione.

La proprietà di invarianza del trinomio fondamentale sul grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ , stabilita nella proposizione 2.3, consente di dare la seguente definizione.

- I potenziali convessi  $\varphi$  e  $\psi$  sono detti *potenziali coniugati* se le costanti di integrazione sono fissate in modo da rendere nullo il valore del trinomio  $I(\varepsilon, \sigma)$  sul grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ .

Dalle proposizioni 2.3 e 2.4 si deduce che sussistono le

■ *relazioni di FENCHEL*

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) + \psi(\sigma) &\geq \langle \sigma, \varepsilon \rangle, & \forall \{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{D} \times \mathcal{S}, \\ \varphi(\varepsilon) + \psi(\sigma) &= \langle \sigma, \varepsilon \rangle, \iff \{\varepsilon, \sigma\} \in \mathcal{G}(\mathcal{E}).\end{aligned}}$$

Tali relazioni costituiscono l'estensione della *trasformata di LEGENDRE* ai funzionali convessi non differenziabili. Da esse segue immediatamente che:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi(\varepsilon) &= \max \{ \langle \sigma, \varepsilon \rangle - \psi(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}, & \forall \varepsilon \in \text{dom}(\mathcal{E}), \\ \psi(\sigma) &= \max \{ \langle \sigma, \varepsilon \rangle - \varphi(\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathcal{D} \}, & \forall \sigma \in \text{dom}(\mathcal{E}^{-1}).\end{aligned}}$$

Al di fuori dei domini  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  i potenziali  $\varphi(\varepsilon)$  e  $\psi(\sigma)$  assumono per definizione il valore  $+\infty$ .

Pertanto se i domini  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  non sono chiusi non è detto che i potenziali  $\varphi(\varepsilon)$  e  $\psi(\sigma)$  siano inferiormente semicontinui.

E' comunque possibile effettuare una operazione di *regolarizzazione dei potenziali* modificandone il valore in punti della frontiera del dominio.

Tale modifica consiste nel sostituire, ove possibile, a  $+\infty$  il più piccolo valore finito compatibile con la proprietà di convessità.

In altri termini la regolarizzazione si effettua identificando i potenziali, nei punti di frontiera del loro dominio, con i funzionali convessi inferiormente semicontinui di cui essi sono la restrizione. I potenziali  $\varphi$  e  $\psi$  sono infatti le restrizioni rispettivamente a  $\text{dom}(\mathcal{E})$  e  $\text{dom}(\mathcal{E}^{-1})$  dei funzionali inferiormente semicontinui definiti dai secondi membri delle *formule notevoli*.

L'espressione dei potenziali regolarizzati si ottiene lasciando l'argomento libero di variare in tutto lo spazio e sostituendo l'operazione di massimo con quella di estremo superiore.

All'interno dei domini le due espressioni coincidono mentre altrove si produce eventualmente l'effetto di regolarizzazione (chiusura degli epigrafi):

$$\boxed{\begin{aligned}\overline{\varphi}(\varepsilon) &= \sup \{ \langle \sigma, \varepsilon \rangle - \psi(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S} \}, & \forall \varepsilon \in \mathcal{E}, \\ \overline{\psi}(\sigma) &= \sup \{ \langle \sigma, \varepsilon \rangle - \varphi(\varepsilon) \mid \varepsilon \in \mathcal{D} \}, & \forall \sigma \in \mathcal{S}.\end{aligned}}$$

In Analisi Convessa le relazioni precedenti costituiscono la definizione dell'operazione di *coniugio* o *dualità* secondo FENCHEL (vedi ad es. [13], [19], [20], [39]).

Si ha quindi che

- il funzionale  $\overline{\varphi}(\varepsilon)$  è il *coniugato secondo FENCHEL* del funzionale  $\psi(\sigma)$ ,
- il funzionale  $\overline{\psi}(\sigma)$  è il *coniugato secondo FENCHEL* del funzionale  $\varphi(\varepsilon)$ .

L'operatore di coniugio si denota con una stella  $*$ . Dunque per definizione si ha che:

$$\boxed{\psi^*(\varepsilon) = \overline{\varphi}(\varepsilon), \quad \varphi^*(\sigma) = \overline{\psi}(\sigma).}$$

La nozione di *coniugio tra funzioni convesse* (o *dualità tra funzioni convesse*), trae origine

- dalla *trasformazione di LEGENDRE* (vedi sezione I.3.6 (p. 18)) e
- dal *coniugio secondo YOUNG*<sup>22</sup> [3] tra funzioni convesse monotone definite in  $\Re \cup \{+\infty\}$ .

La nozione di coniugio tra funzioni convesse è stata poi introdotta nel 1939 da

- MANDEL BROJT<sup>23</sup> [4] per  $\mathcal{X} = \Re$ ,
- quindi nel 1949 da FENCHEL [5] per  $\mathcal{X} = \Re^n$ ,
- ed infine nel 1964 da BRØNDSTED [9] per spazi di dimensione infinita.
- Un funzionale  $f : \mathcal{X} \mapsto \{-\infty\} \cup \Re \cup \{+\infty\}$  a valori nel campo reale esteso è un *funzionale proprio* se non attinge mai il valore  $-\infty$  e non è identicamente pari a  $+\infty$ .

La prossima proposizione 2.5, nota come teorema di FENCHEL-MOREAU, stabilisce una fondamentale proprietà involutiva del coniugio tra funzioni convesse. Il risultato è dovuto a FENCHEL [5] per spazi di dimensione finita ed a MOREAU [7] nel caso generale di spazi topologici localmente convessi.

La dimostrazione è basata su di una proprietà di separazione di insiemi convessi che è conseguenza del teorema di HAHN-BANACH. (vedi [20] sez. 3.3.3, teor. 1, ovvero [25], teor. 1.10).

---

<sup>22</sup> WILLIAM HENRY YOUNG (1863-1942) Nato a Londra, studiò matematica a Cambridge dove si dedicò poi alla preparazione degli studenti. Nel 1896 sposò GRACE EMILY CHISHOLM che era stata sua studentessa a Cambridge prima di prendere il dottorato a Göttingen sotto la guida di KLEIN. Insieme decisero di dedicarsi alla ricerca formando una famosa coppia di matematici. Si stabilirono prima a Göttingen, passando però l'anno 1898 in Italia, e quindi nel 1908 si trasferirono in Svizzera, a Ginevra e poi dal 1915 a Losanna. Dal 1913 al 1919 YOUNG fu professore di matematica all'Università di Liverpool e dal 1913 al 1917 anche HARDINGE professor all'Università di Calcutta. Dal 1919 al 1923 tenne la cattedra di matematica all'University College del Galles ad Aberystwyth. I maggiori contributi di YOUNG furono portati al calcolo di funzioni di più variabili, cui dedicò nel 1910 il trattato *The fundamental theorems of the differential calculus*, alla teoria delle serie di Fourier ed alla teoria dell'integrazione cui dette indipendentemente una impostazione equivalente a quella formulata da LEBESGUE due anni prima.

<sup>23</sup> SZOLEM MANDEL BROJT (1809-1896) Professore di meccanica e matematica al Collège de France dal 1938 al 1972, succedendo a JACQUES SALOMON HADAMARD (1865-1963). Fondò nel 1935 l'*Association des Collaborateurs de Nicolas Bourbaki* insieme a HENRI CARTAN, CLAUDE CHEVALLEY, JEAN COULOMB, JEAN DELSARTE, JEAN DIEUDONNÉ, CHARLES EHRESMANN, RENÉ DE POSSEL, ANDRÉ WEIL. SZOLEM MANDEL BROJT è lo zio di BENOIT MANDELBROT (1924-) famoso per l'invenzione della geometria frattale.

**Proposizione 2.5. Proprietà involutiva del coniugio.** *Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio di HILBERT,  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funzionale proprio ed  $f^* : \mathcal{X}' \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  il funzionale coniugato definito da*

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \sup \{\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle - f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{X}\}.$$

*La proprietà involutiva*

$$f^{**} = f,$$

*sussiste se e solo se il funzionale  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è convesso e chiuso.*  $\square$

- I potenziali complementari  $\psi$  e  $\varphi$  si dicono *regolari* se sussiste l'eguaglianza:

$\psi^*(\varepsilon) = \bar{\varphi}(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon); \quad \varphi^*(\sigma) = \bar{\psi}(\sigma) = \psi(\sigma).$

Ne consegue che entrambi i potenziali risultano inferiormente semicontinui e sottodifferenziabili in ogni punto dei loro domini di definizione.

- Un *grafico regolare* è un grafico monotono massimale, conservativo cui si associano due potenziali convessi coniugati regolari.

**Osservazione 2.2.** Sussistono le relazioni

$$\mathcal{G}(\partial\varphi) \subseteq \mathcal{G}(\partial\varphi^*) \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(\partial\psi) \subseteq \mathcal{G}(\partial\psi^*).$$

La proprietà di massimalità assicura pertanto che vale in effetti l'eguaglianza

$\mathcal{G}(\mathcal{E}) = \mathcal{G}(\partial\varphi) = \mathcal{G}(\partial\psi) = \mathcal{G}(\partial\varphi^*) = \mathcal{G}(\partial\psi^*).$

I funzionali convessi  $\varphi^*$  e  $\psi^*$  sono dunque sottodifferenziabili solo nei punti in cui coincidono rispettivamente con i potenziali  $\psi$  e  $\varphi$ .  $\blacksquare$

La eventuale differenza tra i potenziali e le loro chiusure è esemplificata nelle figure 2.2 e 2.3.

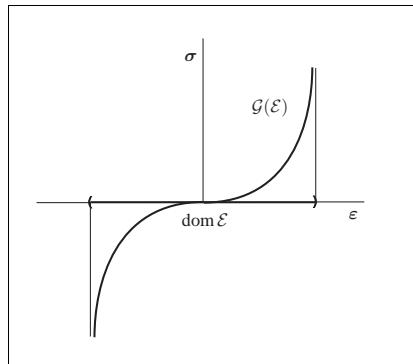


Fig. 2.2

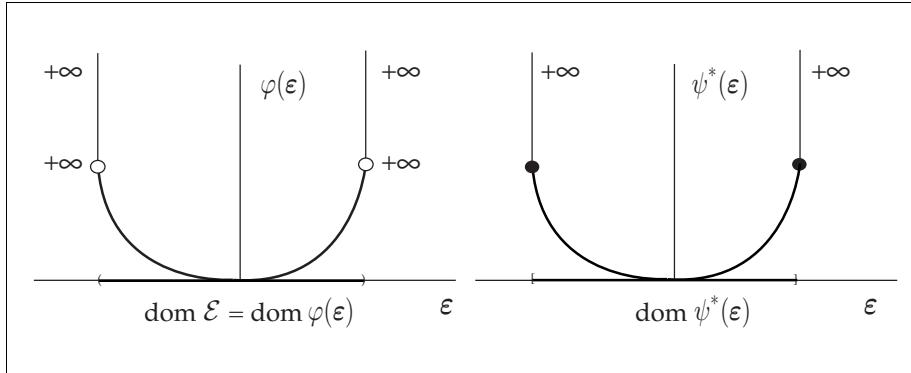


Fig. 2.3

Nel seguito si assumerà che i grafici delle relazioni di vincolo siano regolari.

Si noti anche che ogni proprietà concernente un funzionale convesso si traduce in modo ovvio in una proprietà concernente il *funzionale concavo* che è il suo opposto.

Ad un grafico monotono non crescente e conservativo corrisponde un potenziale concavo. Ad un sottodifferenziale di un funzionale convesso corrisponde un sopradifferenziale del funzionale concavo che è il suo opposto.

**Osservazione 2.3.** Una importante applicazione del teorema di FENCHEL-MOREAU enunciato nella proposizione 2.5, consiste nel mostrare che i funzionali indicatore e di supporto di un convesso chiuso sono tra loro coniugati.

- Il *funzionale indicatore* di un convesso  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$  è definito da

$$\square_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{K}, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{K}. \end{cases}$$

- Il *funzionale di supporto* di un convesso  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$  è il coniugato del funzionale indicatore ed è quindi definito da

$$\square_{\mathcal{K}}^*(\mathbf{x}^*) := \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \{ \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle - \square_{\mathcal{K}}(\mathbf{y}) \} = \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle.$$

Il funzionale coniugato del funzionale di supporto è a sua volta definito da

$$\square_{\mathcal{K}}^{**}(\mathbf{x}) := \sup_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{X}'} \{ \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{x} \rangle - \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{y} \rangle \} = \sup_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{X}'} \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \{ \langle \mathbf{y}^*, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle \}.$$

Tale espressione non è suscettibile di una valutazione per via diretta, ma il teorema di FENCHEL-MOREAU assicura che, se il convesso  $\mathcal{K}$  è chiuso, risulta

$$\square_{\mathcal{K}}^{**}(\mathbf{x}) = \square_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}),$$

in quanto l'indicatore di un convesso chiuso  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$  è un funzionale convesso, proprio ed inferiormente semicontinuo.

Si osservi inoltre che risulta

$$\inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \sup_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{X}'} \{\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle\} = \sqcup_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}).$$

Infatti è evidente che

$$\sup_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{X}'} \{\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle\} = \sqcup_{\{\mathbf{o}\}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ +\infty, & \mathbf{x} \neq \mathbf{y}. \end{cases}$$

Dunque

$$\inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \sqcup_{\{\mathbf{o}\}}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \sqcup_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \mathcal{K}, \\ +\infty, & \mathbf{x} \notin \mathcal{K}. \end{cases}$$

Grazie al teorema di FENCHEL-MOREAU si può quindi concludere che sussiste l'egualianza

$$\sup_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{X}'} \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \{\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle\} = \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \sup_{\mathbf{y}^* \in \mathcal{X}'} \{\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle\},$$

risultato, questo, non banale. ■

**Osservazione 2.4.** Si noti che dalla definizione di funzionale coniugato

$$f^*(\mathbf{x}^*) = \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \{\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{y})\},$$

segue che  $f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) \geq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ ,  $\forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{X}'$ .

Sussiste inoltre l'equivalenza:

$$\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x}) \iff f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle.$$

Infatti si ha che

$$\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x}) \iff f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{X} \iff$$

$$f(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{y}) \leq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{X} \iff$$

$$f(\mathbf{x}) + \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{X}} \{\langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle - f(\mathbf{y})\} \leq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \iff$$

$$f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle \iff$$

$$f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$$

Analogamente si mostra l'equivalenza:

$$\mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{x}^*) \iff f^*(\mathbf{x}^*) + f^{**}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle.$$

Ne segue che sussistono le equivalenze

$$\mathbf{x}^* \in \partial f(\mathbf{x}) \iff \mathbf{x} \in \partial f^*(\mathbf{x}^*) \iff f(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x}^*) = \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle,$$

se e solo se il funzionale  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è chiuso, e cioè se  $f = f^{**}$ . ■

## 2.2. Relazioni di coniugio

Sia  $\mathcal{X}$  uno spazio di HILBERT identificato con il duale ponendo l'isomorfismo di RIESZ pari all'identità (vedi ad es. [41]). Denotando con  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  il prodotto interno in  $\mathcal{X}$  e con  $\|\cdot\|$  la relativa norma, l'unico funzionale convesso autoconiugato è dato da

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2.$$

Si ha infatti che

$$f^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|^2 \} = \frac{1}{2} \|\mathbf{y}\|^2.$$

Vale la seguente proprietà di coniugio.

**Proposizione 2.6.** *Siano  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  spazi di HILBERT e sia  $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funzionale convesso e  $\mathbf{L} \in \mathbf{L}\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  un omeomorfismo lineare. Allora*

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \lambda g(\mathbf{L}\mathbf{x} + \mathbf{y}_o) + \langle \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} \rangle + c \Rightarrow \\ f^*(\mathbf{x}^*) &= \lambda g^*(\lambda^{-1}(\mathbf{L}')^{-1}(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*)) + \langle \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*, \mathbf{L}^{-1}\mathbf{y}_o \rangle - c. \end{aligned}$$

**Dim.** Basta applicare la definizione di funzione coniugata.  $\square$

In particolare dalla proposizione 2.6 segue che

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x} + \mathbf{x}_o) & \Rightarrow f^*(\mathbf{x}^*) = g^*(\mathbf{x}^*) - \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_o \rangle, \\ f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + \langle \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} \rangle & \Rightarrow f^*(\mathbf{x}^*) = g^*(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*), \\ f(\mathbf{x}) = \lambda g(\mathbf{x}), \lambda > 0 & \Rightarrow f^*(\mathbf{x}^*) = \lambda g^*(\lambda^{-1}\mathbf{x}^*), \\ f(\mathbf{x}) = \lambda g(\lambda^{-1}\mathbf{x}), \lambda > 0 & \Rightarrow f^*(\mathbf{x}^*) = \lambda g^*(\mathbf{x}^*), \\ f(\mathbf{x}) = g(\lambda \mathbf{x}), \lambda > 0 & \Rightarrow f^*(\mathbf{x}^*) = g^*(\lambda^{-1}\mathbf{x}^*). \end{cases}$$

Si considerino ora le seguenti operazioni che generano funzionali convessi.

Siano  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  spazi di HILBERT,  $\mathbf{L} \in \mathbf{L}\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  un operatore lineare continuo e  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un funzionale convesso. Si definiscono allora

- immagine inversa di  $f$  tramite  $\mathbf{L}$ , il funzionale convesso  $\mathbf{L}f : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ :

$$(\mathbf{L}f)(\mathbf{y}) := \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{L}\mathbf{x} = \mathbf{y} \},$$

il cui epigrafo è l'immagine dell'epigrafo di  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tramite la trasformazione lineare che manda  $\{\mathbf{x}, \alpha\} \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}$  in  $\{\mathbf{L}\mathbf{x}, \alpha\} \in \mathcal{Y} \times \mathbb{R}$ ,

- *inf-convoluzione* di una famiglia finita di funzioni  $f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  con  $i = 1, \dots, n$ , il funzionale  $\square f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ :

$$(\square f_i)(\mathbf{x}) := \inf_{\mathbf{x}_i \in \mathcal{X}} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x}_i) \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i = \mathbf{x} \right\},$$

che è convesso in quanto l'epigrafo di  $\square f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è la somma degli epigrafi di  $f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Al prossimo risultato si farà riferimento nel corso della dimostrazione della proposizione 8.2 (p. 161).

**Proposizione 2.7. Inf-convoluzione.** *Si consideri una spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$  ed i funzionali convessi  $f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $f_i^* : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $i = 1, \dots, n$  propri e tra loro coniugati. Allora sia ha che*

$$(\square f_i)^* = \sum f_i^*, \quad (\sum f_i)^* \leq \square f_i^*.$$

*Se i funzionali  $f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sono continui in un punto dello spazio  $\mathcal{X}$ , allora sussiste l'egualianza:*

$$(\sum f_i)^* = \square f_i^*.$$

*l'inf-convoluzione  $\square f_i^*$  è esatta, cioè l'inf nella formula è un minimo:*

$$(\square f_i^*)(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathbf{y}_i^* \in \mathcal{X}} \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^*(\mathbf{y}_i^*) \mid \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i^* = \mathbf{x}^* \right\} = \sum_{i=1}^n f_i^*(\mathbf{x}_i^*),$$

*con*

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{x}_i^* \in \partial f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

*dove  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  è coniugato a  $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}$  rispetto alla funzione  $\sum f_i$ :*

$$\sum f_i(\mathbf{x}) + (\sum f_i)^*(\mathbf{x}^*) = (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}).$$

**Dim.** La dimostrazione dell'egualianza è basata su una proprietà di separazione (vedi ad es. [20]). I legami sottodifferenziali che caratterizzano i punti di minimo sono una immediata conseguenza della egualianza

$$\sum f_i(\mathbf{x}) + \sum f_i^*(\mathbf{x}_i^*) = \sum (\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}),$$

e delle disegualanze

$$f_i(\mathbf{x}) + f_i^*(\mathbf{x}_i^*) \geq (\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n,$$

che implicano le egualanze  $f_i(\mathbf{x}) + f_i^*(\mathbf{x}_i^*) = (\mathbf{x}_i^*, \mathbf{x})$  per  $i = 1, \dots, n$ .  $\square$

Dalla proposizione 2.7 si deduce che sussiste la seguente formula per il sottodifferenziale di una inf-convoluzione esatta:

$$\boxed{\mathbf{x} \in \partial(\square f_i^*)(\mathbf{x}^*) \iff \mathbf{x} \in \cap \partial f_i^*(\mathbf{x}_i^*)},$$

dove

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}^*, \quad \mathbf{x}_i^* \in \partial f_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, \dots, n.$$

### 2.3. Stretta monotonia, stretta convessità e differenziabilità

- Un legame multivoco  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è *strettamente monotono* se è monotono e se a punti distinti corrispondono insiemi immagine privi di intersezione, e cioè se

$$\varepsilon \neq \varepsilon_o \Rightarrow \mathcal{E}(\varepsilon) \cap \mathcal{E}(\varepsilon_o) = \emptyset,$$

ovvero

$$\sigma \in \mathcal{E}(\varepsilon) \cap \mathcal{E}(\varepsilon_o) \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_o.$$

- Un funzionale convesso  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è *strettamente convesso* se

$$\exists \sigma_o \in \partial \varphi(\varepsilon_o) : \varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_o) + \langle \sigma_o, \varepsilon - \varepsilon_o \rangle \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_o.$$

E' facile vedere che

**Proposizione 2.8. Stretta monotonia e stretta convessità.** *La stretta monotonia del legame multivoco monotono  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  equivale alla stretta convessità del potenziale convesso  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .*

**Dim.** Se il legame multivoco  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è strettamente monotono si ha che

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_o) + \langle \sigma_o, \varepsilon - \varepsilon_o \rangle \\ \varphi(\eta) \geq \varphi(\varepsilon_o) + \langle \sigma_o, \eta - \varepsilon_o \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\eta) \geq \varphi(\varepsilon) + \langle \sigma_o, \eta - \varepsilon \rangle \iff \sigma_o \in \partial \varphi(\varepsilon).$$

Si ha dunque  $\sigma \in \partial \varphi(\varepsilon) \cap \partial \varphi(\varepsilon_o)$  e la stretta monotonia di  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  implica che  $\varepsilon = \varepsilon_o$ . Viceversa, se il potenziale convesso  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è *strettamente convesso*, dalla condizione  $\sigma \in \mathcal{E}(\varepsilon) \cap \mathcal{E}(\varepsilon_o)$  segue che

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(\varepsilon_o) \geq \varphi(\varepsilon) + \langle \sigma_o, \varepsilon_o - \varepsilon \rangle \\ \varphi(\varepsilon) \geq \varphi(\varepsilon_o) + \langle \sigma_o, \varepsilon - \varepsilon_o \rangle \end{array} \right\} \Rightarrow \varphi(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon_o) + \langle \sigma_o, \varepsilon - \varepsilon_o \rangle,$$

e la stretta convessità del potenziale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  implica che  $\varepsilon = \varepsilon_o$ .  $\square$

Si ha inoltre che

**Proposizione 2.9. Stretta convessità e differenziabilità.** *La stretta convessità di un potenziale convesso implica la differenziabilità del potenziale coniugato.*

**Dim.** Infatti

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \cup \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) \iff \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_o \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma}). \end{cases}$$

Il risultato segue osservando che per la proposizione 2.8 la stretta convessità di  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  equivale alla condizione

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) \cup \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_o,$$

e che la differenziabilità di  $\psi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  equivale alla condizione

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma}) \\ \boldsymbol{\varepsilon}_o \in \partial\psi(\boldsymbol{\sigma}) \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_o,$$

e che tali condizioni sono tra loro equivalenti.  $\square$

## 2.4. Convessità e sottodifferenziabilità locali

In *analisi convessa* viene seguito un percorso inverso a quello esposto nelle sezioni precedenti considerando un funzionale convesso  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ed analizzandone la differenziabilità globale o locale.

Si consideri un funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  con un dominio efficace non vuoto.

La *derivata unidirezionale* di  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  nel punto  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  è definita dal limite

$$d^+ \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{h}) := \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\alpha} [\varphi(\boldsymbol{\varepsilon} + \alpha \mathbf{h}) - \varphi(\boldsymbol{\varepsilon})],$$

La *derivata unidirezionale* in  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  è la funzione *positivamente omogenea*  $p : \mathcal{D} \mapsto \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  definita da

$$p(\mathbf{h}) := d^+ \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}; \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{D}.$$

- Un funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è *localmente convesso* nel punto  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  se la derivata unidirezionale è *sublineare*, cioè se

$$\left. \begin{aligned} p(\alpha \boldsymbol{\varepsilon}) &= \alpha p(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \\ \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) &\geq \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) + \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \rangle \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}_o) + \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_o \rangle,$$

- Un funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ha un *sottodifferenziale locale* in un punto  $\varepsilon \in \mathcal{D}$  se la derivata unidirezionale è un funzionale sublineare proprio e cioè non attinge mai il valore  $-\infty$ .

Sussiste infatti il seguente risultato ([20], capitolo 4, proposizione 1).

**Proposizione 2.10. Funzionale di supporto.** *Un funzionale sublineare, proprio ed inferiormente semicontinuo:*

$$\bar{p}(\mathbf{h}) := \liminf_{\boldsymbol{\eta} \rightarrow \mathbf{h}} p(\boldsymbol{\eta}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{D},$$

gode della proprietà

$$\bar{p}(\mathbf{h}) = \sup \{ \langle \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \rangle \mid \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{K}^* \},$$

dove

$$\mathcal{K}^* = \sup \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : p(\mathbf{h}) \geq \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{h} \rangle, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{D} \},$$

ed è quindi il funzionale di supporto dell'insieme convesso chiuso non vuoto  $\mathcal{K}^*$ .  $\square$

- Il *sottodifferenziale locale* di  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  in  $\varepsilon \in \mathcal{D}$  è allora definito da

$$\partial\varphi(\varepsilon) := \mathcal{K}^*.$$

- Il funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ha localmente in  $\varepsilon \in \mathcal{D}$  un *sottodifferenziale regolare* se se la derivata unidirezionale è *inferiormente semicontinua*, cioè se

$$p = \bar{p}.$$

- Se il funzionale  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è convesso il rapporto incrementale che ha per limite la derivata unidirezionale risulta monotono non crescente al tendere a zero del parametro  $\alpha > 0$  ([20], capitolo 4, proposizione 3).

Ne segue che il limite esiste in ogni punto  $\varepsilon \in \mathcal{D}$  e per ogni incremento  $\mathbf{h} \in \mathcal{D}$  e che la derivata unidirezionale è data da

$$d^+ \varphi(\varepsilon; \mathbf{h}) := \inf_{\alpha > 0} \frac{1}{\alpha} [\varphi(\varepsilon + \alpha \mathbf{h}) - \varphi(\varepsilon)].$$

E' facile verificare che la derivata unidirezionale di un funzionale convesso  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è sublineare e che risulta

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\varepsilon) \iff \varphi(\boldsymbol{\eta}) - \varphi(\varepsilon) \geq \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\eta} - \varepsilon \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}.$$

Dunque per un funzionale convesso le definizioni locale e globale del sottodifferenziale coincidono.

### 3. CALCOLO SUBDIFFERENZIALE

Siano  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  spazi di HILBERT ed  $\mathcal{X}'$  e  $\mathcal{Y}'$  gli spazi duali. Siano inoltre

- $f, f_1, f_2 : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,  $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  funzionali convessi,
- $\mathbf{L} \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$ ,  $\mathbf{L}' \in L\{\mathcal{Y}'; \mathcal{X}'\}$  una coppia di operatori lineari continui in dualità:

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{L}\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{L}'\mathbf{y}^*, \mathbf{x} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}, \quad \forall \mathbf{y}^* \in \mathcal{Y}'.$$

Dalla definizione di sottodifferenziale locale si deduce che valgono le proprietà:

$$\partial f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \partial f(\mathbf{x}), \quad \lambda \geq 0,$$

$$\partial(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) \supseteq \partial f_1(\mathbf{x}) + \partial f_2(\mathbf{x}),$$

$$\partial(g \circ \mathbf{L})(\mathbf{x}) \supseteq \mathbf{L}' \partial g(\mathbf{L}\mathbf{x}).$$

In Analisi Convessa [13], [15], [19], [20], si dimostra che, sotto opportune condizioni, le inclusioni nelle ultime due relazioni diventano egualianze. Precisamente sussistono i seguenti risultati.

**Proposizione 3.1. Additività dei sottodifferenziali.** *Se  $f_1, f_2 : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sono funzionali convessi ed almeno uno di essi è continuo in un punto dell'intersezione  $\text{dom } f_1 \cap \text{dom } f_2$  si ha che*

$$\partial(f_1 + f_2)(\mathbf{x}) = \partial f_1(\mathbf{x}) + \partial f_2(\mathbf{x}),$$

e cioè vale la regola di addizione dei sottodifferenziali. □

La proposizione 3.1 è anche nota come *teorema di ROCKAFELLAR-MOREAU*.

**Proposizione 3.2. Derivazione a catena (lineare).** *Si consideri un operatore lineare continuo  $\mathbf{L} \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  ed un funzionale convesso  $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  continuo in punto dell'intersezione  $\text{dom } f \cap \text{Im } \mathbf{L}$ . Allora si ha che*

$$\partial(g \circ \mathbf{L})(\mathbf{x}) = \mathbf{L}' \partial g(\mathbf{L}\mathbf{x}),$$

e cioè vale la regola di sottodifferenziazione a catena. □

Si noti che quest'ultima proprietà può anche scriversi

$$\partial(g \circ \mathbf{L})(\mathbf{x}) = \partial g(\mathbf{L}\mathbf{x}) \circ \mathbf{L},$$

**Proposizione 3.3. Derivazione a catena (non lineare).** *Si consideri un operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  differenziabile nel senso di FRÉCHET in un punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  con derivata  $d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  lineare e continua, ed un funzionale  $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  localmente convesso in  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y}$ . Allora, se vale la proprietà di derivazione a catena della derivata unidirezionale*

$$\langle d^+(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = \langle d^+g(\mathbf{A}(\mathbf{x})), d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{h} \rangle, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{X},$$

e se il funzionale sublineare  $d^+g(\mathbf{y}) : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è continuo in un punto dell'intersezione  $\text{dom } d^+g(\mathbf{y}) \cap \text{Im } d\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , si ha che

$$\partial(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \partial g(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \circ d\mathbf{A}(\mathbf{x}) = (d\mathbf{A}(\mathbf{x}))' \partial g(\mathbf{A}(\mathbf{x})),$$

e cioè vale la regola di sottodifferenziazione a catena.  $\square$

Sussistono inoltre i seguenti risultati dovuti all'autore [40] che forniscono condizioni locali necessarie e sufficienti per la validità della sottodifferenziazione a catena a meno di un'operazione di chiusura.

Tali risultati consentono di ottenere condizioni sufficienti che hanno un'ambito di applicabilità maggiore di quello della proposizione 3.3 e, come si mostrerà, sono indispensabili per gli sviluppi futuri [40].

**Proposizione 3.4. Derivazione a catena a meno di una chiusura.** *Si consideri un operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  differenziabile nel senso di FRÉCHET in un punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  con derivata  $d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  lineare e continua, ed un funzionale  $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  localmente sottodifferenziabile in  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y}$  e tale che il funzionale  $g \circ \mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sia localmente sottodifferenziabile in  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ . Allora si ha che*

$$\partial(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \overline{\partial g(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \circ d\mathbf{A}(\mathbf{x})} = \overline{d\mathbf{A}(\mathbf{x})' \partial g(\mathbf{A}(\mathbf{x}))},$$

se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\overline{q}(\mathbf{x}) = \overline{p}(L(\mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X},$$

dove

$$q(\mathbf{h}) := d^+(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{h}),$$

$$p(\mathbf{h}) := d^+g(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{h}),$$

$$L := d\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

e la barra sovrapposta denota la chiusura.  $\square$

Un’utile variante è la seguente.

**Corollario 3.5.** *Si consideri un operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  differenziabile nel senso di FRÉCHET in un punto  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  con derivata  $d\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in L\{\mathcal{X}; \mathcal{Y}\}$  lineare e continua, ed un funzionale  $g : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  localmente sottodifferenziabile in  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathcal{Y}$  e si assuma che valga la proprietà di derivazione a catena della derivata unidirezionale*

$$\langle d^+(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}), \mathbf{h} \rangle = \langle d^+g(\mathbf{A}(\mathbf{x})), d\mathbf{A}(\mathbf{x})\mathbf{h} \rangle, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{X}.$$

Allora si ha che

$$\partial(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}) = \overline{\partial g(\mathbf{A}(\mathbf{x})) \circ d\mathbf{A}(\mathbf{x})} = \overline{(d\mathbf{A}(\mathbf{x}))' \partial g(\mathbf{A}(\mathbf{x}))},$$

se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\overline{(p \circ \mathbf{L})(\mathbf{x})} = \overline{p(\mathbf{L}\mathbf{x})}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X},$$

dove

$$q(\mathbf{h}) := d^+(g \circ \mathbf{A})(\mathbf{x}, \mathbf{h}),$$

$$p(\mathbf{h}) := d^+g(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{h}),$$

$$\mathbf{L} := d\mathbf{A}(\mathbf{x}),$$

e la barra sovrapposta denota la chiusura.

**Dim.** La proprietà di derivazione a catena assunta per la derivata unidirezionale equivale alla condizione  $q = p \circ \mathbf{L}$ . Basta quindi applicare il risultato della proposizione 3.4.  $\square$

La proprietà di derivazione a catena per la derivata unidirezionale sussiste banalmente se l’operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  è affine.

La condizione  $\overline{(p \circ \mathbf{L})(\mathbf{x})} = \overline{p(\mathbf{L}\mathbf{x})}$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  è soddisfatta se il funzionale sublineare  $p : \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è chiuso.

Dalle proposizioni 3.4 e 3.5 si deducono analogi risultati riguardanti la regola di addizione per i sottodifferenziali.

Ciò si consegna ponendo  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^n$  e definendo l’operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$  come l’operatore di iterazione:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^n := \{\mathbf{x}_i = \mathbf{x} \mid i = 1, \dots, n\}.$$

L'operatore duale  $\mathbf{A}' : \mathcal{Y}' \mapsto \mathcal{X}'$  soddisfa la relazione

$$\langle \mathbf{A}'\{\mathbf{x}_i^*\}, \mathbf{x} \rangle = \langle \{\mathbf{x}_i^*\}, \mathbf{Ax} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x} \rangle.$$

ed è pertanto l'*operatore di addizione*:

$$\mathbf{A}'\{\mathbf{x}_i^*\} := \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i^*.$$

Si perviene così ai seguenti risultati dovuti all'autore [40].

**Proposizione 3.6. Addizione a meno di una chiusura.** *Si considerino i funzionali  $f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  localmente sottodifferenziabili in  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ . Allora si ha che*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\right) = \overline{\sum_{i=1}^n \partial f_i(\mathbf{x})},$$

se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\left(\overline{\sum_{i=1}^n p_i}\right)(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \overline{p_i}(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{X},$$

dove

$$p_i(\mathbf{h}) := d^+ f_i(\mathbf{x}; \mathbf{h}),$$

e la barra sovrapposta denota la chiusura.  $\square$

**Corollario 3.7.** *Si considerino i funzionali  $f_i : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  localmente regolarmente sottodifferenziabili in  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ . Allora si ha che*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})\right) = \overline{\sum_{i=1}^n \partial f_i(\mathbf{x})},$$

**Dim.** Basta osservare che

$$p_i = \overline{p_i}, \quad i = 1, \dots, n \Rightarrow \sum_{i=1}^n p_i = \overline{\sum_{i=1}^n p_i},$$

e far quindi ricorso alla proposizione 3.6.  $\square$

Un ulteriore risultato di calcolo sottodifferenziale dovuto all'autore [40] ha importanti applicazioni in ottimizzazione e nella teoria della plasticità.

**Proposizione 3.8. Derivazione a catena; composizione con una funzione di Young.**  
*Si consideri una funzione monotona e convessa  $m : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tale che*

$$m(+\infty) = +\infty$$

*ed un funzionale convesso  $k : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  proprio e continuo in  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ . Allora, assumendo che  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  non sia un punto di minimo per  $k : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e la funzione di YOUNG  $m : \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sia sottodifferenziale in  $k(\mathbf{x})$ , si ha che*

$$\partial f(\mathbf{x}) = \partial m(k(\mathbf{x})) \circ \partial k(\mathbf{x}),$$

*dove il funzionale convesso  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è definito da  $f = m \circ k$ .*  $\square$

#### 4. STRUTTURE CON ELASTICITÀ GENERALIZZATA

In meccanica il legame che definisce le proprietà del materiale correla i valori locali delle variabili di stato.

Se la struttura occupa il dominio  $\Omega$  ed i campi di deformazione e di tensione in  $\Omega$  sono  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  e  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ , il legame elastico generalizzato è definito da potenziali convessi complementari locali che, nel generico punto  $\mathbf{x} \in \Omega$ , sono denotati con

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{x}} : \mathcal{D}_{\mathbf{x}} &\mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \\ \psi_{\mathbf{x}} : \mathcal{S}_{\mathbf{x}} &\mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\},\end{aligned}$$

e prendono rispettivamente i nomi di *energia di deformazione elastica* e di *energia elastica complementare* specifiche (o per unità di volume).

Generalizzando l'approccio classico di GREEN, i corrispondenti legami costitutivi si esprimono tramite i sottodifferenziali

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} &\in \partial \varphi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} &\in \partial \psi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}),\end{aligned}$$

dove  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}_{\mathbf{x}}$  sono i valori in  $\mathbf{x} \in \Omega$  dei rispettivi campi.

- Il potenziale convesso *energia elastica della struttura* ed il potenziale complementare si ottengono per integrazione dei valori locali:

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) := \int_{\Omega} \varphi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{x}}) \, dv, \quad \psi(\boldsymbol{\sigma}) := \int_{\Omega} \psi_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{x}}) \, dv.$$

La convessità degli epigrafi dei funzionali

$$\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad \psi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

segue direttamente dalla seguente proprietà caratteristica delle funzioni convesse

$$\lambda_1 \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}^1) + \lambda_2 \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}^2) \geq \varphi_{\mathbf{x}}(\lambda_1 \varepsilon_{\mathbf{x}}^1 + \lambda_2 \varepsilon_{\mathbf{x}}^2),$$

per ogni  $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$  tali che  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$  e per ogni  $\varepsilon_{\mathbf{x}}^1, \varepsilon_{\mathbf{x}}^2 \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}$ .

In alternativa la convessità di tali funzionali può dedursi dalla prossima proposizione.

**Proposizione 4.1. Equivalenza tra legami globali e locali.** *I legami sottodifferenziali locali ed i corrispondenti legami globali sono equivalenti:*

$$\boxed{\sigma_{\mathbf{x}} \in \partial \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \iff \sigma \in \partial \varphi(\varepsilon).}$$

**Dim.** Infatti il legame locale si scrive

$$\sigma_{\mathbf{x}} \in \partial \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}) \iff \varphi_{\mathbf{x}}(\eta_{\mathbf{x}}) - \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}) \geq \langle \sigma_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}} - \varepsilon_{\mathbf{x}} \rangle, \quad \forall \eta_{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}},$$

quasi per ogni  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Il legame globale è dato da

$$\sigma \in \partial \varphi(\varepsilon) \iff \varphi(\eta) - \varphi(\varepsilon) \geq \langle \sigma, \eta - \varepsilon \rangle, \quad \forall \eta \in \mathcal{D} =$$

$$= \int_{\Omega} \varphi_{\mathbf{x}}(\eta_{\mathbf{x}}) \, dv - \int_{\Omega} \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}) \, dv \geq \int_{\Omega} \langle \sigma_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}} - \varepsilon_{\mathbf{x}} \rangle \, dv, \quad \forall \eta \in \mathcal{D}.$$

E' pertanto evidente che il legame sottodifferenziale locale implica quello globale. L'implicazione inversa è basata sul fatto che la topologia dello spazio funzionale in cui è definita l'operazione di sottodifferenziazione è quella dei campi di quadrato integrabile. La dimostrazione si conduce infatti come segue. Se il legame globale non implicasse quello locale esisterebbe un insieme  $\mathcal{P} \subseteq \Omega$  di misura non nulla tale che per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$  si potrebbe trovare un  $\eta_{\mathbf{x}} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}$  tale che

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\eta_{\mathbf{x}}) - \varphi_{\mathbf{x}}(\varepsilon_{\mathbf{x}}) < \langle \sigma_{\mathbf{x}}, \eta_{\mathbf{x}} - \varepsilon_{\mathbf{x}} \rangle,$$

Definendo allora il campo di quadrato integrabile  $\eta \in \mathcal{D}$  con le posizioni

$$\eta(\mathbf{x}) := \begin{cases} \eta_{\mathbf{x}}, & \mathbf{x} \in \mathcal{P}, \\ \mathbf{o}, & \mathbf{x} \notin \mathcal{P}, \end{cases}$$

ed integrando si avrebbe che

$$\varphi(\eta) - \varphi(\varepsilon) < \langle \sigma, \eta - \varepsilon \rangle,$$

in contrasto con l'ipotesi. □

Dalla proposizione 4.1 si deduce che le proprietà locali di differenziabilità e di stretta convessità implicano quelle globali e viceversa.

Nella teoria classica dell'elasticità il legame elastico  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è *strettamente monotono* e dunque biunivoco (vedi fig. 4.1 a) per cui si può scrivere

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}), \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{E}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}).$$

Se il legame  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è differenziabile, la condizione di conservatività si può esprimere mediante la *condizione di integrabilità di VOLTERRA*

$$\langle d\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \rangle = \langle d\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_1 \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \text{dom}(\mathcal{E}), \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2 \in \mathcal{D}.$$

Se il legame  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è conservativo anche il legame inverso  $\mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}$  è conservativo.

Se il legame  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è strettamente monotono e differenziabile tale è anche il legame inverso  $\mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}$  e la derivata di entrambi è simmetrica.

La stretta convessità dei potenziali comporta che le loro derivate seconde, e cioè le derivate prime dei legami  $\mathcal{E}$  ed  $\mathcal{E}^{-1}$ , siano definite positive.

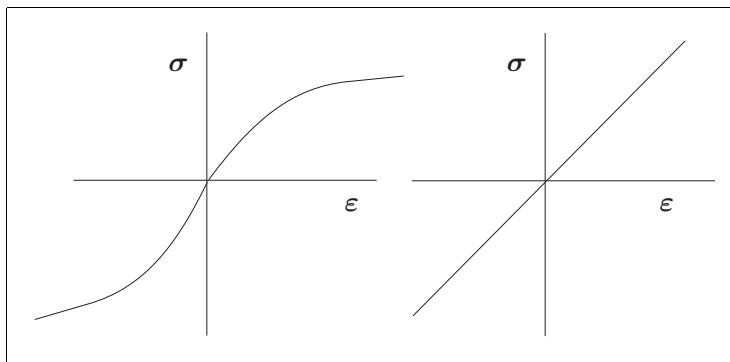


Fig. 4.1

Formulando l'ulteriore ipotesi di *legame elastico lineare* (vedi fig. 4.1 b) si ha che

$$d\mathcal{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{E}.$$

Dunque, in virtù della condizione di VOLTERRA, l'operatore lineare conservativo  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è simmetrico.

La stretta convessità dei potenziali elastici implica inoltre che i legami  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  ed  $\mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}$  siano definiti positivi.

I potenziali coniugati  $\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $\varphi^* : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sono pertanto forme quadratiche definite positive date da

$$\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{E} \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \quad \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathcal{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \rangle,$$

che assumono lo stesso valore in corrispondenza di punti del grafico  $\mathcal{G}(\mathcal{E})$ . Infatti essendo

$$\sigma = \mathcal{E}(\varepsilon), \quad \varepsilon = \mathcal{E}^{-1}(\sigma).$$

si ha che

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \langle \mathcal{E}\varepsilon, \varepsilon \rangle, \quad \varphi(\varepsilon) + \varphi^*(\sigma) = \langle \sigma, \varepsilon \rangle,$$

e dunque

$$\varphi^*(\sigma) = \frac{1}{2} \langle \sigma, \mathcal{E}^{-1}\sigma \rangle.$$

#### 4.1. Problema elastico generalizzato

In un modello strutturale le variabili di stato sono costituite da due coppie duali: forza-spostamento e sforzo-deformazione.

Si consideri tra ognuna delle coppie di enti duali una *relazione elastica generalizzata*, e cioè una relazione monotona, conservativa e regolare.

- La relazione tra i campi di sforzo ed i campi di deformazione è monotona non decrescente,
- la relazione tra i sistemi di forze ed i campi di spostamento è monotona non crescente, come schematizzato in fig. 4.2.

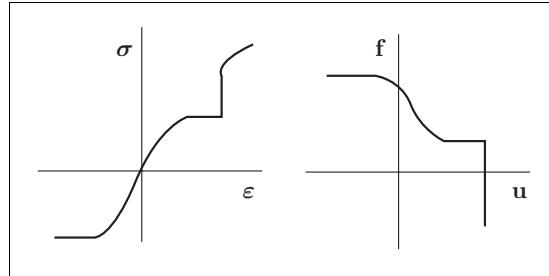


Fig. 4.2

Si considerino

- i potenziali *convessi coniugati*

$$\varphi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \varphi^* : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

associati al legame tra i campi di sforzo ed i campi di deformazione e

- i potenziali *concavi coniugati*

$$\gamma : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \quad \gamma^* : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty\},$$

associati al legame tra i sistemi di forze ed i campi di spostamento.

Per semplicità di notazione si indicherà con il medesimo simbolo  $\partial$  sia l'operatore sottodifferenziale di un funzionale convesso che quello sopradifferenziale di un funzionale concavo.

Si denoti inoltre con

- $\mathcal{V}$  lo spazio cinematico che è uno spazio di HILBERT costituito da campi di quadrato integrabile in  $\Omega$  cui corrisponde una deformazione tangente distribuzionale anch'essa di quadrato integrabile negli elementi di una suddivisione finita del dominio  $\Omega$ .

I campi cinematici di  $\mathcal{V}$  soddisfano inoltre assegnate condizioni di interfaccia in corrispondenza del contorno della suddivisione.

- $\mathcal{D}$  lo spazio delle deformazioni tangenti che è uno spazio di HILBERT, costituito da campi di quadrato integrabile in  $\Omega$ .
- $\mathcal{S}$  lo spazio degli sforzi che è lo spazio di HILBERT duale di  $\mathcal{D}$ .  
In virtù del teorema di rappresentazione di RIESZ-FRÉCHET, [25], [41], lo spazio  $\mathcal{S}$  può essere identificato con lo spazio dei campi di quadrato integrabile in  $\Omega$ .
- $\mathcal{F}$  lo spazio delle forze che è lo spazio di HILBERT duale di  $\mathcal{V}$ .
- $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{D}\}$  l'operatore cinematico che ad ogni campo di spostamento dello spazio cinematico associa la deformazione tangente con esso congruente.
- $\mathbf{B}' \in L\{\mathcal{S}; \mathcal{F}\}$  l'operatore di equilibrio che ad ogni campo di sforzo dello spazio statico associa il sistema di forze con esso in equilibrio.

Entrambi gli operatori sono quindi lineari e limitati.

■ Il problema dell'equilibrio elastico generalizzato si scrive:

$$\begin{cases} \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, & \text{equilibrio,} \\ \mathbf{B} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, & \text{congruenza,} \\ \boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\boldsymbol{\varepsilon}), & \text{legame costitutivo del materiale,} \\ \mathbf{u} \in \partial\gamma^*(\mathbf{f}) & \text{legame costitutivo dei vincoli.} \end{cases}$$

In termini di sforzi e di spostamenti il problema dell'equilibrio elastico generalizzato assume la forma

$$\begin{cases} \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma} \in \partial\gamma(\mathbf{u}) \\ \mathbf{B} \mathbf{u} \in \partial\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}). \end{cases}$$

I domini di ammissibilità delle variabili di stato che sono i convessi

$\mathcal{U}_a = \text{dom } \gamma \subseteq \mathcal{V}$	spostamenti ammissibili,
$\mathcal{F}_a = \text{dom } \gamma^* \subseteq \mathcal{F}$	forze ammissibili,
$\mathcal{D}_a = \text{dom } \varphi \subseteq \mathcal{D}$	deformazioni ammissibili,
$\mathcal{S}_a = \text{dom } \varphi^* \subseteq \mathcal{S}$	sforzi ammissibili.

Si definiscano inoltre

- il dominio convesso degli *spostamenti congruenti con deformazioni ammissibili*

$$\mathcal{C}_a = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid \mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{D}_a\},$$

- ed il dominio convesso delle *sforzi in equilibrio con forze ammissibili*

$$\Sigma_a = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \mid \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{F}_a\}.$$

#### 4.2. Esistenza della soluzione

Il problema dell'equilibrio elastico generalizzato gode della seguente notevole proprietà che costituisce l'estensione della analoga proprietà caratteristica del problema dell'equilibrio elastico lineare.

Sotto opportune ipotesi di regolarità, il problema dell'equilibrio elastico ammette soluzione se e solo se le relazioni di vincolo sono staticamente e cinematicamente compatibili.

Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di una soluzione sono quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'\mathcal{S}_a \cap \mathcal{F}_a &\neq \emptyset, \\ \mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a &\neq \emptyset, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a \cap \Sigma_a &\neq \emptyset \\ \mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

*Condizioni  
di esistenza*

- La condizione di compatibilità statica

$$\mathbf{B}'\mathcal{S}_a \cap \mathcal{F}_a \neq \emptyset,$$

impone che esista almeno una forza esterna ammissibile ed in equilibrio con una forza interna ammissibile.

- La condizione di compatibilità cinematica

$$\mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a \neq \emptyset,$$

impone che esista almeno una deformazione ammissibile e congruente con uno spostamento ammissibile.

- La condizione di compatibilità statica nella forma

$$\mathcal{S}_a \cap \Sigma_a \neq \emptyset,$$

impone che esista almeno una forza interna ammissibile ed in equilibrio con una forza esterna ammissibile.

- La condizione di compatibilità cinematica nella forma

$$\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a \neq \emptyset,$$

impone che esista almeno uno spostamento ammissibile cui corrisponda una deformazione ammissibile.

Se esiste una soluzione è evidente che le condizioni di compatibilità devono essere soddisfatte.

Per dimostrare che viceversa le condizioni di compatibilità sono anche sufficienti ad assicurare l'esistenza di una soluzione, si formuli il problema in termini di una sola variabile di stato, ad esempio lo spostamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ .

Sostituendo la condizione di compatibilità elastica

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}),$$

in quella di equilibrio si ottiene

$$\mathbf{B}' \partial\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) \cap \partial\gamma(\mathbf{u}) \neq \emptyset.$$

Applicando quindi la regola di composizione dei sottodifferenziali

$$\partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) = \mathbf{B}' \partial\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}),$$

si può porre la condizione di equilibrio elastico nella forma

$$\partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) \cap \partial\gamma(\mathbf{u}) \neq \emptyset, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a,$$

o in quella equivalente

$$\mathbf{o} \in \partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) - \partial\gamma(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a,$$

che, per la regola di addizione dei sottodifferenziali, diventa

$$\mathbf{o} \in \partial(\varphi \circ \mathbf{B} - \gamma)(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a.$$

Si tratta di dimostrare che tale inclusione sottodifferenziale ammette almeno una soluzione.

A tal fine si fa appello alla seguente *proprietà di estensione*.

**Definizione 4.2. Proprietà di estensione.** Sia  $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  un potenziale convesso regolare e si consideri il potenziale  $f_r : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , restrizione di  $f$  ad un convesso chiuso  $\mathcal{C} \subseteq \text{dom } f$ , definito da

$$f_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & \text{se } \mathbf{x} \in \mathcal{C}, \\ +\infty, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora sussiste l'inclusione

$$\text{Im } \partial f \subseteq \text{Im } \partial f_r.$$

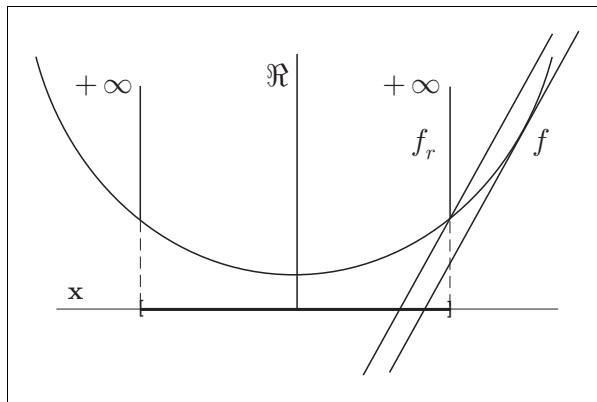


Fig. 4.3

La figura mostra come la proprietà

$$\text{Im } \partial f \subseteq \text{Im } \partial f_r,$$

sia plausibile osservando i diagrammi delle funzioni  $f$  e  $f_r$ .

Sulla base della proprietà di estensione si può dimostrare il seguente risultato.

**Proposizione 4.3. Buona posizione.** Il problema di equilibrio elastico generalizzato

$$\begin{cases} \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, \\ \mathbf{B} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \end{cases} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \partial \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}), \\ \mathbf{u} \in \partial \gamma^*(\mathbf{f}), \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione se e solo se sono soddisfatte le condizioni di compatibilità

$$\mathcal{S}_a \cap \Sigma_a \neq \emptyset \quad \text{compatibilità statica,}$$

$$\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a \neq \emptyset \quad \text{compatibilità cinematica.}$$

**Dim.** Le condizioni di compatibilità sono evidentemente necessarie per l'esistenza di un  $\mathbf{u} \in \mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a$  soluzione del problema e cioè tale che

$$\mathbf{o} \in \partial(\varphi \circ \mathbf{B} - \gamma)(\mathbf{u}).$$

Viceversa, se le condizioni di compatibilità sono soddisfatte, per dimostrare l'esistenza di una soluzione si considerino i funzionali

- $\bar{\varphi}$  restrizione di  $\varphi$  a  $\mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a$ ,
- $\bar{\gamma}$  restrizione di  $\gamma$  a  $\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a$ .

La condizione di compatibilità cinematica assicura che tali restrizioni hanno domini non vuoti. Dalla proprietà di estensione si deducono poi le inclusioni

$$\mathbf{B}'\partial\varphi(\mathcal{D}_a) \subseteq \mathbf{B}'\partial\bar{\varphi}(\mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a),$$

$$\partial\gamma(\mathcal{U}_a) \subseteq \partial\bar{\gamma}(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a),$$

e la condizione di compatibilità statica impone che

$$\mathbf{B}'\partial\varphi(\mathcal{D}_a) \cap \partial\gamma(\mathcal{U}_a) \neq \emptyset.$$

Quindi *a fortiori* sarà

$$\mathbf{B}'\partial\bar{\varphi}(\mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a) \cap \partial\bar{\gamma}(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a) \neq \emptyset.$$

Dalla regola di composizione dei sottodifferenziali

$$\mathbf{B}'\partial\bar{\varphi}(\mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a) = \mathbf{B}'\partial\bar{\varphi}(\mathbf{B}\mathcal{U}_a \cap \mathbf{B}\mathcal{C}_a) = \partial(\bar{\varphi} \circ \mathbf{B})(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a),$$

si deduce quindi che

$$\partial(\bar{\varphi} \circ \mathbf{B})(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a) \cap \partial\bar{\gamma}(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a) \neq \emptyset,$$

o equivalentemente che

$$\mathbf{o} \in \partial(\bar{\varphi} \circ \mathbf{B})(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a) - \partial\bar{\gamma}(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a).$$

Applicando infine la regola di addizione dei sottodifferenziali si ottiene che

$$\mathbf{o} \in \partial(\bar{\varphi} \circ \mathbf{B} - \bar{\gamma})(\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a),$$

e la dimostrazione è conclusa.  $\square$

Un analogo procedimento può instaurarsi formulando il problema in termini di tensioni.

**Osservazione 4.1.** Nella dimostrazione dell'esistenza di una soluzione si è assunto che i potenziali siano regolari e che valgano le regole di addizione e di composizione per i sottodifferenziali e la proprietà di estensione.

E' opportuno tener presente che in alcuni casi, anche apparentemente semplici ma *patologici*, i domini di ammissibilità hanno intersezioni così deboli da invalidare la dimostrazione. ■

Un importante risultato di esistenza è il seguente.

**Proposizione 4.4. Minimo di un funzionale convesso.** *Sia  $\mathcal{K}$  un convesso chiuso in uno spazio di HILBERT  $\mathcal{H}$  e  $\phi : \mathcal{K} \mapsto \mathbb{R} \cup +\infty$  con  $\phi \neq +\infty$  un funzionale convesso ed inferiormente semi-continuo su  $\mathcal{H}$ . Sia soddisfatta una delle condizioni*

- $\mathcal{K}$  è limitato,
- $\mathcal{K}$  è non limitato e  $\phi$  soddisfa una condizione di crescita all'infinito:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}) = +\infty, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{K}.$$

Allora esiste un elemento di  $\mathcal{K}$  su cui  $\phi$  attinge il minimo.

**Dim.** Sia  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{K}$  una successione minimizzante per  $\phi$ , cioè tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}_n) = \inf \{\phi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}.$$

La condizione di crescita all'infinito assicura che la successione minimizzante è limitata in  $\mathcal{H}$ .

Il teorema di EBERLEIN-SHMULYAN (vedi ad es. [10] e per l'enunciato [41] proposizione I.7.8 (p. 58)) assicura allora che esiste una sottosuccessione debolmente convergente ad un elemento  $\mathbf{x}_\infty \in \mathcal{H}$ .

Il teorema di MAZUR ([41] proposizione I.7.5 (p. 57)) assicura poi che l'insieme chiuso e convesso  $\mathcal{K}$  è debolmente chiuso e che il funzionale chiuso e convesso  $\phi$  è debolmente inferiormente semicontinuo.

Dunque  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \mathcal{K}$  e si ha che

$$\mathbf{x}_n \xrightarrow{w} \mathbf{x}_\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}_n) = \inf \{\phi(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \mathcal{K}\}, \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}_n) \geq \phi(\mathbf{x}_\infty), \end{cases}$$

per cui, essendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \phi(\mathbf{x}_n),$$

risulta  $\phi(\mathbf{x}_\infty) = \min \{\phi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{K}\}$ . □

## 5. ANALISI LIMITE

Le precedenti condizioni insiemistiche di compatibilità statica e cinematica si possono tradurre in forma variazionale descrivendo i convessi chiusi di ammissibilità come inviluppo di *iperpiani di supporto*.

Si premettono alcune proprietà degli insiemi convessi.

### 5.1. Frontiera e frontiera relativa di un convesso

Si consideri un convesso chiuso  $\mathcal{C}$  nello spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$ .

- L'inviluppo affine di  $\mathcal{C}$  è il più piccolo insieme affine che lo contiene e cioè l'intersezione della famiglia di insiemi affini che contengono  $\mathcal{C}$ .

Se l'*inviluppo affine* di  $\mathcal{C}$  non coincide con l'intero spazio  $\mathcal{X}$ , ogni punto di  $\mathcal{C}$  è un punto di frontiera.

- La *frontiera relativa* di  $\mathcal{C}$  è la frontiera dell'insieme  $\mathcal{C}$  considerato come sottoinsieme del suo inviluppo affine.

Si utilizzeranno le seguenti notazioni:

$bnd \mathcal{C}$	<i>frontiera di</i> $\mathcal{C}$
$relbnd \mathcal{C}$	<i>frontiera relativa di</i> $\mathcal{C}$
$int \mathcal{C}$	<i>interno di</i> $\mathcal{C}$
$relint \mathcal{C}$	<i>interno relativo di</i> $\mathcal{C}$

- Sia  $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$  l'*insieme delle variazioni* di  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{W}_{\mathcal{C}} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{X} : \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}\}.$$

Si ha che

$$bnd \mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\},$$

$$relbnd \mathcal{C} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} : \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \neq \mathcal{W}_{\mathcal{C}}^\perp\}.$$

Nel seguito si farà riferimento al seguente risultato.

**LEMMA 5.1.** *Se  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  sono convessi in  $\mathcal{X}$  vale la proprietà:*

$$\mathcal{W}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}^\perp = \mathcal{W}_{\mathcal{A}}^\perp \cap \mathcal{W}_{\mathcal{B}}^\perp,$$

essendo  $\mathcal{A}-\mathcal{B}$  l'*insieme convesso definito da*:

$$\mathcal{A}-\mathcal{B} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{X} : \mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}\}.$$

**Dim.** Si osservi che

$$\mathbf{z}_o^* \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}^\perp \iff \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{z} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{W}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}$$

e che, assumendo  $\mathbf{z} = (\mathbf{y}_{\mathcal{A}} - \mathbf{y}_{\mathcal{B}}) - (\mathbf{x}_{\mathcal{A}} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}})$  con  $\mathbf{y}_{\mathcal{A}}, \mathbf{x}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  e  $\mathbf{y}_{\mathcal{B}}, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}$ , quest'ultima può risciversi nella forma:

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y}_{\mathcal{A}} - \mathbf{x}_{\mathcal{A}} \rangle = \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y}_{\mathcal{B}} - \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \rangle \quad \forall \mathbf{y}_{\mathcal{A}}, \mathbf{x}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A} \quad \forall \mathbf{y}_{\mathcal{B}}, \mathbf{x}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}.$$

Ponendo alternativamente, a secondo ed a primo membro della relazione precedente,  $\mathbf{y}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}$  e  $\mathbf{y}_{\mathcal{A}} = \mathbf{x}_{\mathcal{A}}$  si mostra che entrambi i termini devono essere nulli. Ciò equivale all'asserto.  $\square$

Le proprietà dei punti, dei punti di frontiera e dei punti di frontiera relativa di un insieme convesso chiuso sono l'argomento della prossima proposizione.

**Proposizione 5.2. Frontiera e frontiera relativa.**

- I punti di un insieme convesso chiuso  $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$  sono caratterizzati dalla proprietà variazionale:

$$\mathbf{x}_o \in \mathcal{C} \iff \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \rangle \geq \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{x}_o \rangle \quad \forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}.$$

- I punti di frontiera di  $\mathcal{C}$  dall'ulteriore proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_o \in \text{bnd } \mathcal{C} \iff \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_o) \neq \{\mathbf{0}\} \\ \iff \exists \mathbf{x}_o^* \neq \{\mathbf{0}\} : \mathbf{x}_o^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_o) \\ \iff \exists \mathbf{x}_o^* \neq \{\mathbf{0}\} : \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \langle \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x}_o \rangle, \end{array} \right.$$

che equivale ad imporre che il cono delle normali a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}_o$  non degeneri nel cono nullo.

- I punti della frontiera relativa di  $\mathcal{C}$  sono a loro volta caratterizzati dalla più forte proprietà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_o \in \text{relbnd } \mathcal{C} \iff N_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_o) \neq \mathcal{W}_{\mathcal{C}}^\perp \\ \iff \exists \mathbf{x}_o^* \notin \mathcal{W}_{\mathcal{C}}^\perp : \mathbf{x}_o^* \in N_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}_o) \\ \iff \exists \mathbf{x}_o^* \notin \mathcal{W}_{\mathcal{C}}^\perp : \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{C}} \langle \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x}_o \rangle. \end{array} \right.$$

Poiché in ogni punto  $\mathbf{x}$  di  $\mathcal{C}$  si ha  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}) \supseteq \mathcal{W}_{\mathcal{C}}^\perp$  la prima condizione equivale a richiedere che l'inclusione sia stretta; in altri termini che il cono normale a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}_o$  non degeneri nel sottospazio ortogonale a  $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ .

**Dim.** La proprietà che caratterizza i punti di  $\mathcal{C}$  si dimostra osservando che

$$\mathbf{x}_o \in \mathcal{C} \iff \square_{\mathcal{C}}(\mathbf{x})_o = 0,$$

ed applicando la disegualanza di FENCHEL alla funzione indicatrice ed alla funzione di supporto di  $\mathcal{C}$ . La proprietà che caratterizzano i punti di frontiera e di frontiera relativa di  $\mathcal{C}$  sono conseguenza diretta delle definizioni di frontiera e di frontiera relativa.  $\square$

## 5.2. Processi evolutivi in un convesso

Sia  $\mathcal{C}$  un convesso chiuso nello spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$ .

Un processo evolutivo in  $\mathcal{C}$  con valore iniziale  $\mathbf{x}_o$  è una funzione vettoriale  $\mathbf{x}(t)$  definita in un intervallo di tempo  $[0, t_f]$ , con  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \in \mathcal{C}$ , quasi ovunque derivabile in  $[0, t_f]$  e tale che:

$$\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C} \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Sia  $\dot{\mathbf{x}}$  la derivata destra della funzione  $\mathbf{x}(t)$  rispetto al parametro di evoluzione:

$$\dot{\mathbf{x}} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{1}{\tau} [\mathbf{x}(t + \tau) - \mathbf{x}(t)].$$

la condizione  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}$  può essere equivalentemente espressa mediante l'inclusione differenziale

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathcal{N}_{\mathcal{C}}^-(\mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \in \mathcal{C}.$$

dove  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}^-(\mathbf{x}(t))$  è il cono convesso tangente a  $\mathcal{C}$  nel punto  $\mathbf{x}(t)$  e cioè il cono polare negativo del cono normale a  $\mathcal{C}$  in  $\mathbf{x}(t)$ .

All'insieme delle soluzioni dell'inclusione differenziale appartengono tutti e soli i processi evolutivi in  $\mathcal{C}$  con valore iniziale in  $\mathbf{x}_o \in \mathcal{C}$ .

Se  $\mathbf{x}(t) \in \text{int } \mathcal{C}$ , si ha  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}(t)) = \{\mathbf{0}\}$  e dunque  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}^-(\mathbf{x}(t)) = \mathcal{X}$ ; la velocità di evoluzione  $\dot{\mathbf{x}}$  è quindi arbitraria.

Se invece  $\mathbf{x}(t) \in \text{bnd } \mathcal{C}$ , il cono normale  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}(t))$  è non degenere e quindi  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}^-(\mathbf{x}(t)) \subset \mathcal{X}$  strettamente, per cui la condizione di inclusione è non banale.

Inoltre se  $\mathbf{x}(t) \in \text{bnd } \mathcal{C}$  ma  $\mathbf{x}(t) \notin \text{relbnd } \mathcal{C}$ , il cono normale  $\mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}(t))$  è in effetti un sottospazio non degenere e precisamente il complemento ortogonale di  $\mathcal{W}_{\mathcal{C}}$ :

$$\mathbf{x}(t) \notin \text{relbnd } \mathcal{C} \iff \mathcal{N}_{\mathcal{C}}(\mathbf{x}(t)) = \mathcal{W}_{\mathcal{C}}^\perp,$$

e l'inclusione differenziale esprime quindi una condizione di ortogonalità.

### 5.3. Separazione di convessi

Sia  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$  è un convesso in uno spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$ .

- il *cono convesso normale* a  $\mathcal{K}$  in  $\mathbf{x}$  è caratterizzato dalla proprietà

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}) := \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}' \mid \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{K}\}.$$

- Il *cono delle normali* uscenti dal convesso  $\mathcal{K}$  è definito da

$$\mathcal{N}_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\mathbf{x} \in \mathcal{K}} \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\mathbf{x}).$$

■ Sussiste la caratterizzazione variazionale

$$\boxed{\mathbf{o} \in \mathcal{K} \iff \sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}.}$$

Si noti che per  $\mathbf{x}^* \notin \mathcal{N}_{\mathcal{K}}$  risulta  $\sup_{\mathbf{y} \in \mathcal{K}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{y} \rangle = +\infty$ .

Per tale motivo nella condizione variazionale sono significativi solo i vettori di prova appartenenti al cono  $\mathcal{N}_{\mathcal{K}}$ .

Si osservi poi che per ogni coppia di convessi  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  e  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  si ha l'equivalenza:

$$\boxed{\mathbf{o} \in \mathcal{A} - \mathcal{B} \iff \mathbf{o} \in \mathcal{B} - \mathcal{A} \iff \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset.}$$

Dunque la condizione  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$  si può scrivere

$$\boxed{\sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}.}$$

Osservando che

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}, \mathbf{b} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle &= \sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{a} \rangle + \sup_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{x}^*, -\mathbf{b} \rangle = \\ &= \sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{a} \rangle - \inf_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{b} \rangle, \end{aligned}$$

la condizione  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$  si riscrive nella forma

$$\boxed{\sup_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{a} \rangle \geq \inf_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{b} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}} \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}},}$$

che equivale a

$$\boxed{\inf_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{a} \rangle \leq \sup_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{x}^*, \mathbf{b} \rangle, \quad \forall \mathbf{x}^* \in -\mathcal{N}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{N}_{\mathcal{B}}.}$$

Nel seguito si farà ricorso al seguente risultato.

**Lemma 5.3.** *Se  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$  si ha che*

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}(0) = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_o) \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_o), \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

**Dim.** Per definizione si ha che

$$\mathbf{z}_o^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}(0) \iff \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{z} \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{z} \in \mathcal{A} - \mathcal{B},$$

e quindi, scrivendo  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ , risulta

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{B},$$

o equivalentemente

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{z}_o \rangle \leq \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} - \mathbf{z}_o \rangle, \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

Ponendo nell'espressione precedente  $\mathbf{x} = \mathbf{z}_o$  si ha

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} - \mathbf{z}_o \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{B} \iff \mathbf{z}_o^* \in -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_o),$$

mentre ponendo  $\mathbf{y} = \mathbf{z}_o$  risulta

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{z}_o \rangle \leq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A} \iff \mathbf{z}_o^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_o),$$

da cui segue l'asserto.  $\square$

Le seguenti definizioni sono fondamentali nella teoria analisi limite.

- Un *iperpiano di separazione* di due insiemi convessi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  è un iperpiano tale che  $\mathcal{A}$  sia contenuto in uno dei semispazi chiusi associati all'iperpiano e  $\mathcal{B}$  in quello opposto.
- Un *iperpiano di separazione propria* di due insiemi convessi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  è un iperpiano di separazione che non include entrambi gli insiemi.

**Proposizione 5.4. Separazione.** *Si considerino nello spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$  due insiemi convessi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  tali che  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ . Allora esiste un iperpiano di separazione degli insiemi convessi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  se e solo se sussistono le proprietà equivalenti:*

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \mathbf{o} \in \text{bnd}(\mathcal{A} - \mathcal{B}) \\ ii) \quad \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}(\mathbf{o}) \neq \{\mathbf{o}\} \\ iii) \quad \exists \mathbf{z}_o^* \in \mathcal{X}' \setminus \{\mathbf{o}\} : \mathbf{z}_o^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_o) \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_o) \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \\ iv) \quad \exists \mathbf{z}_o^* \in \mathcal{X}' \setminus \{\mathbf{o}\} : \begin{cases} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{z}_o \rangle, \\ \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}. \end{cases} \end{array} \right.$$

**Dim.** La prima e la seconda proprietà si equivalgono per definizione.

L'equivalenza tra la seconda e la terza segue dal Lemma 5.3.

Osservando inoltre che la terza proprietà può scriversi:

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{z}_o \rangle \leq \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}, \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B},$$

si deduce che essa equivale alla quarta proprietà che esprime l'esistenza di un iperpiano di separazione tra  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  passante per il punto  $\mathbf{z}_o \in \mathcal{X}$  ed avente per normale il vettore  $\mathbf{z}_o^* \in \mathcal{X}'$  dello spazio duale.  $\square$

**Proposizione 5.5. Separazione propria.** *Si considerino nello spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$  due insiemi convessi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  tali che  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$ . Esiste un iperpiano di separazione propria degli insiemi convessi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  se e solo se sussistono le proprietà equivalenti:*

$$\left\{ \begin{array}{l} i) \quad \mathbf{o} \in \text{relbnd } (\mathcal{A} - \mathcal{B}) \\ ii) \quad \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}(\mathbf{o}) \neq \mathcal{W}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}^\perp \\ iii) \quad \exists \mathbf{z}_o^* \notin \mathcal{W}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}^\perp : \mathbf{z}_o^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_o) \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_o) \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \\ iv) \quad \exists \mathbf{z}_o^* \notin \mathcal{W}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}}^\perp : \begin{cases} \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{A}} \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} \rangle = \inf_{\mathbf{y} \in \mathcal{B}} \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{z}_o \rangle \\ \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \end{cases} \\ v) \quad \emptyset \neq A \cap B = \begin{cases} \text{relbnd } A \cap \text{bnd } B \\ \text{relbnd } B \cap \text{bnd } A \\ \text{relbnd } A \cap \text{relbnd } B \end{cases} \\ vi) \quad \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset, \quad \text{relint } \mathcal{A} \cap \text{relint } \mathcal{B} = \emptyset. \end{array} \right.$$

**Dim.** La prima e la seconda proprietà si equivalgono per definizione.

L'equivalenza tra la seconda e la terza segue dal Lemma 5.3.

Osservando che la terza può scriversi:

$$\langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{x} \rangle \leq \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{z}_o \rangle \leq \langle \mathbf{z}_o^*, \mathbf{y} \rangle, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{A}, \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{B}, \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B},$$

si deduce che essa equivale alla quarta proprietà che l'esprime l'esistenza di un iperpiano di separazione propria di  $\mathcal{A}$  da  $\mathcal{B}$  e cioè un iperpiano di separazione non contenente entrambi gli insiemi. Da ciò seguono anche le ultime due proprietà.

In virtù del lemma 5.1 (p. 133) la seconda proprietà è equivalente ad assumere che

$$\exists \mathbf{z}_o^* \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{z}_o) \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(\mathbf{z}_o), \quad \forall \mathbf{z}_o \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B},$$

tale che sussista almeno una delle seguenti condizioni

$$\begin{cases} \mathbf{z}_o^* \notin \mathcal{W}_{\mathcal{A}}^\perp, \\ \mathbf{z}_o^* \notin \mathcal{W}_{\mathcal{B}}^\perp. \end{cases}$$

A seconda che siano soddisfatte la prima, la seconda o entrambe tali condizioni, gli insiemi  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}_o$  verificano, rispettivamente, le proprietà *i)*, *ii)* o *iii)*.  $\square$

#### 5.4. Processi di traslazione relativa tra due convessi

Siano  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}_o$  due convessi chiusi nello spazio di HILBERT  $\mathcal{X}$ .

- Un processo di traslazione di  $\mathcal{B}_o$  è una famiglia di convessi

$$\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}_o + \mathbf{e}(t),$$

descritta da una funzione vettoriale  $\mathbf{e}(t)$  avente per dominio un intervallo di tempo  $[0, t_f]$ , quasi ovunque derivabile e con valore iniziale  $\mathbf{e}(0) = \mathbf{o}$ , così che  $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}_o$ .

Si vuole studiare il problema dell'evoluzione della intersezione  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}(t)$  in un processo di traslazione di  $\mathcal{B}_o$ , assumendo che essa sia non vuota per  $t = 0$ :

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}_o \neq \emptyset \iff \mathbf{o} \in \mathcal{A} - \mathcal{B}_o.$$

In particolare si vuole determinare la condizione da imporre sulla funzione di traslazione  $\mathbf{e}(t)$  affinché tale intersezione risulti sempre non vuota in  $[0, t_f]$ :

$$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}(t) \neq \emptyset, \quad \forall t \in [0, t_f],$$

che equivale alla condizione

$$\mathbf{o} \in \mathcal{A} - \mathcal{B}(t) \quad \forall t \in [0, t_f],$$

ovvero

$$\mathbf{e}(t) \in \mathcal{A} - \mathcal{B}_o \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Ci si è così ricondotti allo studio di un processo evolutivo  $\mathbf{e}(t)$  in  $\mathcal{C} = \mathcal{A} - \mathcal{B}_o$ . La condizione cercata è quindi fornita dall'inclusione differenziale

$$\dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}_o}^-(\mathbf{e}(t)), \quad \mathbf{e}(0) = \mathbf{o}.$$

Poichè, come è facile verificare

$$\mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}_0}(\mathbf{e}(t)) = \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}(t)}(0) = \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}(t)) \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(t)(\mathbf{a}(t)) \quad \forall \mathbf{a}(t) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(t),$$

l'inclusione differenziale per la velocità di traslazione è può riscriversi:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}(t)}^-(0) &= [\mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}(t)) \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{B}}(t)(\mathbf{a}(t))]^- = \\ &= \mathcal{N}_{\mathcal{A}}(\mathbf{a}(t))^- - \mathcal{N}_{\mathcal{B}}(t)(\mathbf{a}(t))^- \quad \forall \mathbf{a}(t) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}(t). \end{aligned}$$

Se il cono  $\mathcal{N}_{\mathcal{A}-\mathcal{B}(t)}(0)$  degenera nel vettore nullo, la condizione (1.61) è banalmente verificata e dunque la velocità di traslazione è è arbitraria. Ciò accade, in virtù del teorema (1.3), se e solo se non esiste un iperpiano di separazione di  $\mathcal{A}$  da  $\mathcal{B}(t)$ .

Se invece un siffatto iperpiano esiste ad un istante  $t \in [0, t_f]$ , l'intersezione tra  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}(t)$  diventa non vuota se e solo se la velocità con la quale il convesso  $\mathcal{B}(t)$  prosegue la sua traslazione a partire da quell'istante, risulta decomponibile come somma di due aliquote, una inclusa nel cono tangente ad  $\mathcal{A}$  e l'altra nell'opposto del cono tangente a  $\mathcal{B}(t)$ , nei punti di intersezione di  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}(t)$ .

### 5.5. Forma variazionale delle condizioni di compatibilità

Per quanto visto nella sezione 5.3 (p. 134) si ha che:

- La condizione di compatibilità statica  $\mathbf{B}'\mathcal{S}_a \cap \mathcal{F}_a \neq \emptyset$  assume la forma variazionale

$$\mathbf{B}'\mathcal{S}_a \cap \mathcal{F}_a \neq \emptyset \iff \inf_{f \in \mathcal{F}_a} \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \leq \sup_{\sigma \in \mathcal{S}_a} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \begin{cases} \forall \mathbf{v} \in -\mathcal{N}_{\mathcal{F}_a}, \\ \mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}. \end{cases}$$

- La condizione di compatibilità cinematica  $\mathbf{B}'\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a \neq \emptyset$  si scrive in termini varazionali

$$\mathbf{B}'\mathcal{U}_a \cap \mathcal{D}_a \neq \emptyset \iff \sup_{\varepsilon \in \mathcal{D}_a} \langle \boldsymbol{\tau}, \varepsilon \rangle \geq \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_a} \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle, \quad \begin{cases} \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{N}_{\mathcal{D}_a}, \\ \mathbf{B}'\boldsymbol{\tau} \in -\mathcal{N}_{\mathcal{U}_a}. \end{cases}$$

Analogamente si ha che

$$\mathcal{S}_a \cap \Sigma_a \neq \emptyset \iff \sup_{\sigma \in \mathcal{S}_a} \langle \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \rangle \geq \inf_{\sigma \in \Sigma_a} \langle \boldsymbol{\sigma}, \varepsilon \rangle, \quad \forall \varepsilon \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a} \cap -\mathcal{N}_{\Sigma_a},$$

$$\mathcal{U}_a \cap \mathcal{C}_a \neq \emptyset \iff \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}_a} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle \geq \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{C}_a} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{N}_{\mathcal{U}_a} \cap -\mathcal{N}_{\mathcal{C}_a}.$$

La discussione della condizione di compatibilità statica è il tema della *analisi limite statica* che sarà trattata nella prossima sezione.

Una analoga discussione può essere condotta in perfetta dualità per la condizione di compatibilità cinematica e forma l'oggetto della *analisi limite cinematica*.

### 5.6. Teorema fondamentale dell’analisi limite

Se la condizione di compatibilità statica è soddisfatta l’insieme  $\mathcal{S}_a \cap \Sigma_a$  è non vuoto. Sia allora  $\sigma_o \in \mathcal{S}_a \cap \Sigma_a$  una qualsiasi tensione ammissibile ed in equilibrio con un sistema di forze ammissibile  $\mathbf{B}'\sigma_o = \mathbf{f}_o \in \mathcal{F}_a$ .

Siano inoltre  $\text{Lin } \mathcal{F}_a$  e  $\text{Lin } \mathcal{S}_a$  i sottospazi lineari paralleli alle varietà affini generate dai convessi  $\mathcal{F}_a$  ed  $\mathcal{S}_a$  e cioè i sottospazi lineari delle variazioni consentite dai vincoli convessi descritti da  $\mathcal{F}_a$  ed  $\mathcal{S}_a$ .

Un cinematismo  $\mathbf{u}_o \in \mathcal{V}$  è detto un *cinematismo di collasso* se è un *cinematismo libero*:

$$-\mathbf{u}_o \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}_a}(\mathbf{f}_o), \quad \mathbf{u}_o \notin (\text{Lin } \mathcal{F}_a)^\perp,$$

ed è congruente con una *deformazione libera di collasso*:

$$\varepsilon_o = \mathbf{B}\mathbf{u}_o \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\sigma_o), \quad \varepsilon_o \notin (\text{Lin } \mathcal{S}_a)^\perp.$$

*Cinematismo  
di collasso*

Si possono distinguere le tre *tipologie di collasso*:

$\mathbf{u}_o \notin (\text{Lin } \mathbf{B}'\mathcal{S}_a)^\perp,$	collasso <i>interno</i>
$\mathbf{u}_o \notin (\text{Lin } \mathcal{F}_a)^\perp,$	collasso <i>esterno</i>
$\mathbf{u}_o \notin (\text{Lin } \mathbf{B}'\mathcal{S}_a)^\perp \cap (\text{Lin } \mathcal{F}_a)^\perp,$	collasso <i>simultaneo</i>

Vale il seguente fondamentale risultato.

**Proposizione 5.6. Teorema fondamentale.** *Esiste un cinematismo di collasso se e solo se la struttura è in uno stato statico limite, cioè se e solo se i due insiemi convessi di ammissibilità  $\mathbf{B}'\mathcal{S}_a$  e  $\mathcal{F}_a$  sono separati in modo proprio.*

**Dim.** Un iperpiano separante i convessi  $\mathcal{S}_a$  e  $\Sigma_a$  e passante per il punto  $\sigma_o \in \mathcal{S}_a \cap \Sigma_a$  ha equazione:

$$\langle \sigma - \sigma_o, \varepsilon_o \rangle = 0, \quad \sigma \in \mathcal{S},$$

e soddisfa le diseguaglianze

$$\langle \sigma - \sigma_o, \varepsilon_o \rangle \leq 0 \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_a,$$

$$\langle \sigma - \sigma_o, \varepsilon_o \rangle \geq 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma_a.$$

e cioè:

$$\sup_{\sigma \in \mathcal{S}_a} \langle \sigma, \varepsilon_o \rangle = \langle \sigma_o, \varepsilon_o \rangle = \inf_{\sigma \in \Sigma_a} \langle \sigma, \varepsilon_o \rangle,$$

ovvero:

$$\varepsilon_o \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\sigma_o) \cap -\mathcal{N}_{\Sigma_a}(\sigma_o).$$

Il risultato allora segue dalla formula:

$$\mathcal{N}_{\Sigma_a}(\sigma_o) = \mathbf{B} \mathcal{N}_{\mathcal{F}_a}(\mathbf{B}' \sigma_o).$$

Essa può essere ricavata ricordando che:

$$\mathcal{N}_{\Sigma_a}(\sigma_o) = \partial \sqcup_{\Sigma_a}(\sigma_o),$$

ed osservando che per definizione:

$$\sqcup_{\Sigma_a}(\sigma_o) = \sqcup_{\mathcal{F}_a}(\mathbf{B}' \sigma_o) = (\sqcup_{\mathcal{F}_a} \mathbf{B}')(\sigma_o).$$

Applicando quindi la regola di composizione dei sottodifferenziali si ottiene:

$$\partial \sqcup_{\Sigma_a}(\sigma_o) = \partial(\sqcup_{\mathcal{F}_a} \mathbf{B}')(\sigma_o) = \mathbf{B} \partial \sqcup_{\mathcal{F}_a}(\mathbf{B}' \sigma_o),$$

che fornisce la formula cercata.

Esiste quindi  $\mathbf{u}_o \in \mathcal{N}_{\mathcal{F}_a}(\mathbf{B}' \sigma_o)$  tale che  $\varepsilon_o = \mathbf{B} \mathbf{u}_o$ .

La separazione propria dei domini  $\mathcal{F}_a$  e  $\mathbf{B}' \mathcal{S}_a$  richiede inoltre che  $\mathbf{u}_o \notin (\text{Lin } \mathcal{F}_a)^\perp$  ovvero che  $\mathbf{B} \mathbf{u}_o \notin (\text{Lin } \mathcal{S}_a)^\perp$ , dunque che  $\mathbf{u}_o$  sia un cinematicismo di collasso.  $\square$

E' immediato verificare che, se  $\varepsilon_o = \mathbf{B} \mathbf{u}_o$  rappresenta la normale all'iperpiano di separazione dei convessi  $\mathcal{S}_a$  e  $\Sigma_a$ , il cinematicismo di collasso  $\mathbf{u}_o$  rappresenta la normale all'iperpiano di separazione dei convessi  $\mathbf{B}' \mathcal{S}_a$  e  $\mathcal{F}_a$ .  
Il risultato è esemplificato nelle figg. 5.1 e 5.2.

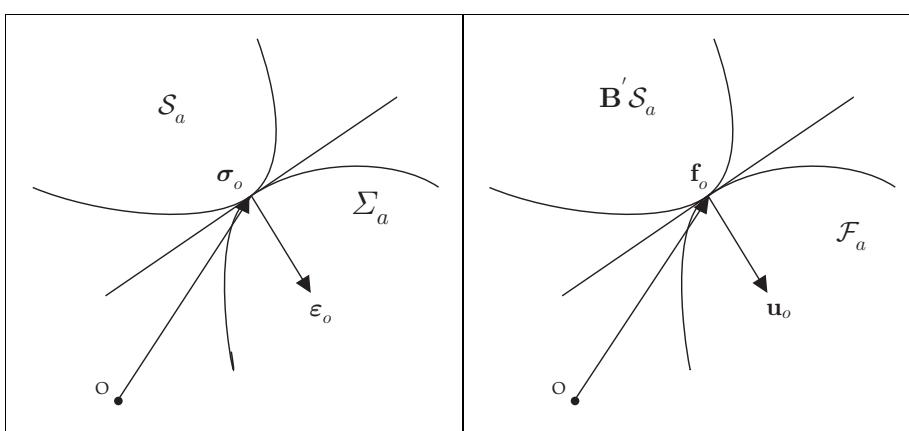


Fig. 5.1

Fig. 5.2

### 5.7. Processi di carico

Si consideri il caso in cui il convesso dei sistemi di forze ammissibili sia definito come somma di un carico variabile con legge affine  $\ell = \ell_o + \lambda\ell_d$  e di un convesso fisso di reazioni vincolari  $R_a$ :

$$\mathcal{F}_a = \ell_o + \lambda\ell_d + R_a.$$

Si vogliono determinare i valori del parametro di carico  $\lambda \in \mathbb{R}$  corrispondenti a condizioni statiche limite.

La condizione di ammissibilità del carico si scrive

$$\begin{aligned} \langle \ell_o, \mathbf{v} \rangle + \langle \lambda\ell_d, \mathbf{v} \rangle + \inf_{\mathbf{r} \in R_a} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle &\leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \\ \forall -\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{R_a}, \mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}, \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \lambda \langle \ell_d, \mathbf{v} \rangle &\leq \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle - \langle \ell_o, \mathbf{v} \rangle - \inf_{\mathbf{r} \in R_a} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle, \\ \forall -\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{R_a}, \mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}. \end{aligned}$$

Definendo il dominio convesso dei *sistemi di forze ammissibili*:

$$\Lambda_a = \mathbf{B}'\mathcal{S}_a - R_a,$$

il cono convesso dei *cinematismi di prova*

$$\mathcal{N}_{\Lambda_a} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} \mid -\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{R_a}, \mathbf{B}\mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}\},$$

ed il funzionale sublineare della *dissipazione virtuale*:

$$D(\mathbf{v}) := \sup_{\ell \in \Lambda_a} \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \langle \ell_o, \mathbf{v} \rangle = \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a} \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle - \inf_{\mathbf{r} \in R_a} \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle - \langle \ell_o, \mathbf{v} \rangle,$$

la condizione di ammissibilità del parametro di carico si può esprimere mediante le seguenti tre condizioni variazionali:

$$\begin{aligned} 0 \leq D(\mathbf{v}), \quad &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\Lambda_a}, \langle \ell_d, \mathbf{v} \rangle = 0, \\ \lambda \leq D(\mathbf{v}), \quad &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\Lambda_a}, \langle \ell_d, \mathbf{v} \rangle = 1, \\ \lambda \geq -D(\mathbf{v}), \quad &\forall \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{\Lambda_a}, \langle \ell_d, \mathbf{v} \rangle = -1. \end{aligned}$$

che in termini meccanici si enunciano :

- i) La dissipazione virtuale deve essere *non negativa* per ogni cinematismo di prova per cui il direttore del processo di carico  $\ell_d$  compie potenza virtuale *nulla*.
- ii) Il parametro di carico deve essere *non maggiore* della dissipazione virtuale corrispondente ad ogni cinematismo di prova che fa compiere potenza virtuale *unitaria e positiva* al direttore del processo di carico.
- iii) Il parametro di carico deve essere *non minore* dell'opposto della dissipazione virtuale corrispondente ad ogni cinematismo di prova che fa compiere potenza virtuale *unitaria e negativa* al direttore del processo di carico.

La prima condizione variazionale equivale ad imporre che

$$\ell_o \in A_a + \text{Lin}\{\ell_d\},$$

e cioè che

- il carico di riferimento  $\ell_o$  appartenga al cilindro di sezione  $A_a$  e generatrice  $\ell_d$ .

Se tale condizione è soddisfatta si definiscono i *moltiplicatori di collasso*

$$\lambda^+ = \inf \{D(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{A_a}, \langle \ell_d, \mathbf{v} \rangle = 1\},$$

$$\lambda^- = \sup \{-D(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{N}_{A_a}, \langle \ell_d, \mathbf{v} \rangle = -1\}.$$

Il parametro di carico sarà quindi ammissibile se e solo se

$$\lambda^- \leq \lambda \leq \lambda^+,$$

e determinerà una condizione statica limite quando attinge uno dei valori estremi.

La discussione è esemplificata in figura 5.3.

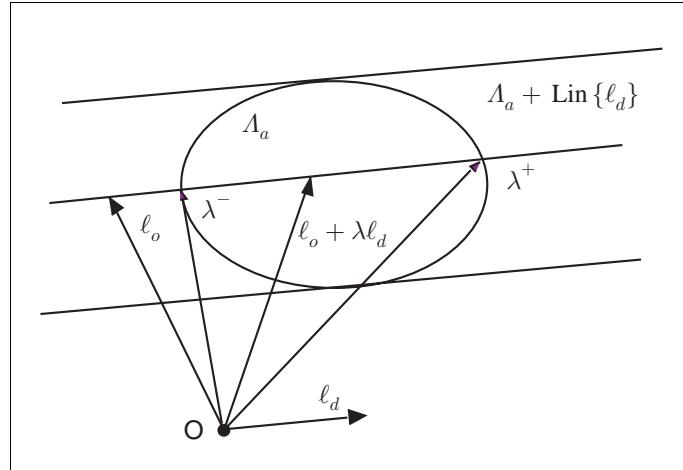


Fig. 5.3

## 6. FORMULAZIONI VARIAZIONALI

Si è visto come il problema dell'equilibrio elastico sia naturalmente esprimibile mediante le inclusioni sottodifferenziali:

$$\begin{cases} \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} \in \partial\gamma(\mathbf{u}) \iff \mathbf{u} \in \partial\gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}), \\ \mathbf{B}\mathbf{u} \in \partial\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) \iff \boldsymbol{\sigma} \in \partial\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}). \end{cases}$$

Facendo ricorso alle relazioni di YOUNG-FENCHEL si riconosce che le due relazioni precedenti sono equivalenti ad assumere che

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) + \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) &= \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle, \\ \gamma(\mathbf{u}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}) &= \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle. \end{aligned}$$

Ricordando che per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  e  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}$  si ha

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{B}\mathbf{v}) + \varphi^*(\boldsymbol{\tau}) &\geq \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \\ \gamma(\mathbf{v}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\tau}) &\leq \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Ne segue che per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ,  $\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}$

$$\varphi(\mathbf{B}\mathbf{v}) - \gamma(\mathbf{v}) \geq -\varphi^*(\boldsymbol{\tau}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\tau}),$$

e che

$$\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{u}) = -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}),$$

se e solo se la coppia  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  è soluzione del problema dell'equilibrio elastico. E' naturale quindi definire

- il funzionale convesso *energia potenziale* della struttura:

$$F(\mathbf{u}) := \varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{u}),$$

- il funzionale concavo *energia complementare* della struttura:

$$G(\boldsymbol{\sigma}) := -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}).$$

La soluzione del problema dell'equilibrio elastico in termini di spostamenti o di sforzi si caratterizza dunque rispettivamente come punto di minimo del funzionale energia elastica o come punto di massimo del funzionale energia complementare:

$$\mathbf{u} = \arg \min F,$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \arg \max G.$$

In soluzione i funzionali assumono il medesimo valore:

$$F(\mathbf{u}) = G(\boldsymbol{\sigma}).$$

Questi classici principi di estremo sono due elementi di una famiglia di *principi di stazionarietà* equivalenti al problema dell'equilibrio elastico (vedi sezione 6.2 (p. 149)).

Alla definizione dei funzionali energia potenziale ed energia complementare si può pervenire anche partendo dalle formulazioni del problema elastico in termini di spostamenti o di sforzi.

■ La formulazione in termini di spostamenti:

$$\mathbf{B}' \partial\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) \cap \partial\gamma(\mathbf{u}) \neq \emptyset,$$

applicando la regola di derivazione a catena:

$$\mathbf{B}' \partial\varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) = \partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}),$$

si scrive nella forma

$$\partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) \cap \partial\gamma(\mathbf{u}) \neq \emptyset \iff \mathbf{o} \in \partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) - \partial\gamma(\mathbf{u}).$$

La regola di sottodifferenziazione della somma fornisce quindi la condizione di minimo

$$\mathbf{o} \in \partial(\varphi \circ \mathbf{B} - \gamma)(\mathbf{u}) = \partial F(\mathbf{u}).$$

■ Analogamente la formulazione in termini di sforzi:

$$\partial\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) \cap \mathbf{B}' \partial\gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}) \neq \emptyset,$$

applicando la regola di derivazione a catena

$$\mathbf{B}' \partial\gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}) = \partial(\gamma^* \circ \mathbf{B}')(\boldsymbol{\sigma}),$$

si scrive nella forma

$$\partial(\gamma^* \circ \mathbf{B}')(\boldsymbol{\sigma}) \cap \partial\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) \neq \emptyset \iff \mathbf{o} \in \partial(\gamma^* \circ \mathbf{B}')(\boldsymbol{\sigma}) - \partial\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}).$$

La regola di sottodifferenziazione della somma fornisce quindi la condizione di massimo

$$\mathbf{o} \in \partial(\gamma^* \circ \mathbf{B}' - \varphi^*)(\boldsymbol{\sigma}) = \partial G(\boldsymbol{\sigma}).$$

Si vuole ora mostrare come si specializzano le espressioni dei funzionali energia elastica ed energia complementare nel caso di vincoli affini.

Si assume pertanto che sulla struttura agisca un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}$  e che i sistemi reattivi siano dovuti alla presenza di un vincolo perfetto, liscio e bilaterale che definisce una varietà lineare di spostamenti ammissibili

$$\mathcal{L}_\mathbf{a} = \mathbf{w} + \mathcal{L} \subset \mathcal{V}.$$

- $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$  è il sottospazio lineare di spostamenti conformi  $\mathcal{L}$  e
- $\mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp \subset \mathcal{F}$  è il sottospazio lineare delle reazioni vincolari.

Il legame vincolare tra forze e spostamenti è allora definito dal funzionale concavo

$$\gamma(\mathbf{u}) := \langle \ell, \mathbf{u} \rangle + \square_{\mathcal{L}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}),$$

il cui coniugato è

$$\gamma^*(\mathbf{f}) := \square_{\mathcal{R}}(\mathbf{f} - \ell).$$

Si ha allora che

- il funzionale *energia potenziale* della struttura è dato da

$$F(\mathbf{u}) := \varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) - \langle \ell, \mathbf{u} \rangle - \square_{\mathcal{L}}(\mathbf{u} - \mathbf{w}),$$

e cioè

$$F(\mathbf{u}) := \varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) - \langle \ell, \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L},$$

- il funzionale concavo *energia complementare* della struttura è dato da

$$G(\boldsymbol{\sigma}) := -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) + \square_{\mathcal{R}}(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} - \ell),$$

e cioè

$$G(\boldsymbol{\sigma}) := -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}), \quad \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} \in \ell + \mathcal{R}.$$

**Osservazione 6.1.** Siano

- $\phi = \varphi \circ \mathbf{B} : \mathcal{V} \mapsto \mathfrak{R}$  il funzionale che ad ogni campo di spostamenti associa l'energia elastica della struttura e
- $\phi^* : \mathcal{F} \mapsto \mathfrak{R}$  il funzionale coniugato.

Il funzionale  $\phi$  può essere valutato integrando lungo una curva  $\mathbf{c} : I \mapsto \mathcal{V}$  il legame  $\mathcal{K} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{F}$  (eventualmente multivoco) che esprime la risposta elastica della struttura.

Se  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{o} \in \text{dom } \phi$  e  $\mathbf{c}(1) = \mathbf{u} \in \text{dom } \phi$  si ha che

$$\phi(\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{o}) = \int_0^1 \langle \mathcal{K}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{c}'(t) \rangle dt,$$

Dualmente se  $\mathbf{c}(0) = \mathbf{o} \in \text{dom } \phi^*$  e  $\mathbf{c}(1) = \mathbf{f} \in \text{dom } \phi^*$  si ha che

$$\phi^*(\mathbf{f}) - \phi^*(\mathbf{o}) = \int_0^1 \langle \mathcal{K}^{-1}(\mathbf{c}(t)), \mathbf{c}'(t) \rangle dt.$$

Si assuma ora che il punto  $\{\mathbf{o}, \mathbf{o}\}$  appartenga al grafico della relazione  $\mathcal{G}(\mathcal{K})$ . Dalla relazione di FENCHEL

$$\mathbf{f} \in \partial\phi(\mathbf{u}) \Rightarrow \phi(\mathbf{u}) + \phi^*(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle,$$

si deduce che  $\phi(\mathbf{o}) + \phi^*(\mathbf{o}) = 0$ . Fissando le costanti di integrazione in modo che risulti  $\phi(\mathbf{o}) = 0$  si ha che anche  $\phi^*(\mathbf{o}) = 0$ . Dalla diseguaglianza di FENCHEL

$$\phi(\mathbf{u}) + \phi^*(\mathbf{f}) \geq \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F},$$

- ponendo  $\mathbf{f} = \mathbf{o}$ , si deduce che  $\phi(\mathbf{u}) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ,
- ponendo  $\mathbf{u} = \mathbf{o}$ , si deduce che  $\phi^*(\mathbf{f}) \geq 0$ ,  $\forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}$ .

La relazione di risposta elastica della struttura si può scrivere

$$\mathbf{f} = \ell + \mathbf{r} \in \partial\phi(\mathbf{u}), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R}, \quad \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L},$$

e quindi si ha che

$$\phi(\mathbf{u}) + \phi^*(\ell + \mathbf{r}) = \langle \ell + \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle.$$

- In assenza di sedimenti imposti ( $\mathbf{w} = \mathbf{o}$ ) si ha che  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{u} \rangle = 0$  e pertanto si deduce che

$$F(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{u}) - \langle \ell, \mathbf{u} \rangle = -\phi^*(\ell + \mathbf{r}) \leq 0.$$

- Viceversa in assenza di carichi ( $\ell = \mathbf{o}$ ) risulta

$$F(\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{u}) \geq 0.$$

Si può dunque concludere che

- In una struttura elastica con vincoli lisci perfetti e bilaterali il funzionale energia potenziale  $F : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  assume in soluzione valori positivi se la struttura si deforma per effetto di spostamenti impressi, assume invece valori negativi se la struttura si deforma per effetto di carichi applicati.

### 6.1. Funzionali misti

La teoria del potenziale per operatori multivoci monotoni fornisce lo strumento per la individuazione diretta dei funzionali della famiglia.

Si esamini dapprima il problema dell'equilibrio elastico posto in forma mista in quanto espresso in termini di spostamenti e di sforzi.

Definiti gli spazi duali  $\mathcal{H} = \mathcal{V} \times \mathcal{S}$  e  $\mathcal{H}' = \mathcal{F} \times \mathcal{D}$ , il problema assume la forma:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{o} \\ \mathbf{o} \end{vmatrix} \in \mathbf{A} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{vmatrix},$$

dove l'operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$  è definito da

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\partial\gamma & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} & -\partial\varphi^* \end{bmatrix}.$$

Si riconosce che esso è somma di un operatore lineare simmetrico (dunque conservativo) e di due operatori multivoci monotoni conservativi rispettivamente non-crescente e non-decrescente nelle variabili di stato  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  e  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ .

Il relativo potenziale può essere valutato per via diretta integrando lungo il raggio che individua il punto  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{\{\mathbf{o}, \mathbf{o}\}}^{\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}} \langle \mathbf{A} \begin{vmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} d\bar{\mathbf{u}} \\ d\bar{\boldsymbol{\sigma}} \end{vmatrix} \rangle = \\ &= \int_{\{\mathbf{o}, \mathbf{o}\}}^{\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}} -\langle \partial\gamma(\bar{\mathbf{u}}), d\bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{B}' \bar{\boldsymbol{\sigma}}, d\bar{\mathbf{u}} \rangle + \langle \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}}, d\bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle - \langle \partial\varphi^*(\bar{\boldsymbol{\sigma}}), d\bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle, \end{aligned}$$

che, a meno di costanti di integrazione, fornisce l'espressione del potenziale

$$R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = -\gamma(\mathbf{u}) - \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle.$$

La forma speciale di tale funzionale relativa al caso di elasticità lineare è nota in letteratura come

■ *funzionale di HELLINGER-REISSNER*.

Il funzionale  $R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  risulta convesso in  $\mathbf{u}$  e concavo in  $\boldsymbol{\sigma}$ .

La soluzione del problema dell'equilibrio elastico è pertanto un punto di sella del funzionale  $R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ :

$$\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} = \arg \min \max R.$$

## 6.2. L'albero varazionale

La trattazione può essere generalizzata riscrivendo il problema dell'equilibrio elastico in temini di tutte le variabili di stato:

$$\begin{cases} \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}, & \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \partial \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}), \\ \mathbf{u} \in \partial \gamma^*(\mathbf{f}), \end{array} \right. \\ \mathbf{B} \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \end{cases}$$

Gli spazi prodotto duali sono in tal caso:

$$\mathcal{H} = \mathcal{V} \times \mathcal{S} \times \mathcal{D} \times \mathcal{F},$$

$$\mathcal{H}' = \mathcal{F} \times \mathcal{D} \times \mathcal{S} \times \mathcal{V},$$

e l'operatore  $\mathbf{A} : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}'$  che governa il problema è dato da:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B}' & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{\mathcal{F}} \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{\mathcal{D}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I}_{\mathcal{S}} & \partial \varphi & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I}_{\mathcal{U}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \partial \gamma^* \end{bmatrix}$$

Integrando lungo un raggio in  $\mathcal{H}$  si ottiene l'espressione del potenziale:

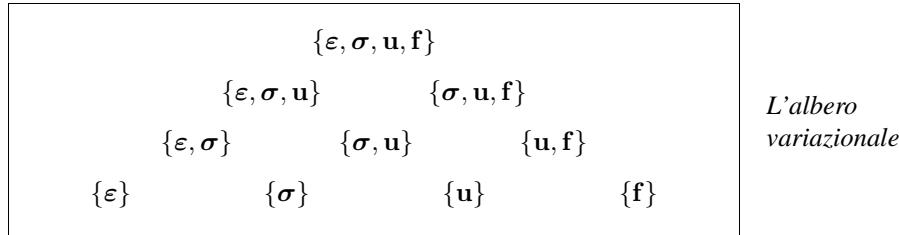
$$L(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) = \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma^*(\mathbf{f}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle,$$

che risulta convesso in  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , concavo in  $\mathbf{f}$  e lineare in  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Una soluzione  $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \mathbf{f}\}$  rappresenta dunque un punto di minimo parziale rispetto ad  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , di massimo parziale rispetto ad  $\mathbf{f}$  e di stazionarietà rispetto a  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$ .

Eliminando in modo opportuno le variabili di stato, si genera una

■ *famiglia di potenziali* secondo il seguente schema ad albero:



La famiglia consiste dei seguenti dieci potenziali:

$$\begin{aligned}
 L(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) &= \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma^*(\mathbf{f}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \\
 H_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) &= \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - \gamma(\mathbf{u}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \\
 H_2(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) &= -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) + \gamma^*(\mathbf{f}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \\
 R_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) &= \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}) - \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle, \\
 R_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) &= -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) - \gamma(\mathbf{u}) + \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle, \\
 R_3(\mathbf{u}, \mathbf{f}) &= \varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) + \gamma^*(\mathbf{f}) - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle, \\
 P_1(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \varphi(\boldsymbol{\varepsilon}) - (\gamma^* \circ \mathbf{B}')^*(\boldsymbol{\varepsilon}), \\
 P_2(\boldsymbol{\sigma}) &= -\varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma}), \\
 P_3(\mathbf{u}) &= \varphi(\mathbf{B}\mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{u}), \\
 P_4(\mathbf{f}) &= -(\varphi \circ \mathbf{B})^*(\mathbf{f}) + \gamma^*(\mathbf{f}).
 \end{aligned}$$

*La famiglia variazionale*

Tutti i potenziali della famiglia assumono un identico valore in soluzione.

Le proprietà di estremo dei singoli potenziali si deducono immediatamente valutando la convessità o la concavità rispetto agli argomenti.

- In elasticità lineare la forma speciale assunta dal funzionale  $H_1(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$  è nota in letteratura come *funzionale di HU-WASHIZU*.

Si noti infine che

- il funzionale  $R_2(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$  è il *funzionale di HELLINGER-REISSNER*  $R(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma})$ ,
- i funzionali  $P_3(\mathbf{u})$  e  $P_2(\boldsymbol{\sigma})$  sono rispettivamente i funzionali *energia potenziale*  $F(\mathbf{u})$  ed *energia complementare*  $G(\boldsymbol{\sigma})$  della struttura.

**Osservazione 6.2.** L'espressione dei potenziali  $P_1(\boldsymbol{\varepsilon})$  e  $P_4(\mathbf{f})$  prevede di valutare dei funzionali coniugati  $(\gamma^* \circ \mathbf{B}')^*$  e  $(\varphi \circ \mathbf{B})^*$ .

Poiché in essi compare l'operatore cinematico  $\mathbf{B}$  tale valutazione richiede in effetti la soluzione di un problema ausiliario di equilibrio elastico.

E' questo il motivo per cui i potenziali  $P_1(\boldsymbol{\varepsilon})$  e  $P_4(\mathbf{f})$  non sono classicamente citati in letteratura.

Il principio di estremo corrispondente a  $P_4(\mathbf{f})$  trova applicazione in particolari circostanze nelle quali la non linearità del problema è confinata alla relazione vincolare esterna.

### 6.3. Diseguaglianze variazionali

Le proprietà di estremo dei funzionali della famiglia variazionale possono essere espresse richiedendo che i sotto(sopra)differenziali parziali rispetto ai singoli argomenti contengano il vettore nullo dello spazio duale.

Si esamina il funzionale energia potenziale della struttura la cui condizione di minimo assoluto può scriversi nelle forme equivalenti

$$\mathbf{0} \in \partial F(\mathbf{u}) \iff F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \iff d^+F(\mathbf{u}; \mathbf{h}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{V},$$

dove  $d^+$  denota la derivata unidirezionale.

Si noti che, esplicitando l'espressione di  $F$ , la condizione di estremo si scrive

$$\varphi(\mathbf{Bv}) - \varphi(\mathbf{Bu}) \geq \gamma(\mathbf{v}) - \gamma(\mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

e che, facendo ricorso alla regola di derivazione a catena per le derivate unidirezionali, la diseguaglianza variazionale  $d^+F(\mathbf{u}; \mathbf{h}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{V}$ , diventa

$$d^+ \varphi(\mathbf{Bu}; \mathbf{Bh}) \geq d^+ \gamma(\mathbf{u}; \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{V}.$$

Nel caso di elasticità lineare il potenziale elastico è quadratico:

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} b(\mathbf{u}, \mathbf{u}),$$

e la diseguaglianza variazionale si specializza in:

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{h}) \geq d\gamma(\mathbf{u}; \mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathcal{V}.$$

Analoghe relazioni possono scriversi per tutti i potenziali della famiglia.

### 6.4. Unicità della soluzione

Si è visto come la questione dell'esistenza di una soluzione del problema dell'equilibrio elastico generalizzato sia suscettibile di una risposta sotto ipotesi molto generali. Al contrario, l'analisi delle proprietà dell'insieme delle soluzioni  $\{\mathbf{u}, \mathbf{f}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{V} \times \mathcal{F} \times \mathcal{D} \times \mathcal{S}$  è più efficacemente condotta facendo esplicito riferimento alle peculiarità del problema particolare da indagare.

Solo alcune semplici considerazioni possono essere svolte nel contesto generale.

Se il legame elastico  $\mathcal{E} : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{S}$  è strettamente monotono allora il potenziale  $\varphi$  è strettamente convesso e la soluzione in termini di deformazioni è unica. L'unicità della soluzione in termini di spostamenti è assicurata a meno di uno spostamento rigido addizionale che non alteri il valore del potenziale concavo  $\gamma : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{F}$ .

Se il legame elastico  $\mathcal{E}^{-1} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}$  è strettamente monotono, risulta unica la soluzione in termini di tensioni. Ciò comporta ovviamente anche l'unicità del sistema di forze in soluzione.

## 7. TEOREMI DI CASTIGLIANO E DI MENABREA

La teoria dei problemi elastici generalizzati consente di pervenire in modo immediato alla formulazione (generalizzata) dei classici teoremi sulle derivate del lavoro di deformazione dovuti a MENABREA [1] ed a CASTIGLIANO [2].

Questi teoremi esplicitano le proprietà di estremo dei funzionali convessi coniugati:

- *energia elastica della struttura*

$$\phi(\mathbf{u}) := (\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \varphi_{\mathbf{x}}((\mathbf{B}\mathbf{u})_{\mathbf{x}}) \, dv,$$

- *energia complementare della struttura*

$$\phi^*(\mathbf{f}) := \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \{ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \phi(\mathbf{v}) \},$$

legati dalla relazione di complementarietà (*teorema di CLAPEYRON generalizzato*):

$$\phi(\mathbf{u}) + \phi^*(\mathbf{f}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle.$$

Il *secondo teorema di CASTIGLIANO* consiste in una riformulazione della condizione di stazionarietà del funzionale energia potenziale della struttura. Si consideri infatti l'energia potenziale e cioè il funzionale convesso definito dalla differenza

$$F(\mathbf{u}) := \phi(\mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{u}) = (\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}) - \gamma(\mathbf{u}),$$

e si applichi la regola di addizione dei sottodifferenziali.

La condizione di stazionarietà che caratterizza un campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  soluzione del problema dell'equilibrio elastico generalizzato si scrive allora

$$\mathbf{o} \in \partial F(\mathbf{u}) \iff \mathbf{o} \in \partial \phi(\mathbf{u}) - \partial \gamma(\mathbf{u}) \iff \partial \phi(\mathbf{u}) \cap \partial \gamma(\mathbf{u}) \neq \emptyset.$$

Esiste dunque un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  tale che

$$\begin{cases} \mathbf{f} \in \partial \phi(\mathbf{u}) = \partial(\varphi \circ \mathbf{B})(\mathbf{u}), \\ \mathbf{f} \in \partial \gamma(\mathbf{u}). \end{cases}$$

Si assume ora che sulla struttura agisca un sistema di forze attive  $\ell \in \mathcal{F}$  e che i sistemi reattivi siano dovuti alla presenza di un vincolo che impone agli spostamenti ammissibili di appartenere ad un insieme convesso  $\mathcal{K} \subset \mathcal{V}$ . Ciò equivale ad assumere che il legame vincolare tra forze e spostamenti sia definito dal funzionale concavo

$$\gamma(\mathbf{u}) := \langle \ell, \mathbf{u} \rangle + \Gamma_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}).$$

Si ha allora che

$$\mathbf{f} \in \partial \gamma(\mathbf{u}) \iff \mathbf{f} = \ell + \mathbf{r}, \quad -\mathbf{r} \in \mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}),$$

dove  $\mathcal{N}_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}) = \partial \Gamma_{\mathcal{K}}(\mathbf{u})$  è il cono delle normali uscenti da  $\mathcal{K}$  nel punto  $\mathbf{u} \in \mathcal{K}$ .

La condizione di stazionarietà del funzionale energia potenziale si scrive pertanto

$$\ell + \mathbf{r} \in \partial\phi(\mathbf{u}),$$

ovvero

$$\langle \ell + \mathbf{r}, \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \leq d^+ \phi(\mathbf{u}; \mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Assumendo che i vincoli siano lisci, perfetti e bilaterali, l'insieme degli spostamenti ammissibili risulta essere una varietà affine  $\mathcal{K} = \mathbf{w} + \mathcal{L}$  parallela ad un sottospazio lineare di conformità  $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ . La condizione di stazionarietà assume la forma di una disequazione variazionale

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle \leq d^+ \phi(\mathbf{u}; \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Infine se il potenziale elastico  $\varphi$  è differenziabile la condizione di stazionarietà diviene lineare e si giunge al classico enunciato del

**Proposizione 7.1. Secondo teorema di Castigliano.** *Si consideri una struttura elastica caratterizzata da un potenziale elastico differenziabile e da vincoli perfetti, lisci e bilaterali. Allora il lavoro virtuale compiuto da un sistema di forze attive per uno spostamento tangente conforme è eguale alla derivata dell'energia elastica della struttura nella direzione dello spostamento tangente, valutata in corrispondenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico*

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = d\phi(\mathbf{u}; \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

□

**Osservazione 7.1.** Il secondo teorema di CASTIGLIANO nella formulazione originaria si riferisce a strutture con elasticità lineare e vincoli perfetti, lisci e bilaterali [14], [18]. La formulazione della proposizione 7.1 ne estende la validità al contesto più generale di elasticità non lineare con legame di cedevolezza elastica strettamente monotono. Tale proprietà assicura infatti la stretta convessità del potenziale energia complementare della struttura e quindi, in forza della proposizione 2.9 (p. 116), la differenziabilità del potenziale energia elastica della struttura. ■

Al *primo teorema di Castigliano* si perviene esprimendo il problema dell'equilibrio elastico in forma duale. A tal fine si osservi che in termini dei funzionali coniugati il problema dell'equilibrio elastico generalizzato si scrive

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in \partial\phi^*(\mathbf{f}), \\ \mathbf{u} \in \partial\gamma^*(\mathbf{f}), \end{cases}$$

Se l'energia elastica  $\varphi$  è strettamente convessa, anche il funzionale  $\phi = \varphi \circ \mathbf{B}$  è strettamente convesso e dalla proposizione 2.9 (p. 116) segue che il funzionale coniugato  $\phi^*$  è differenziabile. Si così perviene al

**Proposizione 7.2. Primo teorema di Castigliano.** *Si consideri una struttura elastica caratterizzata da un potenziale elastico strettamente convesso. Allora il lavoro virtuale compiuto per lo spostamento soluzione del problema dell'equilibrio elastico da un qualsiasi sistema di forze è eguale alla derivata dell'energia complementare della struttura nella direzione del sistema di forze, valutata in corrispondenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico*

$$\langle \bar{\mathbf{f}}, \mathbf{u} \rangle = d\phi^*(\mathbf{f}; \bar{\mathbf{f}}), \quad \forall \bar{\mathbf{f}} \in \mathcal{F}.$$

□

**Osservazione 7.2.** Il primo teorema di CASTIGLIANO nella sua formulazione originaria si riferisce a strutture con elasticità lineare e vincoli perfetti, lisci e bilaterali [14], [18]. La formulazione della proposizione 7.2 ne estende la validità al contesto più generale di elasticità non lineare con legame di rigidezza elastica strettamente monotono. Tale proprietà assicura infatti la stretta convessità del potenziale energia elastica della struttura e quindi, in forza della proposizione 2.9 (p. 116), la differenziabilità del potenziale energia complementare della struttura. La validità del primo teorema di CASTIGLIANO consente inoltre che i vincoli siano governati da un arbitrario potenziale convesso purché sia assicurata l'esistenza della soluzione del problema dell'equilibrio elastico. ■

Il *teorema di MENABREA*<sup>24</sup> si deduce dal primo teorema di CASTIGLIANO assumendo che i vincoli siano lisci, perfetti e bilaterali ed effettuando la derivata dell'energia complementare  $\phi^*$  della struttura secondo incrementi costituiti da sistemi reattivi  $\rho \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp$ . Osservando che  $\langle \rho, \mathbf{u} \rangle = \langle \rho, \mathbf{w} \rangle$  si ottiene

$$d\phi^*(\ell + \mathbf{r}; \rho) = \langle \rho, \mathbf{w} \rangle, \quad \forall \rho \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp.$$

In assenza di cedimenti vincolari si ha poi che  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  e dunque, sussistendo la condizione di ortogonalità  $\langle \rho, \mathbf{u} \rangle = 0$ , si deduce che

$$d\phi^*(\ell + \mathbf{r}; \rho) = 0, \quad \forall \rho \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp.$$

La convessità del funzionale  $\phi^*$  implica che tale condizione di stazionarietà sia in effetti una proprietà di minimo.

---

<sup>24</sup> LUIGI FEDERICO MENABREA (1809-1896) Nato in Savoia (Francia), si laureò a Torino in ingegneria nel 1832. Fu, oltre che scienziato, militare (Generale del Genio), uomo politico (già nel 1848 deputato al Parlamento subalpino), ministro e diplomatico. Ministro della Marina col Ricasoli (1861-62), dei Lavori pubblici nel gabinetto FARINI-MINGHETTI (1862-64) e fu egli stesso Presidente del Consiglio nel 1867-69. Nell'ultimo periodo della sua vita ebbe missioni diplomatiche, fu Ambasciatore a Londra nel 1876-82 e a Parigi nel 1882-92. Dal 1846 al 1860 era stato professore di Scienza delle Costruzioni all'Università di Torino, insegnando anche nelle scuole militari della città. Fu un precursore dell'introduzione di concetti energetici nella meccanica dei continui, e oggi il suo nome è soprattutto legato al teorema sul minimo del lavoro elastico di deformazione, la cui importanza tecnica fu posta in luce più tardi da CARLO ALBERTO CASTIGLIANO (1847-1884). Socio dell'Accademia Nazionale dei Lincei e dell'Accademia delle Scienze di Torino. Nel 1859 ricevè il Collare dell'Annunziata e nel 1861 il titolo di Conte.

E' questo l'enunciato del classico

**Proposizione 7.3. Teorema di Menabrea.** *Si consideri una struttura elastica caratterizzata da un potenziale elastico strettamente convesso e da vincoli perfetti, lisci e bilaterali. Allora il sistema reattivo corrispondente alla soluzione del problema dell'equilibrio elastico rende minima l'energia complementare della struttura nella varietà affine  $\ell + \mathcal{R}$  dei sistemi di forze ammissibili.*

$$\phi^*(\ell + \mathbf{r}) \leq \phi^*(\ell + \boldsymbol{\rho}), \quad \forall \boldsymbol{\rho} \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^\perp.$$

□

**Osservazione 7.3.** Il teorema di MENABREA nella formulazione generalizzata della proposizione 7.3 è valido anche per elasticità non lineare purché con legame di rigidezza elastica strettamente monotono. Tale proprietà assicura infatti la stretta convessità del funzionale energia elastica e quindi, per la proposizione 2.9 (p. 116), la differenziabilità del potenziale energia complementare della struttura. ■

**Osservazione 7.4.** I teoremi di MENABREA e di CASTIGLIANO, nelle formulazioni originarie e nelle trascrizioni riportate nei testi di Scienza delle Costruzioni (vedi [14], [18]) sono enunciati nel contesto dell'elasticità lineare con particolare riferimento alle travature elastiche. In elasticità lineare i funzionali complementari  $\phi$  e  $\phi^*$  sono entrambi quadratici e risulta (teorema di CLAPEYRON)

$$\phi(\mathbf{u}) = \phi^*(\mathbf{f}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle.$$

Per mostrarlo si osservi che, essendo  $\mathbf{f} = \mathbf{B}' \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}$ , si ha che

$$\phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \| \mathbf{B} \mathbf{u} \|_{\mathbf{E}}^2 = \frac{1}{2} \langle \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{B}' \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle,$$

e dunque risulta

$$\phi^*(\mathbf{f}) = \sup \{ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \phi(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in \mathcal{V} \} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle - \phi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle.$$

Se la struttura ha un grado di iperstaticità finito, ed è questo il caso delle travature, il campo di deformazione tangente in soluzione  $\mathbf{B} \mathbf{u} \in \mathcal{D}$  può essere espresso come combinazione lineare di campi noti con un insieme finito di incognite iperstatiche. Sostituendo tale espressione in quella del potenziale elastico della struttura  $\phi(\mathbf{B} \mathbf{u})$  l'energia complementare  $\phi^*(\mathbf{f})$  risulta funzione delle incognite iperstatiche. La condizione di estremo del teorema di MENABREA consente allora di calcolare il valore delle incognite iperstatiche in soluzione.

Il primo teorema di CASTIGLIANO fornisce uno strumento per calcolare un parametro di spostamento elastico. Ciò si consegna mediante l'aggiunta di un sistema di forze duale del parametro cercato e che dipende da un fattore scalare di proporzionalità. Effettuando la derivata dell'energia complementare rispetto a tale fattore e valutandola per il valore nullo del fattore si perviene al risultato.

Entrambi i risultati possono però ottersi, in modo più generale, mediante una applicazione del principio dei lavori virtuali. ■

## 8. MODELLI ULTRAELASTICI

Il modello elastico generalizzato costituisce un valido modello di riferimento per la trattazione di molti problemi strutturali in cui la descrizione del comportamento dei materiali richiede di simulare fenomeni ultraelastici quali il flusso plastico e quello viscoso.

Nei fenomeni plastici il flusso è istantaneo e dunque le leggi che lo governano sono indipendenti dal tempo. Al contrario i fenomeni viscosi sono governati da un tempo caratteristico che regola l'entità del flusso di deformazione viscosa.

La struttura formale dei problemi strutturali in campo plastico e viscoso è analoga a quella del problema elastico generalizzato.

E' dunque possibile dedurre le condizioni di esistenza ed unicità della soluzione e le formulazioni variazionali del problema apportando le opportune modifiche formali alla trattazione del modello elastico generalizzato.

Nelle prossime sezioni verranno inquadrati, nel contesto formale del modello elastico generalizzato, i seguenti comportamenti costitutivi:

- i) *plasticità perfetta,*
- ii) *plasticità incrementale,*
- iii) *viscosità,*
- iv) *visco-plasticità,*
- v) *visco-plasticità con incrudimento.*

Si considera infine lo *schema implicito* di integrazione nel tempo che conduce ad un modello approssimato di *visco-plasticità al passo finito* cui si fa usualmente riferimento negli approcci computazionali.

### 8.1. Plasticità perfetta

I fenomeni di deformazione plastica nei materiali metallici avvengono per effetto del movimento di difetti e dislocazioni del reticolo cristallino (vedi sezione XII.3 (p. 521)) e si verificano in modo istantaneo.

- Il *flusso di deformazione plastica*  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  misura il tasso di deformazione plastica che si verifica durante il processo, riferito ad un arbitrario parametro evolutivo  $t \in \mathfrak{R}$ .
- La *deformazione plastica* che si accumula nel processo descritto dall'evolversi del parametro  $t \in \mathfrak{R}$  nell'intervallo  $I \subset \mathfrak{R}$  si ottiene per integrazione:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{p}}(I) := \int_I \mathbf{p}(t) \, dt .$$

Il cono  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma})$  delle normali uscenti da un dominio  $\mathcal{S}_a$  di sforzi ammissibili nel punto  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a$  è definito dalla condizione

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) := \left\{ \mathbf{p} \in \mathcal{D} \mid \langle \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} \rangle \leq 0, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_a \right\},$$

- Il modello costitutivo che descrive i fenomeni plastici è detto un *modello di flusso plastico associato* se il flusso plastico  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  rispetta la *legge di normalità* al dominio convesso  $\mathcal{S}_a$  che definisce i campi di sforzo ammissibili (vedi fig. 8.1) e cioè se

$$\mathbf{p}(t) \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}(t)).$$

Il modello costitutivo è in tal caso detto di *plasticità associata* (o *plasticità standard*).

Dalla definizione di cono normale si deduce che la legge di normalità equivale alla condizione

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} \rangle \geq \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_a,$$

e cioè che

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} \rangle = \max \left\{ \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{p} \rangle = \sqcup_{\mathcal{S}_a}^*(\mathbf{p}), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_a \right\}.$$

La funzione sublineare  $\sqcup_{\mathcal{S}_a}^*$ , di supporto del dominio  $\mathcal{S}_a$ , è detta *dissipazione plastica*. E' questo il *principio di HILL* o *principio della massima dissipazione*.

Si noti che in corrispondenza di uno stato tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a$  il flusso plastico  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  è determinato a meno di un arbitrario fattore scalare non negativo. Se il dominio di ammissibilità  $\mathcal{S}_a$  ha un punto angoloso in  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a$ , anche la direzione del flusso plastico è indeterminata, potendo variare nel cono delle normali  $\mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}(t))$ .

Il dominio ammissibile  $\mathcal{S}_a$  è usualmente definito quale insieme di livello zero di un

- *funzionale di interdizione*  $f : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ :

$$\mathcal{S}_a = \{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} \mid f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \}.$$

L'indicatore del dominio ammissibile  $\mathcal{S}_a$  può essere dunque scritto come:

$$\sqcup_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqcup_{R^-}[f(\boldsymbol{\sigma})] = [\sqcup_{R^-}f](\boldsymbol{\sigma}),$$

per cui risulta

$$\mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) = \partial \sqcup_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) = \partial[\sqcup_{R^-}f](\boldsymbol{\sigma}).$$

Il sottodifferenziale del funzionale  $\sqcup_{R^-} \circ f$  si calcola facendo ricorso al risultato della proposizione 3.8 (p. 122).

Applicando tale formula di composizione al caso in esame con  $m = \sqcup_{\mathfrak{R}^-}$  si ottiene:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) &= \partial[\sqcup_{\mathfrak{R}^-} \circ f](\boldsymbol{\sigma}) = \partial \sqcup_{\mathfrak{R}^-} [f(\boldsymbol{\sigma})] \partial f(\boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \mathcal{N}_{\mathfrak{R}^-}[f(\boldsymbol{\sigma})] \partial f(\boldsymbol{\sigma}).\end{aligned}$$

Risulta dunque

$$\mathbf{p} \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) \iff \mathbf{p} \in \lambda \partial f(\boldsymbol{\sigma}) \text{ con } \lambda \in \partial \sqcup_{\mathfrak{R}^-} [f(\boldsymbol{\sigma})] = \mathcal{N}_{\mathfrak{R}^-}[f(\boldsymbol{\sigma})].$$

Il parametro  $\lambda \in \mathfrak{R}$  è il *moltiplicatore* associato al funzionale convesso di interdizione  $f : \mathcal{S} \mapsto \mathfrak{R} \cup \{+\infty\}$ .

Si noti che la *condizione di coniugio*:

$$\lambda \in \partial \sqcup_{R^-} [f(\boldsymbol{\sigma})] \iff f(\boldsymbol{\sigma}) \in \partial \sqcup_{R^+} (\lambda),$$

si può scrivere nella forma equivalente di *condizione di complementarietà*:

$$\lambda \geq 0 \quad f(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad \lambda f(\boldsymbol{\sigma}) = 0.$$

## 8.2. Plasticità incrementale

Dal legame plastico associato introdotto nella sezione precedente è possibile dedurre le leggi che correlano il flusso plastico al tasso di variazione dello stato tensionale, definendo così un legame di *plasticità incrementale*.

A tal fine si denoti con un punto sovrapposto

- la *derivata da destra* dello stato tensionale rispetto al tempo:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) := \lim_{\tau \rightarrow t^+} \left[ \frac{\boldsymbol{\sigma}(\tau) - \boldsymbol{\sigma}(t)}{\tau - t} \right].$$

- Si ponga quindi  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma})$  e si consideri il cono polare negativo di  $\mathcal{N}$ :

$$\mathcal{T}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\sigma})^- := \{ \dot{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{S} : \langle \dot{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{q} \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathcal{N} \},$$

che è il cono tangente al dominio  $\mathcal{S}_a$  nel punto  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_a$ .

Assumendo che l'applicazione  $\mathbf{p} : I \mapsto \mathcal{D}$  sia continua da destra e cioè che

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}(t^+) = \lim_{\tau \rightarrow t^+} \mathbf{p}(\tau),$$

si deduce il seguente risultato.

**Proposizione 8.1. Condizione di consistenza di Prager.** *Se il flusso plastico soddisfa la legge di normalità e la continuità da destra rispetto al parametro evolutivo, allora vale la proprietà di ortogonalità*

$$\langle \dot{\sigma}, p \rangle = 0, \quad \dot{\sigma} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_a}(\sigma), \quad p \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\sigma).$$

**Dim.** La condizione  $\sigma(\tau) \in \mathcal{K}, \forall \tau \in I$  implica che  $\dot{\sigma} \in \mathcal{T}_{\mathcal{S}_a}(\sigma)$ . Dalle condizioni di normalità ai tempi  $t, \tau \in I$ :

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\tau) - \sigma(t), p(t) \rangle &\leq 0, \\ \langle \sigma(t) - \sigma(\tau), p(\tau) \rangle &\leq 0, \end{aligned}$$

dividendo per  $\tau - t > 0$  e passando al limite per  $\tau \rightarrow t+$  si ottiene che deve essere

$$\begin{aligned} \langle \dot{\sigma}(t), p(t) \rangle &\leq 0, \\ \langle \dot{\sigma}(t), p(t) \rangle &\geq 0, \end{aligned}$$

e dunque il risultato.  $\square$

Si noti che la *condizione di consistenza di PRAGER* si può porre nelle forme equivalenti

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{N}_T(\dot{\sigma}) &\iff \\ \dot{\sigma} \in \mathcal{N}_N(p) &\iff \\ \dot{\sigma} \in \mathcal{T}; \quad p \in \mathcal{N}; \quad \langle \dot{\sigma}, p \rangle &= 0, \end{aligned}$$

dove per semplicità si è posto  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\sigma)$  e  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathcal{S}_a}(\sigma)$ .

Nel passare dalla forma evolutiva a quella incrementale il dominio convesso  $\mathcal{S}_a$  va quindi sostituito dal cono convesso  $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_a}(\sigma)$ .

**Osservazione 8.1.** Un modello elastico generalizzato del tipo di quello descritto è stato proposto per simulare il comportamento di strutture costituite da materiali elastici privi di *resistenza a trazione*.

In tal caso il dominio  $\mathcal{S}_a \subseteq \mathcal{S}$  è un cono convesso. Denotando con  $p \in \mathcal{D}$  la deformazione di fessurazione, si ha che

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a}(\sigma) &\iff \sigma \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_a^-}(p) \iff \\ \sigma \in \mathcal{S}_a, \quad p \in \mathcal{S}_a^- &, \quad \langle \sigma, p \rangle = 0, \end{aligned}$$

Perfettamente analogo è il caso di vincoli esterni di tipo unilatero.  $\blacksquare$

Si presenta ora un risultato dovuto a J.J. MOREAU [11] che fornisce uno strumento utile per la discussione delle equazioni costitutive in plasticità, in viscoplasticità ed in elastoplasticità incrementale. Il risultato è stato rivisitato in [26] ed è qui riformulato con qualche modifica.

**Proposizione 8.2. Decomposizione additiva.** *Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di HILBERT e siano  $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $f^* : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  due funzionali convessi e regolari, tra loro coniugati. Si considerino quindi i funzionali*

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) &:= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|_{\mathcal{H}}^2 + f(\mathbf{a}), \\ \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) &:= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_{\mathcal{H}}^2 + f^*(\mathbf{b}).\end{aligned}$$

Allora ciascuno dei problemi di minimo

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{H}} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \\ \psi(\mathbf{x}) &= \min_{\mathbf{b} \in \mathcal{H}} \hat{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{b}),\end{aligned}$$

ammette un'unica soluzione.

I rispettivi punti di minimo assoluto  $\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$  sono detti da MOREAU punti prossimali e si scrive

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{prox}_f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \text{prox}_{f^*}(\mathbf{x}).$$

Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  sussiste la decomposizione additiva

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x}),$$

per cui si può porre

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}^2 + f(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \|\mathbf{B}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}^2 + f(\mathbf{A}(\mathbf{x})), \\ \psi(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{B}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}^2 + f^*(\mathbf{B}(\mathbf{x})) = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{x})\|_{\mathcal{H}}^2 + f^*(\mathbf{B}(\mathbf{x})).\end{aligned}$$

I funzionali  $\phi : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e  $\psi : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sono differenziabili nel senso di FRÉCHET e risulta

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = d\psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial f^*(\mathbf{B}(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = d\phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \partial f(\mathbf{A}(\mathbf{x})).$$

**Dim.** Dalla regolarità di  $f : \mathcal{H} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e del funzionale quadratico

$$q(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2,$$

si deduce che entrambi sono inferiormente limitati da un funzionale affine continuo e quindi che sussiste l'implicazione

$$\lim_{\|\mathbf{a}\|_{\mathcal{H}} \rightarrow \infty} \hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \rightarrow +\infty.$$

La proposizione 4.4 (p. 131) assicura allora che il funzionale  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, \cdot)$  assume un minimo in un punto  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ . Tale punto è unico in virtù della stretta convessità del funzionale quadratico  $q$  che implica quella del funzionale  $\hat{\phi}(\mathbf{x}, \cdot)$ .

Si osservi ora che i funzionali  $\phi$  e  $\psi$  sono definiti da inf-convoluzioni esatte.

Dalla proposizione 2.7 (p. 114) si deducono allora le seguenti proprietà.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{prox}_f(\mathbf{x}) \iff \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) = dq(\boldsymbol{\alpha}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial f^*(\boldsymbol{\alpha}),$$

dove  $\boldsymbol{\alpha} \in \partial\phi(\mathbf{x})$ . Essendo  $dq(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{\alpha}$  le condizioni precedenti sono equivalenti a

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial f^*(\mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x})).$$

Tale relazione equivale a sua volta a

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial f(\mathbf{A}(\mathbf{x})),$$

e dunque alla condizione

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = dq(\boldsymbol{\beta}), \quad \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial f(\boldsymbol{\beta}) \iff \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \text{prox}_{f^*}(\mathbf{x}),$$

dove  $\boldsymbol{\beta} \in \partial\psi(\mathbf{x})$ . Ne segue che  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x})$  e quindi

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial\psi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}) \in \partial f^*(\mathbf{B}(\mathbf{x})),$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \partial\phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \partial f(\mathbf{A}(\mathbf{x})).$$

Rimane da mostrare che i funzionali  $\phi$  e  $\psi$  sono differenziabili nel senso di FRÉCHET.

A tal fine si noti che dalle relazioni sottodifferenziali

$$\phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_o) \geq (\mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \iff \mathbf{x}_o^* \in \partial\phi(\mathbf{x}_o),$$

$$\phi(\mathbf{x}_o) - \phi(\mathbf{x}) \geq (\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_o - \mathbf{x}) \iff \mathbf{x}^* \in \partial\phi(\mathbf{x}),$$

si deduce che

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \geq \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_o) \geq (\mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o),$$

e cioè che

$$(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \geq \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_o) - (\mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \geq 0.$$

Ponendo  $\mathbf{x}^* = \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{A}(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{x}_o^* = \mathbf{B}(\mathbf{x}_o) = \mathbf{x}_o - \mathbf{A}(\mathbf{x}_o)$  si ha dunque che

$$-(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_o), \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_o\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \phi(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}_o) - (\mathbf{x}_o^*, \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \geq 0.$$

La differenziabilità di  $\phi$  segue allora dalla diseguaglianza

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_o), \mathbf{x} - \mathbf{x}_o) \geq 0,$$

che esprime la monotonia del legame sottodifferenziale  $\partial\psi$ . □

**Osservazione 8.2.** Si osservi che la differenziabilità dei funzionali  $\phi$  e  $\psi$  è una diretta conseguenza della formula di sottodifferenziazione di una inf-convoluzione esatta. Si ha infatti che

$$\partial\phi(\mathbf{x}) = dq(\mathbf{B}(\mathbf{x})) \cap \partial f(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{B}(\mathbf{x})\} \cap \partial f(\mathbf{A}(\mathbf{x})) = \{\mathbf{B}(\mathbf{x})\},$$

in quanto  $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \in \partial f(\mathbf{A}(\mathbf{x}))$ . Da tale dimostrazione non si evince però la differenziabilità nel senso di FRÉCHET. ■

### 8.3. Viscoplasticità

Il comportamento viscoso è caratteristico di materiali metallici ad alte temperature e dei materiali polimerici e degli aggregati a temperature ambiente.

Il flusso viscoso  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  è la derivata temporale della deformazione viscosa. Al contrario di quanto visto per il flusso plastico, il flusso viscoso è univocamente determinato se è noto lo stato tensionale. La legge di viscosità si scrive in generale nella forma

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\tau} d\phi(\boldsymbol{\sigma}),$$

dove

- $\phi : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$  è il *potenziale viscoplastico* adimensionale, convesso e differenziabile e
- $\tau > 0$  è il *tempo di rilassamento* del materiale.

Un comportamento viscoplastico è caratterizzato dal fatto che le deformazioni viscose hanno luogo quando lo stato tensionale supera un valore di soglia. Con opportune scelte del potenziale viscoplastico, la formula precedente si specializza nelle leggi di viscoplasticità proposte da PERZYNA [8] e da DUVAUT e LIONS [16].

■ Modello di DUVAUT e LIONS.

Nella legge di viscosità si assume il potenziale viscoplastico

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) := \inf_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_a} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{C}}^2.$$

Si applichi quindi il risultato della proposizione 8.2 ai potenziali

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \min_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{C}}^2 + \square_{\mathcal{S}_a}(\boldsymbol{\tau}) \right\},$$

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \min_{\mathbf{s} \in \mathcal{S}} \left\{ \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{s}\|_{\mathbf{C}}^2 + \square_{\mathcal{S}_a}^*(\mathbf{s}) \right\}.$$

Adottando quale prodotto interno in  $\mathcal{S}$  quello in energia dell'operatore di cedevolezza elastica  $\mathbf{C} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}$ :

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})_{\mathbf{C}} := \langle \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle,$$

si ottiene che

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})\|_{\mathbf{C}}^2, \\ \psi(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}^C(\boldsymbol{\sigma})\|_{\mathbf{C}}^2 + \square_{\mathcal{S}_a}^*(\boldsymbol{\Pi}^C(\boldsymbol{\sigma})),\end{aligned}$$

con  $d\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{C}[\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})]$ .

Si perviene così alla legge di viscosità introdotta da DUVAUT e LIONS in [16].

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\tau} \mathbf{C}[\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})],$$

dove  $\boldsymbol{\Pi} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$  è il proiettore ortogonale sul convesso  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{S}$  in energia di  $\mathbf{C} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{D}$  e  $\boldsymbol{\Pi}^C : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$  è il proiettore complementare.

■ Modello di PERZYNA.

Si consideri ora il potenziale viscoplastico

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) := (m \circ g)(\boldsymbol{\sigma}),$$

con la funzione di YOUNG  $m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$  data da

$$m(\alpha) := \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha < 0, \\ \frac{1}{2} \alpha^2, & \text{se } \alpha \geq 0, \end{cases}$$

e  $g : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  funzionale adimensionale, convesso e differenziabile.

Applicando la regola di derivazione a catena si perviene alla legge di viscosità proposta da PERZYNA in [8]

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\tau} \langle g(\boldsymbol{\sigma}) \rangle dg(\boldsymbol{\sigma}),$$

dove la *parentesi di MACAULAY*<sup>25</sup> è la funzione a rampa definita da

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 0, \\ \alpha & \text{se } \alpha \geq 0. \end{cases}$$

**Osservazione 8.3.** Si noti che ponendo

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})\|_{\mathbf{C}} = \inf_{\tau \in \mathcal{S}_a} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{C}},$$

il potenziale viscoplastico  $\phi(\boldsymbol{\sigma}) := (m \circ g)(\boldsymbol{\sigma})$  assume l'espressione

$$\inf_{\tau \in \mathcal{S}_a} \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{C}}^2 = \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\sigma})\|_{\mathbf{C}}^2.$$

Dunque il modello proposto da DUVAUT e LIONS è un caso particolare di quello formulato da PERZYNA. ■

---

<sup>25</sup> FRANCIS SOWERBY MACAULAY (1862-1937) Matematico inglese che ha portato importanti contributi alla geometria algebrica. Nel 1916 pubblicò l'opera *The algebraic theory of modular systems*.

#### 8.4. Un modello generale

E' possibile formulare un modello generale che consente di trattare in modo unitario i tre tipi di comportamento costitutivo viscoplastico, viscoso e perfettamente plastico. A tal fine si assegnino

- un *criterio di plasticizzazione* definito da un funzionale  $Y : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  convesso, continuo e nullo nell'origine,
- uno scalare  $k \in \mathbb{R}$  che definisce la *soglia di plasticizzazione*,
- una *funzione di flusso*

$$m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

convessa, monotona ed identicamente nulla su  $\mathbb{R}^-$ ,

- un *funzionale di interdizione*

$$g : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

che con il suo insieme di livello zero definisce il dominio elastico ed è pari alla differenza tra il funzionale  $Y$  ed il valore di soglia  $k$ :

$$g(\boldsymbol{\sigma}) = Y(\boldsymbol{\sigma}) - k.$$

Il potenziale di legame si esprime dunque come composizione del funzionale di interdizione e della funzione di flusso:

$$\phi(\boldsymbol{\sigma}) = (m \circ g)(\boldsymbol{\sigma}).$$

La legge di scorrimento viscoplastico si scrive pertanto

$$\mathbf{p} \in \partial\phi(\boldsymbol{\sigma}) = \partial(m \circ g)(\boldsymbol{\sigma}) = \partial m[g(\boldsymbol{\sigma})] \partial Y(\boldsymbol{\sigma}).$$

La formulazione dei problemi di viscoplasticità in termini cinematici richiede di effettuare l'inversione della relazione costitutiva e quindi di valutare il funzionale di *dissipazione viscoplastica*:

$$\phi^*(\mathbf{p}) = (m \circ g)^*(\mathbf{p}),$$

che è il coniugato del potenziale viscoplastico  $\phi$ .

La relazione inversa si scrive

$$\boldsymbol{\sigma} \in \partial\phi^*(\mathbf{p}) = \partial(m \circ g)^*(\mathbf{p}).$$

L'espressione del funzionale  $(m \circ g)^*$  in termini dei coniugati di  $m$  e  $g$  è fornita dalla relazione [39]

$$(m \circ g)^*(\mathbf{p}) = \inf_{\alpha} \{m^*(\alpha) + \sqcup_{\text{epi } g}^*(\mathbf{p}, -\alpha)\},$$

dove il funzionale di supporto dell'epigrafo di  $g$  è dato da

$$\sqcup_{\text{epi } g}^*(\mathbf{p}, -\alpha) = \begin{cases} \alpha g^*\left(\frac{\mathbf{p}}{\alpha}\right), & \text{se } \alpha > 0, \\ \sqcup_{\text{dom } g}^*(\mathbf{p}), & \text{se } \alpha = 0, \\ +\infty, & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Sussiste dunque la formula

$$\phi^*(\mathbf{p}) = (m \circ g)^*(\mathbf{p}) = \inf_{\alpha \geq 0} \left\{ m^*(\alpha) + \begin{cases} \alpha g^*\left(\frac{\mathbf{p}}{\alpha}\right), & \text{se } \alpha > 0, \\ \sqcup_{\text{dom } g}^*(\mathbf{p}), & \text{se } \alpha = 0. \end{cases} \right\}$$

Le tre tipologie di comportamento costitutivo, viscoplastico, viscoso e perfettamente plastico, possono essere simulate definendo opportunamente il valore di soglia  $k$  e la funzione di flusso  $m$ .

A titolo di esempio nelle figure seguenti sono schematicamente rappresentati

- il funzionale di interdizione  $g : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,
  - il funzionale di dissipazione viscoplastica  $\phi : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,
  - la funzione di flusso  $m : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ,
  - ed il legame costitutivo per le tre tipologie di comportamento costitutivo, viscoplastico, viscoso alla NORTON-HOFF e perfettamente plastico.
- Il comportamento *viscoplastico* si ottiene assumendo un valore di soglia positivo  $k > 0$ .
- Lo *scorrimento viscoso* alla NORTON-HOFF si ottiene ponendo  $k = 0$  e quindi  $g = Y$ .
- Lo *scorrimento perfettamente-plastico* si ottiene ponendo  $k > 0$  ed assumendo come funzione di flusso l'indicatore di  $\mathbb{R}^-$ .

Nelle rappresentazioni schematiche si è considerato un funzionale di plasticizzazione  $Y : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  sublineare, come avviene nel caso del criterio di VON MISES (vedi sezione XIII.4.2.2 (p. 562)).

Lo scorrimento visco-plastico si simula ponendo  $k > 0$  (figg.8.1,8.2).

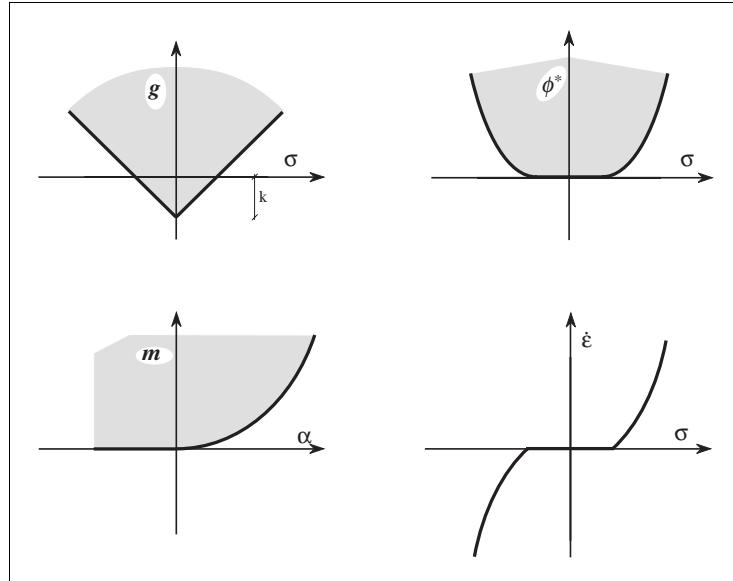


Fig. 8.1

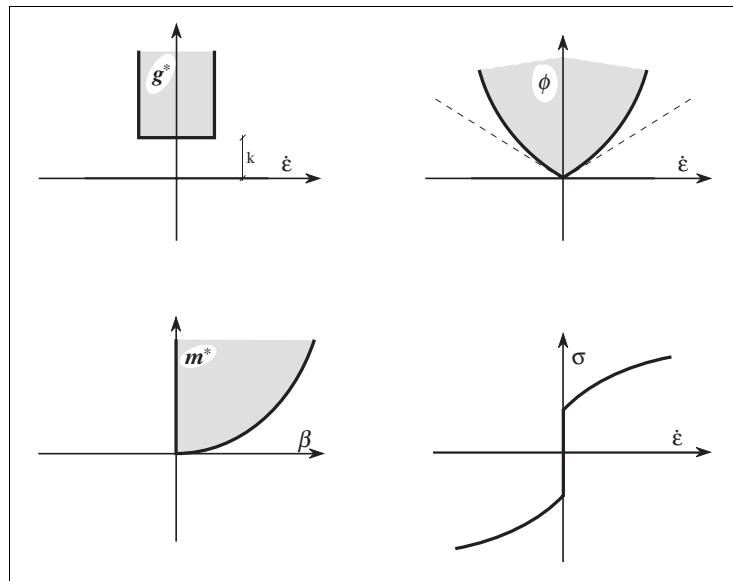


Fig. 8.2

Lo scorrimento viscoso alla NORTON-HOFF si simula ponendo  $k = 0$  e quindi  $g = Y$  (figg.8.3,8.4).

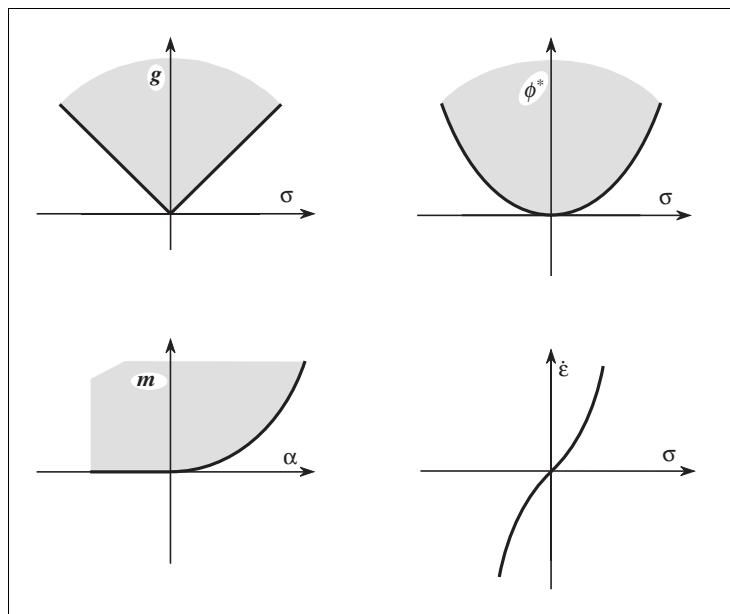


Fig. 8.3

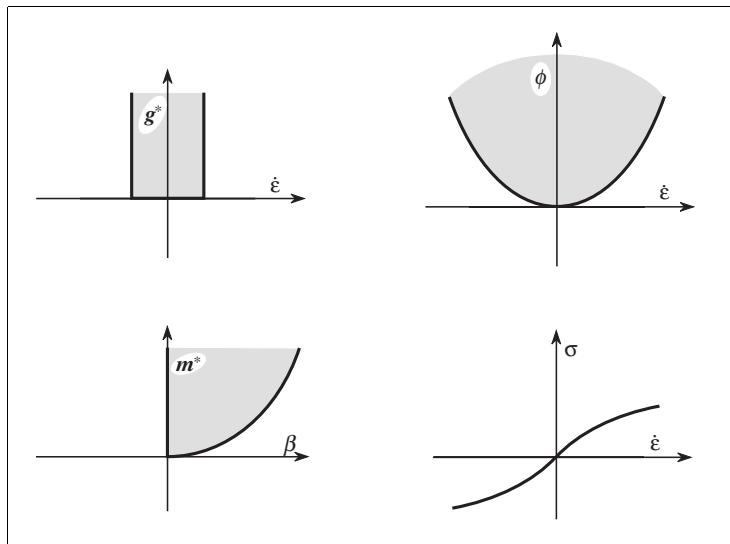


Fig. 8.4

Lo scorrimento perfettamente-plastico si simula ponendo  $k > 0$  ed assumendo come funzione di flusso l'indicatore di  $\Re^-$  (figg.8.5,8.6).

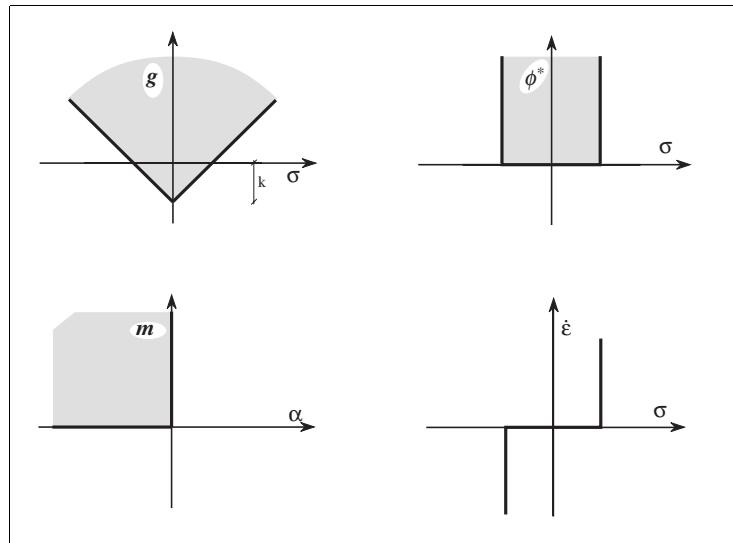


Fig. 8.5

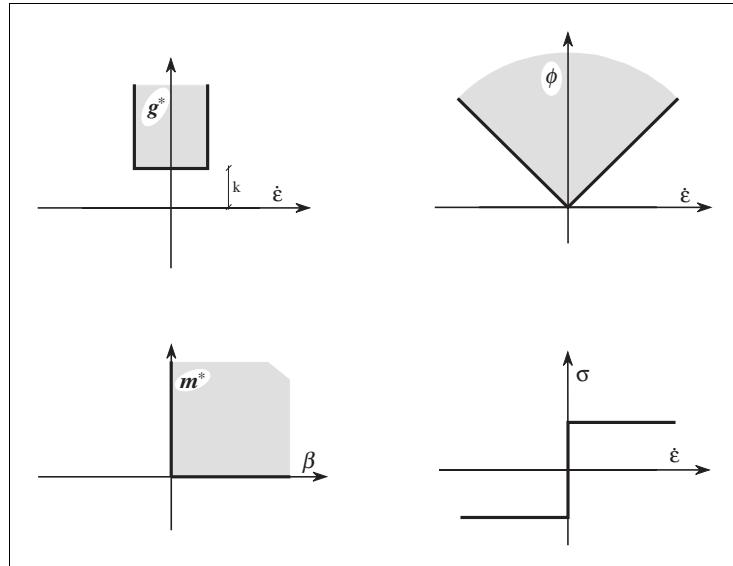


Fig. 8.6

### 8.5. Elastoplasticità incrementale

Il comportamento di molti materiali metallici a temperatura ambiente è descritto in modo sufficientemente accurato, nell'ambito della teoria linearizzata, da un modello elastoplastico incrementale in cui il tasso di deformazione totale  $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  è somma di una parte elastica  $\dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{D}$  e di una parte plastica  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$ :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{p}.$$

Si noti esplicitamente che un punto sovrapposto denota la derivata temporale da destra e che il flusso plastico è assunto continuo da destra.

- La velocità di deformazione elastica è legato al tasso di variazione dello stato tensionale  $\dot{\sigma} \in \mathcal{S}$  dalla legge elastica lineare e definita positiva:

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{C}\dot{\sigma}.$$

- Il flusso plastico  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  è legato al tasso di variazione dello stato tensionale  $\dot{\sigma} \in \mathcal{S}$  dalla legge di consistenza di PRAGER

$$\mathbf{p} \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}}(\dot{\sigma}) = \partial \sqcup_{\mathcal{T}}(\dot{\sigma}).$$

Per poter applicare i risultati della proposizione 8.2 (p. 161) si doti lo spazio delle deformazioni  $\mathcal{D}$  del prodotto scalare definito dalla forma bilineare dell'energia elastica

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)_{\mathbf{E}} := \langle \mathbf{E}\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle, \quad \forall \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathcal{D}.$$

Si consideri quindi il cono tangente  $\mathcal{T}_{\mathbf{C}}$  al convesso  $\mathbf{C}\mathcal{S}_a \subset \mathcal{D}$  nel punto  $\mathbf{e} \in \mathcal{D}$ . La legge di PRAGER si può allora riscrivere

$$\mathbf{p} \in \mathcal{N}_{\mathcal{T}_{\mathbf{C}}}(\dot{\sigma}) = \partial_{\mathbf{E}} \sqcup_{\mathcal{T}_{\mathbf{C}}}(\dot{\mathbf{e}}).$$

Il simbolo sottodifferenziale  $\partial_{\mathbf{E}}$  ricorda che nel valutare la pendenza del minorante affine si deve considerare il prodotto interno in energia elastica, così che per un funzionale convesso  $f : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  si ha:

$$\partial_{\mathbf{E}} f(\dot{\mathbf{e}}) \iff f(\boldsymbol{\eta}) - f(\dot{\mathbf{e}}) \geq \langle \mathbf{E}\boldsymbol{\eta} - \mathbf{E}\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{p} \rangle = (\boldsymbol{\eta} - \dot{\mathbf{e}}, \mathbf{p})_{\mathbf{E}}.$$

La proposizione 8.2 (p. 161) mostra allora che la decomposizione della deformazione totale  $\dot{\varepsilon} \in \mathcal{D}$  nella somma della parte elastica  $\dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{D}$  e di quella plastica  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  è governata dai potenziali

$$\phi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{p}\|_{\mathbf{C}}^2 + f(\dot{\mathbf{e}}) = \min_{\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{E}}^2 + \sqcup_{\mathcal{T}_{\mathbf{C}}}(\boldsymbol{\eta}) \right\},$$

$$\psi(\dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \|\dot{\mathbf{e}}\|_{\mathbf{C}}^2 + f^*(\mathbf{p}) = \min_{\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \|\dot{\varepsilon} - \boldsymbol{\delta}\|_{\mathbf{E}}^2 + \sqcup_{\mathcal{N}_{\mathbf{C}}}(\boldsymbol{\delta}) \right\}.$$

Nelle espressioni dei potenziali  $\phi$  e  $\psi$ :

- $\sqcup_{\mathcal{T}_C}$  è la funzione indicatrice del cono convesso  $\mathcal{T}_C$  tangente nel punto  $e \in \mathcal{D}$  al dominio di ammissibilità  $\mathbf{CS}_a \subset \mathcal{D}$  delle deformazioni elastiche,
- $\sqcup_{\mathcal{T}_C}^* = \sqcup_{\mathcal{N}_C}$  è la funzione di supporto del cono convesso  $\mathcal{T}_C$  che è anche la funzione indicatrice del cono convesso  $\mathcal{N}_C$  normale nel punto  $e \in \mathcal{D}$  al dominio di ammissibilità  $\mathbf{CS}_a \subset \mathcal{D}$  delle deformazioni elastiche:

$$\sqcup_{\mathcal{T}_C}^*(\mathbf{p}) := \sup \{(\boldsymbol{\eta}, \mathbf{p})_{\mathbf{E}} \mid \boldsymbol{\eta} \in \mathcal{T}_C\} = \sqcup_{\mathcal{N}_C} = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathbf{p} \in \mathcal{N}_C, \\ +\infty, & \text{se } \mathbf{p} \notin \mathcal{N}_C. \end{cases}$$

Si noti che risulta

$$\sqcup_{\mathcal{T}_C}^*(\mathbf{p}) = \sqcup_{\mathcal{T}}^*(\mathbf{p}) = \sup \{(\dot{\boldsymbol{\tau}}, \mathbf{p}) \mid \dot{\boldsymbol{\tau}} \in \mathcal{T}\}.$$

Sussistono in definitiva le proprietà

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= d\psi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), & \dot{\mathbf{e}} \in \partial \sqcup_{\mathcal{N}_C}(\mathbf{p}), \\ \mathbf{p} &= d\phi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}), & \mathbf{p} \in \partial \sqcup_{\mathcal{T}_C}(\dot{\mathbf{e}}). \end{aligned}$$

Si noti che

- Le espressioni dei potenziali  $\phi$  e  $\psi$  mostrano che le aliquote elastica e plastica del tasso di deformazione totale  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{D}$  si ottengono mediante proiezioni ortogonali in energia elastica rispettivamente sul cono tangente  $\mathcal{T}_C$  e sul cono normale  $\mathcal{N}_C$  al dominio elastico  $\mathbf{CS}_a$  nello spazio delle deformazioni.

Le proprietà di proiezione forniscono un criterio sul quale basare un algoritmo iterativo che consenta di effettuare la decomposizione del tasso di deformazione totale.

La decomposizione di  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \in \mathcal{D}$  nella somma di una parte elastica  $\dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{D}$  e di una parte plastica  $\mathbf{p} \in \mathcal{D}$  è caratterizzata dalle proprietà di complementarietà

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{e}} \in \mathcal{T}_C, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{N}_C, \quad (\dot{\mathbf{e}}, \mathbf{p})_{\mathbf{E}} = 0,$$

che equivalgono a

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} \in \mathcal{T}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{N}, \quad (\dot{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{p}) = 0.$$

**Osservazione 8.4.** Se la superficie del dominio elastico  $\mathcal{S}_a$  è regolare, alla decomposizione del tasso di deformazione totale nelle aliquote elastica e plastica si perviene con la seguente semplice procedura. Sia  $\mathbf{n}$  un vettore normale al dominio  $\mathbf{CS}_a$  ed avente norma unitaria in energia elastica:  $(\mathbf{n}, \mathbf{n})_{\mathbf{E}} = 1$ . Allora

- se  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{n})_{\mathbf{E}} \leq 0$  allora  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ ,  $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ ,
- se  $(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{n})_{\mathbf{E}} > 0$  allora  $\mathbf{p} = (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{n})_{\mathbf{E}} \mathbf{n}$ ,  $\dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{p}$ .

■

### 8.5.1. Principi variazionali in elastoplasticità incrementale

Della famiglia dei dieci funzionali della sezione 6.2 (p. 149) si considerino i funzionali

$$P_2(\dot{\sigma}) = -\varphi^*(\dot{\sigma}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\dot{\sigma}),$$

$$P_3(\dot{\mathbf{u}}) = \varphi(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) - \gamma(\dot{\mathbf{u}}),$$

che rappresentano l'energia potenziale e l'energia complementare generalizzate del problema elastoplastico incrementale.

■ Si ponga quindi

$$\varphi(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) = \int_{\Omega} \psi(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) \, dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \| \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \mathbf{p}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) \|_{\mathbf{E}}^2 \, dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \dot{\sigma}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) \cdot \dot{\epsilon}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) \, dv.$$

dove

- $\mathbf{p}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}})$  è la parte plastica del tasso di deformazione  $\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}$ ,
- $\dot{\epsilon}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}})$  è la parte elastica del tasso di deformazione  $\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}$ ,
- $\dot{\sigma}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}))$  è il tasso di stato di sforzo.

Sostituendo tali espressioni nel funzionale  $P_3(\dot{\mathbf{u}})$  si deduce che la soluzione del problema elastoplastico incrementale in termini di campi di velocità si ottiene dal problema di estremo del funzionale convesso

$$\varphi(\mathbf{B}\dot{\mathbf{u}}) - \gamma(\dot{\mathbf{u}}) = \min_{\dot{\mathbf{v}} \in \mathcal{V}} [\varphi(\mathbf{B}\dot{\mathbf{v}}) - \gamma(\dot{\mathbf{v}})],$$

che è noto come *principio di GREENBERG*.

■ Dualmente la soluzione in termini di stato tensionale si ottiene dall'espressione del potenziale  $\psi^*$  complementare di  $\psi$ :

$$\psi^*(\dot{\sigma}) = \frac{1}{2} \| \dot{\sigma} \|_{\mathbf{E}}^2 + \square_{\mathcal{N}}(\dot{\sigma}).$$

Ponendo

$$\varphi^*(\dot{\sigma}) = \int_{\Omega} \psi^*(\dot{\sigma}) \, dv = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \| \dot{\sigma} \|_{\mathbf{E}}^2 \, dv + \square_{\mathcal{N}}(\dot{\sigma}),$$

e sostituendo nel funzionale  $P_2(\dot{\sigma})$  si perviene al problema di estremo

$$-\varphi^*(\dot{\sigma}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\dot{\sigma}) = \max_{\dot{\tau} \in \mathcal{T}} [-\varphi^*(\dot{\tau}) + \gamma^*(\mathbf{B}'\dot{\tau})],$$

che è noto come *principio di PRAGER-HODGE*.

## 9. ALGORITMI SOLUTIVI

Si consideri un problema strutturale in cui il legame, che ad un sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  agente sulla struttura associa l'insieme dei cinematici conformi  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  che sono soluzioni del problema, sia caratterizzato da una *relazione non lineare* ed eventualmente *multivoca*  $\mathbf{C} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  del tipo

$$\mathbf{u} \in \mathbf{C}(\mathbf{f}) = \mathbf{C}_o[\mathbf{f}] + \mathbf{M}(\mathbf{f}),$$

dove le parentesi quadre  $[ ]$  denotano una dipendenza lineare dall'argomento.

Il legame è quindi somma di

- un operatore di *cedevolezza elastica*  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{F}; \mathcal{V}\}$  lineare, continuo e definito positivo:

$$\langle \mathbf{C}_o[\mathbf{f}], \mathbf{f} \rangle > 0, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F} \setminus \{\mathbf{0}\},$$

- e di un operatore *cedevolezza elastica*  $\mathbf{M} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  multivoco, monotono massimale, strettamente monotono e conservativo:

$$\langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{M}(\mathbf{f}_2) - \mathbf{M}(\mathbf{f}_1) \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in \mathcal{F},$$

$$\langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_o, \mathbf{u} - \mathbf{M}(\mathbf{f}_o) \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{f}_o \in \text{dom } \mathbf{M} \Rightarrow \mathbf{u} \in \mathbf{M}(\mathbf{f}),$$

$$\mathbf{u} \in \mathbf{M}(\mathbf{f}_1) \cap \mathbf{M}(\mathbf{f}_2) \Rightarrow \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2.$$

Si noti che, con un abuso di notazione, si è denotato con lo stesso simbolo  $\mathbf{M}(\mathbf{f})$  anche un qualsiasi elemento di tale insieme.

- L'operatore multivoco  $\mathbf{M} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  è pertanto l'operatore sottodifferenziale di un potenziale  $\phi^* : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R} \cup +\infty$  strettamente convesso

$$\mathbf{M}(\mathbf{f}) = \partial \phi^*(\mathbf{f}) \quad \forall \mathbf{f} \in \text{dom } \phi^*.$$

Si ricordi che, assumendo  $\phi^*(\mathbf{f}) = +\infty$  se  $\mathbf{f} \notin \text{dom } \phi^*$ , il sottodifferenziale di  $\phi^*$  in  $\mathbf{f}_o \in \mathcal{F}$  è definito da

$$\partial \phi(\mathbf{f}_o) := \begin{cases} \{\mathbf{u}_o \in \mathcal{V} \mid \phi^*(\mathbf{f}) - \phi^*(\mathbf{f}_o) \geq \langle \mathbf{f} - \mathbf{f}_o, \mathbf{u}_o \rangle \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F}\} & \text{se } \mathbf{f}_o \in \text{dom } \phi \\ \emptyset & \text{se } \mathbf{f}_o \notin \text{dom } \phi \end{cases}$$

L'operatore multivoco  $\mathbf{M} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  gode pertanto delle seguenti proprietà.

- L'immagine  $\mathbf{M}(\mathbf{f})$  di ogni  $\mathbf{f} \in \text{dom } \mathbf{M}$  è un convesso in  $\mathcal{V}$ .
- L'operatore lineare di *cedevolezza elastica*  $\mathbf{C}_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{F}; \mathcal{V}\}$  fornisce la parte elastica della risposta strutturale,
- l'operatore multivoco di *cedevolezza anelastica*  $\mathbf{M} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{F}$  caratterizza invece la risposta anelastica.

La risposta totale  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  è quindi somma di

- una parte elastica  $\mathbf{u}_e \in \mathcal{V}$  e
- una parte anelastica  $\mathbf{u}_p \in \mathcal{V}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{u}_p, \quad \begin{cases} \mathbf{u}_e = \mathbf{C}_o[\mathbf{f}], \\ \mathbf{u}_p \in \mathbf{M}(\mathbf{f}). \end{cases}$$

La stretta monotonia dell'operatore multivoco  $\mathbf{M} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  equivale alla stretta convexità del potenziale  $\phi^* : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

Dunque

- il potenziale  $\phi : \mathcal{V} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  coniugato di  $\phi : \mathcal{F} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  è differenziabile,
- l'*operatore di rigidezza*  $\mathbf{K} = \mathbf{C}^{-1} = d\phi^* : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{F}$  è univoco.

Pertanto il problema non lineare è espresso dall'equazione

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}.$$

### 9.1. Teoremi di confronto

E' importante stabilire una catena di diseguaglianze che fornisce limitazioni inferiori e superiori alla pendenza media della risposta non lineare.

A tal fine si introducano le notazioni:

$$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}_o}^2 = \langle \mathbf{C}_o \mathbf{f}_o, \mathbf{f}_o \rangle,$$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{K}_o}^2 = \langle \mathbf{K}_o \mathbf{u}_o, \mathbf{u}_o \rangle,$$

dove  $\mathbf{K}_o = \mathbf{C}_o^{-1}$  è la *rigidezza elastica*.

Se la coppia  $\{\mathbf{f}, \mathbf{u}\}$  corrisponde ad un punto del grafico del legame e cioè se

$$\mathbf{u} \in \mathbf{C}(\mathbf{f}),$$

allora si può scrivere

$$\mathbf{f} = \mathbf{K}_o [\mathbf{u}_e] = \mathbf{K}_o [\mathbf{u} - \mathbf{u}_p],$$

e quindi si ha che

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{K}_o \mathbf{u}_e, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{K}_o [\mathbf{u} - \mathbf{u}_p], \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{K}_o}^2 - \langle \mathbf{K}_o \mathbf{u}, \mathbf{u}_p \rangle.$$

Osservando che

$$\mathbf{K}_o \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{K}_o \mathbf{u}_p,$$

si ottiene infine l'eguaglianza

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{K}_o}^2 - \|\mathbf{u}_p\|_{\mathbf{K}_o}^2 - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_p \rangle.$$

Analogamente ponendo:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}_o \mathbf{f} + \mathbf{u}_p,$$

si ottiene che

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{C}_o \mathbf{f} + \mathbf{u}_p \rangle,$$

e quindi l'eguaglianza

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C}_o}^2 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_p \rangle.$$

In base a tali semplici risultati, se  $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{u}_1\}$  e  $\{\mathbf{f}_2, \mathbf{u}_2\}$  sono due punti distinti del grafico del legame, risulterà:

$$\langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \rangle = \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{K}_o}^2 - \|\mathbf{u}_{p2} - \mathbf{u}_{p1}\|_{\mathbf{K}_o}^2 - \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{u}_{p2} - \mathbf{u}_{p1} \rangle,$$

$$\langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \rangle = \|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{\mathbf{C}_o}^2 + \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{u}_{p2} - \mathbf{u}_{p1} \rangle.$$

Il legame anelastico  $\mathbf{M}$  che a  $\mathbf{f}$  fa corrispondere  $\mathbf{u}_p$  è monotono, per cui risulta

$$\langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{M}(\mathbf{f}_2) - \mathbf{M}(\mathbf{f}_1) \rangle = \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{u}_{p2} - \mathbf{u}_{p1} \rangle \geq 0.$$

Si può concludere che sussiste la seguente catena di diseguaglianze

$$\|\mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1\|_{\mathbf{C}_o}^2 \leq \langle \mathbf{f}_2 - \mathbf{f}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \rangle \leq \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|_{\mathbf{K}_o}^2.$$

## 9.2. Metodo iterativo

La soluzione del problema strutturale non lineare può essere perseguita con un *metodo iterativo* basato sulla ricerca del *punto fisso* di un *algoritmo*.

Per ogni dato sistema di forze ammissibile  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  sia  $\mathcal{A}_f : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$  l'*algoritmo* ed  $i$  l'indice del generico ciclo di iterazione.

Il *metodo iterativo* associato all'*algoritmo*  $\mathcal{A} : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$  è espresso dalla *relazione di ricorrenza*

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathcal{A}_f(\mathbf{u}_i),$$

ed esplicitamente

$$\boxed{\mathbf{u}_0 = \mathbf{C}_o \mathbf{f}, \quad \begin{cases} \mathbf{f} - \mathbf{K}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{r}_i & i = 1, \dots + \infty. \\ \mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \end{cases}}$$

dove

- $\mathbf{C}_o : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  è l'operatore di *cedevolezza elastica*, lineare, continuo e definito positivo,
  - $\mathbf{C}_i : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  è l'operatore di *cedevolezza di iterazione* relativa al ciclo  $i$ -esimo, lineare, continuo e definito positivo,
  - $\mathbf{r}_i$  è il residuo al ciclo  $i$ -esimo.
- L'*algoritmo* converge se, all'aumentare del numero di iterazioni, il residuo tende ad annullarsi.

Si introduca ora la seguente definizione.

- Un operatore  $\mathbf{K}_s : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{F}$  di *rigidezza secante* soddisfa la proprietà

$$\mathbf{K}_s[\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i] = \mathbf{K}(\mathbf{u}_{i+1}) - \mathbf{K}(\mathbf{u}_i).$$

- La corrispondente *cedevolezza secante*  $\mathbf{C}_s = \mathbf{K}_s^{-1} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{V}$  gode della proprietà

$$\mathbf{C}_s[\mathbf{f}_{i+1} - \mathbf{f}_i] = \mathbf{M}(\mathbf{f}_{i+1}) - \mathbf{M}(\mathbf{f}_i).$$

In virtù della catena di diseguaglianze dimostrata nella sezione 9.1 si può affermare che valgono le relazioni:

$$\mathbf{C}_s \geq \mathbf{C}_o,$$

$$\mathbf{K}_s \leq \mathbf{K}_o.$$

### 9.3. Convergenza dell'algoritmo

In base alla definizione della *rigidezza secante*  $\mathbf{K}_s$  si ha che

$$\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i = -\mathbf{K}(\mathbf{u}_{i+1}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}_i) = -\mathbf{K}_s[\mathbf{u}_{i+1} - \mathbf{u}_i] = -\mathbf{K}_s \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i = -\mathbf{A}_i \mathbf{r}_i$$

dove si è posto  $\mathbf{A}_i = \mathbf{K}_s \mathbf{C}_i$ .

Si definisca ora la *norma del residuo* in energia della cedevolezza di iterazione

$$\|\mathbf{r}_i\|^2 = \langle \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \rangle$$

e si osservi che

$$\|\mathbf{r}_{i+1}\|^2 = \|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|^2 + \|\mathbf{r}_i\|^2 + 2 * \langle \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \rangle.$$

Ora risulta

$$\|\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i\|^2 = \|\mathbf{A}_i \mathbf{r}_i\|^2 = \langle \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i \rangle,$$

$$\langle \mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \rangle = -\langle \mathbf{K}_s \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \rangle = -\langle \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \rangle.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{i+1}\|^2 &= \|\mathbf{r}_i\|^2 + \langle \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i \rangle - 2 * \langle \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{C}_i \mathbf{r}_i \rangle = \\ &= \|\mathbf{r}_i\|^2 + \langle (\mathbf{C}_i \mathbf{A}_i - 2\mathbf{C}_i) \mathbf{r}_i, \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i \rangle = \\ &= \|\mathbf{r}_i\|^2 + \langle (\mathbf{C}_i - 2\mathbf{C}_i \mathbf{A}_i^{-1}) \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i \rangle = \\ &= \|\mathbf{r}_i\|^2 + \langle (\mathbf{C}_i - 2\mathbf{C}_s) \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i, \mathbf{A}_i \mathbf{r}_i \rangle, \end{aligned}$$

dove si è fatto ricorso alla relazione

$$\mathbf{A}_i^{-1} = \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{C}_s.$$

Dunque risulta certamente

$$\|\mathbf{r}_{i+1}\|^2 < \|\mathbf{r}_i\|^2,$$

se la differenza tra  $2\mathbf{C}_s$  e  $\mathbf{C}_i$  è definita positiva, ovvero, in simboli, se

$$\mathbf{C}_i < 2\mathbf{C}_s.$$

*Condizione  
sufficiente  
di convergenza*

Essendo poi  $\mathbf{C}_s \geq \mathbf{C}_o$  la condizione di convergenza sarà soddisfatta *a fortiori* se

$$\mathbf{C}_i < 2\mathbf{C}_o \leq 2\mathbf{C}_s.$$

## RIFERIMENTI

1. L.F. MENABREA, *Comptes Rendus*, 1056 (1858).
2. A. CASTIGLIANO, *Atti Accademia delle Scienze di Torino*, **11**, 127-285 (1875).
3. W.H. YOUNG, On classes of summable functions and their Fourier series, *Proc. Roy. Soc., (A)* 87, 225-229 (1912).
4. S. MANDELBROJT, Sur les fonctions convexes, *C. R. Acad. Sc.*, 209, 977-978 (1939).
5. W. FENCHEL, On conjugate convex functions, *Canad. J. Math.*, 1, 73-77 (1949).
6. W. FENCHEL, Convex cones, Sets and Functions, Princeton Univ. Press, Princeton (1951).
7. J.J. MOREAU, Fonctions convexes en dualité, *Fac. des sciences de Montpellier*, Sem. de Mathématiques (1962).
8. P. PERZYNA, The constitutive equations for rate sensitive materials, *Quart. Appl. Math.* **1.1**, 20, 321-332, (1963).
9. A. BRØNDSTED, Conjugate convex functions in topological vector spaces, *Mat. Fys. Mess. Dansk. Vid. Selsk.*, 34, 1-26 (1964).
10. K. YOSIDA, Functional Analysis, Fourth Ed. Springer-Verlag, New York (1974), first ed. (1964)
11. J.J. MOREAU, Proximité ed dualité dans un espace hilbertien, *Bull. soc. Math. France*, 93 (1965).
12. J.J. MOREAU, Fonctionnelles Convexes, Lecture Notes, Séminaire Equations aux dérivées partielles, *Collège de France*, (1966).
13. R.T. ROCKAFELLAR, Convex Analysis, Princeton University Press, (1970).
14. V. FRANCIOSI, Scienza delle Costruzioni, vol I-V, Liguori, Napoli (1970).
15. J.P. LAURENT, Approximation et Optimisation, Hermann, Paris (1972).
16. G. DUVAUT, J.L. LIONS, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris (1972).
17. J.J. MOREAU, On unilateral constraints, friction and plasticity, *Centro internazionale matematico estivo (C.I.M.E.)*, Bressanone, 173-322, (1973).
18. R. BALDACCI, Scienza delle Costruzioni, vol I - II, UTET (1976).
19. I. EKELAND , R. TEMAM, Convex Analysis and Variational Problems, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1976)
20. A.D. IOFFE, V.M. TIHOMIROV, The Theory of Extremal Problems, Nauka, Moscow (English translation, North-Holland, Amsterdam (1979).
21. G. ROMANO, M. ROMANO, Sulla soluzione di problemi strutturali in presenza di legami costitutivi unilaterali. *Acc. Naz. Lincei; Rend. Sc. Fis. Mat. Nat.*, Serie VIII, Vol. LXVII, fasc. 1-2, Ferie (1979).
22. G. ROMANO, Duality And Variational Principles in Structural Mechanics under Bilateral and Unilateral Constraints. *Laboratorio de Computação Científica L.C.C.*, Rio de Janeiro (1982).
23. P. SUQUET, Plasticité et Homogénéisation, *These de doctorat d'etat*, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
24. J. SALENÇON, Calcul à la rupture et analyse limite, *Presse de l' école National des Ponts et Chaussées*, Paris (1983).

25. H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson Editeur, Paris (1983).
26. G. ROMANO, M. ROMANO, Elastostatics of Structures with Unilateral Conditions on Stress and Displacements Fields. *CISM Courses and Lectures N. 288*, Ravello, September 22-24, 1983. 315-338, Springer Verlag, New York - Wien, (1985).
27. G. ROMANO, E. SACCO, A General Theory of Convex Elastostatic Problems. *International Conference on Nonlinear Mechanics*, Shanghai, (1985).
28. G. ROMANO, E. SACCO, Convex Problems in Structural Mechanics. *CISM Courses and Lectures N. 304*, Prescudin, June 17-20, 1985. 279-297, Springer, New York - Wien (1987).
29. G. ROMANO, E. SACCO, Analisi limite e collasso plastico per materiali non standard ben posti. *Rivista Italiana di Geotecnica XIX*, 1, 37-41, (1985).
30. P.D. PANAGIOTOPoulos, Inequality Problems in Mechanics and Applications, Birkhauser (1985).
31. G. ROMANO, E. SACCO, Sui Teoremi di Castigliano. *VIII Congresso Naz. AIMETA*, Torino, (1986).
32. G. ROMANO, General Variational Principles in Convex Structural Analysis. *Unilateral Problems in Mechanics, I.S.I.M.M.*, Roma, (1987).
33. G. ROMANO, L. ROSATI, Variational Principles in Convex Structural Analysis. *Volume in onore del Prof. Giulio Ceradini*, Roma, (1988).
34. G. ROMANO, L. ROSATI, On Limit states, Plasticity and Locking. *IX Congresso Naz. AIMETA*, Bari, October 4-7 (1988).
35. G. ROMANO, L. ROSATI, G. FERRO, Theorems of the Alternative in Unilateral Structural Mechanics. *4th International Meeting "U.P.S.A."*. Capri, 14-16 Giugno (1989).
36. G. ROMANO, L. ROSATI, A Survey on Recent Advances in Convex Structural Analysis. *Meccanica dei Materiali e delle Strutture. Atti del Convegno Nazionale in ricordo di Riccardo Baldacci e Michele Capurso*, Roma, 25-27 ottobre (1989).
37. G. ROMANO, L. ROSATI, G. FERRO, Principi Variazionali nella Dinamica non Lineare di Strutture con Vincoli Convessi. *Atti IX Congresso Naz. AIMETA*, Pisa, 2-5 Ottobre (1990).
38. G. ROMANO, L. ROSATI, F. MAROTTI DE SCIARRA, P. BISEGNA, A potential theory for monotone multi-valued operators. *Quart. Appl. Math.* **1.1**, 4, 613-631, (1993).
39. J.B. HIRIART-URRUTY, C. LEMARÉCHAL, Convex Analysis and Minimization Algorithms, Springer, Berlin (1993).
40. G. ROMANO, New Results in Subdifferential Calculus with Applications to Convex Optimization, *Appl. Math. Optim.* 32:213-234 (1995).
41. G. ROMANO Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2000).

# V – TRAVATURE PIANE

Questo capitolo è dedicato alla presentazione del metodo di calcolo automatico di strutture composte da travi, dette pertanto *travature*. Per semplificare l'esposizione, l'analisi è sviluppata con riferimento a *travature piane* composte da travi ad asse rettilineo ed a sezione costante. Il metodo esposto è però del tutto generale e quindi direttamente estendibile al caso generale di travature spaziali anche ad asse curvo. La prima sezione è dedicata alla presentazione degli elementi di base della teoria dell'interpolazione lineare che vengono richiamati nella seconda sezione più specificamente dedicata alla illustrazione della implementazione del metodo degli spostamenti per le *travature piane*.

## 1. INTERPOLAZIONE

Nella soluzione approssimata di problemi di Fisica Matematica si fa usualmente ricorso a metodologie di interpolazione che consentono di riformulare il problema originario in un contesto che rende più agevole la trattazione. Un problema di interpolazione è caratterizzato da

- uno spazio lineare di funzioni da interpolare,
- un sottospazio lineare di *funzioni di forma* che rappresentano gli oggetti con cui interpolare,
- un insieme di condizioni lineari che definiscono il criterio di interpolazione.

Perchè un problema di interpolazione sia ben formulato è necessario che, nella scelta delle funzioni di forma e delle condizioni cui esse debbono obbedire, vengano rispettate regole precise che assicurano l'univocità della determinazione del campo interpolante un ente vettoriale.

Nel seguito si conduce una analisi del problema della interpolazione lineare e si fornisce la dimostrazione dei principali risultati.

- Un *problema di interpolazione lineare*, che si denota con la sigla **PIL**, viene usualmente formulato ponendo il seguente quesito.

Dato uno spazio lineare  $\mathcal{V}_h$  di dimensione finita  $n$  generato da un insieme di funzioni di forma  $\{\mathbf{v}_i\}$  con  $i = 1, \dots, n$ , si individui la funzione  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$  che soddisfa assegnate condizioni lineari.

Per chiarezza espositiva la trattazione parte dal considerare alcuni semplici esempi che introducono alla visione generale della questione. Gli esempi verranno discussi nella sezione 1.7 (p. 191) sulla base dei risultati della teoria sviluppata in questo capitolo.

**Esempio 1** – Determinare il polinomio di 2° grado nella variabile  $x$  con assegnati valori agli estremi dell’intervallo  $[-1, +1]$  ed assegnata derivata per  $x = -1$ .

**Esempio 2** – Determinare il polinomio di 2° grado nella variabile  $x$  che assume nell’intervallo  $[-1, +1]$  assegnati valori agli estremi ed un assegnato valor medio.

**Esempio 3** – Determinare il polinomio di 2° grado nella variabile  $x$  che assume assegnati valori agli estremi dell’intervallo  $[-1, +1]$  ed un assegnato valore della derivata per  $x = 0$ .

Nel quadro a fianco sono riportati tre esempi elementari di **PIL**. Da essi si parte per svolgere alcune considerazioni generali che motivano lo sviluppo della teoria.

Per introdurre la trattazione generale dei **PIL** è conveniente far riferimento ai semplici problemi su esperti per mostrare come una diversa interpretazione degli elementi e delle condizioni che ivi compaiono consenta di inquadrare la problematica in modo più chiaro ed esauriente. A tal fine si premettono alcune osservazioni che gradualmente conducono alla formalizzazione del problema.

Sia  $C^1(I)$  lo spazio delle funzioni continue con la derivata prima nell’intervallo  $I = [-1, +1]$ .

L’insieme dei polinomi di 2° grado è un sottospazio lineare tridimensionale di  $C^1(I)$  che si denota con il simbolo  $P_2(I)$ .

Una base di  $P_2(I)$  è costituita dai monomi  $\{1, x, x^2\}$ .

Lo spazio  $P_2(I)$  è quello in cui si ricerca la funzione che soddisfa le condizioni lineari assegnate nei tre esempi precedenti.

Per indagare circa l’esistenza e l’unicità della soluzione di un **PIL** è conveniente riformularlo facendo ricorso al concetto di dualità.

L’idea è quella di interpretare le condizioni lineari come valori assunti da assegnati *funzionali lineari*.

Un **PIL** è quindi definito da una coppia di sottospazi lineari, uno generato dalle funzioni di forma e l’altro generato dai funzionali lineari corrispondenti alle condizioni lineari imposte.

Il **PIL** considerato nell’esempio 1 può infatti essere riformulato come segue:

Si considerino i funzionali lineari  $\{\mathbf{f}_i, i = 1, 2, 3\}$  che campionano rispettivamente il valore delle funzioni di  $C^1(I)$  nei punti  $x = -1$  e  $x = +1$  e quello della loro derivata nel punto  $x = 0$ . Il **PIL** consiste nel ricercare una soluzione del problema lineare

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{v}_h) = c_i, \quad i = 1, \dots, 3,$$

dove

- $\mathbf{v}_h \in P_2(I)$  è un polinomio di 2° grado e
- $c_i, i = 1, 2, 3$  sono scalari assegnati.

*Formulazione del PIL in termini di funzionali lineari*

I termini noti  $c_i$  possono essere interpretati come valori assunti dai funzionali lineari  $\mathbf{f}_i$  in corrispondenza di una funzione  $\mathbf{v} \in C^1(I)$  che

- assume i valori  $c_1$  e  $c_2$  rispettivamente in  $x = -1$  e  $x = +1$ ,
- ha derivata pari a  $c_3$  per  $x = 0$ .

Dunque assegnare gli scalari  $c_i$  equivale a considerare una siffatta particolare funzione  $\mathbf{v} \in C^1(I)$ .

Il **PIL** si pone allora come segue.

Assegnata una funzione  $\mathbf{v} \in C^1(I)$ , determinare il polinomio  $\mathbf{v}_h \in P_2(I)$  tale che

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{v}_h) = \mathbf{f}_i(\mathbf{v}), \quad i = 1, 2, 3,$$

ovvero, in modo equivalente, tale che

$$\mathbf{f}_h(\mathbf{v}_h) = \mathbf{f}_h(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{f}_h \in \mathcal{F}_h,$$

dove  $\mathcal{F}_h$  è il sottospazio lineare generato dai funzionali  $\{\mathbf{f}_i, i = 1, 2, 3\}$ .

*Formulazione del PIL in termini variazionali*

- Il polinomio  $\mathbf{v}_h \in P_2(I)$  è il *polinomio interpolante* la funzione  $\mathbf{v} \in C^1(I)$  rispetto alle condizioni lineari descritte dal sottospazio lineare  $\mathcal{F}_h$ .

Questa ultima formulazione suggerisce quale sia il quadro formale più conveniente per porre un **PIL**.

Nel seguito si espone la teoria fornendo forme alternative del problema che ne consentono interessanti interpretazioni geometriche. L'analisi viene dapprima condotta nel contesto di spazi di dimensione infinita e quindi specializzata al caso di dimensione finita che è classicamente considerato nelle trattazioni di tipo computazionale.

Vengono affrontate e discusse le questioni di esistenza ed unicità del problema nel caso generale, fornendo condizioni di tipo insiemistico e di tipo variazionale.

Tali condizioni sono quindi specializzate ai **PIL** in dimensione finita con la definizione delle *matrici di HAAR*. Si svolge infine la trattazione dei classici *polinomi di HERMITE* in termini di basi duali.

### 1.1. Interpolazione lineare

Si definisce dapprima il contesto astratto in cui porre il problema. L'ambiente è il più generale che consente di affrontare per via matematica la discussione di questo problema e della maggioranza dei problemi di interesse in Fisica Matematica.

Il concetto informatore è quello della dualità che accoppia due spazi vettoriali.

L'idea è quella di assumere l'esistenza di una *interazione* tra i due spazi che preservi la linearità e consenta di *identificare* perfettamente un qualsiasi vettore, di ciascuno dei due spazi, sulla base della conoscenza della sua interazione con ogni vettore dell'altro spazio.

Dal punto di vista matematico questo significa che sul prodotto cartesiano dei due spazi è definita una forma bilineare i cui valori rappresentano le determinazioni dell'interazione.

In virtù della linearità, la proprietà di identificazione è garantita dall'essere tale forma non degenere.

Le definizioni formali sono le seguenti.

- Si considerino uno spazio di HILBERT  $\mathcal{V}$  ed il suo duale  $\mathcal{F}$ . La *dualità* definisce una *forma bilineare non degenere*  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sul prodotto cartesiano  $\mathcal{V} \times \mathcal{F}$ .

Infatti sussistono le proprietà

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f} = 0, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= 0, & \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = 0.\end{aligned}$$

La prima è banale, la seconda si dimostra ricorrendo al teorema di HAHN-BANACH (vedi Tomo I, sezione II.3 (p. 191)), se lo spazio  $\mathcal{V}$  è uno spazio di BANACH, o anche al teorema di RIESZ, se lo spazio  $\mathcal{V}$  è uno spazio di HILBERT.

Le implicazioni precedenti equivalgono alla *proprietà di identificazione* in quanto

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{v} \rangle, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_1 \rangle &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_2 \rangle, & \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

## 1.2. Sottospazi interpolanti

Si consideri una coppia di sottospazi lineari chiusi  $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$ .

I sottospazi  $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$  sono detti *sottospazi lineari duali interpolanti* in  $\mathcal{V} \times \mathcal{F}$  se sono soddisfatte le seguenti proprietà tra loro equivalenti.

- proprietà di identificazione*
- proprietà di complementarietà*
- proprietà di proiezione*
- proprietà di isomorfismo quoziante*

### 1.2.1. Proprietà di identificazione

I sottospazi lineari chiusi  $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$  godono della proprietà di identificazione se

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle &= 0, \quad \forall \mathbf{v}_o \in V_o \Rightarrow \mathbf{f}_o = 0, \\ \langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle &= 0, \quad \forall \mathbf{f}_o \in \mathcal{F}_o \Rightarrow \mathbf{v}_o = 0.\end{aligned}$$

Tale caratterizzazione di una coppia di sottospazi duali interpolanti consiste nel richiedere che i sottospazi godano della proprietà di identificazione peculiare della dualità.

### 1.2.2. Proprietà di complementarietà

I sottospazi lineari chiusi  $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$  godono della

- *proprietà di complementarietà* se
- $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o^\perp \subset \mathcal{V}$  sono *supplementari topologici*, cioè se sussiste la relazione (vedi Tomo I, sezione IV.14 (p. 485))

$$\mathcal{V} = V_o \oplus \mathcal{F}_o^\perp,$$

ovvero, per definizione dell'operazione  $\oplus$  di somma diretta di due sottospazi lineari, se

$$\mathcal{V} = V_o + \mathcal{F}_o^\perp \quad \text{e} \quad V_o \cap \mathcal{F}_o^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

Sussiste la seguente equivalenza.

**Proposizione 1.1.** *La proprietà di complementarietà è caratterizzata dalle proprietà equivalenti*

$$\mathcal{V} = V_o \oplus \mathcal{F}_o^\perp, \iff \mathcal{F} = \mathcal{F}_o \oplus V_o^\perp.$$

**Dim.** Dalla relazione  $\mathcal{V} = V_o + \mathcal{F}_o^\perp$ , prendendo i complementi ortogonali, si ha che

$$\{\mathbf{o}\} = V_o^\perp \cap \mathcal{F}_o,$$

in quanto  $\mathcal{F}_o^{\perp\perp} = \overline{\mathcal{F}_o} = \mathcal{F}_o$ . Dalla relazione  $V_o \cap \mathcal{F}_o^\perp = \{\mathbf{o}\}$ , prendendo i complementi ortogonali, ed osservando che la somma  $V_o^\perp + \mathcal{F}_o$  è un sottospazio lineare chiuso in quanto tale è la somma  $V_o + \mathcal{F}_o^\perp$  dei rispettivi complementi ortogonali (vedi [1]), si ha che

$$V_o^\perp + \mathcal{F}_o = \mathcal{F}.$$

Dunque  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_o \oplus V_o^\perp$ . L'implicazione inversa si dimostra in modo simmetrico.  $\square$

E' immediato verificare che anche le seguenti proprietà possono essere assunte per definire la complementarietà di  $V_o$  e  $\mathcal{F}_o$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_o + V_o^\perp$$

$$\mathcal{V} = V_o + \mathcal{F}_o^\perp,$$

ovvero

$$V_o \cap \mathcal{F}_o^\perp = 0$$

$$\mathcal{F}_o \cap V_o^\perp = 0.$$

Tali ultime relazioni mostrano che la complementarietà e la identificabilità sono proprietà equivalenti.

### 1.2.3. Proprietà di proiezione

I sottospazi lineari chiusi  $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$  godono della proprietà di proiezione se esistono due proiettori  $\mathbf{P} : \mathcal{V} \mapsto V_o$  e  $\mathbf{Q} : \mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_o$  tali che

$$\mathbf{v} - \mathbf{P} \mathbf{v} \in \mathcal{F}_o^\perp,$$

$$\mathbf{f} - \mathbf{Q} \mathbf{f} \in V_o^\perp.$$

ovvero, esplicitamente

$$\langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}_o, \mathbf{P} \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{f}_o \in \mathcal{F}_o,$$

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_o \rangle = \langle \mathbf{Q} \mathbf{f}, \mathbf{v}_o \rangle, \quad \forall \mathbf{v}_o \in V_o.$$

E' evidente che la proprietà di complementarietà vale se e solo se vale la proprietà di proiezione con proiettori  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$  univocamente definiti.

I vettori  $\mathbf{P} \mathbf{v}$  e  $\mathbf{Q} \mathbf{f}$  sono gli *interpolanti* di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{f}$ .

#### 1.2.4. Proprietà di isomorfismo quoziante

I sottospazi lineari  $V_o \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$  godono della proprietà di *isomorfismo quoziante* se la corrispondenza che ad ogni vettore di  $\mathbf{v}_o \in V_o$  associa la classe di equivalenza  $\mathbf{v}_o + \mathcal{F}_o^\perp \in \mathcal{V}/\mathcal{F}_o^\perp$  è un isomorfismo e cioè una corrispondenza lineare e biunivoca.

Le seguenti proprietà sono equivalenti

$$V_o \text{ è isomorfo a } \mathcal{V}/\mathcal{F}_o^\perp,$$

$$\mathcal{F}_o \text{ è isomorfo a } \mathcal{F}/V_o^\perp.$$

Considerando i sottospazi lineari chiusi  $V'_o$  e  $\mathcal{F}'_o$  quali spazi di HILBERT, siano  $V'_o$  e  $\mathcal{F}'_o$  i rispettivi spzi duali. Si ha allora che [1]

$$\mathcal{F}'_o \text{ è isomorfo a } \mathcal{V}/\mathcal{F}_o^\perp,$$

$$V'_o \text{ è isomorfo a } \mathcal{F}/V_o^\perp.$$

Dunque la proprietà di isomorfismo quoziante equivale ad assumere che sussistano le relazioni

$$V_o \text{ è isomorfo a } \mathcal{F}'_o,$$

$$\mathcal{F}_o \text{ è isomorfo a } V'_o.$$

*Osservazione.* Fissato uno dei due sottospazi,  $V_o$  o  $\mathcal{F}_o$ , si possono determinare infinite coppie duali interpolanti.

#### 1.3. Interpolazione in spazi non finitamente generabili

Si può ora porre il quesito che costituisce la formulazione generale di un **PIL** e svolgere la discussione delle relative condizioni di esistenza ed unicità della soluzione.

Il sottospazio lineare generato dalle funzioni di forma e quello generato dai funzionali lineari che definiscono le condizioni di interpolazione possono essere non finitamente generabili. Il caso particolare, ma importante per le applicazioni, di sottospazi lineari interpolanti di dimensione finita, verrà trattato nella prossima sezione.

Fissato un vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , un sottospazio lineare  $V_o \subset \mathcal{V}$  ed un sottospazio lineare  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$ , si ricercano le soluzioni del problema lineare

$$\langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle = \langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{f}_o \in \mathcal{F}_o.$$

*Formulazione  
generale del PIL*

La discussione di un **PIL** si conduce osservando che esiste una soluzione se e solo se

$$\exists \mathbf{v}_o \in V_o \mid \mathbf{v} \in \mathbf{v}_o + \mathcal{F}_o^\perp,$$

e cioè se

$$\mathbf{v} \in V_o + \mathcal{F}_o^\perp = (V_o^\perp \cap \mathcal{F}_o)^\perp,$$

ovvero, in termini variazionali, se

$$\langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle = 0 \quad \mathbf{f}_o \in \mathcal{F}_o, \quad \forall \mathbf{v}_o \in V_o \Rightarrow \langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

*Esistenza  
della  
soluzione*

Soddisfatta tale condizione, l'unicità della soluzione sussiste se e solo se

$$\langle \mathbf{f}_o, \mathbf{v}_o \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{f}_o \in \mathcal{F}_o \Rightarrow \mathbf{v}_o = 0,$$

e cioè se

$$V_o \cap \mathcal{F}_o^\perp = 0.$$

*Unicità  
della  
soluzione*

La discussione mostra che l'esistenza e l'unicità della soluzione del **PIL** è assicurata per ogni assegnato vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  se e solo se i due sottospazi interpolanti  $V_o \subset \mathcal{V}$  ed  $\mathcal{F}_o \subset \mathcal{F}$  costituiscono una coppia di sottospazi *duali* interpolanti.

#### 1.4. Interpolazione in spazi di dimensione finita

Si consideri ora il caso in cui i sottospazi lineari  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  ed  $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$  sono di dimensione finita, generati dalle basi

$$\begin{aligned} \{\mathbf{f}_i, i = 1, \dots, m\} &\quad \text{in } \mathcal{F}_m, \\ \{\mathbf{v}_j, j = 1, \dots, n\} &\quad \text{in } \mathcal{V}_h. \end{aligned}$$

Esprimendo i vettori di  $\mathcal{V}_h$  e  $\mathcal{F}_m$  in termini di componenti

$$\mathbf{f}_m = \sum_{i=1}^m y_i \mathbf{f}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_h = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j,$$

il prodotto scalare tra due vettori  $\mathbf{f}_m \in \mathcal{F}_m$  e  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$  si scrive

$$\langle \mathbf{f}_m, \mathbf{v}_h \rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_j \rangle x_j y_i,$$

La matrice di HAAR  $\mathbf{H} : \Re^m \mapsto \Re^n$  relativa alle basi  $\{\mathbf{f}_i\}$  e  $\{\mathbf{v}_j\}$  è definita da

$$\mathbf{H}_{ij} = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Risulta quindi  $\langle \mathbf{f}_m, \mathbf{v}_h \rangle = \mathbf{H} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ .

*Matrice di HAAR*

Ricordando la formulazione del **PIL** in termini variazionali

$$\langle \mathbf{f}_m, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{f}_m, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{f}_m \in \mathcal{F}_m,$$

e definendo il vettore dei dati  $\ell \in \Re^m$  come proiezione della funzione assegnata  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  sulla base  $\{\mathbf{f}_i\}$  di  $\mathcal{F}_m$ , e dunque in componenti

$$\ell_i = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v} \rangle, \quad i = 1, \dots, m,$$

il **PIL** si scrive

$$\mathbf{H} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \ell \cdot \mathbf{y}, \quad \forall \mathbf{y} \in \Re^m,$$

ovvero

$$\mathbf{H} \mathbf{x} = \ell.$$

La discussione del **PIL** si conduce allora in modo classico in termini di matrici.

Una soluzione esiste se il dato  $\ell \in \Re^m$  risulta ortogonale al nucleo della trasposta della matrice di HAAR.

In tal caso la soluzione è poi unica se il nucleo della matrice di HAAR è degenere.

Il risultato fondamentale di esistenza ed unicità di un **PIL** in dimensione finita è il seguente.

Esiste un'unica soluzione del **PIL** per qualsiasi dato se i due sottospazi lineari  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$  costituiscono una coppia duale interpolante e cioè se

$$\mathbf{H} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0, \quad \forall \mathbf{y} \in \Re^m \Rightarrow \mathbf{x} = 0,$$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Re^m \Rightarrow \mathbf{y} = 0.$$

*Esistenza  
ed unicità*

Dunque la matrice di HAAR  $\mathbf{H} : \Re^m \mapsto \Re^n$  e la sua trasposta  $\mathbf{H}^T : \Re^n \mapsto \Re^m$  devono entrambe avere nucleo degenere.

Il rango di  $\mathbf{H}$  sarà quindi eguale ad  $m$  e quello di  $\mathbf{H}^T$  ad  $n$ .

Ciò comporta che i due sottospazi  $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$  e  $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}$  devono avere la stessa dimensione.

La matrice di HAAR è allora quadrata e non singolare.

Le componenti di  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}$  e  $\mathbf{f}_h \in \mathcal{F}$  rispetto alle basi  $\{\mathbf{f}_i\}$  e  $\{\mathbf{v}_j\}$  si possono esprimere in funzione della matrice di HAAR e delle loro proiezioni sui vettori della base dello spazio duale. Infatti se

$$\mathbf{f}_h = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{f}_i \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_h = \sum_{j=1}^m x_j \mathbf{v}_j,$$

si ha

$$\langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_j \rangle y_i \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_h \rangle = \sum_{j=1}^m \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_j \rangle x_j,$$

e ponendo  $\mathbf{q}_j = \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_j \rangle$  e  $\mathbf{p}_i = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{v}_h \rangle$  si ottiene che

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}^T \mathbf{y},$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{H} \mathbf{x}.$$

Dagli sviluppi precedenti emerge che la formulazione di un **PIL** in termini matriciali dipende dalla particolare scelta delle basi nei due sottospazi interpolanti.

Ovviamente, sebbene il problema numerico sia diverso, il risultato è invariante e cioè il campo interpolante non dipende dalla scelta delle basi.

Una scelta particolarmente conveniente consiste nel determinare le due basi in modo che le condizioni da imporre siano tra loro indipendenti.

In tal caso infatti il **PIL** assume una forma canonica e non comporta la soluzione di un sistema di equazioni lineari.

Si pone la seguente definizione

Le basi  $\{\mathbf{f}_i\}$  e  $\{\mathbf{v}_j\}$  sono dette *duali* se la relativa matrice di HAAR risulta eguale alla matrice identica:  $\mathbf{H} = I$ .

*Basi duali*

Se la matrice di HAAR è quadrata e non singolare ma le basi  $\{\mathbf{f}_i\}$  e  $\{\mathbf{v}_i\}$  non sono duali, è possibile determinare la base duale di ciascuna di esse.

Nei quadri seguenti sono riportati esplicitamente le procedure per la costruzione della base duale in  $\mathcal{F}_h$  di una assegnata base in  $\mathcal{V}_h$  e della base duale in  $\mathcal{V}_h$  di una assegnata base in  $\mathcal{F}_h$ .

Fissata la base  $\{\mathbf{f}_i\}$  in  $\mathcal{F}_h$  per determinare la base  $\{\mathbf{w}_j\}$  ad essa duale in  $\mathcal{V}_h$  si esprime il generico vettore  $\mathbf{w}_j$  come combinazione lineare dei vettori di  $\{\mathbf{v}_i\}$

$$\mathbf{w}_j = \sum_{k=1}^n \mathbf{C}_{jk} \mathbf{v}_k ,$$

e si impone che

$$\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{C}_{jk} \mathbf{v}_k \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{H}_{ik} \mathbf{C}_{jk} = I_{ij} ,$$

*Base  
duale  
in  $\mathcal{V}_h$*

Ne consegue che deve risultare

$$\mathbf{H} \mathbf{C}^T = I \text{ e cioè } \mathbf{C} = \mathbf{H}^{-T} .$$

La matrice  $\mathbf{C}$  così ottenuta definisce univocamente la base  $\{\mathbf{w}_j\}$  di  $\mathcal{V}_h$  duale della base  $\{\mathbf{f}_i\}$  di  $\mathcal{F}_h$ .

Fissata la base  $\{\mathbf{v}_j\}$  in  $\mathcal{V}_h$ , per determinare la base  $\{\mathbf{g}_i\}$  ad essa duale in  $\mathcal{F}_h$  si esprime il generico vettore  $\mathbf{g}_i$  come combinazione lineare dei vettori di  $\{\mathbf{f}_i\}$

$$\mathbf{g}_i = \sum_{k=1}^n \mathbf{C}_{ik} \mathbf{f}_k ,$$

e si impone che

$$\langle \mathbf{g}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{C}_{ik} \langle \mathbf{f}_k, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{k=1}^n \mathbf{C}_{ik} \mathbf{H}_{kj} = I_{ij} .$$

*Base  
duale  
in  $\mathcal{F}_h$*

Ne consegue che deve risultare

$$\mathbf{C} \mathbf{H} = I \text{ e cioè } \mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1} .$$

La matrice  $\mathbf{C}$  così ottenuta definisce univocamente la base  $\{\mathbf{g}_i\}$  di  $\mathcal{F}_h$  duale della base  $\{\mathbf{v}_i\}$  di  $\mathcal{V}_h$ .

### 1.5. Esercizi

La teoria sviluppata nelle sezioni precedenti consente di risolvere con semplicità i seguenti problemi.

**Esercizio. 1** – Si calcoli la base duale di  $\{1, x, x^2\}$  nello spazio generato da  $\{F_{-1}, F_{+1}, M_{-1}\}$ .

**Esercizio. 2** – Si calcoli la base duale di  $\{1, x, x^2\}$  nello spazio generato da  $\{F_{-1}, F_{+1}, \text{MED}\}$ .

**Esercizio. 3** – Si calcoli la base duale di  $\{F_{-1}, F_{+1}, M_{-1}\}$  nello spazio generato da  $\{1, x, x^2\}$ .

**Esercizio. 4** – Si calcoli la base duale di  $\{F_{-1}, F_{+1}, \text{MED}\}$  nello spazio generato da  $\{1, x, x^2\}$ .

Le soluzioni sono fornite alla sezione 1.6.

### 1.6. Soluzione degli esercizi

**Esercizio 1** – La matrice di HAAR e la sua inversa risultano pari a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 1/4 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

La base duale è quindi

$$\{3/4F_{-1} + 1/4F_{+1} + 1/2M_{-1}, -1/2F_{-1} + 1/2F_{+1}, -1/4F_{-1} + 1/4F_{+1} - 1/2M_{-1}\}.$$

**Esercizio 2** – La matrice di HAAR e la sua inversa risultano pari a

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/4 & -1/4 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/4 & 3/4 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

La base duale è quindi

$$\{-1/4 + 1/4F_{+1} + 1/2M_{-1}, -1/2F_{-1} + 1/2F_{+1}, -1/4F_{-1} + 1/4F_{+1} - 1/2M_{-1}\}.$$

**Esercizio 3** – La base duale si ottiene trasponendo l'inversa della matrice di HAAR determinata nell'esercizio 1

$$\begin{vmatrix} 3/4 - 1/2x - 1/4x^2 \\ 1/4 + 1/2x + 1/4x^2 \\ 1/2 - 1/2x^2 \end{vmatrix}.$$

**Esercizio 4** – La base duale si ottiene trasponendo l'inversa della matrice di HAAR determinata nell'esercizio 2 :

$$\begin{vmatrix} -1/4 - 1/2x + 3/4x^2 \\ -1/4 + 1/2x + 3/4x^2 \\ 3/2 - 3/2x^2 \end{vmatrix}.$$

### 1.7. Discussione degli esempi

Si esaminano ora, alla luce dei risultati della teoria, i semplici esempi 1, 2 e 3 esposti all'inizio della trattazione, nella sezione 1 (p. 179).

Si consideri nello spazio  $P_2$  la base di monomi  $\{1, x, x^2\}$  e nel duale la base  $\{F_{-1}, F_{+1}, M_{-1}\}$  costituita dai funzionali che campionano rispettivamente il valore di un polinomio di 2° grado nei punti  $-1, +1$  ed il valore della derivata in  $-1$ . Tali valori saranno denotati con  $\{v_{-1}, v_{+1}, d_{-1}\}$ .

La relativa matrice di Haar risulta pari a:

$$\mathbf{H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & x & x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_{-1} \\ F_{+1} \\ M_{-1} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{matrix},$$

*Esempio 1*

che è evidentemente non singolare.

Il problema ammette quindi un'unica soluzione per ogni assegnato valore dei funzionali  $\{F_{-1}, F_{+1}, M_{-1}\}$ .

Considerando nello spazio duale la base  $\{F_{-1}, F_{+1}, \text{MED}\}$  costituita dai funzionali che campionano rispettivamente il valore di un polinomio di 2° grado nei punti  $-1, +1$  ed il valore medio in  $[-1, +1]$ .

La relativa matrice di Haar risulta pari a:

$$\mathbf{H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & x & x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_{-1} \\ F_{+1} \\ \text{MED} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*Esempio 2*

che è evidentemente non singolare.

Il problema ammette quindi un'unica soluzione per ogni assegnato valore dei funzionali  $\{F_{-1}, F_{+1}, \text{MED}\}$ .

Considerando nello spazio duale la base  $\{F_{-1}, F_{+1}, M_0\}$  costituita dai funzionali che campionano rispettivamente il valore di un polinomio di 2° grado nei punti  $-1, +1$  ed il valore della derivata in 0,  $\{v_{-1}, v_{+1}, d_0\}$ .

La relativa matrice di Haar risulta pari a:

$$\mathbf{H} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & x & x^2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} F_{-1} \\ F_{+1} \\ M_0 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*Esempio 3*

che è evidentemente singolare.

Il nucleo di  $\mathbf{H}$  è generato dal vettore  $\{1, 0, -1\}$  ed è quindi costituito dai polinomi proporzionali a  $1 - x^2$ .

Il nucleo di  $\mathbf{H}^t$  è generato dal vettore  $\{1, -1, 2\}$ .

Il problema ammette quindi una retta di soluzioni se e solo se i dati  $\{v_{-1}, v_{+1}, d_0\}$  rispettano la condizione di compatibilità:  $d_0 = (v_{+1} - v_{-1})/2$ .

### 1.8. Polinomi di Hermite

Si consideri l'intervallo reale  $I = [-1, +1]$  e lo spazio di HILBERT  $\mathcal{V} = \mathbf{H}_2(I)$  i cui elementi sono funzioni reali di quadrato integrabile su  $I$  insieme alle loro derivate distribuzionali prime e seconde (vedi Tomo Zero, capitoli VII e VIII).

In virtù del lemma di SOBOLEV le funzioni di  $\mathbf{H}_2(I)$  sono continue in  $I$  con la derivata prima.

Sia inoltre  $\mathcal{F}$  lo spazio duale di  $\mathcal{V}$  e cioè lo spazio delle forme lineari continue su  $\mathbf{H}_2(I)$  e si denotino con

- $\mathcal{V}_h$  il sottospazio lineare di  $\mathcal{V}$  generato dalla base

$$\mathbf{m} = \{1, x, x^2, x^3\},$$

- $\mathcal{F}_h$  il sottospazio lineare di  $\mathcal{F}$  generato dalla base  $\delta$  costituita dalle forme lineari che campionano il valore delle funzioni di  $\mathcal{V}$  e delle loro derivate prime agli estremi dell'intervallo  $I$ .

Sia  $\mathbf{H}$  la corrispondente matrice di HAAR definita da  $\mathbf{H}_{ij} = \langle \delta_i, \mathbf{m}_j \rangle$  che esplicitamente si scrive

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

La base  $\{\mathbf{h}_i\}$  di  $\mathcal{V}_h$ , duale della base  $\{\delta_i\}$  di  $\mathcal{F}_h$ , si cerca ponendo

$$\mathbf{h}_i = \mathbf{C}_{ik} \mathbf{m}_k.$$

La condizione di dualità tra le basi impone che sia  $\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-T}$  e dunque che

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 3/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

La base  $\{\mathbf{h}_i\} \subset \mathcal{V}_h$  fornisce i coefficienti dei polinomi di HERMITE sull'intervallo  $[-1, +1]$ .

Si riportano di seguito le espressioni dei polinomi di HERMITE e delle loro prime tre derivate.

$$(x - 1)^2 (2 + x)/4 \quad 3 (x^2 - 1) / 4 \quad 3x/2 \quad 3/2$$

$$(x - 1)^2 (1 + x)/4 \quad (3x + 1)(x - 1)/4 \quad (-2 + 6x)/4 \quad 3/2$$

$$(x + 1)^2 (2 - x)/4 \quad 3 (1 - x^2) / 4 \quad -3x/2 \quad -3/2$$

$$(x + 1)^2 (x - 1)/4 \quad (3x - 1)(x + 1)/4 \quad (2 + 6x)/4 \quad 3/2$$

La forma caratteristica dei polinomi di Hermite è mostrata in fig. 1.1.

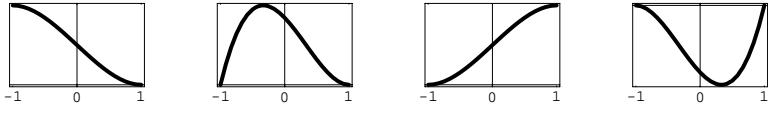


Fig. 1.1 Polinomi di Hermite

La dualità esistente tra le basi  $\{\delta_i\} \in \mathcal{F}_h$  e  $\{\mathbf{h}_i\} \in \mathcal{V}_h$  implica che le componenti di  $\mathbf{f}_h \in \mathcal{F}_h$  e di  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$  coincidano con le proiezioni sulle basi duali:

$$\mathbf{f}_h = \sum_{i=1}^n y_i \delta_i \iff y_i = \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{h}_i \rangle,$$

$$\mathbf{v}_h = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{h}_i \iff x_i = \langle \delta_i, \mathbf{v}_h \rangle.$$

e che il prodotto scalare tra  $\mathbf{f}_h \in \mathcal{F}_h$  e  $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$  sia uguale al prodotto scalare usuale tra i vettori numerici delle rispettive componenti

$$\langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle = \sum_{i,j=1}^n \langle \delta_i, \mathbf{h}_j \rangle x_j y_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

### 1.8.1. Interpretazione meccanica

Il risultato precedente può essere interpretato in chiave meccanica osservando che la base  $\{\mathbf{h}_i\}$  è costituita dalle deformate elastiche di una trave incastrata per effetto di cedimenti e rotazioni unitarie degli estremi e che la base duale  $\{\boldsymbol{\delta}_i\}$  è formata da tagli e coppie flettenti di estremità.

Si può quindi affermare che il lavoro virtuale compiuto da un assegnato sistema di forze  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  per una deformata  $\mathbf{h}_i \in \mathcal{V}_h$  risulta eguale al valore  $\alpha_i$  della componente della interpolante  $\mathbf{Q}\mathbf{f} \in \mathcal{F}_h$  sul corrispondente vettore  $\boldsymbol{\delta}_i \in \mathcal{F}_h$  della base duale.

In formule:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{h}_i \rangle = \langle \mathbf{Q}\mathbf{f}, \mathbf{h}_i \rangle = \alpha_i \quad \text{con} \quad \mathbf{Q}\mathbf{f} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{\delta}_i$$

Si osservi ora che i polinomi di terzo grado sono esattamente le funzioni ortogonali in energia elastica alle deformate da trave incastrata. Infatti, assumendo una rigidezza flessionale unitaria, si ha che:

$$\int_{-1}^{+1} \mathbf{h}'' \mathbf{v}'' dx = \mathbf{h}'' \mathbf{v}' \Big|_{-1}^{+1} - \mathbf{h}''' \mathbf{v} \Big|_{-1}^{+1} + \int_{-1}^{+1} \mathbf{h}''' \mathbf{v} dx = 0,$$

essendo  $\mathbf{h}''' = 0$  e  $\mathbf{v}(-1) = \mathbf{v}(+1) = \mathbf{v}'(-1) = \mathbf{v}'(+1) = 0$ .

D'altronde la formulazione variazionale dell'equilibrio elastico della trave soggetta ad un carico  $\mathbf{f}$  ed a reazioni  $\mathbf{r}_f$  fornisce

$$\int_{-1}^{+1} \mathbf{h}'' \mathbf{v}'' dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{r}_f, \mathbf{h} \rangle = 0.$$

Ne segue che il lavoro virtuale compiuto dal carico, per la generica deformata da trave incastrata con cedimenti unitari agli estremi, risulta eguale al lavoro virtuale della corrispondente reazione sul vincolo.

La dimostrazione di questo risultato può anche essere formalmente conseguita mediante il teorema di BETTI. Si è così giunti al seguente interessante risultato:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{h}_i \rangle = -\langle \mathbf{r}_f, \mathbf{h}_i \rangle,$$

e cioè che le componenti di  $\mathbf{Q}\mathbf{f}$  rispetto alla base  $\{\boldsymbol{\delta}_i\}$  rappresentano le corrispondenti azioni sui nodi di estremità della trave elastica soggetta al carico  $\mathbf{f}$ .

## 2. METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Le *travature piane*, sono strutture composte da travi inflesse a sezione costante i cui assi di simmetria giacciono in un unico piano.

Il calcolo automatico delle *travature piane* è basato sulla formulazione del problema elastostatico in termini di spostamenti.

Nel seguito si espone in dettaglio un algoritmo di calcolo automatico delle *travature piane* come applicazione del *metodo degli spostamenti* discusso nella sezione II.2.8 (p. 66).

In particolare viene discussa la procedura di calcolo dei singoli elementi trave con vincoli di incastro agli estremi e soggetti a carichi trasversali e distorsioni di curvatura impressa mediante un'applicazione del *metodo delle forze* introdotto nella sezione II.3.1.1 (p. 80).

La matrice di rigidezza dell'elemento trave incastrato agli estremi è dedotta mediante integrazione delle curvature associate ai polinomi di HERMITE.

E' quindi analizzata in dettaglio la procedura di assemblaggio della matrice di rigidezza nodale della struttura e del relativo vettore dei carichi nodali equivalenti.

La presenza di vincoli e cedimenti nodali è simulata mediante una rappresentazione parametrica che consente di modellare vincoli di tipo generale.

E' quindi mostrato come una tecnica di condensazione statica consenta di tener conto in ogni elemento trave di vincoli e cedimenti, tra gli estremi della trave ed i nodi di afferenza, e di forze applicate agli estremi della trave.

Nella sezione successiva si considera il caso particolare ma importante delle travature reticolari che sono suscettibili di una analisi più semplice.

### 2.1. Assemblaggio

Si premette una descrizione formale dell'operazione di *assemblaggio* di un modello strutturale composto da *sottostrutture* che fornisce una guida metodologica agli sviluppi successivi.

L'assemblaggio di una struttura composta da sottostrutture dette *elementi* consiste nell'instaurare una relazione univoca tra

- il vettore  $\mathbf{u}$  dei parametri cinematici nodali della struttura e
- i vettori  $\mathbf{u}^e$  dei parametri cinematici delle singole sottostrutture.

Tale relazione è definita elemento per elemento mediante gli *operatori di assemblaggio elementare*  $\mathbf{A}^e$  tali che

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{u}.$$

■ L'*operatore di assemblaggio* è il prodotto

$$\mathbf{A} = \prod \mathbf{A}^e, \quad e = 1, 2, \dots, \text{NUMELEM},$$

degli operatori elementari  $\mathbf{A}^e$ .

Il metodo consiste in definitiva nel costruire l'intera struttura come se si disponesse di una *scatola di montaggio* contenente i diversi *elementi componenti* e le istruzioni relative alla *procedura di montaggio*.

### 2.1.1. Equilibrio elastico della struttura assemblata

Si consideri

- la varietà lineare  $U$  dei parametri cinematici ammissibili per l'intera struttura,
- il corrispondente sottospazio lineare  $V$  delle variazioni.

Sia  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la forma bilineare separante *lavoro virtuale* e si denoti con

- $\mathbf{K}^e$ ,  $e = 1, 2, \dots, \text{NUMLEM}$  la rigidezza elastica degli elementi trave,
- $\mathbf{K}$  la rigidezza elastica dell'intera struttura.

La forma bilineare dell'energia elastica si scrive allora

$$\langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_e \langle \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e, \mathbf{v}^e \rangle = \sum_e \langle \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \mathbf{u}, \mathbf{A}^e \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in U, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Tale formula esprime l'operatore di rigidezza  $\mathbf{K}$  dell'intera struttura a partire dalla conoscenza degli operatori di rigidezza  $\mathbf{K}^e$  relativi ai singoli elementi.

Analogamente se  $\mathbf{f}^e$  sono i sistemi di forze agenti sui singoli elementi (duali dei parametri cinematici  $\mathbf{u}^e$ ), il corrispondente sistema di forze  $\mathbf{f}$ , duale dei parametri cinematici dell'intera struttura, si ottiene valutando il lavoro virtuale:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = \sum_e \langle \mathbf{f}^e, \mathbf{v}^e \rangle = \sum_e \langle \mathbf{f}^e, \mathbf{A}^e \mathbf{v} \rangle.$$

Il problema elastostatico dell'intera struttura si scrive allora in forma variazionale

$$\langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u} \in U, \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

### 2.1.2. Definizione parametrica dei vincoli

Il problema elastostatico enunciato nella forma variazionale precedentemente esposta contiene in modo *implicito* le condizioni di vincolo che sono *nascoste* nella geometria degli insiemi vettoriali  $U$  e  $V$ .

Tale difficoltà si supera fornendo una rappresentazione esplicita di tali insiemi in termini parametrici. Siano infatti:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_o + \sum_j p_j \mathbf{d}_j, \quad \mathbf{v} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i, \quad i, j = 1, 2, \dots, \text{NUMPARAM},$$

rispettivamente le *rappresentazioni parametriche* degli insiemi  $U$  e  $V$ .

Il vettore  $\mathbf{u}_o$  definisce i cedimenti imposti ai vincoli nodali.

La rappresentazione parametrica è formulata quindi in termini dei

- *parametri scalari*  $p_j$  e dei
- *vettori direttori*  $\mathbf{d}_j$ .

La formulazione variazionale del problema elastostatico si può allora riscrivere in termini dei *parametri scalari* come segue:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{K}(\mathbf{u}_o + \sum_j p_j \mathbf{d}_j), \sum_i q_i \mathbf{d}_i \rangle = \\ &= \sum_{ij} \langle \mathbf{K} \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle p_j p_i + \sum_i \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_o, \mathbf{d}_i \rangle q_i = \\ &= \sum_{ij} K_{ij} p_j q_i - \sum_i f_{oi} q_i, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{f}, \sum_i q_i \mathbf{d}_i \rangle = \sum_i \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{d}_i \rangle q_i = \sum_i f_i q_i.\end{aligned}$$

Ne segue la *forma operativa* del problema:

$$\sum_j K_{ij} p_j = f_i + f_{oi} \quad i, j = 1, 2, \dots, \text{NUMPARAM},$$

dove:

$$K_{ij} = \langle \mathbf{K} \mathbf{d}_i, \mathbf{d}_j \rangle,$$

$$f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{d}_i \rangle,$$

$$f_{oi} = -\langle \mathbf{K} \mathbf{u}_o, \mathbf{d}_i \rangle.$$

Le forze fintizie  $\{f_{oi}, i = 1, 2, \dots, \text{NUMPARAM}\}$  sono equivalenti, nella rappresentazione parametrica, ai cedimenti assegnati  $\mathbf{u}_o$ .

## 2.2. Analisi dell'elemento trave

Si assumono come *parametri cinematici nodali* di ciascuna trave il vettore spostamento  $\mathbf{s}$  e la rotazione  $\phi$  delle sezioni terminali.

Ad ogni trave è associato un *riferimento cartesiano locale*; le ascisse sono misurate lungo l'asse della trave orientato dal primo estremo verso il secondo e l'asse delle ordinate è ruotato in verso antiorario, come mostrato in fig. 2.1

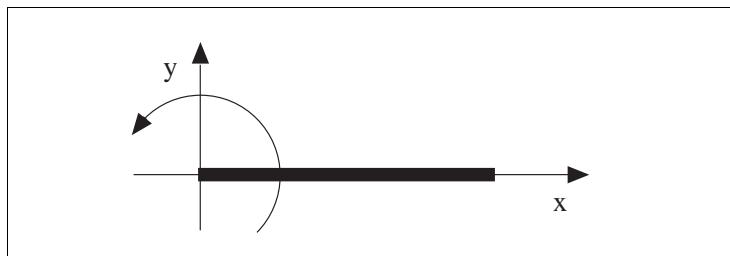


Fig. 2.1

*Riferimento  
locale*

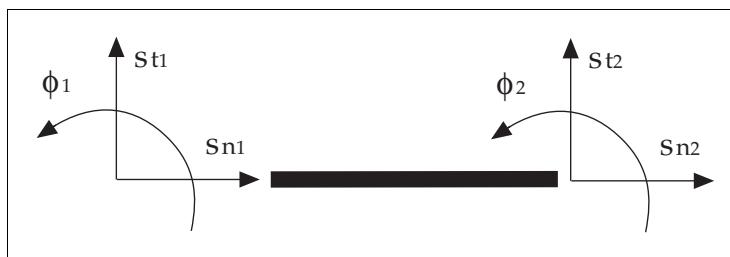


Fig. 2.2

*Parametri  
di estremità*

Gli spostamenti assiali e trasversali sono le componenti del campo vettoriale degli spostamenti secondo il riferimento locale. Le rotazioni sono positive se antiorarie.

La soluzione del problema elastostatico per ciascuna trave viene condotta determinandone la risposta elastica (spostamenti e reazioni) alle azioni assegnate (carico e distorsioni) per valori arbitrari dei parametri cinematici.

Nello spirito del metodo degli spostamenti, la deformata elastica di ogni singola trave viene determinata come somma di quella dovuta ad un arbitrario insieme di parametri cinematici di estremità e di quella dovuta alle azioni assegnate, in corrispondenza di valori nulli dei parametri cinematici di estremità.

La deformata elastica della trave viene quindi determinata sommando i contributi di due schemi:

- uno *schema continuo* costituito dalla trave incastata agli estremi e soggetta alle azioni assegnate,
- uno *schema discreto* costituito dalla trave soggetta solo a spostamenti e rotazioni unitarie impresse agli estremi.

Le deformate relative ai due schemi risultano ortogonali in energia elastica. Ciò risulta immediatamente da una semplice applicazione del teorema di CLAPEYRON (vedi sezione II.2.4 (p. 55))

Si noti esplicitamente che i singoli elementi della struttura sono travi ad asse rettilineo e pertanto la determinazione delle reazioni flessionali e taglienti e degli spostamenti trasversali è disaccoppiata da quella delle reazioni assiali e degli spostamenti assiali.

### 2.3. Lo schema discreto

La soluzione per valori arbitrari dei parametri cinematici di estremità può essere ottenuta, in virtù dell'ipotesi di sezione costante, con la seguente metodologia.

In assenza di carichi agenti lungo la trave la deformata flessionale  $\mathbf{v}$  è costituita da funzioni polinomiali al più di terzo grado.

Infatti l'espressione linearizzata della curvatura flessionale (assunta positiva se dilata le fibre longitudinali dal lato inferiore della trave, cioè quello degli spostamenti trasversali negativi)

$$\chi(x) = v^{\parallel},$$

l'equazione differenziale di equilibrio

$$M^{\parallel}(x) = -p(x),$$

e la relazione elastica

$$M(x) = k_f \chi(x),$$

impongono che deve essere

$$M^{\parallel}(x) = k_f \chi^{\parallel}(x) = k_f v^{\text{IV}} = p(x),$$

Quindi, in assenza di carico trasversale distribuito risulta  $v^{\text{IV}} = 0$ .

Si consideri il sistema di forze  $\{\mathbf{f}_i, i = 1, 2, 3, 4\}$  costituito da forze trasversali e coppie concentrate alle estremità e di valore unitario.

Nello spazio degli spostamenti trasversali la base duale di  $\{\mathbf{f}_i\}$  è costituita dai polinomi di HERMITE  $\{\mathbf{h}_i, i = 1, 2, 3, 4\}$  relativi a ciascuna trave (vedi sezione 1.8 (p. 192)).

I polinomi  $\mathbf{h}_i$  rappresentano le deformate elastiche per valori unitari dei parametri cinematici in assenza di carico e distorsioni lungo la trave.

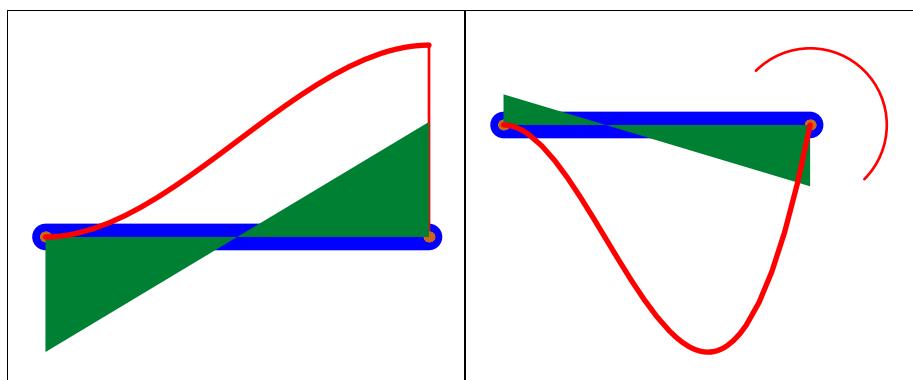
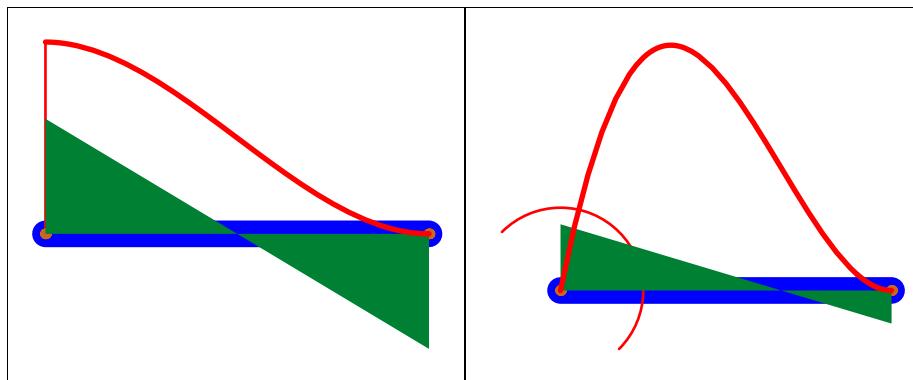
I polinomi di HERMITE sono usualmente definiti su un intervallo di riferimento che, per motivi di simmetria, è scelto essere  $\xi \in [-1, +1]$ .

Per costituire una base duale delle forze trasversali e coppie concentrate alle estremità di una trave di lunghezza generica è necessario effettuare una riscalatura dei polinomi di HERMITE definiti sull'intervallo di riferimento.

Le espressioni dei polinomi di HERMITE e delle loro prime tre derivate sull'intervallo  $\xi \in [-1, +1]$  sono le seguenti:

$\mathbf{h}$	$d\mathbf{h}$	$d^2\mathbf{h}$	$d^3\mathbf{h}$
$(\xi - 1)^2 (2 + \xi)/4$	$3 (\xi^2 - 1)/4$	$3\xi/2$	$3/2$
$(\xi - 1)^2 (1 + \xi)/4$	$(3\xi + 1)(\xi - 1)/4$	$(-2 + 6\xi)/4$	$3/2$
$(\xi + 1)^2 (2 - \xi)/4$	$3 (1 - \xi^2)/4$	$-3\xi/2$	$-3/2$
$(\xi + 1)^2 (\xi - 1)/4$	$(3\xi - 1)(\xi + 1)/4$	$(2 + 6\xi)/4$	$3/2$

La forma caratteristica dei polinomi di HERMITE e dei diagrammi delle curvature è mostrata nelle figure seguenti da leggere da sinistra a destra e dall'alto verso il basso.



Per ricavare le espressioni dei polinomi di HERMITE su un generico intervallo  $x \in [a, b]$  si esprime l'ascissa di riferimento  $\xi \in [-1, +1]$  in termini della nuova ascissa  $x \in [a, b]$ :

$$\xi = \alpha x + \beta,$$

e si noti che la dilatazione dell'ascissa vale

$$dx/d\xi = 1/\alpha = (b - a)/2,$$

e che  $\xi = 1$  corrisponde a  $\xi = \alpha\beta + \beta$  ovvero che

$$\beta = 1 - \alpha\beta = (a + b)/(b - a),$$

per cui

$$\xi = (2x - a - b)/(b - a),$$

che è la sostituzione da effettuare per esprimere i polinomi in termini della nuova ascissa  $x \in [a, b]$ .

Poichè nel passare dall'ascissa  $\xi \in [-1, +1]$  a quella  $x \in [a, b]$  è stata effettuata una dilatazione pari a  $dx/d\xi = 1/\alpha = (b - a)/2$ , le derivate del secondo e del quarto polinomio di HERMITE non avranno più valore unitario agli estremi.

Per ripristinare questa condizione è dunque necessario moltiplicare il secondo ed il quarto polinomio di HERMITE per il fattore  $(b - a)/2$ .

Se la trave ha lunghezza  $L$  e l'origine del riferimento locale coincide con il primo estremo, i polinomi di HERMITE si otterranno con la sostituzione

$$\xi = (2x - L)/L,$$

e moltiplicando il secondo ed il quarto polinomio per  $L/2$ . Nel seguito si farà riferimento a polinomi di HERMITE relativi all'intervallo  $x \in [0, L]$ .

#### 2.4. Lo schema continuo

La deformata elastica da trave incastrata soggetta alle azioni imposte va determinata risolvendo il relativo problema dell'equilibrio elastico.

Per il carico è usualmente sufficiente assumere una legge polinomiale e di norma si considera una legge affine

$$p(x) = p_a(1 - x/L) + p_b(x/L),$$

in cui  $p_a$  e  $p_b$  sono i valori del carico per unità di lunghezza agli estremi della trave.

Le distorsioni di curvatura impresse sulla trave si assumono costanti lungo l'asse.

In tal caso la deformata elastica e le reazioni vincolari possono determinarsi col seguente procedimento.

### 2.4.1. Carico affine

#### ■ Deformata elastica

Valendo la relazione

$$p(x) = M^{\parallel}(x),$$

il momento flettente  $M$  varia con legge cubica

$$M(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3,$$

per cui si ha che

$$p(x) = 2c_2 + 6c_3 x.$$

Imponendo che  $p(0) = p_a$  e  $p(L) = p_b$  si ottiene

$$c_2 = \frac{p_a}{2}, \quad c_3 = \frac{p_b - p_a}{12L},$$

e sostituendo nell'espressione del momento flettente:

$$M(x) = c_0 + c_1 x \frac{p_a}{2} x^2 + \frac{p_b - p_a}{12L} x^3.$$

Le condizioni di congruenza sono imposte mediante l'ortogonalità del diagramma di curvatura elastica alle autotensioni costanti e lineari:

$$\int_0^L \frac{M(x)}{k_f} dx = c_0 L + c_1 \frac{L^2}{2} + p_a \frac{L^3}{6} + (p_b - p_a) \frac{L^3}{24} = 0,$$

$$\int_0^L \frac{M(x)}{k_f} x dx = c_0 \frac{L^2}{2} + c_1 \frac{L^3}{3} + p_a \frac{L^4}{8} + (p_b - p_a) \frac{L^4}{30} = 0.$$

Risolvendo rispetto a  $c_0$  e  $c_1$  e sostituendo nell'espressione di  $M$  si ottiene

$$M(x) = (3p_a + 2p_b) \frac{L^2}{60} - (7p_a + 3p_b) \frac{Lx}{20} + p_a \frac{x^2}{2} + (p_b - p_a) \frac{x^3}{6L},$$

che è la soluzione in termini di momento flettente.

La deformata si ottiene quindi integrando due volte rispetto ad  $x$ :

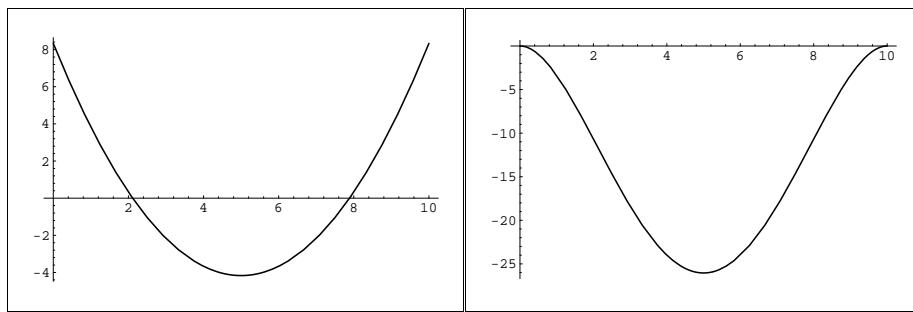
$$\boxed{\mathbf{v}(x) = k_f^{-1} \frac{x^2(x-L)^2 [(3p_a + 2p_b)L + (p_b - p_a)x]}{120L},}$$

dove  $k_f$  è la rigidezza flessionale della trave, e cioè il rapporto tra il valore del momento flettente e la curvatura flessionale.

I grafici del momento flettente e della deformata sono riportati, con riferimento al caso

$$p_a = p_b = -1, \quad L = 10,$$

nelle figure seguenti.



### ■ Reazioni vincolari

La determinazione delle reazioni vincolari si persegue per semplice integrazione in virtù del teorema di BETTI.

Se infatti  $\mathbf{v}(x)$  è la deformata elastica dello schema di trave incastrata,  $\mathbf{r}$  è il relativo sistema di reazioni vincolari ed  $\mathbf{h}_i$  è il generico polinomio di HERMITE, si ha

$$\int_0^L k_f d^2\mathbf{v}(x) d^2\mathbf{h}_i(x) dx = \int_0^L \mathbf{p}(x) \mathbf{h}_i(x) dx + \langle \mathbf{r}, \mathbf{h}_i \rangle = \langle \mathbf{r}_{\mathbf{h}_i}, \mathbf{v} \rangle = 0,$$

dove

- $\mathbf{r}_{\mathbf{h}_i}$  sono le forze di estremità associate alla deformata  $\mathbf{h}_i$ ,
- $\langle \mathbf{r}, \mathbf{h}_i \rangle$  è uguale al parametro reattivo di estremità, duale del parametro cinematico di estremità non nullo in corrispondenza di  $\mathbf{h}_i$ .

Dunque

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{h}_i \rangle = - \int_0^L \mathbf{p}(x) \mathbf{h}_i(x) dx.$$

Nel caso in esame risulta quindi

$$\int_0^L \mathbf{p}(x) \mathbf{h}_i(x) dx = \int_0^L [p_a(1 - x/L) + p_b(x/L)] \mathbf{h}_i(x) dx,$$

ed effettuando le integrazioni si ottengono le seguenti espressioni delle forze e delle coppie di estremità equivalenti al carico

$$F(0) = -r_1 = (7p_a + 3p_b) \frac{L}{20},$$

$$\mathcal{M}(0) = -r_2 = (3p_a + 2p_b) \frac{L^2}{60},$$

$$F(L) = -r_3 = (3p_a + 7p_b) \frac{L}{20},$$

$$\mathcal{M}(L) = -r_4 = -(2p_a + 3p_b) \frac{L^2}{60}.$$

Si ricordi che il carico è positivo se concorde all'asse delle ordinate.

**Osservazione 2.1.** Le espressioni delle azioni di estremità equivalenti al carico possono essere dedotte anche in base a considerazioni geometriche.

I polinomi di HERMITE costituiscono infatti una base per il sottospazio delle variazioni delle deformate elastiche della trave ed i relativi parametri sono gli spostamenti trasversali e le rotazioni degli estremi:

$$v = \sum_i v_i \mathbf{h}_i.$$

Per la dualità esistente tra le basi  $\{\mathbf{f}_i\}$  ed  $\{\mathbf{h}_i\}$ , la relativa matrice di HAAR risulta pari all'identità e si ha quindi:

$$\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{h}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Pertanto il lavoro virtuale che un assegnato carico  $\mathbf{l}$  compie per una variazione  $\mathbf{v} \in V$  sarà uguale al prodotto interno usuale tra i vettori numerici delle rispettive componenti:

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \langle \sum_i l_i \mathbf{f}_i, \sum_j v_j \mathbf{h}_j \rangle = \sum_{ij} \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{h}_j \rangle l_i v_j = \sum_i l_i v_i,$$

con

$$l_i = \langle \mathbf{l}, \mathbf{f}_i \rangle, \quad v_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{h}_i \rangle,$$

e

$$\langle \mathbf{l}, \mathbf{v} \rangle = \int_a^b \mathbf{l}(x) \mathbf{v}(x) dx.$$

Siccome è

$$\mathbf{l} = \sum_i l_i \mathbf{f}_i$$

risulta che le componenti  $l_i$  di  $\mathbf{l}$  sulla base  $\{\mathbf{f}_i\}$  sono esattamente le forze nodali equivalenti al carico in quanto esse compiono per i parametri cinematici  $v_i$  lo stesso lavoro virtuale che il carico compie per le corrispondenti deformate elastiche. ■

### 2.4.2. Distorsione di curvatura costante

#### ■ Deformata elastica

La deformata elastica dovuta ad una distorsione di curvatura  $\Delta$ , uniformemente distribuita sulla trave incastrata agli estremi, è identicamente nulla in quanto anche la curvatura elastica è costante e la loro somma deve essere nulla per dar luogo a rotazioni nulle agli estremi.

#### ■ Reazioni vincolari

Le reazioni vincolari sono costituite da due coppie di estremità di segno opposto.

Le forze e le coppie di estremità equivalenti alla distorsione impressa valgono quindi

$$F(0) = -r_1 = 0,$$

$$\mathcal{M}(0) = -r_2 = -k_f \Delta,$$

$$F(L) = -r_3 = 0,$$

$$\mathcal{M}(L) = -r_4 = k_f \Delta.$$

Esse possono anche essere calcolate in base al teorema di BETTI:

$$\langle \mathbf{r}, \mathbf{h}_i \rangle = - \int_0^L d^2 \Delta \mathbf{h}_i \, dx = -\Delta \int_0^L d^2 \mathbf{h}_i \, dx.$$

Il risultato segue dall'essere

$$\int_0^L d^2 \mathbf{h}_i \, dx = 0 \quad \text{per } i = 1, 3,$$

$$\int_0^L d^2 \mathbf{h}_i \, dx = -1, 1 \quad \text{per } i = 2, 4.$$

### 2.5. Matrice di rigidezza

L'espressione della matrice di rigidezza in funzione dei parametri cinematici di estremità si ottiene per integrazione dall'espressione:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_0^L k_f \, d^2 \mathbf{h}_i(x) \, d^2 \mathbf{h}_j(x) \, dx.$$

A meno del fattore  $k_f/L^3$  si ottiene

$$\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

L'espressione completa della matrice di rigidezza della trave in funzione di tutti i parametri cinematici, sia assiali che flessionali, si scrive quindi

$$\begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 & -K_n & 0 & 0 \\ 0 & 12K_f & 6LK_f & 0 & -12K_f & 6LK_f \\ 0 & 6LK_f & 4L^2K_f & 0 & -6LK_f & 2L^2K_f \\ -K_n & 0 & 0 & K_n & 0 & 0 \\ 0 & -12K_f & -6LK_f & 0 & 12K_f & -6LK_f \\ 0 & 6LK_f & 2L^2K_f & 0 & -6LK_f & 4L^2K_f \end{bmatrix}$$

dove

$$K_f = k_f/L^3,$$

$$K_n = k_n/L.$$

essendo  $k_n$  la rigidezza assiale della trave.

## 2.6. Assemblaggio della travatura

La soluzione del problema elastostatico per l'intera travatura comporta l'*assemblaggio* della struttura considerando che i parametri vettoriali cinematici di estremità delle singole travi non sono indipendenti.

Si consideri dapprima il caso più semplice in cui tutti gli estremi delle travi sono collegati a *nodi incastro*.

I parametri vettoriali cinematici relativi all'*estremità* di una trave concorrente in un *nodo* devono allora essere uguali ai corrispondenti parametri vettoriali cinematici del nodo.

Da un punto di vista operativo è conveniente fissare due riferimenti (vedi fig. 2.3):

- un *riferimento globale* ortonormale e levogiro, i cui assi si denotano con  $\{x, y\}$ , rispetto al quale si valutano le coordinate dei nodi e le componenti dei parametri vettoriali cinematici dei nodi,
- un *riferimento locale* per ogni trave, i cui assi si denotano con  $\{n, t\}$ , rispetto al quale valutare le componenti dei parametri vettoriali cinematici di estremità, anch'esso assunto ortonormale e levogiro, con il primo asse coincidente con l'asse della trave.

Nel seguito dunque le grandezze vettoriali si intenderanno sempre espresse in termini di componenti rispetto a tali riferimenti.

Si denotino con:

- $\mathbf{u}_i = \{s_{ix}, s_{iy}, \phi_i\}$  il vettore dei parametri cinematici del singolo nodo,
- $\mathbf{u}^e = \{\mathbf{u}_1^e, \mathbf{u}_2^e\}$  il vettore dei parametri cinematici di estremità della  $e$ -esima trave  
con  $\mathbf{u}_a^e = \{s_{na}^e, s_{ta}^e, \phi_a^e\}$  ( $a = 1, 2$ ).

I pedici  $n, t$  indicano ripetutivamente la direzione assiale e quella trasversale.

Sia inoltre  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots, \text{NUMNODI}\}$  il vettore numerico dei parametri cinematici dell'intera struttura.

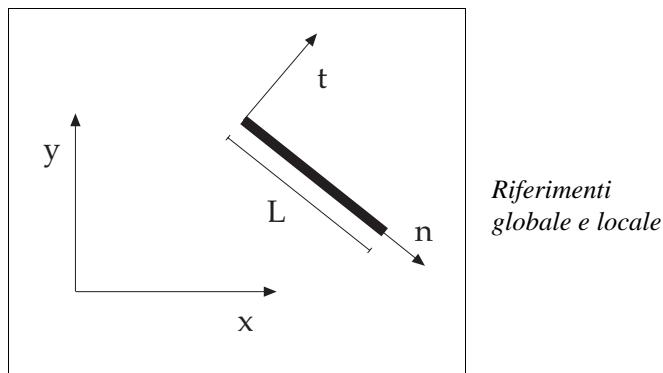


Fig. 2.3

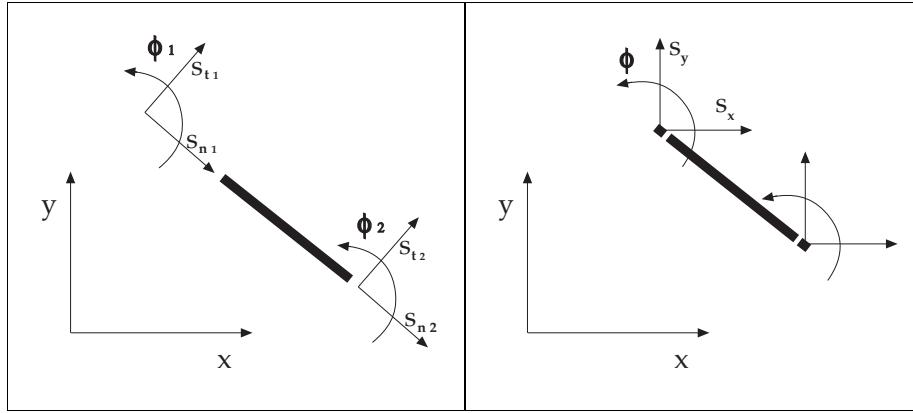


Fig. 2.4 Parametri della trave

Fig. 2.5 Parametri dei nodi

La matrice di assemblaggio della generica trave è definita da:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{u}.$$

Se con  $\mathbf{K}^e$  si indica la matrice di rigidezza di un elemento, la forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura si scrive

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_e \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{v}^e = \sum_e \mathbf{A}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \in U, \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

dove il simbolo  $\cdot$  denota il prodotto interno usuale tra vettori numerici. Dunque

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{A}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{A}^e.$$

In effetti conviene operare in modo diverso per costruire la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  dell'intera struttura.

Innanzitutto la matrice  $\mathbf{K}^e$  viene partizionata nei suoi blocchi corrispondenti ai parametri cinematici delle due estremità:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix}.$$

La forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura si può quindi riscrivere come

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_e \sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b^e \cdot \mathbf{v}_a^e, \quad a, b = 1, 2, \dots, \text{NUMELEM}$$

La matrice di assemblaggio elementare  $\mathbf{A}$  è decomponibile in due blocchi:

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^e \mathbf{E}_1^e \\ \mathbf{R}^e \mathbf{E}_2^e \end{bmatrix},$$

dove  $\mathbf{R}^e$  è la *matrice di rotazione* che trasforma le componenti nel riferimento globale nelle componenti nel riferimento locale:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} d_x & d_y & 0 \\ -d_y & d_x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

essendo  $\{d_x, d_y\}$  i coseni direttori dell'asse della trave nel riferimento globale.

La *matrice di estrazione*  $\mathbf{E}_a^e$  estraе da  $\mathbf{u} \in U$  il vettore  $\mathbf{u}_{i(e,a)}$ , relativo al nodo cui afferisce l'estremità  $a$  della trave  $e$ .

Si ha dunque che

$$\mathbf{A}^e \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^e \mathbf{E}_1^e \\ \mathbf{R}^e \mathbf{E}_2^e \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^e \mathbf{E}_1^e \mathbf{u} \\ \mathbf{R}^e \mathbf{E}_2^e \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^e \mathbf{u}_{i(e,1)} \\ \mathbf{R}^e \mathbf{u}_{i(e,2)} \end{bmatrix},$$

per cui risulta

$$\mathbf{u}_b^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}_{j(e,b)} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_a^e = \mathbf{R}^e \mathbf{v}_{i(e,a)}.$$

- L'operazione di assemblaggio si effettua in modo più conveniente mediante gli *operatori di connessione* che forniscono per ogni trave la coppia di nodi cui afferiscono le estremità:

$$\mathbf{C}^e = \{i(e,1), j(e,2)\}, \quad e = 1, 2, \dots, \text{NUMELEM}.$$

Sostituendo ai vettori dei parametri di estremità  $\mathbf{u}_b^e$  e  $\mathbf{v}_a^e$  le loro espressioni in funzione dei vettori dei parametri nodali  $\mathbf{u}_{j(e,b)}$  e  $\mathbf{v}_{i(e,a)}$ , la forma bilineare dell'energia diventa:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_e \sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{R}^e \mathbf{u}_{j(e,b)} \cdot \mathbf{R}^e \mathbf{v}_{i(e,a)} = \\ &= \sum_e \sum_{ab} \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{R}^e \mathbf{u}_{j(e,b)} \cdot \mathbf{v}_{i(e,a)} \end{aligned}$$

La matrice di rigidezza nodale della struttura viene quindi calcolata con la formula:

$$\boxed{\mathbf{K}_{ij} = \sum_e \sum_{ab} \mathbf{K}_{i(e,a)j(e,b)},}$$

dove

$$\mathbf{K}_{i(e,a)j(e,b)} = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{R}^e.$$

Per quanto riguarda i carichi sulle travi e le distorsioni impresse, ad essi vengono sostituite le forze di estremità equivalenti

$$\mathbf{f}_a^e = \{N_a^e, T_a^e, M_a^e\}, \quad a = 1, 2.$$

L'espressione del lavoro virtuale fornisce quindi

$$\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_e \sum_a \mathbf{f}_a^e \cdot \mathbf{v}_a^e = \sum_e \sum_a \mathbf{f}_a^e \cdot \mathbf{R}^e \mathbf{v}_{i(e,a)} = \sum_e \sum_a \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}_a^e \cdot \mathbf{v}_{i(e,a)}.$$

Le forze nodali equivalenti vengono quindi calcolate con la formula

$$\mathbf{f}_i = \sum_e \sum_a \mathbf{f}_{i(e,a)},$$

dove

$$\mathbf{f}_{i(e,a)} = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}_a^e.$$

E' opportuno sottolineare il fatto che della matrice di rigidezza nodale della struttura e delle forze nodali equivalenti è necessario calcolare solo gli elementi corrispondenti a nodi connessi da travi.

## 2.7. Vincoli e cedimenti

Dopo la valutazione della matrice di rigidezza e del vettore delle forze nodali della struttura, è necessario tener conto di eventuali vincoli e cedimenti presenti nella struttura.

Nella prossima sezione si considera il caso di vincoli e cedimenti imposti sui nodi della struttura.

Si prende poi in esame la procedura che consente di imporre vincoli e cedimenti assegnati tra le estremità di ciascuna trave ed i nodi cui esse afferiscono.

Si descrive infine la simulazione di vincoli e cedimenti relativi tra i nodi.

### 2.7.1. Vincoli e cedimenti nodali

In generale i parametri nodali

$$\mathbf{u}_i = \{s_{ix}, s_{iy}, \phi_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, \text{NUMNODI},$$

non sono indipendenti e l'insieme di ammissibilità costituisce una varietà lineare definita da condizioni di vincolo tra i parametri e da valori assegnati ad alcuni di essi.

E' necessario fornire una *rappresentazione esplicita* della varietà lineare di ammissibilità in termini di parametri scalari e dei relativi direttori.

L'analisi sarà limitata al caso più usuale in cui i vincoli ed i cedimenti sono assegnati *separatamente per ciascun nodo*.

Si dice in tal caso che si tratta di *vincoli e cedimenti nodali*.

Si possono allora esprimere i parametri dei singoli nodi come combinazione affine di vettori *direttori*; i relativi coefficienti sono i *parametri scalari* che costituiscono le incognite in termini delle quali va in definitiva risolto il problema lineare.

Si assume dunque per i parametri vettoriali nodali l'espressione

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{oj} + \sum_{\beta(j)} p_{\beta(j)} \mathbf{d}_{\beta(j)},$$

e per le loro variazioni

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)},$$

dove

- gli indici  $i$  e  $j$  denotano i nodi della travatura cui afferisce almeno un parametro o un cedimento,
- gli indici  $\alpha(i)$  e  $\beta(j)$  variano negli insiemi dei parametri afferenti ai nodi  $i$  e  $j$  rispettivamente,
- i *direttori*  $\mathbf{d}_{\beta(j)}$  sono tra loro indipendenti.

## ■ Matrice di rigidezza

Sostituendo l'espressione dei parametri nodali nella forma bilineare dell'energia elastica della struttura si ottiene l'espressione della *matrice di rigidezza parametrica* e dei *parametri di forza* equivalenti ai cedimenti impressi:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \left[ \mathbf{u}_{oj} + \sum_{\beta(j)} p_{\beta(j)} \mathbf{d}_{\beta(j)} \right] \cdot \left[ \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right] = \\ &= \sum_{ij} \sum_{\alpha(i)\beta(j)} (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{d}_{\beta(j)} \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)}) p_{\beta(j)} q_{\alpha(i)} + \\ &\quad + \sum_{ij} \sum_{\alpha(i)} (\mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_{oj} \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)}) q_{\alpha(i)}. \end{aligned}$$

Nel primo addendo:

- gli indici  $i$  e  $j$  variano tra quelli tali che ai nodi corrispondenti afferisce almeno un parametro,
- gli indici  $\alpha(i)$  e  $\beta(j)$  variano nell'insieme degli indici dei parametri afferenti ai nodi  $i$  e  $j$  rispettivamente.

Nel secondo addendo:

- l'indice  $i$  varia tra quelli tali che al nodo corrispondente afferisce almeno un parametro,
- $\alpha(i)$  varia nell'insieme degli indici dei parametri afferenti al nodo  $i$ ,
- l'indice  $j$  varia tra quelli tali che al nodo corrispondente è associato un cedimento.

### ■ Forze duali dei parametri

Sostituendo l'espressione dei parametri nodali nel lavoro virtuale delle forze nodali  $f_i$  equivalenti alle azioni sulle travi e delle forze  $f_{ni}$  direttamente applicate sui nodi si ottiene l'espressione dei *parametri di forza* ad esse equivalenti:

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \left[ \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right] = \sum_i \left[ \sum_{\alpha(i)} \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right] q_{\alpha(i)}, \\ \sum_i \mathbf{f}_{ni} \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_i \mathbf{f}_{ni} \cdot \left[ \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right] = \sum_i \left[ \sum_{\alpha(i)} \mathbf{f}_{ni} \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right] q_{\alpha(i)}.\end{aligned}$$

### ■ Algoritmo di gestione

E' però più conveniente adottare la seguente procedura:

- ordinare i parametri in una unica lista in cui far variare gli indici  $\alpha$  e  $\beta$ ,
- scegliere tra gli indici  $i$  e  $j$  dei nodi quelli  $i(\alpha)$  e  $j(\beta)$  cui afferiscono tali parametri,
- variare l'indice  $k$  tra quelli dei nodi cui afferisce un cedimento.

L'espressione precedente si riscrive quindi

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\beta} [\mathbf{K}_{i(\alpha)j(\beta)} \mathbf{d}_\beta \cdot \mathbf{d}_\alpha] p_\beta q_\alpha + \sum_\alpha \left[ \sum_k \mathbf{K}_{i(\alpha)k} \mathbf{u}_{ok} \cdot \mathbf{d}_\alpha \right] q_\alpha &= \\ = \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} p_\beta q_\alpha - \sum_\alpha f_{o\alpha} q_\alpha.\end{aligned}$$

La matrice di rigidezza della struttura in termini di parametri scalari assume la forma

$$K_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{i(\alpha)j(\beta)} \mathbf{d}_\beta \cdot \mathbf{d}_\alpha, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, \text{NUMPARAM}.$$

I parametri forza equivalenti ai cedimenti nodali sono date da

$$f_{o\alpha} = - \sum_k \mathbf{K}_{i(\alpha)k} \mathbf{u}_{ok} \cdot \mathbf{d}_\alpha.$$

In definitiva la forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura diventa

$$\sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} p_\beta q_\alpha.$$

Lasciando libero di variare l'indice  $\alpha$  e scegliendo tra gli indici  $i$  quelli  $i(\alpha)$  tali che ai nodi corrispondenti afferisca il parametro  $\alpha$ , si ottiene:

$$\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_\alpha (\mathbf{f}_{i(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha) q_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha q_\alpha,$$

$$\sum_i \mathbf{f}_{ni} \cdot \mathbf{v}_i = \sum_\alpha (\mathbf{f}_{ni(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha) q_\alpha = \sum_\alpha f_{n\alpha} q_\alpha,$$

in cui

$$f_\alpha = \mathbf{f}_{i(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha, \quad f_{n\alpha} = \mathbf{f}_{ni(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha,$$

e dunque

$$\sum_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{ni}) \cdot \mathbf{v}_i = \sum_\alpha (f_\alpha + f_{n\alpha}) q_\alpha.$$

In definitiva il problema elastostatico

$$\sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i (\mathbf{f}_i + \mathbf{f}_{ni}) \cdot \mathbf{v}_i, \quad \forall \mathbf{v}_i,$$

si scriverà in termini variazionali:

$$\sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta} p_\beta q_\alpha = \sum_\alpha (f_\alpha + f_{n\alpha} + f_{o\alpha}) q_\alpha, \quad \forall q_\alpha,$$

ovvero in *forma operativa*:

**FORMULAZIONE PARAMETRICA**

$$\sum_\beta K_{\alpha\beta} p_\beta = f_\alpha + f_{n\alpha} + f_{o\alpha},$$

dove:

$$K_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{i(\alpha)j(\beta)} \mathbf{d}_\beta \cdot \mathbf{d}_\alpha,$$

$$f_\alpha = \mathbf{f}_{i(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha,$$

$$f_{n\alpha} = \mathbf{f}_{ni(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha,$$

$$f_{o\alpha} = - \sum_k \mathbf{K}_{i(\alpha)k} \mathbf{u}_{ok} \cdot \mathbf{d}_\alpha.$$

$K_{\alpha\beta}$  è la matrice di rigidezza relativa ai parametri scalari

$f_\alpha$  sono le forze parametriche equivalenti alle azioni sulle travi

$f_{n\alpha}$  sono le forze parametriche equivalenti alle azioni sui nodi

$f_{o\alpha}$  sono le forze parametriche equivalenti ai cedimenti dei nodi

$\mathbf{d}_\alpha$  sono i direttori dei parametri scalari

$\mathbf{u}_{ok}$  sono i cedimenti impressi ai nodi

Nella tabella che segue si riportano le definizioni dei vincoli assoluti che usualmente vengono imposti in corrispondenza dei nodi delle travature piane, indicando le espressioni dei relativi direttori.

<b>■ incastro :</b>	condizioni vincolari $\mathbf{s} = \mathbf{0}$	vettori direttori $\phi = 0$
<b>■ carrello :</b>	condizioni vincolari $\mathbf{s} \cdot \mathbf{d}^\perp = 0$	vettori direttori $\begin{vmatrix} d_x \\ d_y \\ 1 \end{vmatrix}$
<b>■ cerniera :</b>	condizioni vincolari $s_x = 0 \quad s_y = 0$	vettori direttori $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$
<b>■ pattino :</b>	condizioni vincolari $\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \phi = 0$	vettori direttori $\begin{vmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{vmatrix}$
<b>■ tecnigrafo :</b>	condizioni vincolari $\phi = 0$	vettori direttori $\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$
<b>■ cremagliera :</b>	condizioni vincolari $\mathbf{s} = k\phi\mathbf{d}$	vettori direttori $\begin{vmatrix} kd_x \\ kd_y \\ 1 \end{vmatrix}$

## 2.8. Vincoli e cedimenti alle estremità delle travi

Si affronta ora il calcolo automatico di un più generale modello di travatura in cui sono presenti travi con arbitrari vincoli e cedimenti impressi agli estremi.

La metodologia seguita fa ricorso ad una rappresentazione parametrica delle condizioni vincolari di estremità adoperando una tecnica di condensazione che consente di non aumentare la dimensione del sistema lineare da risolvere per la soluzione del problema strutturale.

Lo scopo è quello di ottenere la matrice di rigidezza e le forze nodali equivalenti relative ad una trave arbitrariamente vincolata agli estremi, partendo dalla conoscenza di tali dati nel solo caso di trave incastrata agli estremi.

L'idea fondamentale è quella di considerare ciascuna estremità della trave come se fosse composta da due sezioni collegate dal vincolo di estremità.

La cinematica della sezione più esterna, che costituisce l'*interfaccia col nodo adiacente*, è descritta da direttori coincidenti con i versori del riferimento locale; i relativi parametri sono detti *parametri di interfaccia*.

La sezione più interna è *solidale alla trave* ed i suoi direttori sono anch'essi coincidenti con i versori del riferimento locale; i relativi parametri, che governano la cinematica della trave incastrata, verranno detti *parametri standard*.

Le due coppie di parametri risultano ovviamente coincidenti nel caso di trave incastrata agli estremi; nel caso più generale esisterà tra di esse un collegamento parziale che viene descritto ponendole in relazione esplicita con un altro insieme completo di parametri detti *parametri vincolari*.

L'introduzione dei parametri vincolari è effettuata mediante una appropriata definizione dei relativi direttori che consente di esprimere le condizioni vincolari in forma canonica; ciò rende possibile separare i parametri vincolari in due classi disgiunte: quella dei *parametri vincolari liberi* e quella dei *parametri vincolari schiavi*. Questi ultimi sono funzione dei parametri di interfaccia.

Il procedimento consiste nei seguenti passi.

- i) In funzione dei vincoli assegnati si determinano, nel *riferimento locale*, i direttori  $\mathbf{d}_\alpha$  dei *parametri vincolari*  $p_\alpha$  di ciascuna delle estremità della trave.
  - La logica è quella di costruire una *base ortonormale* in cui le condizioni vincolari vengano espresse in forma canonica.

I vettori dei *parametri standard* si esprimono quindi come combinazione lineare dei direttori  $\mathbf{d}_\alpha$  mediante i relativi *parametri vincolari*:

$$\mathbf{u}_a^e = \sum_{\alpha(a)} p_{\alpha(a)} \mathbf{d}_{\alpha(a)}, \quad a = 1, 2,$$

dove  $\alpha(a)$  sono gli indici dei parametri vincolari afferenti all'estremità  $a$ .

La forma variazionale dell'equilibrio elastico della trave  $e$ -esima in termini dei *parametri standard* si scrive:

$$\sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b^e \cdot \mathbf{v}_a^e = \sum_a \mathbf{f}_a^e \cdot \mathbf{v}_a^e, \quad a, b = 1, 2.$$

Sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned}\sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b^e \cdot \mathbf{v}_a^e &= \sum_{ab} \sum_{\alpha(a)\beta(b)} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{d}_{\beta(b)} \cdot \mathbf{d}_{\alpha(a)} p_{\beta(b)} q_{\alpha(a)} = \\ &= \sum_{\alpha\beta} \mathbf{K}_{a(\alpha)b(\beta)}^e \mathbf{d}_{\beta} \cdot \mathbf{d}_{\alpha} p_{\beta} q_{\alpha} = \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^e p_{\beta} q_{\alpha},\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\sum_a \mathbf{f}_a^e \cdot \mathbf{v}_a^e = \sum_a \sum_{\alpha(a)} \mathbf{f}_a^e \cdot \mathbf{d}_{\alpha(a)} q_{\alpha(a)} = \sum_{\alpha} \mathbf{f}_{a(\alpha)}^e \cdot \mathbf{d}_{\alpha} q_{\alpha} = \sum_{\alpha} f_{\alpha}^e q_{\alpha},$$

in cui  $a(\alpha)$  e  $b(\beta)$  indicano le estremità della trave cui afferiscono i parametri vincolari  $a$  e  $b$  e si è posto

$$\boxed{\begin{aligned}K_{\alpha\beta}^e &= \mathbf{K}_{a(\alpha)b(\beta)}^e \mathbf{d}_{\beta} \cdot \mathbf{d}_{\alpha}, \\ f_{\alpha}^e &= \mathbf{f}_{a(\alpha)}^e \cdot \mathbf{d}_{\alpha}.\end{aligned}}$$

■ ii) Si procede quindi alla *condensazione* dei parametri liberi rispetto a quelli schiavi partizionando la matrice  $K_{\alpha\beta}^e$  ed il vettore  $f_{\alpha}^e$ :

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^e \\ \mathbf{f}_2^e \end{bmatrix},$$

dove gli indici 1 e 2 denotano rispettivamente i parametri schiavi e quelli liberi.

Considerando le analoghe partizioni dei parametri e delle forze duali si ha

$$\begin{aligned}(\mathbf{K}_{11}^e - \mathbf{K}_{12}^e \mathbf{K}_{22}^{e^{-1}} \mathbf{K}_{21}^e) \mathbf{p}_1 &= \mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12}^e \mathbf{K}_{22}^{e^{-1}} \mathbf{f}_2, \\ \mathbf{K}_{22}^e \mathbf{p}_2 &= \mathbf{f}_2 - \mathbf{K}_{21}^e \mathbf{p}_1.\end{aligned}$$

L'ultima formula consente di calcolare i parametri liberi una volta determinati quelli schiavi.

■ iii) I parametri schiavi sono a loro volta espressi in funzione dei parametri vettoriali di interfaccia per consentire di effettuare la successiva operazione di assemblaggio secondo modalità perfettamente analoghe a quelle che si seguono nel caso di travi incastrate agli estremi.

A tal fine si definiscono la matrice di rigidezza e le forze condensate rispetto ai parametri schiavi:

$$K_{\alpha\beta}^{ec} = [\mathbf{K}_{11}^e - \mathbf{K}_{12}^e \mathbf{K}_{22}^{e^{-1}} \mathbf{K}_{21}^e]_{\alpha\beta},$$

$$f_{\alpha}^{ec} = [\mathbf{f}_1 - \mathbf{K}_{12}^e \mathbf{K}_{22}^{e^{-1}} \mathbf{f}_2]_{\alpha},$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  variano tra gli indici dei parametri schiavi.

In virtù del fatto che i direttori  $\mathbf{d}_\alpha$  dei parametri vincolari  $p_\alpha$  di ciascuna delle estremità delle travi costituiscono una *base ortonormale*, è possibile esprimere i parametri schiavi in funzione di quelli vettoriali di interfaccia mediante una semplice proiezione:

$$p_{1\alpha} = (\mathbf{u}_{a(\alpha)} + \mathbf{u}_{ob(\alpha)}) \cdot \mathbf{d}_\alpha,$$

in cui  $\mathbf{u}_{a(\alpha)}$  è il vettore dei parametri di interfaccia all'estremità  $a(\alpha)$  della trave cui afferisce il parametro schiavo  $p_{1\alpha}$ .

- Il vettore  $\mathbf{u}_{ob(\alpha)}$  denota il cedimento ivi imposto che consiste in uno spostamento della sezione di estremità della trave rispetto a quella di interfaccia.

Si ottiene in definitiva

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{ec} p_{1\beta} q_{1\alpha} &= \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{ec} [(\mathbf{u}_{b(\beta)} + \mathbf{u}_{ob(\beta)}) \cdot \mathbf{d}_\beta] [\mathbf{v}_{a(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha] = \\ &= \sum_{\alpha\beta} K_{\alpha\beta}^{ec} (\mathbf{d}_\alpha \otimes \mathbf{d}_\beta) (\mathbf{u}_{b(\beta)} + \mathbf{u}_{ob(\beta)}) \cdot \mathbf{v}_{a(\alpha)} = \\ &= \sum_{ab} \sum_{\alpha(a)\beta(b)} K_{\alpha(a)\beta(b)}^{ec} (\mathbf{d}_{\alpha(a)} \otimes \mathbf{d}_{\beta(b)}) (\mathbf{u}_b + \mathbf{u}_{ob}) \cdot \mathbf{v}_a = \\ &= \sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^{ec} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{v}_a + \sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^{ec} \mathbf{u}_{ob} \cdot \mathbf{v}_a, \end{aligned}$$

ed analogamente per le forze

$$\sum_\alpha f_\alpha^{ec} q_{1\alpha} = \sum_\alpha f_\alpha^{ec} [\mathbf{v}_{a(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha] = \sum_a \sum_{\alpha(a)} f_{\alpha(a)}^{ec} [\mathbf{d}_{\alpha(a)} \cdot \mathbf{v}_a] = \sum_a \mathbf{f}_a^{ec} \cdot \mathbf{v}_a,$$

avendo posto

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ab}^{ec} &= \sum_{\alpha(a)\beta(b)} K_{\alpha(a)\beta(b)}^{ec} (\mathbf{d}_{\alpha(a)} \otimes \mathbf{d}_{\beta(b)}), \\ \mathbf{f}_a^{ec} &= \sum_{\alpha(a)} f_{\alpha(a)}^{ec} \mathbf{d}_{\alpha(a)}, \end{aligned}$$

dove  $\alpha(a)$  e  $\beta(b)$  sono gli indici dei parametri schiavi afferenti alle estremità ed il simbolo  $\otimes$  denota il prodotto tensoriale.

Definendo inoltre il vettore delle forze equivalenti ai cedimenti di estremità:

$$\mathbf{f}_{oa}^{ec} = - \sum_b \mathbf{K}_{ab}^{ec} \mathbf{u}_{ob},$$

si completano le espressioni della rigidezza e delle forze da considerare nell'assestaggio della travatura.

L'equilibrio elastico della trave vincolata agli estremi si esprime quindi in forma variazionale, in termini dei parametri vettoriali di interfaccia, come segue:

$$\sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^{ec} \mathbf{u}_b \cdot \mathbf{v}_a = \sum_a \mathbf{f}_a^{ec} \cdot \mathbf{v}_a + \sum_a \mathbf{f}_{oa}^{ec} \cdot \mathbf{v}_a, \quad \forall \mathbf{v}_a,$$

ed in termini matriciali

$$\sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^{ec} \mathbf{u}_b = \sum_a \mathbf{f}_a^{ec} + \sum_a \mathbf{f}_{oa}^{ec}.$$

- iv) Una volta risolto il problema dell'equilibrio elastico della struttura si valutano gli spostamenti dei nodi e quindi quelli delle estremità delle travi.

Per le travi vincolate agli estremi si procede nel modo seguente.

Dalla conoscenza dei parametri vettoriali di interfaccia  $\mathbf{u}_a$  si ottengono i *parametri vincolari schiavi*  $\mathbf{p}_1$  mediante la formula

$$p_{1\alpha} = (\mathbf{u}_{a(\alpha)} + \mathbf{u}_{oa(\alpha)}) \cdot \mathbf{d}_\alpha .$$

I *parametri vincolari liberi*  $p_2$  si ricavano quindi dalla formula

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{K}_{22}^{ec^{-1}} (\mathbf{f}_2 - \mathbf{K}_{21}^e \mathbf{p}_1) ,$$

ed infine i *parametri standard* (cioè di estremità della trave incastrata) si calcolano con la formula

$$\mathbf{u}_a^e = \sum_{\alpha(a)} p_{\alpha(a)} \mathbf{d}_{\alpha(a)} , \quad a = 1, 2 .$$

## 2.9. Risultati

I parametri standard consentono di determinare i diagrammi delle sollecitazioni e le reazioni vincolari.

Infatti la combinazione lineare dei *polinomi di HERMITE* mediante i parametri standard fornisce la deformata flessionale della trave elastica. Per successive derivazioni si ottengono quindi i campi di rotazione e di curvatura. Moltiplicando la curvatura per la rigidezza flessionale si perviene al diagramma del momento flettente e derivando a quello del taglio. Lo sforzo normale si ottiene moltiplicando la dilatazione longitudinale della trave per la rigidezza assiale.

Le forze agenti agli estremi delle travi si calcolano mediante la formula

$$\mathbf{f}_a^e = \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b^e , \quad a = 1, 2 , \quad e = 1, 2, \dots, \text{NUMELEM} ,$$

e le azioni sui nodi della travatura si ottengono sommando i contributi delle travi ad essi afferenti

$$\mathbf{f}_i = \sum_e \sum_a \mathbf{f}_{i(e,a)} ,$$

dove le forze di estremità nel riferimento globale sono date da

$$\mathbf{f}_{i(e,a)} = \mathbf{R}^{eT} \mathbf{f}_a^e .$$

Le reazioni vincolari nel riferimento globale si ottengono infine per differenza

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{f}_i - \ell_i , \quad i = 1, 2, \dots, \text{NUMNODI} ,$$

essendo  $\ell_i$  i carichi assegnati sui nodi.

### 3. TRAVATURE RETICOLARI

Una *travatura reticolare piana*, è una struttura composta da aste a sezione costante i cui assi di simmetria giacciono in un unico piano. Il modello è un caso particolare di quello delle travature analizzato nelle sezioni precedenti. Si assumono come *parametri cinematici* di ciascuna asta i vettori spostamento  $\mathbf{s}$  delle due sezioni terminali.

#### 3.1. Analisi delle singole aste

La soluzione del problema elastostatico per ciascuna asta è condotto determinandone la risposta elastica (spostamenti e reazioni) alle azioni assegnate (carichi e distorsioni) per valori arbitrari dei parametri cinematici.

A tal fine si esprime la dilatazione della generica asta in funzione dei vettori spostamento delle estremità mediante la formula

$$\epsilon = \frac{(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}}{l},$$

dove  $\mathbf{e}_{12}$  denota il versore dell'asse orientato ed  $l$  la lunghezza dell'asta. La forma bilineare dell'energia elastica dell'asta assume allora l'espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{v}^e &= A_e l \epsilon_u \epsilon_v = \frac{A_e}{l} [(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}] [(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{e}_{12}] = \\ &= \frac{A_e}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{P} \\ -\mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = K^e \mathbf{G}^e \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{v}^e, \end{aligned}$$

avendo posto

A <sub>e</sub>	area elastica dall'asta,
K <sup>e</sup>	rigidezza elastica dell'asta,
$\mathbf{P} = \mathbf{e}_{12} \otimes \mathbf{e}_{12}$	proiettore ortogonale sull'asse dell'asta,
$\mathbf{G}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & -\mathbf{P} \\ -\mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix}$	matrice geometrica dell'asta,
$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix}$	vettori dei parametri dell'asta.
$\mathbf{v}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$	

La matrice di rigidezza elastica dell'asta è quindi fornita dalla formula

$$\mathbf{K}^e = K^e \mathbf{G}^e,$$

ed è dunque il prodotto della rigidezza elastica dell'asta e della matrice geometrica dell'asta.

### 3.2. Assemblaggio della travatura reticolare

La soluzione del problema elastostatico per l'intera travatura reticolare comporta l'*assemblaggio* della struttura considerando che i parametri cinematici di estremità delle singole aste non sono indipendenti.

I parametri cinematici relativi all'estremità di un'asta concorrente in un nodo devono allora essere uguali ai corrispondenti parametri cinematici del nodo.

Assegnato un riferimento cartesiano, si denota con

- $\mathbf{u}_i = \{s_{ix}, s_{iy}\}$  il vettore dei parametri cinematici del singolo nodo,
- $\mathbf{u}^e = \{\mathbf{u}_1^e, \mathbf{u}_2^e\}$  quello dei parametri cinematici di estremità della singola asta

dove  $\mathbf{u}_a^e = \{s_{ax}^e, s_{ay}^e\}$  ( $a = 1, 2$ ).

I pedici  $x, y$  indicano gli assi coordinati.

Sia inoltre  $\mathbf{u} = \{\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots, \text{NUMNODI}\}$  il vettore numerico dei parametri cinematici dell'intera struttura.

La *matrice di assemblaggio* della generica asta è definita da:

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{u}.$$

Se con  $\mathbf{K}^e$  si indica la matrice di rigidezza di un elemento, la forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura si scrive

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_e \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e \cdot \mathbf{v}^e,$$

dove il simbolo  $\cdot$  denota il prodotto interno usuale tra vettori numerici.

In effetti conviene operare in modo diverso per costruire la matrice di rigidezza  $\mathbf{K}$  dell'intera struttura.

Innanzitutto la matrice  $\mathbf{K}^e$  viene partizionata nei suoi blocchi corrispondenti ai parametri cinematici delle due estremità

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^e & \mathbf{K}_{12}^e \\ \mathbf{K}_{21}^e & \mathbf{K}_{22}^e \end{bmatrix}.$$

La forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura si può quindi riscrivere come

$$\mathbf{K}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_e \sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_b^e \cdot \mathbf{v}_a^e, \quad a, b = 1, 2, \dots, \text{NUMELEM}.$$

La matrice di assemblaggio elementare  $\mathbf{A}^e$  è decomponibile in due blocchi:

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^e \\ \mathbf{E}_2^e \end{bmatrix},$$

dove  $\mathbf{E}_a^e$  è la *matrice di estrazione*.

$\mathbf{E}_a^e$  estraе da  $\mathbf{u}$  il vettore  $\mathbf{u}_{i(e,a)}$  relativo al nodo cui afferisce l'estremità  $a$  dell'asta  $e$ . Si ha dunque

$$\mathbf{A}^e \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^e \\ \mathbf{E}_2^e \end{bmatrix} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1^e \mathbf{u} \\ \mathbf{E}_2^e \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{i(e,1)} \\ \mathbf{u}_{i(e,2)} \end{bmatrix},$$

per cui risulta:  $\mathbf{u}_b^e = \mathbf{u}_{j(e,b)}$  e  $\mathbf{v}_a^e = \mathbf{v}_{i(e,a)}$ .

In effetti conviene effettuare tale operazione mediante un *connettore* che fornisce per ogni trave il vettore dei nodi di estremità:

$$\mathbf{C}^e = \{i(e,1), i(e,2)\}, \quad e = 1, 2, \dots, \text{NUMLEM}.$$

Sostituendo ai vettori dei parametri di estremità  $\mathbf{u}_a^e$  e  $\mathbf{v}_a^e$  le loro espressioni in funzione dei vettori dei parametri nodali  $\mathbf{u}_{j(e,b)}$  e  $\mathbf{v}_{i(e,a)}$  la forma bilineare dell'energia diventa:

$$\sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i = \sum_e \sum_{ab} \mathbf{K}_{ab}^e \mathbf{u}_{j(e,b)} \cdot \mathbf{v}_{i(e,a)},$$

dove la sommatoria è estesa ai soli indici  $i, j = 1, 2, \dots, \text{NUMNODI}$  corrispondenti ai nodi che sono collegati da aste e quindi che sono del tipo  $i(e,a)$  o  $j(e,b)$ .

La matrice di rigidezza nodale della struttura viene quindi calcolata con la formula:

$$\mathbf{K}_{ij} = \sum_e \sum_{ab} \mathbf{K}_{i(e,a)j(e,b)} \quad \text{dove } \mathbf{K}_{i(e,a)j(e,b)} = \mathbf{K}_{ab}^e.$$

E' opportuno sottolineare il fatto che della matrice di rigidezza nodale della struttura vanno solo calcolati i blocchi corrispondenti a nodi connessi da aste.

### 3.3. Vincoli esterni e cedimenti imposti

I parametri nodali

$$\mathbf{u}_i = \{s_{ix}, s_{iy}\}, \quad i = 1, 2, \dots, \text{NUMNODI},$$

in generale non sono indipendenti e l'insieme di ammissibilità costituisce una varietà lineare definita da condizioni di vincolo tra i parametri e da valori assegnati ad alcuni di essi.

E' necessario dunque fornire una *rappresentazione esplicita* della varietà lineare di ammissibilità in termini di parametri scalari liberi.

Nel caso di una travatura reticolare i vincoli ed i cedimenti vengono assegnati separatamente per ciascun nodo.

Si possono pertanto esprimere i parametri dei singoli nodi come combinazione affine di direttori assegnati; i relativi coefficienti costituiscono i *parametri scalari liberi* che rappresentano le incognite in termini delle quali va risolto il problema lineare.

Si assume dunque per i parametri nodali l'espressione

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_{oj} + \sum_{\beta(j)} p_{\beta(j)} \mathbf{d}_{\beta(j)},$$

e per le loro variazioni l'espressione

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)},$$

dove  $i$  e  $j$  denotano i nodi della travatura reticolare cui afferisce almeno un parametro o un cedimento, gli indici  $\alpha$  e  $\beta$  variano negli insiemi degli indici dei parametri afferenti ai nodi  $i$  e  $j$  rispettivamente ed i direttori  $\mathbf{d}_\alpha$  sono indipendenti.

La forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura si scrive allora:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i &= \sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \left( \mathbf{u}_{oj} + \sum_{\beta(j)} p_{\beta(j)} \mathbf{d}_{\beta(j)} \right) \cdot \left( \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right) = \\ &= \sum_{ij} \sum_{\alpha(i)\beta(j)} \left( \mathbf{K}_{ij} \mathbf{d}_{\beta(j)} \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right) p_{\beta(j)} q_{\alpha(i)} + \\ &\quad + \sum_{ij} \sum_{\alpha(i)} \left( \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_{oj} \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right) q_{\alpha(i)}. \end{aligned}$$

- Nel primo addendo della formula precedente gli indici  $i$  e  $j$  variano tra quelli tali che ai nodi corrispondenti afferisce almeno un parametro e gli indici  $\alpha(i)$  e  $\beta(j)$  variano nell'insieme degli indici dei parametri afferenti ai nodi  $i$  e  $j$  rispettivamente.
- Nel secondo addendo della formula precedente l'indice  $i$  varia tra quelli tali che al nodo corrispondente afferisce almeno un parametro,  $\alpha(i)$  varia nell'insieme degli indici dei parametri afferenti al nodo  $i$  e l'indice  $j$  tra quelli tali che al nodo corrispondente è associato un cedimento.

E' allora più conveniente ordinare i parametri in una unica lista in cui far variare gli indici  $\alpha$  e  $\beta$ , scegliere tra gli indici  $i$  e  $j$  dei nodi quelli  $i(\alpha)$  e  $j(\beta)$  cui afferiscono tali parametri e far variare l'indice  $k$  tra quelli dei nodi cui afferisce un cedimento.

L'espressione precedente si riscrive quindi

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\beta} [\mathbf{K}_{i(\alpha)j(\beta)} \mathbf{d}_\beta \cdot \mathbf{d}_\alpha] p_\beta q_\alpha + \sum_\alpha \left[ \sum_k \mathbf{K}_{i(\alpha)k} \mathbf{u}_{ok} \cdot \mathbf{d}_\alpha \right] q_\alpha &= \\ = \sum_{\alpha\beta} \mathbf{K}_{\alpha\beta} p_\beta q_\alpha - \sum_\alpha f_{o\alpha} q_\alpha. \end{aligned}$$

La matrice di rigidezza della struttura in termini di parametri scalari liberi assume la forma:

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{i(\alpha)j(\beta)} \mathbf{d}_\beta \cdot \mathbf{d}_\alpha ,$$

e le forze equivalenti ai cedimenti e duali dei parametri liberi sono date da:

$$f_{o\alpha} = \sum_k \mathbf{K}_{i(\alpha)k} \mathbf{u}_{ok} \cdot \mathbf{d}_\alpha .$$

In definitiva la forma bilineare dell'energia elastica dell'intera struttura diventa:

$$\sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{\alpha\beta} \mathbf{K}_{\alpha\beta} p_\beta q_\alpha - \sum_\alpha f_{o\alpha} q_\alpha .$$

Il lavoro virtuale delle forze nodali  $\mathbf{f}_i$  fornisce l'espressione delle *forze duali dei parametri liberi*:

$$\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \left( \sum_{\alpha(i)} q_{\alpha(i)} \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right) = \sum_i \sum_{\alpha(i)} \left( \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{d}_{\alpha(i)} \right) q_{\alpha(i)} .$$

Lasciando libero di variare l'indice  $\alpha$  e scegliendo tra gli indici  $i$  quelli  $i(\alpha)$  tali che ai nodi corrispondenti afferisce il parametro  $\alpha$ , si ottiene

$$\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_\alpha (\mathbf{f}_{i(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha) q_\alpha = \sum_\alpha f_\alpha q_\alpha ,$$

in cui

$$f_\alpha = \mathbf{f}_{i(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha ,$$

e dunque

$$\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i = \sum_\alpha f_\alpha q_\alpha .$$

In definitiva il problema elastostatico

$$\sum_{ij} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{v}_i = \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i ,$$

si scrive in termini variazionali

$$\sum_{\alpha\beta} \mathbf{K}_{\alpha\beta} p_\beta q_\alpha = \sum_\alpha (f_\alpha + f_{o\alpha}) q_\alpha ,$$

ovvero in *forma operativa*:

### FORMULAZIONE PARAMETRICA

$$\sum_\beta \mathbf{K}_{\alpha\beta} p_\beta = f_\alpha + f_{o\alpha} ,$$

dove:

$$\mathbf{K}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}_{i(\alpha)j(\beta)} \mathbf{d}_\beta \cdot \mathbf{d}_\alpha ,$$

$$f_\alpha = \mathbf{f}_{i(\alpha)} \cdot \mathbf{d}_\alpha ,$$

$$f_{o\alpha} = \sum_k \mathbf{K}_{i(\alpha)k} \mathbf{u}_{ok} \cdot \mathbf{d}_\alpha .$$

L'interpretazione meccanica dei vari temini è la seguente.

- $K_{\alpha\beta}$  è la matrice di rigidezza relativa ai parametri scalari,
- $f_\alpha$  sono le forze parametriche equivalenti alle azioni sui nodi,
- $f_{o\alpha}$  sono le forze parametriche equivalenti ai cedimenti dei nodi,
- $\mathbf{d}_\alpha$  sono i direttori dei parametri scalari,
- $\mathbf{u}_{ok}$  sono i cedimenti impressi ai nodi.

Un esempio di calcolo è riportato in fig. 3.1.

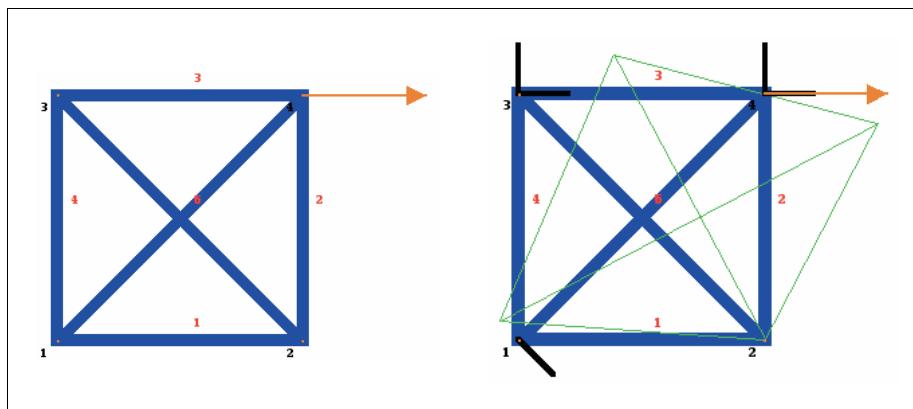


Fig. 3.1

**Osservazione 3.1.** Le trattazioni svolte per illustrare i metodi di analisi delle travature piane e delle travature reticolari forniscono le procedure per l'implementazione in un codice di calcolo automatico.

L'autore ha sviluppato su tale base due codici per uso didattico relativi alle travature piane ed alle travature reticolari. Esempi di soluzione di travature elastiche sono stati riportati nella sezione II.2.8 (p. 66).

Il linguaggio adottato è quello simbolico del programma MATHEMATICA di STEPHEN WOLFRAM. ■

## **RIFERIMENTI**

1. G. ROMANO, Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2000).
2. G. ROMANO, Theory of structural models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2000).
3. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero Hevelius, Benevento (2001).
4. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I Hevelius, Benevento (2001).

## VI – FORMULAZIONI VARIAZIONALI

Questo capitolo è dedicato ad un approfondimento dell’analisi dei problemi di equilibrio e di congruenza di strutture elastiche nel contesto della *teoria geometricamente linearizzata*. In particolare si discute in modo approfondito la formulazione mista del problema elastico nelle forme primale e complementare. Come casi particolari si ritrovano i principi di estremo trattati per via diretta nella sezione II.4 (p. 82).

La teoria linearizzata è applicabile allo studio di strutture elastiche che comportino spostamenti e deformazioni di entità così modesta che si ritenga possibile far riferimento ad un’unica configurazione geometrica  $\Omega$  sulla quale valutare le condizioni di equilibrio e le deformazioni, trattando gli spostamenti come se fossero cinematici. L’analisi linearizzata consente comunque di affrontare e di risolvere in modo sufficientemente approssimato molti problemi di grande interesse per l’ingegneria delle strutture.

Nel seguito si farà esplicito riferimento agli spazi funzionali introdotti nei capitoli I e II del Tomo I.

Sia dunque  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega)$  un campo di spostamenti *GREEN-regolare* e cioè

- un campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  di quadrato integrabile nel dominio  $\Omega$  in corrispondenza del quale esista una suddivisione  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}(\Omega)$  di  $\Omega$  di supporto per  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$ . Ciò significa che la restrizione del campo  $\mathbf{u} \in H(\Omega)$  ad un qualsiasi elemento della suddivisione  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}(\Omega)$  genera una deformazione tangente distribuzionale  $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathbb{D}'_{\mathcal{H}}(\Omega)$  di quadrato integrabile sull’elemento.

La corrispondente *deformazione linearizzata* è il campo tensoriale di quadrato integrabile  $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\Omega)$  definito come prodotto cartesiano delle deformazioni tangenti distribuzionali in ogni elemento della suddivisione  $\mathcal{T}_{\mathbf{u}}(\Omega)$ .

Come è d’uso corrente nel contesto della trattazione linearizzata, nel seguito si ometterà spesso di esplicitare l’aggettivo *linearizzato*. Si dirà così semplicemente che

- il campo di quadrato integrabile  $\mathbf{B}\mathbf{u} \in \mathcal{H}(\Omega)$  è la *deformazione* associata allo spostamento  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}(\Omega)$ .

### ■ Notazione

Per semplificare la notazione, nel denotare gli spazi riferiti alla suddivisione di supporto  $\mathcal{T}(\Omega)$  si ometterà di indicare esplicitamente la suddivisione  $\mathcal{T}(\Omega)$ . Si scriverà quindi  $\mathcal{V}$  invece di  $\mathcal{V}(\mathcal{T}(\Omega))$  e così via. Inoltre si scriverà anche  $H$  e  $\mathcal{H}$  al posto di  $H(\Omega)$  e  $\mathcal{H}(\Omega)$ . Si continuerà invece a denotare con  $\mathcal{V}(\Omega)$  e  $\mathcal{F}(\Omega)$  lo spazio dei cinematici GREEN-regolari e quello duale dei sistemi di forze e con  $\mathcal{S}(\Omega)$  lo spazio degli sforzi GREEN-regolari.

## 1. PROPRIETA' FUNZIONALI

Per la discussione del problema dell'equilibrio elastico è indispensabile enunciare con precisione le proprietà funzionali dei legami elastici che descrivono il comportamento del materiale e quello dei vincoli elastici imposti.

La formulazione di queste proprietà è l'argomento delle prossime due sezioni.

### 1.1. Legame costitutivo lineare

Si consideri una legge costitutiva elastica lineare governata da un operatore di *cedevolezza elastica*  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  che associa ad ogni stato di sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  la corrispondente deformazione elastica  $\mathbf{e} = \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ . Si ha che

- Il nucleo  $\text{Ker } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}$  della cedevolezza elastica è il sottospazio lineare costituito dai campi di sforzo *elasticamente inefficaci*, cioè dai campi di sforzo che non danno luogo a deformazioni elastiche.
- I campi del sottospazio lineare  $\text{Im } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}$  sono le *deformazioni elasticamente ammissibili*.
- L'esistenza di un potenziale elastico complementare richiede che la cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  sia *simmetrica* e cioè che risulti

$$\langle\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in \mathcal{H}.$$

Il *potenziale elastico complementare* è allora pari a

$$\psi(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \langle\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle\rangle.$$

- La *stabilità del legame elastico* richiede che ad una variazione di sforzo corrisponda una variazione di deformazione elastica concorde e cioè che valga la proprietà di *monotonia*

$$\langle\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_2 - \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle\rangle \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2 \in \mathcal{H}.$$

In virtù della linearità di  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  tale condizione equivale a richiedere che la cedevolezza elastica sia *positiva* e cioè che

$$\langle\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle\rangle \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}.$$

Il *potenziale elastico complementare*  $\psi(\boldsymbol{\sigma})$  è pertanto *convesso* su  $\mathcal{H}$ .

In effetti, la teoria che consente di pervenire ai risultati fondamentali di esistenza, richiede che sia soddisfatta una proprietà più forte e precisamente che

- La cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  sia  $\mathcal{H}$ -*semiellittica*.

La proprietà di *semiellitticità* del legame elatico, è espressa dalla diseguaglianza

$$\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H},$$

dove  $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}$  è la norma nello spazio quoziante e cioè la distanza del vettore  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  dal sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{C}_o$  dei campi di sforzo *elasticamente inefficaci*:

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} := \inf \{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{H}} \mid \boldsymbol{\tau} \in \text{Ker } \mathbf{C}_o \},$$

Si noti che la continuità di  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  implica che

$$C \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} \geq \|\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}.$$

Dunque valgono le diseguaglianze

$$C \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2 \geq \|\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}\| \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} \geq \langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}.$$

Definendo in  $\mathcal{H}$  la *seminorma in energia elastica complementare* dei campi di sforzo

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}_o} = \sqrt{\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H},$$

dalle proprietà di continuità e di semiellitticità si deduce che in  $\mathcal{H}$  sussistono le seguenti equivalenze tra le seminorme

$$\sqrt{C} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} \geq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{C}_o} \geq \sqrt{c} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}.$$

Inoltre dalla proprietà di *semiellitticità*, in forza della diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ segue che

$$\|\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H},$$

Il teorema dell'immagine chiusa di BANACH assicura allora che la cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  ha *immagine chiusa* in  $\mathcal{H}$  (vedi Tomo I sezione II.6.3.1 (p. 212) o Tomo Zero VI.3.7 (p. 108))).

Il quadro che segue riassume le principali proprietà della cedevolezza elastica.

- La cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$
- è simmetrica,
- è  $\mathcal{H}$ -semiellittica (dunque in particolare positiva),
- ha immagine chiusa per cui

$$\text{Im } \mathbf{C}_o = (\text{Ker } \mathbf{C}_o)^{\oplus}, \quad \text{Ker } \mathbf{C}_o = (\text{Im } \mathbf{C}_o)^{\oplus}.$$

- I campi del sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}$  sono gli *sforzi elasticamente inefficaci*.
- I campi del sottospazio lineare  $\text{Im } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}$  sono le *deformazioni elasticamente ammissibili*.

- Gli spostamenti conformi elasticamente ammissibili sono quelli del sottospazio lineare

$$\{\mathbf{u} \in \mathcal{L}(\Omega) : \mathbf{B}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o\} \subset \mathcal{L}(\Omega),$$

cioè quelli cui corrisponde una deformazione elasticamente ammissibile.

Per definire la rigidezza elastica della struttura, si consideri quindi l'operatore iniettivo

$$\mathbf{C}^* \in L\left\{\frac{\mathcal{H}}{\text{Ker } \mathbf{C}_o}, \text{Im } \mathbf{C}_o\right\},$$

della cedevolezza elastica efficace, definito dalla relazione

$$\mathbf{C}^* \boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\sigma}^* \in \frac{\mathcal{H}}{\text{Ker } \mathbf{C}_o}, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\sigma}^*.$$

La classe di equivalenza  $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma} + \text{Ker } \mathbf{C}_o$  è detta lo sforzo elasticamente efficace corrispondente allo sforzo  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ .

- L'operatore inverso

$$\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\left\{\text{Im } \mathbf{C}_o, \frac{\mathcal{H}}{\text{Ker } \mathbf{C}_o}\right\}$$

è l'operatore di rigidezza elastica della struttura.

L'operatore lineare  $\mathbf{E}_o \in L\left\{\text{Im } \mathbf{C}_o, \frac{\mathcal{H}}{\text{Ker } \mathbf{C}_o}\right\}$  è continuo in forza del teorema dell'applicazione aperta di BANACH (vedi Tomo Zero VI.3.7 (p. 108)).

Tale proprietà può anche essere direttamente dedotta dalla diseguaglianza che stabilisce la chiusura dell'immagine di  $\mathbf{C}_o$ . Ponendo infatti  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o \mathbf{e}$  e  $\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{e}$  si ha che

$$c^{-1} \|\mathbf{e}\|_{\mathcal{H}} \geq \|\mathbf{E}_o \mathbf{e}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} \quad \forall \mathbf{e} \in \text{Im } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}.$$

In modo analogo dalle proprietà di continuità e di semiellitticità di  $\mathbf{C}_o$  si deduce che  $\mathbf{E}_o$  ha immagine chiusa ed è ellittica su  $\text{Im } \mathbf{C}_o$ :

$$\begin{cases} \|\mathbf{E}_o \mathbf{e}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} \geq C^{-1} \|\mathbf{e}\|_{\mathcal{H}}, & \forall \mathbf{e} \in \text{Im } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}, \\ (\langle \mathbf{E}_o \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle) \geq c \|\mathbf{E}_o \mathbf{e}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2 \geq C^{-2} c \|\mathbf{e}\|_{\mathcal{H}}^2, & \forall \mathbf{e} \in \text{Im } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}. \end{cases}$$

Il potenziale di deformazione elastica è dato da

$$\boxed{\phi(\mathbf{e}) = \frac{1}{2} (\langle \mathbf{E}_o \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle),}$$

ed è strettamente convesso su  $\text{Im } \mathbf{C}_o \subset \mathcal{H}$ .

E' immediato verificare che per ogni coppia  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}\} \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{e} = \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}$  vale la *trasformazione di LEGENDRE*

$$\boxed{\phi(\mathbf{e}) + \psi(\boldsymbol{\sigma}) = (\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle), \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}, \quad \mathbf{e} \in \text{Im } \mathbf{C}_o,}$$

Si noti che la chiusura di  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  comporta che

$$\text{Im } \mathbf{C}_o = (\text{Ker } \mathbf{C}_o)^\oplus \equiv \frac{\mathcal{H}}{\text{Ker } \mathbf{C}_o},$$

dove il simbolo  $\equiv$  indice che tra i due spazi di HILBERT sussiste un isomorfismo isometrico.

- Se non esistono sforzi elasticamente inefficaci allora  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$  e la cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  è un operatore iniettivo ed *ellittico* su  $\mathcal{H}$ , cioè tale che

$$\langle \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma} \rangle \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}.$$

Di conseguenza il potenziale elastico complementare è *strettamente convesso* su  $\mathcal{H}$  e l'operatore  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  è *suriettivo* in quanto risulta

$$\text{Im } \mathbf{C}_o = (\text{Ker } \mathbf{C}_o)^\oplus = \mathcal{H}.$$

L'operatore inverso  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}_o^{-1} \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  è *continuo* ed *ellittico* su  $\mathcal{H}$ .

## 1.2. Vincoli elastici lineari

La struttura continua sia soggetta ad un sistema di *vincoli elastici lineari* descritti da un operatore di rigidezza elastica  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$  che ad ogni campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  della struttura associa il sistema di forze elastiche  $\mathbf{r}_e \in \mathcal{F}$  esercitato dai vincoli elastici e definito da

$$\mathbf{r}_e = -\mathbf{K} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{r}_e \in \mathcal{F}.$$

Il segno negativo è conseguenza del fatto che le forze  $\mathbf{r}_e \in \mathcal{F}$  agenti sulla struttura sono opposte alle forze esercitate dalla struttura sui vincoli elastici.

- L'esistenza di un *potenziale elastico*, che misura l'energia elastica immagazzinata nei vincoli elastici per effetto del campo di spostamenti della struttura, richiede che l'operatore lineare  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$  sia *simmetrico* e cioè che sussista la relazione

$$\langle \mathbf{K} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{V}.$$

- La *stabilità del legame elastico dei vincoli* richiede che ad una variazione di spostamento corrisponda una variazione concorde del sistema di forze elastiche agente sui vincoli e cioè valga la proprietà di *monotonía*

$$\langle \mathbf{K} \mathbf{u}_2 - \mathbf{K} \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \mathcal{V}.$$

In virtù della linearità di  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$  la monotonia equivale a richiedere che la rigidezza dei vincoli elastici sia *positiva* e cioè che

$$\langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}.$$

In effetti, come si vedrà, la buona posizione del problema elastico richiede che l'elasticità dei vincoli soddisfi anche la proprietà di semiellitticità in corrispondenza dei cinematici rigidi conformi. Si assume quindi che

- la rigidezza elastica  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$  è *semiellittica* sul sottospazio lineare  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$ , costituito dai cinematici rigidi conformi. Vale quindi la diseguaglianza

$$\langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L},$$

$$\text{con } c_{\mathbf{k}} > 0.$$

### 1.3. Problemi elastici al contorno

Nei problemi al contorno il legame elastico  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{F}\}$  tra spostamenti e sistemi di forze è definito a partire da due legami, uno tra spostamenti e forze di massa e l'altro tra spostamenti al contorno e forze di contatto.

Si denotino con

$$\mathbf{K}_o \in L\{H; H\},$$

$$\partial\mathbf{K} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{F}\},$$

gli operatori simmetrici e positivi che definiscono rispettivamente tali legami.

Allora la forma bilineare dell'energia elastica complessiva, che include l'elasticità dei vincoli di massa ed al contorno, ha l'espressione

$$\boxed{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \partial\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},}$$

con

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{K}_o J_{\mathcal{V}} \mathbf{u}, J_{\mathcal{V}} \mathbf{v}),$$

$$\partial\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \partial\mathbf{K}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle.$$

Risulta dunque

$$\mathbf{K} = J_{\mathcal{V}}' \mathbf{K}_o J_{\mathcal{V}} + \mathbf{J}' \partial\mathbf{K} \mathbf{J},$$

con  $J_{\mathcal{V}} \in L\{\mathcal{V}; H\}$  iniettore canonico.

Si considerino adesso i seguenti due casi.

- I vincoli elastici al contorno siano assegnati definendo l'*operatore di rigidezza*  $\partial\mathbf{K} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{F}\}$  e si voglia determinare la *cedevolezza* corrispondente. A tal fine si introduca l'operatore iniettivo

$$\partial\mathbf{K}^* \in L\left\{\frac{\partial\mathcal{V}}{\text{Ker } \partial\mathbf{K}}; \text{Im } \partial\mathbf{K}\right\},$$

definito da

$$\partial\mathbf{K}^* \partial\mathbf{u}^* = \partial\mathbf{K} \partial\mathbf{u}, \quad \forall \partial\mathbf{u} \in \partial\mathbf{u}^* \quad \forall \partial\mathbf{u}^* \in \frac{\partial\mathcal{V}}{\text{Ker } \partial\mathbf{K}}.$$

L'operatore di cedevolezza associato a  $\partial\mathbf{K} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{F}\}$  è allora

$$\partial\mathbf{C} = (\partial\mathbf{K}^*)^{-1} \in L\left\{\text{Im } \partial\mathbf{K}; \frac{\partial\mathcal{V}}{\text{Ker } \partial\mathbf{K}}\right\}.$$

Si noti che i vincoli elastici al contorno sono *efficaci* se e solo se la rigidezza soddisfa la condizione

$$\text{Im } \partial\mathbf{K} \cap (\Gamma\mathcal{L})^\perp = \text{Im } \partial\mathbf{K} \cap (\mathbf{N}\Sigma) = \{\mathbf{o}\}.$$

dove  $\Sigma = \{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S} : \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\}$  e si è fatto riferimento alla egualianza  $\mathbf{N}\Sigma = (\Gamma\mathcal{L})^\perp$  (vedi Tomo I sezione II.10 (p. 243)).

- I vincoli elastici al contorno siano assegnati definendo l'*operatore di cedevolezza*  $\partial\mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$  e si voglia determinare la *rigidezza* corrispondente. Si procede in modo analogo al precedente considerando l'operatore iniettivo

$$\partial\mathbf{C}^* \in L\left\{\frac{\partial\mathcal{F}}{\text{Ker } \partial\mathbf{C}}; \text{Im } \partial\mathbf{C}\right\},$$

definito da

$$\partial\mathbf{C}^* \mathbf{t}^* = \partial\mathbf{C} \mathbf{t}, \quad \forall \mathbf{t} \in \mathbf{t}^* \quad \forall \mathbf{t}^* \in \frac{\partial\mathcal{F}}{\text{Ker } \partial\mathbf{C}},$$

e l'operatore di rigidezza

$$\partial\mathbf{K} = (\partial\mathbf{C}^*)^{-1} \in L\left\{\text{Im } \partial\mathbf{C}; \frac{\partial\mathcal{F}}{\text{Ker } \partial\mathbf{C}}\right\}.$$

In termini di cedevolezza dei vincoli elastici al contorno, la condizione di *efficacia* si esprime imponendo che

$$\text{Im } \partial\mathbf{C} \cap (\Gamma\mathcal{L}) = \text{Im } \partial\mathbf{C} \cap (\mathbf{N}\Sigma)^\perp = \{\mathbf{o}\}.$$

## 2. FORMULAZIONE PRIMALE

Un problema elastico consiste nella determinazione del campo di spostamento e del campo di sforzo che, in presenza di legami elastici sia costitutivi che vincolari, soddisfino la *condizione di equilibrio elastico* e la *condizione di congruenza elastica*.

In completa generalità un *problema elastico lineare* va formulato in termini di campi di spostamento e di campi di sforzo ed è pertanto un *problema misto*.

La necessità di considerare incogniti sia il campo di spostamento che quello di sforzo sussiste nel caso in cui la cedevolezza elastica del materiale sia singolare.

Tale singolarità non consente infatti di esprimere il campo di sforzo incognito in funzione del campo di spostamento.

Se la cedevolezza elastica del materiale è non singolare, il problema strutturale può essere invece formulato in termini del solo campo di spostamento incognito imponendo la sola condizione di equilibrio elastico.

Si osservi inoltre che il problema elastico è suscettibile di varie formulazioni, tra loro equivalenti per il modello continuo, che conducono però, a seguito di una discretizzazione, a metodi approssimati diversi.

Nel seguito si fornisce una trattazione esauriente del problema illustrando prima la formulazione del problema misto primale e quindi quella del problema misto complementare mostrando per entrambe le specializzazioni al caso di elasticità non singolare e le caratterizzazioni in termini di principi di stazionarietà, di estremo o di punto di sella.

Si presenta infine una trattazione delle formulazioni ibride che giocano un ruolo importante nelle applicazioni quando è necessario o conveniente far ricorso a campi non conformi.

### 2.1. Problema misto primale

Si considerino i seguenti elementi

- $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  cedevolezza elastica del materiale,
- $\mathbf{K} = J'_V \mathbf{K}_o J_V + \Gamma' \partial \mathbf{K} \Gamma \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{F}\}$  rigidezza elastica somma delle rigidezze  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$  e  $\partial \mathbf{K} \in L\{\partial \mathcal{V}; \partial \mathcal{F}\}$  dei vincoli elastici di massa e di contatto,
- $J_V \in L\{\mathcal{V}; H\}$  iniettore canonico,
- $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\}$  operatore di traccia,
- $\ell = J'_V \mathbf{b} + \Gamma' \mathbf{t} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  carico equivalente alle forze di massa e di contatto.

così che

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b}, J_V \mathbf{v}) + (\mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v}).$$

- $\delta \in \mathcal{H}$  un'assegnata *distorsione*, quale ad esempio il campo di deformazione prodotto da una variazione di temperatura,

- $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  un assegnato campo di spostamenti che descrive un insieme di *cedimenti vincolari* come classe di equivalenza

$$\mathbf{w} + \mathcal{L} \in \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{L}}.$$

I campi della varietà lineare  $\mathcal{L}_a = \mathbf{w} + \mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ , sono detti *spostamenti ammissibili*.

Si impongano le condizioni di equilibrio e di congruenza.

- La *condizione variazionale di equilibrio* si scrive nella forma

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{r}_e, \mathbf{v} \rangle = (\sigma, \mathbf{Bv}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Detta  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a(\Omega)$  la deformata elastica e posto  $\mathbf{r}_e = -\mathbf{K}\mathbf{u}$  la condizione di equilibrio assume l'espressione

$$\langle \mathbf{Ku}, \mathbf{v} \rangle + (\sigma, \mathbf{Bv}) = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Si osservi poi che la deformazione totale  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}$  è pari alla somma di quella elastica  $\mathbf{e} = \mathbf{C}_o \sigma \in \mathcal{H}$  e di quella imposta  $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{H}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\delta} = \mathbf{C}_o \sigma + \boldsymbol{\delta}.$$

Pertanto la condizione di congruenza tra il campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$  ed il campo di deformazione totale  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}$  si scrive

$$\mathbf{Bu} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_o \sigma + \boldsymbol{\delta}.$$

- La *condizione variazionale di congruenza* si scrive dunque

$$(\tau, \mathbf{Bu}) - (\tau, \mathbf{C}_o \sigma) = (\tau, \boldsymbol{\delta}), \quad \forall \tau \in \mathcal{H}.$$

In definitiva, definendo le forme bilineari simmetriche

$$\begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \langle \mathbf{Ku}, \mathbf{v} \rangle, & \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \mathbf{c}_o(\sigma, \tau) := (\mathbf{C}_o \sigma, \tau), & \forall \sigma, \tau \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

il problema elastico risulta espresso dal sistema

$$\begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\sigma, \mathbf{v}) = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in \mathcal{L}_a = \mathbf{w} + \mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{b}(\tau, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\sigma, \tau) = (\tau, \boldsymbol{\delta}), & \sigma \in \mathcal{H}, \quad \forall \tau \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

- I campi incogniti  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{L}_a \times \mathcal{H}$  sono detti *campi di tentativo*.
- I campi  $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{H}$  che compaiono nella formulazione variazionale sono detti *campi di prova*.

E' conveniente far sì che i campi di prova  $\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}\} \in \mathcal{L}_a \times \mathcal{H}$  ed i campi di tentativo  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{H}$  appartengano entrambi ai medesimi spazi lineari.

A tal fine si ponga  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  con  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  al posto di  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$  e si riscriva il sistema nella forma

$$\boxed{\text{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}), & \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases} \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\tau} \rangle - \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}), & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}, \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \end{cases} \end{cases}}$$

Si introducano

- la *forza attiva equivalente*  $\ell_{\text{eq}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e
- la *distorsione equivalente*  $\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} \in \mathcal{H}$ ,

con le definizioni

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \ell - \mathbf{Kw}, \mathbf{v} \rangle, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle &:= \langle \boldsymbol{\delta} - \mathbf{Bw}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \end{aligned}}$$

La *formulazione mista primale* del problema elastico si scrive quindi

$$\boxed{\text{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in \mathcal{L} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \end{cases}}$$

Le due condizioni sono dette rispettivamente *condizione di equilibrio elastico primale* e *condizione di congruenza elastica primale*.

## 2.2. Formulazione in termini di operatori

La discussione del problema misto è convenientemente condotta facendo riferimento ad una formulazione in termini di operatori.

A tal fine si osservi che lo spazio HILBERT  $\mathcal{H}$  è assunto quale spazio pivot (è cioè identificato col suo duale  $\mathcal{H}'$ ) e che lo spazio duale di  $\mathcal{L}$  è  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}'$ .

E' pertanto naturale introdurre gli *operatori ridotti*

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{H}\}, \\ \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}, \\ \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}, \end{cases}$$

mediante le posizioni

- $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{H}\}$  è la restrizione di  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{H}\}$ ,
- $\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  è definito dalla relazione  $\mathbf{B}'_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}'\boldsymbol{\sigma} + \mathcal{R}$ ,
- $\mathbf{K}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  è definito dalla relazione

$$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{u} + \mathcal{R}.$$

Il sottospazio delle forze reattive  $\mathcal{R} \subset \mathcal{F}$  è definito da

$$\mathcal{R} = \mathcal{L}^{\perp} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{F} : \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}\}.$$

**Osservazione 2.1.** Si noti che nel definire gli operatori

$$\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}, \quad \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\},$$

si è fatto ricorso alla seguente identificazione.

Sia  $\mathcal{V}$  lo spazio dei cinematici GREEN-regolari aventi quale supporto la suddivisione  $T(\Omega)$  e sia  $\mathcal{F}$  lo spazio di sistemi forze, duale di  $\mathcal{V}$ . Siano poi  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{V}$  il sottospazio dei cinematici conformi e  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  lo spazio duale delle forze attive.

Esiste allora un isomorfismo isometrico che permette di identificare lo spazio delle forze attive  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e lo spazio quoziante  $\mathcal{F}/\mathcal{R}$  (vedi [16] I.9.18 (p. 75) e [17] osservazione I.5.4 (p. 43)). Si noti inoltre che lo spazio dei sistemi forze  $\mathcal{F}$  duale di  $\mathcal{V}$  è identificabile con lo spazio quoziante  $\mathcal{F}/\mathcal{V}^{\perp}$ , dove

$$\mathcal{V}^{\perp} = \{\mathbf{f} \in \mathcal{F} : \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \subset \mathcal{V}(\Omega)\},$$

è lo spazio dei sistemi di forze di interazione tra parti degli elementi di  $T(\Omega)$ . ■

In termini di operatori il *problema misto primale* può essere posto nella forma

$$\text{M)} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} + \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\ell}_{\text{eq}} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} - \mathbf{C}_o\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} \end{cases} \iff \boldsymbol{\Lambda} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathcal{L}} & \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{L}} & -\mathbf{C}_o \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{\ell}_{\text{eq}} \\ \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} \end{vmatrix}.$$

- L'operatore lineare  $\boldsymbol{\Lambda} \in L\{\mathcal{L} \times \mathcal{H}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{H}\}$  è detto *operatore strutturale*.

Si osservi che sono valide in generale le seguenti inclusioni (vedi [16] proposizione I.11.7 (p. 87))

$$\begin{aligned} \text{Im } \Lambda &\subseteq \left| \begin{array}{l} \text{Im } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \\ \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o \end{array} \right| \subseteq \left| \begin{array}{l} \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \\ \mathcal{H} \end{array} \right|, \\ \left| \begin{array}{l} \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \\ \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o \end{array} \right| &\subseteq \text{Ker } \Lambda \subseteq \left| \begin{array}{l} \mathcal{L} \\ \mathcal{H} \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Sussiste inoltre il seguente risultato.

**Proposizione 2.1. Rappresentazione del nucleo della rigidezza elastica dei vincoli.**  
*La positività dell'operatore di rigidezza dei vincoli elastici  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$  implica che*

$$\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} = \text{Ker } \mathbf{K} \cap \mathcal{L}.$$

**Dim.** Poiché  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \iff \mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{Ku} \in \mathcal{R} = \mathcal{L}^{\perp} \Rightarrow \langle \mathbf{Ku}, \mathbf{u} \rangle = 0$  il punto  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  è di minimo assoluto per la forma quadratica non negativa  $\langle \mathbf{Ku}, \mathbf{u} \rangle$ . La derivata lungo un'arbitraria direzione  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  deve pertanto annullarsi e ciò equivale alla condizione

$$\langle \mathbf{Ku}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \iff \mathbf{Ku} = \mathbf{o}.$$

Dunque risulta  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{K} \cap \mathcal{L}$  e sussiste l'inclusione  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \subseteq \text{Ker } \mathbf{K} \cap \mathcal{L}$ . L'inclusione inversa è evidente.  $\square$

### 2.3. Buona posizione

Si dia preliminarmente la definizione di *buona posizione* del problema.

**Definizione 2.2.** *Il problema misto  $\mathbb{M}$  è ben posto se in corrispondenza di ogni dato esiste una soluzione che soddisfi la condizione variazionale di ammissibilità*

$$\{\ell_{\text{eq}}, \delta_{\text{eq}}\} \in (\text{Ker } \Lambda)^{\perp},$$

*La buona posizione del problema misto equivale quindi a richiedere che l'operatore strutturale  $\Lambda \in L\{\mathcal{L} \times \mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{H}\}$  sia tale che*

$$\text{Im } \Lambda = (\text{Ker } \Lambda)^{\perp},$$

*e cioè che l'operatore strutturale abbia immagine chiusa in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{H}$ .*  $\square$

Si noti che l'inclusione  $\text{Im } \Lambda \subseteq (\text{Ker } \Lambda)^\perp$  è banale in quanto ogni dato corrispondente ad una soluzione del problema misto soddisfa la condizione variazionale. Dunque la buona posizione del problema misto consiste in effetti nel richiedere che valga l'inclusione inversa  $\text{Im } \Lambda \supseteq (\text{Ker } \Lambda)^\perp$ .

- Se il problema misto è *ben posto* ed i dati soddisfano la condizione variazionale di ammissibilità, l'insieme delle soluzioni è la varietà lineare non vuota  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} + \text{Ker } \Lambda$ , dove  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{H}$  è una soluzione particolare.

- La discussione della buona posizione del problema elastico richiede di fornire una rappresentazione del nucleo dell'operatore strutturale  $\Lambda \in L\{\mathcal{L} \times \mathcal{H}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{H}\}$  in termini dei nuclei dei singoli operatori  $\mathbf{K}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$ ,  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$ ,  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  e  $\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$ .

Si osservi ora che

- Il sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}$  è costituito dai campi di spostamento conformi che sono rigidi e non impegnano i vincoli elastici,
- Il sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o$  è costituito dai campi di sforzo in auto-equilibrio che non inducono deformazioni elastiche nella struttura.

Si può allora enunciare il seguente importante risultato.

**Proposizione 2.3. Rappresentazione del nucleo dell'operatore strutturale.** *Se le forme bilineari  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{k}$  sono simmetriche e positive, il nucleo dell'operatore elastico misto  $\Lambda$  è dato da*

$$\text{Ker } \Lambda = \begin{vmatrix} \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \\ \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o \end{vmatrix}.$$

**Dim.** una coppia  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\} \in \mathcal{L} \times \mathcal{H}$  appartiene a  $\text{Ker } \Lambda$  se e solo se

$$\begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}, \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{K}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} + \mathbf{B}'_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\sigma} = 0, \\ \mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} - \mathbf{C}_o\boldsymbol{\sigma} = 0, \end{cases}$$

e ciò implica che

$$\begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{b}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = 0, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = 0. \end{cases}$$

Sottraendo si ha che  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$  e la positività di  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{c}$  implica che  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$  and  $\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ . Dunque, essendo  $\mathbf{u}$  e  $\boldsymbol{\sigma}$  punti di minimo assoluto per  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{c}$ , le loro derivate devono annullarsi.

Per la simmetria di  $\mathbf{k}$  and  $\mathbf{c}$  l'annullarsi delle derivate è espressa da  $\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{C}_o\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ .

Sostituendo nell'espressione del nucleo si deduce che  $\mathbf{B}_\mathcal{L}\mathbf{u} = \mathbf{o}$  e  $\mathbf{B}'_\mathcal{L}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o}$ .  
Si è così dimostrato che

$$\text{Ker } \boldsymbol{\Lambda} \subseteq \left| \begin{array}{l} \text{Ker } \mathbf{B}_\mathcal{L} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_\mathcal{L} \\ \text{Ker } \mathbf{B}'_\mathcal{L} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o \end{array} \right|.$$

L'eguaglianza segue osservando che l'implicazione inversa è sempre vera.  $\square$

#### 2.4. Condizioni di ammissibilità dei dati

In virtù della proposizione 2.3 la condizione variazionale di ammissibilità dei dati  $\{\ell_{\text{eq}}, \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\} \in (\text{Ker } \boldsymbol{\Lambda})^\perp$  si può esplicitare mediante due condizioni variazionali, la prima di *ammissibilità elastostatica* e la seconda di *ammissibilità elastocinematica*:

$$\boxed{\begin{cases} \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle = 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_\mathcal{L}, \\ \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o. \end{cases}}$$

Per discutere tali condizioni di ammissibilità si ricordino le definizioni

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \ell - \mathbf{Kw}, \mathbf{v} \rangle, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle &:= \langle \boldsymbol{\delta} - \mathbf{Bw}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \end{aligned}}$$

La simmetria della rigidezza elastica  $\mathbf{K} \in L\{\mathcal{V}, \mathcal{F}\}$  implica che

$$\mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{Kv}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{K}_\mathcal{L}.$$

Si ha dunque che

$$\boxed{\langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_\mathcal{L}.}$$

Pertanto, com'era da attendersi, il cedimento vincolare  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  non gioca nessun ruolo nella condizione di ammissibilità elastostatica.

Si consideri ora la condizione di ammissibilità elastocinematica. Preliminarmente si osservi che se  $\mathbf{w}$  e  $\overline{\mathbf{w}}$  sono due spostamenti ammissibili, essendo  $\mathcal{L}_a = \mathbf{w} + \mathcal{L} = \overline{\mathbf{w}} + \mathcal{L}$ , risulta  $\mathbf{w} - \overline{\mathbf{w}} \in \mathcal{L}$  e quindi

$$\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{Bw} \rangle = \langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\overline{\mathbf{w}} \rangle = \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

in quanto per definizione  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = [\mathbf{BL}]^\oplus$ . Dunque nel formulare la condizione di ammissibilità è lecito considerare un qualsiasi spostamento ammissibile  $\mathbf{w} \in \mathcal{L}_a$ .

La condizione di *ammissibilità elastocinematica* può essere espressa nella forma equivalente

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o.$$

Infatti, essendo  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} := \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S} : \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau} = \mathbf{o}, \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} \in \partial\mathcal{R}\}$ , dalla formula di GREEN si ha che

$$\langle\langle \boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}\mathbf{w} \rangle\rangle = (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) + \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \Gamma\mathbf{w} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \Gamma\mathbf{w} \rangle\rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

ed inoltre  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

In definitiva le condizioni di *ammissibilità elastostatica* e di *ammissibilità elastocinematica* si possono riscrivere

$$\boxed{\begin{cases} \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}, \\ \langle\langle \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\tau} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o. \end{cases}}$$

In termini meccanici:

- La condizione di *ammissibilità elastostatica* impone che il lavoro virtuale delle forze attive deve essere nullo per ogni spostamento conforme rigido che non impegni i vincoli elasticci.
- La condizione di *ammissibilità elastocinematica* impone che, in corrispondenza di ogni autosforzo elasticamente inefficace, il lavoro virtuale delle distorsioni imposte deve essere eguale a quello dei cedimenti vincolari per la relativa reazione vincolare.

**Osservazione 2.2.** E' opportuno evidenziare che le condizioni di equilibrio e di congruenza

$$\boxed{\begin{cases} \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}, \\ \langle\langle \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\tau} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}, \end{cases}}$$

sono più stringenti delle condizioni di ammissibilità

$$\boxed{\begin{cases} \langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}, \\ \langle\langle \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\tau} \rangle\rangle = \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o. \end{cases}}$$

in quanto in queste ultime i campi di prova variano in sottospazi strettamente contenuti nei sottospazi relativi alle corrispondenti prime due condizioni.

- Se non esistono vincoli elastici risulta  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$  e dunque le condizioni di equilibrio e di ammissibilità elastostatica coincidono.
- Se non esistono sforzi elasticamente inefficaci risulta  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$  e la condizione di ammissibilità elastocinematica è banalmente verificata.

Nelle trattazioni della teoria delle strutture elastiche di norma la deformabilità elastica è assunta non singolare e dunque si fa riferimento alla sola condizione di ammissibilità elastostatica. ■

## 2.5. Condizioni di buona posizione

Nella sezione 6.2 (p. 284) è dimostrato il seguente risultato.

### ■ Il problema elastico misto primale

$$\boxed{\mathbb{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, & \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases} \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \langle \delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}, \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \end{cases} \end{cases}}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}), \\ \langle \delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle &:= \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}). \end{aligned}}$$

è ben posto se sono soddisfatte le condizioni

- i)  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiuso in  $\mathcal{H}$ ,
- ii)  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiuso in  $\mathcal{L}$ ,
- iii)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}_C = \text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ ,
- iv)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}; \quad c_{\mathbf{k}} > 0$ ,
- v)  $\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}; \quad \alpha > 0$ ,
- vi)  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' + \text{Ker } \mathbf{C}_o$  chiuso in  $\mathcal{H}$ ,

dove

- $\mathbf{P} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  è il proiettore ortogonale su  $\text{Ker } \mathbf{C}_o \subseteq \mathcal{H}$ , così che risulta  $\text{Im } \mathbf{P} = \text{Ker } \mathbf{C}_o$ ,  $\text{Ker } \mathbf{P} = \text{Im } \mathbf{C}_o$ .

Il sottospazio lineare

$$\mathcal{L}_C := \text{Ker } PB_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} : B_{\mathcal{L}}\mathbf{u} \in \text{Im } C_o\}$$

è costituito dagli spostamenti conformi elasticamente ammissibili, quelli cioè cui si associano deformazioni elasticamente ammissibili. Si noti che se la deformabilità elastica è non singolare, essendo  $\text{Ker } C_o = \{\mathbf{o}\}$  risulta  $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}$ .

- Le condizioni *i), ii), iii), iv)* sono verificate se l'operatore cinematico è un *operatore di KORN*.

In tal caso infatti l'immagine  $\text{Im } B_{\mathcal{L}}$  è chiusa in  $\mathcal{H}$  ed il nucleo  $\text{Ker } B_{\mathcal{L}}$  ha dimensione finita. Nella *iv)* la costante  $c_k$  è allora il più piccolo autovalore positivo della restrizione di  $k$  a  $\text{Ker } B_{\mathcal{L}}$ .

- Le condizioni *v) e vi)* sono soddisfatte se l'*elasticità strutturale è ellittica su  $\mathcal{H}$*  e cioè de

$$c_o(\sigma, \sigma) \geq \alpha \|\sigma\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \sigma \in \mathcal{H},$$

e quindi si ha in particolare che  $\text{Ker } C_o = \{\mathbf{o}\}$ .

- L'unicità della soluzione sussiste se e solo se

$$\boxed{\begin{cases} \text{Ker } K_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } B_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{o}\}, \\ \text{Ker } B_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } C_o = \{\mathbf{o}\}. \end{cases}}$$

La seconda condizione è banalmente verificata se  $\text{Ker } C_o = \{\mathbf{o}\}$ .

## 2.6. Elasticità non singolare

Si consideri ora il caso in cui l'operatore di cedevolezza elastica della struttura  $C_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  sia definito positivo, e dunque in particolare iniettivo, per cui risulta  $\text{Ker } C_o = \{\mathbf{o}\}$  e viene esclusa la possibilità che esistano stati di sforzo elasticamente inefficaci.

La chiusura dell'immagine  $\text{Im } C_o$  e la simmetria di  $C_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  implicano allora che

$$\text{Im } C_o = (\text{Ker } C_o)^{\oplus} = \mathcal{H},$$

e cioè che l'operatore  $C_o$  è suriettivo.

E' allora possibile invertire l'operatore di cedevolezza elastica  $C_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  per ottenere l'operatore di rigidezza elastica  $E_o = C_o^{-1} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  anch'esso simmetrico e continuo.

Ricordando le definizioni delle forze attive equivalenti e delle distorsioni equivalenti

$$\ell_{\text{eq}} := \ell - \mathbf{K}\mathbf{w}, \quad \delta_{\text{eq}} := \boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}\mathbf{w},$$

dove

$$\ell = J'\mathbf{b} + \mathbf{\Gamma}'\mathbf{t},$$

il problema elastico può quindi essere formulato in termini di spostamenti ponendo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o(\mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}), \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}$$

e scrivendo la condizione di equilibrio nella forma

$$\mathbf{K}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o (\mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}) = \ell_{\text{eq}}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

ovvero

$$(\mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}})\mathbf{u} = \ell_{\text{eq}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

La discussione della buona posizione di tale problema può essere condotta come caso particolare di quella svolta per il problema misto.

Il problema è ben posto se è soddisfatta la *condizione inf-sup*:

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{L}} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{L}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})}} > 0,$$

che equivale alla condizione di chiusura della forma bilineare dell'energia di deformazione elastica

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

dove

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \partial \mathbf{K}(\mathbf{T}\mathbf{u}), \mathbf{T}\mathbf{v} \rangle.$$

All'energia di deformazione elastica è associato l'operatore simmetrico e positivo di rigidezza elastica della struttura  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \in \mathbf{L}\{\mathcal{L}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  definito da

$$\mathbf{A}_{\mathcal{L}} := \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

Per quanto attiene all'esistenza di una soluzione si osservi che la condizione di ammissibilità elastocinematica è banalmente soddisfatta in quanto  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$  e rimane da soddisfare quella di ammissibilità elastostatica

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}.$$

Tale condizione è necessaria e sufficiente affinché la soluzione in termini di spostamenti conformi sia unica a meno di uno spostamento addizionale appartenente al sottospazio lineare  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}$  e cioè rigido, conforme ed elasticamente inefficace.

**Osservazione 2.3.**

Nel caso particolare in cui l'elasticità della struttura sia non singolare e non vi siano vincoli elastici è possibile condurre una semplice discussione diretta dell'esistenza ed unicità della soluzione del problema elastico.

In tal caso infatti, essendo  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$  e  $\mathbf{K} = \mathbf{O}$ , il problema elastico si scrive

$$(\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}) \mathbf{u} = \ell + \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

Le proprietà

- di  $\mathcal{H}$ -ellitticità della rigidezza elastica  $\mathbf{E}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$ :

$$\langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \geq c_{\mathbf{E}_o} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H},$$

- e di chiusura dell'immagine dell'operatore  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}, \mathcal{H}\}$ :

$$\|\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \geq c_{\mathbf{B}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{U}(\Omega).$$

implicano che vale la proprietà di  $\mathcal{L}$ -semiellitticità

$$\langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u} \rangle \geq c \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

Ne segue che è chiusa l'immagine dell'operatore di *rigidezza elastica della struttura*

$$\mathbf{S}_{\mathcal{L}} := \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}.$$

Quest'ultima proprietà assicura che

$$\text{Im } \mathbf{S}_{\mathcal{L}} = \text{Im } (\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}) = [\text{Ker}(\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}})]^{\perp} = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}.$$

Essendo inoltre  $\text{Ker}(\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}) = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ , la condizione necessaria e sufficiente di esistenza di una soluzione è fornita da

$$\langle \ell, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \mathcal{V}_{\text{RIG}},$$

Infatti la condizione

$$\langle \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}},$$

è banalmente soddisfatta. ■

## 2.7. Funzionale di HELLINGER-REISSNER

La simmetria delle forme bilineari  $c_o$  e  $k$ , che definiscono rispettivamente le proprietà elastiche del materiale e dei vincoli, consente di interpretare le condizioni di equilibrio e di congruenza del *problema misto primale*

$$\boxed{\text{M}) \quad \begin{cases} k(u, v) + b(\sigma, v) = (\ell_{\text{eq}}, v), & u \in \mathcal{L}, \quad \forall v \in \mathcal{L}, \\ b(\tau, u) - c_o(\sigma, \tau) = (\delta_{\text{eq}}, \tau), & \sigma \in \mathcal{H}, \quad \forall \tau \in \mathcal{H}, \end{cases}}$$

come condizioni di *stazionarietà* del

- *funzionale misto primale* (o funzionale di HELLINGER-REISSNER)

$$\boxed{\mathcal{R}(u, \sigma) = \frac{1}{2}k(u, u) - \frac{1}{2}c_o(\sigma, \sigma) + b(\sigma, u) - (\ell_{\text{eq}}, u) - (\delta_{\text{eq}}, \sigma),}$$

dove

- $u \in \mathcal{L}$ ,  $\sigma \in \mathcal{H}$ ,
- $\ell_{\text{eq}} = \ell - \mathbf{Kw}$  forza attiva equivalente,
- $\delta_{\text{eq}} = \delta - \mathbf{Bw}$  distorsione equivalente,
- $\Gamma w = \partial w$ , essendo  $\partial w \in \partial \mathcal{V}$  il cedimento imposto al contorno.

Un campo di spostamento  $w \in \mathcal{V}$  tale che  $\Gamma w = \partial w$  esiste per ogni campo di spostamento sul contorno  $\partial w \in \partial \mathcal{V}$  in virtù della suriettività dell'operatore di traccia  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\}$ .

Il problema elastico equivale alla ricerca di un punto di stazionarietà del funzionale di HELLINGER-REISSNER in quanto le condizioni del *problema misto primale* equivalgono ad imporre che siano nulle le derivate direzionali parziale del funzionale misto

$$\boxed{\text{M}) \quad \begin{cases} d_u \mathcal{R}(u, \sigma; v) = \mathbf{o}, & u \in \mathcal{L}, \quad \forall v \in \mathcal{L}, \\ d_\sigma \mathcal{R}(u, \sigma; \tau) = \mathbf{o}, & \sigma \in \mathcal{H}, \quad \forall \tau \in \mathcal{H}. \end{cases}}$$

Osservando poi che il funzionale di HELLINGER-REISSNER è un funzionale sella in quanto *convesso* in  $u \in \mathcal{L}$  e *concavo* in  $\sigma \in \mathcal{H}$ , il problema elastico può porsi come problema della ricerca di un *punto di sella* nella forma

$$\boxed{\text{M}) \quad \mathcal{R}(u, \tau) \leq \mathcal{R}(u, \sigma) \leq \mathcal{R}(v, \sigma), \quad \forall v \in \mathcal{L}, \quad \forall \tau \in \mathcal{H},}$$

o come problema di *minimax*

$$\boxed{\text{M}) \quad \mathcal{R}(u, \sigma) = \min_{v \in \mathcal{L}} \max_{\tau \in \mathcal{H}} \mathcal{R}(v, \tau) = \max_{\tau \in \mathcal{H}} \min_{v \in \mathcal{L}} \mathcal{R}(v, \tau).}$$

## 2.8. Funzionale energia potenziale

Le soluzioni del problema dell'equilibrio elastico in termini di spostamenti conformi ed elasticamente ammissibili possono caratterizzate quali punti di minimo assoluto del *funzionale energia potenziale*

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}_C.$$

Infatti il funzionale  $F(\mathbf{u})$  è convesso sul sottospazio lineare

$$\mathcal{L}_C := \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o\} = \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}},$$

costituito dagli *spostamenti conformi elasticamente ammissibili*.

La convessità di  $F(\mathbf{u})$  è conseguenza della positività della forma quadratica associata alla forma bilineare dell'*energia di deformazione elastica*

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}_C,$$

che gode della proprietà di ellitticità

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{a}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

Per ogni  $\delta_{\text{eq}} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}\mathbf{w} \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^{\perp} = \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o$  si effettui la decomposizione

$$\delta_{\text{eq}} = \bar{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\delta}^* \quad \text{with } \bar{\boldsymbol{\delta}} \in \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \quad \text{and } \boldsymbol{\delta}^* \in \text{Im } \mathbf{C}_o.$$

Scegliendo  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}$  tale che  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}$  si ponga  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*$ . Il carico efficace, equivalente al carico, ai cedimenti ed alle distorsioni impresse, ha allora l'espressione

$$\begin{aligned} \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B}\mathbf{v}) = \\ &= \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}_C. \end{aligned}$$

La stazionarietà del funzionale energia potenziale in corrispondenza di una soluzione  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  si impone annullando la derivata direzionale lungo le direzioni  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}_C$ :

$$dF(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{L}_C.$$

- Si considerino ora due specializzazioni del problema primale relative alla due opposte circostanze in cui rispettivamente l'elasticità del materiale è non singolare ovvero è nulla.

- Se la cedevolezza elastica del materiale  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  è definita positiva risulta  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$  e quindi  $\mathcal{L}_C = \mathcal{L}$ . Il funzionale energia potenziale assume allora l'espressione

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

con

$$\langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle := \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B}\mathbf{w}), \mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

- Se la cedevolezza elastica del materiale  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  è nulla si ha invece che  $\mathcal{L}_C = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  ed il funzionale energia potenziale assume l'espressione

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \ell, \mathbf{u} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

Se in particolare è nulla anche la rigidezza  $\partial K \in L\{\partial V; \partial F\}$  dei vincoli al contorno il funzionale energia potenziale si scrive

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \ell, \mathbf{u} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

**Osservazione 2.4.** Se si sceglie lo spostamento non conforme  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  in modo che sia soluzione del problema elastico in cui il modello strutturale è soggetto solo a spostamenti  $\Gamma \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}$  imposti al contorno, allora il termine  $(\mathbf{E}_o \mathbf{B}\mathbf{w}, \mathbf{B}\mathbf{v})$  è nullo per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ . Infatti, l'ipotesi su  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  assicura che risulta  $\mathbf{E}_o \mathbf{B}\mathbf{w} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  e d'altra parte  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = (\mathbf{B}\mathcal{L})^{\perp}$ . Il carico attivo equivalente  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  è allora definito da

$$\langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle := \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

per cui non sussiste la necessità di calcolare il campo di deformazioni  $\mathbf{B}\mathbf{w} \in \mathcal{H}$  associato allo spostamento  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ . ■

### 3. FORMULAZIONE COMPLEMENTARE

Nella *formulazione mista primale* del problema elastico si assume che

- il campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$  è conforme ed
- il campo di sforzi  $\sigma \in \mathcal{H}$  è di quadrato integrabile.

Dunque il campo di spostamenti deve essere regolare in quanto la corrispondente deformazione tangente deve essere di quadrato integrabile a pezzi su  $\Omega$ . Al contrario al campo di sforzi non è richiesta alcuna regolarità.

Nella *formulazione mista complementare* del problema elastico la richiesta di regolarità è ribaltata.

- il campo di sforzi incognito è assunto conforme  $\sigma \in \Sigma$  ed
- il campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in H$  è di quadrato integrabile.

Dunque il campo di sforzi deve essere regolare in quanto il corrispondente campo di forze di massa deve essere di quadrato integrabile a pezzi su  $\Omega$ . Al contrario il campo di spostamenti non deve soddisfare alcuna condizione di regolarità.

### 3.1. Problema misto complementare

Per pervenire alla formulazione complementare del problema elastico si premettono alcune definizioni.

- Si considerino gli spazi  $\mathcal{D} = \mathcal{S}'$  e  $\mathcal{D}_\Sigma = \Sigma'$  duali degli spazi  $\mathcal{S}$  e  $\Sigma$ .
- Gli elementi di  $\mathcal{D}_\Sigma$  sono detti *deformazioni attive*.
- Gli elementi di  $\Sigma^\perp \subset \mathcal{S}'$  sono detti *deformazioni reattive*.

Si definiscano poi

- per  $\sigma, \tau \in \Sigma$  la forma bilineare continua e simmetrica

$$\mathbf{c}(\sigma, \tau) = \langle \mathbf{C}\sigma, \tau \rangle = (\mathbf{C}_o J_{\mathcal{S}}\sigma, J_{\mathcal{S}}\tau) + (\partial \mathbf{C}(\mathbf{N}\sigma), \mathbf{N}\tau),$$

- per  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\mathbf{u} \in H$  la forma bilineare continua

$$\mathbf{b}_o(\sigma, \mathbf{u}) = (\mathbf{B}'_o \sigma, \mathbf{u}),$$

- per  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$  la forma bilineare continua e simmetrica

$$\mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{K}_o \mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Si consideri quindi

- l'operatore di *cedevolezza elastica*  $\mathbf{C}_\Sigma \in L\{\Sigma, \mathcal{D}_\Sigma\}$ , simmetrico e positivo, definito dalla relazione

$$\langle \mathbf{C}_\Sigma \sigma, \tau \rangle = \mathbf{c}(\sigma, \tau), \quad \forall \tau \in \Sigma,$$

o equivalentemente da

$$\mathbf{C}_\Sigma \sigma = \mathbf{C}\sigma + \Sigma^\perp \in \mathcal{D}/\Sigma^\perp \equiv \mathcal{D}_\Sigma.$$

Dalla proposizione 2.1 (p. 238) si trae per analogia che risulta

$$\text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma = \text{Ker } \mathbf{C} \cap \Sigma.$$

**Osservazione 3.1.** Si noti che lo spazio  $\Sigma$  è dotato della topologia Hilbertiana ereditata dallo spazio  $\mathcal{S}$ . La norma è quindi

$$\|\sigma\|_{\mathcal{S}}^2 = \|\sigma\|_{\mathcal{H}}^2 + \|\mathbf{B}'_o \sigma\|_H^2, \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}.$$

Rispetto a tale norma la forma bilineare  $\mathbf{c} \in L\{\Sigma, \Sigma; \mathfrak{R}\}$  e gli operatori di cedevolezza  $\mathbf{C} \in L\{\mathcal{S}; \mathcal{D}\}$  e  $\mathbf{C}_\Sigma \in L\{\Sigma; \mathcal{D}_\Sigma\}$  sono limitati. ■

■ La *condizione variazionale di congruenza* si impone nella forma

$$\langle \tau, \varepsilon \rangle - \langle N\tau, \partial \bar{w} \rangle = (\mathbf{B}'_o \tau, \mathbf{u}), \quad \forall \tau \in \Sigma,$$

in cui la deformazione totale  $\varepsilon \in \mathcal{H}$  è somma di quella elastica  $\mathbf{e} = \mathbf{C}_o \sigma \in \mathcal{H}$  e di quella imposta  $\delta \in \mathcal{H}$

$$\varepsilon = \mathbf{C}_o \sigma + \delta$$

e lo spostamento al contorno è somma del cedimento elastico  $-\partial \mathbf{C}(\mathbf{N}\sigma) \in \partial \mathcal{V}$  e di quello imposto  $\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V}$

$$\partial \bar{w} = -\partial \mathbf{C}(\mathbf{N}\sigma) + \partial \mathbf{w}.$$

Si osservi poi che la forza di massa totale  $\bar{\mathbf{b}} \in H$  è pari alla somma della reazione elastica  $-\mathbf{K}_o \mathbf{u} \in H$  e del carico imposto  $\mathbf{b} \in H$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \mathbf{K}_o \mathbf{u}.$$

Pertanto la condizione di equilibrio tra il campo di sforzi  $\sigma \in \mathcal{S}$  ed il campo di forza di massa totale  $\bar{\mathbf{b}} \in H$  si scrive

$$\mathbf{B}'_o \sigma = \mathbf{b} - \mathbf{K}_o \mathbf{u}.$$

■ Nella *formulazione mista primale* del problema elastico le condizioni di equilibrio e di congruenza sono imposte mediante le condizioni variazionali

$$\begin{cases} \langle \mathbf{K}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \sigma, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = \langle \ell, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \langle \mathbf{B}\mathbf{u}, \tau \rangle - \langle \mathbf{C}_o \sigma, \tau \rangle = \langle \delta, \tau \rangle, & \sigma \in \mathcal{H} \quad , \quad \forall \tau \in \mathcal{H}. \end{cases}$$

dove  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  è tale che  $\Gamma \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}$  e si definiscono i seguenti elementi.

- $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  cedevolezza elastica della struttura,
- $\mathbf{K} = J'_V \mathbf{K}_o J_V + \Gamma' \partial \mathbf{K} \Gamma \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{F}\}$  rigidezza elastica somma delle rigidezze  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$  e  $\partial \mathbf{K} \in L\{\partial \mathcal{V}; \partial \mathcal{F}\}$  dei vincoli elastici di massa e di contatto,
- $J_V \in L\{\mathcal{V}; H\}$  iniettore canonico,
- $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\}$  operatore di traccia,
- $\ell = J'_V \mathbf{b} + \Gamma' \mathbf{t} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  carico equivalente alle forze di massa e di contatto.

- Nella *formulazione mista complementare* le condizioni di equilibrio e di congruenza elastica sono invece espressa da

$$\begin{cases} -\langle \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \rangle + (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \langle \Delta, \boldsymbol{\tau} \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \boldsymbol{\sigma}_t + \Sigma, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) + (\mathbf{K}_o \mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{b}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{u} \in H, \quad \forall \mathbf{v} \in H. \end{cases}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}_t \in \mathcal{S}$  è tale che  $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{t}$ . Un tale campo esiste per ogni  $\mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$  in virtù della suriettività dell'operatore  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}$ .

Si considerano quindi i seguenti elementi.

- $\mathbf{K}_o \in L\{H, H\}$  rigidezza dei vincoli elasticici di massa,
- $\mathbf{C} = J'_S \mathbf{C}_o J_S + \mathbf{N}' \partial \mathbf{C} \mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \mathcal{D}\}$  cedevolezza elastica, somma delle cedevolezze  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  e  $\partial \mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$  della struttura e dei vincoli elastici al contorno,
- $J_S \in L\{\mathcal{S}; \mathcal{H}\}$  iniettore canonico,
- $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}$  operatore di flusso al contorno,
- $\Delta = J'_S \boldsymbol{\delta} + \mathbf{N}' \partial \mathbf{w} \in \mathcal{D}$  deformazione equivalente alle distorsioni ed ai sedimenti.

**Osservazione 3.2.** Si noti che

- nella formulazione primale si assume che gli spostamenti soddisfino la condizione di congruenza al contorno  $\Gamma \mathbf{u} \in \partial \mathbf{w} + \Gamma \mathcal{L}$  e si impongono la condizione differenziale di congruenza e la condizione di equilibrio,
- nella formulazione complementare si assume che gli sforzi soddisfino la condizione di equilibrio al contorno  $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} \in \mathbf{t} + \mathbf{N}\Sigma$  e si impongono la condizione differenziale di equilibrio e la condizione di congruenza. ■

**Osservazione 3.3.** E' importante notare che

- nella formulazione primale del problema elastico l'elasticità dei vincoli al contorno è definita da un operatore di rigidezza  $\partial \mathbf{K} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{F}\}$ .
- nella formulazione complementare del problema elastico l'elasticità dei vincoli al contorno è invece definita dalla cedevolezza  $\partial \mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$ .

Ne segue che nel passare dalla formulazione primale a quella complementare, e viceversa, è necessario *modificare le condizioni al contorno*.

Per convincersi di ciò, si consideri un problema elastico posto in forma *primale* e sia  $\partial \mathbf{K} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{F}\}$  la rigidezza elastica dei vincoli al contorno, assegnata nel rispetto della condizione di efficacia  $\text{Im } \partial \mathbf{K} \cap (\mathbf{N}\Sigma) = \{\mathbf{o}\}$ .

Per definire la forma complementare si osservi che l'operatore di cedevolezza dei vincoli elastici al contorno è  $\partial \mathbf{C} = (\partial \mathbf{K}^*)^{-1} \in L\{\text{Im } \partial \mathbf{K}; \partial\mathcal{V} / \text{Ker } \partial \mathbf{K}\}$ .

La condizione  $\text{Im } \partial \mathbf{K} \cap (\mathbf{N}\Sigma) = \{\mathbf{o}\}$  implica pertanto che l'operatore composto  $\mathbf{N}' \partial \mathbf{C} \mathbf{N} \in L\{\Sigma; \mathcal{D}\}$  è definito solo su  $\text{Ker } \mathbf{N}$  e che ha immagine degenere.

Per far sì che l'operatore di cedevolezza elastica al contorno operi sull'intero sottospazio di definizione  $\text{Im } \partial\mathbf{K}$ , è necessario dunque estendere il sottospazio degli sforzi conformi da  $\Sigma$  a  $\Sigma^*$  in modo che risulti  $\text{Im } \partial\mathbf{K} \subseteq \mathbf{N}\Sigma^*$ .

Daltronde affinchè l'operatore  $\mathbf{N}'\partial\mathbf{C}\mathbf{N} \in L\{\Sigma^*; \mathcal{D}\}$  sia ben definito su  $\Sigma^*$  è necessario che ad ogni elemento dello spazio  $\mathbf{N}\Sigma^*$  corrisponda univocamente un elemento di  $\text{Im } \partial\mathbf{K}$ . Ne segue che bisogna porre

$$\mathbf{N}\Sigma^* = \mathbf{N}\Sigma + \text{Im } \partial\mathbf{K} \iff \Gamma\mathcal{L}^* = \Gamma\mathcal{L} \cap \text{Ker } \partial\mathbf{K}.$$

Una analoga argomentazione può condursi se si considera un problema elastico posto in forma *complementare* con  $\partial\mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$  cedevolezza elastica dei vincoli al contorno che rispetta la condizione di efficacia  $\text{Im } \partial\mathbf{C} \cap (\Gamma\mathcal{L}) = \{\mathbf{o}\}$ .

Allora nel passare alla formulazione primale è necessario modificare il sottospazio lineare  $\mathcal{L}$  dei cinematismi conformi e porre

$$\Gamma\mathcal{L}^* = \Gamma\mathcal{L} + \text{Im } \partial\mathbf{C} \iff \mathbf{N}\Sigma^* = \mathbf{N}\Sigma \cap \text{Ker } \partial\mathbf{C}.$$

Si noti che le due equivalenze sopra riportate sono valide sotto la condizione che i sottospazi lineari  $\mathbf{N}\Sigma + \text{Im } \partial\mathbf{K} \subseteq \partial\mathcal{F}$  e  $\Gamma\mathcal{L} + \text{Im } \partial\mathbf{C} \subseteq \partial\mathcal{V}$  siano chiusi. ■

- Nel seguito, nel passare dalla formulazione primale a quella complementare, si intenderà effettuata la modifica delle condizioni al contorno ma si denoterà ancora con  $\Sigma$  il sottospazio lineare degli sforzi conformi e con  $\mathcal{L}$  quello dei cinematismi conformi, per non appesantire la notazione.

Si ponga

- $\mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b} - \mathbf{B}_o^\top \boldsymbol{\sigma}_t$  forza di massa equivalente,
- $\Delta_{\text{eq}} = \Delta + \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_t$  distorsione attiva equivalente.

essendo  $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{t}$ .

La *formulazione mista complementare* del problema elastico si scrive allora

$$\mathbb{M}^C) \quad \begin{cases} -\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}_o(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \langle \Delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ +\mathbf{b}_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) + \mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in H \quad \forall \mathbf{v} \in H. \end{cases}$$

Si confronti tale espressione con la *formulazione mista primale* analizzata nella sezione 2.1 (p. 234)

$$\mathbb{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in \mathcal{L} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \langle \delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

dove si è posto

- $\delta_{\text{eq}} = \delta - \mathbf{B}\mathbf{w}$  distorsione equivalente,
- $\ell_{\text{eq}} = \ell - \mathbf{K}\mathbf{w}$  forza attiva equivalente,

essendo  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

E' immediato verificare che risultano rispettate le *regole di complementarietà*

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u} \in \mathcal{V} &\iff \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}, \\ \mathbf{u} \in \mathcal{L} &\iff \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma, \\ \mathbf{b} \in H &\iff \boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}, \\ \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F} &\iff \partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}, \\ \mathbf{B} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\} &\iff \mathbf{B}'_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; H\}, \\ \boldsymbol{\Gamma} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\} &\iff -\mathbf{N} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}. \\ \mathbf{K} \in \mathbf{L}\{\mathcal{V}; \mathcal{F}\} &\iff -\mathbf{C} \in \mathbf{L}\{\mathcal{S}; \mathcal{D}\}. \\ \mathbf{C}_o \in \mathbf{L}\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\} &\iff -\mathbf{K}'_o \in \mathbf{L}\{H; H\}. \end{aligned}}$$

- Sia  $\mathbf{B}'_\Sigma \in \mathbf{L}\{\Sigma; H\}$  la restrizione dell'operatore di equilibrio di massa al sottospazio lineare degli sforzi conformi, definita da

$$\boxed{\mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\sigma} := \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \subseteq \mathcal{S}.}$$

così che  $\text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma = \text{Ker } \mathbf{B}'_o \cap \Sigma = \mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma$ .

- L'operatore duale  $\mathbf{B}_\Sigma \in \mathbf{L}\{H; \mathcal{D}_\Sigma\}$  è definito dall'identità

$$\boxed{\mathbf{b}_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := \langle \mathbf{B}_\Sigma \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma} \rangle = (\mathbf{u}, \mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \quad \forall \mathbf{u} \in H.}$$

Dalla proposizione II.10.6 (p. 247) del Tomo I segue che

$$\boxed{\text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma = \mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^\oplus \subset H,}$$

Sussiste quindi l'egualianza

$$\boxed{\text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma = [\text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma]^\oplus = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^{*\oplus} = \mathcal{V}_{\text{RIG}},}$$

in quanto il sottospazio  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} \subset H$  ha dimensione finita ed è quindi chiuso in  $H$ .

- In termini di operatori la formulazione mista *complementare* del problema elastico si scrive quindi

$$\begin{aligned} \text{M}^C) \quad & \left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{C}_\Sigma \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{B}_\Sigma \mathbf{u} = \Delta_{\text{eq}} = \Delta + \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_t \\ +\mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{K}_o \mathbf{u} = \mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t \end{array} \right. \iff \\ & \mathbf{\Lambda}^C \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_\Sigma & \mathbf{B}_\Sigma \\ \mathbf{B}'_\Sigma & \mathbf{K}_o \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Delta_{\text{eq}} \\ \mathbf{b}_{\text{eq}} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

con  $\mathbf{u} \in H$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ .

### 3.2. Funzionale misto complementare

La simmetria delle forme bilineari  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{k}_o$ , che definiscono le proprietà elastiche della struttura e dei vincoli, consente di interpretare le condizioni di equilibrio elastico e di congruenza elastica come condizioni di *stazionarietà* di un funzionale bilineare.

Si consideri infatti il

- *funzionale misto complementare*

$$\boxed{\mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2} \mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{b}_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - (\Delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\sigma}) - (\mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{u}),}$$

dove

- $\mathbf{u} \in H$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$ ,
- $\mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t$  forza di massa equivalente,
- $\Delta_{\text{eq}} = \Delta + \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}_t$  distorsione attiva equivalente.
- $\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{t}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_t \in \mathcal{S}$ , essendo  $\mathbf{t}$  la forza di contatto agente sul contorno.

Si noti la complementarietà con il funzionale misto primale

$$\boxed{\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - (\ell_{\text{eq}}, \mathbf{u}) - (\delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\sigma}),}$$

dove

- $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ ,  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ ,
- $\ell_{\text{eq}} = \ell - \mathbf{K} \mathbf{w}$  forza attiva equivalente,
- $\delta_{\text{eq}} = \delta - \mathbf{B} \mathbf{w}$  distorsione equivalente,
- $\Gamma \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}$ , essendo  $\partial \mathbf{w} \in \partial \mathcal{V}$  il cedimento imposto al contorno.

Il problema elastico equivale alla ricerca di un punto di stazionarietà e cioè di un punto che soddisfi le condizioni

$$\boxed{\mathbb{M}^C) \quad \begin{cases} d_{\mathbf{u}} \mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}; \mathbf{v}) = \mathbf{0}, & \mathbf{u} \in H \quad \forall \mathbf{v} \in H, \\ d_{\boldsymbol{\sigma}} \mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}; \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}, & \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases}}$$

Osservando poi che il funzionale misto complementare è un funzionale sella in quanto *convesso* in  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  e *concavo* in  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}$ , il problema elastico può porsi come problema della ricerca di un *punto di sella* nella forma

$$\boxed{\mathbb{M}^C) \quad \mathcal{R}^C(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) \leq \mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) \leq \mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}), \quad \forall \mathbf{v} \in H \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,}$$

o come problema di *minimax*

$$\boxed{\mathbb{M}^C) \quad \mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \min_{\boldsymbol{\tau} \in \Sigma} \max_{\mathbf{v} \in H} \mathcal{R}^C(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = \max_{\mathbf{v} \in H} \min_{\boldsymbol{\tau} \in \Sigma} \mathcal{R}^C(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}).}$$

### 3.3. Funzionale energia complementare

Nel caso generale in cui l'elasticità dei vincoli di massa  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$  è singolare sia  $\mathbf{K}^* \in L\{\text{Im } \mathbf{K}_o, \text{Im } \mathbf{K}_o\}$  l'operatore regolare definito da

$$\mathbf{K}^* \mathbf{u} = \mathbf{K}_o \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{K}_o \subseteq H.$$

L'operatore  $\mathbf{K}_o$  può quindi essere partizionato nella forma

$$\mathbf{K}_o \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^* & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u}_o \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{u}^* \in \text{Im } \mathbf{K}_o, \\ \mathbf{u}_o \in \text{Ker } \mathbf{K}_o, \end{cases}$$

e la cedevolezza elastica dei vincoli è definita da  $\mathbf{D}_o = \mathbf{K}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{K}_o; \text{Im } \mathbf{K}_o\}$ .

Per ogni  $\mathbf{b}_{\text{eq}} \in (\text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{K}_o)^\perp = \text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma + \text{Im } \mathbf{K}_o$  si effettui la decomposizione

$$\mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t = \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{b}^* \quad \text{con} \quad \bar{\mathbf{b}} \in \text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma \quad \text{e} \quad \mathbf{b}^* \in \text{Im } \mathbf{K}_o.$$

Sia  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} \in \Sigma$  tale che  $\mathbf{B}'_\Sigma \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \bar{\mathbf{b}}$  e si ponga  $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}^*$ .

Allora il problema complementare ridotto si scrive

$$\mathbb{P}^{\mathbb{C}^*}) - \mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}^*, \boldsymbol{\tau}^*) = (\Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\tau}^*), \quad \forall \boldsymbol{\tau}^* \in \Sigma_{\mathbf{K}},$$

dove

$$\Sigma_{\mathbf{K}} := \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma : \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{K}_o\} = \text{Ker } \mathbf{Q} \mathbf{B}'_{\Sigma}.$$

è il sottospazio degli *sforzi conformi elasticamente ammissibili*.

La forma bilineare dell'*energia complementare* di deformazione elastica ha l'espressione

$$\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,$$

La distorsione efficace  $\Delta_{\text{eff}} \in \mathcal{D}_{\mathbf{K}} = \Sigma_{\mathbf{K}}'$ , equivalente al carico, ai cedimenti ed alle distorsioni impresse, ha l'espressione

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\tau} \rangle &:= \langle \Delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle - \mathbf{c}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{b}^*, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}) = \\ &= \langle \Delta, \boldsymbol{\tau} \rangle - \mathbf{c}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{b}^*, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{\mathbf{K}}, \end{aligned}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}_t \in \mathcal{S}$  è un campo di sforzi tale che  $\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{t}$ .

Si noti la complementarietà rispetto all'espressione del carico efficace relativo al problema primale:

$$\begin{aligned} \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B} \mathbf{v}) = \\ &= \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}. \end{aligned}$$

La soluzione del problema dell'equilibrio elastico in termini di sforzi conformi è allora caratterizzata dall'essere un punto di minimo assoluto del

■ *funzionale energia complementare*

$$F^C(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_{\mathbf{K}},$$

che è definito e convesso sul sottospazio lineare  $\Sigma_{\mathbf{K}}$  degli sforzi conformi elasticamente ammissibili.

- Si considerino ora due specializzazioni del problema complementare relative alla due opposte circostanze in cui rispettivamente l'elasticità dei vincoli di massa è non singolare ovvero è nulla.
- L'elasticità dei vincoli di massa sia caratterizzata da un operatore lineare simmetrico e definito positivo  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$ . Risulta allora  $\text{Ker } \mathbf{K}_o = \{\mathbf{o}\}$  e dunque  $\text{Im } \mathbf{K}_o = H$  per cui si può porre  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{o}$ ,  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{o}$  e  $\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{\sigma}$ . Il funzionale energia complementare

$$F^C(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma,$$

ha per dominio il sottospazio lineare  $\Sigma$  degli sforzi conformi in quanto, essendo  $\text{Im } \mathbf{K}_o = H$  risulta  $\Sigma_{\mathbf{K}} = \Sigma$ .

Ponendo allora  $\mathbf{D}_o = \mathbf{K}_o^{-1} \in L\{H; H\}$ , la forma bilineare dell'energia elastica complementare si scrive

$$\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,$$

e la distorsione equivalente al carico, ai cedimenti ed alle distorsioni impresse assume l'espressione

$$\langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\tau} \rangle := \langle \Delta, \boldsymbol{\tau} \rangle - \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o(\mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t), \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma.$$

Si noti la complementarietà col funzionale energia potenziale con  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

dove

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{B} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}},$$

$$\langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle := \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{B} \mathbf{w}), \mathbf{B} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

- Se sono assenti i vincoli elastici di massa, risulta  $\mathbf{K}_o = \mathbf{O}$ , e quindi si ha che  $\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{b}$  e  $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}$ . Il funzionale energia complementare ha dunque per dominio il sottospazio lineare

$$\mathcal{S}_{\text{AUTO}} = \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma : \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o}\},$$

costituito dagli sforzi autoequilibrati, ed assume l'aspetto

$$F^C(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

dove

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle &:= \langle \Delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle - \mathbf{c}(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\sigma}) = \\ &= \langle \Delta, \boldsymbol{\sigma} \rangle - \mathbf{c}(\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\sigma}), \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}. \end{aligned}$$

- Se è nulla anche la cedevolezza dei vincoli al contorno, e cioè  $\partial \mathbf{C} = \mathbf{O}$ , il funzionale energia complementare diventa

$$F^C(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}},$$

ed esplicitamente

$$F^C(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} (\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - (\mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}, \partial \mathbf{w}) - (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta}) + (\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}, \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}_t),$$

con  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_{\text{AUTO}}$ .

Quest'ultima è la forma nella quale il funzionale energia complementare viene usualmente espresso nei testi di meccanica delle strutture.

**Osservazione 3.4.** Nelle strutture composte da travi il sottospazio  $\mathcal{S}_{\text{AUTO}}$  dei campi di sforzo in autoequilibrio è di dimensione finita e ciò consente, in assenza di vincoli elastici di massa, di imporre la condizione di congruenza mediante la soluzione di un numero finito di equazioni algebriche lineari.

Se invece sono presenti vincoli elastici di massa il sottospazio dei campi di prova  $\Sigma_K$  non è di dimensione finita.

Il metodo delle forze dell'ingegneria delle strutture comporta allora la soluzione di un problema differenziale. ■

**Osservazione 3.5.** Si precisa qui la motivazione della nomenclatura adottata in questo capitolo per il problema elastico in forma primale e complementare.

La formulazione primale è espressa in termini

- dell'operatore cinematico  $\mathbf{B}_L \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  che è un operatore di KORN e
- dell'operatore dei valori al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial \mathcal{V}\}$  che è suriettivo.

Tali fondamentali proprietà consentono di dimostrare tutti i risultati principali della teoria. La proprietà che caratterizza le formulazioni primali risiede nel fatto che il nucleo dell'operatore  $\mathbf{B}_L \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  è di dimensione finita. Nelle applicazioni ai problemi elastici è di rilievo il caso in cui accade che risulti

$$\text{Ker } \mathbf{B}_L \cap \text{Ker } \mathbf{K}_L = \{\mathbf{o}\},$$

$$\text{Ker } \mathbf{B}'_L \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}.$$

In tal caso il problema elastico ammette un'unica soluzione per ogni dato.

Nella forma complementare del problema elastico il ruolo giocato dagli operatori lineari  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  e  $\boldsymbol{\Gamma} \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$  è preso rispettivamente

- dall'operatore aggiunto formale  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}; H\}$  e
- dall'operatore lineare di flusso al contorno  $\mathbf{N} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}\}$ .

In forza dei risultati della teoria (vedi Tomo I sezione II.10 (p. 243)), entrambi gli operatori sono suriettivi.

E' possibile sviluppare una trattazione complementare che riproduce tutti i principali risultati di quella primale.

Nelle applicazioni la sostanziale differenza tra le formulazioni primali e complementari risiede nel fatto che il nucleo dell'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  ha dimensione finita per la maggior parte dei modelli strutturali (fanno eccezione le funi e le membrane) mentre il nucleo dell'operatore  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}; H\}$  è di dimensione finita solo per alcune semplici travature.

In elasticità un ulteriore elemento distintivo tra formulazioni primali e complementari, di grande rilievo nelle applicazioni, consiste nella ellitticità della cedevolezza elastica dovuta al comportamento elastico della struttura, in confronto alla possibile ed anzi usuale singolarità della rigidità elastica dei vincoli. ■

## 4. FORMULAZIONI IBRIDE

Le *formulazioni ibride* del problema elastico, sono formulazioni miste costituite da

- condizioni variazionali di equilibrio o di congruenza in cui sia i campi incogniti che quelli di prova sono non conformi,
- condizioni variazionali di conformità cinematica o statica al contorno.
- Nelle *formulazioni ibride primali* si considera un problema di equilibrio elastico con campi di spostamenti non conformi e si impone la conformità cinematica al contorno.
- Nelle *formulazioni ibride complementari* si considera un problema di congruenza elastica con campi di sforzo non conformi e si impone la conformità statica al contorno.

### 4.1. Formulazioni ibride primali

Le *formulazioni ibride primali* del problema elastico, sono basate su formulazioni variazionali dell'equilibrio in cui i campi di prova sono *spostamenti non conformi*.

La trattazione svolta nel Tomo I, sezione II.9.1 (p. 239) mostra che le formulazioni variazionali di equilibrio con spostamenti non conformi sono le seguenti

$$\boxed{\begin{aligned} i) \quad & (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ ii) \quad & (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \Gamma \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_0, \end{aligned}}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{b} \in H$ ,  $\mathbf{t} \in \mathcal{F}$ ,  $\boldsymbol{\rho} \in [\Gamma \mathcal{L}]^\perp$ ,

- Per dedurre l'espressione delle formulazioni ibride primali si osservi preliminarmente che la proposizione II.10.2 (p. 244) del Tomo I, fornisce l'egualianza

$$\mathbf{N} \Sigma = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp.$$

E' quindi possibile porre  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_\rho$  con  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$  e scrivere la condizione di equilibrio *i)* nella forma

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_\rho, \Gamma \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

con  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$ .

Si noti quindi che

- la condizione variazionale di conformità cinematica

$$\Gamma \mathcal{L} = [\mathbf{N} \Sigma]^\perp,$$

(vedi proposizione II.10.3 (p. 244) del Tomo I) consente di tradurre la condizione di ammissibilità di un campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  nella condizione variazionale

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \Gamma \mathbf{u} - \partial \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma \iff \Gamma \mathbf{u} \in \partial \mathbf{w} + \Gamma \mathcal{L}.$$

#### 4.1.1. Il caso generale

- Per scrivere la condizione di equilibrio si pone
- $\sigma = \sigma_o + \sigma^*$ ,  $\sigma_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o$ ,  $\sigma^* \in \text{Im } \mathbf{C}_o$ ,
- $\delta - \mathbf{B}\mathbf{w} = \bar{\delta} + \delta^*$  con  $\bar{\delta} \in \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  e  $\delta^* \in \text{Im } \mathbf{C}_o$ ,
- $\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \bar{\mathbf{u}}$  con  $\mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} = \bar{\delta}$ ,
- $\sigma^* = \mathbf{E}_o(\mathbf{B}\mathbf{u}^* - \delta^*)$  con  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$ ,
- $\mathbf{b} - \mathbf{K}_o\mathbf{u} = \mathbf{b} - \mathbf{K}_o\mathbf{u}^* - \mathbf{K}_o\bar{\mathbf{u}}$  al posto di  $\mathbf{b}$ ,
- $\mathbf{t} - \partial\mathbf{K}(\mathbf{T}\mathbf{u}) = \mathbf{t} - \partial\mathbf{K}(\mathbf{T}\mathbf{u}^*) - \partial\mathbf{K}(\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}})$  al posto di  $\mathbf{t}$ ,

e si definisce il sottospazio lineare

$$\mathcal{V}_C := \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{B}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o\} = \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B},$$

costituito dagli *spostamenti elasticamente ammissibili*.

La condizione variazionale *i*) assume allora la forma

$$\boxed{i) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N}\sigma_\rho, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b} - \mathbf{K}_o\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t} - \partial\mathbf{K}(\mathbf{T}\bar{\mathbf{u}}), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E}_o\delta^*, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle - \langle \sigma_o, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},}$$

dove  $\mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_C$ ,  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$ ,  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$ .

- La forma bilineare

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o\mathbf{B}\mathbf{u}^*, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_C, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

è l'energia elastica totale della struttura, essendo

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{K}_o J_{\mathcal{V}} \mathbf{u}, J_{\mathcal{V}} \mathbf{v}) + \langle \partial\mathbf{K}(\mathbf{T}\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V},$$

è l'energia elastica dei vincoli.

Se sussiste la relazione  $\text{Im } \mathbf{B}' \mathbf{P} = [\text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}]^\perp$  (equivalente alla proprietà di chiusura di  $\text{Ker } \mathbf{B}' + \text{Ker } \mathbf{C}_o$  in  $\mathcal{H}$ ) la condizione variazionale *i*) può essere posta nella forma

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N}\sigma_\rho, \mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b} - \mathbf{K}_o\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t} - \partial\mathbf{K}(\mathbf{T}\mathbf{u}^*), \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E}_o\delta^*, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_C, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_C.}$$

Infatti risulta

$$\sigma_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o \Rightarrow \langle \sigma_o, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_C.$$

Essendo inoltre  $\text{Im } \mathbf{B}' \mathbf{P} = [\text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}]^\perp = \mathcal{V}_C^\perp$ , con  $\mathbf{P} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  proiettore ortogonale su  $\text{Im } \mathbf{C}_o$ , si ha che

$$\mathbf{f} \in \mathcal{V}_C^\perp \subset \mathcal{F} \Rightarrow \exists \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} : \mathbf{f} = \mathbf{B}' \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma} \iff \langle \mathbf{P} \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{Bv} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_C.$$

Si perviene così alla formulazione ibrida primale I

$$\boxed{\text{FIP } I) \quad \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_\rho, \Gamma \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_C \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_C, \\ -\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \Gamma \mathbf{u}^* \rangle = -\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} \rangle, & \boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases}}$$

con

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) &:= \mathbf{k}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}^*, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_C, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_C, \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle &:= (\mathbf{b} - \mathbf{K}_o \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t} - \partial \mathbf{K}(\Gamma \bar{\mathbf{u}}), \Gamma \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}}$$

La prima equazione del problema FIP I equivale alle condizioni di equilibrio di CAUCHY nella forma

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{B}'_o [\mathbf{E}_o(\mathbf{B} \mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\sigma}_o] &= \mathbf{b} - \mathbf{K}_o \mathbf{u}, \\ \mathbf{N}[\mathbf{E}_o(\mathbf{B} \mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}) + \boldsymbol{\sigma}_o] &= \mathbf{t} - \partial \mathbf{K}(\Gamma \mathbf{u}) + \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_\rho. \end{aligned}}$$

La seconda equazione del problema FIP I, in virtù dell'egualianza  $\mathbf{N} \Sigma = [\Gamma \mathcal{L}]^\perp$ , equivale alla condizione di conformità  $\Gamma \mathbf{u} \in \partial \mathbf{w} + \Gamma \mathcal{L}$  ovvero  $\mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L}$  con  $\Gamma \mathbf{w} = \partial \mathbf{w}$ .

- Si noti che lo sforzo  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$  non fornisce la soluzione del problema elastico, che è data da  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}$ , ma solo un campo di moltiplicatori di LAGRANGE per la condizione di conformità dei cinematici.

**Proposizione 4.1. Buona posizione.** *Il problema misto FIP I) è ben posto se e solo se sono soddisfatte le condizioni*

- La forma bilineare  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è chiusa su  $\mathcal{V}_C \times \mathcal{V}_C$  e cioè è soddisfatta la condizione inf-sup:

$$\boxed{c1) \quad \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_C} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_C} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}, \mathbf{B} \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}/(\text{Ker } \mathbf{B} \cap \text{Ker } \mathbf{K})} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{V}/(\text{Ker } \mathbf{B} \cap \text{Ker } \mathbf{K})}} > 0,}$$

- la forma bilineare  $\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}, \Gamma \mathbf{u} \rangle$  è chiusa su  $\Sigma \times \mathcal{V}_C$  e cioè è soddisfatta la condizione inf-sup:

$$\boxed{c2) \quad \inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_C} \sup_{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma} \frac{\langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}, \Gamma \mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\Sigma/\Sigma_C}} > 0,}$$

essendo  $\Sigma_C := \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma : \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}, \Gamma \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_C\}$ .

**Dim.** La proposizione è una diretta conseguenza della proposizione 6.1 (p. 278). Se infatti nel problema misto  $\mathbb{M}$ ) della proposizione 6.1 (p. 278) si effettuano le posizioni formali

- $\mathbf{C}_o = \mathbf{O}$ ,
- $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  al posto di  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ ,
- «  $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u}$  » al posto di  $\mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})$ ,

si ottiene il problema misto  $\mathbb{FIP} I$ .

Si noti che la condizione  $\text{Im } \mathbf{B}'\mathbf{P} = [\text{Ker } \mathbf{PB}]^\perp$  non è richiesta per la buona posizione del problema misto  $\mathbb{FIP} I$ ) ma è necessaria e sufficiente affinchè tale problema sia equivalente alla condizione variazionale *i*) .  $\square$

La discussione della buona posizione in completa generalità richiede di fornire condizioni sufficienti al soddisfacimento delle condizioni *c1*) e *c2*).

Nel seguito si sviluppano invece alcuni casi particolari che sono di interesse per le applicazioni e per i quali si può pervenire in modo diretto a stabilire la buona posizione.

#### ■ *Formulazione ibrida primale I*

La prima formulazione ibrida è relativa al caso in cui l'elasticità della struttura sia non singolare e cioè sia  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$ .

In tal caso, essendo  $\text{Im } \mathbf{C}_o = \mathcal{H}$ , risulta  $\mathcal{V}_{\mathbf{C}} = \mathcal{V}$ .

Sia quindi  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}_o^{-1} \in \mathbf{L}\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  la cedevolezza della struttura.

- La relazione  $\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp$  consente di scrivere la condizione di conformità del campo di spostamenti  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}}$  nella forma

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} - \partial\mathbf{w} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma \iff \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}.$$

Per formulare la condizione di equilibrio elastico si consideri la condizione variazionale di equilibrio

$i) \quad (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{t} + \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v} \rangle\rangle = \langle\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle\rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V},$

e si ponga

- $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta})$ ,
- $\mathbf{b} - \mathbf{K}_o\mathbf{u}$  al posto di  $\mathbf{b}$ ,
- $\mathbf{t} - \partial\mathbf{K}(\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u})$  al posto di  $\mathbf{t}$ ,
- $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\rho}}$  al posto di  $\boldsymbol{\rho} \in [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}]^\perp = \mathbf{N}\Sigma$ , con  $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\rho}} \in \Sigma$ .

Si ottiene quindi

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle = (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E}_o\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}},$$

dove

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o\mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}},$$

è la forma bilineare dell’energia elastica con

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{K}_o J_\gamma \mathbf{u}, J_\gamma \mathbf{v}) + \langle \partial\mathbf{K}(\Gamma\mathbf{u}), \Gamma\mathbf{v} \rangle,$$

forma bilineare dell’energia elastica dei vincoli.

Si consideri quindi la forma bilineare

$$\gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) := \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{u} \rangle, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S},$$

(vedi Tomo Zero, sezione VIII.2.4 (p. 136).

■ Si perviene così alla formulazione ibrida primale I

$$\boxed{\text{FIP I)} \quad \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \gamma(\boldsymbol{\sigma}_\rho, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ -\gamma(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) & = -\gamma(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{w}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases}}$$

con  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$  e

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle := (\mathbf{b}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{E}_o\boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle.$$

- La prima delle FIP I) equivale alle condizioni di equilibrio di CAUCHY nella forma

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{B}'_o \mathbf{E}_o (\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}) &= \mathbf{b} - \mathbf{K}_o \mathbf{u}, \\ \mathbf{N} \mathbf{E}_o (\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta}) &= \mathbf{t} - \partial\mathbf{K}(\Gamma\mathbf{u}) + \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\rho. \end{aligned}}$$

- La seconda delle FIP I) equivale alla condizione di conformità

$$\Gamma\mathbf{u} \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L},$$

ovvero  $\mathbf{u} \in \mathbf{w} + \mathcal{L}$  essendo  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

La condizione differenziale di congruenza è identicamente soddisfatta poiché dalla posizione  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta})$  si deduce che  $\mathbf{B}\mathbf{u} = \boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}_o\boldsymbol{\sigma}$ .

**Osservazione 4.1.** Si noti che lo sforzo  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$  non fornisce la soluzione del problema elastico, che è data da  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o(\mathbf{B}\mathbf{u} - \boldsymbol{\delta})$ , ma solo un campo di moltiplicatori di LAGRANGE per la condizione di compatibilità dello spostamento di prova. ■

Il problema elastico si può scrivere come punto di sella del funzionale ibrido primale I

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_\rho) = \frac{1}{2}\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \gamma(\boldsymbol{\sigma}_\rho, \mathbf{u}) + \\ - (\mathbf{b}, \mathbf{u}) - \langle \langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{u} \rangle \rangle - \langle \langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle \rangle + \gamma(\boldsymbol{\sigma}_\rho, \mathbf{w}),}$$

dove  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$ .

**Osservazione 4.2.** Nel caso in cui l'elasticità della struttura non è singolare è facile vedere che la condizione di *buona posizione c2*) della proposizione 4.1 è conseguenza del fatto che l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  è un operatore di KORN e che l'operatore al contorno  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$  è suriettivo.

Infatti la condizione inf-sup che esprime la chiusura della forma bilineare  $\langle \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma \mathbf{u} \rangle \rangle$  su  $\Sigma \times \mathcal{V}$  equivale alla diseguaglianza

$$a) \quad \|\Gamma' \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{F}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \Gamma' \mathbf{N} \cap \Sigma)}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma.$$

Si noti poi che

$$\text{Ker } \Gamma' = (\text{Im } \Gamma)^\perp = \{\mathbf{o}\} \Rightarrow (\text{Ker } \Gamma' \mathbf{N}) \cap \Sigma = (\text{Ker } \mathbf{N}) \cap \Sigma = \text{Ker } \mathbf{N}.$$

La diseguaglianza *a*) è quindi una diretta conseguenza della chiusura dell'immagine dell'operatore  $\Gamma \in L\{\mathcal{V}; \partial\mathcal{V}\}$  che, per il teorema dell'immagine chiusa, equivale alla chiusura dell'immagine dell'operatore  $\Gamma' \in L\{\partial\mathcal{F}; \mathcal{F}\}$ , a sua volta equivalente alla diseguaglianza

$$b) \quad \|\Gamma' \mathbf{t}\|_{\mathcal{F}} \geq c_\Gamma \|\mathbf{t}\|_{\partial\mathcal{F}}, \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}.$$

Essendo infatti  $\mathbf{N}\Sigma = (\Gamma\mathcal{L})^\perp$ , sussiste anche la diseguaglianza

$$c) \quad \|\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\partial\mathcal{F}} \geq c_N \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/\text{Ker } \mathbf{N}}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma.$$

Ponendo  $\mathbf{t} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}$  nella *b*), dalle *b*) e *c*) si ottiene la *a*).

Ne segue che il problema misto  $\mathbb{FIP} I$  è ben posto se la forma bilineare  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  è  $\mathcal{V}$ -ellittica e cioè se vale la diseguaglianza

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_a \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}/(\text{Ker } \mathbf{K} \cap \text{Ker } \mathbf{B})}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V},$$

in quanto tale condizione garantisce che sussiste la diseguaglianza *c1*) della proposizione 4.1. Condizioni sufficienti sono fornite dalla proposizione 6.9 (p. 287) ponendo  $\mathcal{L} = \mathcal{V}$ .

Per quanto attiene all'*unicità* si ha che

- La  $\mathbf{u}$ -soluzione è unica in  $\mathcal{V}$  se e solo se

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad \begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \gamma(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

e cioè se  $\text{Ker } \mathbf{B} \cap \text{Ker } \mathbf{K} \cap \mathcal{L} = \mathbf{0}$ .

- La  $\boldsymbol{\sigma}_\rho$ -soluzione è definita a meno di campi  $\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma$  tali che

$$\gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \iff \boldsymbol{\sigma} \in \text{Ker } \mathbf{N}.$$

E' peraltro evidente che nel problema  $\mathbb{FIP} I$  intervengono solo i valori del flusso al contorno del campo  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$ . ■

■ *Formulazione ibrida primale II*

La seconda formulazione ibrida primale è relativa al caso opposto in cui l'elasticità della struttura è nulla e la distorsione impressa è congruente. Si ha quindi che  $\mathbf{C}_o = \mathbf{O}$ .

- Sia  $\delta = \mathbf{B}\mathbf{u}_\delta$  con  $\mathbf{u}_\delta \in \mathcal{V}$  la distorsione impressa congruente.

Allora si consideri la condizione variazionale di equilibrio *ii)* e si ponga

- $\mathbf{b} - \mathbf{K}_o(\mathbf{u} + \mathbf{u}_\delta)$  con  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_o$  al posto di  $\mathbf{b}$ ,
- $\mathbf{t} - \partial\mathbf{K}[\Gamma(\mathbf{u} + \mathbf{u}_\delta)]$  al posto di  $\mathbf{t}$ ,
- $\mathbf{N}\sigma_\rho$  al posto di  $\rho \in [\Gamma\mathcal{L}]^\perp$ .

Si perviene così alla

$$\boxed{\text{FIP II) } \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N}\sigma_\rho, \Gamma\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o, \\ -\langle \mathbf{N}\tau, \Gamma\mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{N}\tau, \partial\mathbf{w} - \Gamma\mathbf{u}_\delta \rangle & \forall \tau \in \Sigma, \end{cases}}$$

dove  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_o = \text{Ker } \mathbf{B}, \sigma_\rho \in \Sigma$  e

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathbf{t} - \partial\mathbf{K}[\Gamma\mathbf{u}_\delta], \Gamma\mathbf{v} \rangle + (\mathbf{b} - \mathbf{K}_o\mathbf{u}_\delta, \mathbf{v}).$$

L'energia elastica dei vincoli ha l'espressione

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{K}_o J_{\mathcal{V}} \mathbf{u}, J_{\mathcal{V}} \mathbf{v}) + \langle \partial\mathbf{K}(\Gamma\mathbf{u}), \Gamma\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

- La prima equazione della FIP II equivale alle condizioni di equilibrio di CAUCHY nella forma

$$\boxed{\exists \sigma \in \mathcal{S} : \begin{cases} \mathbf{B}'_o \sigma = \mathbf{b} - \mathbf{K}_o(\mathbf{u} + \mathbf{u}_\delta), \\ \mathbf{N}\sigma = \mathbf{t} + \mathbf{N}\sigma_\rho - \partial\mathbf{K}[\Gamma(\mathbf{u} + \mathbf{u}_\delta)]. \end{cases}}$$

- La seconda equazione della FIP II, in virtù dell'egualanza  $\Gamma\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp$ , equivale alla condizione di conformità

$$\Gamma(\mathbf{u} + \mathbf{u}_\delta) \in \partial\mathbf{w} + \Gamma\mathcal{L},$$

ovvero  $\mathbf{u} + \mathbf{u}_\delta \in \mathbf{w} + \mathcal{L}$  con  $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ .

Il problema elastico si può scrivere come punto di sella del funzionale ibrido primale II

$$\boxed{\frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{N}\sigma_\rho, \Gamma\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{N}\sigma_\rho, \partial\mathbf{w} - \Gamma\mathbf{u}_\delta \rangle,}$$

con  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_o, \sigma_\rho \in \Sigma$ .

**Osservazione 4.3.** La formulazione ibrida primale II è *ben posta* se

- la forma bilineare  $\mathbf{k}(\sigma, \tau)$  è ellittica su  $\text{Ker } \mathbf{B} = \mathcal{V}_o$  e cioè se vale la diseguaglianza

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_c \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}/(\text{Ker } \mathbf{B} \cap \text{Ker } \mathbf{B})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B},$$

- la forma bilineare  $\langle\langle \mathbf{N}\sigma, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle$  è chiusa su  $\Sigma \times \mathcal{V}_o$  il che equivale alla *condizione inf-sup*:

$$a) \quad \inf_{\sigma \in \Sigma} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}_o} \frac{\langle\langle \mathbf{N}\sigma, \Gamma\mathbf{u} \rangle\rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\sigma\|_{\mathcal{S}/\Sigma_o}} > 0,$$

dove

$$\Sigma_o := \{\sigma \in \Sigma : \langle\langle \mathbf{N}\sigma, \Gamma\mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o\}.$$

Si vuole mostrare che la condizione *a*) è soddisfatta.

A tal fine si definiscano gli operatori

- $\Gamma_o \in L\{\mathcal{V}_o; \partial\mathcal{V}\}$  con  $\Gamma_o \mathbf{u} = \Gamma\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}_o$ ,
- $\Gamma'_o \in L\{\partial\mathcal{F}; \mathcal{F}_o\}$ , con  $\Gamma'_o \mathbf{t} = \Gamma'\mathbf{t} + \mathcal{V}_o^\perp \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$ ,
- $\mathbf{N}_o \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}/(\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp\}$  con  $\mathbf{N}_o \sigma = \mathbf{N}\sigma + (\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}$ ,
- $\mathbf{N}_\Sigma \in L\{\Sigma; \partial\mathcal{F}\}$  con  $\mathbf{N}_\Sigma \sigma = \mathbf{N}\sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma$ ,

con  $\mathcal{F}_o = \mathcal{F}/\mathcal{V}_o^\perp$  duale di  $\mathcal{V}_o$ . La condizione *a*) può allora essere espressa da

$$a) \quad \|\Gamma'_o \mathbf{N}\sigma\|_{\mathcal{F}_o} \geq c \|\sigma\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \Gamma'_o \mathbf{N}_\Sigma)}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Si noti poi che

$$\text{Ker } \Gamma'_o = (\text{Im } \Gamma_o)^\perp = (\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp = \mathbf{N}\mathcal{S}_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Ker } \Gamma'_o \mathbf{N}_\Sigma = (\mathcal{S}_o + \text{Ker } \mathbf{N}) \cap \Sigma = \Sigma_o,$$

Allora la diseguaglianza *a*) può essere scritta come

$$a) \quad \|\Gamma' \mathbf{N}\sigma\|_{\mathcal{F}_o} \geq c \|\sigma\|_{\mathcal{S}/\Sigma_o}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

La proprietà di chiusura di  $\text{Im } \Gamma'_o$ , stante la relazione  $\text{Ker } \Gamma'_o = (\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp$ , equivale alla diseguaglianza

$$b) \quad \|\Gamma'_o \mathbf{t}\|_{\mathcal{F}_o} \geq c_\Gamma \|\mathbf{t}\|_{\partial\mathcal{F}/(\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp}, \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}.$$

In forza della proposizione II.10.4 (p. 245) del Tomo I sussiste l'eguaglianza

$$\mathbf{N}\Sigma + (\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp = (\mathbf{T} \text{Ker } \mathbf{B}_L)^\perp,$$

e dunque il sottospazio lineare  $\mathbf{N}\Sigma + (\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp$  è chiuso in  $\partial\mathcal{F}$ . La proposizione I.11.9 (p. 88) di [16] assicura allora che il sottospazio lineare

$$\mathbf{N}_o \Sigma = [\mathbf{N}\Sigma + (\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp]/(\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp,$$

è chiuso in  $\partial\mathcal{F}/(\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp$ , Sussiste quindi la diseguaglianza

$$c) \quad \|\mathbf{N}\sigma\|_{\partial\mathcal{F}/(\Gamma\mathcal{V}_o)^\perp} \geq c_N \|\sigma\|_{\mathcal{S}/\Sigma_o}, \quad \forall \sigma \in \Sigma.$$

Pertanto, ponendo  $\mathbf{t} = \mathbf{N}\sigma$  nella *b*), dalle *b*) e *c*) si ottiene la *a*). ■

**Osservazione 4.4.** La discussione dell'*unicità* va condotta tenendo presente che

- Le rigidezze  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$  e  $\partial\mathbf{K} \in L\{\partial\mathcal{V}; \partial\mathcal{F}\}$  sono simmetriche e positive,

Si può quindi affermare che

- L'unicità della  $\mathbf{u}$ -soluzione in  $\mathcal{V}_o$  sussiste se e solo se

$$\mathbf{u} \in \mathcal{V}_o, \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o, \\ \gamma(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{o},$$

che, per l'egualianza  $\Gamma\mathcal{L} = [\mathbf{N}\Sigma]^\perp$ , equivale a  $\text{Ker } \mathbf{K}_o \cap \text{Ker } \partial\mathbf{K} \cap \mathcal{L} = 0$ .

- La  $\sigma_\rho$ -soluzione è definita a meno di campi conformi  $\sigma \in \Sigma$  tali che

$$\gamma(\sigma, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_o \iff \mathbf{N}\sigma \in \mathbf{N}\Sigma \cap \mathbf{N}\mathcal{S}_o.$$

E' peraltro evidente che nel problema  $\mathbb{FIP} II$  interviene solo il valore del flusso al contorno del campo  $\sigma_\rho \in \Sigma$ . ■

#### 4.2. Formulazioni ibride complementari

Formulazioni alternative del problema elastico, denominate *formulazioni ibride complementari*, sono basate sulla trattazione svolta nel Tomo I, sezione II.9.2 (p. 240) nella quale sono enunciate le formulazioni variazionali della congruenza nelle quali i campi di prova sono *sforzi non conformi*:

$$\begin{aligned} i) \quad & \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}_o \rangle = (\mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \\ ii) \quad & \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}_o \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_o, \end{aligned}$$

dove  $\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{H}$ ,  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$ ,  $\mathbf{u} \in H$ ,  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ .

##### ■ Formulazione ibrida complementare I

La prima formulazione ibrida complementare è relativa al caso in cui l'elasticità dei vincoli di massa è non singolare e cioè risulta  $\text{Ker } \mathbf{K}_o = \{\mathbf{o}\}$ . Siano quindi

- $\mathbf{D}_o = \mathbf{K}_o^{-1} \in L\{H; H\}$  la cedevolezza dei vincoli di massa,
  - $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  la cedevolezza della struttura,
  - $\partial\mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$  la cedevolezza dei vincoli di contatto,
- e si ponga

- $\mathbf{u} = \mathbf{D}_o(\mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma})$ ,
- $\boldsymbol{\delta} + \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}$  al posto di  $\boldsymbol{\delta}$ ,
- $\partial\mathbf{w} - \partial\mathbf{C}(\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma})$  al posto di  $\partial\mathbf{w}$ .

La condizione variazionale  $i)$  si scrive allora

$$\boxed{\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle = (\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}_o\mathbf{b}) + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle - \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta} \rangle \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}},$$

dove

$$\boxed{\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_o\boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}},$$

è l'energia complementare di deformazione elastica con

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = (\mathbf{C}_o J_S \boldsymbol{\sigma}, J_S \boldsymbol{\tau}) + \langle \partial\mathbf{C}(\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}), \mathbf{N}\boldsymbol{\tau} \rangle.$$

Imponendo l'equilibrio al contorno si perviene al *problema ibrido complementare I*

$$\boxed{\text{FIC } I) \quad \begin{cases} \mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle = \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau} \rangle & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \\ -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v} \rangle & = -\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases}}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$  e  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  ed il sistema cinematico  $\boldsymbol{\eta} \in \mathcal{D}$  è definito da

$$\langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau} \rangle := (\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}_o\mathbf{b}) + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial\mathbf{w} \rangle - \langle \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\delta} \rangle, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}.$$

- La prima delle FIC  $I)$  equivale alle condizioni di congruenza nella forma

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{D}_o(\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b}) &= \boldsymbol{\delta} - \mathbf{C}_o\boldsymbol{\sigma}, \\ \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{D}_o(\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b}) &= \partial\mathbf{w} - \partial\mathbf{C}(\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}) + \Gamma\mathbf{v}_o. \end{aligned}}$$

- La seconda delle FIC  $I)$  è la condizione di equilibrio al contorno

$$\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} + [\Gamma\mathcal{L}]^\perp.$$

La condizione differenziale di equilibrio è identicamente soddisfatta poiché la posizione  $\mathbf{u} = \mathbf{D}_o(\mathbf{b} - \mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma})$  equivale a  $\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b} - \mathbf{K}_o\mathbf{u}$ .

**Osservazione 4.5.** Si noti che lo spostamento  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  non fornisce la soluzione del problema elastico, che è data da  $\mathbf{u} = \mathbf{D}_o(\mathbf{b} - \mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma})$ . Il campo  $\Gamma\mathbf{v}_o$  gioca il ruolo di moltiplicatore di LAGRANGE per la condizione di conformità dello sforzo di prova. ■

Il problema elastico si può formulare come problema di punto di sella del *funzionale ibrido complementare I*

$$\boxed{\mathcal{P}^C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_o) = \frac{1}{2}\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle + \langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\delta} \rangle - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \partial\mathbf{w} \rangle - (\mathbf{B}'_o\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}_o\mathbf{b}) + \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle,}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ .

**Osservazione 4.6.** La formulazione ibrida complementare I è *ben posta* se

- la forma bilineare  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$  è ellittica su  $\text{Ker } \mathbf{B}_o' \subseteq \mathcal{S}$  e cioè se vale la diseguaglianza

$$\boxed{\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq c_{\mathbf{a}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \mathbf{C} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_o')}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S},}$$

- la forma bilineare  $\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{\Gamma}\mathbf{u} \rangle$  è chiusa su  $\mathcal{S} \times \mathcal{L}$  il che equivale alla *condizione inf-sup*:

$$\boxed{a) \quad \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{L}} \frac{\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{\Gamma}\mathbf{u} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/\Sigma}} > 0.}$$

Si vuole mostrare che la condizione *a* è soddisfatta.

A tal fine si definiscano gli operatori

- $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \partial\mathcal{V}\}$  con  $\mathbf{\Gamma}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}$ ,
- $\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}} \in L\{\partial\mathcal{F}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$ , con  $\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{t} = \mathbf{\Gamma}'\mathbf{t} + \mathcal{L}^\perp \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$
- $\mathbf{N}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}/(\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^\perp\}$  con  $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^\perp \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ ,

La condizione *a* può allora essere espressa da

$$a) \quad \|\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N})}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}.$$

Si noti poi che

$$\text{Ker } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}} = (\text{Im } \mathbf{\Gamma}_{\mathcal{L}})^\perp = (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^\perp = \mathbf{N}\Sigma \Rightarrow \text{Ker } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N} = \Sigma,$$

in quanto  $\text{Ker } \mathbf{N} \subset \Sigma$ . La diseguaglianza *a*) può essere scritta

$$a) \quad \|\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/\Sigma}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}.$$

La proprietà di chiusura di  $\text{Im } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}$ , stante la relazione  $\text{Ker } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}} = (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^\perp$  equivale alla diseguaglianza

$$b) \quad \|\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{t}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \geq c_{\mathbf{T}} \|\mathbf{t}\|_{\partial\mathcal{F}/(\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^\perp}, \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}.$$

Essendo  $\mathbf{N}\mathcal{S} = \partial\mathcal{F}$  (vedi Tomo I sezione II.10 (p. 243)) ne segue che sussiste la diseguaglianza

$$c) \quad \|\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\partial\mathcal{F}/(\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^\perp} \geq c_{\mathbf{N}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/\Sigma}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}.$$

Pertanto, ponendo  $\mathbf{t} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}$  nella *b*), dalle *b*) e *c*) si ottiene la *a*). ■

**Osservazione 4.7.** La discussione dell'*unicità* va condotta tenendo presente che

- Le cedevolezze  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  e  $\partial\mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$  sono simmetriche e positive,

Si può quindi affermare che

- L'unicità della  $\sigma$ -soluzione in  $\mathcal{S}$  sussiste se e solo se

$$\sigma \in \mathcal{S}, \quad \begin{cases} \mathbf{c}(\sigma, \tau) = 0 & \forall \tau \in \mathcal{S}, \\ \gamma(\sigma, \mathbf{v}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases} \Rightarrow \sigma = \mathbf{o},$$

che equivale a  $\text{Ker } \mathbf{C}_o \cap \text{Ker } \partial\mathbf{C} \cap \mathcal{S}_o = 0$ .

- La  $\mathbf{v}_o$ -soluzione è definita a meno di campi conformi  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  tali che

$$\gamma(\tau, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{S} \iff \mathbf{v} \in \text{Ker } \Gamma.$$

E' peraltro evidente che nel problema **FIC I** intervengono solo i valori al contorno del campo  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ . ■

#### ■ Formulazione ibrida complementare II

La seconda formulazione ibrida complementare è relativa al caso opposto in cui non esistono vincoli elastici di massa. Si ha dunque che  $\mathbf{K}_o = \mathbf{O}$ .

- Sia  $\sigma_b \in \mathcal{S}$  tale che  $\mathbf{B}'_o \sigma_b = \mathbf{b}$ .

Un tale campo  $\sigma_b \in \mathcal{S}$  esiste in quanto l'operatore  $\mathbf{B}'_o \in L\{\mathcal{S}; H\}$  è suriettivo. Sia inoltre  $\sigma \in \mathcal{S}_o$  e si ponga

- $\delta + \mathbf{C}_o(\sigma + \sigma_b)$  al posto di  $\delta$ ,
- $\partial\mathbf{w} - \partial\mathbf{C}[\mathbf{N}(\sigma + \sigma_b)]$  al posto di  $\partial\mathbf{w}$ ,

La condizione variazionale *ii)* si scrive allora

$$\text{FIC II) } \begin{cases} \mathbf{c}(\sigma, \tau) - \langle \mathbf{N}\tau, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle = \langle \Delta, \tau \rangle & \forall \tau \in \mathcal{S}_o, \\ -\langle \mathbf{N}\sigma, \Gamma\mathbf{v} \rangle & = \langle \mathbf{N}\sigma_b, \Gamma\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases}$$

dove  $\sigma \in \mathcal{S}_o = \text{Ker } \mathbf{B}'_o$ ,  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ .

Il sistema cinematico  $\Delta \in \mathcal{S}'_o$  è definito da

$$\langle \Delta, \tau \rangle := \langle \mathbf{N}\tau, \partial\mathbf{w} - \partial\mathbf{C}[\mathbf{N}\sigma_b] \rangle - \langle \delta + \mathbf{C}_o\sigma_b, \tau \rangle, \quad \forall \tau \in \mathcal{S}_o.$$

La prima equivale alle condizioni di congruenza nella forma

$$\exists \mathbf{u} \in \mathcal{V} : \begin{cases} \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{C}_o(\sigma_b + \sigma) + \delta, \\ \Gamma\mathbf{u} = \Gamma\mathbf{v}_o + \partial\mathbf{w} - \partial\mathbf{C}[\mathbf{N}(\sigma + \sigma_b)]. \end{cases}$$

La seconda equivale alla condizione di equilibrio al contorno

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_b) \in \mathbf{t} + [\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L}]^\perp.$$

La condizione di equilibrio di massa è identicamente soddisfatta per posizione.

Il problema elastico si può scrivere come punto di sella del funzionale ibrido complementare II

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{P}^C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_o) = & \frac{1}{2} \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}_o \rangle\rangle + \\ & - (\Delta, \boldsymbol{\sigma}) - \langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_b, \partial\mathbf{w} \rangle\rangle + \langle\langle \mathbf{t}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{v}_o \rangle\rangle, \end{aligned}}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o$ ,  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ .

**Osservazione 4.8.** La formulazione ibrida complementare II è *ben posta* se

- la forma bilineare  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$  è ellittica su  $\text{Ker } \mathbf{B}'_o = \mathcal{S}_o$  e cioè se vale la diseguaglianza

$$\boxed{\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq c_c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \mathbf{C} \cap \text{Ker } \mathbf{B}'_o)}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_o,}$$

- la forma bilineare  $\langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \rangle\rangle$  è chiusa su  $\mathcal{S}_o \times \mathcal{L}$  il che equivale alla *condizione inf-sup*:

$$\boxed{a) \quad \inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o} \sup_{\mathbf{u} \in \mathcal{L}} \frac{\langle\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \rangle\rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{V}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\mathcal{S}_o \cap \Sigma)}} > 0.}$$

Si vuole mostrare che la condizione *a* è soddisfatta.

A tal fine si definiscano gli operatori

- $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \partial\mathcal{V}\}$  con  $\boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}$ ,
- $\boldsymbol{\Gamma}'_{\mathcal{L}} \in L\{\partial\mathcal{F}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$ , con  $\boldsymbol{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{t} = \boldsymbol{\Gamma}'\mathbf{t} + \mathcal{L}^\perp \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}$
- $\mathbf{N}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{S}; \partial\mathcal{F}/(\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L})^\perp\}$  con  $\mathbf{N}_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} + (\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L})^\perp \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ ,
- $\mathbf{N}_o \in L\{\mathcal{S}_o; \partial\mathcal{F}\}$  con  $\mathbf{N}_o\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o$ ,

La condizione *a* può allora essere espressa da

$$a) \quad \|\boldsymbol{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\text{Ker } \boldsymbol{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N}_o)}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o.$$

Si noti poi che

$$\text{Ker } \boldsymbol{\Gamma}'_{\mathcal{L}} = (\text{Im } \boldsymbol{\Gamma}_{\mathcal{L}})^\perp = (\boldsymbol{\Gamma}\mathcal{L})^\perp = \mathbf{N}\Sigma \Rightarrow \text{Ker } \boldsymbol{\Gamma}'_{\mathcal{L}}\mathbf{N}_o = \mathcal{S}_o \cap \Sigma.$$

Allora la diseguaglianza *a)* può essere scritta come

$$a) \quad \|\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}} \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \geq c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\mathcal{S}_o \cap \Sigma)}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o.$$

La proprietà di chiusura di  $\text{Im } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}}$ , stante la relazione  $\text{Ker } \mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}} = (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp}$  equivale alla diseguaglianza

$$b) \quad \|\mathbf{\Gamma}'_{\mathcal{L}} \mathbf{t}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \geq c_{\mathbf{t}} \|\mathbf{t}\|_{\partial\mathcal{F}/(\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp}}, \quad \forall \mathbf{t} \in \partial\mathcal{F}.$$

In forza della proposizione II.10.4 (p. 245) del Tomo I sussiste l'eguaglianza

$$\mathbf{N}\mathcal{S}_o + (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp} = (\mathbf{\Gamma}\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp},$$

e dunque il sottospazio lineare  $\mathbf{N}\mathcal{S}_o + (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp}$  è chiuso in  $\partial\mathcal{F}$ .

La proposizione I.11.9 (p. 88) di [16] assicura allora che il sottospazio lineare

$$\mathbf{N}_{\mathcal{L}}\mathcal{S}_o = [\mathbf{N}\mathcal{S}_o + (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp}] / (\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp},$$

è chiuso in  $\partial\mathcal{F}/(\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp}$ . Sussiste quindi la diseguaglianza

$$c) \quad \|\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}\|_{\partial\mathcal{F}/(\mathbf{\Gamma}\mathcal{L})^{\perp}} \geq c_{\mathbf{N}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}/(\mathcal{S}_o \cap \Sigma)}, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o.$$

Pertanto, ponendo  $\mathbf{t} = \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}$  nella *b)*, dalle *b)* e *c)* si ottiene la *a)*. ■

**Osservazione 4.9.** La discussione dell'*unicità* va condotta tenendo presente che

- Le cedevolezze  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  e  $\partial\mathbf{C} \in L\{\partial\mathcal{F}; \partial\mathcal{V}\}$  sono simmetriche e positive,

Si può quindi affermare che

- L'*unicità* della  $\boldsymbol{\sigma}$ -soluzione in  $\mathcal{S}_o$  sussiste se e solo se

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o, \quad \begin{cases} \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = 0 & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_o, \\ \gamma(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = 0 & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o},$$

che, per l'eguaglianza  $\mathbf{N}\Sigma = [\mathbf{\Gamma}\mathcal{L}]^{\perp}$ , equivale a  $\text{Ker } \mathbf{C}_o \cap \text{Ker } \partial\mathbf{C} \cap \Sigma = 0$ .

- La  $\mathbf{v}_o$ -soluzione è definita a meno di campi conformi  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  tali che

$$\gamma(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_o \iff \mathbf{v} \in \mathbf{\Gamma}\mathcal{L} \cap \mathbf{\Gamma}(\text{Ker } \mathbf{B}).$$

E' peraltro evidente che nel problema **FIC II** intervengono solo i valori al contorno del campo  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ . ■

## 5. SYNOPSIS

Si fornisce qui un quadro riassuntivo delle formulazioni primale e complementare e dei relativi principi variazionali.

■ *formulazione mista primale* del problema elastico

$$\boxed{\mathbb{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in \mathcal{L} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \langle \delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}. \end{cases}}$$

- $\ell_{\text{eq}} = \ell - \mathbf{Kw}$  forza attiva equivalente,
- $\delta_{\text{eq}} = \boldsymbol{\delta} - \mathbf{Bw}$  distorsione equivalente,
- $\Gamma\mathbf{w} = \partial\mathbf{w}$ , essendo  $\partial\mathbf{w} \in \partial\mathcal{V}$  il cedimento imposto al contorno.

■ *funzionale misto primale* (o funzionale di HELLINGER-REISSNER)

$$\boxed{\mathcal{R}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \frac{1}{2} \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{u} \rangle - \langle \delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle}$$

■ *funzionale energia potenziale*

$$\boxed{F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}}.$$

dove  $\mathcal{L}_{\mathbf{C}} := \{ \mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{B}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o \} = \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  e

$$\boxed{\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L},}$$

$$\boxed{\langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle := \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o(\boldsymbol{\delta} - \mathbf{Bw}), \mathbf{B}\mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}_{\mathbf{C}}.}$$

la formulazione mista *complementare* del problema elastico si scrive

$$\boxed{\mathbb{M}^C) \quad \begin{cases} -\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}_o(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) = \langle \Delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle, & \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \\ +\mathbf{b}_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) + \mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u} \in H \quad \forall \mathbf{v} \in H, \end{cases}}$$

- $\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{t}$ , essendo  $\mathbf{t}$  la forza di contatto agente sul contorno.
- $\mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t$  forza di massa equivalente,
- $\Delta_{\text{eq}} = \Delta + \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_t$  distorsione attiva equivalente.

■ *funzionale misto complementare*

$$\boxed{\mathcal{R}^C(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2}\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2}\mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{b}_o(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{u} \rangle - (\Delta_{\text{eq}}, \boldsymbol{\sigma})}$$

■ *funzionale energia complementare*

$$\boxed{F^C(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - (\Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\sigma}), \quad \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma_{\mathbf{K}},}$$

dove  $\text{Ker } \mathbf{K}_o = \{\mathbf{o}\}$ ,  $\Sigma_{\mathbf{K}} := \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma : \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{K}_o\} = \text{Ker } \mathbf{Q} \mathbf{B}'_{\Sigma}$  e

$$\boxed{\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := -\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - (\mathbf{D}_o \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}), \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,}$$

$$\boxed{(\Delta_{\text{eff}}, \boldsymbol{\tau}) := (\Delta, \boldsymbol{\tau}) + \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}_t, \boldsymbol{\tau}) - (\mathbf{D}_o(\mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t), \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}), \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma_{\mathbf{K}}.}$$

■ *formulazione ibrida primale I (FIP I)*

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_{\rho}, \mathbf{G}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, & \mathbf{u}^* \in \mathcal{V}_{\mathbf{C}}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbf{C}}, \\ -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{G}\mathbf{u}^* \rangle = -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} \rangle, & \boldsymbol{\sigma}_{\rho} \in \Sigma, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases}}$$

dove

$$\mathcal{V}_{\mathbf{C}} := \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{B}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o\} = \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}.$$

■ *formulazione ibrida primale II (FIP II)*

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_{\rho}, \mathbf{G}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbf{o}}, \\ -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \mathbf{G}\mathbf{u} \rangle = -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \partial \mathbf{w} - \mathbf{G}\mathbf{u}_{\delta} \rangle, & \forall \boldsymbol{\tau} \in \Sigma, \end{cases}}$$

dove  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}_{\mathbf{o}} = \text{Ker } \mathbf{B}, \boldsymbol{\sigma}_{\rho} \in \Sigma$  e

$$\boxed{\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle := \langle \mathbf{t} - \partial \mathbf{K}[\mathbf{G}\mathbf{u}_{\delta}], \mathbf{G}\mathbf{v} \rangle + (\mathbf{b} - \mathbf{K}_o \mathbf{u}_{\delta}, \mathbf{v}).}$$

$$\boxed{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\mathbf{K}_o J_{\mathcal{V}} \mathbf{u}, J_{\mathcal{V}} \mathbf{v}) + \langle \partial \mathbf{K}(\mathbf{G}\mathbf{u}), \mathbf{G}\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.}$$

■ *funzionale ibrido primale*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}_\rho) = & \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\rho, \Gamma\mathbf{u} \rangle + \\ & - (\mathbf{b}, \mathbf{u}) - \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}, \mathbf{B}\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\rho, \partial\mathbf{w} \rangle, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_\rho \in \Sigma$  e

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{B}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}_C.$$

■ *formulazione ibrida complementare I* ( $\mathbb{FIC} I$ )

$$\mathbb{FIC} I) \quad \begin{cases} \mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle = \langle \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\tau} \rangle & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}, \\ -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v} \rangle & = -\langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$  e  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$  e

$$\mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\tau}) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \Sigma,$$

■ *funzionale ibrido complementare I*

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^C(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}_o) = & \frac{1}{2} \mathbf{a}^C(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle + \\ & - (\boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\sigma}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \partial\mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{D}_o \mathbf{b}, \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \rangle + \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle, \end{aligned}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}$ ,  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ ,

■ *formulazione ibrida complementare II* ( $\mathbb{FIC} II$ )

$$\begin{cases} \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) - \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\tau}, \Gamma\mathbf{v}_o \rangle = \langle \Delta, \boldsymbol{\tau} \rangle & \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}_o, \\ -\langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}, \Gamma\mathbf{v} \rangle & = \langle \mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_b, \Gamma\mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{t}, \Gamma\mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases}$$

dove  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}_o = \text{Ker } \mathbf{B}'_o$ ,  $\mathbf{v}_o \in \mathcal{L}$ .

## 6. COMPLEMENTI

Questa sezione è dedicata alla dimostrazione dei risultati di esistenza della soluzioni del problema elastico misto.

La trattazione è svolta esplicitamente con riferimento al problema misto primale ma i risultati sono enunciati anche per il problema misto complementare mostrando che le regole di complementarietà consentono di tradurre ogni risultato primale in un corrispondente complementare.

### 6.1. Teorema primale

Il prossimo teorema, che è dovuto all'autore [14], rivela quali siano le proprietà da richiedere agli operatori che governano il problema elastico affinché le condizioni variazionali di *ammissibilità elastostatica* e di *ammissibilità elastocinematica*, da imporre rispettivamente ai carichi ed alle distorsioni impresse, siano sufficienti ad assicurare l'esistenza di almeno una soluzione del problema elastico.

**Proposizione 6.1. Teorema Primale.** *Si assuma che l'operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  sia un operatore di KORN, che l'operatore di cedevolezza elastica della struttura  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  e l'operatore di rigidità elastica dei vincoli  $\mathbf{K}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  siano simmetrici e positivi e che l'immagine  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  sia chiusa in  $\mathcal{H}$ . Allora il problema misto*

$$\text{M)} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}'\boldsymbol{\sigma} = \ell - \mathbf{Kw}, \\ \mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} - \mathbf{C}_o\boldsymbol{\sigma} = \delta - \mathbf{Bw}, \end{cases}$$

soddisfa la proprietà di buona posizione

$$\text{Im } \boldsymbol{\Lambda} = \left| \begin{array}{c} \text{Im } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \\ \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} (\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^\perp \\ (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^\oplus \end{array} \right| = (\text{Ker } \boldsymbol{\Lambda})^\perp,$$

se e solo se

$$\begin{cases} \text{Im } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} = (\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}})^\perp, \\ \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o \text{ è chiuso in } \mathcal{H}, \end{cases}$$

dove

- $\mathbf{P} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  è il proiettore ortogonale su  $\text{Ker } \mathbf{C}_o \subseteq \mathcal{H}$ , così che risulta  $\text{Im } \mathbf{P} = \text{Ker } \mathbf{C}_o$ ,  $\text{Ker } \mathbf{P} = \text{Im } \mathbf{C}_o$ ,
- $\mathcal{L}_C := \text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  è il sottospazio degli spostamenti conformi elasticamente ammissibili, cioè quelli che danno luogo a deformazioni elasticamente ammissibili,

- $\mathbf{C}^* \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  è la cedevolezza elastica efficace, definita da  $\mathbf{C}^* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}$  per  $\boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{C}_o$  sottospazio lineare degli sforzi elasticamente efficaci,
- $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  è l'operatore di rigidezza elastica,
- $\mathbf{A} := \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}_C; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$  è l'operatore di risposta elastica della struttura a spostamenti conformi elasticamente ammissibili,
- $\Phi \in L\{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}/\mathcal{L}_C^\perp\}$ , è la suriezione canonica che ad ogni forza attiva  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  associa la corrispondente forza attiva elastica efficace e cioè la classe di equivalenza  $\mathbf{f} + \mathcal{L}_C^\perp$ ,
- $\mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} := \Phi \mathbf{A} \in L\{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}/\mathcal{L}_C^\perp\}$  descrive la risposta elastica attiva della struttura a spostamenti conformi elasticamente ammissibili,  $\square$

### 6.1.1. Dimostrazione del teorema primale

Si vuole ora fornire una condizione necessaria e sufficiente per la buona posizione del problema misto  $\mathbb{M}$ .

Pianificando la strategia, cerchiamo inizialmente di trasformare il problema misto  $\mathbb{M}$  in un problema enunciato in termini dei soli parametri cinematici.

A questo scopo occorre modificare la condizione  $\mathbb{M}_2$  di compatibilità cinematica invertendo la legge elastica per ottenere una espressione del campo tensionale  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  in termini della deformazione associata con il campo cinematico ammissibile  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_a$ .

Poiché l'operatore di cedevolezza elastica materiale  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  è singolare, occorre considerare la sua parte non singolare.

Data la simmetria di  $\mathbf{C}_o$  e la chiusura del sottospazio lineare  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  in  $\mathcal{H}$ , il sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{C}_o$  delle tensioni elasticamente inefficaci ed il sottospazio lineare  $\text{Im } \mathbf{C}_o^\perp$  delle deformazioni elastiche verificano le condizioni di ortogonalità

$$\text{Ker } \mathbf{C}_o = (\text{Im } \mathbf{C}_o)^\perp \quad \text{and} \quad \text{Im } \mathbf{C}_o = (\text{Ker } \mathbf{C}_o)^\perp,$$

dove l'apice  $\perp$  denota l'ortogonale Hilbertiano in  $\mathcal{H}$ . Noi possiamo effettuare la decomposizione di somma diretta dello spazio delle tensioni-deformazioni  $\mathcal{H}$  in due complementi ortogonali

$$\mathcal{H} = \text{Im } \mathbf{C}_o \dot{+} \text{Ker } \mathbf{C}_o,$$

e definire l'operatore simmetrico  $\mathbf{P} \in L(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  che è il proiettore ortogonale in  $\mathcal{H}$  sul sottospazio lineare chiuso  $\text{Ker } \mathbf{C}_o$  delle tensioni inefficaci elasticamente e il proiettore complementare  $\mathbf{P}^C \in L(\mathcal{H}; \mathcal{H})$  definito da  $\mathbf{P}^C = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ . Si ha allora che

$$\text{Im } \mathbf{P} = \text{Ker } \mathbf{P}^C = \text{Ker } \mathbf{C}_o \quad \text{Ker } \mathbf{P} = \text{Im } \mathbf{P}^C = \text{Im } \mathbf{C}_o.$$

L'operatore di cedevolezza efficace  $\mathbf{C}^* \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{ Im } \mathbf{C}_o\}$  tale che

$$\mathbf{C}^* \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{C}_o \subseteq \mathcal{H},$$

è definito positivo e l'operatore  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\}$  può essere partizionato come segue

$$\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^* & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\sigma}^* \\ \boldsymbol{\sigma}_o \end{vmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^* \in \text{Im } \mathbf{C}_o, \\ \boldsymbol{\sigma}_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o. \end{cases}$$

Si noti che il nucleo dell'operatore prodotto  $\mathbf{PB}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \text{Ker } \mathbf{C}_o\}$  è definito da

$$\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} \mid \mathbf{B}\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{C}_o\},$$

ed i suoi elementi sono i campi cinematici conformi che generano campi di deformazione elastici.

**Osservazione 6.1.** La condizione  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o = (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^{\oplus}$  è necessaria per la buona posizione del problema misto.

In virtù della proposizione I.11.7 (p. 87) in [16], questa condizione è equivalente alla chiusura di  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o = \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{P}$  in  $\mathcal{H}$ , e per la proposizione I.11.8 (p. 88) in [16], alla chiusura della somma  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' + \text{Ker } \mathbf{C}_o$  poiché  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  e  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  sono chiusi in  $\mathcal{H}$ .

Inoltre, per la proposizione I.11.10 (p. 90) in [16], questa assunzione è anche equivalente alla chiusura di  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{P}$  in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e quindi, per il teorema della immagine chiusa, alla chiusura di  $\text{Im } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$ . ■

Si consideri il problema misto

$$\mathbb{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \mathbf{u} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\ell}_{\text{eq}} \\ \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u} - \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} \end{cases}$$

e si assuma che  $\text{Im } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  sia chiuso in  $\mathcal{H}$ .

Allora per ogni  $\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^{\oplus} = \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o$  è possibile effettuare la decomposizione

$$\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} = \bar{\boldsymbol{\delta}} + \boldsymbol{\delta}^* \quad \text{con} \quad \bar{\boldsymbol{\delta}} \in \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\delta}^* \in \text{Im } \mathbf{C}_o.$$

Scegliendo  $\bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{L}$  tale che  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \bar{\mathbf{u}} = \bar{\boldsymbol{\delta}}$  si ponga  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*$ .

L'equazione di compatibilità  $\mathbb{M}_2$  può quindi essere riscritta come

$$\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}^* = \mathbf{C}^* \boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\delta}^* \in \text{Im } \mathbf{C}_o,$$

la quale richiede che  $\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ . Denotando con  $\mathbf{E}_o \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  l'inverso di  $\mathbf{C}^* \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  si può anche scrivere

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^* = \mathbf{E}_o(\mathbf{B}\mathbf{u}^* - \boldsymbol{\delta}^*).}$$

Sostituendo nella equazione di equilibrio  $\mathbb{M}_1$  si perviene al seguente problema nei campi incogniti  $\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o$

$$\mathbb{P}) \quad (\mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}) \mathbf{u}^* + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \boldsymbol{\sigma}_o = \ell_{\text{eq}} - \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*.$$

Si considerino ora la forma bilineare della energia elastica

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}^*, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

ed il carico efficace

$$\begin{aligned} \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B} \mathbf{v}) = \\ &= \langle \ell, \mathbf{v} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{B} \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

L'operatore di rigidezza  $\mathbf{A} = \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  è definito dall'identità

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{u}^*, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

La discussione precedente è riassunta nella seguente proposizione

**Proposizione 6.2. Prima proprietà di equivalenza.** *La chiusura di  $\text{Im } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  in  $\mathcal{H}$  assicura che per ogni assegnato  $\boldsymbol{\delta} \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^{\oplus}$  il problema misto*

$$\mathbb{M}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\sigma}) &= \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \\ \mathbf{b}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\tau}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau} \rangle \quad \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}, \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}, \end{cases}$$

nei campi incogniti  $\mathbf{u} \in \mathcal{L}_{\mathbf{a}}$  e  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  è equivalente al problema variazionale

$$\mathbb{P}) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\sigma}_o, \mathbf{B} \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}$$

nei campi incogniti  $\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{P}\mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o$  ammesso che la coppia  $\{\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\delta}^*\} \in \mathcal{L} \times \text{Im } \mathbf{C}_o$  che appare nella definizione di  $\ell_{\text{eff}}$ , è tale che  $\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}} = \mathbf{B} \bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\delta}^*$ .  $\square$

La discussione del problema  $\mathbb{P}$  si conduce trasformandolo in un problema posto in termini di un solo campo incognito. Ciò si consegna imponendo che i campi di prova  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  debbano variare nel sottospazio  $\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathcal{L}$  degli spostamenti conformi cui corrispondono deformazioni elasticamente ammissibili.

**Proposizione 6.3. Seconda proprietà di equivalenza.** *La chiusura di  $\text{Im } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  in  $\mathcal{H}$  assicura che il problema variazionale*

$$\mathbb{P}) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \mathbf{Bv} \rangle = \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

*nei campi incogniti  $\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o$  è equivalente al problema ridotto*

$$\mathbb{P}^*) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*) = \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v}^* \rangle \quad \forall \mathbf{v}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}},$$

*nel campo incognito  $\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$ .*

**Dim.** Chiaramente se  $\{\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}_o\} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} \times \text{Ker } \mathbf{C}_o$  è una soluzione del problema  $\mathbb{P}$  allora  $\mathbf{u}^*$  sarà soluzione del problema  $\mathbb{P}^*$ . In realtà si ha che  $\langle \boldsymbol{\sigma}_o, \mathbf{Bv}^* \rangle = 0$  per ogni  $\mathbf{v}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  poiché  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \text{Ker } \mathbf{C}_o$  e  $\mathbf{Bv}^* \in \text{Ker } \mathbf{P} = \text{Im } \mathbf{C}_o = (\text{Ker } \mathbf{C}_o)^\perp$ .

Viceversa se  $\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  è soluzione del problema  $\mathbb{P}^*$  la forza attiva  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , definita da

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle := \mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) - \langle \ell_{\text{eff}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

appartiene a  $(\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^\perp$ . L'ipotesi che  $\text{Im } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  sia chiuso in  $\mathcal{H}$  assicura che

$$\text{Im } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{P} = (\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^\perp.$$

Dunque per ogni  $\mathbf{r} \in (\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^\perp$  si può trovare un  $\boldsymbol{\sigma}_o \in \text{Im } \mathbf{P} = \text{Ker } \mathbf{C}_o$  tale che  $\mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \boldsymbol{\sigma}_o = \mathbf{r}$ . Allora  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_o, \mathbf{Bv} \rangle$  per ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$ , e la coppia  $\{\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\sigma}_o\}$  è soluzione del problema  $\mathbb{P}$ . Il campo  $\boldsymbol{\sigma}_o$  è unico a meno di elementi del sottospazio  $\text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o$  delle autotensioni elasticamente inefficaci.  $\square$

**Osservazione 6.2.** E' utile osservare che l'espressione del carico efficace  $\ell_{\text{eff}}$  dipende dalla coppia  $\{\bar{\mathbf{u}}, \delta^*\} \in \mathcal{L} \times \text{Im } \mathbf{C}_o$  e che il campo  $\bar{\mathbf{u}}$  è determinato da  $\bar{\delta}$  solo a meno di un addizionale campo rigido conforme. Inoltre la decomposizione additiva delle distorsioni ammissibili  $\delta_{\text{eq}} \in (\text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^\perp = \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o$  nella somma  $\bar{\delta} + \delta^*$  è unica a meno di elementi di  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Im } \mathbf{C}_o$ .

Si può facilmente mostrare che la soluzione  $\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\}$  del problema misto  $\mathbb{M}$ , ottenuta mediante le somme  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^*$  e  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_o + \boldsymbol{\sigma}^*$ , rimane univocamente individuata nonostante l'indeterminazione di  $\ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .  $\blacksquare$

Si discute ora la buona posizione del problema ridotto  $\mathbb{P}^*$ .

### 6.1.2. Il modello strutturale ridotto

Il problema  $\mathbb{P}^*$  è la formulazione variazionale del problema elastostatico per un modello strutturale soggetto a vincoli bilaterali rigidi definiti dal sottospazio  $\text{Ker } \mathbf{PB} \subseteq \mathcal{L}$  dei campi cinematici conformi.

Si osservi preliminarmente che, per proposizione I.9.5 (p. 65) di [16], la continuità di  $\mathbf{C}_o$  e la chiusura di  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  in  $\mathcal{H}$  implicano la continuità della rigidezza elastica  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$ .

La continuità di  $\mathbf{E}_o \in L\{\text{Ker } \mathbf{P}; \text{Ker } \mathbf{P}\}$  implica poi la continuità dell'operatore  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} = \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \mathbf{B}_{\mathcal{L}}^T \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  così che  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}} \in L\{\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\}$ .

La forma bilineare  $\mathbf{a}$  è allora continua su  $\text{Ker } \mathbf{PB} \times \mathcal{L}$  e quindi *a fortiori* su  $\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} \times \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$ .

Dunque la suriezione canonica  $\mathbf{\Pi} \in L\{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}/(\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^{\perp}\}$  può essere usata per definire

- la rigidezza elastica ridotta  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} := \mathbf{\Pi} \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \in L\{\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}; \frac{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}}{(\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^{\perp}}\}$ ,
- il carico efficace ridotto  $\ell_o := \mathbf{\Pi} \ell_{\text{eff}} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}/(\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^{\perp}$ ,

attraverso le relazioni

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \mathbf{u}^* &:= \mathbf{A}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}^* + (\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^{\perp} \quad \forall \mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}, \\ \ell_o &:= \ell_{\text{eff}} + (\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^{\perp}. \end{aligned}$$

Il seguente risultato è una diretta conseguenza del teorema della immagine chiusa.

**Proposizione 6.4. Buona posizione del problema ridotto.** *Il problema lineare simmetrico*

$$\mathbb{P}^*) \quad \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} \mathbf{u}^* = \ell_o, \quad \mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}.$$

è ben posto se e solo se  $\text{Im } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$  è chiuso in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}/(\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}})^{\perp}$ . Questa proprietà di chiusura è equivalente alla chiusura della forma simmetrica  $\mathbf{a}$  su  $\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} \times \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  ed è espressa dalla condizione di inf-sup

$$\inf_{\mathbf{u}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}} \sup_{\mathbf{v}^* \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}^*)}{\|\mathbf{u}^*\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}} \|\mathbf{v}^*\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}}} > 0.$$

L'esistenza di una soluzione è quindi garantita se e solo se  $\ell_o \in (\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}})^{\perp}$  e la soluzione è unica a meno di elementi di  $\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$ .  $\square$

La positività della cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_o$  in  $\mathcal{H}$  e la chiusura di  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  in  $\mathcal{H}$  implicano che la rigidezza elastica  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  sia definita positiva. In effetti essendo  $\mathcal{H} = \text{Im } \mathbf{C}_o \dot{+} \text{Ker } \mathbf{C}_o$  abbiamo che per ogni  $\varepsilon \in \text{Im } \mathbf{C}_o$  esiste un unico  $\boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \in \text{Im } \mathbf{C}_o$  tale che  $\varepsilon = \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon$ . Quindi

$$\langle\langle \mathbf{E}_o \varepsilon, \varepsilon \rangle\rangle = \langle\langle \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon, \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_\varepsilon \rangle\rangle \geq 0.$$

Se  $\langle\langle \mathbf{E}_o \varepsilon, \varepsilon \rangle\rangle = 0$  il punto  $\varepsilon$  è un minimo assoluto in corrispondenza del quale la derivata deve annullarsi, così che  $\langle\langle \mathbf{E}_o \varepsilon, \eta \rangle\rangle = 0 \quad \forall \eta \in \text{Im } \mathbf{C}_o$ .

Ne segue che  $\mathbf{E}_o \varepsilon \in \text{Im } \mathbf{C}_o \cap (\text{Im } \mathbf{C}_o)^\perp$  e quindi che  $\mathbf{E}_o \varepsilon = \mathbf{o}$ . L'iniettività di  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o, \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  implica allora che  $\varepsilon = \mathbf{o}$ .

Su questa base il risultato seguente fornisce una importante formula per  $\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$ .

**Proposizione 6.5. Nucleo della rigidezza ridotta.** *Siano le forme  $\mathbf{c}_o$  e  $\mathbf{k}$  simmetriche e definite positive rispettivamente su  $\mathcal{H}$  ed  $\mathcal{L}$ :*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) &= \mathbf{c}(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\sigma}), & \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) &\geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}, \\ \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mathbf{k}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), & \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &\geq 0 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L}. \end{aligned}$$

Il nucleo dell'operatore rigidezza ridotta  $\mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$  è allora dato da

$$\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}.$$

**Dim.** Per definizione gli elementi di  $\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$  sono i campi cinematici  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  che soddisfano la condizione variazionale

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle\langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \rangle\rangle = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}.$$

Ponendo  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  otteniamo

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \langle\langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u} \rangle\rangle = 0.$$

Entrambi i termini, essendo non negativi devono annullarsi. Quindi per la definizione positiva di  $\mathbf{E}_o$  su  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  si ha che  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ .

Per la positività di  $\mathbf{k}$  in  $\mathcal{L}$  e la condizione  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$  se ne deduce che il campo  $\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  è un punto di minimo assoluto di  $\mathbf{k}$  in  $\mathcal{L}$ . Valutando la derivata direzionale lungo una direzione arbitraria  $\mathbf{v} \in \mathcal{L}$  per la simmetria di  $\mathbf{k}$  si ha

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \iff \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \mathbf{u} = \mathbf{o} \iff \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}},$$

ed il risultato è dimostrato. □

La formula di rappresentazione di  $\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}}$  fornita nella proposizione precedente consente di scrivere la condizione di ammissibilità dei dati del problema  $\mathbb{P}^*$  nella forma

$$\ell_o \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})^\perp.$$

Ora per ogni coppia  $\{\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\delta}^*\} \in \mathcal{L} \times \text{Im } \mathbf{C}$  si ha

$$\langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\delta}^*, \mathbf{Bv} \rangle - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}.$$

La condizione di ammissibilità su  $\ell_o$  è allora equivalente alla condizione di equilibrio elastico per il carico applicato  $\ell$ :

$$\ell \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})^\perp.$$

D'altra parte, quando la coppia  $\{\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\delta}^*\}$  varia in  $\mathcal{L} \times \text{Im } \mathbf{C}_o$ , la distorsione corrispondente  $\boldsymbol{\delta} - \mathbf{Bw} = \mathbf{B}\bar{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\delta}^*$  varierà sull'intero sottospazio  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o$  e questo sottospazio, per la chiusura di  $\text{Im } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$ , coincide con  $(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^\oplus$ .

In conclusione le condizioni di ammissibilità

$$\ell \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})^\perp, \quad \{\bar{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\delta}^*\} \in \mathcal{L} \times \text{Im } \mathbf{C}_o,$$

per i dati del problema  $\mathbb{P}^*$  coincidono con le condizioni di ammissibilità

$$\ell \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})^\perp, \quad \boldsymbol{\delta} - \mathbf{Bw} \in (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \cap \text{Ker } \mathbf{C}_o)^\oplus,$$

per i corrispondenti dati del problema misto  $\mathbb{M}$ .

- La condizione di chiusura  $\text{Im } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}} = (\text{Ker } \mathbf{A}_{\mathcal{L}\mathcal{L}})^\perp$  equivale per definizione alla chiusura della forma bilineare simmetrica

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \rangle,$$

sul sottospazio  $\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} \times \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  e può risciversi come *condizione inf-sup*:

$$\inf_{\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}} \sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})} \|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}})}} > 0.$$

## 6.2. Condizioni sufficienti per la buona posizione

Si vuole ora determinare un insieme di condizioni sufficienti ad assicurare che il problema misto sia ben posto. A tal fine si premettono i seguenti risultati.

**Lemma 6.6. Diseguaglianza del letto elastico.** *Le ipotesi*

- i)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}},$
- ii)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}},$
- iii)  $(\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}) \geq c_o \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}},$

assicurano la validità della diseguaglianza

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}) \geq c_{\pi} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$$

dove  $c_{\pi} > 0$  e  $\mathbf{\Pi}$  denota il proiettore ortogonale su  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  in  $\mathcal{L}$ .

**Dim.** Si procede per assurdo assumendo che la diseguaglianza sia falsa.

Allora, imponendo che  $\|\mathbf{\Pi} \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})} = 1$ , l'estremo inferiore del primo membro sarebbe zero.

Considerando una successione minimizzante  $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{L}$  con

$$\|\mathbf{\Pi} \mathbf{u}_n\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})} = 1,$$

si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{k}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}_n, \mathbf{B} \mathbf{u}_n) = 0.$$

Per i) entrambi i termini della somma sono non negativi e quindi si annullano al limite. Quindi, dalla iii) si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{E}_o \mathbf{B} \mathbf{u}_n, \mathbf{B} \mathbf{u}_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{\Pi} \mathbf{u}_n\|_{\mathcal{L}} = 0,$$

e per la continuità di  $\mathbf{k}$  e l'ipotesi ii)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{k}(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{k}(\mathbf{\Pi} \mathbf{u}_n, \mathbf{\Pi} \mathbf{u}_n) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathbf{\Pi} \mathbf{u}_n\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})} = 0, \end{aligned}$$

contrariamente all'assunto che  $\|\mathbf{\Pi} \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})} = 1$ .  $\square$

Il seguente lemma 6.7 è dimostrato in [16], I.11.4 (p. 84), mediante un'opportuna modifica di un risultato riportato in [10], corollario II.9.

**Lemma 6.7. Una diseguaglianza di proiezione.** *La chiusura di  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  in  $\mathcal{L}$  è equivalente alla diseguaglianza*

$$\|\mathbf{\Pi} \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}}}^2 + \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}^2 \geq \gamma \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}$$

dove  $\mathbf{\Pi}$  denota il proiettore ortogonale su  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  in  $\mathcal{L}$ .  $\square$

Ci occorre anche il seguente semplice risultato.

**Proposizione 6.8. Ellitticità dell'operatore inverso.** *Sia la forma bilineare continua  $\mathbf{c}$  semi-ellittica su  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ :*

$$\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}; \quad \alpha > 0.$$

Allora  $\text{Im } \mathbf{C}_o$  è chiuso in  $\mathcal{H}$  e l'operatore  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  è semi-ellittico:

$$\langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \geq c_{\mathbf{E}_o} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \text{Im } \mathbf{C}_o,$$

con  $c_{\mathbf{E}_o} = \alpha \|\mathbf{C}_o\|^{-2}$ .

**Dim.** La chiusura di  $\text{Im } \mathbf{C}_o$ , che è equivalente alla diseguaglianza

$$\inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}} \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{H}} \frac{\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}} > 0,$$

è derivata dalla proprietà di semi-ellitticità di  $\mathbf{c}$  poiché

$$\inf_{\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}} \frac{\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})}{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2} \geq \alpha > 0.$$

Si osservi ora che, per la semi-ellitticità e la continuità di  $\mathbf{C}_o$ , l'operatore  $\mathbf{C}^* \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$  è continuo ed ellittico così che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{C}_o\| \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} &\geq \|\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{C}_o, \\ \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} \rangle &\geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{C}_o; \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Poiché  $\mathbf{E}_o = \mathbf{C}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{C}_o; \text{Im } \mathbf{C}_o\}$ , ponendo  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_o \boldsymbol{\varepsilon}$  e  $\mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}$ , si ha

$$\langle \mathbf{E}_o \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \geq \alpha \|\mathbf{C}_o\|^{-2} \|\boldsymbol{\varepsilon}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \in \text{Im } \mathbf{C}_o.$$

ed il risultato è dimostrato. □

Si può ora stabilire il risultato principale.

**Proposizione 6.9. Condizioni sufficienti per l'ellitticità.** *La forma bilineare*

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \langle \mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}},$$

è ellittica su  $\text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ , cioè verifica la diseguaglianza

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{a}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}},$$

se sono verificate le proprietà

- i)  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiuso in  $\mathcal{H}$ ,
- ii)  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiuso in  $\mathcal{L}$ ,
- iii)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$
- iv)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}, \quad c_{\mathbf{k}} > 0$
- v)  $\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}; \quad \alpha > 0$

dove  $\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{L} : \mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{P} = \text{Im } \mathbf{C}_o\}$ .

**Dim.** La proprietà i) è equivalente alla diseguaglianza

$$\|\mathbf{B}_{\mathcal{L}}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}} \geq c_b \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

Quindi la proprietà v) e la proposizione 6.8 forniscono la diseguaglianza

$$(\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{E}_o} \|\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}\|_{\mathcal{H}}^2 \geq c_o \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}},$$

con  $c_o = c_{\mathbf{E}_o} c_b^2$ . Per la proposizione 6.6 questa diseguaglianza e le proprietà iii) e iv) forniscono

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}) \geq c_{\pi} \|\Pi \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}},$$

con  $c_{\pi} > 0$ . Sommando le ultime due diseguaglianze si ha che  $\forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2(\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}) \geq c_{\pi} \|\Pi \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 + c_o \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}}^2.$$

Infine per la proprietà ii) e la proposizione 6.7 si ha

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}) \geq c_a \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}},$$

con  $c_a = \gamma \min\{c_{\pi}, c_{\mathbf{E}_o} c_b^2\}$ . La ellitticità della forma bilineare  $a$  su  $\text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$  è quindi provata.  $\square$

**Proposizione 6.10. Criterio di buona posizione.** Il problema misto primale  $\mathbb{M}$  è ben posto se sono soddisfatte le proprietà

- i)  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiuso in  $\mathcal{H}$ ,
- ii)  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiuso in  $\mathcal{L}$ ,
- iii)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{PB}_{\mathcal{L}}$
- iv)  $\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}, \quad c_{\mathbf{k}} > 0$
- v)  $\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{C}_o}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \quad \alpha > 0$
- vi) 
$$\begin{cases} \text{Im } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \mathbf{P} \text{ chiuso in } \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \iff \\ \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} + \text{Im } \mathbf{C}_o \text{ chiuso in } \mathcal{H} \iff \\ \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{C}_o \text{ chiuso in } \mathcal{H}. \end{cases}$$

**Dim.** In forza della proposizione 6.9 le proprietà *i) – v)* assicurano l’ellitticità della forma

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{E}_o \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{u}, \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \mathbf{v}),$$

su  $\text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  e quindi *a fortiori* la sua chiusura su  $\text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ . La proprietà di ellitticità *v)* implica che la forma bilineare simmetrica  $\mathbf{c}_o$  è chiusa su  $\mathcal{H}$ . Dunque le condizioni di buona posizione della proposizione 6.1 (p. 278) sono soddisfatte.  $\square$

**Osservazione 6.3.** Si noti che se l’operatore cinematico  $\mathbf{B} \in L\{\mathcal{V}; \mathcal{H}\}$  è un operatore di KORN (vedi sezione II.6.3 (p. 210)) del Tomo I. Allora

- essendo  $\dim \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} < +\infty$  la somma  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} + \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  è chiusa in  $\mathcal{L}$ ,
- essendo  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  chiusa in  $\mathcal{H}$  anche  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}'$  è chiusa in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  per il teorema dell’immagine chiusa di BANACH.

Se inoltre l’elasticità della struttura è non singolare, così che  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{0}\}$  e  $\mathbf{P} = \mathbf{O}$ , allora  $\text{Ker } \mathbf{P} \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$  e  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{P} = \{\mathbf{0}\}$ . Dunque  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{P}$  è chiuso in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  e la buona posizione è assicurata se sono soddisfatte le *iii), iv) e v)*.

Anche nel caso in cui l’elasticità della struttura è nulla, così che  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \mathcal{H}$  e  $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ , il sottospazio  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}' \mathbf{P} = \text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}'$  è chiuso in  $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ , la buona posizione è assicurata se sono soddisfatte le *iii), iv) e v)*.  $\blacksquare$

La discussione della buona posizione del problema elastico in forma mista presentata in questa sezione è basata sui risultati pubblicati in [14].

### 6.3. Maggiorazione della soluzione

Una dimostrazione alternativa dell’esistenza di una soluzione del problema misto può essere condotta, nell’ipotesi di elasticità non singolare, dimostrando una formula di limitazione della norma dei campi in soluzione che equivale alla proprietà di chiusura dell’immagine dell’operatore strutturale  $\Lambda \in L\{\mathcal{L} \times \mathcal{H}, \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \times \mathcal{H}\}$  (vedi [12]).

Si assuma che il problema elastico misto primale

$$\boxed{\text{M)} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{v}) = \langle \boldsymbol{\ell}_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{u}) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = (\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau}), \end{array} \quad \begin{cases} \mathbf{u} \in \mathcal{L}, \\ \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \end{cases} \right. \quad \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{S}, \\ \forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{S}. \end{cases}}$$

soddisfi le seguenti condizioni.

- L'operatore cinematico sia un operatore di KORN,
- l'elasticità della struttura sia ellittica su  $\mathcal{H}$ ,
- non esistano spostamenti rigidi conformi ed elasticamente inefficaci e cioè  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{o}\}$ .

Il problema misto è allora ben posto ed ammette un'unica soluzione.

Ricordando che gli operatori duali, cinematico e statico sono

$$\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}, \quad \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{F}_{\mathcal{L}}\},$$

sia  $\Pi \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{L}\}$  il proiettore ortogonale su  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ .

- La chiusura di  $\text{Im } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  in  $\mathcal{H}$  equivale alla diseguaglianza

$$\sup_{\tau \in \mathcal{H}} \frac{\langle \tau, \mathbf{B}u \rangle}{\|\tau\|_{\mathcal{H}}} \geq c_{\mathbf{B}} \|u\|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} = c_{\mathbf{B}} \|u - \Pi u\|_{\mathcal{L}}, \quad \forall u \in \mathcal{L}.$$

Dalla seconda delle M) si trae quindi che

$$a) \quad c_{\mathbf{B}} \|u - \Pi u\|_{\mathcal{L}} \leq \sup_{\tau \in \mathcal{H}} \frac{\langle \delta_{\text{eq}}, \tau \rangle + c_o(\sigma, \tau)}{\|\tau\|_{\mathcal{H}}} \leq \|\delta_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} + \|c_o\| \|\sigma\|_{\mathcal{H}}.$$

- Si consideri quindi l'operatore ridotto  $\bar{\mathbf{K}} \in L\{\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}; \mathcal{F}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}\}$  definito da

$$\bar{\mathbf{K}}u := \mathbf{K}u + (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}, \quad \forall u \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

La chiusura dell'immagine  $\text{Im } \bar{\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{F}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}$  equivale a quella del sottospazio lineare  $\mathbf{K}(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}) + (\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp} \subseteq \mathcal{F}$  ed alla diseguaglianza

$$\inf_{u \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \sup_{v \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{k(u, v)}{\|u\|_{\mathcal{L}} \|v\|_{\mathcal{L}}} \geq c_k > 0.$$

Avendo assunto che l'operatore cinematico è un operatore di KORN, la chiusura dell'immagine  $\text{Im } \bar{\mathbf{K}} \subseteq \mathcal{F}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}$  sussiste banalmente in quanto  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  ha dimensione finita e dunque anche lo spazio duale  $\mathcal{F}/(\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})^{\perp}$  ha dimensione finita.

In termini del proiettore ortogonale  $\Pi \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{L}\}$  su  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ , la diseguaglianza precedente può scriversi

$$c_{\mathbf{k}} \|\Pi \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\Pi \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}}}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

Dunque

$$c_{\mathbf{k}} \|\Pi \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\Pi \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}}} = \sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{k}(\mathbf{u} - \Pi \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}}}.$$

Dalla prima delle M) segue che

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}.$$

Dunque, osservando che

$$\sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{k}(\mathbf{u} - \Pi \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}}} \leq \sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}}} + \sup_{\mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}} \frac{\mathbf{k}(\mathbf{u} - \Pi \mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{L}}},$$

si trae che

$$b) \quad c_{\mathbf{k}} \|\Pi \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}} \leq \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\mathbf{k}\| \|\mathbf{u} - \Pi \mathbf{u}\|_{\mathcal{L}}.$$

Dalle a) e b) si deduce quindi che

$$c) \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}} \leq c_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} + c_2 \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right],$$

con  $c_i, i = 1, 2$  funzioni non lineari di

$$\|\mathbf{c}_o\|, \quad \|\mathbf{k}\|, \quad c_{\mathbf{B}}, \quad c_{\mathbf{k}},$$

positive e limitate su sottoinsiemi limitati.

Dalle M), sottraendo la seconda dalla prima, si ottiene poi che

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{u} \rangle - \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\sigma} \rangle,$$

e dunque dalla c) segue che

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) &\leq \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} \leq \\ &\leq \left[ c_1 \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right] \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} + \\ &\quad + c_2 \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right] \leq \\ &\leq c_3 \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right] \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} + \\ &\quad + c_2 \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right]^2, \end{aligned}$$

con  $c_3 = \max\{1, c_1\}$ .

Per ipotesi sussiste la  $\mathcal{H}$ -ellitticità di  $\mathbf{c}$  e cioè la diseguaglianza

$$\boxed{\mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h,}$$

Dalla positività di  $\mathbf{k}$  si trae allora che

$$\alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_3 \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\delta_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right] + c_2 \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\delta_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right]^2.$$

Ne segue che  $\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H}$  è limitato e precisamente che

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} \leq c_4 \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\delta_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right].$$

dove

$$c_4 = \frac{c_3}{2\alpha} + \sqrt{\left(\frac{c_3}{2\alpha}\right)^2 + \frac{c_2}{\alpha}}.$$

La  $c)$  conduce infine alla maggiorazione

$$\boxed{\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}} \leq m \left[ \|\ell_{\text{eq}}\|_{\mathcal{F}_{\mathcal{L}}} + \|\delta_{\text{eq}}\|_{\mathcal{H}} \right],}$$

dove

$$m = c_1 c_4 + c_2 + 1.$$

La  $m$  è quindi una funzione non lineare di

$$\|\mathbf{c}_o\|, \quad \|\mathbf{k}\|, \quad c_{\mathbf{B}}, \quad c_{\mathbf{k}}, \quad \alpha,$$

positiva e limitata su sottoinsiemi limitati.

#### 6.4. Teorema complementare

La complementarietà consente di formulare i seguenti risultati analoghi a quelli delle proposizioni 6.1 (p. 278) e 6.10 (p. 288).

**Proposizione 6.11. Teorema complementare.** *Si assuma che l'operatore di rigidezza elastica di massa  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$  e l'operatore di cedevolezza elastica  $\mathbf{C}_\Sigma \in L\{\Sigma; \mathcal{D}_\Sigma\}$  siano simmetrici e positivi e che l'immagine  $\text{Im } \mathbf{K}_o$  sia chiusa in  $H$ . Allora la proprietà di buona posizione*

$$\text{Im } \Lambda^C = \left| \begin{array}{c} \text{Im } \mathbf{C}_\Sigma + \text{Im } \mathbf{B}_\Sigma \\ \text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma + \text{Im } \mathbf{K}_o \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} (\text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma)^\perp \\ (\text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{K}_o)^\oplus \end{array} \right| = (\text{Ker } \Lambda^C)^\perp.$$

sussiste se e solo se

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Im } \mathbf{A}_\Sigma \Sigma = (\text{Ker } \mathbf{A}_\Sigma \Sigma)^\perp, \\ \text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma + \text{Im } \mathbf{K}_o \text{ è chiuso in } H, \end{array} \right.$$

dove

- $\mathbf{Q} \in L\{H; H\}$  è il proiettore ortogonale su  $\text{Ker } \mathbf{K}_o \subseteq H$ , così che risulta  $\text{Im } \mathbf{Q} = \text{Ker } \mathbf{K}_o$ ,  $\text{Ker } \mathbf{Q} = \text{Im } \mathbf{K}_o$ ,
- $\Sigma_{\mathbf{K}} := \text{Ker } \mathbf{Q} \mathbf{B}'_\Sigma = \{\boldsymbol{\sigma} \in \Sigma : \mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{K}_o\}$  è il sottospazio degli sforzi conformi elasticamente ammissibili, cioè quelli che danno luogo a forze di massa elasticamente ammissibili,
- $\mathbf{K}^* \in L\{\text{Im } \mathbf{K}_o; \text{Im } \mathbf{K}_o\}$  è la rigidezza elastica efficace, definita da  $\mathbf{K}^* \mathbf{u} = \mathbf{K}_o \mathbf{u}$  per  $\mathbf{u} \in \text{Im } \mathbf{K}_o$  sottospazio lineare degli spostamenti elasticamente efficaci,
- $\mathbf{D}_o = \mathbf{K}^{*-1} \in L\{\text{Im } \mathbf{K}_o; \text{Im } \mathbf{K}_o\}$  è la cedevolezza elastica,
- $\mathbf{A}_\Sigma := \mathbf{C}_\Sigma + \mathbf{B}_\Sigma \mathbf{D}_o \mathbf{B}'_\Sigma \in L\{\Sigma_{\mathbf{K}}; \mathcal{D}_\Sigma\}$  è l'operatore di risposta elastica della struttura a sforzi conformi elasticamente ammissibili,
- $\Psi \in L\{\mathcal{D}_\Sigma; \mathcal{D}_\Sigma / \Sigma_{\mathbf{K}}^\perp\}$ , è la suriezione canonica che ad ogni deformazione attiva  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{D}_\Sigma$  associa la corrispondente deformazione attiva elasticamente efficace e cioè la classe di equivalenza  $\boldsymbol{\varepsilon} + \Sigma_{\mathbf{K}}^\perp$ ,
- $\mathbf{A}_\Sigma \Sigma := \Psi \mathbf{A}_\Sigma \in L\{\Sigma_{\mathbf{K}}; \mathcal{D}_\Sigma / \Sigma_{\mathbf{K}}^\perp\}$  descrive la risposta elastica attiva della struttura a sforzi conformi elasticamente ammissibili,  $\square$

■ La condizione di chiusura  $\text{Im } \mathbf{A}_\Sigma \Sigma = (\text{Ker } \mathbf{A}_\Sigma \Sigma)^\perp$  equivale per definizione alla chiusura della forma bilineare simmetrica

$$\mathbf{a}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) := \mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\tau}),$$

sul sottospazio  $\Sigma_{\mathbf{K}} \times \Sigma_{\mathbf{K}}$  e può riscriversi come una *condizione inf-sup*:

$$\inf_{\mathbf{u} \in \Sigma_{\mathbf{K}}} \sup_{\mathbf{v} \in \Sigma_{\mathbf{K}}} \frac{\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + (\mathbf{D}_o \mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}'_\Sigma \boldsymbol{\tau})}{\|\mathbf{u}\|_{\Sigma / (\text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma)} \|\mathbf{v}\|_{\Sigma / (\text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma)}} > 0.$$

**Osservazione 6.4.** Le condizioni di ammissibilità da imporre sui dati per garantire esistenza di una soluzione sono

$$\mathbb{M}^C \quad \begin{cases} \Delta_{\text{eq}} = \Delta + \mathbf{C}\boldsymbol{\sigma}_t \in (\text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma)^\perp, \\ \mathbf{b}_{\text{eq}} = \mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t \in (\text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{K}_o)^\oplus. \end{cases}$$

La prima, essendo  $\text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma = \text{Ker } \mathbf{C} \cap \Sigma$ , equivale a

$$\langle \Delta, \boldsymbol{\tau} \rangle = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in \text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma.$$

La seconda condizione

$$\langle \mathbf{b} - \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{K}_o,$$

equivale alla condizione di equilibrio

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K},$$

dove  $\mathcal{V}_{\text{RIG}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L}$  con  $\Gamma \mathcal{L}^* = \Gamma \mathcal{L} + \text{Im } \partial \mathbf{C}$ , è il sottospazio lineare dei cinematicismi rigidi conformi nella corrispondente formulazione primale. Infatti dalla formula di GREEN si trae che

$$\langle \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma}_t, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma}_t, \Gamma \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{t}, \Gamma \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\text{RIG}}.$$

Poichè il sottospazio lineare dei cinematicismi conformi nella formulazione complementare è  $\Gamma \mathcal{L}^* = \Gamma \mathcal{L} \cap \text{Ker } \partial \mathbf{K}$ , risulta  $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cap (\Gamma^{-1} \text{Ker } \partial \mathbf{K})$ . Dunque  $\text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma = \mathcal{V}_{\text{RIG}}^* = \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap (\Gamma^{-1} \text{Ker } \partial \mathbf{K})$  e pertanto

$$\text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{K}_o = \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap (\Gamma^{-1} \text{Ker } \partial \mathbf{K}) \cap \text{Ker } \mathbf{K}_o = \mathcal{V}_{\text{RIG}} \cap \text{Ker } \mathbf{K}.$$

Si può quindi concludere che le condizioni di equilibrio nelle formulazioni primale e complementare coincidono. ■

**Proposizione 6.12. Criterio di buona posizione.** *Il problema misto complementare  $\mathbb{M}^C$  è ben posto se sono soddisfatte le seguenti proprietà*

- i)  $\text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma$  chiuso in  $H$ ,
- ii)  $\text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma + \text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma$  chiuso in  $\Sigma$ ,
- iii)  $\mathbf{k}_o(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \beta \|\mathbf{u}\|_{H/\text{Ker } \mathbf{K}_o}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in H; \quad \alpha > 0$ ,
- iv)  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \Sigma : \mathbf{B}'_o \boldsymbol{\sigma} \in \text{Im } \mathbf{K}_o$ ,
- v)  $\mathbf{c}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq c_c \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\Sigma/(\text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma \cap \text{Ker } \mathbf{C}_\Sigma)}^2, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_\Sigma; \quad c_c > 0$ ,
- vi)  $\begin{cases} \text{Im } \mathbf{B}'_\Sigma + \text{Im } \mathbf{K}_o \text{ chiuso in } H \iff \\ \text{Ker } \mathbf{B}_\Sigma + \text{Ker } \mathbf{K}_o \text{ chiuso in } H. \end{cases}$

Se l'operatore cinematico  $\mathbf{B}_{\mathcal{L}} \in L\{\mathcal{L}; \mathcal{H}\}$  è un operatore di KORN, la cedevolezza di massa  $\mathbf{K}_o \in L\{H; H\}$  soddisfa la condizione di ellitticità iii) e la cedevolezza della struttura  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  è non singolare e  $\mathcal{H}$ -ellittica, cioè se

$$c_o(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \geq \alpha \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{H}}^2 \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H},$$

allora le condizioni i) – vi) sono verificate.

**Dim.** La i) segue dalla proposizione II.10.6 (p. 247) che fornisce l'egualianza

$$\boxed{\text{Im } \mathbf{B}'_{\Sigma} = \mathbf{B}'_o \Sigma = [\mathcal{V}_{\text{RIG}}]^{\oplus},}$$

Se  $\text{Ker } \mathbf{K}_o = \{\mathbf{o}\}$  allora anche  $\text{Ker } \mathbf{C}_{\Sigma} = \{\mathbf{o}\}$  e la ii) è verificata.

La  $\mathcal{H}$ -ellitticità di  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  implica banalmente la iv) ed implica anche la v) osservando che  $\text{Ker } \mathbf{B}'_{\Sigma} \subseteq \text{Ker } \mathbf{B}'_o$  e che

$$\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathcal{S}} = \|\boldsymbol{\sigma}\|_H \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_o.$$

L'equivalenza

$$\text{Im } \mathbf{B}'_{\Sigma} + \text{Im } \mathbf{K}_o \text{ chiuso in } H \iff \text{Ker } \mathbf{B}_{\Sigma} + \text{Ker } \mathbf{K}_o \text{ chiuso in } H,$$

segue poi dalla proposizione I.11.8 (p. 88) di [16] in quanto i sottospazi lineari  $\text{Im } \mathbf{B}'_{\Sigma}$  e  $\text{Im } \mathbf{K}_o$  sono chiusi in  $H$ .

Infine dalla proposizione I.11.6 (p. 86) di [16], segue la proprietà di chiusura vi) della somma  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\Sigma} + \text{Ker } \mathbf{K}_o$  in conseguenza della dimensione finita di  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\Sigma} = \mathcal{V}_{\text{RIG}}$ .  $\square$

## RIFERIMENTI

1. A. KORN, Die Eigenschwingungen eines elastischen Körpers mit ruhender Oberfläche. *Acad. Wiss., München, Math. phys. Kl. Sitz.* **36**, 351-402 (1906).
2. A. KORN, Solution générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas où les efforts sont donnés à la surface. *Ann. Fac. Sci. Toulouse (2)* **10**, 156-269. *Acad. Wiss., München, Math. phys. Kl. Sitz.* **36**, 351-402 (1908).
3. A. KORN, Über einige Ungleichungen, welche in der Theorie der elastischen und elektrischen Schwingungen eine Rolle spielen. *Akad. Umiejet. Kracow Bulletin Int.* 705-724 (1909).
4. S. BANACH, Théorie des Opérations Linéaires, Monografje Matematyczne, Warsaw (1932). Reprinted by Chelsea, New York (1955)
5. F. RIESZ, Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.*, Szeged **7**, 34-38 (1934).
6. S. L. SOBOLEV, Sur un théorème d'analyse fonctionnelle., *Math. Sbornik*, **45**, 471-496 (1938).
7. L. SCHWARTZ, Théorie des Distributions, vol. I et II, Hermann (1950, 1951).
8. J. MANDEL, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Gauthier-Villars, Paris (1966).
9. J. NECAS, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris (1967).
10. H. BREZIS, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson Editeur, Paris (1983).
11. L. ASCIONE, A. GRIMALDI, Elementi di meccanica dei continui, Liguori, Napoli, (1989).
12. F. BREZZI, M. FORTIN, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York (1991).
13. J.E. ROBERTS, J.-M. THOMAS, Mixed and Hybrid Methods, Handbook of Numerical Analysis, Ed. P.G. Ciarlet and J.J. Lions, Elsevier, New York (1991).
14. G. ROMANO, L. ROSATI, M. DIACO, Well-Posedness of Mixed Formulations in Elasticity, *ZAMM* **79**, 7, 435-454 (1999).
15. G. ROMANO, On the necessity of Korn's inequality, Symposium on Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, STAMM 2000, National University of Ireland, Galway, July 9th-14th (2000).
16. G. ROMANO, Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2000).
17. G. ROMANO, Theory of structural models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2000).
18. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
19. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).
20. G. ROMANO, M. DIACO, On the functional framework for continua, submitted to *ZAMM*. (2002).



## VII – MODELLI DISCRETI

Le moderne esigenze di calcolo di strutture sempre più complesse sotto il profilo della geometria e del comportamento costitutivo, hanno condotto ad una analisi approfondita dei metodi di calcolo basati sulla discretizzazione dei modelli continui.

L'indagine concerne sia i criteri di discretizzazione che la stima dell'errore che si commette valutando una soluzione discreta rispetto a quella del continuo.

In questo capitolo sono illustrati alcuni aspetti essenziali dei metodi di discretizzazione e delle metodologie di stima dell'errore.

### 1. MODELLO MISTO DISCRETO

Da un punto di vista matematico la formulazione di un modello discreto consiste nell'imporre che i campi di spostamento, sforzo e deformazione appartengano a sottospazi lineari di dimensione finita. Sia quindi  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  un modello strutturale e si assegnino i sottospazi interpolanti

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_h &\subset \mathcal{L}, & \text{spostamenti discreti,} \\ \mathcal{S}_h &\subset \mathcal{H}, & \text{sforzi discreti,}\end{aligned}$$

che definiscono un *modello discretizzato*  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathcal{L}_h, \mathcal{S}_h, \mathbf{B})$ .

- I sistemi di *forze attive* sono gli elementi dello spazio vettoriale  $\mathcal{F}_h$  che è il duale di  $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$  nella topologia indotta da  $\mathcal{L}$ .

Si ricordi che, se  $\mathcal{L}$  è uno spazio normato, tutte le norme indotte su  $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$  sono equivalenti.

La proposizione I.9.18 (p. 75) in [16] mostra che tra lo spazio  $\mathcal{F}_h$  duale di  $\mathcal{L}_h$  e lo spazio quoziante  $\mathcal{F}/\mathcal{L}_h^\perp$  esiste un isomorfismo isometrico.

Lo spazio  $\mathcal{R}_h = \mathcal{L}_h^\perp$  è costituito dai sistemi di forze  $\mathbf{r}_h \in \mathcal{L}_h^\perp$  che sono reattivi per il modello discreto.

Gli spazi  $\mathcal{F}_h$  e  $\mathcal{F}/\mathcal{L}_h^\perp$  possono pertanto essere identificati. Questa identificazione consente di fornire una interpretazione semplice e diretta dei sistemi di forze agenti sul modello discreto e sarà adottata senza ulteriori specificazioni nel seguito.

I vantaggi connessi all'identificazione tra i sistemi di forze sul modello discreto e le varietà affini di sistemi di forze sul modello continuo, sono palesi se si confronta l'analisi condotta nel seguito con quella illustrata in [13].

### 1.1. Equilibrio

Gli operatori discreti, cinematico e statico, in dualità

$$\mathbf{B}_h \in L\{\mathcal{L}_h; \mathcal{H}/\mathcal{S}_h^\oplus\}, \quad \mathbf{B}'_h \in L\{\mathcal{S}_h; \mathcal{F}/\mathcal{L}_h^\perp\}.$$

sono definiti da

$$\mathbf{B}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{B} \mathbf{u}_h + \mathcal{S}_h^\oplus, \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h,$$

$$\mathbf{B}'_h \boldsymbol{\sigma}_h = \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma}_h + \mathcal{L}_h^\perp, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h.$$

- Il sottospazio dei *cinematismi discreti rigidi* sulla struttura discreta vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathcal{L}_h, \mathcal{S}_h, \mathbf{B})$  è

$$\text{Ker } \mathbf{B}_h = \{\mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h : \mathbf{B} \mathbf{u}_h \in \mathcal{S}_h^\oplus\} = \mathcal{L}_h \cap (\mathbf{B}^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus).$$

- Il sottospazio degli *sforzi discreti in autoequilibrio* sulla struttura discreta vincolata  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathcal{L}_h, \mathcal{S}_h, \mathbf{B})$

$$\text{Ker } \mathbf{B}'_h = \mathcal{S}_h \cap \left[ \mathbf{B}'_h^{-1} \left[ \frac{\mathcal{L}^\perp + \mathcal{L}_h^\perp}{\mathcal{L}_h^\perp} \right] \right] = \mathcal{S}_h \cap [\mathbf{B}'^{-1} \mathcal{L}_h^\perp]$$

è costituito dagli sforzi discreti  $\boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h$  in equilibrio con un sistema di *forze reattive discrete*

$$\mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{L}_h^\perp \subseteq \mathcal{F}.$$

- La condizione variazionale

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h \cap (\mathbf{B}^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus).$$

assicura che il problema dell'equilibrio

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B}_h \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h.$$

ammette soluzione. La soluzione è unica se e solo se il sottospazio lineare  $\text{Ker } \mathbf{B}'_h$  degli sforzi discreti in autoequilibrio è degenere.

- In definitiva sia  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  un sistema di forze attive in equilibrio sulla struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$ , cioè tale che

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L}.$$

Allora la condizione di equilibrio sulla struttura discreta

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \text{Ker } \mathbf{B}_h = \mathcal{L}_h \cap (\mathbf{B}^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus),$$

è soddisfatta se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\text{Ker } \mathbf{B}_h \subseteq \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h.$$

Si noti che, essendo  $\text{Ker } \mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\{\mathbf{o}\} \subseteq \mathbf{B}^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus$ , risulta sempre

$$\text{Ker } \mathbf{B}_h \supseteq \mathcal{L}_h \cap \text{Ker } \mathbf{B} = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h.$$

Sussiste inoltre la seguente proprietà.

**Proposizione 1.1.** *L'eguaglianza  $\text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h$  è equivalente alla proprietà*

$$i) \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} \quad \exists \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h : \langle \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B} \mathbf{v}_h \rangle = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h.$$

**Dim.** Basta osservare che

$$\text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h \iff [\text{Ker } \mathbf{B}_h]^\perp = [\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h]^\perp,$$

per cui, essendo

$$[\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h]^\perp = \mathcal{L}_h^\perp + \mathbf{B}' \mathcal{H},$$

$$[\text{Ker } \mathbf{B}_h]^\perp = \mathcal{L}_h^\perp + \mathbf{B}' \mathcal{S}_h,$$

risulta

$$\mathbf{f} \in [\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h]^\perp \iff \exists \boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{H} : \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B} \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h,$$

$$\mathbf{f} \in [\text{Ker } \mathbf{B}_h]^\perp \iff \exists \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h : \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B} \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h.$$

Vale dunque la *i)*. L'implicazione inversa è facilmente verificabile.  $\square$

**Osservazione 1.1.** Una formulazione ed una dimostrazione alternative della proposizione 1.1 sono le seguenti.

La proprietà *i)* equivale alla condizione  $(\mathbf{B} \mathcal{L}_h)^\oplus + \mathcal{S}_h = \mathcal{H}$  che a sua volta equivale alla condizione  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}$ .

Ciò in forza della proposizione I.11.8 (p. 88) di [16], stante che il sottospazio  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h$  ha dimensione finita e dunque il sottospazio somma  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h + \mathcal{S}_h^\oplus$  è chiuso in  $\mathcal{H}$ . Allora si ha che

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in \text{Ker } \mathbf{B}_h \\ \mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{B} \mathbf{u}_h \in \mathcal{S}_h^\oplus \\ \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h \\ \mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\} \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{B} \mathbf{u}_h = \mathbf{o} \\ \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h \end{cases}$$

Dunque la condizione  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}$  è necessaria e sufficiente a che risulti  $\text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h$ .  $\blacksquare$

## 1.2. Congruenza

Si osservi preliminarmente che il sottospazio degli *sforzi discreti in autoequilibrio* sulla struttura discreta vincolata si può scrivere

$$\text{Ker } \mathbf{B}'_h = \mathcal{S}_h \cap [\mathbf{B}'^{-1} \mathcal{L}_h^\perp] = \mathcal{S}_h \cap [\mathbf{B} \mathcal{L}_h]^\oplus$$

Infatti

$$\mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{L}_h^\perp \iff \langle \mathbf{B}' \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h \rangle = (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B} \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h.$$

- La condizione variazionale di congruenza di un campo di deformazioni tangentili  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{H}$  sulla struttura continua  $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{L}, \mathbf{B})$  è data da

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma} \in \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} = (\mathbf{B} \mathcal{L})^\oplus.$$

ed equivale a

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbf{B} \mathcal{L}.$$

- La condizione variazionale di congruenza sulla struttura discreta è invece

$$\langle \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \text{Ker } \mathbf{B}'_h = \mathcal{S}_h \cap [\mathbf{B} \mathcal{L}_h]^\oplus,$$

che equivale a

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in [\mathcal{S}_h \cap (\mathbf{B} \mathcal{L}_h)^\oplus]^\oplus = \mathcal{S}_h^\oplus + \mathbf{B} \mathcal{L}_h.$$

Quest'ultima eguaglianza vale in quanto  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h$  è chiuso in  $\mathcal{H}$  e il sottospazio somma  $\mathcal{S}_h^\oplus + \mathbf{B} \mathcal{L}_h$  è chiuso in  $\mathcal{H}$  essendo  $\mathcal{S}_h^\oplus$  di codimensione finita e  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h$  di dimensione finita (vedi la sezione I.11 (p. 81) di [16]).

I campi di deformazioni tangentili  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathcal{S}_h^\oplus \subseteq \mathcal{H}$  saranno detti *deformazioni tangentili libere*.

La proprietà di congruenza sulla struttura discreta è implicata dalla proprietà di congruenza sulla struttura continua se risulta

$$\text{Ker } \mathbf{B}'_h = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{S}_h.$$

Sussiste inoltre la seguente proprietà, perfettamente analoga a quella enunciata nella proposizione 1.1.

**Proposizione 1.2.** *L'eguaglianza  $\text{Ker } \mathbf{B}'_h = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{S}_h$  è equivalente alla proprietà*

$$ii) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{H} \quad \exists \mathbb{P}_h \mathbf{u} \in \mathcal{L}_h : (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B}(\mathbf{u} - \mathbb{P}_h \mathbf{u})) = 0, \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h.$$

**Dim.** Basta osservare che

$$\text{Ker } \mathbf{B}'_h = \text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{S}_h \iff [\text{Ker } \mathbf{B}'_h]^{\oplus} = [\text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{S}_h]^{\oplus},$$

per cui, essendo

$$\begin{aligned} [\text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{S}_h]^{\oplus} &= \mathcal{S}_h^{\oplus} + \mathbf{B} \mathcal{L}, \\ [\text{Ker } \mathbf{B}'_h]^{\oplus} &= \mathcal{S}_h^{\oplus} + \mathbf{B} \mathcal{L}_h, \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} \in [\text{Ker } \mathbf{B}'_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{S}_h]^{\oplus} &\iff \exists \mathbf{u} \in \mathcal{L} : (\langle \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle) = (\langle \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B} \mathbf{u} \rangle) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h, \\ \boldsymbol{\varepsilon} \in [\text{Ker } \mathbf{B}'_h]^{\oplus} &\iff \exists \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h : (\langle \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\varepsilon} \rangle) = (\langle \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{B} \mathbf{u}_h \rangle) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h. \end{aligned}$$

Vale dunque la *ii)*. L'implicazione inversa è facilmente verificabile.  $\square$

## 2. DISCRETIZZAZIONE DEI PROBLEMI MISTI

Si consideri un *problema elastico misto primale discreto*

$$\boxed{\mathbb{M}_h} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{v}_h) = \langle \ell_{\text{eq}}, \mathbf{v}_h \rangle, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h, \\ \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h, \end{array} \right. \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = \langle \boldsymbol{\delta}_{\text{eq}}, \boldsymbol{\tau}_h \rangle, \quad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}_h \in \mathcal{S}_h, \\ \forall \boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{S}_h. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Il problema  $\mathbb{M}_h$  è sempre ben posto in quanto gli spazi in gioco sono di dimensione finita. Si considerino gli operatori discreti

- $\mathbf{K}_h \in \text{L}\{\mathcal{L}_h; \mathcal{F}/\mathcal{L}_h^{\perp}\}$  definito da

$$\mathbf{K}_h \mathbf{u}_h := \mathbf{K} \mathbf{u}_h + \mathcal{L}_h^{\perp},$$

- $\mathbf{C}_{o_h} \in \text{L}\{\mathcal{S}_h; \mathcal{H}/\mathcal{S}_h^{\oplus}\}$  definito da

$$\mathbf{C}_{o_h} \boldsymbol{\sigma}_h := \mathbf{C}_o \boldsymbol{\sigma}_h + \mathcal{S}_h^{\oplus}.$$

Il problema  $\mathbb{M}_h$  ammette un'unica soluzione se

$$\boxed{\begin{cases} \text{Ker } \mathbf{K}_h \cap \text{Ker } \mathbf{B}_h = \{\mathbf{o}\}, \\ \text{Ker } \mathbf{B}'_h \cap \text{Ker } \mathbf{C}_{o_h} = \{\mathbf{o}\}. \end{cases}}$$

- L'espressione esplicita della condizione di unicità per lo stato di sforzo discreto  $\sigma_h \in \mathcal{S}_h$

$$\text{Ker } \mathbf{B}'_h \cap \text{Ker } \mathbf{C}_{o_h} = \text{Ker } \mathbf{B}'_h \cap \mathcal{S}_h \cap \mathbf{C}_o^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\},$$

mostra che tale condizione è verificata se  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$ . Infatti dalla positività di  $\mathbf{C}_o \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  si deduce che

$$\sigma_h \in \mathcal{S}_h \cap \mathbf{C}_o^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus \Rightarrow \mathbf{C}_o \sigma_h = \mathbf{o} \Rightarrow \sigma_h = \mathbf{o},$$

e cioè che  $\text{Ker } \mathbf{C}_{o_h} = \mathcal{S}_h \cap \mathbf{C}_o^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}$ .

- L'espressione esplicita della condizione di unicità per il campo di spostamento  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h$  è

$$\text{Ker } \mathbf{K}_h \cap \text{Ker } \mathbf{B}_h = \mathcal{L}_h \cap \mathbf{K}^{-1} \mathcal{L}_h^\perp \cap \mathbf{B}^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}.$$

Dalla positività di  $\mathbf{K}_h \in L\{\mathcal{L}_h; \mathcal{F}/\mathcal{L}_h^\perp\}$  si deduce che

$$\begin{cases} \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h, \\ \mathbf{K} \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h^\perp, \end{cases} \Rightarrow \langle \mathbf{K} \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{u}_h = \mathbf{o}.$$

e cioè che

$$\boxed{\text{Ker } \mathbf{K}_h = \mathcal{L}_h \cap \text{Ker } \mathbf{K}.}$$

L'unicità del campo di spostamento  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h$  sussiste dunque se e solo se

$$\begin{cases} \mathbf{B} \mathbf{u}_h \in \mathcal{S}_h^\oplus, \\ \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h \cap \text{Ker } \mathbf{K}, \end{cases} \Rightarrow \mathbf{u}_h = \mathbf{o},$$

cioè se

$$\boxed{\mathcal{L}_h \cap (\text{Ker } \mathbf{K}) \cap \mathbf{B}^{-1} \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\},}$$

che in termini meccanici si enuncia affermando che

- non esistono spostamenti discreti conformi elasticamente inefficaci e non nulli che danno luogo a deformazioni tangentie libere.

**Osservazione 2.1.** La condizione  $\text{Ker } \mathbf{B}_h = \{\mathbf{o}\}$  impone che  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}$  e dunque, in forza dell'osservazione 1.1, che risulti  $\text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{B}_\mathcal{L} \cap \mathcal{L}_h$ .

Nelle applicazioni strutturali la condizione  $\text{Ker } \mathbf{B}_h = \{\mathbf{o}\}$  è indispensabile (e sufficiente) ad assicurare l'unicità del campo di spostamenti in assenza di vincoli elastici. Ne segue che i sottospazi interpolanti  $\mathcal{L}_h$  e  $\mathcal{S}_h$  devono essere assunti in modo tale da rispettare la condizione  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}$ . Nel metodo degli elementi finiti la condizione va sostituita da una più forte che possa essere imposta sulle funzioni di forma definite nell'elemento di riferimento. ■

## 2.1. Stima dell'errore

Siano soddisfatte le condizioni di unicità e di buona posizione del problema continuo e la condizione di unicità del campo di spostamento del problema discreto.

Si vuole fornire una stima dell'*errore di approssimazione* in energia, definito da

$$\boxed{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathcal{H}}}.$$

Seguendo la trattazione sviluppata in [13], si fa ricorso alla diseguaglianza triangolare per concludere che

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathcal{H}} &\leq \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}} + \\ &\quad + \|\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma}_h - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

$$\forall \bar{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{L}_h, \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \mathcal{S}_h.$$

Il primo passo consiste nel maggiorare il termine  $\|\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma}_h - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}}$  mediante la distanza  $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}}$ .

A tal fine si osserva che dai problemi  $\mathbb{M}$  e  $\mathbb{M}_h$  segue che

$$\boxed{\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \mathbf{k}(\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma}_h - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h, \mathbf{v}_h) = \mathbf{k}(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h) + \mathbf{b}(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h, \mathbf{v}_h), \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma}_h - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h) - \mathbf{c}_o(\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h, \boldsymbol{\tau}_h). \end{cases}}$$

I termini noti sono funzionali lineari continui su  $\mathcal{L}_h$  e su  $\mathcal{S}_h$ .

■ Applicando al problema  $\mathbb{P})$  la trattazione svolta nella sezione VI.6.3 (p. 288) si deduce che vale la stima

$$\boxed{\|\mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma}_h - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}} \leq m_h [\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}}].}$$

La  $m_h$  è una funzione non lineare di

$$\|\mathbf{c}_o\|, \quad \|\mathbf{k}\|, \quad c_{\mathbf{B}h}, \quad c_{\mathbf{k}h}, \quad \alpha_h,$$

positiva e limitata su sottoinsiemi limitati.

Dalla diseguaglianza triangolare si deduce pertanto che

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathcal{H}} \leq (1 + m_h) [\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}}],$$

$\forall \bar{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{L}_h, \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \mathcal{S}_h$ . Ponendo  $c_h = 1 + m_h$  si conclude che

$$\boxed{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{\mathcal{L}} + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathcal{H}} \leq c_h \left[ \inf_{\bar{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{L}_h} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h\|_{\mathcal{L}} + \inf_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \mathcal{S}_h} \|\boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{\mathcal{H}} \right].}$$

## 2.2. Condizione LBB e convergenza

In effetti la stima dell'errore ottenuta non può considerarsi soddisfacente in quanto la costante positiva  $c_h$  dipende dal parametro  $h$  e dunque al tendere di  $h$  a zero può assumere valori così piccoli da rendere vana ogni stima basata sulla valutazione dell'errore di interpolazione.

La stima diviene significativa se è possibile pervenire ad una dise guaglianza in cui compaia una costante  $m$  indipendente dal parametro  $h$ .

- L'indipendenza dal parametro  $h$  fornisce una condizione sufficiente per la convergenza in energia della soluzione approssimata a quella esatta se si è in presenza di sufficienti proprietà di interpolazione dei sottospazi discreti.

Una condizione di questo tipo è nota in letteratura col nome di condizione di LADYZHENSKAYA-BABUVSKA-BREZZI (in sigla *condizione LBB*, vedi [5], [7], [9], [11], [13]).

Sussiste in proposito il seguente risultato dovuto all'autore.

**Proposizione 2.1.** *Si assuma che il problema elastico misto primale sia ben posto ed ammetta un'unica soluzione. In particolare l'elasticità della struttura sia non singolare così che  $\text{Ker } \mathbf{C}_o = \{\mathbf{o}\}$  e l'operatore cinematico sia un operatore di KORN. Le famiglie dei sottospazi lineari interpolanti  $\mathcal{L}_h \subset \mathcal{L}$  e  $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{H}$  soddisfino inoltre le condizioni*

- a)  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\perp = \{\mathbf{o}\}$ ,
- b)  $\{\mathbf{B} \mathcal{L}_h + \mathcal{S}_h^\perp\}$  uniformemente chiusa in  $\mathcal{H}$ .

*La maggiorazione dell'errore di approssimazione sussiste allora in modo uniforme e cioè indipendente da  $h$ .*

**Dim.** Si osservi preliminarmente che, in forza dell'osservazione 1.1 (p. 299), la a) equivale alla condizione  $\text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{B} \cap \mathcal{L}_h$ .

La condizione di unicità del campo di spostamenti soluzione del problema continuo  $\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} = \{\mathbf{o}\}$  implica allora che sia

$$\text{Ker } \mathbf{K}_h \cap \text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h = \{\mathbf{o}\},$$

e cioè che sussista l'unicità del campo di spostamenti soluzione del problema discreto. La condizione di ellitticità su  $\text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$  della forma bilineare  $\mathbf{k}$

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}/(\text{Ker } \mathbf{K}_{\mathcal{L}} \cap \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}})}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}},$$

si scrive dunque

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{L}}^2 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}},$$

ed implica che

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) \geq c_{\mathbf{k}} \|\mathbf{u}_h\|_{\mathcal{L}}^2 \quad \forall \mathbf{u}_h \in \text{Ker } \mathbf{B}_h = \text{Ker } \mathbf{B}_{\mathcal{L}} \cap \mathcal{L}_h,$$

e cioè l'uniforme ellitticità su  $\text{Ker } \mathbf{B}_h$  della forma bilineare  $\mathbf{k}$ .

La condizione *b)* equivale ad imporre l'uniforme chiusura della famiglia di sottospazi  $\{\text{Im } \mathbf{B}_h\} = \{\mathbf{BL}_h + \mathcal{S}_h^\oplus\}$  che è espressa dalla diseguaglianza

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathcal{S}_h} \frac{\langle (\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{Bu}_h) \rangle}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathcal{H}}} \geq \gamma \| \mathbf{u}_h \|_{\mathcal{H}/\text{Ker } \mathbf{B}_h} \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h,$$

con  $\gamma$  indipendente da  $h$ .

Si può allora seguire la trattazione svolta nella sezione VI.6.3 (p. 288) applicandola al problema  $\mathbb{P}$ ) della sezione 2.1 e concludere che

$$\| \mathbf{u}_h - \bar{\mathbf{u}}_h \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma}_h - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \|_{\mathcal{H}} \leq m \left[ \| \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \|_{\mathcal{H}} \right].$$

La  $m$  è una funzione non lineare di  $\| \mathbf{c}_o \|$ ,  $\| \mathbf{k} \|$ ,  $\gamma$ ,  $c_{\mathbf{k}}$ ,  $\alpha$ , positiva e limitata su sottoinsiemi limitati.  $\square$

**Osservazione 2.2.** Essendo  $\mathbf{B} \mathcal{L}_h \cap \mathcal{S}_h^\oplus = \{\mathbf{o}\}$ , la condizione di uniforme chiusura in  $\mathcal{H}$  della famiglia  $\{\mathbf{BL}_h + \mathcal{S}_h^\oplus\}$  può essere espressa mediante la diseguaglianza [16]

$$\| \mathbf{\Pi Bu}_h \|_{\mathcal{H}} \geq c \| \mathbf{Bu}_h \|_{\mathcal{H}}, \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h,$$

dove  $\mathbf{\Pi} \in L\{\mathcal{H}; \mathcal{H}\}$  è il proiettore ortogonale su  $\mathcal{S}_h \subset \mathcal{H}$ . Questa è pertanto una espressione alternativa della *condizione LBB* nel caso in esame.  $\blacksquare$

Se sono soddisfatte le ipotesi della proposizione 2.1, dalla diseguaglianza triangolare si deduce che

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{\mathcal{H}} \leq (1 + m) \left[ \| \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \|_{\mathcal{H}} \right],$$

$\forall \bar{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{L}_h, \forall \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \mathcal{S}_h$ .

Ponendo  $c = 1 + m$  si conclude infine che

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h \|_{\mathcal{H}} \leq c \left[ \inf_{\bar{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{L}_h} \| \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h \|_{\mathcal{L}} + \inf_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \mathcal{S}_h} \| \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \|_{\mathcal{H}} \right].$$

Si è così pervenuti a maggiorare l' *errore di approssimazione* mediante l'*errore di interpolazione*.

La stima asintotica, e cioè per  $h \rightarrow 0$ , della velocità di diminuzione dell'errore di interpolazione

$$\mathbf{Err}(h) = \inf_{\bar{\mathbf{u}}_h \in \mathcal{L}_h} \| \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}_h \|_{\mathcal{L}} + \inf_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \in \mathcal{S}_h} \| \boldsymbol{\sigma} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_h \|_{\mathcal{H}},$$

è fornito dalla teoria dell’interpolazione polinomiale che conduce a formule esponenziali del tipo

$$\boxed{\mathbf{Err}(h) \leq \beta h^k \left[ \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma} \|_{\mathcal{H}} \right].}$$

In scala bi-logaritmica la legge esponenziale con esponente  $k$  si trasforma nella legge lineare con pendenza pari a  $k$  a secondo membro della seguente diseguaglianza

$$\boxed{\ln \mathbf{Err}(h) \leq \beta \left[ \| \mathbf{u} \|_{\mathcal{L}} + \| \boldsymbol{\sigma} \|_{\mathcal{H}} \right] + k \ln(h).}$$

### 3. APPROXIMAZIONI CONFORMI

L’analisi delle approssimazioni conformi dei problemi elastici posti in termini di spostamenti è basata sulla *metodo di RAYLEIGH-RITZ*<sup>26</sup> delle *approssimazioni interne*.

Le *approssimazioni interne* sono caratterizzate dalla proprietà che le variabili di stato e le funzioni di prova del metodo variazionale approssimato appartengono ad un sottospazio discreto che è un sottospazio dello spazio cui appartengono le variabili di stato e le funzioni di prova del metodo variazionale continuo.

Il metodo di RAYLEIGH-RITZ è basato sulla fondamentale proprietà di ottimalità delle soluzioni ottenute mediante una approssimazione interna di un problema lineare.

#### 3.1. Metodo di Rayleigh-Ritz

Si consideri un sottospazio lineare  $\mathcal{L}$  di uno spazio di HILBERT  $\mathcal{V}$ , una forma simmetrica bilineare  $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(\mathcal{L}, \mathcal{L}; \mathfrak{R})$  ed un funzionale lineare  $\ell \in \mathbf{L}(\mathcal{L}; \mathfrak{R}) = \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ .

La forma quadratica associata alla forma bilineare  $\mathbf{a} \in \mathbf{L}(\mathcal{L}, \mathcal{L}; \mathfrak{R})$  è assunta semidefinita positiva su  $\mathcal{L}$ . Si ha dunque che

$$\mathbf{a}(\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}.$$

Sussistono allora le seguenti proprietà.

**Proposizione 3.1. Metodo di Rayleigh-Ritz.** *Sia  $\mathcal{L}_h$  un sottospazio proprio di  $\mathcal{L}$  e si supponga che i problemi*

$$\mathbb{P}) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}) , \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}$$

$$\mathbb{P}_h) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h) , \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h \quad \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h$$

*ammettano soluzione.*

---

<sup>26</sup> WALTER RITZ (1878-1909). Fisico svizzero che ha insegnato alle Università di Zürich e Göttingen. A RITZ sono dovuti importanti contributi alle teorie della radiazione, del magnetismo e dell’elettrodinamica.

Risulta in tal caso

- i)  $\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h$
- ii)  $\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \mathbf{a}(\mathbf{u}) - \mathbf{a}(\mathbf{u}_h) \geq 0$
- iii)  $\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \min \{\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h) : \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h\}.$

Definendo inoltre il funzionale quadratico

$$\phi(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v}),$$

si ha che

- iv)  $\phi(\mathbf{u}) = \min \{\phi(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in \mathcal{L}\}$
- v)  $\phi(\mathbf{u}_h) = \min \{\phi(\mathbf{v}_h) : \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h\}$
- vi)  $\phi(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \ell(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u})$
- vii)  $\phi(\mathbf{u}_h) = -\frac{1}{2} \ell(\mathbf{u}_h) = -\frac{1}{2} \mathbf{a}(\mathbf{u}_h)$
- viii)  $\phi(\mathbf{u}) \leq \phi(\mathbf{u}_h) \quad \ell(\mathbf{u}) \geq \ell(\mathbf{u}_h) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}) \geq \mathbf{a}(\mathbf{u}_h).$

**Dim.** La condizione di ortogonalità i) segue ponendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h$  in a) e sottraendo b). La diseguaglianza ii) è conseguenza della semidefinizione positiva di  $\mathbf{a}$  e dell'uguaglianza

$$\mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \mathbf{a}(\mathbf{u}) + \mathbf{a}(\mathbf{u}_h) - 2 \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h),$$

notando che, in virtù della i) è  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h) = \mathbf{a}(\mathbf{u}_h)$ . La proprietà di minimo iii) può essere provata ponendo  $\mathbf{x} = \mathbf{u} - \mathbf{v}_h$ ;  $\mathbf{y} = \mathbf{u}_h - \mathbf{v}_h$  ed osservando che, per la i),  $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$ . Pertanto, come in precedenza, l'uguaglianza

$$\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}(\mathbf{y}) - 2 \mathbf{a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

fornisce  $\mathbf{a}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{y}) \leq \mathbf{a}(\mathbf{x})$  che era quanto doveva essere dimostrato. Le proprietà di minimo iv) e v) possono essere desunte dalla convessità del funzionale  $\phi$  osservando che  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}_h$  rispettivamente assicurano l'annullarsi delle derivate direzionali del funzionale  $\phi$  nel punto  $\mathbf{u}$  lungo ogni direzione in  $\mathcal{L}$  e nel punto  $\mathbf{u}_h$  lungo ogni direzione in  $\mathcal{L}_h$ . Le altre proprietà sono evidenti.  $\square$

Una interessante proprietà, posta in evidenza dall'autore, è fornita dal seguente risultato.

**Proposizione 3.2. Stime esatte.** *Si considerino i problemi dell'equilibrio elastico*

$$\mathbb{P}) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

$$\mathbb{P}_h) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \ell(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h, \quad \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h,$$

e sia  $\ell_* \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$  la risposta elastica attiva ad una funzione di forma  $\mathbf{u}_* \in \mathcal{L}_h$ . Allora si ha che

$$\ell_*(\mathbf{u}_h) = \ell_*(\mathbf{u}).$$

e cioè il lavoro virtuale della risposta elastica ad una funzione di forma è lo stesso se alla soluzione esatta si sostituisce quella approssimata.

**Dim.** Per ipotesi risulta

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}) = \ell_*(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L}, \quad \mathbf{u}_* \in \mathcal{L}_h.$$

La proprietà *i*) nella proposizione 3.1 e la simmetria della forma  $\mathbf{a} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}; \mathfrak{R})$  implicano quindi che

$$0 = \mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u}_*) = \mathbf{a}(\mathbf{u}_*, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \ell_*(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \ell_*(\mathbf{u}) - \ell_*(\mathbf{u}_h),$$

come volevasi dimostrare.  $\square$

**Osservazione 3.1.** Una semplice applicazione del risultato della proposizione 3.2 fornisce la spiegazione di un risultato a prima vista sorprendente.

Si consideri una trave elastica inflessa a sezione costante, asse rettilineo, semplicemente appoggiata agli estremi, avente luce  $L$  e soggetta ad un carico uniformemente ripartito con intensità  $p$ . Si ponga l'origine dell'ascissa  $x$  nel primo estremo della trave. Per assicurare che l'energia elastica sia finita, lo spazio ambiente degli spostamenti trasversali è lo spazio lineare di SOBOLEV  $H^2(0, L)$ . Le funzioni di  $H^2(0, L)$  sono continue con la derivata prima in  $[0, L]$  e quindi il sottospazio lineare chiuso degli spostamenti trasversali conformi e ben definito dalla condizione

$$\mathcal{L} := \{v \in H^2(0, L) : v(0) = 0, v(L) = 0\}.$$

La soluzione del problema dell'equilibrio elastico fornisce la deformata  $u(x)$  e le rotazioni  $\varphi(x)$  date da

$$u(x) = \frac{p}{k_f} \left[ \frac{x^4}{24} - \frac{x^3 L}{12} + \frac{x L^3}{24} \right], \quad \varphi(x) = \frac{p}{k_f} \left[ \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 L}{4} + \frac{L^3}{24} \right],$$

dove  $k_f$  è la rigidezza flessionale della trave.

La freccia elastica in mezzeria e la rotazione del primo estremo valgono pertanto

$$u(L/2) = \frac{5}{384} \frac{p L^4}{k_f},$$

$$\varphi(0) = \frac{1}{24} \frac{p L^3}{k_f}.$$

Si assuma quindi, per gli spostamenti trasversali, un sottospazio interpolante  $\mathcal{L}_h$  di dimensione unitaria generato dalla parabola

$$1 - \frac{4y^2}{L^2},$$

dove  $y = x - L/2$ . La condizione variazionale di equilibrio

$$\int_0^L k_f u'' v'' dx = \int_0^L p v dx, \quad \forall v \in \mathcal{L},$$

si traduce nella condizione approssimata

$$u_h(L/2) k_f \int_0^L \frac{64}{L^4} dx = p \int_0^L 1 - \frac{4y^2}{L^2} dy.$$

Integrando si ottiene

$$u_h(L/2) = \frac{4}{384} \frac{p L^4}{k_f},$$

$$\varphi_h(0) = \frac{1}{24} \frac{p L^3}{k_f}.$$

La freccia approssimata è dunque inferiore a quella esatta, ma le rotazioni agli estremi esatte ed approssimate coincidono.

La proposizione 3.2 fornisce la spiegazione di tale coincidenza.

Basta infatti osservare che alla funzione di forma parabolica corrisponde un diagramma lineare della rotazione ed uno costante della curvatura linearizzata.

Essendo costante la rigidezza flessionale, tale sarà anche il momento flettente. Ne segue che il carico in equilibrio elastico con la deformata parabolica è costituito da due coppie opposte, concentrate agli estremi della trave appoggiata.

Eguagliando allora il lavoro virtuale compiuto dalle coppie di estremità nello schema esatto ed in quello approssimato, si perviene alla conclusione che le rotazioni di estremità devono essere uguali nei due casi. ■

### 3.2. Lemma di Céa e stima dell'errore

I problemi di equilibrio delle strutture elastiche lineari possono essere espressi in termini di spostamenti come segue

$$\mathbb{P}) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \ell(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L},$$

dove  $\mathcal{L}$  è un sottospazio chiuso di uno spazio di SOBOLEV  $H^m(\Omega)$  e

- $\mathbf{a} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}; \mathbb{R})$  è la forma bilineare simmetrica dell'energia elastica definita da

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathcal{E}(\mathbf{x})(\mathbf{B}\mathbf{u})(\mathbf{x}) * (\mathbf{B}\mathbf{v})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

che soddisfa la condizione di continuità

$$|\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{u}\|_m \|\mathbf{v}\|_m, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{L},$$

e di  $\mathcal{L}$ -ellitticità

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}) \geq c \inf \{\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_m : \mathbf{v} \in \text{Ker } \mathbf{a} \cap \mathcal{L}\}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

- $\ell \in L(\mathcal{L}; \mathbb{R})$  è il funzionale lineare che rappresenta il carico sulla struttura, definito da

$$\ell(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

E' soddisfatta la condizione di continuità  $|\ell(\mathbf{v})| \leq \|\ell\| \|\mathbf{v}\|_m$ .

Sussistono tutte le ipotesi alla base del metodo di RAYLEIGH-RITZ. Per semplicità si assume che siano imposti dei vincoli tali da eliminare moti rigidi e cioè che

$$\text{Ker } \mathbf{a} \cap \mathcal{L} = \{\mathbf{0}\}.$$

Si può quindi definire in  $\mathcal{L}$  una *norma in energia* equivalente alla norma di SOBOLEV in  $H^m(\Omega)$  ponendo

$$\|\mathbf{u}\|^2 := \mathbf{a}(\mathbf{u}).$$

Munito del prodotto interno  $\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  il sottospazio  $\mathcal{L}$  è esso stesso uno spazio di HILBERT che è denotato con  $\mathcal{L}_{\text{en}}$ .

Il problema elastico  $\mathbb{P}$  ammette un'unica soluzione costituita dalla proiezione ortogonale in energia del rappresentante di RIESZ 1 di  $\ell$  nello spazio di HILBERT  $\mathcal{L}_{\text{en}}$ . Si ha infatti che

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v}) = \mathbf{a}(\mathbf{u} - \mathbf{l}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \quad \mathbf{u} \in \mathcal{L}.$$

La seguente diseguaglianza dovuta a CÉA, fornisce una stima dell'errore.

**Proposition 3.3. Lemma di Céa.** *Siano  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_h$  soluzioni dei problemi  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}_h$ . Risulta allora*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m \leq \alpha \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_m,$$

in cui la costante  $\alpha$  non dipende da  $h$ .

**Dim.** La continuità e la  $\mathcal{L}$ -ellitticità della forma bilineare dell’energia di deformazione elastica ed il teorema di RITZ forniscono

$$c \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m \leq \| |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h| \| \leq \| |\mathbf{u} - \mathbf{v}_h| \| \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_m \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h,$$

da cui si evince il risultato ponendo  $\alpha = C/c$ .  $\square$

In virtù del lemma di CÉA la stima dell’errore in energia dei problemi approssimati viene ricondotta ad un problema di teoria dell’approssimazione.

Il seguente risultato fornisce la stima fondamentale per le approssimazioni *FEM* della soluzione di un problema elastostatico.

**Proposizione 3.4. Stima dell’errore.** *Si consideri un problema elastostatico ed una approssimazione FEM conforme*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \ell(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{L} \\ \mathbb{P}_h) \quad \mathbf{a}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \ell(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{L}_h \quad \mathbf{u}_h \in \mathcal{L}_h \subset \mathcal{L} \end{aligned}$$

*Si assuma inoltre che*

- il sottospazio interpolante  $\mathcal{L}_h(\mathcal{T}(\Omega))$  contiene il sottospazio  $\mathcal{P}_{k-1}(\mathcal{T}(\Omega))$  dei polinomi di grado massimo  $k-1$ ,
- gli elementi della triangolazione in elementi finiti siano uniformemente non singolari al tendere da zero del parametru  $h$ ,
- il funzionale di carico  $\ell$  appartenga allo spazio di SOBOLEV  $H_r(\Omega)$ .

*In tal caso la soluzione esatta appartiene allo spazio di SOBOLEV  $H_{2m+r}(\Omega)$  e l’approssimazione FEM converge alla soluzione esatta nella norma in energia purchè  $k > m$ , e cioè*

$$\mathcal{P}_m \subseteq S_h.$$

*La velocità di convergenza è fornita dalla stima dell’errore*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m \leq c h^{k-m} |\mathbf{u}|_k.$$

*in cui  $k \leq 2m + r$ .*

**Dim.** Il risultato riguardante la soluzione esatta è una diretta conseguenza della proposizione VIII.1.3 (p. 124) del Tomo Zero in quanto la forma bilineare dell’equilibrio elastico  $\mathbf{a} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}; \mathfrak{R})$  è  $\mathcal{V}$ -ellittica, l’operatore  $\mathbf{A}$  associato a  $\mathbf{a} \in L(\mathcal{L}, \mathcal{L}; \mathfrak{R})$  è di ordine  $2m$  e la soluzione esatta è una soluzione debole dell’equazione differenziale  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ . Le altre conclusioni seguono dal teorema di approssimazione per il metodo FEM [10] e dal lemma di CÉA 3.3.  $\square$

Come semplice conseguenza della proposizione precedente si deduce la seguente

**Proposition 3.5. Condizione di deformazione costante.** *Affinchè una approssimazione FEM conforme converga alla soluzione esatta, l'interpolazione deve essere in grado di riprodurre ogni stato di deformazione costante a pezzi nella struttura.*

**Dim.** Poichè l'operatore di deformazione è di ordine  $m$ , i campi di spostamento appartenenti a  $\mathcal{P}_m(\Omega)$  riproducono un campo di deformazione costante a pezzi nella struttura.  $\square$

## RIFERIMENTI

1. J. CÉA, Approximation Variationnelle des Problèmes aux Limites, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble) **14**, 345-444 (1964).
2. J. NECAS,, Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris (1967).
3. J.P. AUBIN,, Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* **21**, 599-637 (1967).
4. J. A. NITSCHE,, Ein kriterium fur die quasi-optimalitat des Ritzschen Verfahrens, *Numer. Math.* **11**, 346-348 (1968).
5. O. A. LADYZHENSKAYA, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach, New York (1969).
6. J.P. AUBIN, Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems, Wiley, New York (1972).
7. I. BABUVSKA, The finite element method with lagrangian multipliers, *Numer. Math.*, **20**, 179-192 (1973).
8. G. STRANG, G.J. FIX, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (1973).
9. F. BREZZI, On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from lagrangian multipliers, *R.A.I.R.O. Anal. Numer.*, **8**, 129-151 (1974).
10. P.G. CIARLET, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam-New York (1978).
11. J. T. ODEN, Problems with Constraints, in *The Finite Element Handbook*, Ed. H. KARDESTUNCER, ch. **9.4**, 2.321-2.326, McGRAW-HILL, New York (1987).
12. F. BREZZI, G. GILARDI, FEM mathematics, in *The Finite Element Handbook*, Ed. H. KARDESTUNCER, P.1, ch. **1,2**, 1.1-1.120, McGraw-Hill, New York (1987).
13. F. BREZZI, M. FORTIN, Mixed and Hybrid Finite Element Methods, Springer-Verlag, New York (1991).
14. J.E. ROBERTS, J.-M. THOMAS, Mixed and Hybrid Methods, *Handbook of Numerical Analysis*, Ed. P.G. Ciarlet and J.J. Lions, Elsevier, New York (1991).
15. G. ROMANO, L. ROSATI, M. DIACO, Well-Posedness of Mixed Formulations in Elasticity, *ZAMM* **79**, 7, 435-454 (1999).
16. G. ROMANO, Theory of structural models, Part I, Elements of Linear Analysis, Università di Napoli Federico II, (2000).
17. G. ROMANO, Theory of structural models, Part II, Structural models, Università di Napoli Federico II, (2000).
18. G. ROMANO, F. MAROTTI DE SCIARRA, M. DIACO, A Survey on Multi-Field Approximation Methods, *First CSMA-GIMC Joint Workshop on Modern Issues in Modeling and Computations of Damage and Failure*, Cefalù (Palermo), pp. 1-114, June 7-9, (2001).
19. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
20. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).



## VIII – TRAVI ELASTICHE IN GRANDI SPOSTAMENTI

In questo capitolo si fornisce un quadro generale per l’analisi di modelli strutturali continui costituiti da un *materiale elastico secondo GREEN* (*materiale iperelastico*) che subiscono grandi spostamenti e deformazioni durante un processo evolutivo.

Nella trattazione si fa riferimento ad una configurazione naturale a partire dalla quale sono misurate le deformazioni elastiche del materiale ed è valutato il potenziale elastico di deformazione.

L’approccio computazionale a problemi di equilibrio elastico in grandi spostamenti e deformazioni fa ricorso a metodi di integrazione al passo ed a procedimenti iterativi che, ad ogni passo, sono basati su di una stima iniziale ottenuta mediante una linearizzazione dell’operatore non lineare di risposta elastica.

La linearizzazione comporta la determinazione dell’operatore di *rigidezza tangente* che associa ad ogni spostamento tangente la relativa risposta elastica incrementale.

La questione è delicata perché la linearizzazione di una condizione variazionale pone una problematica che si rivela con eclatante evidenza nel caso generale in cui il modello continuo è dotato di struttura locale.

La modellazione di un continuo con struttura locale è effettuata assumendo quale riferimento una varietà base e definendo un’applicazione della varietà base nella varietà (in generale non lineare) sulla quale prende valori la struttura locale.

A questa famiglia appartengono il modello continuo monodimensionale della trave di TIMOSHENKO ed il modello tridimensionale del continuo polare formulato all’inizio del ventesimo secolo dai fratelli ÉMILE E FRANCOIS COSSERAT. In tali modelli i campi cinematici hanno valori che, essendo costituiti da traslazioni e rotazioni delle sezioni trasversali nel primo caso e da traslazioni e rotazioni di un triedro di orientazione nel secondo, sono vincolati a variare su varietà non lineari, quale è la varietà differenziabile compatta tridimensionale costituita dal gruppo di LIE delle rotazioni (gruppo ortogonale speciale  $SO(3)$ ).

La questione riveste grande importanza anche nelle applicazioni computazionali ed è stata affrontata in molti lavori scientifici, tra cui in particolare [9].

Una trattazione corretta è stata sviluppata di recente dall’autore in [15].

La teoria della linearizzazione dell’equilibrio elastico richiede, come si vedrà, il ricorso a concetti e metodi propri della geometria differenziale.

Nei testi e negli articoli di meccanica delle strutture la questione o non è trattata o è presentata in modo non adeguato e ciò anche perché gli strumenti propri della moderna geometria delle varietà differenziabili, indispensabili per lo sviluppo della teoria, non fanno parte del bagaglio culturale di gran parte degli addetti ai lavori.

## 1. CONTINUI CON STRUTTURA

Un modello continuo in deformazioni finite è caratterizzato dai seguenti elementi.

- La *varietà base*  $\mathcal{B}$  della configurazione di riferimento è una varietà differenziabile di dimensione  $d \leq 3$  immersa nello spazio euclideo  $\mathbb{S}$ . I punti della varietà base saranno denotati con  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$ .  
Ai modelli di trave, di piastre e gusci, e dei continui di CAUCHY e dei COSSERAT corrispondono rispettivamente varietà base aventi dimensione  $d = 1, 2, 3$ .
- La *struttura geometrica locale* del continuo è descritta mediante una varietà differenziabile  $\mathbb{M}$  immersa in uno spazio di dimensione finita  $\{\mathbb{V}, \mathbf{g}\}$  dotato di un prodotto interno. I punti della varietà  $\mathbb{M}$  sono denotati con  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ .
- La configurazione di riferimento  $\chi_{\mathcal{B}} \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  assegna una struttura geometrica locale alla varietà base.
- Un *processo evolutivo* è una famiglia ad un parametro di campi  $\{\chi_t, t \in I\}$  di classe  $C^k$  definiti sulla varietà base  $\mathcal{B}$  ed i cui valori sono variabili cinematiche appartenenti alla varietà  $\mathbb{M}$ . Ogni campo

$$\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M}), \quad t \in I,$$

è una *configurazione* del continuo. Con  $I = [t_o, t_f]$  si è denotato l'intervallo di osservazione del processo. Si noti che il prodotto interno  $\mathbf{g}$  in  $\{\mathbb{V}, \mathbf{g}\}$  induce sulla varietà  $\mathbb{M}$  una metrica locale che la rende una varietà di RIEMANN. Infatti i sottospazi tangenti ad  $\mathbb{M}$  possono essere identificati con sottospazi dello spazio  $\{\mathbb{V}, \mathbf{g}\}$ .

- Il *fibrato tangente*  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  alla varietà  $\mathbb{M}$  è l'unione disgiunta degli spazi tangenti  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{m})$  nei punti  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ .
- Uno *spostamento virtuale* o *spostamento tangente*  $\delta\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$  in corrispondenza della configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$ ,  $t \in I$  è un campo vettoriale definito sulla varietà base  $\mathcal{B}$  ed a valori sul fibrato  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  tangente alla varietà  $\mathbb{M}$  tale che

$$\pi_{\mathbb{M}} \circ \delta\chi_t = \chi_t,$$

dove  $\pi_{\mathbb{M}} : \mathbb{T}_{\mathbb{M}} \rightarrow \mathbb{M}$  è la proiezione del fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  sulla varietà  $\mathbb{M}$ , definita da

$$\pi_{\mathbb{M}}\{\mathbf{m}, \mathbf{h}\} = \mathbf{m}, \quad \forall \{\mathbf{m}, \mathbf{h}\} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}.$$

- Un *flusso*  $\mathbf{k}_{t,s}$  è una famiglia a due parametri di diffeomorfismi

$$\mathbf{k}_{t,s} : C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M}) \mapsto C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M}), \quad s, t \in I,$$

definiti localmente dalla relazione

$$\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{p}) \circ \chi_s(\mathbf{p}) = \chi_t(\mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{B}.$$

Il flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  associa quindi alla configurazione  $\chi_s \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  la configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$ .

- Sia  $\mathbf{v}_s \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$  un campo vettoriale nella configurazione  $\chi_s \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  e cioè tale che

$$\pi_{\mathbb{M}} \circ \mathbf{v}_s = \chi_s.$$

La *spinta* (o *differenziale*) di  $\mathbf{v}_s$  indotta dal flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  è il campo vettoriale nella configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$

$$\mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{v}_s \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}), \quad \pi_{\mathbb{M}} \circ \mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{v}_s = \chi_t,$$

definito localmente dall'identità

$$df(\chi_t(\mathbf{p})) [(\mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{v}_s)(\mathbf{p})] = d(f \circ \mathbf{k}_{t,s})(\chi_s(\mathbf{p})) [\mathbf{v}_s(\mathbf{p})], \quad \forall f \in C^1(\chi_t(\mathbf{p}), \mathfrak{R}).$$

Si noti che la definizione è posta in modo che valga la regola di derivazione a catena. L'insieme  $C^1(\mathbf{m}, \mathfrak{R})$  è detto *germe* delle funzioni scalari derivabili in un intorno del punto  $\mathbf{m} \in \mathbb{M}$ . La *spinta inversa*  $\mathbf{k}_{t,s} \ast = \mathbf{k}_{t,s}^{-1}$  è la spinta secondo il diffeomorfismo inverso.

- La *spinta di un campo tensoriale*  $\mathbf{a}_s \in C^k(\mathcal{B}, L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R}\})$  è il campo tensoriale  $\mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{a}_s \in C^k(\mathcal{B}, L\{\mathbb{T}_{\mathbb{M}}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R}\})$  definito localmente dalla relazione

$$(\mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{a}_s) (\mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{v}_s, \mathbf{k}_{t,s} \ast \mathbf{w}_s)(\mathbf{p}) = \mathbf{k}_{t,s} \ast (\mathbf{a}_s(\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s))(\mathbf{p}), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{B},$$

e per ogni  $\mathbf{v}_s, \mathbf{w}_s \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$ .

- Una *misura di deformazione tangente* nella configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  è un operatore differenziale di ordine  $r \leq k$

$$\mathbf{B}_t : C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}) \mapsto C^{k-r}(\mathcal{B}, D),$$

che ad ogni spostamento tangente  $\delta \chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$  associa il corrispondente campo di deformazione tangente  $\mathbf{B}_t(\delta \chi_t) \in C^{k-r}(\mathcal{B}, D)$ . Lo spazio delle deformazioni  $D$  è uno spazio tensoriale su  $\{\mathbb{V}, \mathbf{g}\}$ .

- Una *misura di deformazione finita*  $\mathfrak{D}$  è un operatore differenziale di ordine  $r \leq k$

$$\mathfrak{D} : C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M}) \mapsto C^{k-r}(\mathcal{B}, D),$$

che ad ogni valore del flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  associa il corrispondente campo di deformazione finita  $\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}) \in C^{k-r}(\mathcal{B}, D)$  che è nullo se e solo se la trasformazione indotta dal flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  è rigida. Si richiede inoltre che sia soddisfatta la

- *Condizione di consistenza*

$$\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{\tau,s}) = \mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}) + \mathbf{L}_{s,t}[\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{\tau,t})],$$

dove  $\mathbf{L}_{s,t}(\mathbf{p}) = \mathbf{L}_{t,s}^{-1}(\mathbf{p}) \in L(D, D)$  è un isomorfismo.

In virtù della relazione  $\mathbf{k}_{\tau,s} = \mathbf{k}_{\tau,t} \circ \mathbf{k}_{t,s}$  la condizione di consistenza garantisce che è soddisfatta la

■ *Proprietà di invarianza:*

una trasformazione rigida susseguente non modifica la misura di deformazione.

Sussiste infatti l'implicazione

$$\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{\tau,t}) = 0 \Rightarrow \mathfrak{D}(\mathbf{k}_{\tau,s}) = \mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}).$$

La proprietà di invarianza assicura che la misura di deformazione finita è indipendente dall'osservatore. Infatti un cambiamento di osservatore equivale ad effettuare una composizione del moto con una trasformazione rigida susseguente (vedi Tomo I sezione I.6 (p. 55)). Si noti che la condizione di consistenza stabilisce una sorta di additività della misura di deformazione che può essere così enunciata:

- Traformazioni successive danno luogo ad una deformazione totale che è pari alla somma delle deformazioni parziali riportate nella configurazione di partenza.

Le misure di deformazione finita e di deformazione tangente sono tra loro *compatibili* se risulta

$$\mathbf{B}_t(\dot{\mathbf{k}}_{t,t}) = \dot{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{\chi}_t),$$

dove

$$\dot{\mathbf{k}}_{t,t} = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathbf{k}_{\tau,t}, \quad \dot{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{\chi}_t) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathfrak{D}(\mathbf{k}_{\tau,t}).$$

La *condizione di consistenza* implica allora che sussiste la *relazione di compatibilità*

$$\dot{\mathfrak{D}}(\mathbf{k}_{t,s}) = \mathbf{L}_{s,t} [\dot{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{\chi}_t)],$$

in cui

$$\dot{\mathfrak{D}}(\mathbf{k}_{t,s}) = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathfrak{D}(\mathbf{k}_{\tau,s}).$$

La relazione di compatibilità si enuncia affermando che

- Il tasso di variazione della misura di deformazione finita è correlato alla misura di deformazione tangente da una funzione lineare ed invertibile.

La relazione di compatibilità tra le misure di deformazione finita e di deformazione tangente consente di definire lo stato di *sforzo coniugato* ad una misura di deformazione finita. Sia infatti  $\mathbf{T}(\boldsymbol{\chi}_t) \in S$  lo stato di sforzo secondo CAUCHY che nella configurazione  $\boldsymbol{\chi}_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  è associato alla deformazione tangente  $\dot{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{\chi}_t) \in D$  così che il prodotto interno

$$\mathbf{T}(\boldsymbol{\chi}_t) : \dot{\mathfrak{D}}(\boldsymbol{\chi}_t),$$

è il lavoro virtuale per unità di volume nella configurazione  $\boldsymbol{\chi}_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$ .

Sia quindi

$$\mathbf{K}(\mathbf{k}_{t,s}) = J(\mathbf{k}_{t,s}) \mathbf{T}(\chi_t),$$

lo sforzo di KIRCHHOFF associato allo sforzo di CAUCHY  $\mathbf{T}(\chi_t)$  in corrispondenza del flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$ . Lo scalare  $J(\mathbf{k}_{t,s})$  è lo Jacobiano della trasformazione  $\mathbf{k}_{t,s}$ . Allora lo stato di sforzo  $\mathfrak{S} \in S$  coniugato alla misura di deformazione finita  $\mathfrak{D}$  compatibile con la misura di deformazione tangente  $\mathbf{B}_t$  è definito dalla condizione di egualanza dei lavori virtuali per unità di volume nella configurazione  $\chi_s$

$$\mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}) : \dot{\mathfrak{D}}(\mathbf{k}_{t,s}) = \mathbf{K}(\mathbf{k}_{t,s}) : \dot{\mathfrak{D}}(\chi_t).$$

Dalla relazione di compatibilità si deduce quindi che

$$\mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}) : \dot{\mathfrak{D}}(\mathbf{k}_{t,s}) = \mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}) : \mathbf{L}_{t,s} [\dot{\mathfrak{D}}(\chi_t)] = \mathbf{L}_{t,s}^T \mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}) : \dot{\mathfrak{D}}(\chi_t).$$

Deve dunque risultare

$$\mathbf{L}_{t,s}^T \mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}) : \dot{\mathfrak{D}}(\chi_t) = \mathbf{K}(\mathbf{k}_{t,s}) : \dot{\mathfrak{D}}(\chi_t),$$

che, per l'arbitrarietà della deformazione tangente, equivale alle relazioni

$$\boxed{\mathbf{K}(\mathbf{k}_{t,s}) = \mathbf{L}_{t,s}^T \mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}), \quad \mathfrak{S}(\mathbf{k}_{t,s}) = \mathbf{L}_{t,s}^{-T} \mathbf{K}(\mathbf{k}_{t,s}).}$$

### Osservazione 1.1.

- Nel modello del *continuo di CAUCHY* la *varietà base*  $\mathcal{B}$  è un dominio dello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{S}$ . La varietà  $\mathbb{M}$  è lo spazio lineare tridimensionale  $V(3)$  delle traslazioni nello spazio affine euclideo  $\mathbb{S}$  e lo spazio lineare  $\mathbb{V} = \mathbb{M} = V(3)$  è dotato dell'usuale prodotto interno.

Il fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è costituito dalla unione disgiunta di copie dello spazio lineare delle traslazioni  $V(3)$  attaccate ai punti dello spazio lineare  $V(3)$ . La struttura locale del continuo di CAUCHY degenera quindi in quella dello spazio tangente. Si dice pertanto che il modello di CAUCHY è privo di struttura locale.

La *misura di deformazione* di GREEN  $\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s})$  è definita dall'applicazione

$$\mathbf{k}_{t,s} \mapsto \frac{1}{2} (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{g}_{\mathbb{S}} - \mathbf{g}_{\mathbb{S}}),$$

dove  $\mathbf{g}_{\mathbb{S}}$  è il tensore metrico dello spazio euclideo  $\mathbb{S}$ . La misura di GREEN soddisfa la condizione di consistenza in quanto

$$\mathbf{k}_{\tau,s}^* \mathbf{g}_{\mathbb{S}} - \mathbf{g}_{\mathbb{S}} = (\mathbf{k}_{t,s}^* \circ \mathbf{k}_{\tau,t}^*) \mathbf{g}_{\mathbb{S}} - \mathbf{g}_{\mathbb{S}} = \mathbf{k}_{t,s}^* (\mathbf{k}_{\tau,t}^* \mathbf{g}_{\mathbb{S}} - \mathbf{g}_{\mathbb{S}}) + (\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{g}_{\mathbb{S}} - \mathbf{g}_{\mathbb{S}}).$$

La misura di GREEN è compatibile con la deformazione tangente nella configurazione  $\chi_t$

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{g}_{\mathbb{S}} = \frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathbf{k}_{\tau,t}^* \mathbf{g}_{\mathbb{S}} = \mathbf{D}_t = \text{sym } \mathbf{L}_t$$

dove  $\mathbf{L}_t = \operatorname{grad} \mathbf{v}$  è il gradiente del campo di velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_t$  associato al flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  dall'equazione di evoluzione

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=t} \mathbf{k}_{\tau,t} = \mathbf{v}_t(\mathbf{k}_{\tau,t}).$$

- Nei modelli continui della *fune* e della *membrana* la *varietà base*  $\mathcal{B}$  è una varietà di dimensione rispettivamente  $d = 1$  e  $d = 2$  immersa dello spazio euclideo tridimensionale  $\mathbb{S}$ . La varietà  $\mathbb{M}$  è lo spazio lineare tridimensionale  $V(3)$  delle traslazioni nello spazio affine euclideo  $\mathbb{S}$  e lo spazio lineare  $\mathbb{V}$  coincidente con  $\mathbb{M}$  è dotato dell'usuale prodotto interno.

Il fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è costituito dalla unione disgiunta di copie dello spazio lineare delle traslazioni  $V(3)$  attaccate ai punti dello spazio lineare  $V(3)$ . La struttura locale dei modelli di fune e di membrana degenera quindi in quella dello spazio tangente. Si dice pertanto che tali modelli sono privi di struttura locale. La *misura di deformazione di GREEN* associata al flusso  $\mathbf{k}_{t,s}$  è definita dall'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{t,s} \mapsto & \frac{1}{2} [(\mathbf{k}_{t,s}^* \mathbf{g}_{\mathbb{S}})(\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2) - \mathbf{g}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2)] = \\ & = \frac{1}{2} [\mathbf{g}_{\mathbb{S}}(d\mathbf{k}_{t,s}[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1], d\mathbf{k}_{t,s}[\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2]) - \mathbf{g}_{\mathbb{S}}(\boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_1, \boldsymbol{\Pi}^T \mathbf{h}_2)], \end{aligned}$$

per ogni  $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in V(3)$ .

La misura di GREEN è compatibile con la deformazione tangente

$$\frac{1}{2} \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \mathbf{g}_{\mathbb{S}} = \operatorname{sym}(\boldsymbol{\Pi} \nabla \mathbf{v} \boldsymbol{\Pi}^T)$$

dove  $\boldsymbol{\Pi} \in L\{\mathbb{T}_{\mathbb{S}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}}\}$  è il proiettore ortogonale da  $\mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  su  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{T}_{\mathbb{S}}$  e  $\mathbf{v} \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$  è un cinematismo.

- Nel modello del *continuo di COSSERAT* si ha che  $\mathbb{M} = V(3) \times SO(3)$ , varietà prodotto dello spazio lineare  $V(3)$  delle traslazioni e del gruppo delle rotazioni  $SO(3)$ <sup>27</sup>. Lo spazio lineare  $\mathbb{V}$  è  $V(3) \times L(V(3); V(3))$ .

Il fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  è l'unione disgiunta degli spazi lineari  $\operatorname{Skw}(3) \mathbf{Q}$  con  $\mathbf{Q} \in SO(3)$ , avendo posto

$$\operatorname{Skw}(3) \mathbf{Q} = \{ \mathbf{T} \in L\{\mathbb{V}; \mathbb{V}\} : \mathbf{T} = \mathbf{W} \mathbf{Q}, \quad \mathbf{W} \in \operatorname{Skw}(3), \mathbf{Q} \in SO(3) \}.$$

Il flusso è rappresentato dalla coppia  $\{\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}\}$  dove

$$\mathbf{k}_{t,s} \circ \chi_s = \chi_s + \mathbf{u}_{t,s} = \chi_t, \quad \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_t.$$

---

<sup>27</sup> L'acronimo SO sta per *Special Orthogonal group*.

Si è denotato con  $\{\chi_s, \mathbf{Q}_s\}(\mathbf{p}) \in \mathbf{V}(3) \times \text{SO}(3)$  la coppia traslazione-rotazione della particella  $\mathbf{p} \in \mathcal{B}$  nella configurazione al tempo  $s \in I$  e con  $\mathbf{u}_{t,s}$  il campo di spostamenti relativo al trasferimento dalla configurazione al tempo  $s \in I$  a quella al tempo  $t \in I$ . Una misura di deformazione per il *continuo di COSSERAT* è

$$\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) = \{\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}), \Delta(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s})\}$$

dove

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}) := \boldsymbol{\Omega}_{t,s}, & \text{tensore di microcurvatura,} \\ \Delta(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) := \mathbf{Q}_{t,s}^T d\mathbf{k}_{t,s} - \mathbf{I}, & \text{divario della deformazione,} \end{cases}}$$

con

$$\boldsymbol{\Omega}_{t,s}[\mathbf{h}] := \text{axial}(\mathbf{Q}_{t,s}^T d\mathbf{Q}_{t,s}[\mathbf{h}]), \quad \forall \mathbf{h} \in \mathbf{V}(3).$$

Dunque  $D = \mathbf{V}(3) \times \text{L}(\mathbf{V}(3); \mathbf{V}(3))$ .

- Nel modello di *trave di TIMOSHENKO* si ha ancora che  $\mathbb{M} = \mathbf{V}(3) \times \text{SO}(3)$  e  $\mathbb{V} = \mathbf{V}(3) \times \text{L}(\mathbf{V}(3); \mathbf{V}(3))$ . Una misura di deformazione finita è fornita dalla coppia  $\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) = \{\mathbf{c}(\mathbf{Q}_{t,s}), \delta(\mathbf{u}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s})\}$  dove

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{c}(\mathbf{Q}_{t,s}) := \text{axial}(\mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}'_{t,s}) & \text{vettore assiale curvatura,} \\ \delta(\mathbf{u}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) := \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{r}'_t - \mathbf{r}'_s & \text{vettore scorrimento.} \end{cases}}$$

L'apice  $(\cdot)'$  denota la derivata rispetto all'ascissa curvilinea lungo l'asse della trave nella configurazione al tempo iniziale. Pertanto

$$\mathbf{Q}'_{t,s} = \frac{d}{d\xi_s} \mathbf{Q}_{t,s}, \quad \mathbf{Q}'_{\tau,t} = \frac{d}{d\xi_t} \mathbf{Q}_{\tau,t}.$$

■

**Osservazione 1.2.** Si noti l'analogia che sussiste tra la misura di deformazione per la *trave di TIMOSHENKO* e quella per il *continuo di COSSERAT*. (vedi Tomo I sezione IV.8 (p. 439) e sezione IV.13 (p. 473)).

Si può verificare che tali misure soddisfano la condizione di consistenza. Per la *trave di TIMOSHENKO* si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\tau,s}^T \mathbf{Q}'_{\tau,s} &= (\mathbf{Q}_{\tau,t} \mathbf{Q}_{t,s})^T (\mathbf{Q}_{\tau,t} \mathbf{Q}_{t,s})' = \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}_{\tau,t}^T (\mathbf{Q}_{\tau,t} \mathbf{Q}_{t,s})' = \\ &= \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}_{\tau,t}^T (\mathbf{Q}'_{\tau,t} \mathbf{Q}_{t,s} \frac{d\xi_t}{d\xi_s} + \mathbf{Q}_{\tau,t} \mathbf{Q}'_{t,s}) = \\ &= \mathbf{Q}_{t,s}^T (\mathbf{Q}_{\tau,t}^T \mathbf{Q}'_{\tau,t}) \mathbf{Q}_{t,s} \frac{d\xi_t}{d\xi_s} + \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}'_{t,s}. \end{aligned}$$

Dunque il tensore emisimmetrico curvatura  $\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}) = \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}'_{t,s}$  soddisfa la relazione

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{\tau,s}) = \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{C}(\mathbf{Q}_{\tau,t}) \mathbf{Q}_{t,s} + \mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}).$$

Analogamente si ha che

$$\mathbf{Q}_{\tau,s}^T \mathbf{r}'_\tau - \mathbf{r}'_s = \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}_{\tau,t}^T \mathbf{r}'_\tau - \mathbf{r}'_s = \mathbf{Q}_{t,s}^T (\mathbf{Q}_{\tau,t}^T \mathbf{r}'_\tau - \mathbf{r}'_t) + \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{r}'_t - \mathbf{r}'_s.$$

Dunque lo scorrimento soddisfa la relazione

$$\delta(\mathbf{u}_{\tau,s}, \mathbf{Q}_{\tau,s}) = \mathbf{Q}_{t,s}^T \delta(\mathbf{u}_{\tau,t}, \mathbf{Q}_{\tau,t}) + \delta(\mathbf{u}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}),$$

e la proprietà di consistenza è dimostrata. ■

### 1.1. Continui elasticci

Se il materiale di cui è costituito il continuo è modellato come un mezzo elastico, il corrispondente *potenziale elastico* è definito localmente in  $\mathcal{B}$  da una funzione scalare

$$\varphi_{\mathbf{p}} : D \mapsto \mathfrak{R}, \quad \mathbf{p} \in \mathcal{B},$$

che ad ogni valore locale deformazione finita  $\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \in D$  associa il corrispondente valore dell'energia elastica per unità di volume nella configurazione di riferimento  $\mathcal{B}$ . La configurazione iniziale  $\chi_s$  è assunta essere una *configurazione naturale* e cioè priva di deformazione elastica e di stato di sforzo.

■ Il funzionale *energia elastica*

$$\varphi : \mathbf{C}^{k-r}(\mathcal{B} \times I, D) \mapsto \mathfrak{R},$$

è definito dall'integrale

$$\varphi(\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s})) = \int_{\mathcal{B}} \varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s})) \, d\mu_{\mathcal{B}},$$

con  $\mu_{\mathcal{B}}$  forma di volume su  $\mathcal{B}$ .

■ Il *legame elastico*, che corrella uno *stato locale di sforzo*  $\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \in S$  ed una *misura locale di deformazione*  $\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \in D$  tra loro coniugati, è espresso dalla legge

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) = d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s})).$$

■ Il funzionale *energia potenziale elastica* associa ad ogni campo cinematico la corrispondente energia elastica ed è definito dalla composizione

$$\phi(\mathbf{k}_{t,s}) := (\varphi \circ \mathfrak{D})(\mathbf{k}_{t,s}).$$

Risulta quindi

$$\phi(\mathbf{k}_{t,s}) = \int_{\mathcal{B}} \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \, d\mu_{\mathcal{B}},$$

$$\text{con } \phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) = \varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s})).$$

### 1.2. Equilibrio elastico

La condizione di equilibrio elastico al tempo  $t \in I$  di una struttura continua nella configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  può essere espressa imponendo nella configuazione di riferimento  $\chi_{\mathcal{B}}$  la condizione variazionale

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{S}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \circ d\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_{\mathcal{B}} &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_{\mathcal{B}} + \\ &+ \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_S, \end{aligned}$$

per ogni  $\delta \chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$  con  $\mathbf{b}_{\mathbf{p}} \in C^k(\mathcal{B} \times I, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*)$  campo covettoriale di forze di massa,  $\mathbf{t}_{\mathbf{p}} \in C^k(\mathcal{B} \times I, \mathbb{T}_{\mathbb{M}}^*)$  campo covettoriale di forze di contatto, definite nella configurazine di riferimento, e  $d$  derivata direzionale.

Ricordando l'espressione del legame elastico e la definizione del funzionale energia potenziale elastica, la condizione variazionale di equilibrio si può scrivere

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} d\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_{\mathcal{B}} &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_{\mathcal{B}} + \\ &+ \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_S, \end{aligned}$$

per ogni  $\delta \chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$ .

### 1.3. Equilibrio incrementale

Alla condizione di equilibrio elastico incrementale si perviene effettuando una derivazione rispetto al tempo. Osservando che la condizione di equilibrio elastico è soddisfatta per ogni  $t \in I$  si potrebbe pensare di imporre la condizione

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt} (d\phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p})) \, d\mu_{\mathcal{B}} &= \int_{\mathcal{B}} \frac{d}{dt} (\mathbf{b}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p})) \, d\mu_{\mathcal{B}} + \\ &+ \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{d}{dt} (\mathbf{t}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p})) \, d\mu_S, \end{aligned}$$

per ogni  $\delta \chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$ .

Emerge però a tal punto una evidente difficoltà.

- Al variare del parametro evolutivo  $t \in I$  varia in generale anche lo spazio tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$  che definisce la *struttura locale* del continuo.

D’altro canto il vettore spostamento virtuale  $\delta\chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$  è un arbitrario campo di prova nello spazio tangente.

Va dunque chiarito come si debba effettuare la derivata temporale del vettore  $\delta\chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$ .

Per fissare le idee si considerino dapprima due situazioni apparentemente diverse.

- Se la varietà  $\mathbb{M}$  è uno sottospazio affine, al variare di  $\mathbf{m} = \delta\chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{M}$  gli spazi tangentici  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{m})$  sono copie identiche di uno stesso spazio tangente che può essere identificato con il sottospazio lineare parallelo a  $\mathbb{M}$ . E’ dunque possibile assumere che, nell’effettuare la derivazione rispetto al tempo, il vettore spostamento virtuale rimanga costante.
- Nel caso generale è invece indispensabile effettuare un’estensione del vettore spostamento virtuale ad un campo vettoriale su  $\mathbb{M}$ .

In effetti anche nel primo caso, assumendo che il vettore spostamento virtuale rimanga costante, si effettua una *estensione canonica* ad un campo vettoriale su  $\mathbb{M}$ , estensione consentita dalla particolare struttura geometrica (affine) della varietà  $\mathbb{M}$ .

Nel secondo caso non esiste alcuna *estensione canonica* e vi sono infiniti possibili modi di estendere un vettore spostamento virtuale ad un campo vettoriale su  $\mathbb{M}$ .

E’ pertanto evidente come non sia corretto formulare la condizione di equilibrio elastico incrementale mediante una semplice derivazione rispetto al tempo della condizione variazionale di equilibrio elastico.

Vi è infine da notare che, nel caso affine, la peculiarità della geometria della varietà  $\mathbb{M}$  serve solo a nascondere, come spesso accade, la problematica che si presenta nel formulare la condizione di equilibrio incrementale.

Infatti anche nel primo caso è possibile effettuare in infiniti modi l’estensione di un vettore spostamento virtuale ad un campo vettoriale su  $\mathbb{M}$  ed è naturale richiedere che il risultato non dipenda da tale scelta arbitraria.

La soluzione della problematica posta dalla definizione della condizione di equilibrio incrementale può perseguiarsi facendo ricorso alle proprietà fondamentali delle varietà di RIEMANN.

Preliminarmente si osservi che la derivata sotto il segno di integrale al primo membro della condizione di equilibrio incrementale si può scrivere

$$\frac{d}{dt} (d\phi_{\mathbf{p}}(\chi_t) \cdot \delta\chi_t(\mathbf{p})) = d(d\phi_{\mathbf{p}}(\chi_t) \cdot \delta\chi_t(\mathbf{p}))[\dot{\chi}_t(\mathbf{p})].$$

Nel seguito, per semplicità, si porrà  $\mathbf{m} = \chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{M}$  e si adotteranno le notazioni

- $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$  per i campi vettoriali sul fibrato tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}$ ,
- $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m$  per i corrispondenti vettori dello spazio tangente  $\mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{m})$ .

Precisamente si ponga  $\delta\chi_t = \mathbf{Y} \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  e

$$\dot{\chi}_t(\mathbf{p}) = \frac{d}{dt} \chi_t(\mathbf{p}) = \mathbf{X}_m \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{m})$$

Dunque, omettendo di indicare l'argomento  $\chi$ , si ha l'espressione

$$\frac{d}{dt} (d\phi_{\mathbf{p}}(\chi_t) \cdot \delta\chi_t(\mathbf{p})) = d(d\phi_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Y})[\mathbf{X}_m] = d_{\mathbf{X}_m}(d\phi_{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{Y}).$$

Si richiamino ora alcune proprietà fondamentali della geometria di RIEMANN (vedi Tomo I sezione I.12.5 (p. 148)).

Nella varietà di RIEMANN  $\{\mathbb{M}, g\}$  è univocamente definita una connessione simmetrica  $\nabla$  (*connessione di LEVI-CIVITA*) caratterizzata dalle seguenti proprietà.

- Ad ogni campo vettoriale  $\mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  la mappa  $\mathbf{X} \mapsto \nabla \mathbf{X}$  associa un campo tensoriale

$$\nabla \mathbf{X} : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathbb{T}_{\mathbb{M}})$$

di tipo  $(1, 1)$  tale che per  $\mathbf{Y}_m, \mathbf{Z}_m \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{m})$  si abbia

- i)  $\nabla \mathbf{X} [\alpha \mathbf{Y}_m + \beta \mathbf{Z}_m] = \alpha \nabla \mathbf{X} [\mathbf{Y}_m] + \beta \nabla \mathbf{X} [\mathbf{Z}_m],$
- ii) 
$$\begin{cases} \nabla(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2) = \nabla \mathbf{X}_1 + \nabla \mathbf{X}_2, \\ \nabla(f \mathbf{X}) [\mathbf{Y}_m] = df [\mathbf{Y}_m] \mathbf{X} + f \nabla \mathbf{X} [\mathbf{Y}_m] \end{cases}$$
- iii)  $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{0},$
- iv)  $d_{\mathbf{Z}}(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) = g(\nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{X}, \mathbf{Y}) + g(\mathbf{X}, \nabla_{\mathbf{Z}} \mathbf{Y}).$

La proprietà i) esprime la tensorialità di tipo  $(1, 1)$  di  $\nabla \mathbf{X}$ , le proprietà ii) sono caratteristiche di una derivazione.

La proprietà iii) assicura la simmetria della connessione e si enuncia affermando che è nullo il campo tensoriale di *torsione della connessione sulla varietà*

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := (\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} - \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{X}) - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}],$$

dove  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  è la *parentesi di LIE*. La proprietà iv) esprime l'annullarsi della derivata covariante del campo dei tensori metrici.

La derivata covariante di un campo vettoriale  $\mathbf{Y} : \mathbb{M} \mapsto \mathbb{T}_{\mathbb{M}}$  secondo un vettore  $\mathbf{X}_m \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\mathbf{m})$  è denotata con i simboli equivalenti

$$\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y} = \nabla \mathbf{Y}[\mathbf{X}_m].$$

La derivata covariante può essere definita in modo invariante mediante la notevole *formula di KOSZUL* [11]:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{g}(\nabla_{\mathbf{X}_m}\mathbf{Y}, \mathbf{Z}_m) &= d_{\mathbf{X}}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) + d_{\mathbf{Y}}(\mathbf{g}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})) - d_{\mathbf{Z}}(\mathbf{g}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) + \\ &\quad + \mathbf{g}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - \mathbf{g}([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}) + \mathbf{g}([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}). \end{aligned}$$

Si noti che il primo membro dipende solo dai vettori  $\mathbf{X}_m, \mathbf{Z}_m \in \mathbb{T}_M(m)$  mentre il calcolo del secondo membro richiede di costruire due campi vettoriali  $\mathbf{X}, \mathbf{Z} : M \mapsto \mathbb{T}_M$  estensioni di  $\mathbf{X}_m, \mathbf{Z}_m \in \mathbb{T}_M(m)$ .

Infatti ciò è necessario sia per effettuare le derivate direzionali sia per valutare le parentesi di LIE mediante le corrispondenti derivate di LIE (vedi Tomo I sezione I.12.3 (p. 135)) tramite la formula

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{k}_t^*\mathbf{Y}.$$

dove  $\mathbf{k}_t$  è il flusso del campo vettoriale  $\mathbf{X} : M \mapsto \mathbb{T}_M$ , definito dall'equazione differenziale di evoluzione

$$\frac{d}{dt} \mathbf{k}_t(\mathbf{m}) = \mathbf{X}(\mathbf{k}_t(\mathbf{m})), \quad \mathbf{k}_0(\mathbf{m}) = \mathbf{m}.$$

La derivata covariante di un campo di covettori  $\alpha : M \mapsto L(\mathbb{T}_M; \mathfrak{R})$  è definita, in modo che valga la formula di LEIBNIZ, dall'identità

$$(\nabla_{\mathbf{X}_m}\alpha)[\mathbf{Y}_m] := d_{\mathbf{X}_m}(\alpha[\mathbf{Y}]) - \alpha[\nabla_{\mathbf{X}_m}\mathbf{Y}].$$

La definizione è ben posta poiché, come si dimostrerà tra breve, il secondo membro non dipende dalla estensione del vettore  $\mathbf{Y}_m \in \mathbb{T}_M(m)$  ad un campo vettoriale  $\mathbf{Y} : M \mapsto \mathbb{T}_M$ , anche se separatamente i due addendi a secondo membro dipendono da tale estensione.

Ciò equivale ad affermare che l'espressione a secondo membro definisce un campo tensoriale due volte covariante su  $M$ .

Per stabilire la proprietà di tensorialità si applica il seguente criterio [8] (vedi Tomo Zero sezione IV.5 (p. 74)):

**Proposizione 1.1.** *Se un'applicazione multilineare*

$$\overbrace{\mathbf{A} : \mathbb{T}_M \times \dots \times \mathbb{T}_M}^{k \text{ volte}} \mapsto \mathfrak{R},$$

*è lineare sullo spazio  $C^\infty(M)$  e cioè risulta*

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \dots, f\mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_k) = f\mathbf{A}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k),$$

*allora esiste un'unico campo tensoriale  $T$  su  $M$  tale che  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_T$  dove*

$$\mathbf{A}_T(\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_k)(\mathbf{p}) := T(\mathbf{p})(\mathbf{v}_1(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{v}_k(\mathbf{p})), \quad \forall \mathbf{p} \in M,$$

*è l'applicazione multilineare definita puntualmente dal campo tensoriale  $T$ .*  $\square$

**Proposizione 1.2. Tensorialità della derivata covariante di una forma lineare.** *La derivata covariante di un campo di covettori  $\alpha : \mathbb{M} \mapsto L(\mathbb{T}_{\mathbb{M}}; \mathfrak{R})$  definita da*

$$(\nabla_{\mathbf{X}_m} \alpha)[\mathbf{Y}_m] := d_{\mathbf{X}_m}(\alpha[\mathbf{Y}]) - \alpha[\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}],$$

*è un campo tensoriale due volte covariante.*

**Dim.** Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{M})$ . Allora

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{X}_m}(\alpha[f \mathbf{Y}]) &= d_{\mathbf{X}_m}(f(\alpha[\mathbf{Y}])) = (d_{\mathbf{X}_m}f)(\alpha[\mathbf{Y}]) + f d_{\mathbf{X}_m}(\alpha[\mathbf{Y}]), \\ \alpha[\nabla_{\mathbf{X}_m}(f \mathbf{Y})] &= \alpha[(d_{\mathbf{X}_m}f)\mathbf{Y}] + f \alpha[\nabla_{\mathbf{X}_m}\mathbf{Y}], \end{aligned}$$

per cui sottraendo si ottiene che

$$d_{\mathbf{X}_m}(\alpha[f \mathbf{Y}]) - \alpha[\nabla_{\mathbf{X}_m}(f \mathbf{Y})] = f d_{\mathbf{X}_m}(\alpha[\mathbf{Y}]) - f \alpha[\nabla_{\mathbf{X}_m}(\mathbf{Y})],$$

e pertanto il criterio di tensorialità della proposizione 1.1 è soddisfatto.  $\square$

Ponendo  $\alpha = d\phi_p$  nella formula della derivata covariante di una forma lineare si ottiene l'espressione del campo

■ Hessiano della funzione  $\phi$  definito localmente da

$$\nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \phi_p := (\nabla_{\mathbf{X}_m} d\phi_p)[\mathbf{Y}_m] = d_{\mathbf{X}_m}(d\phi_p \cdot \mathbf{Y}) - d\phi_p[\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}].$$

La proposizione 1.2 assicura che il primo membro è un campo di tensori due volte covariante.

■ Il campo tensoriale Hessiano di  $\phi$  è simmetrico in quanto (vedi Tomo I sezione I.12.9 (p. 160)) dalla definizione della parentesi di LIE e dalla proprietà di simmetria della connessione si ha rispettivamente che

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{X}_m}(d\phi_p[\mathbf{Y}]) - d_{\mathbf{Y}_m}(d\phi_p[\mathbf{X}]) &= d\phi_p[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \\ d\phi_p[\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}] - d\phi_p[\nabla_{\mathbf{Y}_m} \mathbf{X}] &= d\phi_p[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]. \end{aligned}$$

Si ritrova così il risultato stabilito nella sezione I.12.9 (p. 160) del Tomo I.

■ La *rigidezza tangente* della struttura elastica nella configurazione individuata dal campo cinematico  $\mathbf{k}_{t,s} \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  è il campo di tensori simmetrici  $\nabla_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^2 \phi(\mathbf{k}_{t,s})$  definito da

$$\nabla_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^2 \phi(\mathbf{k}_{t,s}) := \int_{\mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{X}, \mathbf{Y}}^2 \phi_p(\mathbf{k}_{t,s}) \, d\mu_{\mathcal{B}}.$$

Ricordando che il potenziale elastico è definito dalla composizione

$$\phi = \varphi \circ \mathfrak{D},$$

la formula dell'Hessiano può essere esplicitata applicando localmente le regole di derivazione a catena e di derivazione parziale, così che

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}^2 \phi_{\mathbf{P}} &= d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} (\varphi_{\mathbf{P}} \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})) - d_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} (\varphi_{\mathbf{P}} \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})) = \\ &= d^2 \varphi_{\mathbf{P}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})) \cdot d\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})[\mathbf{Y}] \cdot d\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})[\mathbf{X}] + \\ &\quad + d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})) \cdot [d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} \mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s}) - d_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})].\end{aligned}$$

La *rigidezza tangente* può pertanto essere decomposta nella somma di due aliquote.

- La *rigidezza elastica tangente* rappresentata dal tensore simmetrico due volte covariante

$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} d^2 \varphi_{\mathbf{P}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})) \cdot d\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})[\mathbf{Y}] \cdot d\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})[\mathbf{X}] \, d\mu_{\mathcal{B}}.}$$

- La *rigidezza tangente geometrica* rappresentata dal tensore simmetrico due volte covariante

$$\boxed{\int_{\mathcal{B}} d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})) \cdot [d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} \mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s}) - d_{\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}} \mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s})] \, d\mu_{\mathcal{B}}.}$$

Quest'ultima aliquota è dovuta alla non linearità geometrica del modello.

La simmetria della rigidezza elastica tangente segue dalla simmetria della derivata seconda del funzionale  $\varphi_{\mathbf{P}}$  che è definito sullo spazio lineare  $D$ . La simmetria della rigidezza tangente geometrica è allora una conseguenza della simmetria dell'Hessiano della funzione  $\phi_{\mathbf{P}}$ .

La differenza sostanziale che il calcolo della rigidezza tangente geometrica comporta nel caso in cui lo spazio delle configurazioni è una varietà differenziabile risiede nel termine

$$d\mathfrak{D}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}_{t,s}) [\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}].$$

Si noti che questo termine può essere assunto nullo se la varietà  $\mathbb{M}$  è uno spazio affine. In tal caso infatti si ha che la derivata covariante coincide con quella direzionale e che il vettore  $\mathbf{Y}_m$  può essere esteso, in modo canonico, ad un campo vettoriale  $\mathbf{Y}$  costante su  $\mathbb{M}$ . Ne segue che la derivata direzionale  $\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y} = d_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}$  è nulla.

L'importanza del termine  $d\mathcal{D}_p(\mathbf{k}_{t,s}) [\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}]$  è stata evidenziata per la prima volta in [14] dall'autore.

La presenza di questo termine ha un duplice benefico effetto:

- fa assumere alla rigidezza tangente geometrica un carattere tensoriale e
- rende simmetrica la rigidezza tangente geometrica.

Trascurare tale termine, considerando solo la derivata seconda

$$d_{\mathbf{X}} d_{\mathbf{Y}} \mathcal{D}_p(\mathbf{k}_{t,s}),$$

costituisce un errore fatale. Infatti l'espressione della rigidezza geometrica cui si giunge dipende dalla scelta (arbitraria) dell'estensione del vettore spostamento virtuale locale  $\delta \chi_p$  ad un campo vettoriale su  $\mathbb{M}$ .

La derivata covariante  $\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}$  che compare nella formula dell'Hessiano può essere calcolata in due modi alternativi.

- La prima procedura è basata sulla definizione di una metrica di RIEMANN e fa ricorso alla formula di KOSZUL che esprime la derivata covariante in funzione del tensore metrico.

La parentesi di LIE  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  che compare nella formula di KOSZUL può essere calcolata come derivata di LIE di un campo vettoriale lungo un flusso.

In definitiva il calcolo della rigidezza tangente geometrica richiede

- l'estensione dei vettori  $\mathbf{X}_m, \mathbf{Y}_m \in \mathbb{T}_M(m)$  a campi vettoriali  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{T}_M$ ,
- il calcolo del flusso del campo  $\mathbf{X} \in \mathbb{T}_M$ ,
- il calcolo della derivata di LIE del campo  $\mathbf{Y} \in \mathbb{T}_M$  lungo il flusso del campo  $\mathbf{X} \in \mathbb{T}_M$ ,
- la definizione, sulla varietà  $\mathbb{M}$  della struttura geometrica locale, di una metrica di RIEMANN e della relativa connessione di LEVI-CIVITA,
- la determinazione della derivata covariante mediante la formula di KOSZUL,
- il calcolo di derivate direzionali prima e seconda della deformazione finita.

- Una seconda procedura più diretta si basa sulla definizione della derivata covariante come proiezione ortogonale della derivata direzionale in  $\{\mathbb{V}, g\}$  sul fibrato tangente  $\mathbb{T}_M$  alla varietà  $\mathbb{M}$ .

Nella sezione seguente entrambe le procedure descritte sono applicate per fornire l'espressione della rigidezza tangente della trave di TIMOSHENKO.

## 2. LA TRAVE ELASTICA DI TIMOSHENKO

Si richiamano preliminarmente gli elementi essenziali della trattazione della deformazione finita delle travi di TIMOSHENKO svolta nel Tomo I alla sezione IV.8 (p. 439).

Come configurazione di riferimento della trave si assuma un intervallo chiuso  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$  in cui varia un'ascissa  $\lambda$ .

In un processo evolutivo in un intervallo di osservazione  $I = [t_0, t_f]$  le configurazioni della trave sono assegnate mediante una famiglia di mappe di posizionamento  $\chi_t = \{\mathbf{r}_t, \mathbf{Q}_t\}$  che ad ogni istante di tempo  $t \in I$  associa una coppia di campi  $\{\mathbf{r}_t, \mathbf{Q}_t\}$  che assegnano ad ogni valore dell'ascissa  $\lambda \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$  rispettivamente la posizione del baricentro  $\mathbf{r}_t \in V(3)$  e la rotazione  $\mathbf{Q}_t \in SO(3)$  della corrispondente sezione trasversale della trave.

I valori locali dei parametri cinematici appartengono quindi alla varietà differenziabile prodotto dello spazio lineare delle traslazioni  $V(3)$  e della varietà differenziabile delle rotazioni  $SO(3)$ . In un processo evolutivo il flusso è caratterizzato dalla coppia

$$\{\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}\},$$

dove

$$\mathbf{k}_{t,s}(\mathbf{r}_s) = \mathbf{r}_s + \mathbf{u}_{t,s} = \mathbf{r}_t, \quad \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{Q}_s = \mathbf{Q}_t.$$

Una trave di TIMOSHENKO subisce una *trasformazione rigida* nel trasferimento dalla posizione  $\chi_s = \{\mathbf{r}_s, \mathbf{Q}_s\}$  alla posizione  $\chi_t = \{\mathbf{r}_t, \mathbf{Q}_t\}$  se la rotazione relativa  $\mathbf{Q}_{t,s}$  delle sezioni trasversali è uniforme e le posizioni delle linee d'asse sono tali che

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{r}_s + \mathbf{c},$$

con  $\mathbf{c} \in V(3)$  campo vettoriale costante. Sussiste il seguente risultato.

**Proposizione 2.1. Misure di deformazione.** *Una trave di TIMOSHENKO subisce una trasformazione rigida se e solo se si annulla la misura di deformazione finita*

$$\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) := \begin{vmatrix} \delta(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}) \end{vmatrix},$$

dove

$$\delta(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) := \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{r}'_t - \mathbf{r}'_s, \quad \text{scorrimento}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}) := \mathbf{Q}_{t,s}^T \mathbf{Q}'_{t,s}, \quad \text{curvatura}.$$

L'apice  $(\cdot)'$  denota la derivata rispetto all'ascissa curvilinea lungo l'asse della trave nella configurazione al tempo iniziale  $s \in I$ .

**Dim.** In una trasformazione rigida la rotazione relativa delle sezioni è uniforme e dunque si ha che  $\mathbf{Q}'_{t,s} = \mathbf{O}$  e quindi  $\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}) = \mathbf{O}$ . Derivando l'espressione

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{r}_s + \mathbf{c},$$

rispetto all'ascissa curvilinea  $\xi$  lungo l'asse della trave nella configurazione al tempo iniziale  $s \in I$  si ottiene che

$$\mathbf{r}'_t = \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{r}'_s \iff \delta(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) = \mathbf{o}.$$

Viceversa se  $\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s}) = \{\mathbf{o}, \mathbf{O}\}$ , la condizione  $\mathbf{C}(\mathbf{Q}_{t,s}) = \mathbf{O}$  assicura che la rotazione  $\mathbf{Q}_{t,s}$  è uniforme. La condizione  $\delta(\mathbf{k}_{t,s}) = \mathbf{o}$  assicura quindi che  $\mathbf{r}'_t = \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{r}'_s$ , ed integrando rispetto ad  $\lambda$  si deduce che vale la relazione

$$\mathbf{r}_t = \mathbf{Q}_{t,s} \mathbf{r}_s + \mathbf{c},$$

caratteristica di una trasformazione rigida.  $\square$

La misura di deformazione introdotta nella proposizione 2.1 soddisfa la condizione di consistenza (vedi l'osservazione 1.2 (p. 322)).

## 2.1. Equilibrio elastico

Si consideri un comportamento elastico definito da un potenziale elastico  $\varphi$  funzione della deformazione finita  $\mathfrak{D}(\mathbf{k}_{t,s}, \mathbf{Q}_{t,s})$  misurata a partire da una configurazione naturale  $\chi_s \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$ .

Ciò è lecito in quanto la misura di deformazione  $\mathfrak{D}$  soddisfa la *proprietà di invarianza*. Se così non fosse il valore del potenziale elastico  $\varphi$  dipenderebbe dall'osservatore galileiano del processo, in contrasto con il *principio di indifferenza materiale*.

Il legame elastico impone che localmente in  $\mathcal{B}$  la misura di sforzo  $\mathfrak{S} = \{\mathbf{F}, \mathbf{M}\}$  coniugata alla misura di deformazione  $\mathfrak{D} = \{\delta, \mathbf{C}\}$  sia il gradiente del potenziale  $\varphi$  e cioè che sia

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{p}} = d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}).$$

L'equilibrio del continuo elastico nella configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$  si può imporre, in termini di campi definiti sulla configurazione di riferimento  $\mathcal{B}$ , mediante la condizione varazionale

$$\int_{\mathcal{B}} d(\varphi_{\mathbf{p}} \circ \mathfrak{D}_{\mathbf{p}})(\mathbf{k}_{t,s}) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_{\mathcal{B}} +$$

$$+ \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}_{t,s}, t) \cdot \delta \chi_t(\mathbf{p}) \, d\mu_S,$$

per ogni  $\delta \chi_t(\mathbf{p}) \in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p}))$ .

## 2.2. Rigidezza tangente

L'analisi dell'equilibrio elastico della trave di TIMOSHENKO richiede la linearizzazione della condizione di equilibrio nella configurazione  $\chi_t \in C^k(\mathcal{B}, \mathbb{M})$ .

Per effettuare correttamente la linearizzazione è indispensabile tener presente che i parametri cinematici della trave sono campi con valori su di una varietà differenziabile che è il prodotto cartesiano  $V(3) \times SO(3)$  dello spazio lineare degli spostamenti e del gruppo delle rotazioni ed applicare la teoria sviluppata nella sezione 1.3 (p. 323).

La trattazione che segue è riprodotta dall'articolo [14].

Nella configurazione di riferimento  $\mathcal{B}$  si considerino i cinematicismi

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_t(\mathbf{p}) &\in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p})), \\ \delta\chi_t(\mathbf{p}) &\in \mathbb{T}_{\mathbb{M}}(\chi_t(\mathbf{p})).\end{aligned}$$

Ponendo  $\mathbf{m} = \chi_t(\mathbf{p})$  si adotti la notazione

$$\mathbf{X}_m = \dot{\chi}_t(\mathbf{p}) = \{\dot{\mathbf{u}}_X, \dot{\mathbf{Q}}_X\}, \quad \mathbf{Y}_m = \delta\chi_t(\mathbf{p}) = \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \dot{\mathbf{Q}}_Y\}.$$

- Il campo  $\mathbf{X}_m = \{\dot{\mathbf{u}}_X, \dot{\mathbf{Q}}_X\}$  è l'incognito incremento cinematico lungo il percorso di equilibrio.
- Il campo  $\mathbf{Y}_m = \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \dot{\mathbf{Q}}_Y\}$  svolge il ruolo di funzione di prova (*spostamento virtuale*) nella condizione variazionale di equilibrio.

Nel seguito per semplificare la notazione di pone  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{t,s}$  e  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{t,s}$ . La rigidezza tangente è costituita da due aliquote.

- Il tensore simmetrico due volte covariante

$$\int_{\mathcal{B}} d^2\varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot d\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})[\mathbf{Y}_m] \cdot d\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})[\mathbf{X}_m] \, d\mu_{\mathcal{B}},$$

è la *rigidezza elastica tangente*.

- Il tensore simmetrico due volte covariante

$$\int_{\mathcal{B}} d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathfrak{D}_{\mathbf{p}}((\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \, d\mu_{\mathcal{B}},$$

è la *rigidezza tangente geometrica*.

### 2.3. Rigidezza tangente geometrica

Per ottenere un'espressione esplicita della *rigidezza tangente geometrica* bisogna far ricorso alla formula

$$\nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathfrak{D}_p(\mathbf{k}_{t,s}) = d_{\mathbf{X}_m} d_{\mathbf{Y}} \mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) - d\mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}],$$

che esprime l'Hessiano della deformazione in termini di derivate direzionali.

Bisogna quindi valutare le derivate direzionali prima e seconda della misura di deformazione.

A tal fine si noti che ogni vettore  $\dot{\mathbf{Q}}$  tangente alla varietà  $\text{SO}(3)$  nel punto  $\mathbf{Q}$  può essere rappresentato come  $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{W} \mathbf{Q}$  dove  $\mathbf{W} \in \text{Skw}(\mathbf{V}(3); \mathbf{V}(3))$  è un tensore emisimmetrico. Tale formula fornisce anche una semplice costruzione dell'estensione di un vettore tangente in un punto di  $\text{SO}(3)$  ad un campo vettoriale su  $\text{SO}(3)$ . L'estensione si ottiene infatti semplicemente mantenendo costante il tensore  $\mathbf{W} \in \text{Skw}(\mathbf{V}(3); \mathbf{V}(3))$ .

Derivando l'espressione della deformazione finita

$$\mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) := \begin{vmatrix} \delta(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \\ \mathbf{C}(\mathbf{Q}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Q}^T \mathbf{r}'_t - \mathbf{r}'_s \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}' \end{vmatrix},$$

si ha che

$$d\mathfrak{D}_p(\{\mathbf{k}, \mathbf{Q}\}; \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \dot{\mathbf{Q}}_Y\}) = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{Q}}_Y^T \mathbf{r}'_t + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{u}}'_Y \\ \dot{\mathbf{Q}}_Y^T \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}'_Y \end{vmatrix}.$$

Ponendo  $\dot{\mathbf{Q}}_Y = \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}$  si perviene quindi all'espressione

$$d\mathfrak{D}_p(\{\mathbf{k}, \mathbf{Q}\}; \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}\}) = \begin{vmatrix} \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}'_Y - \mathbf{W}_Y \mathbf{r}'_t) \\ \mathbf{Q}^T \mathbf{W}'_Y \mathbf{Q} \end{vmatrix}.$$

Si valuta quindi la derivata seconda  $d_{\mathbf{X}_m} d_{\mathbf{Y}} \mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q})$  ponendo  $\dot{\mathbf{Q}}_X = \mathbf{W}_X \mathbf{Q}$  in  $\mathbf{X} = \{\dot{\mathbf{u}}_X, \dot{\mathbf{Q}}_X\}$ . Allora risulta  $\dot{\mathbf{Q}}_X^T = -\mathbf{Q}^T \mathbf{W}_X$  e si ottengono le espressioni

$$d(\mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}'_Y - \mathbf{W}_Y \mathbf{r}'_t))[\dot{\mathbf{Q}}_X] = \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y \mathbf{r}'_t - (\mathbf{W}_X \dot{\mathbf{u}}'_Y + \mathbf{W}_Y \dot{\mathbf{u}}'_X)],$$

$$\begin{aligned} d(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}'_Y \mathbf{Q})[\dot{\mathbf{Q}}_X] &= \dot{\mathbf{Q}}_X^T \mathbf{W}'_Y \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{W}'_Y \dot{\mathbf{Q}}_X = \\ &= -\mathbf{Q}^T \mathbf{W}_X \mathbf{W}'_Y \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \mathbf{W}'_Y \mathbf{W}_X \mathbf{Q} = \\ &= \mathbf{Q}^T [-\mathbf{W}_X \mathbf{W}'_Y + \mathbf{W}'_Y \mathbf{W}_X] \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}'_Y, \mathbf{W}_X] \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

La derivata direzionale seconda della misura di deformazione ha pertanto l'espressione

$$\begin{aligned} d^2\mathfrak{D}_p(\{\mathbf{k}, \mathbf{Q}\}; \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}\}; \{\dot{\mathbf{u}}_X, \mathbf{W}_X \mathbf{Q}\}) = \\ = \left| \frac{\mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y \mathbf{r}'_t - (\mathbf{W}_X \dot{\mathbf{u}}'_Y + \mathbf{W}_Y \dot{\mathbf{u}}'_X)]}{\mathbf{Q}^T [\mathbf{W}'_Y, \mathbf{W}_X] \mathbf{Q}} \right|. \end{aligned}$$

E' evidente che la derivata seconda non è simmetrica rispetto ad uno scambio dei vettori

$$\mathbf{X}_m = \{\dot{\mathbf{u}}_X, \dot{\mathbf{Q}}_X\} = \{\dot{\mathbf{u}}_X, \mathbf{W}_X \mathbf{Q}\}, \quad \mathbf{Y}_m = \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \dot{\mathbf{Q}}_Y\} = \{\dot{\mathbf{u}}_Y, \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}\}.$$

Rimane da calcolare la derivata direzionale  $d\mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}]$ .

A tal fine è necessario dotare la varietà  $\text{SO}(3)$  di una metrica di RIEMANN e della conseguente connessione di LEVI-CIVITA definita dalla formula di KOSZUL.

### 2.3.1. Metrica di Riemann

La metrica naturale su  $\text{SO}(3)$  è quella indotta dalla metrica usuale dello spazio dei tensori del secondo ordine su  $V(3)$ , data da

$$g(\dot{\mathbf{Q}}_X, \dot{\mathbf{Q}}_Y) = \text{tr}(\dot{\mathbf{Q}}_X^T \dot{\mathbf{Q}}_Y).$$

Si noti che ponendo  $\dot{\mathbf{Q}}_X = \mathbf{W}_X \mathbf{Q}$  e  $\dot{\mathbf{Q}}_Y = \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}$  risulta

$$\begin{aligned} g(\mathbf{W}_X \mathbf{Q}, \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}) &= \text{tr}((\mathbf{W}_X \mathbf{Q})^T \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}) = \text{tr}(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}_X^T \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}) = \\ &= \text{tr}(\mathbf{W}_X^T \mathbf{W}_Y) = g(\mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y). \end{aligned}$$

Si considerino quindi i campi vettoriali su  $\text{SO}(3)$  definiti da

$$\mathbf{X}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_X \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Z}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_Z \mathbf{Q}.$$

Nella formula di KOSZUL

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) &= d_X(g(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})) + d_Y(g(\mathbf{Z}, \mathbf{X})) - d_Z(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})) + \\ &\quad + g([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - g([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}) + g([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}), \end{aligned}$$

i termini del tipo  $d_Z(g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}))$  sono nulli in quanto il prodotto interno

$$g(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = g(\mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y),$$

è costante su  $\text{SO}(3)$ . Si ha pertanto che

$$2g(\nabla_X \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = g([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) - g([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}) + g([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}).$$

Bisogna dunque calcolare le parentesi di LIE del tipo  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ .

### 2.3.2. Parentesi di Lie

Ciò si consegna facendo ricorso alla egualianza tra la parentesi di LIE e la derivata di LIE definita da (vedasi Tomo I proposizione I.12.6 (p. 137))

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} := \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathbf{k}_t^* \mathbf{Y},$$

dove  $\mathbf{k}_t$  è il flusso generato dal campo vettoriale  $\mathbf{X}$  definito dall'equazione differenziale di evoluzione

$$\dot{\mathbf{k}}_t(\mathbf{Q}) = \mathbf{X}(\mathbf{k}_t(\mathbf{Q})), \quad \mathbf{k}_0(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}.$$

Essendo

$$\mathbf{X}(\mathbf{k}_t(\mathbf{Q})) = \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{k}_t(\mathbf{Q}),$$

l'equazione differenziale si scrive

$$\dot{\mathbf{k}}_t(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{k}_t(\mathbf{Q}), \quad \mathbf{k}_0(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q},$$

ed ha per soluzione il flusso esponenziale

$$\mathbf{k}_t(\mathbf{Q}) = \exp(\mathbf{W}_{\mathbf{X}} t) \mathbf{Q}.$$

Osservando allora che

$$d\mathbf{k}_t(\mathbf{Q}) = \exp(\mathbf{W}_{\mathbf{X}} t), \quad (d\mathbf{k}_t)^{-1}(\mathbf{Q}) = \exp(-\mathbf{W}_{\mathbf{X}} t),$$

e ricordando che  $\mathbf{Y}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Q}$ , la derivata di LIE può calcolarsi come segue

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y})(\mathbf{Q}) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\mathbf{k}_t^* \mathbf{Y})(\mathbf{Q}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} [(d\mathbf{k}_t)^{-1}(\mathbf{Q})] [(\mathbf{Y} \circ \mathbf{k}_t)(\mathbf{Q})] = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(-\mathbf{W}_{\mathbf{X}} t) \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \exp(\mathbf{W}_{\mathbf{X}} t) \mathbf{Q} = \\ &= -\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Q} + \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} = -[\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

### 2.3.3. Formula di Koszul per la derivata covariante

Richiamando le espresioni dei campi vettoriali

$$\mathbf{X}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_X \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Y}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}, \quad \mathbf{Z}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_Z \mathbf{Q}.$$

e la proprietà

$$g(\mathbf{W}_X \mathbf{Q}, \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}) = g(\mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y),$$

si deduce che

$$g([\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}) = -g(\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y, \mathbf{W}_Z) + g(\mathbf{W}_Y \mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Z)$$

$$-g([\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}) = +g(\mathbf{W}_Y \mathbf{W}_Z, \mathbf{W}_X) - g(\mathbf{W}_Z \mathbf{W}_Y, \mathbf{W}_X)$$

$$g([\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}) = -g(\mathbf{W}_Z \mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y) + g(\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Z, \mathbf{W}_Y).$$

dove per brevità si è scritto  $\mathbf{X}$  invece di  $\mathbf{X}(\mathbf{Q})$ . La formula di KOSZUL fornisce allora l'egualianza

$$2g(\nabla_X \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) = -2g(\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y, \mathbf{W}_Z),$$

che, essendo  $\mathbf{Z} \mathbf{Q}^T = \mathbf{W}_Z$ , si può riscrivere

$$g((\nabla_X \mathbf{Y}) \mathbf{Q}^T, \mathbf{W}_Z) = -g(\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y, \mathbf{W}_Z).$$

Poiché  $\mathbf{W}_Z$  è un qualunque vettore emisimmetrico, si deduce che il campo vettoriale  $(\nabla_X \mathbf{Y}) \mathbf{Q}^T$  è la proiezione ortogonale del campo  $-\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y$  sul sottospazio dei tensori emisimmetrici. Pertanto si ha che

$$\nabla_X \mathbf{Y} = -\text{emi}(\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y) \mathbf{Q} = -\frac{1}{2} [\mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y] \mathbf{Q} = \frac{1}{2} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}].$$

**Osservazione 2.1.** A questo risultato si può pervenire più direttamente calcolando la derivata covariante su  $\text{SO}(3)$  come proiezione ortogonale sul fibrato tangente di  $\text{SO}(3)$  della derivata direzionale valutata nello spazio lineare  $L(V(3); V(3))$  con il prodotto interno indotto da quello di  $V(3)$ . Si ponga infatti

$$\mathbf{X}(\mathbf{A}) := \mathbf{W}_X \mathbf{A},$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{B}) := \mathbf{W}_Y \mathbf{B},$$

per ogni  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in L(V(3); V(3))$ .

Si ha allora che

$$d_{\mathbf{A}} \mathbf{Y}(\mathbf{B}) = \mathbf{W}_Y \mathbf{A}.$$

Dunque

$$d_{\mathbf{X}(\mathbf{Q})} \mathbf{Y}(\mathbf{Q}) = \mathbf{W}_Y \mathbf{W}_X \mathbf{Q}.$$

La proiezione ortogonale sul sottospazio  $\text{Skw}(V(3); V(3)) \mathbf{Q}$  tangente alla varietà  $\text{SO}(3)$  nel punto  $\mathbf{Q}$  fornisce l'espressione della derivata covariante

$$\nabla_{\mathbf{X}(\mathbf{Q})} \mathbf{Y}(\mathbf{Q}) = \text{emi}(\mathbf{W}_Y \mathbf{W}_X) \mathbf{Q} = -\frac{1}{2} [\mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y] \mathbf{Q}.$$

### 2.3.4. Completamento del calcolo della rigidezza geometrica

Ora è possibile calcolare la derivata direzionale  $d\mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}]$ .

A tal fine si osservi preliminarmente che la derivata direzionale della curvatura in direzione  $\dot{\mathbf{Q}}$  è

$$d(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}') [\dot{\mathbf{Q}}] = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}'.$$

e che la derivata direzionale dello scorrimento in direzione  $\dot{\mathbf{Q}}$  è

$$d(\mathbf{Q}^T \mathbf{r}'_t - \mathbf{r}'_s) [\dot{\mathbf{Q}}] = \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{r}'_t.$$

Ponendo  $\dot{\mathbf{Q}} = \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y} = -\frac{1}{2} [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] \mathbf{Q}$  la derivata della curvatura assume la forma

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{Q}' + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{Q}}' &= \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] \mathbf{Q}' - \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}]' \mathbf{Q} + \\ &- \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] \mathbf{Q}' = -\frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}]' \mathbf{Q}. \end{aligned}$$

e la derivata dello scorrimento diventa

$$\dot{\mathbf{Q}}^T \mathbf{r}'_t = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] \mathbf{r}'_t.$$

In definitiva risulta

$$d\mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] \mathbf{r}'_t \\ -\mathbf{Q}^T [\mathbf{W}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}]' \mathbf{Q} \end{vmatrix}.$$

Allora dalla formula

$$\nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathfrak{D}_p(\mathbf{k}_{t,s}) = [d_{\mathbf{X}_m} d_{\mathbf{Y}} \mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) - d\mathfrak{D}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\nabla_{\mathbf{X}_m} \mathbf{Y}]],$$

si deduce il risultato finale

$$\nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathfrak{D}_p(\mathbf{k}_{t,s}) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{Q}^T [(\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} + \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \mathbf{W}_{\mathbf{X}}) \mathbf{r}'_t - 2(\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{u}}'_{\mathbf{Y}} + \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \dot{\mathbf{u}}'_{\mathbf{X}})] \\ \mathbf{Q}^T ([\mathbf{W}'_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}] + [\mathbf{W}'_{\mathbf{Y}}, \mathbf{W}_{\mathbf{X}}]) \mathbf{Q} \end{vmatrix}$$

che è evidentemente simmetrico rispetto ad uno scambio dei vettori

$$\mathbf{X}_m = \{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{X}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{X}}\} = \{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{X}}, \mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}\}, \quad \mathbf{Y}_m = \{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{Y}}, \dot{\mathbf{Q}}_{\mathbf{Y}}\} = \{\dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{Y}}, \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \mathbf{Q}\}.$$

## 2.4. Forma matriciale della rigidezza tangente

E' conveniente riscrivere l'espressione della rigidezza in termini dei vettori assiali associati ai tensori emisimmetrici  $\mathbf{W}_X$  e  $\mathbf{W}_Y$  esprimendo la misura di deformazione  $\mathcal{D}$  in temini di vettori assiali.

A tal fine si richiamino le seguenti formule stabilite nel Tomo I, proposizioni IV.8.2 (p. 442) e IV.8.3 (p. 442).

$$\boxed{\begin{aligned} \text{axial}(\mathbf{Q} \mathbf{W}_X \mathbf{Q}^T) &= \mathbf{Q} \text{ axial } \mathbf{W}_X, & \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+, \\ \text{axial}[\mathbf{W}_X, \mathbf{W}_Y] &= (\text{axial } \mathbf{W}_X) \times (\text{axial } \mathbf{W}_Y). \end{aligned}}$$

e si ponga

$$\boldsymbol{\omega}_X = \text{axial } \mathbf{W}_X,$$

$$\boldsymbol{\omega}_Y = \text{axial } \mathbf{W}_Y.$$

### 2.4.1. Rigidezza tangente elastica

Si consideri la forma vettoriale della misura di deformazione

$$\mathfrak{d}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) := \left| \frac{\mathbf{Q}^T \mathbf{r}'_t - \mathbf{r}'_s}{\mathbf{c}(\mathbf{Q})} \right|,$$

con  $\mathbf{c}(\mathbf{Q}) := \text{axial}(\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}')$ .

Tenendo conto che

$$\delta(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = \dot{\mathbf{u}}' - \mathbf{W} \mathbf{r}'_t = \dot{\mathbf{u}}' + \mathbf{r}'_t \times \boldsymbol{\omega}, \quad \dot{\mathbf{c}}(\mathbf{Q}) = \text{axial}(\mathbf{Q}^T \mathbf{W}' \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}',$$

e definendo gli operatori

$$\mathbb{Q} := \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Xi}^T := \begin{bmatrix} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} & \mathbf{r}'_t \times \\ \mathbf{O} & \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

si può scrivere

$$\begin{aligned} d\mathfrak{d}_p(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\dot{\mathbf{u}}_Y, \mathbf{W}_Y \mathbf{Q}] &= \left| \begin{array}{c} \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}'_Y + \mathbf{r}'_t \times \boldsymbol{\omega}_Y) \\ \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\omega}'_Y \end{array} \right| = \\ &= \mathbb{Q}^T \left| \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}'_Y + \mathbf{r}'_t \times \boldsymbol{\omega}_Y \\ \boldsymbol{\omega}'_Y \end{array} \right| = \mathbb{Q}^T \boldsymbol{\Xi}^T \left| \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_Y \\ \boldsymbol{\omega}_Y \end{array} \right|. \end{aligned}$$

- Il tensore simmetrico due volte covariante

$$\mathfrak{E}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) = d^2 \varphi_{\mathbf{P}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) = \begin{bmatrix} \mathfrak{E}_{11} & \mathfrak{E}_{12} \\ \mathfrak{E}_{21} & \mathfrak{E}_{22} \end{bmatrix},$$

rappresenta la rigidezza elastica costitutiva.

La forma bilineare della *rigidezza tangente elastica* assume quindi l'espressione

$$\int_{\mathcal{B}} d^2 \varphi_{\mathbf{P}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot d \mathfrak{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\mathbf{Y}_m] \cdot d \mathfrak{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) [\mathbf{X}_m] d\mu_{\mathcal{B}} =$$

$$= \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{E}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \cdot \mathbb{Q}^T \boldsymbol{\Xi}^T \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{Y}} \\ \omega_{\mathbf{Y}} \end{vmatrix} \cdot \mathbb{Q}^T \boldsymbol{\Xi}^T \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{X}} \\ \omega_{\mathbf{X}} \end{vmatrix} d\mu_{\mathcal{B}}.$$

#### 2.4.2. Rigidezza tangente geometrica

Analogamente per la parte *geometrica* della rigidezza tangente si ha che

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathfrak{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) &= \\ &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{Q}^T [(\mathbf{W}_X \mathbf{W}_Y + \mathbf{W}_Y \mathbf{W}_X) \mathbf{r}'_t - 2(\mathbf{W}_X \dot{\mathbf{u}}'_Y + \mathbf{W}_Y \dot{\mathbf{u}}'_X)] \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{Q}^T \text{axial}([\mathbf{W}'_X, \mathbf{W}_Y] + [\mathbf{W}'_Y, \mathbf{W}_X]) \right| = \\ &= \frac{1}{2} \left| \mathbf{Q}^T [\omega_X \times (\omega_Y \times \mathbf{r}'_t) + \omega_Y \times (\omega_X \times \mathbf{r}'_t) - \omega_X \times \dot{\mathbf{u}}'_Y - \omega_Y \times \dot{\mathbf{u}}'_X] \right| = \\ &= -\frac{1}{2} \mathbb{Q}^T \left| \begin{array}{c} \omega_X \times (\omega_Y \times \mathbf{r}'_t) + \omega_Y \times (\omega_X \times \mathbf{r}'_t) - \omega_X \times \dot{\mathbf{u}}'_Y - \omega_Y \times \dot{\mathbf{u}}'_X \\ \omega'_X \times \omega_Y + \omega'_Y \times \omega_X \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Il tensore simmetrico due volte covariante

$$\int_{\mathcal{B}} d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathbf{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathbf{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \, d\mu_{\mathcal{B}},$$

è la *rigidezza tangente geometrica*. Posto allora

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{F}_o, \quad \mathbf{M} = \text{axial } \mathbf{M}_{\mathbf{Q}} = \text{axial} (\mathbf{Q} \mathbf{M}_o \mathbf{Q}^T),$$

dalla relazione costitutiva

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{P}} = \{\mathbf{F}_o, \mathbf{M}_o\} = d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathbf{d}_{\mathbf{P}}), .$$

si ha che

$$\{\mathbf{F}, \mathbf{M}_{\mathbf{Q}}\} = \mathbb{Q} d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathbf{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{Q})) \overline{\mathbb{Q}}^T, \quad \{\mathbf{F}, \mathbf{M}\} = \mathbb{Q} d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathbf{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{u}, \mathbf{Q})).$$

dove

$$\mathbb{Q} := \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbb{Q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{bmatrix}.$$

Si noti ora che

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{u}'_{\mathbf{Y}}) &= \mathbf{F} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \times \mathbf{u}'_{\mathbf{Y}}) = (\mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}) \cdot \mathbf{u}'_{\mathbf{Y}}, \\ \mathbf{F} \cdot (\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{W}_{\mathbf{Y}} \mathbf{r}'_t) &= (\mathbf{W}_{\mathbf{X}} \mathbf{W}_{\mathbf{Y}}) : (\mathbf{F} \otimes \mathbf{r}'_t) = \mathbf{F} \cdot [\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \times \mathbf{r}'_t)] = \\ &= (\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}}) (\mathbf{r}'_t \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}) - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_t) (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}}) = \\ &= [(\mathbf{F} \otimes \mathbf{r}'_t) \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}] \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_t) (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}}). \end{aligned}$$

Dunque si può scrivere

$$\begin{aligned} d\varphi_{\mathbf{P}}(\mathbf{d}_{\mathbf{P}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathbf{d}_{\mathbf{P}}((\mathbf{k}, \mathbf{Q})) &= \\ &= \mathbf{F} \cdot \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \times \mathbf{r}'_t) + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \times \mathbf{r}'_t) - 2 (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \times \dot{\mathbf{u}}'_{\mathbf{Y}} + \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \times \dot{\mathbf{u}}'_{\mathbf{X}})] + \\ &+ \mathbf{M} \cdot \frac{1}{2} [\boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{X}} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} + \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{Y}} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}]. \end{aligned}$$

E quindi

$$\begin{aligned}
 & d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{d}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathbf{d}_{\mathbf{p}}((\mathbf{k}, \mathbf{Q})) = \\
 &= [\operatorname{sym}(\mathbf{F} \otimes \mathbf{r}'_t) \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}] \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_t) (\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}}) + \\
 & - (\mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}) \cdot \mathbf{u}'_{\mathbf{Y}} + (\mathbf{F} \times \mathbf{u}'_{\mathbf{X}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} + \\
 & + \frac{1}{2} [(\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{X}}) \cdot \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} - (\mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}}) \cdot \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{Y}}].
 \end{aligned}$$

Per pervenire ad una espressione matriciale del primo membro della condizione di equilibrio incrementale, si definisca l'operatore differenziale lineare [9]

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix},$$

così che risulta

$$\mathcal{L} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}' \\ \boldsymbol{\omega}' \\ \boldsymbol{\omega} \end{vmatrix}.$$

La *rigidezza tangente geometrica* è quindi espressa da

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}} d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathbf{d}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathbf{d}_{\mathbf{p}}((\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \, d\mu_{\mathcal{B}} = \\
 &= \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{B} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}'_{\mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}'_{\mathbf{Y}} \\ \boldsymbol{\omega}'_{\mathbf{Y}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \end{vmatrix} \, d\mu_{\mathcal{B}} = \int_{\mathcal{B}} \mathfrak{B} \mathcal{L} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{X}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{X}} \end{vmatrix} \cdot \mathcal{L} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{Y}} \\ \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{Y}} \end{vmatrix} \, d\mu_{\mathcal{B}},
 \end{aligned}$$

dove l'operatore simmetrico di rigidezza geometrica  $\mathfrak{B}$  è definito da

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\mathbf{F} \times \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\frac{1}{2} \mathbf{M} \times \\ \mathbf{F} \times & \frac{1}{2} \mathbf{M} \times & \frac{1}{2} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{r}'_t + \mathbf{r}'_t \otimes \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_t) \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

### 2.4.3. Rigidezza tangente

La *rigidezza tangente* è in definitiva espressa dalla seguente forma bilineare simmetrica

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathcal{B}} \nabla_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^2 (\varphi_{\mathbf{p}} \circ \mathfrak{d}_{\mathbf{p}})(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \, d\mu_{\mathcal{B}} = \\
 &= \int_{\mathcal{B}} d\varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot \nabla_{\mathbf{X}_m \mathbf{Y}_m}^2 \mathfrak{d}_{\mathbf{p}}((\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \, d\mu_{\mathcal{B}} + \\
 &+ \int_{\mathcal{B}} d^2 \varphi_{\mathbf{p}}(\mathfrak{d}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})) \cdot d\mathfrak{d}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})[\mathbf{Y}_m] \cdot d\mathfrak{d}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k}, \mathbf{Q})[\mathbf{X}_m] \, d\mu_{\mathcal{B}} = \\
 & \int_{\mathcal{B}} \left[ \mathfrak{B} \mathfrak{L} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{X}} \\ \omega_{\mathbf{X}} \end{vmatrix} \cdot \mathfrak{L} \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{Y}} \\ \omega_{\mathbf{Y}} \end{vmatrix} \, d\mu_{\mathcal{B}} + \mathfrak{E}(\mathbf{k}, \mathbf{Q}) \cdot \mathbb{Q}^T \boldsymbol{\Xi}^T \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{X}} \\ \omega_{\mathbf{X}} \end{vmatrix} \cdot \mathbb{Q}^T \boldsymbol{\Xi}^T \begin{vmatrix} \dot{\mathbf{u}}_{\mathbf{Y}} \\ \omega_{\mathbf{Y}} \end{vmatrix} \right] d\mu_{\mathcal{B}},
 \end{aligned}$$

dove

$$\mathbb{Q} := \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Xi}^T := \begin{bmatrix} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} & \mathbf{r}'_t \times \\ \mathbf{O} & \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} \end{bmatrix},$$

$$\mathfrak{L} = \begin{vmatrix} \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \frac{d}{d\lambda} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{vmatrix},$$

$$\mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\mathbf{F} \times \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & -\frac{1}{2} \mathbf{M} \times \\ \mathbf{F} \times & \frac{1}{2} \mathbf{M} \times & \frac{1}{2} (\mathbf{F} \otimes \mathbf{r}'_t + \mathbf{r}'_t \otimes \mathbf{F}) - (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}'_t) \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

## RIFERIMENTI

1. G. GREEN, An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism, Nottingham (1828).
2. O. D. KELLOGG, Foundation of Potential Theory, Springer, Berlin (1929).
3. A. E. H. LOVE, A Treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York, (1949).
4. I. S. SOKOLNIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, (1956).
5. C. TRUESDELL, R. TOUPIN, The Classical Field Theories, *Encyclopaedia of Physics*, vol. III/1, 226-793 Springer-Verlag, Berlin (1960).
6. M.M. VAINBERG, Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators, Holden-Day (1964).
7. M.E. GURTIN, The Linear Theory of Elasticity, *Encyclopaedia of Physics*, vol. VIa/2, , 1-290 Springer-Verlag, New York (1972).
8. M. SPIVAK, A comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol.I-V, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1979).
9. J.C. SIMO, L. VU-QUOC, A three-dimensional finite strain rod model. Part II: computational aspects,, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol 58, 79-116, (1986).
10. G. ROMANO ET AL., A potential theory for monotone multi-valued operators, *Quat. Appl. Math. Anal.*, Vol 1.1, 4, 613-631, (1993).
11. P. PETERSEN, Riemannian Geometry, Springer-Verlag, New York (1998).
12. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
13. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).
14. G. ROMANO, Tangent Stiffness of Elastic Continua on Manifolds, *ISIMM Symposium, Maiori, Italia* (2002).
15. G. ROMANO, M. DIACO, Tangent stiffness of Timoshenko beams undergoing large displacements, *ISIMM Symposium, Maiori, Italia* (2002).



# IX – GEOMETRIA delle MASSE

In questo capitolo si presentano gli elementi essenziali della *geometria delle masse* che studia le proprietà geometriche di figure piane su cui è definito un campo scalare  $E : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  detto *peso*.

La *geometria delle masse* trae il nome dal caso in cui il campo  $E : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  è la densità di un corpo continuo.

Nella teoria delle travi interessa invece il caso in cui il campo  $E : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  associa ad ogni punto della sezione trasversale il valore del modulo elastico della corrispondente fibra longitudinale della trave. Si può così considerare il caso generale in cui ogni fibra longitudinale della trave è costituita da un diverso materiale elastico.

## 1. MOMENTI DI UN CAMPO DI PESI

Sia  $\Omega$  un dominio compatto generalmente regolare del piano e sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  la base di un sistema di riferimento cartesiano con origine in O.

Un punto  $P$  di  $\Omega$  è individuato dal raggio vettore  $\mathbf{r}$  di componenti  $x$  e  $y$ :

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2.$$

Si consideri quindi in  $\Omega$  un campo scalare integrabile  $E : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ .

Se  $V$  è uno spazio lineare di dimensione finita, si denoti con

$$L\{V^k; \mathbb{R}\} := L\{\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_{k \text{ volte}}; \mathbb{R}\},$$

lo spazio dei tensori  $k$  volte covarianti su  $V$ , e cioè lo spazio delle forme  $k$ -lineari su  $V \times V \times \dots \times V$   $k$ -volte. Si ponga  $V^0 := \mathbb{R}$  e  $V^1 := V$ .

Sia quindi  $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k\} \in V^k$  una  $k$ -upla di vettori.

- Il prodotto tensoriale  $\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_k$  è il tensore  $k$  volte covariante definito, per ogni  $k$ -upla  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \in V^k$ , da

$$(\mathbf{a}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{a}_k)(\mathbf{u}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{u}_k) := \mathbf{g}(\mathbf{a}_1, \mathbf{u}_1) \cdots \mathbf{g}(\mathbf{a}_k, \mathbf{u}_k).$$

dove  $\mathbf{g} \in \text{Sym}(V; V)$  è il prodotto interno in  $V$ .

Ad uno scalare  $\alpha \in \Re$  corrisponde un tensore di ordine 0

$$\alpha^* \in L\{V^0; \Re\} = L\{\Re; \Re\},$$

definito da

$$\alpha^*(x) := \alpha x, \quad \forall x \in \Re.$$

Ad un vettore  $\mathbf{v} \in V$  corrisponde un tensore di ordine 1

$$\mathbf{v}^* \in L\{V^1; \Re\} = L\{V; \Re\},$$

definito da

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{u}) := \mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{u} \in V.$$

I *momenti* del campo scalare  $E : \Omega \mapsto \Re$  si definiscono come segue.

- Il *momento di ordine*  $k$  del campo  $E : \Omega \mapsto \Re$  è il tensore

$$\mathbf{J}^{(k)}(E) \in L\{V^{(k-1)}; V\}$$

definito da

$$\mathbf{J}^{(k)}(E) := \int_{\Omega} E \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}}_{k \text{ volte}} \, da.$$

- Se  $E : \Omega \mapsto \Re$  è il campo dei moduli elastici, si ha che

- per  $k = 0$  il momento di ordine 0 è l'*area elastica*  $A(E)$

$$A(E) := \mathbf{J}^{(0)}(E) = \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) \, da,$$

- per  $k = 1$  il momento di ordine 1 è il *momento statico elastico*  $\mathbf{S}_O(E)$

$$\mathbf{S}_O(E) := \mathbf{J}^{(1)}(E) = \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) \mathbf{r} \, da,$$

- per  $k = 2$  il momento di ordine 2 è il *tensore momento d'inerzia elastico*  $\mathbf{J}_O(E)$

$$\mathbf{J}_O(E) := \mathbf{J}^{(2)}(E) = \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da.$$

Dalla definizione segue immediatamente che  $\mathbf{J}_O(E) = \mathbf{J}_O(E)^T$  e cioè che il tensore d'inerzia è simmetrico, in quanto tale è il campo tensoriale  $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$  sotto il segno di integrale.

Il tensore  $\mathbf{J}_O(E)$  è inoltre definito positivo. Infatti

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_O(E)\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{J}_O(E)(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \int_{\Omega} E(\mathbf{r})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \, da = \\ &= \int_{\Omega} E(\mathbf{r}) (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2 \, da > 0, \quad \forall \mathbf{n} \in S^2(1) \setminus \mathbf{o}.\end{aligned}$$

In termini di componenti si ha che

$$[\mathbf{J}_O(E)] = \int_{\Omega} E(x, y) \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} \, da.$$

Un concetto fondamentale in geometria delle masse è quello di *centro* o *baricentro*.

- Il *baricentro* del campo scalare  $E : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ , detto anche *centro dei pesi*, è definito come il punto del dominio  $\Omega$  la cui posizione risulta essere la media pesata delle posizioni dei punti del dominio. La posizione  $\mathbf{r}_G$  del baricentro è quindi individuata dalla condizione

$$\int_{\Omega} E(\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \, da = \mathbf{o},$$

e pertanto dall'espressione

$$\mathbf{r}_G(E) = \frac{\mathbf{S}_O(E)}{A(E)}.$$

Le formule precedenti possono essere immediatamente estese per considerare il caso di un insieme di domini piani a ciascuno dei quali sia stato attribuito un *peso* costante. Se una sezione è costituita da  $n$  parti omogenee, ognuna caratterizzata da un diverso peso  $E_i$ , le caratteristiche della sezione sono fornite da

$$A(E) = \sum_{i=1}^n A_i(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} E_i \, da,$$

$$\mathbf{S}_O(E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{S}_{O_i}(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} E_i \mathbf{r}_i \, da,$$

$$\mathbf{J}_O(E) = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}_{O_i}(E_i) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} E_i \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \, da.$$

In particolare il caso di sezioni cave può essere trattato con le formule precedenti attribuendo un peso negativo alle figure che definiscono le cavità.

■ Ponendo il campo scalare  $E : \Omega \mapsto \mathbb{R}$  identicamente pari ad 1 si ottengono le caratteristiche geometriche della figura piana.

- Il momento di ordine 0 è l'area del dominio  $\Omega$

$$A = \mathbf{J}^{(0)}(1) = \int_{\Omega} da .$$

- Il momento di ordine 1 è il *momento statico*

$$\mathbf{S}_O = \mathbf{J}^{(1)}(1) = \int_{\Omega} \mathbf{r} da ,$$

che in componenti cartesiane si scrive

$$[\mathbf{S}_O] = \begin{vmatrix} S_x \\ S_y \end{vmatrix} = \int_{\Omega} \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} da .$$

- Il momento di ordine 2 è il *tensore momento d'inerzia* o *tensore di EULER*

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}^{(2)}(1) = \int_{\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} da ,$$

ed in notazione matriciale

$$[\mathbf{J}_O] = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} \\ J_{xy} & J_y \end{bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix} da .$$

- Il centro o *baricentro geometrico*

$$\mathbf{r}_G = \mathbf{r}_G(1) = \frac{\mathbf{S}_O(1)}{A(1)} = \frac{\mathbf{S}_O}{A} ,$$

che in componenti cartesiane si scrive

$$[\mathbf{r}_G] = \begin{vmatrix} x_G \\ y_G \end{vmatrix} = \frac{1}{A} \begin{vmatrix} S_x \\ S_y \end{vmatrix} .$$

### 1.1. Formule notevoli

Fatta eccezione per alcune semplici figure di forma regolare (rettangolo, cerchio, triangolo), il calcolo dell'area, del momento statico e del momento d'inerzia di una figura piana mediante una diretta applicazione delle formule precedenti richiede una doppia integrazione che si presenta spesso impervia.

Il calcolo delle caratteristiche geometriche di una figura piana può essere estremamente semplificato sostituendo gli integrali di area che appaiono nelle formule precedenti con integrali estesi al contorno che delimita la figura in esame. Tale sostituzione è basata sull'applicazione del teorema della divergenza e scaturisce dalla semplice osservazione che una figura piana è univocamente definita dalla conoscenza del suo contorno. I risultati cui si perviene derivano dall'applicazione di una formula generale, valida cioè per domini in spazi euclidei di dimensione finita arbitraria.

Sussiste infatti il seguente risultato.

**Proposizione 1.1. La formula generale.** *Sia  $\Omega$  un dominio in uno spazio vettoriale di dimensione  $d$  ( $d = 2$  nel caso piano;  $d = 3$  nel caso spaziale). Vale allora la formula notevole*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}}_{p \text{ volte}} \, da &= \frac{1}{d+p} \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r})}_{p+1 \text{ volte}} \mathbf{n} \, ds = \\ &= \frac{1}{d+p} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \underbrace{\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \dots \otimes \mathbf{r}}_{p \text{ volte}} \, ds, \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore della normale uscente dalla frontiera  $\partial\Omega$ .

**Dim.** Si dimostra la formula per  $p = 2$ , essendo la dimostrazione del tutto identica nel caso  $p > 2$ .

In virtù del teorema della divergenza risulta

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, da = \int_{\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} \, ds.$$

Esprimendo il primo membro in componenti si ha

$$\left[ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, da \right]_{ij} = \int_{\Omega} (x_i x_j x_k)_{/k} \, da,$$

dove il simbolo  $/$  denota la derivazione parziale rispetto all'indice successivo ed è sottintesa la sommatoria rispetto agli indici ripetuti.

Applicando la regola di derivazione del prodotto si ottiene

$$\left[ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, da \right]_{ij} = \int_{\Omega} (x_{i/k} x_j x_k + x_i x_{j/k} x_k + x_i x_j x_{k/k}) \, da.$$

Denotando con  $\delta_{ik}$  il simbolo di KRONECKER ed osservando che

$$x_{i/k} = \delta_{ik} \quad \text{e} \quad x_{k/k} = \delta_{kk} = d,$$

si ha

$$\left[ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, da \right]_{ij} = (d+2) \int_{\Omega} x_i x_j \, da = (d+2) \left[ \int_{\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da \right]_{ij},$$

e quindi in definitiva

$$\int_{\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da = \frac{1}{d+2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, da = \frac{1}{d+2} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} \, ds,$$

che è la formula cercata per  $p = 2$ .  $\square$

La formula dimostrata è di estremo interesse poichè consente di ridurre l'ordine di integrazione di una unità. Se  $\Omega$  è un dominio piano, gli integrali al contorno sono integrali di linea. Applicando la formula al calcolo delle caratteristiche geometriche di una figura piana ( $d = 2$ ) si ottiene:

- per  $p = 0$  la formula dell'area

$$A = \int_{\Omega} da = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

- per  $p = 1$  la formula del vettore momento statico

$$\mathbf{S}_O = \int_{\Omega} \mathbf{r} \, da = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \, ds,$$

- per  $p = 2$  la formula del tensore d'inerzia

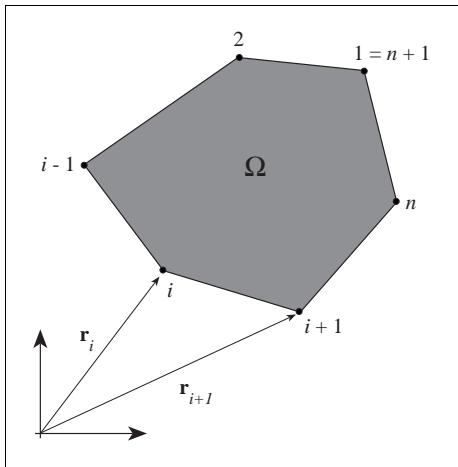
$$\mathbf{J}_O = \int_{\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da = \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, ds.$$

Il calcolo degli integrali di linea risulta particolarmente semplice nel caso di figure poligonali essendo il loro contorno rettilineo a tratti.

## 1.2. Figure poligonali

Si consideri un dominio piano  $\Omega$  con frontiera di tipo poligonale definita da  $n$  vertici e si supponga che i vertici siano numerati consecutivamente percorrendo la frontiera  $\partial\Omega$  in verso *antiorario*.

Gli integrali di linea che compaiono nelle formule notevoli dedotte in precedenza sono esprimibili in funzione delle coordinate dei vertici della sezione mediante formule ricorsive di facile implementazione in un codice di calcolo.



Sia  $s_i$  l'ascissa curvilinea relativa al lato  $i$ -esimo con origine nel vertice  $i$  del contorno  $\partial\Omega$  di  $\Omega$  e si definisca una ascissa adimensionale

$$\lambda_i = s_i/l_i,$$

dove  $l_i$  denota la lunghezza del lato  $i$ -esimo. I vettori che individuano la posizione dei vertici  $i$  e  $i+1$ , estremi del lato  $i$ -esimo, sono  $\mathbf{r}_i$  e  $\mathbf{r}_{i+1}$ .

Il generico punto sul lato  $i$ -esimo è individuato dal raggio vettore

$$\mathbf{r}(\lambda_i) = (1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1} \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1. \quad i = 1, \dots, n+1,$$

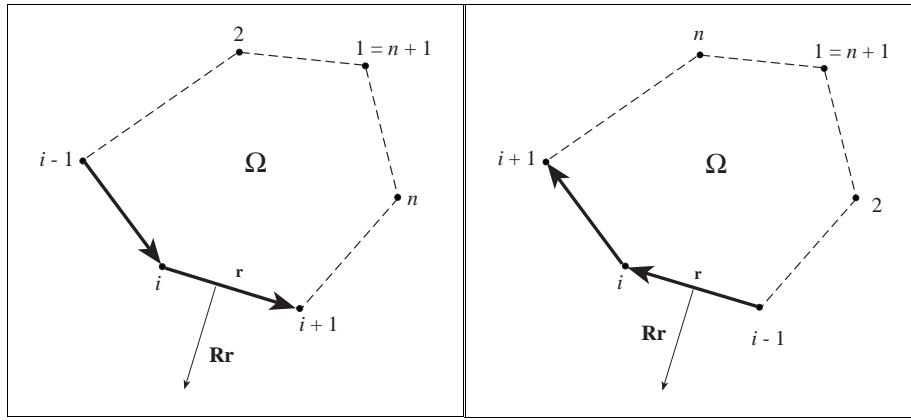
dove deve intendersi  $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_1$ .

La normale  $\mathbf{n}_i$  al lato  $i$ -esimo, orientata verso l'esterno del dominio è definita da

$$\mathbf{n}_i = \frac{1}{l_i} \mathbf{R} (\mathbf{r}_{i+1} - \mathbf{r}_i), ,$$

essendo  $\mathbf{R}$  il tensore emisimmetrico che ruota di  $\pi/2$  in senso orario il vettore  $\mathbf{r}$ .

Tale convenzione è conseguenza della scelta operata di numerare i vertici di  $\partial\Omega$  in verso antiorario. Se i vertici della sezione poligonale sono numerati in verso orario, per ottenere la normale  $\mathbf{n}_i$  orientata verso l'esterno del dominio il tensore  $\mathbf{R}$  deve essere tale da indurre una rotazione del vettore  $\mathbf{r}$  di un angolo pari a  $\pi/2$  in senso antiorario.



Per l'uso ripetuto che se ne farà nelle formule seguenti, è utile notare la formula

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp}{l_i},$$

dove  $\mathbf{r}_{i+1}^\perp := \mathbf{R} \mathbf{r}_{i+1}$ .

Gli integrali di linea che compaiono nelle formule notevoli che forniscono l'espressione dell'area, del momento statico e del tensore d'inerzia sono esprimibili in funzione delle coordinate dei vertici della sezione.

- Area (momento di ordine  $p = 0$ ):

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \mathbf{r}(s_i) \cdot \mathbf{n}_i \, ds_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 [\mathbf{r}(\lambda)_i \cdot \mathbf{n}_i] l_i \, d\lambda, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i l_i \, d\lambda = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) l_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp. \end{aligned}$$

Tale formula per il calcolo dell'area fornisce uno strumento per valutare se l'ordine di numerazione dei vertici è orario o antiorario. Si assuma infatti, per fissare le idee, che il vettore  $\mathbf{r}_{i+1}^\perp := \mathbf{R} \mathbf{r}_{i+1}$  sia ruotato di  $\pi/2$  in senso orario rispetto a  $\mathbf{r}_{i+1}$ . Allora la numerazione dei vertici è antioraria se l'area fornita dalla formula è positiva, oraria viceversa.

In un calcolo automatico, per applicare correttamente le formule per il calcolo dei momenti di ordine  $> 0$ , bisogna definire il vettore  $\mathbf{r}_{i+1}^\perp := \mathbf{R} \mathbf{r}_{i+1}$  in modo che l'area sia positiva.

- Momento statico (momento di ordine  $p = 1$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_O &= \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} [\mathbf{r}(s_i) \cdot \mathbf{n}_i] \mathbf{r}(s_i) ds_i = \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \int_0^1 [\mathbf{r}(\lambda_i) \cdot \mathbf{n}_i] \mathbf{r}(\lambda_i) l_i d\lambda_i = \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \int_0^1 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] l_i d\lambda_i = \\
 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp \left[ \mathbf{r}_i \int_0^1 (1 - \lambda_i) d\lambda_i + \mathbf{r}_{i+1} \int_0^1 \lambda_i d\lambda_i \right] = \\
 &= \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) (\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}).
 \end{aligned}$$

- Momento d'inerzia (momento di ordine  $p = 2$ ):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_O &= \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} ds = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} [\mathbf{r}(s_i) \cdot \mathbf{n}_i] \mathbf{r}(s_i) \otimes \mathbf{r}(s_i) ds_i = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_0^1 [\mathbf{r}(\lambda_i) \cdot \mathbf{n}_i] \mathbf{r}(\lambda_i) \otimes \mathbf{r}(\lambda_i) l_i d\lambda_i = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \int_0^1 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i) [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] \otimes [(1 - \lambda_i) \mathbf{r}_i + \lambda_i \mathbf{r}_{i+1}] l_i d\lambda_i = \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp \left[ \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \int_0^1 (1 - \lambda_i)^2 d\lambda_i + (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) \int_0^1 \lambda_i(1 - \lambda_i) d\lambda_i + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \int_0^1 \lambda_i^2 d\lambda_i \right] = \\
 &= \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[ \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \right].
 \end{aligned}$$

Si noti che le sommatorie sono estese al numero  $n$  dei lati del poligono e che il prodotto  $\mathbf{r}(\lambda) \cdot \mathbf{n}_i$  è costante su ciascun lato ed uguale a  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{n}_i$ .

Per completezza le formule precedenti sono anche riportate in componenti dopo aver posto:

$$c_i = x_i y_{i+1} - y_i x_{i+1}.$$

Si ha che

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i,$$

$$S_x = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n c_i (x_i + x_{i+1}),$$

$$S_y = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n c_i (y_i + y_{i+1}),$$

$$J_x = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n c_i [x_i x_i + x_i x_{i+1} + x_{i+1} x_{i+1}],$$

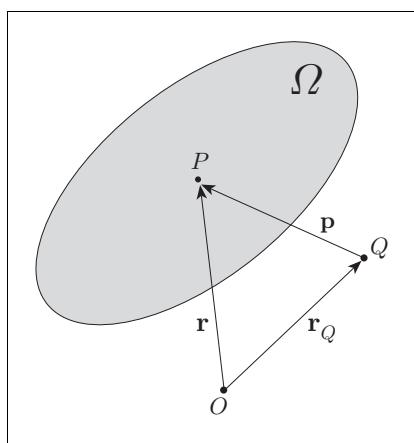
$$J_y = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n c_i [y_i y_i + y_i y_{i+1} + y_{i+1} y_{i+1}],$$

$$J_{xy} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n c_i [x_i y_i + \frac{1}{2}(x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i) + x_{i+1} y_{i+1}].$$

### 1.3. Cambiamento di riferimento

Nell'assegnare una figura piana poligonale  $\Omega$ , le coordinate dei vertici sono valutate in un riferimento cartesiano avente un'origine convenientemente fissata. Il tensore d'inerzia distribuzione dei pesi è pertanto valutato in tale riferimento.

Per l'analisi delle proprietà geometriche di una figura piana è però importante calcolare il tensore d'inerzia in un riferimento cartesiano avente per origine il baricentro.



Affrontando la questione nella sua generalità, sia  $\Omega$  una figura piana ed  $\mathbf{r}$  il raggio vettore che definisce la posizione del punto  $P$  della sezione rispetto all'origine  $O$ .

Rispetto ad una nuova origine  $Q$  il punto  $P$  della sezione è individuato dal vettore

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q,$$

avendo indicato con  $\mathbf{r}_Q$  il vettore posizione dell'origine  $Q$  rispetto a quella iniziale  $O$ .

Si analizzino prima le formule di trasformazione delle caratteristiche geometriche per effetto di un cambiamento dell'origine e quindi quelle che considerano un nuovo sistema di riferimento con assi ruotati rispetto a quelli iniziali.

Sostituendo la posizione  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q + \mathbf{p}$  nelle formule del momento statico e del momento d'inerzia si perviene alle *formule di trasporto* di HUYGENS<sup>28</sup> -STEINER<sup>29</sup>

$$\mathbf{S}_O = \int_{\Omega} \mathbf{r} \, da = \int_{\Omega} (\mathbf{r}_Q + \mathbf{p}) \, da = A \mathbf{r}_Q + \mathbf{S}_Q,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da = \int_{\Omega} (\mathbf{r}_Q + \mathbf{p}) \otimes (\mathbf{r}_Q + \mathbf{p}) \, da = \\ &= \mathbf{J}_Q + \mathbf{r}_Q \otimes \mathbf{S}_Q + \mathbf{S}_Q \otimes \mathbf{r}_Q + A(\mathbf{r}_Q \otimes \mathbf{r}_Q). \end{aligned}$$

Se il punto  $Q$  coincide con il baricentro  $G$  della sezione, si ha che  $\mathbf{S}_Q = \mathbf{S}_G = \mathbf{0}$  e le formule precedenti si specializzano in

$$\boxed{\mathbf{S}_O = A \mathbf{r}_G, \quad \mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G + A(\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G).}$$

Il tensore  $\mathbf{J}_G$  è detto *tensore centrale d'inerzia*.

In notazione matriciale le componenti di  $\mathbf{J}_G$  sono

$$[\mathbf{J}_G] = \begin{bmatrix} J_{Gx} & J_{Gxy} \\ J_{Gxy} & J_{Gy} \end{bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} x_G^2 & x_G y_G \\ x_G y_G & y_G^2 \end{bmatrix} da.$$

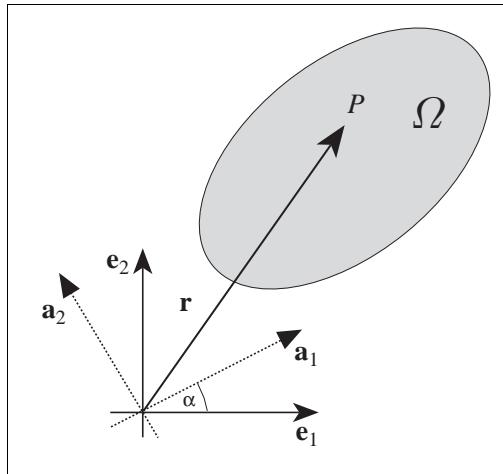
---

<sup>28</sup> CHRISTIAAN HUYGENS (L'AIA, 1629-1695) Astronomo, fisico e matematico olandese. Dopo aver frequentato i corsi di retorica e di diritto ad Amsterdam e a Leida, preferì dedicarsi agli studi scientifici. Fu tra i fondatori della meccanica. Introdusse la nozione del momento di inerzia e individuò il valore dell'accelerazione gravitazionale e le sue variazioni in funzione della latitudine. Espose inoltre i principi di conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto. Interessante anche l'opera *De Motu Corporum ex percussione*, pubblicata postuma, in cui sviluppò la teoria dell'urto dei corpi elastici e perfezionò il termometro. Costruì sia un oculare (che porta il suo nome) per i telescopi ancora oggi in uso, che il più potente telescopio allora esistente che gli permise di individuare l'anello di Saturno, di fare osservazioni astronomiche dei pianeti, della nebulosa di Orione e della superficie lunare, di dimostrare l'assenza di acque e di atmosfera sulla Luna e l'esistenza di calotte polari su Marte (*Systema Saturnium* 1659). Notevole anche il contributo nel campo dell'ottica. La sua opera fondamentale è il *Traité de la lumière* (1690), in cui formulò l'ipotesi che la luce avesse una natura ondulatoria, in opposizione alla teoria corpuscolare di NEWTON. In analogia con i fenomeni acustici, immaginò che le onde luminose si propagassero attraverso un mezzo, chiamato etere. Grazie a tale teoria poté giustificare i fenomeni della rifrazione e della diffrazione. Si interessò della teoria delle probabilità e studiò il moto del pendolo (applicandolo alla costruzione di orologi per i quali inventò anche il bilanciere e la molla a spirale) ed esponendo i risultati raggiunti nel trattato *Horologium oscillatorium* (1673). HUYGENS intrattenne rapporti di corrispondenza con la comunità scientifica toscana al tempo dell'*Accademia del Cimento*. Tali rapporti comportarono l'avvio di una polemica, soprattutto con V. VIVIANI, che rivendicò la priorità galileiana della scoperta dell'applicazione del pendolo all'orologio, presentata come propria invenzione dallo scienziato nel 1673. LUIGI XIV lo chiamò in Francia, ove fu membro della *Académie des Sciences* e perfezionò i suoi studi sulla dinamica dei sistemi rigidi.

Si consideri ora il caso in cui il cambiamento di riferimento comporti una rotazione degli assi di un angolo  $\alpha$ . Siano

$$[\mathbf{a}_1] = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{a}_2] = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix},$$

le componenti dei versori della nuova base nel sistema di riferimento iniziale.



La matrice  $[\mathbf{Q}]$  rappresentativa del tensore  $\mathbf{Q}$  che trasforma la base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  nella base ortonormale  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$  rispetto al riferimento iniziale è

$$\begin{aligned} [\mathbf{Q}] &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Le componenti dei tensori momento statico e momento d'inerzia nel sistema di riferimento ruotato di  $\mathbf{Q}$  possono essere valutate considerando le componenti nel riferimento iniziale dei tensori ruotati di  $\mathbf{Q}^T$  cioè calcolati considerando i vettori posizione ruotati in verso opposto. Si perviene così alle espressioni

$$\mathbf{S}_O^* = \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{r} \, da = \mathbf{Q}^T \int_{\Omega} \mathbf{r} \, da = \mathbf{Q}^T \mathbf{S}_O,$$

$$\mathbf{J}_O^* = \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T \mathbf{r} \otimes \mathbf{Q}^T \mathbf{r} \, da = \int_{\Omega} \mathbf{Q}^T (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{Q} \, da = \mathbf{Q}^T \mathbf{J}_O \mathbf{Q}.$$

<sup>29</sup> JAKOB STEINER (1796-1863). Nacque a Utzenstorf nel 1796, in Svizzera. Imparò a leggere ed a scrivere all'età di 14 anni. Cominciò a frequentare la scuola solo all'età di 18 anni e continuò gli studi universitari prima ad Heidelberg e poi a Berlino, ove insegnò fino alla sua morte. Fu uno dei primi a pubblicare sul CRELLE's Journal, il primo giornale dedicato interamente alla matematica fondato nel 1826. Fu tra i fondatori della moderna geometria proiettiva. Nel trattato di geometria proiettiva *Systematische Entwicklungen* (1832) introdusse la superficie ora nota come di superficie STEINER. Non amava l'algebra e l'analisi, sostenendo che il calcolo sostituiva ed offuscava il pensiero differentemente dalla geometria che invece lo stimolava. Ulteriore e non minore risultato è il teorema di PONCELET-STEINER in cui si mostra che le costruzioni euclidee possono essere effettuate solo con un cerchio ed una squadra. Morì il 1 Aprile del 1863 a Berna, in Svizzera.

L'espressione delle matrici  $[S_O]_Q$  e  $[J_O]_Q$  dei tensori  $S_O$  e  $J_O$  nel riferimento ruotato hanno pertanto la forma

$$\boxed{[S_O]_Q = [Q]^T [S_O], \\ [J_O]_Q = [Q]^T [J_O] [Q].}$$

## 2. TENSORE DI INERZIA

Si denoti con  $\mathbf{J}$  il tensore d'inerzia valutato rispetto ad un polo arbitrariamente fissato. Le direzioni individuate da una coppia di versori  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{m}$  si dicono *direzioni coniugate* rispetto al tensore d'inerzia  $\mathbf{J}$  se risulta

$$\boxed{\mathbf{J} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0.}$$

Un vettore  $\mathbf{d}$  si dice un autovettore o *direzione principale d'inerzia* del tensore  $\mathbf{J}$  se

$$\mathbf{J}\mathbf{d} = \lambda \mathbf{d}, \quad \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il moltiplicatore  $\lambda$  si dice l'autovalore o *momento principale d'inerzia* associato all'autovettore  $\mathbf{d}$ .

Per determinare gli autovalori e gli autovettori si noti che la proprietà caratteristica si può riscrivere nella forma

$$(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{d} = \mathbf{0}.$$

Il nucleo di  $\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}$  contiene vettori non nulli se e solo se

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Il problema può essere quindi ricondotto al calcolo delle radici dell'equazione caratteristica di  $\mathbf{J}$

$$\lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \mathbf{J} + \det \mathbf{J} = 0,$$

dove  $\operatorname{tr} \mathbf{J} = J_x + J_y$  e  $\det \mathbf{J} = J_x J_y - J_{xy}^2$ .

Le radici dell'equazione caratteristica sono fornite da

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{J} - \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{J})^2 - 4 \det \mathbf{J}}}{2} \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{J} + \sqrt{(\operatorname{tr} \mathbf{J})^2 - 4 \det \mathbf{J}}}{2},$$

e sono entrambe reali e positive, essendo il tensore  $\mathbf{J}$  simmetrico e definito positivo.

## 2.1. Ellisse centrale di inerzia

La conica associata al tensore centrale d'inerzia  $\mathbf{J}_G$ , simmetrico e definito positivo, è un'ellisse di equazione

$$(\mathbf{J}_G \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \frac{\det \mathbf{J}_G}{A}.$$

Si assuma un riferimento  $\{\xi, \eta\}$  principale d'inerzia, e cioè un riferimento i cui vettori di base sono autovettori di  $\mathbf{J}_G$ . Denotando con  $J_\xi$  e  $J_\eta$  gli autovalori del tensore  $\mathbf{J}_G$  associati agli assi principali  $\xi, \eta$ , l'equazione dell'ellisse assume la forma canonica

$$J_\xi \xi^2 + J_\eta \eta^2 = \frac{J_\xi J_\eta}{A},$$

ovvero

$$\frac{\xi^2}{J_\eta} + \frac{\eta^2}{J_\xi} = \frac{1}{A}.$$

Introducendo i *raggi principali d'inerzia*

$$\rho_\xi = \sqrt{\frac{J_\xi}{A}}, \quad \rho_\eta = \sqrt{\frac{J_\eta}{A}},$$

l'*equazione canonica* diventa

$$\boxed{\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1}.$$

■ Se  $\{\mathbf{m}, \mathbf{n}\}$  è una coppia di versori coniugati rispetto al tensore d'inerzia  $\mathbf{J}$  e  $\{\xi, \eta\}$  sono le coordinate nel sistema di riferimento ad essi associato, si ha che

$$J_{\xi\eta} = (\mathbf{J}\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

In tale sistema di riferimento l'equazione dell'ellisse centrale d'inerzia assume ancora la forma canonica

$$\frac{\xi^2}{\rho_\eta^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\xi^2} = 1,$$

dove  $\rho_\xi$  e  $\rho_\eta$  sono i *raggi coniugati d'inerzia*.

Ciò mostra che gli assi paralleli alle direzioni coniugate e passanti per il centro dell'ellisse sono assi di simmetria coniugata ciascuno in direzione dell'altro.

Gli assi di simmetria coniugata sono tra loro ortogonali se e solo se sono principali d'inerzia.

## 2.2. Ellisse di Culmann

Il tensore di CULMANN<sup>30</sup> di una figura piana è il tensore centrale d'inerzia della figura ruotata di  $\pi/2$ .

Denotando con  $\mathbf{R}$  il tensore che effettua una rotazione di  $\pi/2$  si ha che

$$\mathbf{J}^C = \int_{\Omega} (\mathbf{R}\mathbf{r}) \otimes (\mathbf{R}\mathbf{r}) \, da = \int_{\Omega} \mathbf{R}(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{R}^T \, da = \mathbf{R} \mathbf{J}_G \mathbf{R}^T.$$

Il verso della rotazione è ininfluente. Per fissare le idee si assuma comunque che la figura piana ruoti di  $\pi/2$  in senso antiorario.

In un riferimento cartesiano antiorario la matrice associata al tensore  $\mathbf{R}$  è allora data da

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Il tensore  $\mathbf{R}$  è dunque isometrico ed emisimmetrico per cui risulta

$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}.$$

Le componenti di  $\mathbf{J}^C$  sono legate a quelle di  $\mathbf{J}_G$  dalla relazione

$$[\mathbf{J}^C] = \begin{bmatrix} J_y & -J_{xy} \\ -J_{xy} & J_x \end{bmatrix} = [\text{cof } \mathbf{J}_G].$$

---

<sup>30</sup> KARL CULMANN (1821-1881). Nacque a Bergzbern in Baviera nel 1821. Figlio di un pastore protestante, iniziò gli studi, con un particolare predilezione per la storia e le lingue classiche, a Metz in Francia presso la locale scuola d'applicazione dove a quel tempo insegnava anche il noto ingegnere JEAN VICTOR PONCELET (1788-1867). A diciassette anni lasciò la Francia per entrare al Politecnico di Karlsruhe in Germania. Ottenuto il titolo d'ingegnere, entrò a far parte della Compagnia delle Ferrovie Bavaresi ove si occupò soprattutto della costruzione dei ponti ferroviari. Gli ingegneri DENIS e PAULI lo scelsero quale inviato negli Stati Uniti d'America, per studiare e carpire i segreti dei grandi ponti ferroviari nord-americani. Qui studiò tutti i nuovi ponti delle ferrovie statunitensi e conobbe le diverse soluzioni di travature reticolari adottate da WHIPPLE a cui si deve teoricamente la paternità della prima metodologia di calcolo delle travature reticolari. Tornato in Europa, CULMANN propose un metodo di calcolo ben più completo di quello di WHIPPLE dando rapidamente alla stampa il resoconto del suo viaggio, con il *Der Bau der holzenbrücken in den Vereinigten Staten von Nordamerika*, ove tratta le questioni inerenti alla realizzazione dei nodi delle travature reticolari in legno ed ai procedimenti di calcolo. CULMANN è passato alla storia come fondatore della statica grafica, ed in particolare per i metodi di calcolo delle travature reticolari. Le travature reticolari sono risolte analiticamente e graficamente raggruppando in un solo diagramma i diversi poligoni, ottenendo così una rappresentazione grafica delle sollecitazioni che anticipa il procedimento poi sviluppato da LUIGI CREMONA. CULMANN conferì quindi sistematicità alla soluzione delle reticolari. Ripreso il suo lavoro in Baviera gli furono offerte due cattedre universitarie, una a Karlsruhe, l'altra al Politecnico di Zurigo. Accettò la proposta dell'ateneo svizzero; a trentaquattro anni si ritrovò titolare di una prestigiosa cattedra. A Zurigo divenne consulente speciale per ogni opera ingegneristica di gran complessità, rimanendo in contatto con GAUSS suo mentore per il calcolo matematico. Nel 1880 ottenne la laurea ad honorem in filosofia dalla

Il *cofattore*  $\text{cof } \mathbf{A}$  di un tensore  $\mathbf{A}$  è il tensore definito dalle condizioni equivalenti

$$\begin{cases} \mathbf{w} = \text{axial } \mathbf{W} \Rightarrow (\text{cof } \mathbf{A})\mathbf{w} = \text{axial}(\mathbf{A} \mathbf{W} \mathbf{A}^T), \\ (\text{cof } \mathbf{A})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{A}\mathbf{a}) \times (\mathbf{A}\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{V}. \end{cases}$$

Esse implicano che

$$(\text{cof } \mathbf{A})^T \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \mathbf{I}.$$

Se  $\det \mathbf{A} \neq 0$  quest'ultima condizione equivale alle prime due (vedi Tomo Zero, sezione III.2.11 (p. 64)).

La matrice associata  $[\text{cof } \mathbf{A}]$  è detta *matrice dei cofattori* e si ottiene da quella del tensore  $\mathbf{A}$  sostituendo al generico elemento  $A_{ij}$  il minore aggiunto e cioè il determinante della matrice quadrata complementare di  $A_{ij}$ , preso con il segno positivo o negativo a seconda che la somma degli indici  $i$  e  $j$  sia pari o dispari.

La relazione tra  $\mathbf{J}^C$  e  $\mathbf{J}_G$  si scrive dunque

$$\mathbf{J}^C = \text{cof } \mathbf{J}_G.$$

Si osservi che, se il tensore  $\mathbf{A}$  è invertibile, il cofattore fornisce una semplice espressione per il tensore inverso

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{(\text{cof } \mathbf{A})^T}{\det \mathbf{A}}.$$

Si può ora fornire una caratterizzazione equivalente del tensore di CULMANN.

**Proposizione 2.1.** *Tra il tensore di CULMANN  $\mathbf{J}^C$  ed il tensore centrale d'inerzia  $\mathbf{J}_G$  sussiste la relazione*

$$\mathbf{J}^C = (\det \mathbf{J}_G) \mathbf{J}_G^{-1}.$$

**Dim.** La simmetria del tensore d'inerzia assicura che  $\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_G^T$  e dunque che

$$\mathbf{J}_G^{-1} = \frac{\text{cof } \mathbf{J}_G}{\det \mathbf{J}_G}.$$

Osservando che  $\text{cof } \mathbf{J}_G = \mathbf{J}^C$  e che

$$\det \mathbf{J}^C = \det(\mathbf{R} \mathbf{J}_G \mathbf{R}^T) = \det \mathbf{R} \det \mathbf{J}_G \det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{J}_G \det(\mathbf{R} \mathbf{R}^T) = \det \mathbf{J}_G,$$

si perviene al risultato. □

---

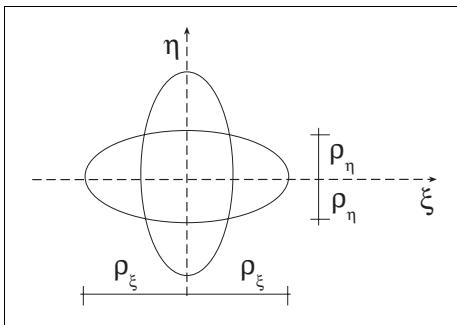
Università di Zurigo. Nel 1881 fece un viaggio a Costantinopoli, allora in Romania, dove studiò le cupole della gran moschea di Santa Sofia. Quest'ultimo viaggio, però, gli fu fatale; contrasse una grave malattia che lo portò alla morte nel dicembre del 1881.

Nelle applicazioni si fa spesso riferimento all'ellisse di CULMANN che ha equazione

$$(\mathbf{J}^C \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \frac{\det \mathbf{J}^C}{A}.$$

In virtù della relazione  $\mathbf{J}^C = (\det \mathbf{J}^C) \mathbf{J}_G^{-1}$  l'equazione dell'ellisse di CULMANN si può riscrivere

$$(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{A}.$$



L'equazione canonica associata è data da

$$\frac{\xi^2}{\rho_\xi^2} + \frac{\eta^2}{\rho_\eta^2} = 1.$$

Si noti che l'ellisse di CULMANN si ottiene da quella centrale d'inerzia effettuando una rotazione  $\mathbf{R}$  di  $\pi/2$ .

### 2.3. Antipolarità

A GERGONNE<sup>31</sup> ed a PONCELET<sup>32</sup> è dovuta la fondazione della geometria proiettiva e la formulazione dei concetti di polarità ed antipolarità.

<sup>31</sup> JOSEPH DIAZ GERGONNE (1771-1859) Nato a Nancy, fu educato al Collège di Nancy dopo aver perso il padre a soli dodici anni. Terminato il Collège fu coinvolto negli eventi che si verificarono durante la Rivoluzione Francese. Nel 1792 partecipò alla guerra contro Austria e Prussia, e nel 1794 prese parte ad un attacco militare contro la Spagna. Nel 1795 fu inviato a Nîmes dove all'Ecole Centrale iniziò ad insegnare matematica trascendentale. Nel 1810 fondò un giornale chiamato ufficialmente *Annales de mathématique pures et appliquées*, meglio conosciuto come *Annales de Gergonne*, sul quale scrissero illustri matematici tra cui PONCELET (1788-1867) e LAMÉ (1795-1870). Nel 1813 scrisse il trattato *Methods of synthesis and analysis in mathematics*. Nel 1816 ottenne la cattedra di astronomia all'Università di Montpellier della quale divenne Rettore nel 1830. Durante la sua carriera subì una forte influenza da parte del famoso geometra GASPARD MONGE (1746-1818). In geometria proiettiva introdusse il termine "principio di dualità".

<sup>32</sup> JEAN VICTOR PONCELET (1788-1867) Nato a Metz, fu un allievo di GASPARD MONGE (1746-1818). Nel 1812 prese parte alla campagna di Russia di NAPOLEONE come ingegnere. Fu fatto prigioniero ed imprigionato in Russia fino al 1814. Durante la prigione studiò geometria proiettiva scrivendo il trattato *Applications d'analyse et de géométrie*. Dal 1815 al 1825 fu ingegnere del genio militare a Metz e dal 1825 al 1835 professore di meccanica. Si interessò di turbine e di ruote idrauliche migliorandone di molto l'efficienza. A PONCELET sono dovuti due testi fondamentali di geometria proiettiva, il *Traité des propriétés projectives des figures* del 1822 ed il trattato *Applications d'analyse et de géométrie* apparsi nel 1862 e nel 1864.

Per introdurre l'argomento si consideri un dominio  $\Omega$  del piano ed un riferimento cartesiano con origine  $O$ . Si supponga assegnata una retta  $a$  e si denoti con  $\mathbf{d}_a$  il versore che definisce una direzione di  $a$  e con

$$\mathbf{n}_a = \mathbf{R} \mathbf{d}_a,$$

un versore ad esso ortogonale. Si consideri quindi un punto della retta  $a$  individuato, rispetto al baricentro  $G$  di  $\Omega$ , dal raggio vettore  $\mathbf{p}_a$ . L'equazione parametrica della retta  $a$  può allora scriversi

$$\mathbf{p}(\lambda) = \mathbf{p}_a + \lambda \mathbf{d}_a.$$

- Il *centro relativo* ad  $a$  è definito dal centro  $A$  della distribuzione dei momenti statici di  $\Omega$  rispetto ad  $a$ .

Rispetto all'origine  $O$  appartenente all'asse  $a$ , la posizione del centro relativo  $A$  è definita dal vettore

$$\mathbf{r}_A = \frac{\int_{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_a) \mathbf{r} \, da}{\int_{\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_a \, da} = \frac{\int_{\Omega} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{n}_a \, da}{\left[ \int_{\Omega} \mathbf{r} \, da \right] \cdot \mathbf{n}_a} = \frac{\mathbf{J}_O \mathbf{n}_a}{\mathbf{S}_O \cdot \mathbf{n}_a},$$

dove (vedi fig. 2.1):

- $\mathbf{r}$  denota il raggio vettore che individua la posizione di un punto  $P$  di  $\Omega$  rispetto all'origine  $O \in a$ ,
- $\mathbf{J}_O$  e  $\mathbf{S}_O$  denotano rispettivamente il tensore di inerzia ed il momento statico di  $\Omega$  rispetto ad  $O$ .

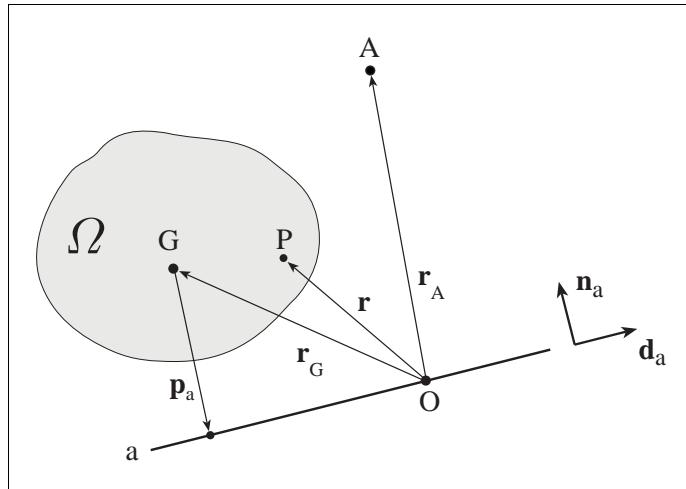


Fig. 2.1

■ La corrispondenza tra una retta  $a$  ed il suo centro relativo  $A$  è detta *antipolarità*.

Il punto  $A$  è l'*antipolo* di  $a$  e la retta  $a$  è l'*antipolare* di  $A$ .

- Ad ogni retta corrisponde un unico antipolo e, viceversa,
- ad ogni punto corrisponde un'unica retta antipolare.

Per dedurre la formula che determina la posizione dell'antipolo di una retta assegnata rispetto al baricentro  $G$ , si denoti con  $\mathbf{r}_G$  la posizione del baricentro  $G$  rispetto ad un'origine  $O \in a$ . Le formule di trasporto

$$\mathbf{S}_O = A \mathbf{r}_G, \quad \mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G + A(\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G),$$

sostituite nell'espressione della posizione  $\mathbf{r}_A$ , rispetto all'origine  $O$ , dell'antipolo  $A$  di  $a$ , forniscono

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A &= \frac{[\mathbf{J}_G + A(\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)]\mathbf{n}_a}{A\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{n}_a} = \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{n}_a} + \frac{A(\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G)\mathbf{n}_a}{A\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{n}_a} = \\ &= \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{n}_a} + \mathbf{r}_G. \end{aligned}$$

Detto  $\mathbf{p}_A = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_G$ , il raggio vettore del punto  $A$  rispetto al baricentro  $G$ , si ha che

$$\mathbf{p}_A = \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{n}_a}.$$

Quindi, essendo  $\mathbf{r}_G \cdot \mathbf{n}_a = -\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a$ , si perviene alla formula (vedi fig. 2.2)

$$\boxed{\mathbf{p}_A = -\frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a}}.$$

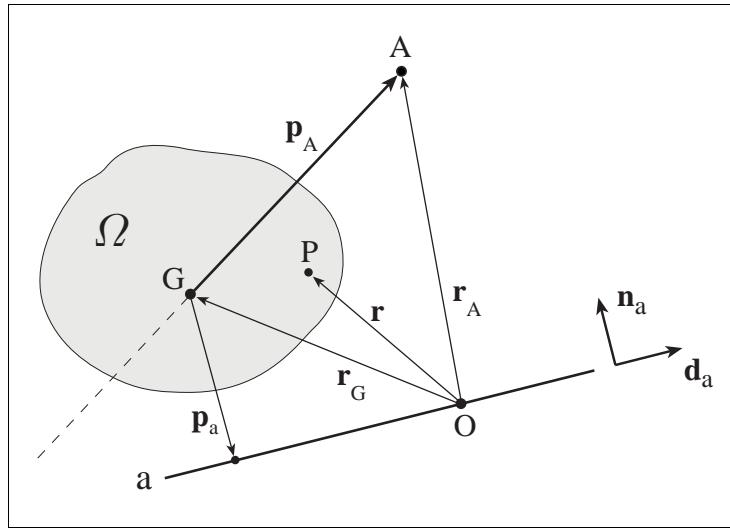


Fig. 2.2

Se la retta  $a$  trasla fino a diventare baricentrica, lo scalare  $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a$  si annulla e pertanto  $\|\mathbf{p}_A\| \rightarrow \infty$ . Ne segue che il centro relativo ad una retta baricentrica è un punto improprio del piano.

Viceversa, se la retta  $a$  trasla verso l'infinito, e dunque  $\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a \rightarrow \infty$ , si ha che  $\mathbf{p}_A \rightarrow \mathbf{o}$ . Pertanto il centro relativo alla retta impropria è il baricentro  $G$ .

Il problema inverso, consistente nel determinare la posizione dell'antipolare di un punto assegnato, è risolto dalla seguente proposizione [6].

**Proposizione 2.2.** *La retta  $a$  antipolare di  $A$  ha equazione*

$$(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{p}_A) \cdot \mathbf{p}_a = -\frac{1}{A}.$$

**Dim.** Rispetto al baricentro  $G$  la posizione  $\mathbf{p}_A$  dell'antipolo  $A$  di  $a$  è data da

$$\mathbf{p}_A = -\frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a}.$$

Deve quindi sussistere la condizione

$$(A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a) \mathbf{p}_A = -\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a,$$

che, ponendo  $\mathbf{M} := A \mathbf{p}_A \otimes \mathbf{p}_a$ , si scrive

$$(\mathbf{M} + \mathbf{J}_G) \mathbf{n}_a = \mathbf{o}.$$

L'invertibilità del tensore di inerzia  $\mathbf{J}_G$  consente di riscrivere la condizione nella forma

$$(\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1} + \mathbf{I}) \mathbf{J}_G \mathbf{n}_a = \mathbf{o}.$$

Esiste una soluzione  $\|\mathbf{n}_a\| = 1$  se e solo se l'operatore che governa il problema è singolare e cioè se

$$\det(\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1} + \mathbf{I}) = 0.$$

Ciò equivale ad imporre che l'equazione caratteristica dell'operatore  $\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1}$

$$\det(\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1} - \omega \mathbf{I}) = 0,$$

ammetta la radice  $\omega = -1$ . Si osservi quindi che

$$\det(\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1} - \omega \mathbf{I}) = \omega^2 - \omega \operatorname{tr}(\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1}) + \det \mathbf{M} \det(\mathbf{J}_G^{-1}),$$

e che  $\det \mathbf{M} = 0$  in quanto il rango della diade  $\mathbf{M}$  è pari ad 1.

Si conclude che l'equazione della retta antipolare è fornita dalla condizione lineare

$$\omega = \operatorname{tr}(\mathbf{M} \mathbf{J}_G^{-1}) = -1,$$

che, esplicitando l'espressione di  $\mathbf{M}$ , si scrive

$$(\mathbf{A} \mathbf{p}_A \otimes \mathbf{p}_a) : \mathbf{J}_G^{-1} = \mathbf{A} (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{p}_A) \cdot \mathbf{p}_a = -1.$$

Questa è l'equazione implicita che definisce la retta  $a$  come luogo dei punti di raggio vettore  $\mathbf{p}_a$ .  $\square$

### 2.3.1. Proprietà della corrispondenza tra rette e centri relativi

Sussistono le seguenti corrispondenze.

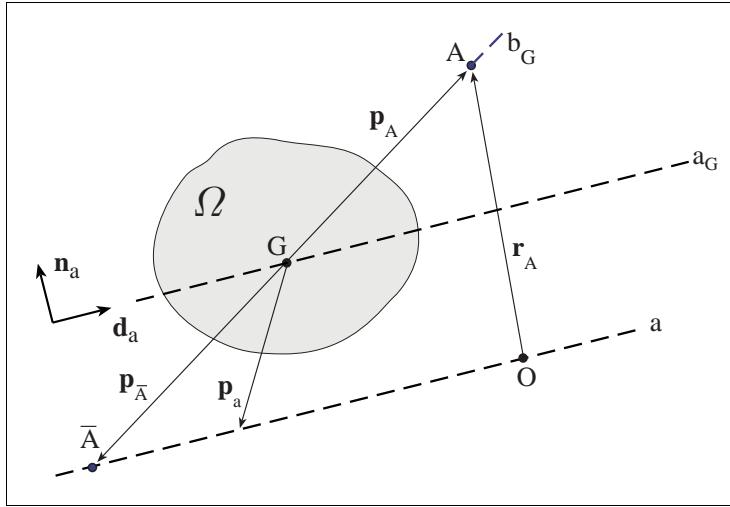


Fig. 2.3

**Proposizione 2.3.** *Sia  $a_G$  la retta parallela ad  $a$  e passante per il baricentro  $G$ . Il prodotto delle distanze orientate di  $a$  e di  $A$  dalla retta  $a_G$  è costante e negativo e quindi la retta  $a$  ed il centro  $A$  si trovano da parti opposte rispetto al baricentro (vedi fig. 2.3).*

**Dim.** Moltiplicando entrambi i membri dell'espressione che fornisce la posizione  $\mathbf{p}_A$  del centro  $A$ , relativo ad  $a$ , per  $\mathbf{n}_a$  si ottiene

$$(\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{n}_a)(\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a) = -\frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_a}{A}.$$

Il tensore  $\mathbf{J}$  è definito positivo e dunque il secondo membro è negativo.

Pertanto  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_A$  hanno proiezioni di segno opposto su  $\mathbf{n}_a$ . □

**Proposizione 2.4.** *Sia  $a_G$  la retta parallela ad  $a$  e passante per il baricentro  $G$  e sia  $b_G$  la retta passante per il centro  $A$  relativo ad  $a$ . Le rette  $a_G$  e  $b_G$  sono diametri coniugati dell'ellisse di CULMANN.*

**Dim.** Dalla espressione che fornisce la posizione  $\mathbf{p}_A$  del centro  $A$  relativo ad  $a$  si ottiene

$$\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{p}_A = -\frac{\mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a}.$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri dell'espressione per  $\mathbf{d}_a$  e ricordando che

$$\mathbf{n}_a = \mathbf{R}\mathbf{d}_a,$$

si ha che

$$\mathbf{J}^C \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{d}_a = -\frac{\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{d}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a} = 0,$$

in quanto l'inverso del tensore centrale d'inerzia coincide, a meno del fattore  $\det \mathbf{J}_G = \det \mathbf{J}^C$  con il tensore di CULMANN.  $\square$

**Proposizione 2.5.** *Sia  $\bar{a}$  la retta parallela ad  $a$  e passante per l'antipolo  $A$ . Il centro  $\bar{A}$  relativo ad  $\bar{a}$  appartiene alla retta  $a$ . Se la retta  $a$  ruota intorno ad un punto  $\bar{A} \in a$ , l'antipolo  $A$  si muove lungo l'antipolare  $\bar{a}$  (vedi fig. 2.4).*

**Dim.** Se  $A \in \bar{a}$  risulta

$$\mathbf{p}_{\bar{a}} \cdot \mathbf{n}_a = \mathbf{p}_A \cdot \mathbf{n}_a = -\frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a},$$

e quindi

$$\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a = -\frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_{\bar{a}} \cdot \mathbf{n}_a} = \mathbf{p}_{\bar{A}} \cdot \mathbf{n}_a,$$

che verifica l'appartenenza del centro  $\bar{A}$  alla retta  $a$ .

La retta  $\bar{a}$  è pertanto il luogo dei centri relativi al fascio di rette per  $\bar{A}$ .  $\square$

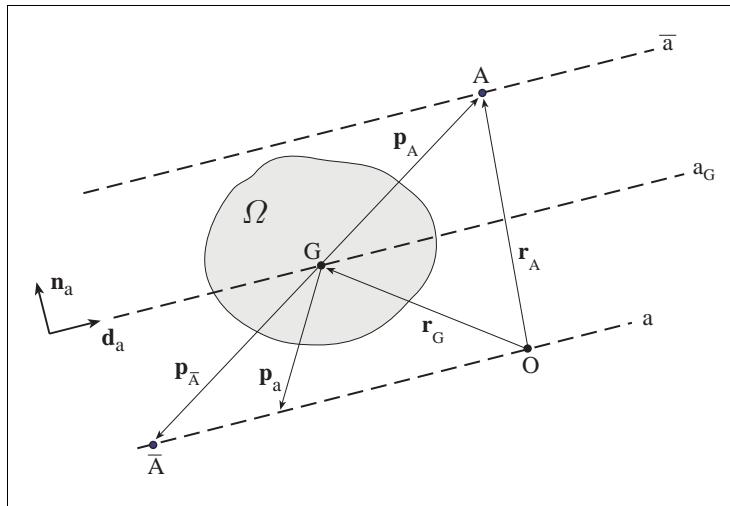


Fig. 2.4

## 2.4. Il nocciolo di inerzia

Il *nocciolo d'inerzia* di un dominio piano è il luogo degli antipoli delle rette non secanti la figura.

- I punti interni del nocciolo costituiscono i centri relativi alle rette del piano, non secanti il dominio piano  $\Omega$ .
- La frontiera del nocciolo è il luogo dei centri relativi delle rette tangenti che inviluppano il dominio piano.

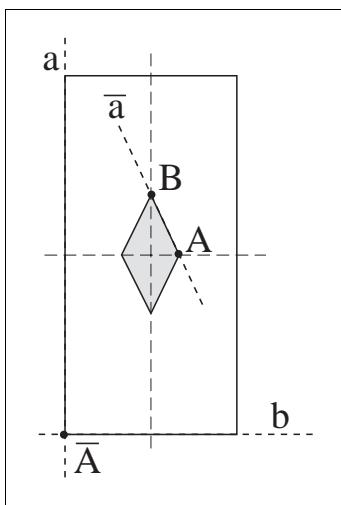


Fig. 2.5

Il nocciolo d'inerzia è una figura convessa.  
Ad un punto di cuspide della frontiera del dominio  $\Omega$  corrisponde un tratto rettilineo della frontiera del nocciolo, e viceversa.

## 2.5. Polarità

La corrispondenza tra una retta  $a$  ed il suo centro relativo  $A$  è detta *antipolarità*. poiché è biunivoca e priva di elementi autoconiugati, nel senso che nessuna retta contiene il proprio antipolo.

Per mostrarlo si osservi che l'appartenenza dell'antipolo  $A$  alla retta  $a$  è espressa dalla condizione

$$(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{p}_A) \cdot \mathbf{p}_A = -\frac{1}{A}.$$

che in forza della definizione positiva del tensore  $\mathbf{J}_G^{-1}$  descrive una conica immaginaria.

Per ottenere una conica fondamentale reale si consideri la corrispondenza che ad ogni retta  $a$  del piano associa il *polo*  $A^c$  simmetrico dell'antipolo  $A$  rispetto al baricentro  $G$  (vedi fig. 2.6).

- La corrispondenza tra  $a$  e  $A^c$  è detta una *polarità* con centro  $G$ . La posizione del polo  $A^c$  è definita da

$$\mathbf{p}_{A^c} = \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a}.$$

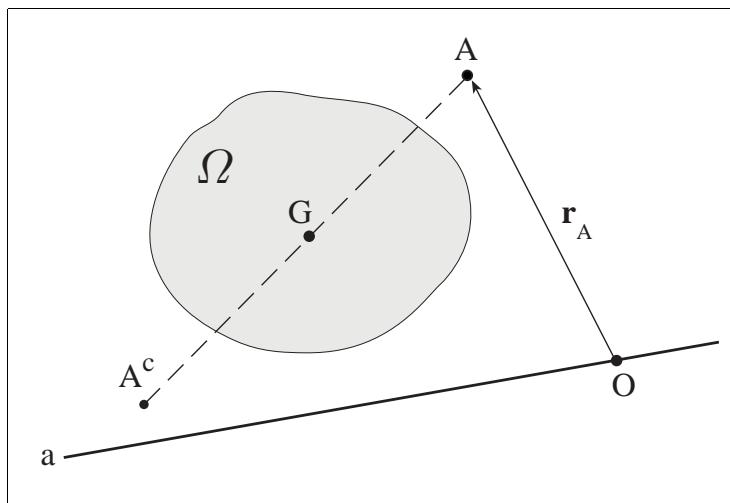


Fig. 2.6

Procedendo come nella dimostrazione della proposizione 2.2 (p. 364) si perviene all'espressione della retta polare di  $A^c$

$$(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{p}_{A^c}) \cdot \mathbf{p}_a = \frac{1}{A}.$$

La polarità è pertanto dotata di elementi autoconiugati che descrivono l'ellisse reale di equazione

$$(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{p}) \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{A}.$$

Si è così dimostrato il seguente risultato.

**Proposizione 2.6.** *L'insieme delle coppie autoconiugate, costituite da polo e polare, descrive l'ellisse di CULMANN e le rette ad essa tangenti.*  $\square$

### 3. ESEMPI

Si riportano nel seguito alcuni importanti esempi di applicazione delle formule precedenti a figure geometriche anche non poligonali.

#### 3.1. La sezione rettangolare

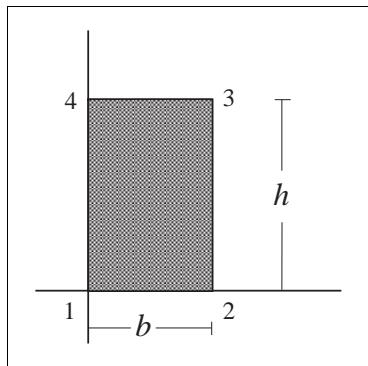


Fig. 3.1 Sezione rettangolare

Sia assegnata la sezione rettangolare di dimensioni  $(b \times h)$ .

I vertici sono individuati dai vettori posizione

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{r}_2 &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{bmatrix} b \\ h \end{bmatrix} & \mathbf{r}_4 &= \begin{bmatrix} 0 \\ h \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Risulta inoltre

$$\mathbf{r}_1^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_2^\perp = \begin{bmatrix} 0 \\ -b \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_3^\perp = \begin{bmatrix} h \\ -b \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_4^\perp = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- L'area  $A$  del rettangolo è quindi pari a

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp = \frac{1}{2}(0 + bh + bh + 0) = bh.$$

- L'espressione del momento statico  $\mathbf{S}_O$  rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento è

$$\mathbf{S}_O = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp)(\mathbf{r}_i + \mathbf{r}_{i+1}),$$

e nel caso della sezione rettangolare in esame fornisce

$$\mathbf{S}_O = \frac{bh}{6}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) + \frac{bh}{6}(\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4) = \frac{bh}{6}(\mathbf{r}_2 + 2\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4),$$

e cioè

$$\mathbf{S}_O = \frac{bh}{6} \begin{bmatrix} 3b \\ 3h \end{bmatrix} = \frac{bh}{2} \begin{bmatrix} b \\ h \end{bmatrix}.$$

- Noti il momento statico  $\mathbf{S}_O$  e l'area  $A$ , è possibile calcolare il vettore posizione del baricentro  $G$  della sezione rettangolare

$$\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{S}_O}{A} = \frac{1}{bh} \frac{bh}{2} \begin{bmatrix} b \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b \\ h \end{bmatrix}.$$

- Dall'espressione del tensore d'inerzia  $\mathbf{J}_O$  rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento

$$\mathbf{J}_O = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^4 (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp) \left[ \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i + \frac{1}{2} (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_{i+1} + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_i) + \mathbf{r}_{i+1} \otimes \mathbf{r}_{i+1} \right],$$

ed osservando che risultando nullo il prodotto scalare  $\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_{i+1}^\perp$  per  $i = 1, 4$ , i termini non nulli nella precedente formula sono i seguenti

$$i = 2 \quad \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 \otimes \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} b^2 & bh \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_3 \otimes \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ bh & 0 \end{bmatrix};$$

$$i = 3 \quad \mathbf{r}_3 \otimes \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} b^2 & bh \\ bh & h^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_3 \otimes \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 & bh \\ 0 & h^2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{r}_4 \otimes \mathbf{r}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bh & h^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_4 \otimes \mathbf{r}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h^2 \end{bmatrix}.$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O &= \frac{bh}{12} \begin{bmatrix} b^2 + \frac{2b^2}{2} + b^2 & \frac{bh}{2} + bh \\ \frac{bh}{2} + bh & h^2 \end{bmatrix} + \frac{bh}{12} \begin{bmatrix} b^2 & bh + \frac{bh}{2} \\ bh + \frac{bh}{2} & h^2 + \frac{2h^2}{2} + h^2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{bh}{12} \begin{bmatrix} 4b^2 & 3bh \\ 3bh & 4h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b^3 h}{3} & \frac{b^2 h^2}{4} \\ \frac{b^2 h^2}{4} & \frac{bh^3}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Il teorema del trasporto fornisce l'espressione del tensore d'inerzia  $\mathbf{J}_G$  nel riferimento cartesiano traslato rispetto a quello iniziale ed avente il baricentro  $G$  come origine

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - A \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G.$$

Risultando

$$\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \frac{b}{2} \\ \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b^2}{4} & \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} & \frac{h^2}{4} \end{bmatrix},$$

si ha

$$\mathbf{J}_G = \begin{bmatrix} \frac{b^3 h}{3} & \frac{b^2 h^2}{4} \\ \frac{b^2 h^2}{4} & \frac{b h^3}{3} \end{bmatrix} - b h \begin{bmatrix} \frac{b^2}{4} & \frac{bh}{4} \\ \frac{bh}{4} & \frac{h^2}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b^3 h}{12} & 0 \\ 0 & \frac{bh^3}{12} \end{bmatrix}.$$

- Il nocciolo centrale di inerzia.

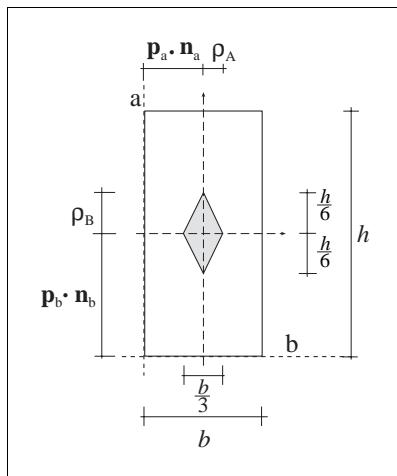
La frontiera del nocciolo è il luogo dei centri relativi alle tangenti che inviluppano il dominio piano.

Il nocciolo della sezione rettangolare è un poligono i cui vertici sono gli antipoli delle rette  $a$  e  $b$  che definiscono la figura assegnata.

Dall'espressione

$$\mathbf{p}_A = - \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a},$$

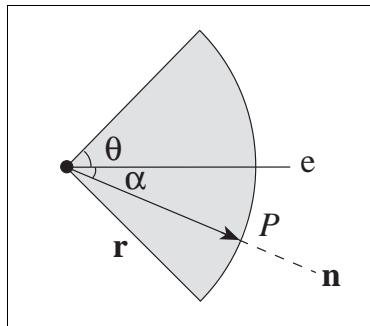
si ha che



$$\rho_A = (\mathbf{p}_A \cdot \mathbf{n}_a) = - \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_a}{A \mathbf{p}_a \cdot \mathbf{n}_a} = \frac{b}{6},$$

$$\rho_B = (\mathbf{p}_B \cdot \mathbf{n}_b) = - \frac{\mathbf{J}_G \mathbf{n}_b \cdot \mathbf{n}_b}{A \mathbf{p}_b \cdot \mathbf{n}_b} = \frac{h}{6}.$$

### 3.2. Il settore circolare



Sia assegnata una sezione avente forma di settore circolare di raggio  $R$  e ampiezza  $2\theta$ , simmetrica rispetto all'asse orizzontale di versore  $e$ . Si consideri quindi un sistema di riferimento polare di centro  $O$ , raggio  $\mathbf{r}$  ed anomalia  $\alpha$ . Detto  $P$  il generico punto della frontiera della sezione, sia  $\mathbf{n}$  il versore della normale uscente in  $P$ .

Nel sistema di riferimento assegnato, il punto  $P$  è individuato dal raggio vettore  $\mathbf{r}$  e dall'anomalia  $\alpha$ .

Sulla parte curvilinea della frontiera risulta

$$\mathbf{r} = \mathbf{Q}\mathbf{n} \quad \mathbf{n} = \mathbf{R}\mathbf{e},$$

dove  $\mathbf{R}$  indica il tensore che ruota il generico vettore di un angolo  $\alpha$  in senso antiorario.

Nel sistema prescelto la matrice rappresentativa di  $\mathbf{R}$  è quindi

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Sia  $s$  l'ascissa curvilinea lungo la frontiera della sezione misurata a partire dall'asse di simmetria.

■ L'area  $A$  del settore circolare risulta

$$A = \int_{\Omega} d\alpha = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = \frac{R}{2} \int_{\partial\Omega} ds = \frac{R^2}{2} \int_{-\theta}^{\theta} d\alpha = R^2 \theta,$$

essendo nullo il prodotto scalare  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$  sui tratti rettilinei della frontiera.

■ Il momento statico  $\mathbf{S}_O$  della sezione vale

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_O &= \int_{\Omega} \mathbf{r} da = \frac{1}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) ds = \frac{R}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} ds = \\ &= \frac{R^2}{3} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} ds = \frac{R^3}{3} \int_{-\theta}^{\theta} \mathbf{R} \mathbf{e} d\alpha. \end{aligned}$$

Integrando si ha

$$\mathbf{S}_O = \frac{R^3}{3} \begin{bmatrix} 2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- La posizione del baricentro  $G$  è individuata dal raggio vettore  $\mathbf{r}_G$

$$\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{S}_O}{A} = \frac{R}{3\theta} \begin{bmatrix} 2 \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix},$$

e da un'anomalia nulla dovendo  $G$  appartenere all'asse di simmetria della sezione.

- Il tensore d'inerzia  $\mathbf{J}_O$  della sezione rispetto all'origine  $O$  del sistema di riferimento assegnato risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_O &= \int_{\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da = \frac{1}{4} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, ds = \frac{R}{4} \int_{\partial\Omega} \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, ds = \\ &= \frac{R}{4} \int_{\partial\Omega} R \mathbf{n} \otimes R \mathbf{n} \, ds = \frac{R^3}{4} \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \, ds = \frac{R^4}{4} \int_{-\theta}^{\theta} \mathbf{R} \mathbf{e} \otimes \mathbf{R} \mathbf{e} \, d\alpha \end{aligned}$$

Poiché

$$\mathbf{R} \mathbf{e} \otimes \mathbf{R} \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

l'espressione del tensore  $\mathbf{J}_O$  diventa

$$\mathbf{J}_O = \frac{R^4}{4} \begin{bmatrix} \theta + \sin \theta \cos \theta & 0 \\ 0 & \theta - \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}.$$

- Il tensore d'inerzia  $\mathbf{J}_G$  della sezione rispetto al baricentro  $G$  può essere valutato utilizzando il teorema del trasporto

$$\mathbf{J}_G = \mathbf{J}_O - A \mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G.$$

In particolare, poiché risulta

$$\mathbf{r}_G \otimes \mathbf{r}_G = \frac{2R}{3\theta} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \frac{2R}{3\theta} \begin{bmatrix} \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{4R^2}{9\theta^2} \begin{bmatrix} \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

si ha

$$\mathbf{J}_G = \frac{R^4}{4} \begin{bmatrix} \theta + \sin \theta \cos \theta - \frac{16 \sin^2 \theta}{9\theta} & 0 \\ 0 & \theta - \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}.$$

### 3.3. La sezione circolare

Una sezione circolare può essere riguardata come un particolare settore circolare di ampiezza  $2\pi$ . Pertanto le espressioni che forniscono l'area  $A$ , il momento statico  $S_O$  e il tensore d'inerzia  $J_O$  della sezione circolare possono essere derivate da quelle determinate nel paragrafo precedente ponendo  $\theta = \pi$ .

Si ritrova così l'espressione ben nota dell'area di un cerchio

$$A = \pi R^2.$$

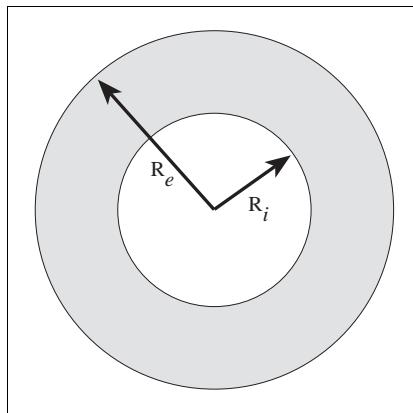
Assumendo l'origine del sistema di riferimento coincidente con il baricentro si ha

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il tensore d'inerzia  $J_O$  vale invece

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G = \pi \frac{R^4}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.4. La corona circolare



Siano  $R_e$  e  $R_i$  il raggio esterno e quello interno di una sezione a forma di corona circolare. Le caratteristiche geometriche di una sezione siffatta possono essere valutate calcolando quelle relative alla sezione circolare di raggio  $R_e$  e sottraendo da esse quelle relative alla sezione circolare di raggio  $R_i$ . Risulta quindi

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{S}_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Le espressioni che forniscono l'area  $A$  e il tensore d'inerzia  $J_O$  sono

$$A = \pi(R_e^2 - R_i^2)$$

$$\mathbf{J}_O = \mathbf{J}_G = \pi \frac{R_e^4 - R_i^4}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

## **RIFERIMENTI**

1. O. BELLUZZI, Scienza delle Costruzioni, Vol. I-III, Ed. Zanichelli, (1955).
2. V. FRANCIOSI, Scienza delle Costruzioni, Vol. I-V, Liguori, Napoli (1959-1970).
3. R. BALDACCI, Scienza delle Costruzioni Vol. I-II, UTET, (1970-1976).
4. V. FRANCIOSI, Problemi di Scienza delle Costruzioni, Vol. I, Ed. Liguori, (1975).
5. E. BENVENUTO, La Scienza delle Costruzioni ed il suo sviluppo storico, Ed. Sansoni, Firenze, (1981).
6. E. SACCO, Argomenti di Scienza delle Costruzioni, Dipartimento di Ingegneria Industriale, Università di Cassino, (1998).



## X – IL SOLIDO TRAVE

### 1. PROBLEMA di SAINT-VENANT

Si definisce *trave di SAINT VENANT* un corpo continuo elastico lineare, isotropo ed omogeneo avente la forma di un prisma retto di lunghezza  $l$ , sollecitato sulle basi terminali da due sistemi di forze che nel complesso costituiscono un sistema staticamente equivalente a zero. Il mantello laterale della trave è scarico e le forze di massa sono assunte nulle.

Il problema dell'equilibrio elastico così posto è noto come *problema di SAINT VENANT*<sup>33</sup> dal nome di colui che per primo ne fornì una soluzione rigorosa dando un contributo fondamentale alla Teoria dell'Elasticità ed alla Scienza delle Costruzioni.

ADHÉMAR JEAN-CLAUDE BARRÉ, conte di SAINT VENANT, ingegnere civile e professore di meccanica all'Ecole de Ponts et Chausées, sottopose la sua memoria *De la torsion des prismes* all'Accademia delle Scienze di Parigi il 13 giugno 1853.

SAINT VENANT non era membro dell'Accademia (lo sarebbe divenuto solo nel 1868) e quindi, com'era prassi, venne nominata una commissione di quattro Soci che doveva esaminare la memoria e giudicarne la pubblicabilità sui volumi della Accademia.

La commissione, composta da AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (Presidente), JEAN VICTOR PONCELET, GUILLAME PIOBERT e GABRIEL LAMÉ (Relatore). emise il giudizio, altamente elogiativo, nel dicembre del 1853 ... *il offre un nouvel example de ce que peut faire la science du géomètre, unie a celle de l'ingénieur...*" (vedasi la nota di GAETANO FICHERA [19]).

<sup>33</sup> ADHÉMAR JEAN CLAUDE BARRÉ DE SAINT-VENANT (1797-1886). Allievo della ECOLE POLYTECHNIQUE, professore di matematica e di meccanica all' ECOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES succedendo a CORIOLIS. Portò contributi importanti alla meccanica, all'elasticità, all'idrostatica ed all'idrodinamica. Nel 1843 formulò correttamente le equazioni che reggono il flusso di un fluido viscoso incomprensibile, dedotte in precedenza da NAVIER sulla base della teoria molecolare. Le stesse equazioni furono poi formulate indipendentemente da STOKES nel 1845. Nel 1883 (all'età di 86 anni) tradusse con FLAMANT il lavoro sull'elasticità di CLEBSCH dal tedesco in francese. La traduzione, dal titolo *Theorie de l'élasticité des corps solides*, conteneva tante note di SAINT-VENANT che il testo originale fu più che raddoppiato.

### 1.1. Principio di Saint Venant

La soluzione fornita dal SAINT VENANT riguarda particolari campi di tensioni agenti sulle basi della trave. Essa sembrerebbe pertanto di interesse limitato e comunque non utile per le applicazioni.

La possibilità di dare validità generale a tale soluzione, anche se in senso approssimato, ma comunque del tutto soddisfacente per le applicazioni, è dovuta anch'essa al genio di SAINT VENANT [1].

Egli infatti formulò il seguente principio:

*Sistemi di forze staticamente equivalenti agenti sulle basi della trave, producono gli stessi effetti su tutta la lunghezza della trave, ad eccezione di zone di estensione limitata in prossimità delle basi*

*Principio di  
SAINT VENANT*

Tale principio di *indifferenza* consente di valutare lo stato tensionale di una trave avendo come dati le sole caratteristiche statiche dei sistemi di forze agenti sulle basi.

La precisa formulazione matematica e la dimostrazione di tale principio hanno costituito uno dei problemi più suggestivi della Meccanica e della Scienza delle Costruzioni.

Contributi importanti alla discussione sono stati portati in particolare da OSVALDO ZANABONI [10] (1937) e da RICHARD VON MISES [12] (1945).

Solo recentemente un soddisfacente approccio al problema è stato fornito da RICHARD TOUPIN che in [14] (1975) ha dimostrato il seguente teorema.

**Proposizione 1.1. Teorema di Toupin.** *Sia  $\mathbf{C}(-L, L)$  un solido trave di forma cilindrica e di lunghezza  $2L$ . Si denoti con  $\mathbf{C}(a, b)$  il cilindro compreso tra le ascisse  $a$  e  $b$  con  $-L \leq a, b \leq L$  e sia*

$$U(z) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}(-L,z)} \left[ 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \lambda (\text{tr } \mathbf{D})^2 \right] dx,$$

*l'energia di deformazione elastica nel tratto di trave compreso tra l'estremità di ascissa  $-L$  e la sezione trasversale di ascissa  $z$ . Allora, se la base  $-L$  è scarica, si ha*

$$\frac{U(z)}{U(L)} \leq \gamma_o \exp \left( -\frac{L-z}{\gamma} \right),$$

*dove  $\gamma_o$  e  $\gamma$  sono costanti che dipendono dalla geometria della trave e dalla natura elastica del materiale.*  $\square$

Il risultato di TOUPIN mostra che l'energia elastica decade in modo esponenziale quando ci si allontani dalla base caricata. Il teorema di TOUPIN è stato modificato da FICHERA [18] (1977) per pervenire al seguente risultato definitivo.

**Proposizione 1.2. Teorema del principio di Saint Venant.** *Si consideri un solido trave  $C(L) = C(-L, L)$  di forma cilindrica e di lunghezza  $2L$  e sia*

$$U(z) = \frac{1}{2} \int_{C(z)} \left[ 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \lambda (\text{tr } \mathbf{D})^2 \right] dx,$$

*l'energia di deformazione elastica nel tratto di trave compreso tra le sezioni trasversali di ascissa  $-z$  e  $z$ . Allora, fissato  $\rho$  con  $0 < \rho < L$  si ha, per  $0 < z < L - \rho$ , che*

$$\frac{U(z)}{U(L)} \leq \gamma_o \exp \left( \frac{z + \rho - L}{\gamma(\rho)} \right),$$

*dove  $\gamma(\rho)^2 = (6\lambda + 8\mu)/\omega(\rho)$  essendo  $\omega(\rho)$  è la più piccola frequenza propria delle vibrazioni libere del cilindro  $C(\rho/2)$ .*  $\square$

## 1.2. Ipotesi sullo stato tensionale

■ **Notazione.** Nel seguito si denoterà con  $\sigma$  il tensore dello stato tensionale e con  $\varepsilon$  quello dello stato deformativo. Ciò in quanto nella teoria della trave le lettere  $T$  e  $D$  sono tradizionalmente riservate ad altre grandezze.

Rinunciando ad affrontare il problema dell'integrazione generale delle equazioni dell'equilibrio elastico per la trave di SAINT VENANT, si descriveranno nel seguito le proprietà generali dello stato tensionale alla SAINT VENANT analizzando quindi separatamente i diversi tipi di sollecitazione sulle basi. Per alcuni di essi (Flessione e Sforzo Normale, Torsione) sarà fornita la soluzione esatta e per altri (Taglio) solo soluzioni approssimate di più immediato interesse applicativo.

La soluzione del problema della trave fornita da CLEBSCH<sup>34</sup> e da SAINT VENANT si basa sull'idea di considerare la trave come un insieme di fibre longitudinali che si trasmettono solo interazioni tangenziali [3].

<sup>34</sup> RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH (1833-1972). Allievo di FRANZ NEUMANN (1798-1895) e di LUDWIG OTTO HESSE (1811-1874) alla scuola di matematica dell'University di Königsberg fondata da JACOBI. I suoi contributi alla teoria dell'elasticità sono contenuti nel lavoro *Theorie der Elastizität fester Körper* del 1862. Gli interessi di CLEBSCH si spostarono poi verso il calcolo delle variazioni, le equazioni alle derivate parziali e le funzioni di NIELS HENRIK ABEL (1802-1829). Nel 1863 fondò a Giessen la scuola di geometria algebrica con PAUL ALBERT GORDAN (1837-1912), BRILL, MAX NOETHER, LINDEMANN e LUEROTH. Nel 1868 a Göttingen con CARL GOTTFRIED NEUMANN (1832-1925), figlio di FRANZ ERNST NEUMANN (1798-1895), fondò la rivista *Mathematische Annalen*.

Ciò equivale a supporre sulle le tensioni normali sulle giaciture parallele all'*asse della trave* che è il luogo dei centri geometrici delle sezioni rette.

Per mostrare le implicazioni di questa ipotesi sullo stato tensionale, si consideri un riferimento ortonormale  $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  con il versore  $\mathbf{k}$  parallelo all'asse della trave.

Le intersezioni tra il prisma ed i piani ortogonali alle generatrici del prisma si dicono le *sezioni trasversali* o *sezioni rette* della trave.

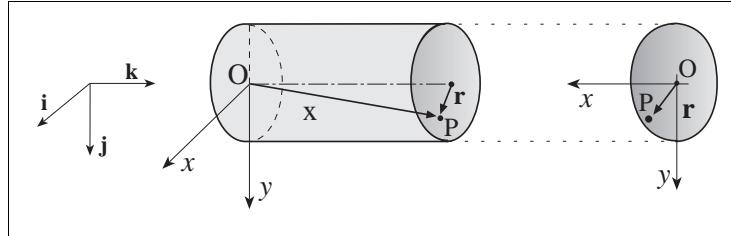


Fig. 1.1

Sia  $\mathbf{x} \in V$  un generico vettore posizione di componenti  $x, y, z$  così che

$$\mathbf{x} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Il proiettore ortogonale sull'asse della trave è fornito dal prodotto tensoriale  $\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$  definito da

$$(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k})\mathbf{x} = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\mathbf{k}, \quad \forall \mathbf{x} \in V,$$

ed il proiettore ortogonale  $\mathbf{\Pi}$  sul piano della sezione trasversale è

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{x} = [\mathbf{I} - (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k})]\mathbf{x} = \mathbf{x} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\mathbf{k}, \quad \forall \mathbf{x} \in V.$$

Con un piccolo abuso di notazione nel seguito si denoteranno con lo stesso simbolo i seguenti due vettori:

- il vettore dello spazio tridimensionale

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})\mathbf{k} = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

proiezione ortogonale del vettore  $\mathbf{x} \in V$  sul piano trasversale,

- il vettore  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  del piano trasversale considerato come spazio bidimensionale.

Si scriverà dunque

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j},$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{r} + z\mathbf{k}.$$

Sia  $\mathbf{n}$  il versore della normale ad una giacitura parallela a  $\mathbf{k}$ , così che

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

L'ipotesi di interazione puramente tangenziale tra le fibre longitudinali della trave richiede che

$$(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{n} \in \mathbf{V} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

che in termini di componenti si scrive

$$\sigma_n = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + 2 \tau_{xy} n_x n_y = 0,$$

per ogni  $n_x$  e  $n_y$ .

Tale condizione è soddisfatta se e solo se risulta

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

*Componenti nulle  
dello stato tensionale*

La matrice rappresentativa dello stato tensionale in ogni punto della trave ha dunque la forma

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Per semplificare le notazioni si denoterà con  $\sigma = \sigma_z$  la tensione normale sulla sezione trasversale, e con  $\boldsymbol{\tau}$  il vettore tensione tangenziale di componenti  $\tau_x$  e  $\tau_y$ . Dunque

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_x \mathbf{i} + \tau_y \mathbf{j} = \tau_x \mathbf{i} + \tau_y \mathbf{j} + 0 \mathbf{k}.$$

Con  $\tau$  invece si indicherà il modulo della tensione tangenziale:

$$\tau = \| \boldsymbol{\tau} \| = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}.$$

La matrice dello stato tensionale nel riferimento ortonormale  $\{\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  si scriverà pertanto

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_x \\ 0 & 0 & \tau_y \\ \tau_x & \tau_y & \sigma \end{bmatrix},$$

ed in notazione tensoriale

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + 2 \operatorname{sym} (\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\tau}).$$

Gli invarianti del tensore  $\sigma$  sono

$$I_1 = \text{tr } \sigma = \sigma,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} [(\text{tr } \sigma)^2 - \text{tr } (\sigma^2)] = -(\tau_x^2 + \tau_y^2) = -\tau^2,$$

$$I_3 = \det \sigma = 0.$$

L'espressione di  $I_2$  si deduce osservando che

$$[\sigma^2] = \begin{bmatrix} \tau_x^2 & \tau_x \tau_y & \tau_x \sigma \\ \tau_y \tau_x & \tau_y^2 & \tau_y \sigma \\ \tau_x \sigma & \tau_y \sigma & \tau_x^2 + \tau_y^2 + \sigma^2 \end{bmatrix},$$

così che:  $\text{tr } \sigma^2 = 2(\tau_x^2 + \tau_y^2) + \sigma^2$ .

Ricordando che il determinante è pari al prodotto degli autovalori associati ad una terna principale ortonormale, l'annullarsi del determinante assicura che almeno uno di tali autovalori è nullo. Dunque

- Lo stato tensionale alla SAINT VENANT è uno *stato piano di tensione*. Il piano delle tensioni  $\pi$  ha per normale la direzione principale con autovalore nullo.

L'espressione della tensione agente sulla generica giacitura di normale  $\mathbf{n}$

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{n} &= [\sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + 2 \text{ sym}(\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\tau})] \mathbf{n} = \\ &= \sigma(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{k} + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\tau} + (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

mostra che essa è combinazione lineare di  $\boldsymbol{\tau}$  e di  $\mathbf{k}$ . Dunque il piano  $\pi$  delle tensioni è in ogni punto individuato dal versore  $\mathbf{k}$  parallelo all'asse della trave e dalla tensione tangenziale  $\boldsymbol{\tau}$  agente sulla sezione retta. Se in un punto la tensione tangenziale  $\boldsymbol{\tau}$  è nulla, lo stato tensionale è ivi monoassiale con asse  $\mathbf{k}$ .

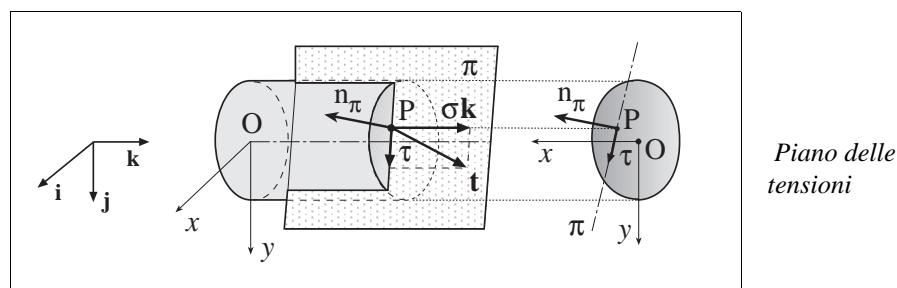


Fig. 1.2

Ecco un quadro riassuntivo di quanto illustrato finora.

*IPOTESI della TEORIA di SAINT VENANT*

■ geometriche:

il solido ha la forma di *prisma retto*;

■ sul materiale:

il materiale è *elastico lineare, omogeneo e isotropo*;

■ sulle tensioni:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

lo *stato tensionale* è *piano*.

Il piano delle tensioni è individuato in ogni punto dal versore  $\mathbf{k}$  dell'asse della trave e dal vettore tensione tangenziale  $\boldsymbol{\tau}$ ;

■ sui carichi:

$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0}$  mantello laterale scarico,

$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{k}$  sulle basi,

$\mathbf{b} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  forze di massa nulle.

### 1.2.1. Direzioni principali

Le tensioni principali possono essere facilmente calcolate poichè, essendo lo stato tensionale piano, almeno una nulla di esse è nulla e quindi la determinazione delle altre richiede di trovare gli zeri di un polinomio di secondo grado.

Assumendo che l'asse delle  $y$  sia parallelo alla  $\boldsymbol{\tau}$  nel punto in esame, l'equazione secolare

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_p \mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} -\sigma_p & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_p & \tau \\ 0 & \tau & \sigma - \sigma_p \end{bmatrix} = -\sigma_p [ -\sigma_p (\sigma - \sigma_p) - \tau^2 ] = 0,$$

fornisce le tensioni principali

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{p1} = 0, \\ \sigma_{p2} \\ \sigma_{p3} \end{array} \right\} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}.$$

Allo stesso risultato si può pervenire tracciando il cerchio di MOHR relativo al fascio di giaciture con sostegno ortogonale al piano delle tensioni (vedi fig. 1.3).

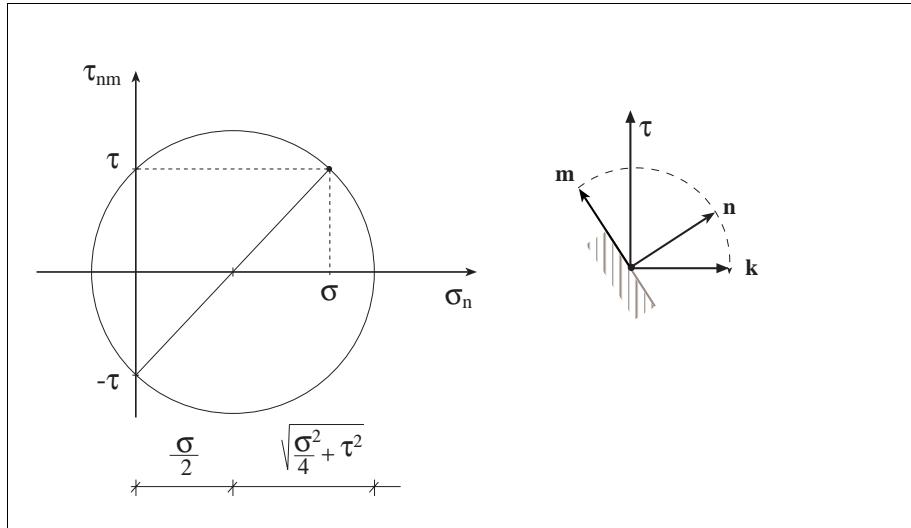


Fig. 1.3

- La tensione sulla giacitura di normale  $\mathbf{k}$  ha componenti secondo MOHR pari a  $\{\sigma, \tau\}$ .
- La tensione sulla giacitura ortogonale, avente normale parallela a  $\tau$ , ha componenti secondo MOHR pari a  $\{0, -\tau\}$ .

Allora il centro del cerchio ha nel piano di MOHR ascissa pari a  $\sigma/2$  ed il raggio e le intersezioni con l'asse delle  $\sigma$  sono pari a

$$r = \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}, \quad \sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2}.$$

### 1.3. Condizioni di equilibrio

- Essendo per ipotesi nulle le forze di massa la condizione differenziale di equilibrio  $\mathbf{b} = -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{o}$  impone che

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0, & \frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

ed in notazione vettoriale

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{o}, \\ \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma'. \end{cases}$$

Si noti che per semplificare le notazioni si è posto  $\sigma' = \frac{\partial \sigma}{\partial z}$  e  $\boldsymbol{\tau}' = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z}$ .

- La condizione  $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{o}$  si traduce nella proprietà:

Il campo delle tensioni tangenziali si ripete identicamente su ogni sezione retta della trave.

- La condizione  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma'$  consente di valutare la divergenza del campo delle  $\boldsymbol{\tau}$  in funzione del gradiente  $\sigma'$  delle tensioni normali  $\sigma$ .

Derivando quindi l'espressione  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma'$  rispetto a  $z$  si deduce che

$$\sigma'' + (\operatorname{div} \boldsymbol{\tau})' = \sigma'' + \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}' = 0.$$

Dunque, essendo  $\boldsymbol{\tau}' = \mathbf{o}$ , deve risultare  $\sigma'' = 0$ . Pertanto si deduce che

Le tensioni normali variano con legge affine lungo l'asse della trave.

- Le condizioni di equilibrio sulla superficie laterale della trave  $\mathbf{p} = \sigma \mathbf{n} = \mathbf{o}$ , che per ipotesi è scarica impongono poi che

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \iff \tau_x n_x + \tau_y n_y = 0.$$

Nei punti del contorno delle sezioni rette le tensioni tangenziali  $\boldsymbol{\tau}$  sono dunque tangentи alla linea di contorno, come mostrato in fig. 1.4.

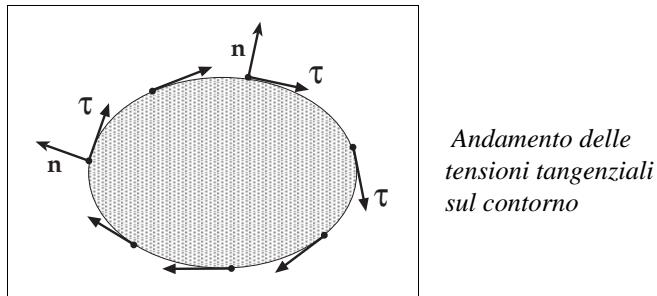


Fig. 1.4

La condizione di tangenza al contorno può anche esprimersi affermando che

- La sezione retta è un tubo di flusso per le tensioni tangenziali.
- Le condizioni di equilibrio sulle basi di normale  $\mathbf{k}$  e  $-\mathbf{k}$  si scrivono rispettivamente

$$\mathbf{p} = \sigma \mathbf{k}, \quad \mathbf{p} = -\sigma \mathbf{k},$$

e cioè, in componenti

Base di normale $\mathbf{k}$ $(z = l)$	$\begin{cases} p_x = \tau_x \\ p_y = \tau_y \\ p_z = \sigma \end{cases}$	Base di normale $-\mathbf{k}$ $(z = 0)$	$\begin{cases} p_x = -\tau_x \\ p_y = -\tau_y \\ p_z = -\sigma \end{cases}$
---	--	--	---

#### 1.4. Caratteristiche della sollecitazione

Sia  $O$  l'origine di un riferimento e  $\mathbf{r}$  il relativo raggio vettore che individua i punti del piano di una sezione trasversale della trave.

- Il risultante delle sollecitazioni agenti su di una sezione trasversale di normale uscente  $\mathbf{k}$  è il vettore

$$\mathbf{R} = \int_A \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{k} \, da = N \mathbf{k} + \mathbf{T}.$$

- La componente scalare  $N$  lungo l'asse della trave è lo *sforzo normale*:

$$N = \int_A (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) \, da = \int_A \sigma(\mathbf{r}) \, da. \quad \text{Sforzo normale}$$

Se  $N$  è positivo lo sforzo normale è di *trazione*, altrimenti è di *compressione*.

- La componente vettoriale  $\mathbf{T}$  del risultante sul piano della sezione trasversale è lo *sforzo di taglio*:

$$\mathbf{T} = \int_A [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}) \mathbf{k} - \sigma(\mathbf{r}) \mathbf{k}] \, da = \int_A \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \, da, \quad \text{Sforzo di taglio}$$

ed in componenti

$$T_x = \int_A \tau_x(\mathbf{r}) \, da, \quad T_y = \int_A \tau_y(\mathbf{r}) \, da$$

*Componenti dello sforzo di taglio*

- Il vettore assiale del momento risultante rispetto ad un polo O vale

$$\mathbf{M}_O = \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{k} \, da = M_t \mathbf{k} + \mathbf{M}_f,$$

dove il simbolo  $\times$  denota il prodotto vettoriale.

- La componente scalare  $M_t$  lungo l'asse della trave è il *momento torcente*:

$$M_t = \int_A (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{k} \, da = \int_A (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) \, da.$$

*Momento torcente*

ovvero

$$M_t = \int_A [\tau_y(\mathbf{r}) x - \tau_x(\mathbf{r}) y] \, da.$$

- La componente vettoriale  $\mathbf{M}_f$  sul piano della sezione trasversale è il *momento flettente*:

$$\mathbf{M}_f = \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{k} \, \sigma \, da,$$

*Momento flettente*

ed in termini di componenti

$$M_x = \int_A y \, \sigma(\mathbf{r}) \, da, \quad M_y = - \int_A x \, \sigma(\mathbf{r}) \, da.$$

*Componenti del momento flettente*

### 1.5. Relazioni costitutive

Si consideri il legame elastico isotropo lineare

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}.$$

sostituendo l'espresione dello stato tensionale alla SAINT VENANT

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + 2 \operatorname{sym}(\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\tau}),$$

e notando che  $\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma$ , si deduce la relazione

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1+\nu}{E} \left[ \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} + 2 \operatorname{sym}(\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\tau}) \right] - \frac{\nu}{E} \sigma \mathbf{I} = \\ &= \frac{1}{E} \sigma (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} - \nu \mathbf{\Pi}) + \frac{1}{G} \operatorname{sym}(\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\tau}), \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{I} - \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}$  è il proiettore ortogonale sul piano della sezione trasversale.

Il tensore di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon}$  è quindi somma di una componente assiale e di una trasversale:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_a &= \frac{1}{E} \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \varepsilon_a \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_t &= \frac{1}{G} \operatorname{sym}(\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\tau}) - \frac{\nu}{E} \sigma \mathbf{\Pi} = \operatorname{sym}(\mathbf{k} \otimes \boldsymbol{\gamma}) + \varepsilon_t \mathbf{\Pi}. \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E} \sigma, \quad \varepsilon_t = -\nu \varepsilon_a, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{1}{G} \boldsymbol{\tau}.$$

Si decomponga ora il campo di spostamenti nella somma della componente assiale  $w$  e della componente trasversale  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{u} = w \mathbf{k} + \mathbf{v} \quad \text{con} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

Allora, se il campo di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon}$  è congruente con il campo di spostamenti  $\mathbf{u} = w \mathbf{k} + \mathbf{v}$ , si ha che

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon_a = E w', \\ \varepsilon_t = -\nu \varepsilon_a = -\nu w', \end{cases}$$

ed essendo  $\sigma'' = 0$ , ne segue che

$$\begin{cases} \varepsilon_a'' = w''' = 0, \\ \varepsilon_t'' = -\nu w''' = 0, \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon}'' = \mathbf{O}, \\ \boldsymbol{\gamma}' = \frac{1}{G} \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{o}, \end{cases}$$

Si può quindi affermare che

- Il campo  $\varepsilon$  di dilatazioni elastiche delle fibre longitudinali alla SAINT VENANT se è congruente varia con legge affine lungo l'asse della trave.

### 1.6. Programma della trattazione

Nel seguito si espone la trattazione del problema dell'equilibrio elastico di una trave soggetta a

- *sforzo normale e flessione, torsione, taglio.*
- Il problema della torsione è trattato in completa generalità analizzando sia il caso semplice delle sezioni circolari ed a corona circolare che quello complesso delle sezioni non circolari che richiedono la soluzione di problemi al contorno per l'operatore di LAPLACE.
- Nel caso di trave soggetta a taglio viene svolta la teoria approssimata di Jourawski che, pur basata su sole considerazioni di equilibrio, fornisce una valutazione delle tensioni tangenziali spesso adeguata ai fini applicativi.
- E' infine illustrata la teoria delle travi con parete sottile in presenza di taglio e torsione ed è introdotto il problema della torsione non uniforme.

## 2. SFORZO NORMALE E FLESSIONE

Si consideri il caso in cui le sollecitazioni sulle basi della trave siano equivalenti ad uno sforzo normale  $N$  e ad un momento flettente  $M_f$ .

La soluzione del problema dell'equilibrio elastico è suggerita dalle seguenti ipotesi sullo stato tensionale e deformativo della trave:

- La tensione sulle sezioni rette trasversali è puramente normale, si assume cioè che il tensore dello stato tensionale sia monoassiale con asse parallelo all'asse geometrico  $\mathbf{k}$  della trave:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{k} \otimes \mathbf{k}.$$

- Le sezioni rette trasversali rimangono piane a deformazione avvenuta.

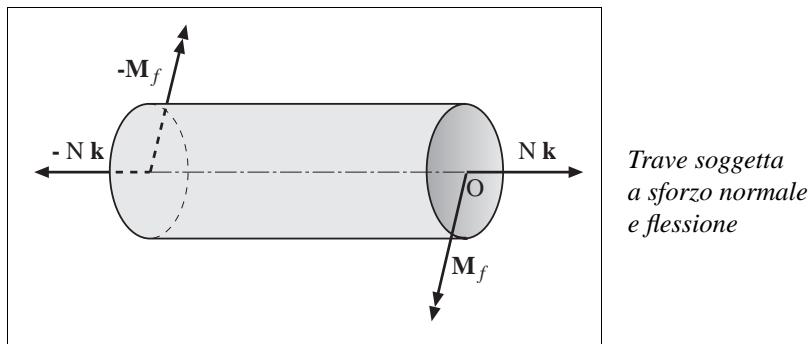


Fig. 2.1

*Trave soggetta  
a sforzo normale  
e flessione*

Tale ultima congettura va sotto il nome di

- *principio di conservazione delle sezioni piane.*

Il principio di conservazione delle sezioni piane equivale ad assumere che il diagramma della dilatazione  $\varepsilon$  delle fibre longitudinali sia lineare, in ogni sezione retta.

Lo stato di deformazione è triassiale con un dilatazione principale semplice associata alla direzione dell'asse della trave ed un dilatazione principale doppia associata alla giacitura trasversale.

Le ipotesi consentono di determinare in modo univoco lo stato tensionale e deformativo in una trave soggetta a sforzo normale e flessione, anche in assenza di omogeneità dei moduli di elastici di YOUNG delle fibre longitudinali del materiale.

Nel seguito si considera pertanto il caso generale in cui le singole fibre della trave sono costituite da materiali elastici diversi, caso questo di grande rilevanza nelle applicazioni.

- Ad ogni fibra compete dunque un valore del modulo di YOUNG.  
Il rapporto di POISSON è assunto invece eguale per tutte le fibre.

Come vedremo nella sezione 2.7 (p. 406) questa ultima ipotesi è essenziale affinchè lo stato di deformazione sia congruente.

Nella *teoria tecnica della trave* si assume che le ipotesi statico-cinematiche poste alla base della trattazione della flessione siano valide anche in presenza di elasticità non omogenea. A tale impostazione si fa ricorso nella pratica tecnica nei casi in cui la soluzione esatta non è disponibile.

In tale caso i risultati, per essere attendibili, devono essere confortati da confronti sperimentali.

## 2.1. Equilibrio elastico

In virtù dell'assenza di tensioni tangenziali, la condizione differenziale d'equilibrio in direzione  $\mathbf{k}$  impone che il diagramma delle tensioni normali  $\sigma$  si ripeta identicamente in ogni sezione retta:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma' \Rightarrow \sigma' = 0.$$

La linearità del diagramma delle dilatazioni  $\varepsilon$  si esprime scrivendo

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o,$$

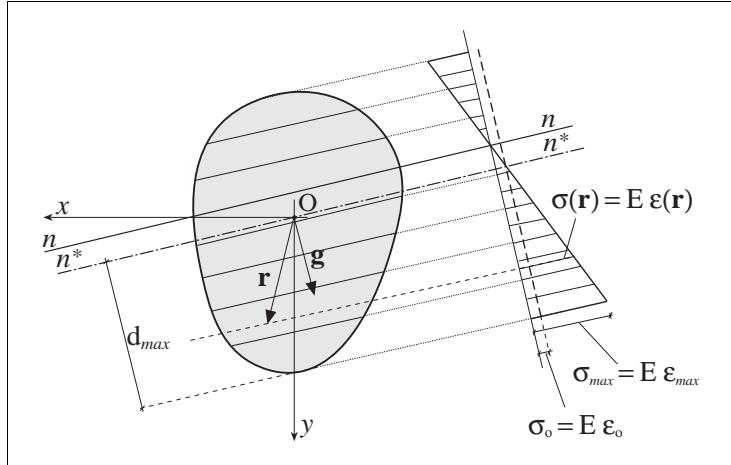
ovvero in termini di componenti

$$\varepsilon(x, y) = g_x x + g_y y + \varepsilon_o,$$

essendo  $g_x$  e  $g_y$  le componenti del gradiente  $\mathbf{g}$  della dilatazione.

- La costante  $\varepsilon_o$  è la dilatazione della fibra passante per l'origine del riferimento e quindi anche delle fibre passanti per i punti dell'asse passante per l'origine ed ortogonale al gradiente  $\mathbf{g}$ .
- Il modulo del gradiente  $\mathbf{g}$  misura la pendenza del diagramma delle dilatazioni.

- Il piano che contiene l'asse della trave deformata è il *piano di flessione* e la traccia sulla sezione retta è l'*asse di flessione*  $f$ , parallelo al gradiente  $\mathbf{g}$ .
- Il piano, parallelo all'asse della trave, su cui sono nulle le dilatazioni lineari  $\varepsilon$ , e quindi anche le tensioni normali  $\sigma$ , è il *piano neutro* e la traccia sulla sezione retta è l'*asse neutro*  $n$  della flessione.



Il gradiente  $\mathbf{g}$  della dilatazione è ortogonale all'asse neutro  $n$ , diretto dalla parte delle dilatazioni crescenti e di modulo

$$\| \mathbf{g} \| = \frac{(\varepsilon_{max} - \varepsilon_o)}{d_{max}}$$

La retta  $n^*$  è la parallela all'asse neutro per l'origine  $O$  e  $d_{max}$  è la distanza dalla retta  $n^*$  dei punti della sezione nei quali si attinge la massima dilatazione.

Le tensioni normali sulle sezioni rette sono fornite dal legame elastico:

$$\sigma(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \varepsilon(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) = E(x, y) (g_x x + g_y y + \varepsilon_o).$$

I valori di  $\mathbf{g}$  ed  $\varepsilon_o$  vengono calcolati imponendo le condizioni di equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave ed alla rotazione rispetto al polo  $O$ :

$$N = \int_A \sigma(\mathbf{r}) \, da$$

$$\mathbf{M}_f = \int_A \mathbf{r} \times \sigma(\mathbf{r}) \, k \, da \iff \mathbf{k} \times \mathbf{M}_f = \int_A \sigma(\mathbf{r}) \, \mathbf{r} \, da,$$

*Condizioni di  
equilibrio*

Le condizioni di equilibrio impongono che la risultante ed il momento risultante rispetto ad  $O$  della distribuzione delle tensioni normali  $\sigma$  su ogni sezione trasversale siano rispettivamente uguali a  $\mathbf{N}$  ed a  $\mathbf{M}_f$ .

Esprimendo le tensioni normali  $\sigma$  in termini delle dilatazioni mediante il legame elastico, si ha che

$$\left\{ \begin{array}{l} N = \int_A \sigma(\mathbf{r}) \, da = \left( \int_A E \mathbf{r} \, da \right) \cdot \mathbf{g} + \left( \int_A E \, da \right) \varepsilon_o, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{M}_f = \int_A \mathbf{r} \sigma(\mathbf{r}) \, da = \left( \int_A E \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da \right) \mathbf{g} + \left( \int_A E \mathbf{r} \, da \right) \varepsilon_o. \end{array} \right.$$

I momenti di ordine 0, 1, 2 della distribuzione dei moduli elastici sono dati da

$$A(E) = \int_A E \, da \quad \text{Area elastica} \quad (\text{momento di ordine } 0)$$

$$S_O(E) = \int_A E \mathbf{r} \, da \quad \text{Momento statico elastico} \quad (\text{momento di ordine } 1)$$

$$J_O(E) = \int_A E \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da \quad \text{Momento d'inerzia elastico} \quad (\text{momento di ordine } 2)$$

le cui componenti sono

$$S_x(E) = \int_A E x \, da \quad S_y(E) = \int_A E y \, da$$

$$J_x(E) = \int_A E x^2 \, da \quad J_y(E) = \int_A E y^2 \, da \quad J_{xy}(E) = \int_A E x y \, da.$$

Le condizioni di equilibrio si scrivono quindi

$$\begin{cases} N = \mathbf{S}_O(E) \cdot \mathbf{g} + A(E) \varepsilon_o, \\ \mathbf{k} \times \mathbf{M}_f = \mathbf{J}_O(E) \mathbf{g} + \mathbf{S}_O(E) \varepsilon_o. \end{cases}$$

Si osservi che

- Il prodotto vettoriale di  $\mathbf{k}$  per un vettore  $\mathbf{a}$  ad esso ortogonale, e cioè parallelo ai piani delle sezioni, fornisce il vettore  $\mathbf{k} \times \mathbf{a}$  ortogonale all'asse della trave e ruotato rispetto ad  $\mathbf{a}$  di  $\pi/2$  in senso antiorario secondo un osservatore disposto lungo  $\mathbf{k}$ .

Tale considerazione si può dunque applicare al vettore momento flettente  $\mathbf{M}_f$  ed al vettore posizione  $\mathbf{r}$  nel piano della sezione.

Si denoti quindi con  $\mathbf{R}$  il tensore che effettua la rotazione antioraria di  $\pi/2$  nel piano della sezione retta. La matrice ad esso associata rispetto alla base  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  è:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando  $\mathbf{k} \times \mathbf{M}_f$  e  $\mathbf{k} \times \mathbf{r}$  quali vettori bidimensionali appartenenti al piano della sezione retta, si può scrivere:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{r} = \mathbf{R} \mathbf{r}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{M}_f = \mathbf{R} \mathbf{M}_f,$$

In termini di componenti si ha dunque:

$$[\mathbf{k} \times \mathbf{M}_f] = [\mathbf{R} \mathbf{M}_f] = \begin{vmatrix} -M_y \\ M_x \end{vmatrix} \quad [\mathbf{k} \times \mathbf{r}] = [\mathbf{R} \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} -y \\ x \end{vmatrix}.$$

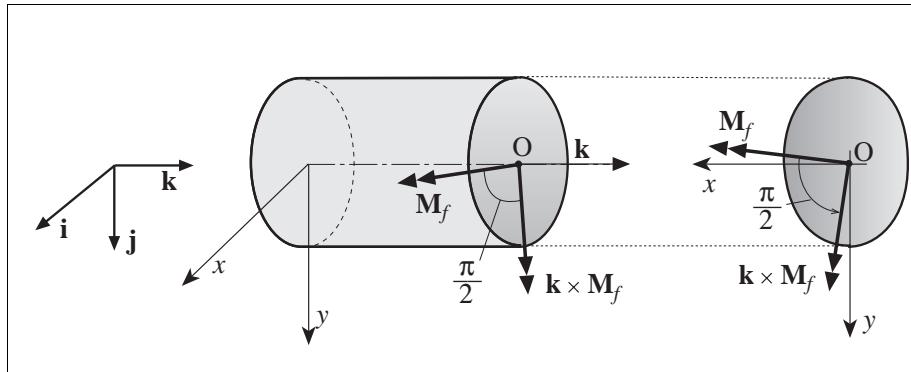


Fig. 2.2

Le condizioni di equilibrio si scrivono quindi in termini di componenti

$$\begin{cases} N = g_x S_x(E) + g_y S_y(E) + \varepsilon_o A(E), \\ -M_y = g_x J_x(E) + g_y J_y(E) + \varepsilon_o S_x(E), \\ M_x = g_x J_{xy}(E) + g_y J_y(E) + \varepsilon_o S_y(E), \end{cases}$$

ovvero in termini matriciali

$$\begin{bmatrix} A(E) & S_x(E) & S_y(E) \\ S_x(E) & J_x(E) & J_{xy}(E) \\ S_y(E) & J_{xy}(E) & J_y(E) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_o \\ g_x \\ g_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} N \\ -M_y \\ M_x \end{vmatrix}.$$

La matrice dei coefficienti è la matrice di GRAM dei monomi scalari indipendenti  $1, x, y$  rispetto al prodotto interno in  $L^2(\Omega)$

$$\begin{bmatrix} A(E) & S_x(E) & S_y(E) \\ S_x(E) & J_x(E) & J_{xy}(E) \\ S_y(E) & J_{xy}(E) & J_y(E) \end{bmatrix} = \int_{\Omega} E \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ x & x^2 & xy \\ y & xy & y^2 \end{bmatrix} da,$$

La matrice di GRAM è simmetrica e definita positiva e quindi il sistema lineare ammette un'unica soluzione per ogni termine noto.

- Il *centro elastico* o *baricentro elastico*  $G$  della sezione della trave è per definizione il punto che ha per posizione la media ponderale delle posizioni pesate con il modulo elastico delle fibre longitudinali. Il baricentro elastico è pertanto individuato dal vettore

$$\boxed{\mathbf{r}_G = \frac{\mathbf{S}_O(E)}{A(E)},}$$

di componenti

$$x_G = \frac{S_x(E)}{A(E)}, \quad y_G = \frac{S_y(E)}{A(E)}.$$

La soluzione del sistema lineare si conduce più convenientemente assumendo l'origine del riferimento coincidente col centro elastico poiché in tal caso si annulla il vettore momento statico elastico  $\mathbf{S}_O(E)$ .

Rispetto alla nuova origine  $G$  il momento flettente diventa

$$\mathbf{M}_{Gf} = \mathbf{M}_f - \mathbf{r}_G \times (N \mathbf{k}).$$

Indicando con  $\mathbf{J}_G$  il tensore momento d'inerzia elastico rispetto al centro elastico e con  $J_{Gx}, J_{Gy}, J_{Gxy}$  le sue componenti, il sistema si disaccoppia riducendosi a

$$\left\{ \begin{array}{l} N = A(E) \varepsilon_o \\ \mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf} = \mathbf{J}_G(E) \mathbf{g} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} N = A(E) \varepsilon_o \\ -M_{Gy} = g_x J_{Gx}(E) + g_y J_{Gxy}(E) \\ M_{Gx} = g_x J_{Gxy}(E) + g_y J_{Gy}(E) \end{array} \right.$$

ovvero in termini matriciali

$$\begin{bmatrix} A(E) & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gx}(E) & J_{Gxy}(E) \\ 0 & J_{Gxy}(E) & J_{Gy}(E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_o \\ g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ -M_{Gy} \\ M_{Gx} \end{bmatrix}.$$

I parametri  $\varepsilon_o$  e  $\mathbf{g}$  si ricavano dunque dalle relazioni

$$\varepsilon_o = \frac{N}{A(E)}, \quad \mathbf{g} = \mathbf{J}_G^{-1}(E) (\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf}).$$

Si osservi che l'area elastica  $A(E)$  è positiva ed il momento d'inerzia elastico  $\mathbf{J}_O(E)$  è definito positivo. Il tensore d'inerzia elastica, essendo definito positivo è invertibile.

- Il tensore inverso  $\mathbf{J}_G^{-1}(E)$  è detto *tensore di deformabilità flessionale* della sezione.

Le dilatazioni e le tensioni normali sono fornite dalle formule

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{N}{A(E)} + [\mathbf{J}_G^{-1}(E) (\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf})] \cdot \mathbf{r},$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \frac{N}{A(E)} + E(\mathbf{r}) [\mathbf{J}_G^{-1}(E) (\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf})] \cdot \mathbf{r}.$$

Se gli assi  $x$  e  $y$  del riferimento sono assi principali per il tensore d'inerzia elastico della sezione, il prodotto d'inerzia  $J_{Gxy}(E)$  si annulla.

Le equazioni di equilibrio risultano quindi completamente disaccoppiate e si ha

$$\begin{cases} -M_{Gy} = g_x J_{Gx}(E) \\ M_{Gx} = g_y J_{Gy}(E) \\ N = \varepsilon_o A(E) \end{cases} \iff \begin{bmatrix} J_{Gx}(E) & 0 & 0 \\ 0 & J_{Gy}(E) & 0 \\ 0 & 0 & A(E) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ \varepsilon_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -M_{Gy} \\ M_{Gx} \\ N \end{bmatrix}.$$

La dilatazione delle fibre longitudinali ha quindi l'espressione semplificata

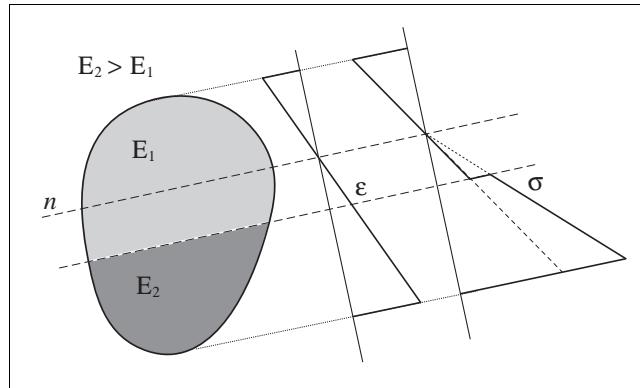
$$\varepsilon(x, y) = \frac{N}{A(E)} - \frac{M_{Gy}}{J_{Gx}(E)} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} y,$$

e le tensioni normali sono date da

$$\sigma(x, y) = E \left( \frac{N}{A(E)} - \frac{M_{Gy}}{J_{Gx}(E)} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} y \right).$$

*Formula trinomia  
di Navier*

Nella figura seguente sono riportati i diagrammi tipici della dilatazione longitudinale e della tensione normale per una trave inflessa in cui sono presenti fibre longitudinali con diverso modulo elastico.



## 2.2. Gli assi della flessione e le relazioni di coniugio

- Il piano passante per il baricentro elastico della sezione ed ortogonale al vettore assiale  $\mathbf{M}_{Gf}$  del momento flettente è il *piano di sollecitazione*. La sua traccia  $s$  sulla sezione retta è l'*asse di sollecitazione*.

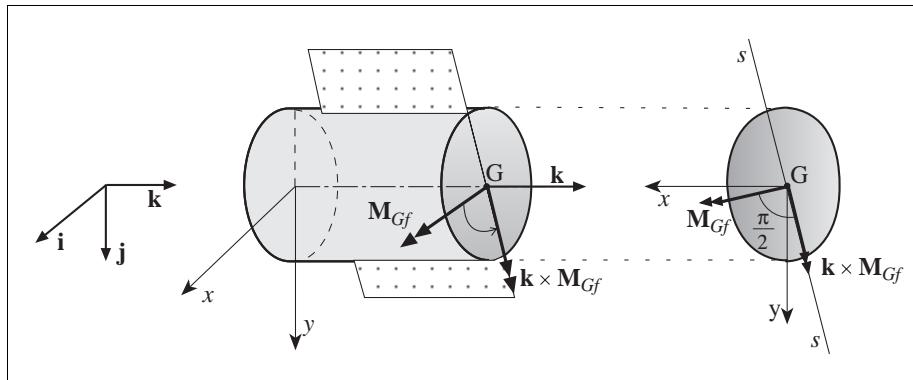


Fig. 2.3

- Il piano, parallelo all'asse della trave, su cui sono nulle le dilatazioni lineari  $\varepsilon$ , e quindi anche le tensioni normali  $\sigma$ , è il *piano neutro* e la sua traccia sulla sezione retta è l'*asse neutro*  $n$  della flessione, definito dall'equazione:

$$\frac{N}{A(E)} + [\mathbf{J}_G^{-1}(E) (\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf})] \cdot \mathbf{r} = 0$$

L'asse neutro  $n$  è ortogonale al gradiente  $\mathbf{g}$  della dilatazione

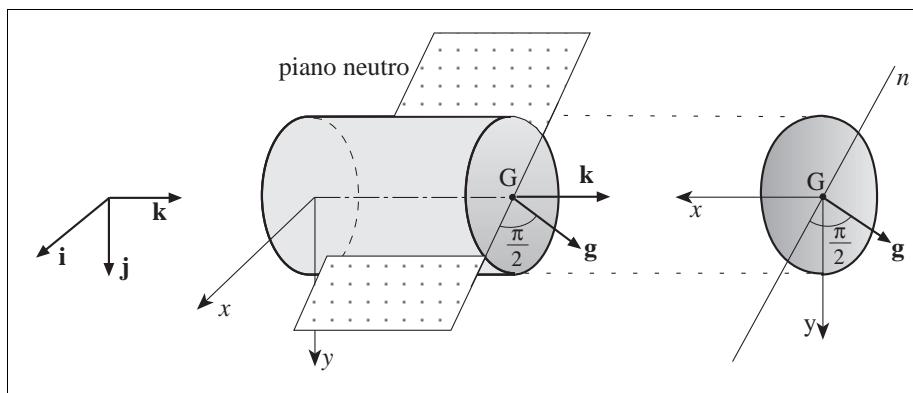


Fig. 2.4

Dalla relazione  $\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf} = \mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}$  si evince che

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf}) \cdot \mathbf{M}_{Gf} = (\mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}) \cdot \mathbf{M}_{Gf} = \mathbf{o},$$

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf}) \cdot \mathbf{g} = (\mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g} \geq 0.$$

- La prima condizione stabilisce che le direzioni del gradiente  $\mathbf{g}$  delle dilatazioni longitudinali e del vettore assiale  $\mathbf{M}_{Gf}$  del momento flettente sono coniugate rispetto all'ellisse centrale d'inerzia elastica della sezione che ha equazione (vedi sezione IX.2.1 (p. 357)):

$$(\mathbf{J}_G(E) \mathbf{r}) \cdot \mathbf{r} = \frac{\det \mathbf{J}_G(E)}{A(E)}.$$

- La seconda condizione mostra che il gradiente delle dilatazioni  $\mathbf{g}$  ha componente positiva nella direzione del vettore  $\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf}$ .

Per definizione l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono rispettivamente ortogonali ai vettori  $\mathbf{M}_{Gf}$  e  $\mathbf{g}$  e l'ellisse di CULMANN è ruotata di  $\pi/2$  rispetto all'ellisse d'inerzia. Ne segue che

- Nella flessione l'asse di sollecitazione e l'asse neutro sono diametri coniugati dell'ellisse di CULMANN della sezione trasversale.

### 2.3. Flessione semplice

Se lo sforzo normale  $N$  è nullo, la sollecitazione è detta di *flessione semplice*. L'asse neutro passa allora per il baricentro elastico  $G$  della sezione retta.

Ponendo l'origine in  $G$  e scegliendo gli assi  $x$  e  $y$  principali d'inerzia, si ha che la dilatazione delle fibre longitudinali ha l'espressione

$$\varepsilon(x, y) = -\frac{M_{Gy}}{J_{Gx}(E)} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} y,$$

e le tensioni normali

$$\sigma(x, y) = E \left( -\frac{M_{Gy}}{J_{Gx}(E)} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} y \right).$$

### ■ Flessione retta

Si ha *flessione retta* se il momento flettente ha la direzione di un asse principale d'inerzia elastica della sezione. In tal caso infatti, assumendo l'asse delle  $y$  quale asse di flessione risulta

$$\varepsilon(y) = \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} y, \quad \sigma(y) = E \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} y.$$

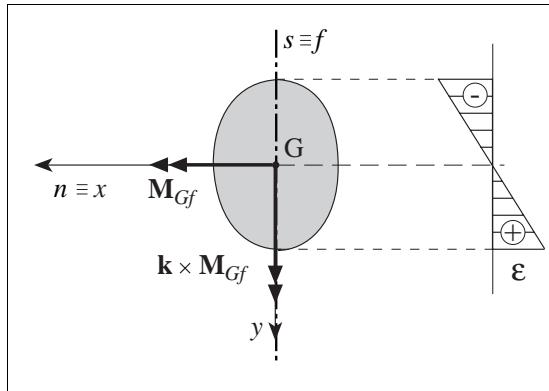


Fig. 2.5

*Flessione retta*

L'asse neutro coincide quindi con l'asse  $x$  e risulta ortogonale all'asse di sollecitazione.

### ■ Flessione deviata

Nel caso in cui il momento flettente non ha la direzione di un asse principale d'inerzia, l'asse di flessione  $f$  e l'asse di sollecitazione  $s$  non coincidono.

La sollecitazione è allora detta di *flessione deviata* per sottolineare il fatto che l'asse della trave si inflette in un piano inclinato rispetto a quello di sollecitazione.

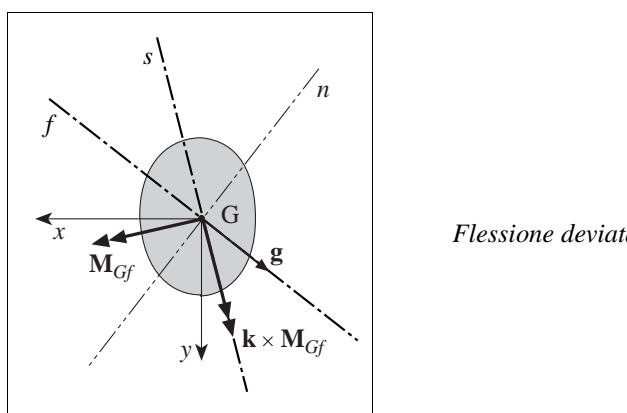


Fig. 2.6

*Flessione deviata*

## 2.4. Sforzo normale centrato

La sollecitazione è detta di *sforzo normale centrato* se lo sforzo normale  $N$  è diverso da zero ed il momento risultante  $\mathbf{M}_{Gf}$  rispetto al baricentro è nullo.

La sollecitazione è di trazione o di compressione a seconda che  $N$  sia positivo o negativo.

La dilatazione delle fibre longitudinali della trave è costante e pari a

$$\varepsilon = \frac{N}{A(E)},$$

mentre quella delle fibre trasversali vale

$$\varepsilon_t = -\frac{\nu N}{A(E)}.$$

La tensione normale è proporzionale al modulo elastico

$$\sigma(\mathbf{r}) = \frac{E(\mathbf{r})N}{A(E)}.$$

## 2.5. Sforzo normale eccentrico

Si ha una sollecitazione di *sforzo normale eccentrico* o *flessione composta* quando sia lo sforzo normale  $N$  che il momento flettente  $\mathbf{M}_{Gf}$  sono diversi da zero.

La sollecitazione viene detta di *tensoflessione* se  $N > 0$  e *pressoflessione* se  $N < 0$ .

L'asse centrale della sollecitazione è parallelo all'asse della trave. La sua intersezione  $\mathbf{C}$  con il piano della sezione è detta *centro di sollecitazione*.

Se  $\mathbf{r}_C$  è il vettore posizione di  $C$  rispetto al centro elastico  $G_E$  della sezione, il vettore momento risultante rispetto a  $C$  è dato da:

$$\mathbf{M}_{Cf} = \mathbf{M}_{Gf} - \mathbf{r}_C \times N \mathbf{k},$$

e dunque, imponendo che  $\mathbf{M}_C = \mathbf{0}$  si ottiene

$$\mathbf{r}_C \times \mathbf{k} = \frac{\mathbf{M}_{Gf}}{N}.$$

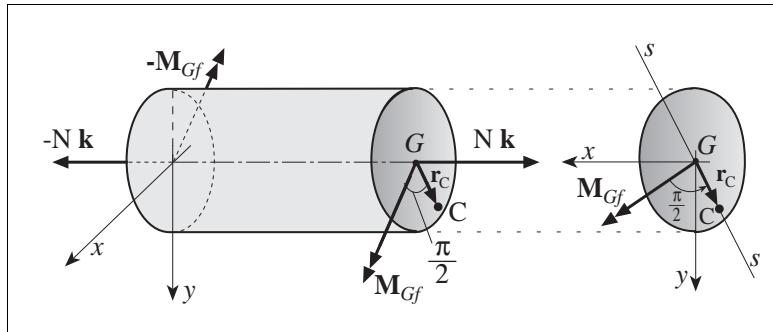


Fig. 2.7

Premoltiplicando vettorialmente per  $\mathbf{k}$  si ricava l'espressione del vettore posizione  $\mathbf{r}_C$  del centro di sollecitazione

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf}}{N} = \frac{\mathbf{RM}_{Gf}}{N},$$

*Posizione del centro di sollecitazione rispetto al centro elastico*

che, scritta in componenti, fornisce

$$\begin{cases} x_C = -\frac{M_{Gy}}{N}, \\ y_C = \frac{M_{Gx}}{N}. \end{cases}$$

*Coordinate del centro di sollecitazione*

La distanza  $\|\mathbf{r}_C\|$  tra  $C$  e il centro elastico  $G$  è detta *eccentricità*.

Dall'espressione del vettore posizione  $\mathbf{r}_C$  del centro di sollecitazione:

$$N \mathbf{r}_C = \mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf},$$

si deducono le seguenti formule per le dilatazioni longitudinali e le tensioni normali sulla sezione trasversale

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \frac{N}{A(E)} + [\mathbf{J}_G^{-1}(E) N \mathbf{r}_C] \cdot \mathbf{r},$$

$$\sigma(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r}) \left[ \frac{N}{A(E)} + [\mathbf{J}_G^{-1}(E) N \mathbf{r}_C] \cdot \mathbf{r} \right],$$

che in termini di componenti si scrivono

$$\varepsilon(x, y) = \frac{N}{A(E)} \left( 1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y \right),$$

$$\sigma(x, y) = \frac{E N}{A(E)} \left( 1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y \right).$$

L'asse neutro  $n$  della flessione composta è dunque definito dall'equazione

$$1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y = 0.$$

*Equazione dell'asse neutro  
nella flessione composta*

Si consideri ora una origine  $O$  posta sull'asse neutro ed il versore del gradiente delle dilatazioni

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|},$$

che per definizione risulta ortogonale all'asse neutro. Le tensioni normali sono proporzionali alla proiezione su  $\mathbf{n}$  del raggio vettore  $\mathbf{r}$ , misurato a partire da  $O$ .

La posizione del centro di sollecitazione rispetto ad  $O$  è definita dalla condizione

$$\mathbf{M}_{Cf} = \mathbf{M}_{Of} - \mathbf{r}_C \times N \mathbf{k} = \mathbf{o},$$

equivalente a

$$\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Cf} = \mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Of} - N \mathbf{r}_C = \mathbf{o},$$

che esplicitamente si scrive

$$\int_A (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \, da - \mathbf{r}_C \int_A (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \, da = \mathbf{o}.$$

Dunque risulta

$$\mathbf{r}_C = \frac{\mathbf{J}_O \mathbf{n}}{\mathbf{S}_O \cdot \mathbf{n}}.$$

Richiamando la trattazione svolta nella sezione IX.2.3 (p. 361) si conclude allora che

- Nella flessione composta il centro di sollecitazione e l'asse neutro si corrispondono come antipolo ed polare rispetto alla ellisse di CULMANN della sezione trasversale.

Pertanto se l'asse neutro  $n$  trasla fino a diventare baricentrico, il suo centro relativo  $C$  diventa un punto improprio del piano.

Viceversa, il centro relativo  $C$  corrispondente alla retta impropria è il baricentro  $G$ .

Dalla relazione di antipolarità che sussiste tra il centro di sollecitazione  $C$  e l'asse neutro  $n$  consegue che l'asse neutro è esterno, tangente o secante la sezione retta in funzione della posizione del centro di sollecitazione rispetto al nocciolo centrale di inerzia (sezione IX.24 (p. 367)).

In particolare, se il centro di sollecitazione  $C$  è interno al nocciolo centrale di inerzia, l'asse neutro  $n$  non seca la sezione retta. Le tensioni normali sono in tal caso tutte di compressione o tutte di trazione.

Viceversa se il centro di sollecitazione è esterno al nocciolo centrale di inerzia l'asse neutro secca la sezione retta, e le tensioni presentano un diagramma a farfalla.

## 2.6. Le sezioni omogenee

Nel caso in cui le fibre longitudinali della trave sono caratterizzate da un unico modulo di YOUNG il diagramma della tensione normale è proporzionale a quello della dilatazione e quindi ha un andamento lineare.

$$\begin{aligned}\varepsilon(\mathbf{r}) &= \frac{N}{AE} + [(E \mathbf{J}_G)^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf})] \cdot \mathbf{r}, \\ \sigma(\mathbf{r}) &= \frac{N}{A} + [\mathbf{J}_G^{-1} (\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf})] \cdot \mathbf{r},\end{aligned}$$

*Trave elasticamente omogenea*

Avendo indicato con  $\mathbf{J}_G$  il *tensore centrale d'inerzia geometrica* della sezione valutato rispetto al centro elastico  $\mathbf{G}$  (vedi sezione IX.1.3 (p. 354))

$$\mathbf{J}_G = \int_A \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da,$$

le cui componenti sono

$$J_{Gx} = \int_A x^2 \, da, \quad J_{Gy} = \int_A y^2 \, da, \quad J_{Gxy} = \int_A xy \, da,$$

nel riferimento principale d'inerzia le dilatazioni e le tensioni normali in termini di componenti hanno l'espressione

$$\varepsilon(x, y) = \frac{N}{EA} - \frac{M_{Gy}}{EJ_{Gx}} x + \frac{M_{Gx}}{EJ_{Gy}} y,$$

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{A} - \frac{M_{Gy}}{J_{Gx}} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}} y.$$

Si noti che la tensione normale della fibra centrale è pari al valore medio  $N/A$ . Le sollecitazioni analizzate precedentemente per il caso non omogeneo, si specializzano:

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= \frac{N}{EA} \left( 1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y \right), \\ \sigma(x, y) &= \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y \right).\end{aligned}$$

*Sforzo normale eccentrico*

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \varepsilon = \frac{N}{EA}$$

*Sforzo normale centrato*

$$\begin{aligned}\varepsilon(x, y) &= -\frac{M_{Gy}}{EJ_{Gx}} x + \frac{M_{Gx}}{EJ_{Gy}} y, \\ \sigma(x, y) &= -\frac{M_{Gy}}{J_{Gx}} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}} y,\end{aligned}$$

*Flessione deviata*

Se l'asse delle  $x$  è l'asse neutro e quindi l'asse delle  $y$  è l'asse di flessione, risulta

$$\varepsilon(y) = \frac{M_{Gx}}{EJ_{Gy}} y, \quad \sigma(y) = \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}} y.$$

*Flessione retta*

- Il *modulo di resistenza a flessione*  $W_{Gy}$  della sezione nella direzione  $y$  è definito dal rapporto

$$W_{Gy} := \frac{J_{Gy}}{y_{\max}},$$

*Modulo di resistenza a flessione*

Il valore massimo  $\sigma_{\max}$  della tensione normale è quindi dato da

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{Gx}}{W_{Gy}}.$$

Ecco un quadro riassuntivo di quanto illustrato finora.

### SEZIONI OMOGENEE

■ *Sforzo normale eccentrico* ( $N \neq 0$ ,  $\mathbf{r}_C \neq \mathbf{0}$ )

$$\varepsilon(x, y) = \frac{N}{EA} \left( 1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y \right),$$

$$\sigma(x, y) = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{x_C}{\rho_x^2} x + \frac{y_C}{\rho_y^2} y \right).$$

■ *Sforzo normale centrato* ( $N \neq 0$ ,  $\mathbf{M}_{Gf} = \mathbf{O}$ )

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{N}{EA} \\ \sigma &= \frac{N}{A}\end{aligned}$$

■ *Flessione semplice* ( $N = 0$ ,  $\mathbf{M}_{Gf} \neq \mathbf{O}$ )

$$\varepsilon(x, y) = -\frac{M_{Gy}}{EJ_{Gx}} x + \frac{M_{Gx}}{EJ_{Gy}} y,$$

- Flessione deviata

$$\sigma(x, y) = -\frac{M_{Gy}}{J_{Gx}} x + \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}} y,$$

- Flessione retta

$$\varepsilon(y) = \frac{M_{Gx}}{EJ_{Gy}} y,$$

- $x$  asse neutro
- $y$  asse di sollecitazione

$$\sigma(y) = \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}} y,$$

## 2.7. Il campo di spostamenti

Si assuma che la trave sia elasticamente omogenea o, più in generale, che

- il modulo  $E$  di YOUNG delle fibre longitudinali sia variabile da fibra a fibra,
- il rapporto  $\nu$  di POISSON sia eguale per tutte le fibre.

Le dilatazioni longitudinali  $\varepsilon$  variano secondo la legge lineare

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o ,$$

e le fibre trasversali si contraggono con un coefficiente di proporzionalità fornito dal rapporto di POISSON

$$\varepsilon_t = -\nu \varepsilon .$$

■ Il tensore simmetrico della deformazione linearizzata è dunque pari a

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = -\nu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) \boldsymbol{\Pi} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) ,$$

e la relativa matrice rappresentativa nel riferimento  $\{\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  è

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} -\nu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) & 0 & 0 \\ 0 & -\nu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o \end{bmatrix} .$$

E' possibile allora dimostrare che l'ipotesi statico-cinematica, posta alla base della trattazione, genera un campo congruente di deformazioni tangenti nella trave.

A tal fine si noti preliminarmente che

- il rotore del tensore di deformazione  $\boldsymbol{\varepsilon}$  è definito dall'identità

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{a}] := \operatorname{rot} (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbf{V}^3 \iff [\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})]_{ij} = \epsilon_{jks} \boldsymbol{\varepsilon}_{is/k} ,$$

e vale l'identità vettoriale

$$\operatorname{rot} (f \mathbf{v}) = (\operatorname{grad} f) \times \mathbf{v} + f \operatorname{rot} \mathbf{v} .$$

Essendo  $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$  in quanto il campo vettoriale  $\mathbf{a}$  è costante, risulta quindi

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}) &= \operatorname{rot} \left[ -\nu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) \boldsymbol{\Pi} \mathbf{a} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \mathbf{a} \right] = \\ &= -\nu \operatorname{grad} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{a}) + \operatorname{grad} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) \times [(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \mathbf{a}] = \\ &= -\nu \mathbf{g} \times (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{a}) + \mathbf{g} \times [(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \mathbf{a}] . \end{aligned}$$

Essendo poi

$$\begin{cases} \mathbf{g} \times \boldsymbol{\Pi} \mathbf{a} = [(\mathbf{R}\mathbf{g}) \cdot (\boldsymbol{\Pi} \mathbf{a})] \mathbf{k} = [\mathbf{k} \otimes (\mathbf{R}\mathbf{g})][\mathbf{a}], \\ \mathbf{g} \times (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \mathbf{a} = -(\mathbf{R}\mathbf{g})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) = -[(\mathbf{R}\mathbf{g}) \otimes \mathbf{k}][\mathbf{a}], \end{cases}$$

si ha che

$$\text{rot}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{a}) = -\nu [\mathbf{k} \otimes (\mathbf{R}\mathbf{g})][\mathbf{a}] - [(\mathbf{R}\mathbf{g}) \otimes \mathbf{k}][\mathbf{a}].$$

e dunque

$$(\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T = -\nu (\mathbf{k} \otimes \mathbf{R}\mathbf{g}) - (\mathbf{R}\mathbf{g}) \otimes \mathbf{k},$$

che in forma matriciale si scrive

$$[(\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_y \\ 0 & 0 & -g_x \\ \nu g_y & -\nu g_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{R}\mathbf{g} \\ -\nu (\mathbf{R}\mathbf{g})^T & 0 \end{bmatrix}.$$

- La condizione differenziale di congruenza

$$\text{rot}(\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{O},$$

è banalmente soddisfatta in quanto  $(\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T$  è costante, tali essendo il rapporto di POISSON  $\nu$  ed il gradiente  $\mathbf{g}$  del campo di dilatazioni.

Il campo di spostamenti della trave può allora essere calcolato, a meno di un cinematzismo rigido addizionale, mediante la formula di CESÀRO:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}) [d\boldsymbol{\xi}] + \int_{\mathbf{o}}^{\mathbf{x}} (\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x}) \times (\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\xi}))^T [d\boldsymbol{\xi}],$$

- Integrando lungo il raggio vettore  $\mathbf{x} = z \mathbf{k} + \mathbf{r}$  si ha

$$\boldsymbol{\xi} = \lambda \mathbf{x}, \quad d\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} d\lambda, \quad \lambda \in [0, 1].$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \int_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{x}) [\mathbf{x}] d\lambda + \int_0^1 (\lambda - 1) \mathbf{x} \times (\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{x}] d\lambda = \\ &= \int_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{x}) [\mathbf{x}] d\lambda + \left( \int_0^1 (\lambda - 1) d\lambda \right) (\mathbf{x} \times (\text{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{x}]). \end{aligned}$$

Ora risulta

$$\int_0^1 (\lambda - 1) \, d\lambda = -\frac{1}{2},$$

per cui l'espressione dello spostamento si può scrivere

$$\boxed{\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{x})[\mathbf{x}] \, d\lambda - \frac{1}{2} (\mathbf{x} \times (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T[\mathbf{x}]).}$$

Risulta inoltre

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{r}), \quad \int_0^1 \lambda \, d\lambda = \frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{r})[\mathbf{x}] &= -\nu (\lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_o) \mathbf{r} + z (\lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_o) \mathbf{k} = \\ &\quad -\nu [\lambda (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \mathbf{g} + \boldsymbol{\varepsilon}_o \mathbf{r}] + z (\lambda \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_o) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Dunque integrando si ottiene

$$\int_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{x})[\mathbf{x}] \, d\lambda = -\nu \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) [\mathbf{g}] + \boldsymbol{\varepsilon}_o \mathbf{r} \right] + \frac{1}{2} (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) z \mathbf{k} + \boldsymbol{\varepsilon}_o z \mathbf{k}.$$

Si osservi quindi che

$$(\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T[\mathbf{x}] = -z \mathbf{R} \mathbf{g} - \nu (\mathbf{R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \times (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T[\mathbf{x}] &= -z^2 \mathbf{k} \times \mathbf{R} \mathbf{g} - z \mathbf{r} \times \mathbf{R} \mathbf{g} - \nu \mathbf{r} \times (\mathbf{R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} = \\ &= -z^2 \mathbf{g} - z (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} + \nu (\mathbf{R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{R} \mathbf{r} = \\ &= -z^2 \mathbf{g} - z (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} - \nu (\mathbf{R} \mathbf{r} \otimes \mathbf{R} \mathbf{r}) [\mathbf{g}]. \end{aligned}$$

In definitiva il campo di spostamenti ha l'espressione

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_o) z \mathbf{k} + \nu \frac{1}{2} (\mathbf{R} \mathbf{r} \otimes \mathbf{R} \mathbf{r} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) [\mathbf{g}] - \frac{1}{2} z^2 \mathbf{g} - \nu \boldsymbol{\varepsilon}_o \mathbf{r}.$$

In termini di componenti si ha

$$[\mathbf{r}] = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}, \quad [\mathbf{R} \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} -y \\ x \end{vmatrix},$$

per cui risulta

$$[\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}] = \begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{R} \mathbf{r} \otimes \mathbf{R} \mathbf{r}] = \begin{bmatrix} y^2 & -xy \\ -xy & x^2 \end{bmatrix},$$

e le componenti dello spostamento valgono

$$\begin{cases} u_x = -\nu \left[ \frac{g_x}{2} (x^2 - y^2) + g_y x y + \boldsymbol{\varepsilon}_o x \right] - \frac{g_x}{2} z^2, \\ u_y = -\nu \left[ \frac{g_y}{2} (y^2 - x^2) + g_x x y + \boldsymbol{\varepsilon}_o y \right] - \frac{g_y}{2} z^2, \\ u_z = (g_x x + g_y y + \boldsymbol{\varepsilon}_o) z. \end{cases}$$

Come è stato osservato, la validità della formula di CESÀRO<sup>35</sup> richiede che il campo di deformazioni sia internamente congruente.

Ora il tensore simmetrico di deformazione

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}) = -\nu (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_o) \mathbf{\Pi} + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\varepsilon}_o) (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}),$$

varia con legge affine nella generica sezione trasversale. E' pertanto possibile estendere la sua definizione a tutto il piano trasversale in modo univoco.

Essendo quindi  $(\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon})^T$  costante, si può concludere che la condizione differenziale di congruenza

$$\text{rot } (\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon})^T = \mathbf{O},$$

è soddisfatta indipendentemente dal fatto che la sezione trasversale della trave sia semplicemente o molteplicemente connessa.

---

<sup>35</sup> ERNESTO CESÀRO (1859-1906). Professore all'Università di Napoli, ha dato notevoli contributi all'analisi matematica.

**Osservazione 2.1.** All'espressione del campo di spostamenti si può anche pervenire integrando prima lungo la direzione dell'asse della trave e quindi in direzione trasversale.

Bisogna in tal caso far ricorso all'espressione della formula di CESÀRO relativa a curve non regolari dedotta in [25], sezione I.10.2 (p. 109).

A meno di uno spostamento rigido infinitesimo il campo di spostamenti è dato da

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = & \sum_{i=0}^n \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} \boldsymbol{\varepsilon}(\xi) [d\xi] + \sum_{i=0}^n \int_{\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}_{i+1}} (\xi - \mathbf{x}_{i+1}) \times [(\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}(\xi))^T [d\xi]] + \\ & + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_i} ((\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon}(\xi))^T [d\xi]) \times (\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i). \end{aligned}$$

dove  $\mathbf{x}_o$  e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{n+1}$  sono i punti di estremità del percorso di integrazione e  $\mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sono i punti singolari. Adottando un percorso assiale-trasversale si ha

$$\mathbf{x}_o = \mathbf{o}, \quad \mathbf{x}_1 = z \mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_2 = z \mathbf{k} + \mathbf{r} = \mathbf{x}.$$

■ Integrando lungo l'asse della trave risulta

$$\xi = \lambda z \mathbf{k}, \quad d\xi = z \mathbf{k} d\lambda, \quad \xi - \mathbf{x}_1 = (\lambda - 1) z \mathbf{k}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

e la formula di CESÀRO fornisce l'espressione dello spostamento dell'asse

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(z \mathbf{k}) = & \int_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda z \mathbf{k}) [z \mathbf{k}] d\lambda + \int_0^1 (\lambda - 1) z \mathbf{k} \times [(\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T [z \mathbf{k}]] d\lambda = \\ = & \boldsymbol{\varepsilon}_o z \mathbf{k} - \frac{1}{2} z^2 \mathbf{g}. \end{aligned}$$

■ Integrando lungo la direzione trasversale all'ascissa  $z$  risulta

$$\xi = z \mathbf{k} + \lambda \mathbf{r}, \quad d\xi = \mathbf{r} d\lambda, \quad \xi - \mathbf{x}_2 = (\lambda - 1) \mathbf{r}, \quad \lambda \in [0, 1].$$

e la formula di CESÀRO fornisce l'espressione

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(z \mathbf{k}) = & \int_0^1 \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda \mathbf{r}) [\mathbf{r}] d\lambda + \int_0^1 (\lambda - 1) \mathbf{r} \times [(\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T [\mathbf{r}]] d\lambda + \\ & + \int_0^1 (\operatorname{rot} \boldsymbol{\varepsilon})^T [z \mathbf{k}] d\lambda \times \mathbf{r} = \\ = & -\nu \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) [\mathbf{g}] + \boldsymbol{\varepsilon}_o \mathbf{r} \right] + \nu \frac{1}{2} (\mathbf{R} \mathbf{r} \otimes \mathbf{R} \mathbf{r}) [\mathbf{g}] + (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) z \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Sommendo si ottiene l'espressione del campo di spostamenti.

## 2.8. La linea elastica

Il campo di spostamenti della trave soggetta a sforzo normale e flessione si può decomporre in due aliquote. Ponendo  $\mathbf{x} = z \mathbf{k} + \mathbf{r}$  si considerano infatti le componenti

- uno *spostamento assiale*

$$\mathbf{u}_a(\mathbf{x}) = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \varepsilon_o) z \mathbf{k},$$

- uno *spostamento trasversale*

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \nu \frac{1}{2} (\mathbf{R} \mathbf{r} \otimes \mathbf{R} \mathbf{r} - \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) [\mathbf{g}] - \frac{1}{2} z^2 \mathbf{g} - \nu \varepsilon_o \mathbf{r}.$$

In particolare la linea d'asse della trave inflessa subisce uno spostamento trasversale che varia con legge parabolica

$$\mathbf{u}_t(z) = -\frac{1}{2} z^2 \mathbf{g}.$$

L'asse della trave deformata è contenuto quindi nel piano individuato dall'asse della trave indeformata e dall'asse di flessione. Quest'ultimo infatti ha la direzione del vettore  $\mathbf{g}$  gradiente delle dilatazioni delle fibre longitudinali.

Si denoti con  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) = \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{x})$  la *vorticità* e cioè il vettore assiale che descrive l'atto di rotazione delle fibre della trave. Poichè il campo di deformazioni è congruente, risulta (vedi [25], proposizione I.10.1 (p. 104))

$$\text{grad } \boldsymbol{\omega} = (\text{rot } \boldsymbol{\varepsilon})^T.$$

Dunque  $\text{grad } \boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{R} \mathbf{g}) \otimes \mathbf{k} - \nu \mathbf{k} \otimes (\mathbf{R} \mathbf{g})$  è costante e la vorticità, a meno di un termine additivo costante, è pari a

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) &= -[(\mathbf{R} \mathbf{g}) \otimes \mathbf{k}] [\mathbf{x}] - \nu [\mathbf{k} \otimes (\mathbf{R} \mathbf{g})] [\mathbf{x}] = \\ &= -z \mathbf{R} \mathbf{g} - \nu (\mathbf{R} \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

- La componente trasversale della vorticità  $-z \mathbf{R} \mathbf{g}$  misura la rotazione infinitesima delle fibre trasversali nel piano di inflessione.
- Il gradiente rispetto a  $z$  della vorticità misura la rapidità con cui la rotazione flessionale delle sezioni trasversali varia lungo l'asse della trave e fornisce pertanto l'espressione della *curvatura flessionale* della trave.

Il vettore assiale  $\chi$  della curvatura flessionale è quindi dato da

$$\boxed{\chi = -\mathbf{R} \mathbf{g}.}$$

Essendo  $\mathbf{u}_t''(z) = -\mathbf{g}$ , la curvatura flessionale  $\chi$  si può esprimere in termini dello spostamento trasversale

$$\boxed{\chi = -\mathbf{R} \mathbf{g} = \mathbf{R} \mathbf{u}_t''(z).}$$

Il modulo della curvatura flessionale  $\chi$  è pertanto pari a quello della derivata seconda dello spostamento trasversale valutata lungo l'asse della trave.

Il piano neutro a seguito della deformazione si trasforma in una superficie a doppia curvatura. Infatti

- le fibre longitudinali si inflettono nel piano  $\mathbf{g} - \mathbf{k}$ , individuato dal gradiente delle dilatazioni longitudinali e dall'asse della trave, con curvatura pari a  $\|\mathbf{g}\|$ .
- le fibre trasversali parallele all'asse neutro si inflettono, nel piano della sezione retta, con curvatura pari a  $\nu \|\mathbf{g}\|$ .

**Osservazione 2.2.** Se la trave è molto allungata rispetto alle dimensioni trasversali, allora è possibile che le formule della trattazione linearizzata comportino rotazioni non piccole delle sezioni trasversali anche in presenza di dilatazioni longitudinali molto esigue, e ciò per la differenza tra i moduli massimi di  $z$  e  $\mathbf{r}$ . In tal caso è necessario trattare il problema della flessione con una analisi geometricamente non lineare che tenga conto del cambiamento finito di configurazione. ■

### 2.8.1. La linea elastica nel caso di flessione retta

Nel caso della flessione retta, con asse di sollecitazione coincidente con l'asse  $y$  e l'origine nel baricentro, il campo degli spostamenti della trave assume, a meno di uno spostamento rigido, la seguente espressione

$$\begin{cases} u_x = -\nu \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} xy \\ u_y = -\frac{M_{Gx}}{2J_{Gy}(E)} [\nu(y^2 - x^2) + z^2] \\ u_z = \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} yz \end{cases}$$

I punti dell'asse neutro subiscono spostamenti solo in direzione dell'asse  $y$ . Essendo infatti  $y = 0$  si ha che

$$u_x = u_z = 0 \quad u_y = \frac{M_{Gx}}{2J_{Gy}(E)} (\nu x^2 - z^2).$$

La curvatura  $\chi$  dell'asse della trave è data da:

$$\chi = -u_y'' = \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)}$$

*Relazione momento flettente-curvatura*

dove l'apice indica la derivazione rispetto a  $z$ .

La relazione

$$\varepsilon = (\mathbf{k} \times \boldsymbol{\phi}') \cdot \mathbf{r} = -\mathbf{u}'' \cdot \mathbf{r},$$

essendo  $u_x'' = 0$ , fornisce la seguente espressione della dilatazione  $\varepsilon$  in funzione della curvatura:

$$\varepsilon = \chi y$$

*Dilatazione in funzione della curvatura*

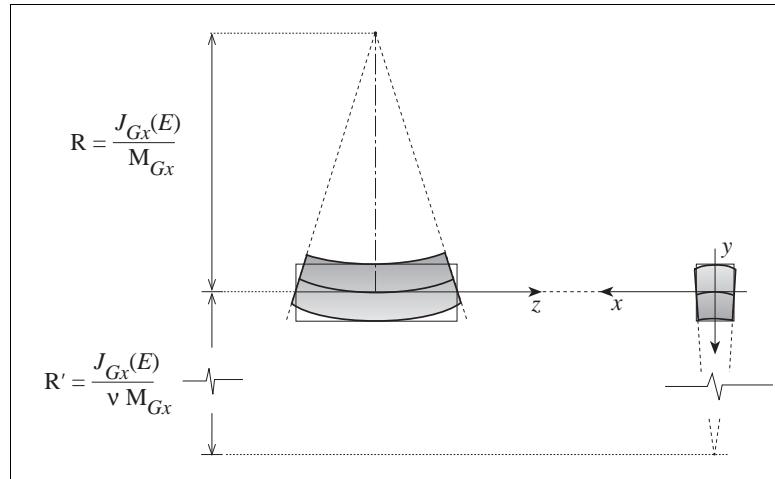


Fig. 2.8

La curvatura trasversale  $\chi_t$  dell'asse neutro, essendo  $y = 0$  e  $z = cost$ , ha l'espressione

$$\chi_t = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \nu \frac{M_{Gx}}{J_{Gy}(E)} = \nu \chi$$

*Curvatura dell'asse neutro*

E' da osservare che tali espressioni della curvatura sono approssimate nello spirito della teoria lineare infinitesima dell'elasticità.

L'espressione esatta della curvatura longitudinale  $\chi$  dell'asse della trave è data dalla formula

$$\chi = \frac{1}{\rho} = -\frac{u_y''}{\left[1 + (u_y')^2\right]^{3/2}}.$$

*Espressione esatta  
della curvatura*

Per la dimostrazione si veda il Tomo I sezione IV.3.1.1 (p. 389).

Nell'ipotesi di validità della teoria linearizzata risulta  $|u_y'| << 1$  e si ha pertanto che  $\chi \simeq -u_y''$ .

## 2.9. Materiali non resistenti a trazione

Nelle applicazioni è di grande interesse determinare le tensioni normali da sforzo normale e flessione in travi in cui il modulo di elasticità di YOUNG del materiale è diverso a trazione ed a compressione (vedi fig. 2.9).

In particolare nel calcolo delle travi in conglomerato armato si assume convenzionalmente che il modulo a trazione sia nullo. Si dice allora che il materiale è *privo di resistenza a trazione*.

Per materiali con moduli diversi a trazione ed a compressione la soluzione del problema delle flessioni composta deve essere perseguita per via iterativa in quanto la determinazione delle proprietà di inerzia elastica dipendono dalla conoscenza delle tensioni normali (per distinguere i comportamenti a trazione ed a compressione) e la determinazione delle tensioni normali richiede a sua volta di determinare delle proprietà di inerzia elastica.

Si tratta dunque di un problema non lineare la cui soluzione può essere perseguita in completa generalità facendo ricorso ad un semplice ma brillante metodo iterativo ideato nei primi anni 1970 dal prof. MANFREDI ROMANO<sup>36</sup> [20].

L'algoritmo, che si presta naturalmente ad una implementazione in un codice di calcolo automatico, consiste nei seguenti passi.

- Si considera l'intera sezione trasversale dotata del modulo elastico maggiore tra quelli a trazione ed a compressione e si valutano le dilatazioni e le tensioni normali.
- Si suddivide la sezione in due parti, quella in cui le fibre sono dilatate e quella in cui sono contratte, attribuendo a ciascuna di esse il modulo che è di rispettiva competenza.

---

<sup>36</sup> MANFREDI ROMANO (1941-1988). Ingegnere elettronico a Napoli e professore di Scienza delle Costruzioni a Napoli ed a Catania, brillante studioso di ingegneria delle strutture.

- Si valutano le dilatazioni e le tensioni normali sulla sezione con i moduli modificati.
- Si calcolano il risultante ed il momento risultante delle tensioni normali rispetto ad un polo di riferimento. Il confronto con lo sforzo normale ed il momento flettente della sollecitazione fornisce l'errore nell'equilibrio.
- Se l'errore è superiore ad una prefissata soglia di accettabilità si ripete la procedura dal secondo passo, altrimenti si termina fornendo i risultati.

Le proprietà di convergenza dell'algoritmo sono brillanti. Per una sezione di forma arbitraria la procedura richiede non più di una decina di passi di iterazione anche con una richiesta di precisione dell'ordine dell'uno per mille sulle caratteristiche della sollecitazione. Si riportano due esempi di soluzioni di sezioni non resistenti a trazione soggette a pressoflessione deviata. L'algoritmo di verifica e di restituzione grafica è stato implementato dall'autore con il programma MATHEMATICA di STEPHEN WOLFRAM. Il primo esempio (figg. 2.9, 2.10) si riferisce ad una sezione quadrata cava in cemento armato, mentre il secondo (figg. 2.11, 2.12) è relativo ad una sezione di forma a T con due fori rettangolari e priva di armatura metallica. Nel primo esempio la convergenza è raggiunta in 5 passi, nel secondo in 9 passi.

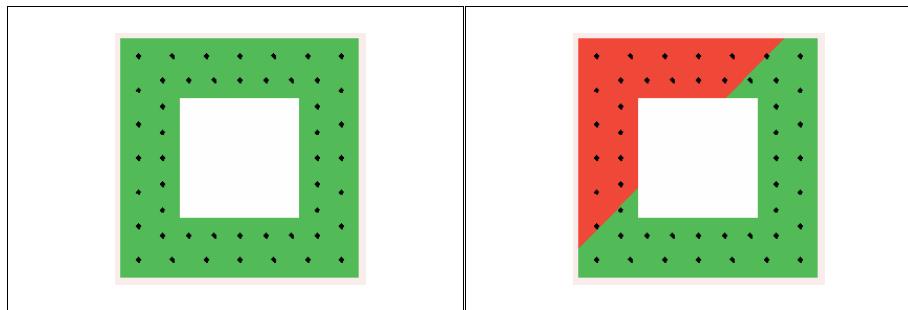


Fig. 2.9 sezione totale

Fig. 2.10 sezione parzializzata

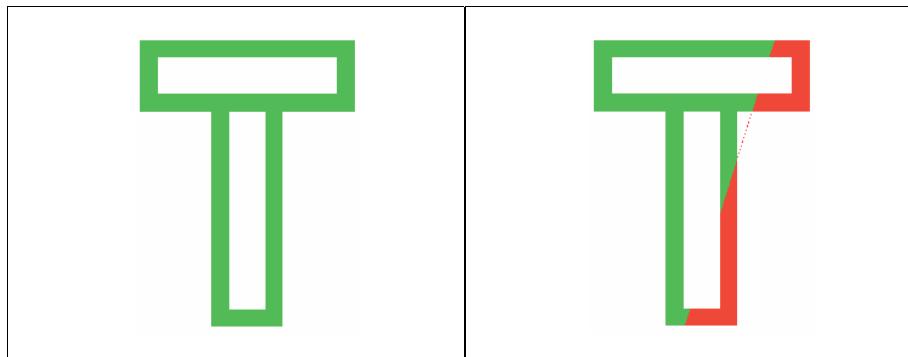
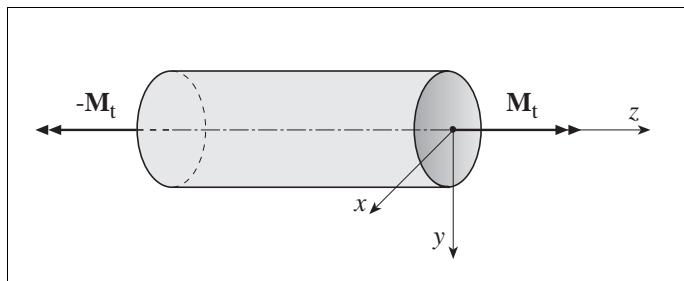


Fig. 2.11 sezione totale

Fig. 2.12 sezione parzializzata

### 3. LA SOLLECITAZIONE DI TORSIONE

Una trave è soggetta a *torsione* se le forze agenti sulle basi terminali sono equivalenti a due coppie uguali ed opposte e con vettore assiale del momento risultante parallelo all'asse della trave.



*La sollecitazione di torsione*

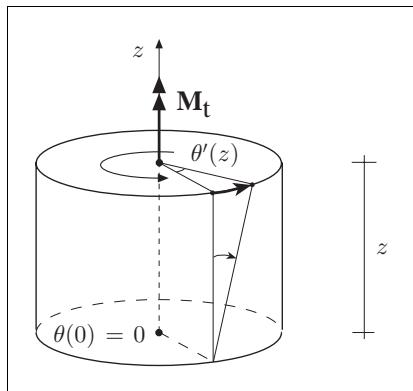
Fig. 3.1

La trattazione del problema dell'equilibrio elastico della trave soggetta a torsione viene svolta nell'ipotesi che il materiale elastico sia omogeneo ed isotropo.

- La soluzione può essere ottenuta assumendo che le sezioni rette subiscano una *rotazione rigida* nel proprio piano.

Si denoterà con  $\theta(z)$  l'ampiezza della rotazione della sezione all'ascissa  $z$ , assunta positiva se antioraria rispetto al versore dell'asse della trave.

- La derivata  $\theta'(z)$  della rotazione della sezione rispetto all'ascissa  $z$  è la *curvatura torsionale* o *angolo specifico di torsione*.



Si assume che la curvatura torsionale sia costante e quindi pari alla rotazione relativa tra due sezioni a distanza unitaria.

Con questa ipotesi, ponendo  $\theta(0) = 0$ , cioè a meno di un'inessenziale rotazione rigida, si ha che

$$\theta(z) = \theta' z .$$

Fig. 3.2

Le ipotesi alla base della trattazione possono sintetizzarsi come segue.

- Le sezioni rette ruotano rigidamente nel proprio piano.
- La curvatura torsionale è costante.

Il primo esempio di soluzione del problema dell'equilibrio elastico della trave soggetta a torsione è dovuto a COULOMB<sup>37</sup> ed è relativa al caso di sezioni circolari (compatte o tubolari).

### 3.1. La sezione circolare e a corona circolare

La soluzione è suggerita dall'ipotesi che la trave si deforme in modo tale che le sezioni rette subiscono una rotazione rigida attorno nel proprio piano, senza ingobbarsi.

Si indichi allora con  $\mathbf{R}$  il tensore ortogonale che ruota ogni vettore del piano della sezione di  $\pi/2$  in senso antiorario:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e si scelga l'origine  $O$  del riferimento levogiro coincidente col centro della sezione.

Si osservi poi che la rotazione  $\mathbf{R}$  è emisimmetrica e pertanto valgono le relazioni

$$\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}^{-1}, \quad \det \mathbf{R} = 1.$$

<sup>37</sup> CHARLES AUGUSTIN DE COULOMB (1736-1806). Nato ad Angoulême in Languedoc da famiglia benestante ebbe un'ottima educazione prima nella città natale e poi a Parigi. Nel 1770 entrò nell'Ecole du Génie a Mézières e dopo circa due anni divenne luogotenente del Corpo del Genio Militare. Dal 1764 al 1772 fu impegnato nella Martinique (indie orientali) nella costruzione del forte Bourbon. Questa esperienza fu importante per la formazione di COULOMB ma gli procurò seri malanni di cui egli soffrì per il resto della vita. Nel 1773, tornato in Francia a Bouchain, presentò all'Académie des Sciences di Parigi il primo lavoro dal titolo *Essai sur une application des règles, de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture* in cui studiava con i metodi del calcolo delle variazioni l'influenza dell'attrito e della coesione in problemi di statica. Nel 1777 sottopose all'Accademia un altro famoso lavoro sulla bussola magnetica in cui affrontò e risolse il problema della torsione di cilindri sottili e mostrò come la bilancia torsionale consenta di misurare le forze con grande precisione. Nel 1779 fu inviato a Rochefort per collaborare col MARCHESE DE MONTALEMBERT nella costruzione di un forte ed ivi ideò la *Théorie des machines simples* che gli valse il Gran Premio dell'Académie des Sciences nel 1781. COULOMB fu quindi eletto all'Accademia e si dedicò completamente alle ricerche di fisica pubblicando 25 memorie sull'elettricità ed il magnetismo tra il 1781 ed il 1806, lavorando in stretto contatto con BOSSUT, BORDA, DE PRONY e LAPLACE. A COULOMB è dovuta la scoperta che nella legge di attrazione tra le cariche elettriche di segno opposto compare l'inverso del quadrato della distanza, analogamente alla legge di attrazione delle masse formulata da NEWTON. Nel 1790 ebbe il primo figlio e nel 1797 il secondo da LOUISE FRANÇOISE LE PROUST DESORMEAUX che poi sposò nel 1802. Nel 1789, con la rivoluzione l'Accademia fu chiusa nel 1793 e sostituita dall'Institut de France dove COULOMB entrò nel 1795. Negli ultimi anni egli si interessò dell'organizzazione scolastica in Francia quale ispettore generale della pubblica istruzione.

Sia  $\mathbf{t}$  il versore tangente nel punto  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  alla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $r$ . Risulta:

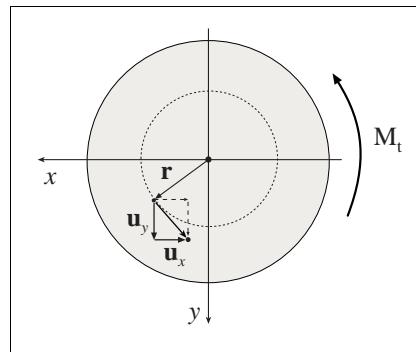
$$\mathbf{t} = \mathbf{R} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

La trattazione è svolta nell'ambito della teoria linearizzata e pertanto il campo di spostamenti  $\mathbf{u}$  della sezione può essere espresso mediante la rappresentazione parametrica dei cinematicismi rigidi

$$\mathbf{u} = \theta' z \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \theta' z \mathbf{R} \mathbf{r} = r \theta' z \mathbf{t},$$

*Campo vettoriale spostamento*

ovvero in componenti



$$\begin{cases} u_x = -\theta' z y, \\ u_y = \theta' z x, \\ u_z = 0. \end{cases}$$

Fig. 3.3

**Osservazione 3.1.** Aver scelto l'origine  $O$  coincidente con il centro della sezione equivale ad assumere che l'asse della trave contenga il centro di rotazione di ogni sezione trasversale. I campi di spostamento ottenuti con scelte diverse dell'asse di rotazione forniscono comunque soluzioni equivalenti in termini di deformazioni e di tensioni poiché differiscono di un inessenziale campo di spostamenti rigidi. ■

Dall'espressione degli spostamenti si deduce che le seguenti componenti del tensore di deformazione sono nulle

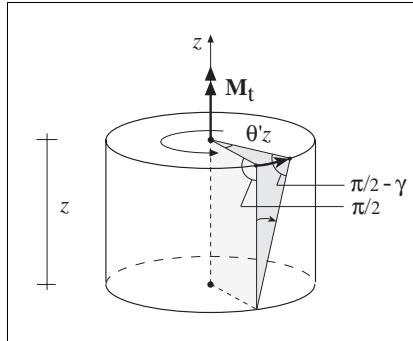
$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0,$$

e cioè che,

- la dilatazione delle fibre trasversali e longitudinali è nulla,
- lo scorrimento tra le fibre trasversali è nullo.

Le uniche componenti non nulle della deformazione sono quelle che descrivono lo scorrimento  $\gamma_z = \{\gamma_{zx}, \gamma_{zy}\}$  tra le fibre longitudinali e trasversali.



Per semplificare la notazione lo scorrimento verrà denotato nel seguito con  $\gamma = (\gamma_x, \gamma_y)$ . Esso è fornito dalle relazioni

$$\begin{cases} \gamma_x = \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = -\theta' y, \\ \gamma_y = \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \theta' x. \end{cases}$$

*Componenti dello scorrimento*

ed in termini vettoriali

$$\gamma = \theta' \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} = r \theta' \mathbf{t}.$$

Le fibre trasversali nella sezione retta che sono tangenti al vettore  $\gamma$  sono quelle che subiscono il massimo scorrimento rispetto a quelle longitudinali.

Le fibre ortogonali a  $\gamma$  sono quelle per le quali tale scorrimento è nullo.

Dal legame elastico  $\tau = G\gamma$  si deduce che sulla sezione retta agiscono solo tensioni tangenziali date da:

$$\tau = G \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} = G \theta' \mathbf{k} \times \mathbf{r} = r G \theta' \mathbf{t},$$

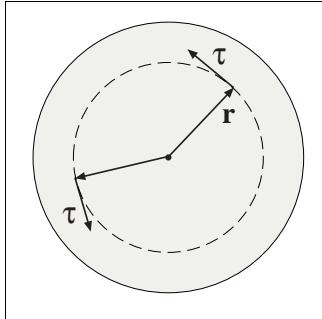
*Tensioni tangenziali*

ed in termini di componenti

$$\begin{cases} \tau_x = G \gamma_x = -G \theta' y, \\ \tau_y = G \gamma_y = G \theta' x, \end{cases}$$

*Componenti delle tensioni tangenziali*

Il campo di tensioni tangenziali così determinato soddisfa



- le condizioni differenziali di equilibrio

$$\begin{cases} \tau' = \mathbf{0}, \\ \operatorname{div} \tau = 0, \end{cases}$$

- la condizione di equilibrio al contorno

$$\tau \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Infatti la prima condizione differenziale ( $\tau' = \mathbf{0}$ ) è soddisfatta in quanto  $\theta'$  è costante mentre la seconda ( $\operatorname{div} \tau = 0$ ) è soddisfatta perché il campo delle  $\tau$  ha divergenza nulla.

Ciò si verifica con un calcolo diretto

$$\operatorname{div} \tau = \tau_{i,i} = G \theta' R_{ij} r_{j,i} = G \theta' R_{ij} \delta_{ji} = G \theta' R_{ii} = G \theta' \operatorname{tr} \mathbf{R} = 0,$$

dove  $\delta_{ji}$  è il simbolo di KRONECKER.

L'annullarsi della traccia  $\operatorname{tr} \mathbf{R}$  è conseguenza dell'emisimmetria di  $\mathbf{R}$ .

Le linee di flusso delle  $\tau$  sono circonferenze concentriche e quindi risulta verificata anche la condizione di equilibrio al contorno

$$\tau \cdot \mathbf{n} = 0,$$

che esprime il fatto che la superficie laterale è scarica.

La soluzione di COULOMB è dunque valida solo per sezioni circolari o a corona circolare in quanto, per altre forme del contorno, la sezione retta non può essere un tubo di flusso delle tensioni tangenziali.

Lo sforzo normale ed il momento flettente sono nulli, essendo identicamente nulle le tensioni normali agenti sulle sezioni trasversali.

Nella torsione è nulla anche la sollecitazione di taglio, in conseguenza della seguente proprietà generale.

**Proposizione 3.1. Risultante di un campo solenoidale.** *Si consideri un campo piano che è solenoidale in un dominio che è un tubo di flusso per il campo. Allora il vettore risultante del campo è nullo.*

**Dim.** Si noti che sussiste la relazione

$$\operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) = \mathbf{r} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + (\operatorname{grad} \mathbf{r}) \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}$$

come si verifica facilmente operando in termini di componenti cartesiane

$$(r_i \tau_j)_{,j} = r_{i,j} \tau_j + r_i \tau_{j,j} = \tau_i + r_i \tau_{j,j},$$

in quanto  $r_{i,j} = \delta_{ij}$ . Risulta pertanto

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \int_A \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) - \int_A \mathbf{r} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} da = \\ &= \int_{\partial A} (\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n} ds = \int_{\partial A} \mathbf{r} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) ds = \mathbf{o}, \end{aligned}$$

essendo per ipotesi  $\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0$  in  $A$  e  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0$  sul contorno  $\partial A$ .  $\square$

Nella torsione l'unica caratteristica non nulla è dunque il momento torcente che vale

$$M_t = \int_A (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{k} da = G \theta' \int_A r (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{k} da = G \theta' \int_A r^2 da.$$

L'ultima espressione si ottiene osservando che il vettore  $\mathbf{r} \times \mathbf{t}$  ha modulo  $r$  ed è parallelo e concorde a  $\mathbf{k}$ .

Definendo il *momento d'inerzia polare*

$$J_p = \int_A r^2 da$$

*Momento d'inerzia polare*

il momento torcente è fornito dalla relazione:

$$M_t = G J_p \theta'.$$

Il rapporto tra momento torcente e curvatura torsionale è detto *rigidezza torsionale* della sezione

$$K_t = \frac{M_t}{\theta'} = G J_p$$

*Rigidezza torsionale*

La relazione  $G \theta' = M_t / J_p$  consente di esprimere le tensioni tangenziali in funzione del momento torcente

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} r \mathbf{t} = \frac{M_t}{J_p} \mathbf{k} \times \mathbf{r} = \frac{M_t}{J_p} \mathbf{R} \mathbf{r},$$

e dunque il modulo di  $\tau$  vale

$$\tau = \frac{M_t}{J_p} r.$$

Nel caso di sezione circolare di raggio  $R$  (fig. 3.4.a) si ha  $J_p = \pi R^4 / 2$ , da cui

$$\boxed{\tau = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r, \quad \tau_{max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}.}$$

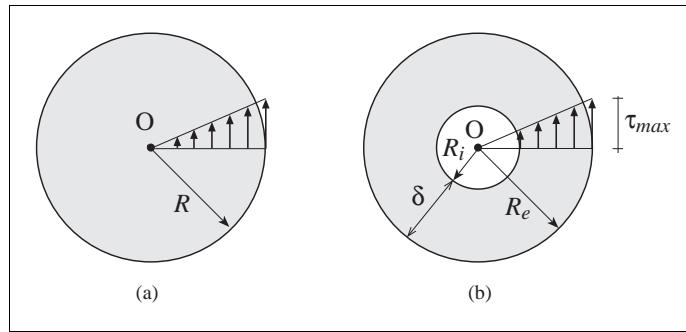


Fig. 3.4

Per la sezione a corona circolare (fig. 3.4.b) si ha  $J_p = \pi (R_e^4 - R_i^4) / 2$  e quindi

$$\boxed{\tau = \frac{2 M_t}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} r, \quad \tau_{max} = \frac{2 M_t}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} R_e.}$$

### 3.1.1. Effetto del rapporto tra spessore e raggio

Nei tubi circolari, anche di notevole spessore, le tensioni tangenziali possono essere stimate con buona approssimazione determinandone il flusso attraverso una generica corda.

Denotando con  $\delta = R_e - R_i$  lo spessore e con  $R_m = (R_e + R_i)/2$  il raggio medio della sezione, può scriversi

$$\begin{aligned} R_e^4 - R_i^4 &= (R_e^2 - R_i^2)(R_e^2 + R_i^2) = \\ &= (R_e - R_i)(R_e + R_i) \left[ \left( R_m + \frac{\delta}{2} \right)^2 + \left( R_m - \frac{\delta}{2} \right)^2 \right] = \\ &= 2\delta R_m \left( 2R_m^2 + \frac{\delta^2}{2} \right) = 4R_m^3 \delta + R_m \delta^3 = R_m \delta (4R_m^2 + \delta^2), \end{aligned}$$

da cui

$$J_p = \frac{\pi R_m \delta}{2} (4R_m^2 + \delta^2).$$

Sostituendo nella espressione di  $M_t$  si ottiene

$$M_t = G \theta' R_m \delta \left( 2\pi R_m^2 + \frac{\pi \delta^2}{2} \right).$$

Il flusso  $q$  attraverso una corda appartenente ad una retta passante per il centro della sezione, è pari a

$$q = \int_{R_i}^{R_e} \tau(r) dr = G \theta' \int_{-\delta/2}^{+\delta/2} (R_m + \eta) d\eta = G \theta' R_m \delta.$$

Dunque, denotando con  $\Omega = \pi R_m^2$  l'area racchiusa dalla linea media e cioè dalla circonferenza di centro  $O$  e raggio  $R_m$ , si ha

$$M_t = 2q\Omega + \frac{q\pi\delta^2}{2} = 2q\Omega \left( 1 + \frac{\pi\delta^2}{4\Omega} \right).$$

Se si pone  $M_q = 2q\Omega$  e  $\Delta M = M_t - M_q$ , dalla precedente espressione di  $M_t$  si ha

$$\frac{\Delta M}{M_q} = \frac{\pi\delta^2}{4\Omega}.$$

Inoltre si ha

$$\tau_{max} = G\theta' \left( R_m + \frac{\delta}{2} \right) = \frac{q}{\delta} \left( 1 + \frac{\delta}{2R_m} \right)$$

e dunque, posto  $\tau_q = q/\delta$  e  $\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_q$ , si ottiene

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_q} = \frac{\delta}{2R_m}.$$

Per  $\delta = R_m/2$  si ha

$$\frac{\Delta M}{M_q} = \frac{1}{16}, \quad \frac{\Delta\tau}{\tau_q} = \frac{1}{4}.$$

Dunque può porsi con buona approssimazione

$$M_t \simeq M_q = 2q\Omega, \\ \tau_{max} \simeq \tau_q = \frac{q}{\delta}.$$

per tubi circolari di spessore anche non piccolo.

### 3.2. Sezioni di forma qualsiasi

Se la sezione non è un cerchio o una corona circolare, la soluzione di COULOMB non soddisfa le condizioni di equilibrio sul contorno.

Infatti nella soluzione di COULOMB le linee di flusso delle tensioni tangenziali sono circonferenze concentriche. D'altronde la condizione di equilibrio al contorno, essendo scarico il mantello laterale della trave, richiede che le tensioni tangenziali  $\tau$  siano tangentie al contorno della sezione. Ne consegue che il contorno deve essere costituito da circonferenze concentriche.

La soluzione di COULOMB deve essere quindi opportunamente modificata nel caso di travi la cui sezione retta non sia un cerchio o una corona circolare.

L'idea è quella di cercare una soluzione assumendo che le sezioni rette subiscano un *ingombramento* proporzionale alla curvatura torsionale.

Lo spostamento sarà quindi somma della componente di rotazione rigida nel piano e di una componente assiale proporzionale ad una funzione di forma  $\varphi(\mathbf{r})$  tramite la curvatura torsionale.

L'espressione analitica del campo di spostamento è dunque

$$\mathbf{u} = \theta' z \mathbf{R} \mathbf{r} + \theta' \varphi(\mathbf{r}) \mathbf{k}$$

*Espressione vettoriale  
del campo di spostamento*

ed in termini di componenti

$$\begin{cases} u_x = -\theta' z y \\ u_y = \theta' z x \\ u_z = \theta' \varphi(x, y) \end{cases}$$

*Componenti dello spostamento*

La funzione di forma  $\varphi$  rappresenta l'*ingobbamento specifico* cioè l'ingobbamento corrispondente ad un valore unitario della curvatura torsionale.

Procedendo in analogia alla trattazione della sezione circolare, si deduce che le uniche componenti non nulle del tensore di deformazione sono quelle relative allo scorrimento tra le fibre longitudinali e trasversali

$$\begin{cases} \gamma_x = \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \theta' \left( -y + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \\ \gamma_y = \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) = \theta' \left( x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \end{cases}$$

*Componenti non nulle dello scorrimento*

Osservando che

$$[\mathbf{R} \mathbf{r}] = \begin{vmatrix} -y \\ x \end{vmatrix}, \quad [\text{grad } \varphi] = \begin{vmatrix} \partial \varphi / \partial x \\ \partial \varphi / \partial y \end{vmatrix},$$

il vettore scorrimento  $\boldsymbol{\gamma}$  può esprimersi nella forma

$$\boldsymbol{\gamma} = \theta' (\mathbf{R} \mathbf{r} + \text{grad } \varphi).$$

Le tensioni tangenziali sono quindi dedotte dal legame elastico

$$\boldsymbol{\tau} = G \boldsymbol{\gamma} = G \theta' (\mathbf{R} \mathbf{r} + \text{grad } \varphi),$$

ovvero, in termini di componenti

$$\begin{cases} \tau_x = G \theta' \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) \\ \tau_y = G \theta' \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \end{cases}$$

*Componenti delle tensioni tangenziali*

La soluzione del problema della torsione per sezioni non circolari richiede dunque la determinazione della funzione di ingobbamento specifico  $\varphi(\mathbf{r})$ .

Le condizioni cui deve soddisfare la  $\varphi(\mathbf{r})$  si deducono imponendo che le tensioni tangenziali  $\tau$  soddisfino le condizioni di equilibrio differenziali ed al contorno.

- La condizione

$$\tau' = \mathbf{0}$$

è banalmente verificata poiché il campo delle  $\tau$  si ripete in ogni sezione.

- La condizione di divergenza nulla si traduce nella richiesta che la funzione  $\varphi(\mathbf{r})$  sia armonica. Infatti, essendo  $\operatorname{div} \mathbf{R} \mathbf{r} = 0$  risulta

$$\operatorname{div} \tau = G \theta' (\operatorname{div} \mathbf{R} \mathbf{r} + \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi) = G \theta' \Delta \varphi = 0,$$

ove  $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$  è l'*operatore di LAPLACE*.

La condizione di tangenza delle  $\tau$  al contorno impone inoltre che

$$\begin{aligned} \tau \cdot \mathbf{n} &= G \theta' (\mathbf{R} \mathbf{r} + \operatorname{grad} \varphi) \cdot \mathbf{n} = G \theta' (\mathbf{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n}) = \\ &= G \theta' \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) n_x + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) n_y \right] = 0. \end{aligned}$$

Orientando la tangente al contorno in modo che  $\mathbf{t} = \mathbf{R} \mathbf{n}$ , si ha che

$$\mathbf{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{R} \mathbf{n} = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{t},$$

e si perviene in definitiva al problema al contorno

$$\Delta \varphi = 0$$

$\varphi$  armonica

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$$

condizione  
al contorno

*Problema di NEUMANN*

ovvero, in termini di componenti

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \forall (x, y) \in A$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y = x t_x + y t_y \quad \forall (x, y) \in \partial A$$

dove  $A$  e  $\partial A$  denotano rispettivamente il dominio della sezione e la sua frontiera.

Il problema posto per la funzione  $\varphi$  è classico in fisica matematica ed è noto come un *problema di NEUMANN*

Dalle condizioni di equivalenza statica sulle basi si deduce che lo sforzo normale ed il momento flettente sono nulli, essendo identicamente nulle le tensioni normali. Lo sforzo di taglio è anch'esso nullo poichè sussiste la equivalenza

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \int_A \boldsymbol{\tau} \ da = \int_A \operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) \ da - \int_A \mathbf{r} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \ da = \\ &= \int_{\partial A} (\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) \mathbf{n} \ ds = \int_{\partial A} \mathbf{r} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \ ds = \mathbf{o}.\end{aligned}$$

Per il momento torcente si ottiene l'espressione

$$\begin{aligned}M_t &= \int_A (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{k} \ da = \\ &= G \theta' \left[ \int_A \mathbf{r} \times \mathbf{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{k} \ da + \int_A \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ da \right] = \\ &= G \theta' \left[ J_p + \int_A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \right) \ da \right],\end{aligned}$$

avendo utilizzato la relazione  $(\mathbf{r} \times \mathbf{R} \mathbf{r}) \cdot \mathbf{k} = r^2$ .

Definendo poi il *fattore di torsione*

$$q_t = \frac{J_p}{\left[ J_p + \int_A (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r} \ da \right]} = \frac{J_p}{\left[ J_p + \int_A \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} x - \frac{\partial \varphi}{\partial x} y \right) \ da \right]},$$

l'espressione precedente assume la forma sintetica

$$M_t = \frac{G J_p}{q_t} \theta'.$$

La *rigidezza torsionale* della sezione è quindi fornita da

$$K_t = \frac{M_t}{\theta'} = \frac{G J_p}{q_t}$$

*Rigidezza torsionale*

Si mostra ora che il rotore del campo vettoriale delle tensioni tangenziali è costante.

All'espressione del rotore si perviene facendo ricorso alla definizione invariante del rotore di un campo vettoriale

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2 \text{ axial emi grad } \boldsymbol{\tau} .$$

Valutando infatti il gradiente di  $\boldsymbol{\tau}$

$$\text{grad } \boldsymbol{\tau} = G \theta' \text{ grad} (\mathbf{k} \times \mathbf{r} + \text{grad} \varphi) = G \theta' (\mathbf{R} + \text{grad grad} \varphi) ,$$

si ottiene

$$\text{emi grad } \boldsymbol{\tau} = G \theta' \text{ emi}(\mathbf{R} + \text{grad grad} \varphi) = G \theta' \mathbf{R} .$$

Essendo  $\text{axial } \mathbf{R} = \mathbf{k}$ , si deduce che l'espressione del rotore è

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = 2 \text{ axial } G \theta' \mathbf{R} = 2 G \theta' \mathbf{k} .$$

*Condizione di congruenza  
della deformazione elastica  
associata alle  $\boldsymbol{\tau}$ .*

### 3.3. Il problema di Neumann per l'ingobbamento

Si consideri ora il caso generale, schematizzato in fig. 3.5, in cui la sezione trasversale  $A$  della trave presenti  $n$  cavità interne.

La frontiera  $\partial A$  della sezione è pertanto costituita da un contorno esterno e da  $n$  contorni interni. Si denoterà con  $c_o$  il contorno esterno e con  $c_1, \dots, c_n$  i contorni delle cavità interne (fig.3.5).

La soluzione del problema della torsione richiede di determinare la funzione  $\varphi$  di ingobbamento specifico. Ciò può essere effettuato risolvendo il relativo problema di NEUMANN<sup>38</sup> per la funzione d'ingobbamento specifico oppure ricorrendo a formulazioni equivalenti che conducono a problemi di DIRICHLET<sup>39</sup> e di POISSON<sup>40</sup> per la funzione armonica coniugata, come sarà mostrato nelle sezioni 3.5 (p. 438) e 3.6 (p. 439).

---

<sup>38</sup> CARL GOTTFRIED NEUMANN (1832-1925). Matematico tedesco figlio di FRANZ NEUMANN e professore a Lipsia.

<sup>39</sup> JOHANN PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (1805-1859). Illustrate matematico tedesco, professore prima a Berlino e poi a Göttingen dove prese la cattedra di GAUSS alla sua morte nel 1855. Famosi i suoi contributi alla teoria dei numeri, alle serie di FOURIER, all'idrodinamica ed alla teoria del potenziale. Amico di JACOBI ebbe come allievo KRONECKER.

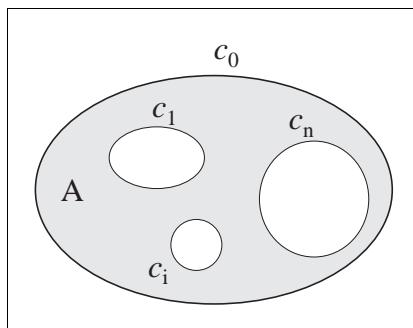
<sup>40</sup> SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840). Uno dei maggiori analisti dell'Ottocento e grande fisico matematico. Fu uno dei fondatori della teoria matematica dell'elasticità, si occupò di teoria della propagazione del calore e diede contributi decisivi alla teoria del potenziale ed alle sue applicazioni all'elettricità ed al magnetismo.

La formulazione di un problema di DIRICHLET per la funzione armonica coniugata è la più conveniente.

Ad essa fanno riferimento le soluzioni esatte, fornite originariamente da SAINT VENANT [1] per la sezione triangolare equilatera e per quella ellittica che saranno illustrate nella sezione 3.8 (p. 444).

Nella sezione 4 (p. 451) il problema della determinazione delle tensioni tangenziali da torsione verrà quindi inquadrato nel contesto più generale della determinazione di un campo vettoriale piano in un dominio  $A$  quando siano assegnati

- la divergenza,
- il rotore,
- la condizione al contorno di flusso locale nullo attraverso la frontiera.



$$\partial A = c_0 \cup c_1 \cup \dots \cup c_n$$

Fig. 3.5

Il problema di NEUMANN per una funzione armonica consiste nell'imporre che la derivata lungo la normale al contorno  $\partial\varphi/\partial n$  assuma un assegnato valore  $p(s)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{grad } \varphi \cdot \mathbf{n} = p(s).$$

Come sarà discusso nella sezione 4.1 (p. 459), l'esistenza della soluzione del problema di NEUMANN sussiste se e solo se il dato al contorno  $p(s)$  verifica la condizione

$$\oint_{\partial A} p(s) \, ds = 0.$$

*Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione del problema di NEUMANN.*

In tal caso la soluzione è unica a meno di una costante additiva arbitraria.

Nel problema della torsione la funzione armonica è l'ingobbamento specifico ed il valore al contorno della derivata normale è  $p(s) = \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$ .

L'esistenza della funzione ingobbamento specifico  $\varphi$  è dunque assicurata se e solo se risulta

$$\oint_{\partial A} \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, ds = 0$$

E' facile mostrare che la condizione di esistenza è verificata per qualsiasi geometria della sezione retta. Infatti per ogni linea chiusa si ha che

$$\oint \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \, ds = \frac{1}{2} \oint \frac{d}{ds} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \, ds = 0.$$

Risulta quindi *a fortiori*

$$\oint_{\partial A} \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, ds = \sum_{j=0}^n \oint_{c_j} \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, ds = 0.$$

Il problema di NEUMANN per la funzione di ingobbamento specifico  $\varphi$  ammette pertanto una soluzione unica a meno di una costante additiva arbitraria.

Tale costante è peraltro inessenziale in quanto rappresenta una traslazione lungo l'asse  $z$  della trave e dunque non altera il campo di tensioni e deformazioni nella trave.

**Osservazione 3.2.** E' da notare che nel formulare la soluzione del problema della torsione in termini di spostamento si è assunto il centro di rotazione della generica sezione coincidente con l'origine  $O$ .

Si può mostrare che lo stato di tensione e di deformazione non dipende dalla particolare scelta del centro di rotazione.

Si assuma infatti che il centro di rotazione sia un punto generico  $P_o = (x_o, y_o)$  individuato dal raggio vettore  $\mathbf{r}_o$ .

Denotando con  $\varphi_o(\mathbf{r})$  la nuova espressione dell'ingobbamento, lo spostamento  $\mathbf{u}$  si scrive

$$\mathbf{u}_o = \theta' z \mathbf{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) + \theta' \varphi_o(\mathbf{r}) \mathbf{k} \iff \begin{cases} u_{ox} = -\theta' z (y - y_o) \\ u_{oy} = \theta' z (x - x_o) \\ u_{oz} = \theta' \varphi_o(x, y) \end{cases}$$

e lo scorrimento vale

$$\gamma = \theta' [\mathbf{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) + \text{grad } \varphi_o(\mathbf{r})].$$

Le tensioni tangenziali sono quindi

$$\tau = G \theta' [\mathbf{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) + \text{grad } \varphi_o] \iff \begin{cases} \tau_x = G \theta' \left[ \frac{\partial \varphi_o}{\partial x} - (y - y_o) \right] \\ \tau_y = G \theta' \left[ \frac{\partial \varphi_o}{\partial y} + (x - x_o) \right] \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = G\theta' \Delta \varphi_o = 0, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = G\theta' \left[ \frac{\partial \varphi_o}{\partial n} + \mathbf{R}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n} \right] = 0. \end{cases}$$

Pertanto il problema, posto in termini di  $\varphi_o$  diventa

$$\begin{cases} \Delta \varphi_o(\mathbf{r}) = 0, \\ (\operatorname{grad} \varphi_o - \mathbf{R} \mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}. \end{cases}$$

Considerando allora la funzione

$$\xi(\mathbf{r}) = \varphi_o(\mathbf{r}) + \mathbf{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_o,$$

il cui gradiente è

$$\operatorname{grad} \xi(\mathbf{r}) = \operatorname{grad} \varphi_o(\mathbf{r}) - \mathbf{R} \mathbf{r}_o,$$

si ha che

$$\begin{cases} \Delta \xi(\mathbf{r}) = \Delta \varphi_o(\mathbf{r}) = 0 \\ \operatorname{grad} \xi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}. \end{cases}$$

In termini di componenti si ha quindi che  $\xi(x, y) = \varphi_o(x, y) + y_o x - x_o y$  e

$$\begin{cases} \Delta [\varphi_o(x, y) + y_o x - x_o y] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial n} [\varphi_o(x, y) + y_o x - x_o y] = \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}. \end{cases}$$

Le due condizioni precedenti definiscono lo stesso problema di NEUMANN posto in termini della funzione  $\varphi$ . Le rispettive soluzioni differiscono quindi di una costante arbitraria, e cioè

$$\xi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \text{cost.}$$

Si ha allora

$$\operatorname{grad} \varphi_o = \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{R} \mathbf{r}_o,$$

ovvero, in termini di componenti,

$$\frac{\partial \varphi_o}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y_o, \quad \frac{\partial \varphi_o}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x_o,$$

che, sostituita nella espressione di  $\boldsymbol{\tau}$ , fornisce la stessa espressione delle tensioni tangenziali in termini della funzione  $\varphi$ .

L'espressione della nuova funzione di ingobbamento è

$$\varphi_o(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}) + \mathbf{R} \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r} + \text{cost.}$$

Notando infine che

$$\begin{cases} (\mathbf{R} \mathbf{r}_o \cdot \mathbf{r}) \mathbf{k} = \mathbf{r}_o \times \mathbf{r}, \\ -z \mathbf{R} \mathbf{r}_o = -z \mathbf{k} \times \mathbf{r}_o = \mathbf{r}_o \times (z \mathbf{k}), \end{cases}$$

si perviene alla relazione tra i campi di spostamento  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_o$ :

$$\mathbf{u}_o = \mathbf{u} + \theta' \mathbf{r}_o \times (z \mathbf{k} + \mathbf{r}).$$

La differenza  $\mathbf{u}_o - \mathbf{u}$  consiste pertanto in una rotazione antioraria di ampiezza  $\theta' r_o$  intorno ad un asse di direzione  $\mathbf{r}_o$  passante per l'origine  $O$  della trave. ■

Si può pertanto enunciare il seguente risultato.

I campi di spostamento ottenuti con due scelte diverse del centro di rotazione costituiscono due soluzioni equivalenti in quanto differiscono di un cinematismo rigido inessenziale.

### 3.4. Funzioni armoniche coniugate

Si consideri un dominio  $A$  connesso e generalmente regolare del piano e si denotino con

- $c_o$  il contorno esterno e
- $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) gli eventuali contorni interni.

Una funzione  $\varphi : A \mapsto \mathbb{R}$  è detta *armonica* se il suo gradiente  $\mathbf{v} = \text{grad } \varphi$  è *solenoidale* e cioè

$$\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \text{grad } \varphi = \Delta \varphi = 0.$$

Il campo vettoriale  $\mathbf{v}$ , essendo il gradiente di un potenziale, è *irrotazionale*:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \text{grad } \varphi = \mathbf{0},$$

ed in temini di componenti

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Si consideri ora il campo vettoriale  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R} \mathbf{v}$ , ottenuto ruotando i vettori del campo  $\mathbf{v}$  di  $\pi/2$  in verso antiorario.

Si osservi che, essendo  $\mathbf{R}$  isometrica ed emisimmetrica, valgono le relazioni

$$\mathbf{R} = -\mathbf{R}^T = -\mathbf{R}^{-1}.$$

Un calcolo diretto mostra che valgono le egualanze

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{R} \mathbf{v} &= -\operatorname{rot} \mathbf{v}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{R} \mathbf{v} &= \operatorname{div} \mathbf{v}.\end{aligned}$$

Tali egualanze possono essere stabilite anche notando che per ogni sottodomino  $\mathcal{P} \subseteq A$ , in virtù del teorema della divergenza e del teorema di STOKES valgono le relazioni

$$\oint_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{rot} \mathbf{v}^* \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathcal{P} \subseteq A,$$

$$\oint_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = -\oint_{\partial\mathcal{P}} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n} \, ds = -\int_{\mathcal{P}} \operatorname{div} \mathbf{v}^* \, da = \int_{\mathcal{P}} \operatorname{rot} \mathbf{v} \, da \quad \forall \mathcal{P} \subseteq A.$$

Quindi se il campo  $\mathbf{v}$  è solenoidale ed irrotazionale, tale sarà anche il campo  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R}\mathbf{v}$  e viceversa.

Sia dunque  $\varphi : A \mapsto \mathbb{R}$  una funzione *armonica* con gradiente  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ .

- Se il dominio  $A$  è *semplicemente connesso*, il campo  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R}\mathbf{v}$ , in quanto irrotazionale, ammetterà un potenziale  $\varphi^*$ , che soddisfa la *relazione di CAUCHY-RIEMANN*

$$\operatorname{grad} \varphi^* = \mathbf{R} \operatorname{grad} \varphi \iff \begin{cases} \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

Poiché  $\mathbf{v}^*$  è anche solenoidale risulta

$$\Delta \varphi^* = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi^* = \operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0,$$

e dunque il potenziale  $\varphi^*$  è armonico.

- Se il dominio  $A$  è a *connessione multipla* e contiene  $n$  cavità interne, l'integrabilità del campo  $\mathbf{v}^*$  è assicurata se e solo se risultano nulle le circuitazioni di  $\mathbf{v}^*$  lungo gli  $n$  contorni  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) delle cavità:

$$\oint_{c_j} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Infatti la condizione di integrabilità del campo vettoriale  $\mathbf{v}^*$  richiede l'annullarsi della circuitazione del campo lungo una qualsiasi linea chiusa contenuta nel dominio di definizione  $A$ :

$$\oint_c \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = 0, \quad \forall c \subset A.$$

Poichè il campo  $\mathbf{v}^*$  è irrotazionale, applicando il teorema di STOKES ad una linea chiusa che racchiude cavità interne, si ottiene che la somma delle circuitazioni di  $\mathbf{v}^*$  lungo la linea chiusa e lungo i contorni delle cavità interne è nulla.

La situazione è esemplificata in fig. 3.6 in cui il sottodomini campito in grigio ha come bordo le linee chiuse  $c, c_1, c_2$ .

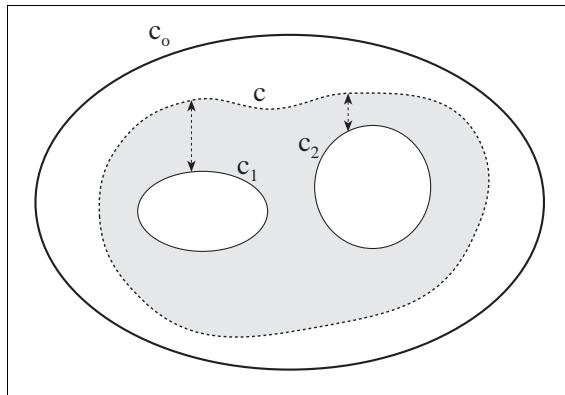


Fig. 3.6

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v}^* &= \mathbf{0}, \\ \oint_{c_1} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds &= 0, \\ \oint_{c_2} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds &= 0, \\ \downarrow \\ \oint_c \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, da &= 0, \quad \forall c. \end{aligned}$$

Si denoti con  $\Gamma$  il percorso costituito dalla curva chiusa  $c$ , dai bordi delle  $k < n$  cavità che essa racchiude e dalle  $k$  linee di andata e ritorno che consentono di passare dalla curva  $c$  ai bordi delle  $k$  cavità.

Assumendo il percorso  $\Gamma$  come bordo del sottodomini  $A_\Gamma$  campito in grigio nella fig. 3.6, si può allora scrivere, grazie al teorema di STOKES,

$$\oint_\Gamma \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint_c \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds + \sum_{j=1}^k \oint_{c_j} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_{A_\Gamma} \text{rot } \mathbf{v}^* \, da = 0.$$

L'annullarsi della circuitazione del campo  $\mathbf{v}^*$  lungo i contorni  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) delle cavità interne equivale pertanto a richiedere che sia nulla la circuitazione del campo  $\mathbf{v}^*$  lungo una qualsiasi linea chiusa, riducibile o meno, contenuta nel dominio di definizione.

Tali condizioni, essendo  $\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} = -\mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \mathbf{t} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n}$ , possono equivalentemente esprimersi imponendo l'annullarsi del flusso del campo  $\mathbf{v}$  attraverso i contorni  $c_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) delle cavità interne

$$\oint_{c_j} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint_{c_j} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{c_j} \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Il campo  $\mathbf{v}^*$  ammette quindi un potenziale armonico  $\varphi^*$ .

- La funzione  $\varphi^*$ , se esiste, è detta funzione *armonica coniugata* di  $\varphi$  nel senso di CAUCHY<sup>41</sup>-RIEMANN<sup>42</sup>.

Riassumendo si può così concludere.

- Se il dominio  $A$  è semplicemente connesso ogni funzione  $\varphi$  armonica in  $A$  ammette un'armonica coniugata  $\varphi^*$  unica a meno di una costante additiva.

Se il dominio  $A$  ha connessione multipla, l'esistenza dell'armonica coniugata  $\varphi^*$  è subordinata all'annullarsi dei flussi del gradiente di  $\varphi$  attraverso i contorni delle cavità interne:

$$\oint_{c_j} \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad j = 1, \dots, n.$$

### 3.4.1. Il problema di Dirichlet per l'armonica coniugata

Sia  $\varphi$  una funzione armonica soluzione di un problema di NEUMANN definito dalla condizione al contorno

$$\operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = p(s) \quad \text{su } \partial A.$$

Come si è visto, l'esistenza della funzione  $\varphi^*$  armonica coniugata di  $\varphi$  è assicurata se il dominio  $A$  è monoconnesso.

Se invece il dominio  $A$  è pluriconnesso l'armonica coniugata esiste se e solo se è nulla la circuitazione della funzione  $p$  sui contorni delle cavità interne:

$$\oint_{c_j} p(s) \, ds = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

---

<sup>41</sup> AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1857). Professore di matematica all'École Polytechnique, alla Sorbona ed al Collège de France. È stato uno dei maggiori matematici di ogni tempo.

<sup>42</sup> GEORG FRIEDRICH BERNHARD RIEMANN (1826-1866). Allievo di GAUSS, succedette a DIRICHLET come professore di matematica a Göttingen. Fondamentali i suoi contributi alla geometria differenziale ed alla teoria delle funzioni di variabile complessa.

D’altro canto l’esistenza della soluzione del problema di NEUMANN per la funzione  $\varphi$  richiede che

$$\oint_{\partial A} p(s) \, ds = 0.$$

Tali condizioni implicano che l’integrale circuitale di  $p(s)$  deve annullarsi anche sul contorno esterno:

$$\oint_{c_o} p(s) \, ds = \oint_{\partial A} p(s) \, ds - \sum_{j=1}^n \oint_{c_j} p(s) \, ds = 0.$$

Si può allora concludere che

Un problema di NEUMANN ammette una soluzione  $\varphi$  ed esiste l’armonica coniugata  $\varphi^*$  di  $\varphi$  se e solo se i dati al contorno soddisfano le condizioni

$$\oint_{c_j} p(s) \, ds = 0 \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

Tali condizioni assicurano che sui contorni  $c_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  sono ben definite le funzioni

$$w_j(s) = \int_{s_{oj}}^s p(\bar{s}) \, d\bar{s},$$

in cui  $s_{oj}$  individua un punto del contorno  $j$ -esimo.

Il problema di NEUMANN per la funzione  $\varphi$  si traduce quindi in un problema di DIRICHLET per l’armonica coniugata  $\varphi^*$  e cioè nel problema di determinare una funzione armonica con assegnati valori sul contorno.

Infatti dalla relazione

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial s} = \operatorname{grad} \varphi^* \cdot \mathbf{t} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = p(s),$$

integrandolo e ponendo  $k_j = \varphi^*(s_{oj})$ , si ottiene che sul contorno  $c_j$  si ha

$$\varphi^*(s) = \varphi^*(s_{oj}) + \int_{s_{oj}}^s p(\bar{s}) \, d\bar{s} = \varphi^*(s_{oj}) + w_j(s) = k_j + w_j(s).$$

Poichè l'armonica coniugata  $\varphi^*$  è definita a meno di una costante arbitraria, si può assumere nulla la costante  $k_o$  sul contorno esterno  $c_o$ .

Si denoti quindi con  $w$  la funzione definita sulla frontiera  $\partial A$  di  $A$  dalle relazioni

$$w(s) = w_j(s) \quad \text{su } c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Se  $A$  è un *dominio monoconnesso* il problema di NEUMANN per la  $\varphi$  è dunque equivalente al seguente *problema di DIRICHLET* per la  $\varphi^*$

$$\begin{cases} \Delta \varphi^* = 0 & \text{su } A \\ \varphi^* = w & \text{su } \partial A \end{cases}$$

Se  $A$  è un *dominio pluriconnesso* le costanti  $k_j$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  si determinano imponendo che il campo vettoriale  $\mathbf{v} = \mathbf{R}^T \operatorname{grad} \varphi^*$  ammetta un potenziale  $\varphi$ .

A tal fine la soluzione  $\varphi^*$  del problema di DIRICHLET si pone nella forma

$$\varphi^* = \varphi_o^* + \sum_{j=1}^n k_j \varphi_j^*,$$

dove

- $\varphi_o^*$  è la soluzione del problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta \varphi_o^* = 0 & \text{in } A, \\ \varphi_o^* = w & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

- $\varphi_j^*$ ,  $j = 1, \dots, n$  sono le soluzioni degli  $n$  problemi di DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta \varphi_j^* = 0 & \text{in } A, \\ \varphi_j^* = 0 & \text{su } c_o, \\ \varphi_j^* = \delta_{jk} & \text{su } c_k \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Poichè il gradiente di  $\varphi^*$  e quello di  $\varphi$  sono legati dalla relazione di CAUCHY-RIEMANN,  $\operatorname{grad} \varphi = -\mathbf{R} \operatorname{grad} \varphi^*$ , sui contorni delle cavità interne valgono le condizioni

$$\oint_{c_i} \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint_{c_i} -\mathbf{R} \operatorname{grad} \varphi^* \cdot \mathbf{t} \, ds = -\oint_{c_i} \operatorname{grad} \varphi^* \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad i = 1, \dots, n,$$

e quindi le costanti  $k_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  si ottengono come soluzioni del sistema lineare

$$\sum_{j=1}^n \left( \oint_{c_i} \operatorname{grad} \varphi_j^* \cdot \mathbf{n} \, ds \right) k_j = \oint_{c_i} \operatorname{grad} \varphi_o^* \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad i = 1, \dots, n.$$

Le  $n + 1$  funzioni  $\varphi_j^*$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$  sono univocamente determinate in quanto il problema di DIRICHLET per una funzione armonica ammette un'unica soluzione per ogni assegnata condizione sulla frontiera.

### 3.5. La torsione come problema di Dirichlet

La teoria delle funzioni armoniche coniugate può applicarsi al problema della torsione per trasformare il problema di NEUMANN per l'ingombramento specifico  $\varphi$  in un problema di DIRICHLET per la funzione  $\varphi^*$ , armonica coniugata di  $\varphi$ .

Tale problema risulta di soluzione più agevole del corrispondente problema di NEUMANN.

Si ricordi che la funzione d'ingombramento specifico  $\varphi$  è soluzione del problema di NEUMANN

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0 && \text{su } A \\ \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} && \text{su } \partial A \end{aligned}$$

Risultano soddisfatte le condizioni

$$\oint_{c_j} \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, d\bar{s} = \oint_{c_j} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) \, ds = \oint_{c_j} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{2} r^2 \right) \, ds = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

La funzione  $\varphi^*$  armonica coniugata di  $\varphi$  può quindi essere determinata come soluzione del problema di DIRICHLET

$$\begin{aligned} \Delta \varphi^* &= 0 && \text{su } A, \\ \varphi^*(s) &= w_j(s) + k_j && \text{su } c_j \quad j = 0, 1, \dots, n, \end{aligned}$$

dove

$$k_o = 0, \quad k_j = \varphi^*(s_{oj}) - \frac{1}{2} r(s_{oj})^2,$$

$$w_j(s) = \int_{s_{oj}}^s \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, d\bar{s} + \frac{1}{2} r(s_{oj})^2 = \frac{1}{2} r(s)^2.$$

Se  $A$  è un *dominio pluriconnesso*, i valori delle costanti  $k_j$  per  $j = 1, \dots, n$ , si ottengono risolvendo il sistema lineare discusso alla fine della sezione precedente.

Le tensioni tangenziali possono essere espresse in termini dell'armonica coniugata in quanto esse sono funzioni del gradiente dell'ingobbamento e tale gradiente può essere espresso in termini del gradiente dell'armonica coniugata.

Dalle relazioni

$$\boldsymbol{\tau} = G \theta' (\mathbf{R} \mathbf{r} + \text{grad } \varphi), \quad \text{grad } \varphi = -\mathbf{R} \text{grad } \varphi^*,$$

si deduce infatti che le tensioni tangenziali si esprimono in funzione di  $\varphi^*$  come segue

$$\boldsymbol{\tau} = G \theta' \mathbf{R} (\mathbf{r} - \text{grad } \varphi^*) \iff \begin{cases} \tau_x = G \theta' \left( \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - y \right), \\ \tau_y = G \theta' \left( -\frac{\partial \varphi^*}{\partial x} + x \right). \end{cases}$$

La soluzione del problema della torsione mediante la determinazione della funzione armonica coniugata sarà illustrata, mediante alcuni esempi notevoli, nella sezione 3.8 (p. 444).

### 3.6. La funzione di Prandtl

Il problema della torsione può alternativamente essere formulato seguendo un'idea di PRANDTL<sup>43</sup> [6]. A tal fine si introduca la funzione

$$\psi(\mathbf{r}) = \varphi^*(\mathbf{r}) - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$$

*Funzione di PRANDTL*

e si osservi che

$$\text{grad } \psi = \text{grad } \varphi^* - \mathbf{r} \iff \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} - x, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} - y. \end{cases}$$

---

<sup>43</sup> LUDWIG PRANDTL (1875-1953). Fisico tedesco, considerato il padre dell'aerodinamica. Ha insegnato al Università di Göttingen dal 1904 al 1953. Fra i suoi collaboratori ed allievi si annoverano molti noti scienziati quali ACKERET, BETZ, BLASIUS, BLENK, BUSEMANN, GÖRTLER, VON KÁRMÁN, LUDWIEG, OSWATITSCH, REICHARDT, SCHLICHTING e TOLLMIEN. Le sue idee e pubblicazioni hanno influenzato l'aerodinamica moderna e la meccanica dei fluidi. Nei settori di ricerca della meteorologia, dell'aerodinamica, dell'aeroelasticità e della plasticità le sue idee di base sono ancora di attualità.

Sostituendo tale relazione nella espressione di  $\tau$  si ottiene

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = -G \theta' \mathbf{R} \operatorname{grad} \psi} \iff \begin{cases} \tau_x = G \theta' \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tau_y = -G \theta' \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Ricordando che  $\varphi^*$  è armonica e che

$$\operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = \operatorname{grad} \mathbf{r} = \mathbf{I},$$

dove  $\mathbf{I}$  denota l'identità, si ha infine che

$$\Delta \psi = \Delta \varphi^* - \operatorname{div} \operatorname{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \right) = -2,$$

in quanto  $\operatorname{div} \mathbf{I} = 2$ .

Pertanto il problema di DIRICHLET nell'incognita  $\varphi^*$  si traduce nel seguente problema per la funzione  $\psi$

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= -2 \\ \psi &= 0 \quad \text{su } c_o \\ \psi &= k_i \quad \text{su } c_i \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

*Problema di POISSON  
per la  
funzione di PRANDTL*

Le costanti di integrazione  $k_i$  si valutano con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso del problema di DIRICHLET.

La soluzione del problema di POISSON<sup>44</sup> si pone nella forma

$$\boxed{\psi = \psi_o + \sum_{j=1}^n k_j \psi_j,}$$

dove

---

<sup>44</sup> SIMÉON-DENIS POISSON (1781-1840). Nacque a Pithiviers in Francia. Inizialmente costretto dalla famiglia a studiare medicina, POISSON cominciò a studiare la matematica solo nel 1798 all'Ecole Polytechnique. I suoi maestri LAPLACE e LAGRANGE diventeranno anche amici per la vita. Insegnò all'Ecole Polytechnique dal 1802 fino al 1808. I suoi lavori più importanti furono dedicati agli integrali definiti ed allo sviluppo delle serie di FOURIER. POISSON ha pubblicato circa 400 lavori di matematica con applicazioni all'elettricità, al magnetismo ed all'astronomia.

- la  $\psi_o$  è soluzione del problema di POISSON con condizioni al contorno omogenee

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta \psi &= -2 \\ \psi &= 0 \quad \text{su } \partial A\end{aligned}}$$

- le  $\psi_j$  sono soluzioni degli  $n$  problemi di DIRICHLET

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta \psi_j &= 0 \\ \psi_j &= \delta_{jk} \quad \text{su } c_k \quad k = 1, \dots, n\end{aligned}}$$

Le condizioni di integrabilità per il campo

$$\mathbf{R} \operatorname{grad} \varphi^* = \mathbf{R} (\operatorname{grad} \psi + \mathbf{r}),$$

sono

$$\oint_{c_i} \mathbf{R} (\operatorname{grad} \psi + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{t} \, ds = - \oint_{c_i} \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{n} \, ds - \oint_{c_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si osservi quindi che, denotando con  $A_i$  l'area dell'  $i$ -esima cavità, vale la relazione

$$\oint_{c_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{A_i} -\operatorname{div} \mathbf{r} \, da = -2 A_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

dove il segno meno è dovuto al fatto che, avendo assunto la normale  $\mathbf{n}$  uscente dalla sezione  $A_i$ , sull'  $i$ -esimo contorno interno, essa sarà entrante nel dominio  $A_i$  della cavità.

Il sistema lineare che fornisce le costanti  $k_j$  è quindi il seguente

$$\boxed{\sum_{j=1}^n \left( \oint_{c_i} \operatorname{grad} \psi_j \cdot \mathbf{n} \, ds \right) k_j = 2 A_i - \oint_{c_i} \operatorname{grad} \psi_o \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad i = 1, \dots, n.}$$

Le curve di livello della funzione di PRANDTL sono definite implicitamente da

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{cost.}$$

e su ognuna di tali curve si ha:

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = \text{grad } \psi \cdot \mathbf{t} = 0,$$

e quindi anche

$$(\mathbf{R} \text{ grad } \psi) \cdot (\mathbf{R} \mathbf{t}) = \frac{1}{G \theta'} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \iff \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Pertanto il vettore  $\boldsymbol{\tau}$  è tangente in ogni punto alla curva di livello della funzione  $\psi$  passante per quel punto, ovvero

Le curve di livello della funzione di PRANDTL sono linee di flusso delle  $\boldsymbol{\tau}$ .

Il modulo della  $\boldsymbol{\tau}$  può esprimersi in funzione di  $\psi$  osservando che, essendo  $\mathbf{R}$  un'isometria, risulta

$$\tau = G \theta' \| \mathbf{R} \text{ grad } \psi \| = G \theta' \| \text{ grad } \psi \|.$$

Esprimendo il momento torcente in funzione di  $\psi$  si ha

$$\begin{aligned} M_t &= \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{k} \, da = \int_A \mathbf{k} \times \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\tau} \, da = \\ &= -G \theta' \int_A (\mathbf{R} \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{R} \text{ grad } \psi) \, da = -G \theta' \int_A \text{grad } \psi \cdot \mathbf{r} \, da = \\ &= -G \theta' \left[ \int_A \text{div}(\psi \mathbf{r}) \, da - \int_A \psi \text{div } \mathbf{r} \, da \right] \end{aligned}$$

in cui si è fatto ricorso alla relazione  $\text{div}(\psi \mathbf{r}) = \psi \text{div } \mathbf{r} + \text{grad } \psi \cdot \mathbf{r}$ .

Notando che  $\text{div } \mathbf{r} = 2$  e che per il teorema della divergenza risulta:

$$\begin{aligned} \int_A \text{div}(\psi \mathbf{r}) \, da &= \int_{\partial A} \psi \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j=1}^n k_j \int_{c_j} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds = \\ &= - \sum_{j=1}^n k_j \int_{A_j} \text{div } \mathbf{r} \, da = -2 \sum_{j=1}^n k_j A_j, \end{aligned}$$

si ottiene l'espressione del momento torcente

$$M_t = 2G\theta' \left( \int_A \psi \, da + \sum_{j=1}^n k_j A_j, \right)$$

e quindi quella della rigidezza torsionale

$$K_t = \frac{M_t}{\theta'} = 2G \left( \int_A \psi \, da + \sum_{j=1}^n k_j A_j \cdot \right)$$

La rigidezza torsionale della sezione è proporzionale alla somma del volume del solido di base  $A$  racchiuso dalla funzione  $\psi$  e di quello dei cilindri di base  $A_j$  ed altezza  $k_j$  in corrispondenza delle cavità.

Le proprietà della funzione  $\psi$  consentono di mostrare che il modulo tensione tangenziale  $\tau$  attinge il massimo in punti del contorno della sezione [9]. La dimostrazione fa ricorso a metodi di teoria del potenziale ed in particolare alle proprietà delle funzioni subarmoniche [8].

### ■ ANALOGIA DELLA MEMBRANA

Si consideri il problema dell'equilibrio di una membrana piana sottile

- fortemente tesa con una pretensione uniforme  $N_o$ ,
- fissata al contorno della sezione retta monoconnessa  $A$ ,
- soggetta ad una lieve ed uniforme differenza di pressione tra le due facce.

Sia  $w(\mathbf{r})$  lo spostamento trasversale della membrana nel punto  $\mathbf{r} \in A$  e  $p$  l'uniforme differenza di pressione.

Come mostrato nel Tomo I sezione IV.10 (p. 456), la condizione differenziale di equilibrio in direzione  $z$  è allora ben approssimata da una semplice espressione che, insieme al legame vincolare al contorno, può scriversi

$$\begin{aligned} -\Delta w &= p/N_o && \text{su } A, \\ w &= 0 && \text{su } \partial A. \end{aligned}$$

Si noti che  $[p] = FL^{-2}$ ,  $[N_o] = FL^{-1}$ ,  $[\Delta w] = L^{-1}$ .

Il problema è perfettamente analogo al problema di valori al contorno posto nella teoria della torsione per la funzione di PRANDTL  $\psi$ .

Tale osservazione costituisce l'*analogia di PRANDTL o della membrana*. ■

### 3.7. Analogia idrodinamica

Si consideri un recipiente cilindrico che ha una sezione retta costituita da un dominio monoconnesso  $A$  e contenente un liquido incomprimibile e non viscoso in moto stazionario.

Il moto del fluido, come mostrato nel capitolo I, è retto dalle condizioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{incomprimibilità,} \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \text{cost.} & \text{vorticità costante,} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{flusso nullo attraverso le pareti.} \end{cases}$$

Come sarà mostrato nella sezione 4 (p. 451), tali condizioni individuano univocamente un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  di classe  $C^\infty(\overline{A})$  nel dominio monoconnesso  $A$ .

Esse sono perfettamente analoghe a quelle che governano il campo delle tensioni tangenziali da torsione nella trave di SAINT VENANT avente la stessa sezione retta monoconnessa  $A$ . Ne segue che i campi  $\tau$  e  $\mathbf{v}$  sono proporzionali.

Tale analogia è molto utile per avere un’idea qualitativa dell’andamento delle linee di flusso delle  $\tau$  da torsione nelle sezioni monoconnesse.

Le linee di flusso del liquido possono essere facilmente visualizzate mediante un colorante che ne evidenzi l’andamento.

Dall’andamento di tali linee può desumersi anche una stima del valore delle tensioni tangenziali da torsione. Dove le linee di flusso si addensano il modulo delle  $\tau$  aumenta e viceversa.

All’analogia idrodinamica si fa riferimento per ottenere indicazioni sull’andamento delle linee di flusso delle tensioni tangenziali da torsione. ■

### 3.8. Soluzioni notevoli

Si forniscono nel seguito alcuni esempi di soluzione esatta del problema della torsione.

Il metodo che si espone è dovuto a SAINT VENANT [1] ed è basato sulla proprietà delle parti reale e immaginaria delle funzioni olomorfe di essere funzioni armoniche coniugate nel senso di CAUCHY-RIEMANN.

L’idea è quella di considerare funzioni olomorfe del tipo  $(x + iy)^n$ . Ciò consente di costruire una funzione armonica  $\varphi^*$  che soddisfi la condizione al contorno  $\varphi^* = r^2/2$  per alcune sezioni di interesse applicativo.

La funzione armonica coniugata  $\varphi$  descrive allora l’ingombramento della sezione retta.

### 3.8.1. Torsione del cilindro ellittico

La parte reale della funzione olomorfa:

$$(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

è armonica. Tale è dunque anche la funzione:

$$\varphi^*(x, y) = c^2(x^2 - y^2) + k^2$$

Imponendo la condizione al contorno  $\varphi^* = r^2/2$  si ha:

$$c^2(x^2 - y^2) + k^2 = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

da cui:

$$\left(\frac{1}{2} - c^2\right)x^2 + \left(\frac{1}{2} + c^2\right)y^2 = k^2$$

che per  $c^2 < 1/2$  è l'equazione dell'ellisse:

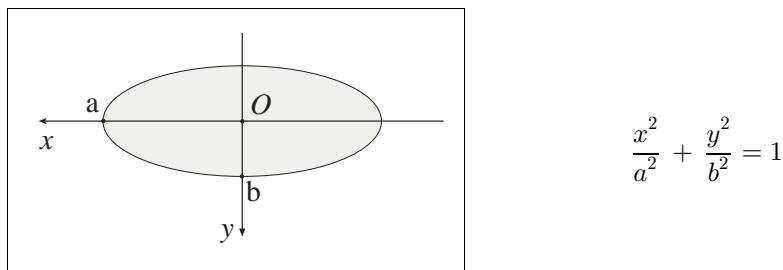


Fig. 3.7

dove:

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} - c^2} \quad b = \sqrt{\frac{1}{2} + c^2}$$

e dunque:

$$c = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad k^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

La funzione  $\varphi^*$  assume dunque la seguente espressione

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{2} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} (x^2 - y^2) + \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

che sostituita nell'espressione di  $\tau$  fornisce in componenti

$$\begin{cases} \tau_x = -2G\theta' \frac{a^2}{a^2 + b^2} y, \\ \tau_y = 2G\theta' \frac{b^2}{a^2 + b^2} x. \end{cases}$$

Il momento torcente vale dunque

$$M_t = \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA = 2G\theta' \frac{a^2 J_x + b^2 J_y}{a^2 + b^2}.$$

Osservando poi che i momenti principali d'inerzia dell'ellisse valgono

$$J_x = \frac{\pi a b^3}{4} \quad J_y = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

il momento torcente e la rigidezza torsionale assumono l'espressione

$$M_t = \pi G \theta' \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}, \quad k_t = \pi G \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}.$$

Il raggio  $r' = (x', y')$  avente direzione di simmetria coniugata a quella del raggio  $r = (x, y)$  è individuato dalle relazioni

$$x' = -\frac{a}{b}y, \quad y' = \frac{b}{a}x,$$

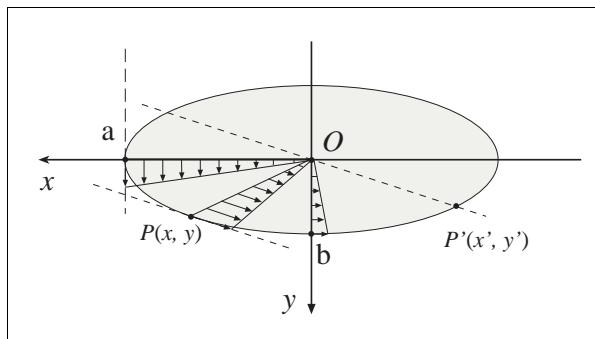
e pertanto le componenti della tensione tangenziale possono scriversi

$$\begin{cases} \tau_x = 2G\theta' \frac{a b}{a^2 + b^2} x', \\ \tau_y = 2G\theta' \frac{a b}{a^2 + b^2} y'. \end{cases}$$

Si può dunque concludere che il vettore  $\tau$  ha lungo ogni diametro la direzione del diametro coniugato.

Le linee di flusso del campo vettoriale  $\tau$  sono ellissi omotetiche al contorno. Il modulo del vettore  $\tau$  in un punto P di vettore posizione  $\mathbf{r}$  è proporzionale al modulo del raggio coniugato  $\mathbf{r}'$  definito dalle coordinate  $x'$  e  $y'$ :

$$\tau = 2G\theta' \frac{a b}{a^2 + b^2} r', \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}.$$



*Andamento delle tensioni tangenziali*

Fig. 3.8

Il massimo valore della  $\tau$  si ha dunque in corrispondenza dell'estremità del diametro minore dell'ellisse e vale

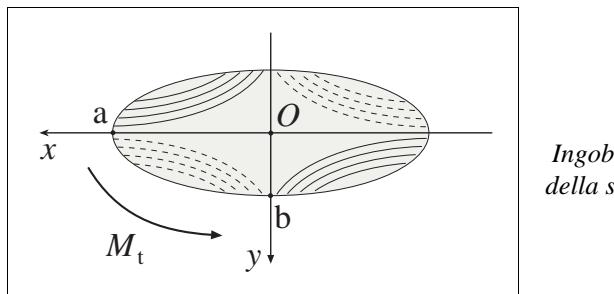
$$\tau_{max} = 2G\theta' \frac{a^2 b}{a^2 + b^2} = \frac{2M_t}{\pi a b^2} = \frac{2M_t}{A b},$$

dove  $A = \pi a b$  è l'area della sezione ellittica.

Per lo studio della deformazione si osserva che la funzione  $\varphi$ , armonica coniugata di  $\varphi^*$ , a meno di una costante inessenziale vale

$$\varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} xy.$$

L'ingombramento  $u_z = \theta' \varphi(x, y)$  è positivo nei quadranti dispari e negativo in quelli pari. Le linee di livello della funzione  $\varphi$  sono iperboloidi equilatere.



*Ingombramento della sezione*

Fig. 3.9

### 3.8.2. Torsione del prisma triangolare equilatero

Si consideri la funzione olomorfa  $(x + iy)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$ . La sua parte reale fornisce la funzione armonica:

$$\varphi^*(x, y) = c(x^3 - 3xy^2) + k.$$

Imponendo la condizione al contorno  $\varphi^* = r^2/2$  si ha:

$$c(x^3 - 3xy^2) + k = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Assumendo  $c = -1/6a$  e  $k = 2a^2/3$  la condizione al contorno diventa:

$$(x - a)(x - \sqrt{3}y + 2a)(x + \sqrt{3}y + 2a) = 0.$$

Essa risulta soddisfatta nei punti  $(x, y)$  che costituiscono il contorno del triangolo equilatero di altezza  $3a$  rappresentato in fig.3.10 e le tensioni tangenziali sono date da:

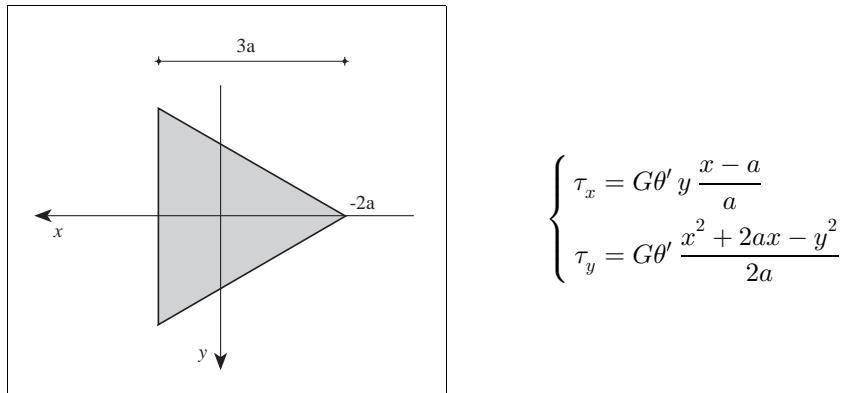


Fig. 3.10

Lungo la mediana distesa sull'asse x la  $\tau_x$  è nulla e si ha (fig.3.11):

$$\tau_y \Big|_{y=0} = G\theta' x \frac{x + 2a}{2a}.$$

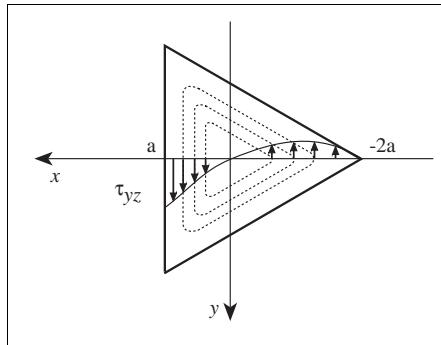


Fig. 3.11

*Diagramma di  $\tau$  lungo la mediana  $y = 0$*

Il momento torcente vale:

$$M_t = \frac{3}{5}G\theta'J_p,$$

ove  $J_p = 3\sqrt{3}a^4$  è il momento d'inerzia polare del triangolo.

Le tensioni tangenziali si annullano nei vertici e nel baricentro e assumono il valore massimo nei punti medi dei lati:

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}aG\theta' = \frac{5}{2}a\frac{M_t}{J_p}$$

le linee di flusso del campo vettoriale  $\tau$  sono definite implicitamente dalle relazioni (fig. 3.12)

$$\varphi^*(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = cost,$$

e le linee di livello della funzione di ingobbamento specifico dalle condizioni (fig.3.12)

$$\varphi(x, y) = \frac{3x^2y - y^3}{6a} = cost.$$

Si osservi che, a parità di area, l'albero circolare ha una rigidezza torsionale  $K_c$  maggiore di quella  $K_e$  del cilindro ellittico e di quella  $K_t$  del prisma triangolare. Infatti

$$K_e = \frac{2ab}{a^2 + b^2}K_c, \quad K_t = \frac{2\pi\sqrt{3}}{15}K_c.$$

Si può mostrare che, per assegnati valori del momento torcente e dell'area della sezione retta, l'albero circolare presenta il più piccolo valore della  $\tau_{max}$ .

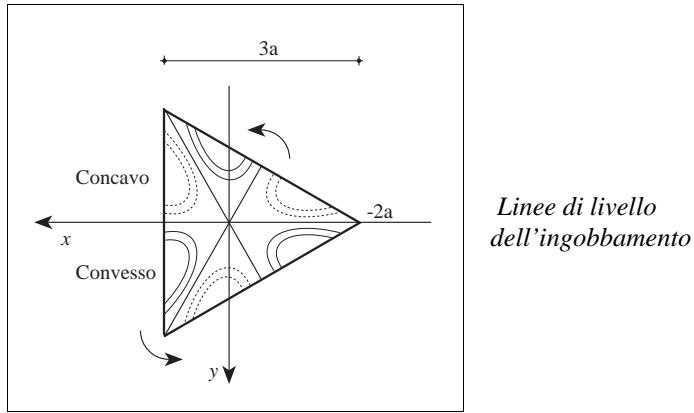


Fig. 3.12

### 3.8.3. Effetto d'intaglio

L'incremento del valore delle tensioni tangenziali per effetto di intagli o scanalature negli alberi a sezione circolare può essere mostrato con un interessante esempio dovuto a C. WEBER [7]. Si consideri la sezione di fig.3.13 e le due funzioni armoniche  $x$  e  $x/r$ . Da esse può costruirsi la funzione armonica

$$\varphi^*(x, y) = a \left( x - \frac{b^2}{r^2} x \right) + \frac{b^2}{2}.$$

La condizione al contorno  $\text{grad } \varphi^* = r^2/2$  impone che

$$a \left( x - \frac{b^2}{r^2} x \right) + \frac{b^2}{2} = \frac{1}{2} r^2,$$

e dunque, in coordinate polari

$$a \left( r \cos \theta - \frac{b^2 \cos \theta}{r} \right) + \frac{b^2}{2} = \frac{r^2}{2},$$

ovvero

$$(r^2 - b^2) \left( 1 - \frac{2a \cos \theta}{r} \right) = 0.$$

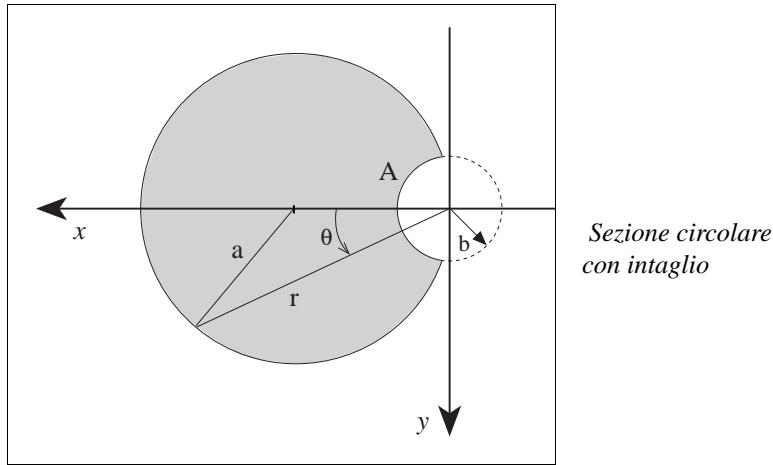


Fig. 3.13

La condizione al contorno definisce quindi una figura piana costruita mediante due circonferenze

$$\begin{cases} r = b \\ r = 2a \cos \theta, \end{cases}$$

come mostrato nella figura 3.14.

Le tensioni tangenziali valgono

$$\begin{cases} \tau_x = G\theta' (2a \cos \theta - b) \sin \theta, \\ \tau_y = -G\theta' (2a \cos \theta - b) \cos \theta, \end{cases}$$

e dunque

$$\tau = G\theta' (2a \cos \theta - b).$$

Il valore massimo della tensione tangenziale si ha nel punto A dove, per valori sufficientemente piccoli del raggio d'intaglio risulta con buona approssimazione

$$\boxed{\tau_{max} \approx 2G\theta' a},$$

che è il doppio di quello che si avrebbe nell'albero senza intaglio.

Una analisi generale dei metodi di soluzione del problema della torsione ed esempi di applicazione possono essere trovati nel libro di SOKOLNIKOFF [9].

#### 4. COMPLEMENTI

Si consideri un dominio piano  $A$  con frontiera  $\partial A$  generalmente regolare costituita da un contorno esterno  $c_o$  e da  $n$  contorni interni  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Si premettono le seguenti definizioni

- Il rotore di un campo scalare  $\xi$  di classe  $C^1(A)$  è il campo vettoriale

$$\operatorname{rot} \xi := \mathbf{R} \operatorname{grad} \xi,$$

ed in termini di componenti

$$[\operatorname{rot} \xi] = \begin{vmatrix} -\frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{vmatrix}.$$

- Il rotore di un campo vettoriale  $\mathbf{u}$  di classe  $C^1(A)$  è il campo scalare

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} := -\operatorname{div}(\mathbf{R}\mathbf{u}),$$

ed in termini di componenti

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}.$$

Un argomento analogo a quello cui si è fatto ricorso nel trattare, alla sezione 3.4 (p. 432), la teoria delle funzioni armoniche coniugate, consente di dimostrare il seguente importante risultato della teoria dei campi vettoriali nel piano.

**Proposizione 4.1. Campi piani solenoidali.** *Un campo vettoriale  $\mathbf{v}$  di classe  $C^1(A)$  nel dominio piano  $A$  è il rotore di un potenziale  $\psi$  se e solo se è solenoidale ed ha flusso nullo attraverso i bordi delle cavità interne.*

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \oint_{c_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \text{su } c_i \quad i = 1, \dots, n \iff \exists \psi : \mathbf{v} = \operatorname{rot} \psi.$$

*Il potenziale  $\psi$  risulta armonico se e solo se il campo  $\mathbf{v}$  è anche irrotazionale.*

**Dim.** Sia  $\mathbf{v}$  un campo solenoidale con flusso nullo attraverso i bordi delle cavità interne. Il campo  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R} \mathbf{v}$  risulta allora irrotazionale in quanto  $\operatorname{rot} \mathbf{v}^* = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ . Inoltre la circuitazione di  $\mathbf{v}^*$  lungo i bordi delle cavità interne è nulla poichè, posto  $\mathbf{t} = \mathbf{R} \mathbf{n}$  si ha

$$\oint_{c_i} \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint_{c_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 \quad \text{su } c_i \quad i = 1, \dots, n.$$

Ne consegue che è nulla la circuitazione del campo  $\mathbf{v}^*$  lungo ogni curva chiusa in  $A$ . Pertanto  $\mathbf{v}^*$  ammette un potenziale  $-\psi$  e risulta

$$\mathbf{v} = -\mathbf{R} \mathbf{v}^* = \mathbf{R} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \psi.$$

Viceversa sia  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \psi$  per cui  $\mathbf{v}^* = -\operatorname{grad} \psi$ . Dalla relazione

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \mathbf{v}^* = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0,$$

si deduce che il campo  $\mathbf{v}$  è solenoidale. Risulta inoltre

$$\oint_c \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_c \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint_c \frac{\partial \psi}{\partial s} \, ds = 0 \quad \text{per ogni curva chiusa } c \subset A.$$

Si osservi infine che

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = \operatorname{rot} \mathbf{R} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi,$$

e dunque il potenziale  $\psi$  è armonico se e solo se il campo  $\mathbf{v}$  è irrotazionale.  $\square$

**Osservazione 4.1.** Si noti che nella proposizione 4.1 la condizione posta sul campo  $\mathbf{v}$  equivale a richiedere che sia nullo il flusso attraverso ogni curva chiusa in  $A$ . Se il dominio  $A$  è monoconnesso tale condizione equivale a quella di solenoidalità. ■

Si ponga ora la questione di determinare un campo vettoriale  $\mathbf{v} \in C^1(A)$  soluzione del problema

$$\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = \alpha & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \beta & \text{in } A, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \gamma & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

con  $\alpha$  e  $\beta$  campi scalari di classe  $C^1(\bar{A})$  e  $\gamma$  campo scalare di classe  $C^0(\partial A)$ .

Posto  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R}\mathbf{v}$  e  $\mathbf{t} = \mathbf{R}\mathbf{n}$  risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v}^* &= -\operatorname{rot} \mathbf{v}, & \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}^* &= +\operatorname{div} \mathbf{v}, \end{aligned}$$

Il problema  $\mathbb{P}$  equivale quindi a determinare un campo vettoriale  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R}\mathbf{v}$  soluzione di

$$\mathbb{P}^*) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}^* = -\beta & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}^* = \alpha & \text{in } A, \\ \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} = \gamma & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

La discussione dei problemi equivalenti  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}^*$  può condursi facendo riferimento a classici risultati concernenti i problemi al contorno di DIRICHLET e di NEUMANN per l'operatore di LAPLACE.

Il problema  $\mathbb{P}$  ammette soluzione se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\int_A \alpha \, da + \int_{\partial A} \gamma \, ds = 0.$$

Se il dominio  $A$  è monoconnesso la soluzione è unica.

### ■ Unicità della soluzione

L'unicità della soluzione dei problemi  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}^*$  segue dal fatto che i problemi omogenei ad essi associati

$$\mathbb{P}_o) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 & \text{in } A, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases} \quad \mathbb{P}_o^*) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0 & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}^* = 0 & \text{in } A, \\ \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

ammettono solo la soluzione banale.

Per mostrarlo è sufficiente osservare che i campi  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{v}^* = \mathbf{R}\mathbf{v}$  sono entrambi irrotazionali e solenoidali. Inoltre

- il campo  $\mathbf{v}$  ha flusso nullo attraverso ogni curva chiusa in  $A$  e quindi è il rotore di un potenziale armonico  $\psi$ ,
- il campo  $\mathbf{v}^*$  ha circuitazione nulla lungo ogni curva chiusa in  $A$  e quindi è il gradiente di un potenziale armonico  $\varphi^*$ .

Ne segue dunque che

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \psi = \mathbf{R} \operatorname{grad} \psi, \\ \mathbf{v}^* = \operatorname{grad} \varphi^* = -\mathbf{R} \operatorname{rot} \varphi^*, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{grad} \psi = -\operatorname{grad} \varphi^*.$$

Poichè i potenziali  $\varphi^*$  e  $\psi$  sono definiti a meno di una costante additiva, è lecito porre  $\psi = -\varphi^*$ .

I problemi  $\mathbb{P}_o$  e  $\mathbb{P}_o^*$ , tradotti in termini del potenziale  $\varphi^*$  assumono la forma di un problema di DIRICHLET

$$\mathbb{P}_o) \quad \begin{cases} \Delta \varphi^* = 0 & \text{in } A, \\ \operatorname{grad} \varphi^* \cdot \mathbf{t} = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

Il potenziale  $\varphi^*$  è quindi costante sul contorno  $c_o = \partial A$  e pertanto il problema di DIRICHLET può scriversi

$$\mathbb{P}_o) \quad \begin{cases} \Delta \varphi^* = 0 & \text{in } A, \\ \varphi^* = \text{cost} & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

Il problema di DIRICHLET ammette un'unica soluzione  $\varphi^* = \text{cost}$  in  $A$ . Ad essa corrisponde un campo  $\mathbf{v} = -\mathbf{R} \operatorname{grad} \varphi^*$  identicamente nullo in  $A$ .

### ■ Esistenza della soluzione

Il teorema della divergenza mostra che, affinchè esista una soluzione del problema  $\mathbb{P}$ , è necessario che il campo scalare  $\alpha$  soddisfi la condizione

$$\int_A \alpha \, da = \int_A \operatorname{div} \mathbf{v} \, da = \oint_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

In [24] è dimostrato un classico risultato di teoria del potenziale dovuto a POISSON (cfr. KELLOGG [8]) il quale assicura che l'equazione vettoriale nel piano

$$\Delta \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{in } A,$$

ammette soluzione per ogni campo vettoriale  $\mathbf{v}$ .

Una soluzione particolare è costituita dal *potenziale logaritmico vettoriale*

$$\mathbf{u}_\infty(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_A \mathbf{v}(\mathbf{y}) \ln \left[ \frac{1}{r} \right] \, d\mathbf{y},$$

dove  $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  è la norma del raggio vettore che unisce i punti  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Tale soluzione risulta inoltre univocamente definita se si impone che essa soddisfi le *condizioni normali all'infinito*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \|\mathbf{u}_\infty\| = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r^2 \|\operatorname{grad} \mathbf{u}_\infty\| = 0.$$

La soluzione generale dell'equazione vettoriale di POISSON è data dalla somma di una soluzione particolare e di un arbitrario campo vettoriale armonico in  $A$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{u}_o, \quad \Delta \mathbf{u}_o = \mathbf{0} \quad \text{in } A,$$

Dall'identità vettoriale

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in C^2(A),$$

ricordando che  $\mathbf{v} = \Delta \mathbf{u} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{u}$  e ponendo

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \psi &= -\operatorname{rot} \mathbf{u}, \end{aligned}$$

si ottiene l'espressione della *formula di HELMHOLTZ* per campi vettoriali piani

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi.$$

Valutando quindi la divergenza ed il rotore di  $\mathbf{v}$  ed osservando che sussistono le identità

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \psi = 0 \quad \forall \psi \in C^2(A), \quad \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C^2(A),$$

si deduce che

$$\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \varphi, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi. \end{cases}$$

Dalla relazione

$$\operatorname{rot}(\mathbf{R} \mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in C^1(A),$$

si deduce quindi che

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \psi = \operatorname{rot} [\mathbf{R} \operatorname{grad} \psi] = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \Delta \psi \quad \forall \psi \in C^2(A),$$

e pertanto in definitiva risulta

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \Delta \psi &= \operatorname{rot} \mathbf{v}. \end{aligned}$$

La relazione

$$\operatorname{rot} \psi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{R} \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{n} = \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t},$$

mostra poi che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} + \operatorname{rot} \psi \cdot \mathbf{n} = \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} + \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t}.$$

Il problema  $\mathbb{P}$  è dunque equivalente a

$$\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \Delta \varphi = \alpha & \text{in } A, \\ \Delta \psi = \beta & \text{in } A, \\ \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} + \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t} = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

Si ponga  $\varphi$  pari ad una soluzione particolare dell'equazione di POISSON

$$\Delta \varphi = \alpha.$$

Una tale soluzione particolare è fornita dal *potenziale logaritmico*

$$\varphi_\infty(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_A \alpha(\mathbf{y}) \ln \left[ \frac{1}{r} \right] \, d\mathbf{y}.$$

Il problema  $\mathbb{Q}$  si riconduce quindi ad un problema di POISSON-DIRICHLET

$$\mathbb{Q}) \quad \begin{cases} \Delta \psi = \beta & \text{in } A, \\ \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t} = -\operatorname{grad} \varphi_\infty \cdot \mathbf{n} & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

Poichè per ipotesi la frontiera del dominio  $A$  è costituita dal solo contorno esterno  $c_o = \partial A$ , il teorema della divergenza mostra che il valore al contorno del campo  $\psi$  risulta ben definito se e solo se

$$\oint_{c_o} \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t} \, ds = \oint_{c_o} \operatorname{grad} \varphi_\infty \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_A \Delta \varphi_\infty \, da = \int_A \alpha \, da = 0.$$

Tale condizione è quindi necessaria e sufficiente affinchè la soluzione  $\psi$  del problema  $\mathbb{Q}$  di POISSON-DIRICHLET esista e sia unica a meno di una costante additiva (vedi sezione 4.1).

Essa dipende dalla scelta della soluzione particolare  $\varphi_\infty$  dell'equazione di POISSON  $\Delta \varphi = \alpha$ .

Per ogni scelta di  $\varphi_\infty$  il campo vettoriale

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \psi_\infty,$$

soddisfa le equazioni

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = \Delta \varphi = \alpha & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \Delta \psi = \beta & \text{in } A, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{grad} \varphi_\infty \cdot \mathbf{n} + \operatorname{rot} \psi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}}$$

ed è quindi soluzione del problema  $\mathbb{P}$ . Poichè si è mostrato che la soluzione del problema  $\mathbb{P}$  è unica, essa non dipende dalla scelta della soluzione particolare  $\varphi_\infty$  dell'equazione di POISSON.

Si può allora concludere.

**Proposizione 4.2. Condizione di esistenza ed unicità.** *Se il dominio piano  $A$  è monoconnesso i problemi, tra loro equivalenti,*

$$\boxed{\mathbb{P}) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v} = \alpha & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \beta & \text{in } A, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases} \quad \mathbb{P}^*) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}^* = -\beta & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}^* = \alpha & \text{in } A, \\ \mathbf{v}^* \cdot \mathbf{t} = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}}$$

ammettono un'unica soluzione se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\int_A \alpha \, da = 0,$$

che esprime per i problemi  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}^*$ , rispettivamente l'annullarsi del valor medio della divergenza e l'annullarsi del valor medio del rotore.  $\square$

Una più semplice ed interessante discussione dei problemi  $\mathbb{P}$  e  $\mathbb{P}^*$  è la seguente.

La soluzione del problema  $\mathbb{P}$  vede decomposta nella somma delle soluzioni di due problemi che generalizzano le proprietà caratteristiche delle tensioni tangenziali da taglio e da torsione.

Tali problemi sono pertanto indicati rispettivamente con le sigle **TAG** e **TOR** e sono definiti da

$$\begin{aligned} \text{TAG}) \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{v} = \alpha & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 & \text{in } A, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \gamma & \text{su } \partial A. \end{array} \right. \\ \text{TOR}) \quad & \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 & \text{in } A, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v} = \beta & \text{in } A, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A. \end{array} \right. \end{aligned}$$

■ Problema **TAG**.

Il campo  $\mathbf{v}$  soluzione del problema **TAG** è il gradiente di un potenziale  $\varphi$  e cioè si ha  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$ . In termini del potenziale  $\varphi$  il problema si traduce in un problema di POISSON-NEUMANN

$$\text{PN}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \varphi = \alpha & \text{in } A, \\ \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = \gamma & \text{su } \partial A, \end{array} \right.$$

che ammette una soluzione  $\varphi$  unica a meno di una arbitraria costante additiva se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\int_A \alpha \, da + \int_{\partial A} \gamma \, ds = 0.$$

Sotto tale condizione la soluzione  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi$  del problema **TAG** è quindi unica.

■ Problema **TOR**.

Il campo  $\mathbf{v}$  ha divergenza nulla e flusso nullo attraverso un qualsiasi tratto del contorno  $\partial A$  quindi anche attraverso i bordi delle cavità interne. In virtù del teorema 4.1 (p. 453) il campo  $\mathbf{v}$  è il rotore di un potenziale  $\psi$ , si ha cioè che  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \psi$ . In termini del potenziale  $\varphi$  il problema si traduce in un problema di POISSON-DIRICHLET

$$\text{PD}) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta \psi = \beta & \text{in } A, \\ \operatorname{grad} \psi \cdot \mathbf{t} = 0 & \text{su } \partial A, \end{array} \right.$$

la cui soluzione dipende dai valori costanti della  $\psi$  sui contorni che formano la frontiera di  $\partial A$ . Potendo assumere nulla la costante sul contorno esterno, la soluzione  $\mathbf{v} = \operatorname{rot} \psi$  del problema **TOR** dipende dai valori costanti della  $\psi$  sui contorni delle cavità interne.

Se il dominio è monoconnesso la soluzione è unica.

#### 4.1. Analogia col problema dell'equilibrio elastico

Un'analogia formale con i problemi di elastostatica consente di dedurre le condizioni di esistenza e unicità delle soluzioni dei due classici problemi al contorno per l'operatore di LAPLACE noti come *problema POISSON-NEUMANN* e *problema di POISSON-DIRICHLET*.

L'analogia formale si traduce in una efficace informazione sull'esistenza e sull'unicità della soluzione.

Infatti la teoria richiede che l'operatore differenziale che governa il problema goda delle seguenti proprietà.

- l'immagine sia chiusa,
- il nucleo sia di dimensione finita.

Sia allora  $(H^1(\Omega))^3$  lo spazio di SOBOLEV dei campi vettoriali di quadrato integrabile sul dominio spaziale di definizione insieme alle derivate prime distribuzionali.

- Nei modelli strutturali continui bidimensionali e tridimensionali le proprietà fondamentali dell'operatore cinematico  $\text{sym grad}$  di avere immagine chiusa in  $(H^1(\Omega))^6$  e nucleo di dimensione finita per ogni sottospazio chiuso in  $(H^1(\Omega))^3$  si deducono dalla celebrata *seconda diseguaglianza di KORN* (vedi Tomo I, sezione II.6.3 (p. 210))

$$\boxed{\int_A \left( \| \text{sym grad } \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{u} \|^2 \right) \, da \geq \int_A \left( \| \text{grad } \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{u} \|^2 \right) \, da,}$$

- Per i problemi di POISSON-NEUMANN e di POISSON-DIRICHLET le analoghe proprietà per l'operatore  $\text{grad}$  sono conseguenza della classica *diseguaglianza di POINCARÉ* in  $H^1(A)$

$$\boxed{\int_A \| \text{grad } \mathbf{u} \|^2 \, da + \left( \int_A \mathbf{u} \, ds \right)^2 \geq \int_A \left( \| \text{grad } \mathbf{u} \|^2 + \| \mathbf{u} \|^2 \right) \, da.}$$

Più precisamente tali diseguaglianze consentono rispettivamente di dimostrare che gli operatori

- $\text{sym grad} \in L\{H^1(\Omega)^d, \mathcal{L}^2(\Omega)^s\}$ ,  
con  $s = (d^2 + d)/2$  dimensione dello spazio dei tensori simmetrici su  $\Re^d$  e
- $\text{grad} \in L\{H^1(\Omega), \mathcal{L}^2(\Omega)^d\}$   
hanno immagine chiusa e nucleo di dimensione finita.

■ **Problema di POISSON-NEUMANN**

Effettuando le identificazioni formali

$\varphi = u$	campo cinematico
$\text{grad} = \mathbf{B}$	operatore cinematico
$\mathbf{I} = \mathcal{E}$	operatore elastico
$p$	forze di contatto su $\partial A$
$b$	forze di massa

l'equilibrio elastico del dominio  $A$  soggetto a forze di contatto  $p$  sulla frontiera si scrive

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \text{grad} \varphi & \text{congruenza} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon} & \text{legame elastico} \\ -\text{div} \boldsymbol{\sigma} = b & \text{equilibrio di massa} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p \text{ su } \partial A & \text{equilibrio al contorno} \end{cases}$$

Espresso in termini dello spostamento scalare  $\varphi$  esso equivale al problema di POISSON-NEUMANN

$$\begin{cases} \Delta \varphi = -b & \text{su } A \\ \text{grad} \varphi \cdot \mathbf{n} = p & \text{su } \partial A \end{cases}$$

I cinematismi rigidi conformi per il modello sono i campi a gradiente nullo e cioè, in forza della connessione di  $A$ , quelli costanti su  $A$ .

L'analogia elastica conduce quindi ad affermare che esiste soluzione se e solo se è soddisfatta la condizione

$$\int_A b \, da + \int_{\partial A} p \, ds = 0.$$

La soluzione  $\varphi$  è in tal caso unica a meno di campi costanti su  $A$ .

Nel problema della torsione si ha  $p(s) = \mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{t}(s)$  e dunque la condizione di esistenza diventa

$$\int_{\partial A} \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} \, ds = 0$$

ed è sempre verificata in quanto

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{t} = \frac{d}{ds} \frac{1}{2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}).$$

■ **Problema di POISSON-DIRICHLET**

Effettuando le identificazioni formali

$\psi = u$	campo di spostamenti
$\text{grad} = \mathbf{B}$	operatore cinematico
$\mathbf{I} = \mathcal{E}$	operatore elastico
$\psi = w$	cedimenti vincolari su $\partial A$
$b$	forze di massa

l'equilibrio elastico del dominio  $A$  soggetto a cedimenti assegnati  $w$  sulla frontiera si scrive

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \text{grad } \psi & \text{congruenza} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I} \boldsymbol{\varepsilon} & \text{legame elastico} \\ -\text{div } \boldsymbol{\sigma} = b & \text{equilibrio di massa} \\ \psi = w \text{ su } \partial A & \text{vincolo cinematico} \end{cases}$$

ed equivale al problema di POISSON-DIRICHLET

$$\begin{cases} \Delta \psi = -b & \text{su } A \\ \psi = w & \text{su } \partial A \end{cases}$$

I cinematismi rigidi conformi per il modello sono nulli in quanto devono essere campi costanti su  $A$  e nulli su  $\partial A$ .

L'analogia elastica conduce quindi ad affermare che esiste un'unica soluzione  $\psi$  per ogni dato.

Nella classe delle funzioni  $\psi$  che verificano la condizione al contorno  $\psi = w$  su  $\partial A$  il funzionale energia potenziale totale risulta strettamente convesso ed è dato da

$$F(\psi) = \frac{1}{2} \int_A \| \text{grad } \psi \|^2 \text{ da} - \int_A b \psi \text{ da}.$$

Nel problema della torsione se  $\psi$  è l'armonica coniugata della funzione di ingobbimento specifico risulta  $b = 0$  ed inoltre

$$\begin{cases} w = r^2/2 & \text{sul contorno esterno ,} \\ w = r^2/2 + k_j & \text{sui contorni interni .} \end{cases}$$

Se  $\psi$  è la funzione di PRANDTL risulta  $b = -2$  ed inoltre

$$\begin{cases} w = 0 & \text{sul contorno esterno ,} \\ w = k_j & \text{sui contorni interni .} \end{cases}$$

## 5. LA SOLLECITAZIONE DI TAGLIO E FLESSIONE

Si consideri una trave sulle cui basi terminali agiscono due sistemi di forze staticamente opposti, ciascuno avente

- risultante  $\mathbf{T}$  ortogonale all'asse della trave (*sforzo di taglio*),
- vettore assiale del momento risultante rispetto al baricentro elastico  $\mathbf{M}_{Gf}$  ortogonale all'asse della trave (*momento flettente*).

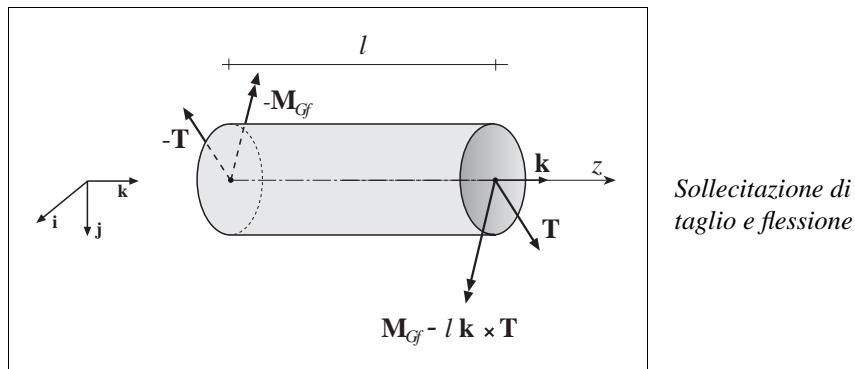


Fig. 5.1

In ogni sezione trasversale si assuma l'origine del sistema di riferimento coincidente con il baricentro elastico.

Le caratteristiche della sollecitazione in ogni sezione trasversale della trave così caricata consistono in uno sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  costante lungo l'asse della trave ed in un momento flettente variabile linearmente con la coordinata  $z$  della sezione.

Il vettore assiale del momento flettente varia infatti con legge lineare governata dall'espressione

$$\mathbf{M}_{Gf}(z) = \mathbf{M}_{Gf}(0) - z (\mathbf{k} \times \mathbf{T}).$$

Derivando rispetto a  $z$  si ottiene la condizione differenziale di equilibrio

$$-\mathbf{k} \times \mathbf{T} = \mathbf{M}'_{Gf}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{k} \times \mathbf{M}'_{Gf}.$$

Dalla teoria della flessione si ha che il gradiente  $\mathbf{g}$  delle dilatazioni delle fibre della trave è dato dall'equazione vettoriale

$$\mathbf{k} \times \mathbf{M}_{Gf}(z) = \mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}(z).$$

Derivando rispetto a  $z$  si ottiene la relazione tra la derivata  $\mathbf{g}'$  del gradiente delle dilatazioni e lo sforzo di taglio

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}'.$$

- La retta passante per il baricentro elastico e parallela allo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  è detta *asse di sollecitazione del taglio*.
- La retta passante per il baricentro elastico ed ortogonale al gradiente  $\mathbf{g}'$  della derivata delle dilatazioni è detta *asse neutro del taglio*.

Se  $\mathbf{a}$  è un versore ortogonale allo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  risulta

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}') \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Dunque le direzioni di  $\mathbf{g}'$  e di  $\mathbf{a}$  sono di simmetria coniugata rispetto all'ellisse d'inerzia elastica della sezione trasversale.

Osservando che l'asse di sollecitazione del taglio è ortogonale al versore  $\mathbf{a}$  e che l'asse neutro del taglio è ortogonale al vettore  $\mathbf{g}'$ , dalla geometria delle masse (vedi sezione IX.2.2 (p. 358)) segue che

- l'asse di sollecitazione e l'asse neutro del taglio sono diametri coniugati dell'ellisse di CULMANN della sezione trasversale.

Si noti inoltre che

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{g}' = (\mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}') \cdot \mathbf{g}' > 0,$$

e cioè che

- il gradiente  $\mathbf{g}'$  della derivata delle dilatazioni ha proiezione positiva nella direzione della forza tagliente.

### 5.1. La trattazione di Jourawski

La trattazione del problema dell'equilibrio elastico svolta dal SAINT VENANT in [2] (1856) conduce alla formulazione di problemi del tipo di POISSON nel dominio della sezione retta. La soluzione di tale problema si presenta però ardua anche per forme geometriche semplici della sezione trasversale.

Tale circostanza fa preferire, ai fini tecnici, una trattazione approssimata di tipo elementare dovuta a D.J. JOURAWSKI<sup>45</sup> che la sviluppò, in connessione con la costruzione dei ponti lignei della linea ferroviaria St Pietroburgo-Mosca, nel periodo 1844-1850.

---

<sup>45</sup> D.J. JOURAWSKI (1821-1891). Nel 1838 entrò all'Istituto di Ingegneria della strade e delle comunicazioni di St Pietroburgo. L'Istituto era stata fondata nel 1809 da ingegneri francesi provenienti dalla École Polytechnique e dalla École de Ponts et Chaussées di Parigi tra cui BÉTANCOURT (che ne fu il primo direttore), BAZAIN e POTIER. Nel 1820 giunsero a St Pietroburgo GABRIEL LAMÉ e EMILE CLAPEYRON, che insegnarono matematica e fisica presso l'Istituto ed aiutarono a progettare molte importanti strutture tra cui vari ponti sospesi che vennero costruiti in quel tempo a St Pietroburgo. Durante gli studi di JOURAWSKI l'insegnamento era ormai in mano a docenti russi ed egli ebbe quale professore di matematica M.V. OSTROGRADSKY. JOURAWSKI si laureò nel 1842 anno in cui iniziò la costruzione della linea ferroviaria St Pietroburgo-Mosca. A lui venne affidato il compito di progettare il ponte sul fiume Werebia (lughezza 60 metri, 9 campate, altezza dalla superficie dell'acqua 56 metri) che venne realizzato con travi in legno di grande altezza ed anche da travi composte. JOURAWSKI ideò il suo metodo per determinare gli sforzi di scorimento tra le fibre longitudinali delle travi lignee e per dimensionare i collegamenti metallici tra travi sovrapposte.

La trattazione di JOURAWSKI, pur basandosi su sole considerazioni di equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave, fornisce valutazioni sufficientemente accurate ai fini tecnici in molte applicazioni.

Il metodo di JOURAWSKI consiste nell'imporre la condizione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave di un pezzo di trave di forma cilindrica e con generatrici parallele all'asse della trave, vedi figura 5.2.

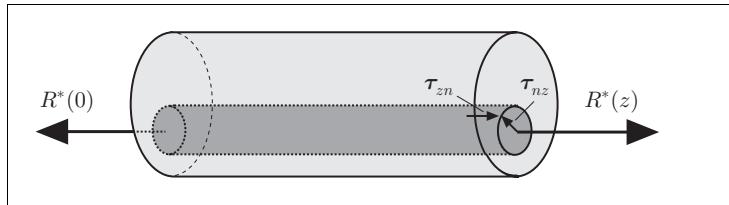


Fig. 5.2

In gergo tecnico il pezzo può dirsi una *carota*. Tale è infatti il nome che si dà ai provini cilindrici estratti con una fresa a rotazione per campionare terreni o rocce e calcestruzzi da costruzione per sottoporli a prove di laboratorio.

La condizione di equilibrio alla traslazione consente di valutare il flusso  $q^*$  del campo vettoriale delle  $\tau$  attraverso una linea chiusa  $\partial A^*$  che racchiuda una parte  $A^*$  della sezione retta. Il flusso  $q^*$  è positivo se uscente dal dominio  $A^*$ .

Dal teorema della divergenza e dalla condizione differenziale di equilibrio alla traslazione lungo l'asse della trave si deduce la *formula di JOURAWSKI*

$$q^* = \oint_{\partial A^*} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{A^*} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, da = - \int_{A^*} \sigma' \, da,$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore della normale uscente dalla frontiera  $\partial A^*$  del dominio  $A^*$ .

**Osservazione 5.1.** Alla formula di JOURAWSKI può pervenirsi anche direttamente dalla condizione di equilibrio alla traslazione nella direzione  $z$  di una parte di trave di lunghezza unitaria e di sezione retta coincidente con  $A^*$ .

In virtù della simmetria delle tensioni tangenziali, risulta  $\tau_{nz} = \tau_{zn}$  e quindi la risultante della distribuzione di tensioni tangenziali sulla parete laterale è uguale al flusso  $q^*$  delle tensioni tangenziali uscente dal dominio  $A^*$ .

---

JOURAWSKI applicò anche il suo metodo ad un'analisi critica del posizionamento dei rivetti di collegamento delle travi metalliche composte a forma tubolare dei ponti Conway e Britannia costruiti in Inghilterra nel 1845. Il lavoro di JOURAWSKI, tradotto in francese nel 1856, fu molto apprezzato da SAINT VENANT che lo usò anche come termine di confronto per la sua soluzione esatta del problema, .

Denotando con  $R^*(z)$  la risultante delle tensioni normali di trazione sul dominio  $A^*$  all'ascissa  $z$ , l'equazione di equilibrio si scrive

$$R^*(z) - R^*(0) + \int_0^z q^* dz = 0.$$

Derivando quindi rispetto all'ascissa  $z$  si ottiene

$$\frac{\partial R^*}{\partial z} + q^* = 0,$$

da cui segue che

$$q^* = -\frac{\partial R^*}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \int_{A^*} \sigma da = -\int_{A^*} \sigma' da,$$

che è la *formula di JOURAWSKI*. ■

Dalla trattazione della flessione si deduce che la distribuzione delle tensioni normali  $\sigma$  sulla sezione trasversale della trave ha andamento lineare rispetto al vettore posizione  $\rho = \mathbf{r} + z \mathbf{k}$ .

Essa è infatti lineare sia in  $\mathbf{r}$ , vettore posizione nel piano della sezione trasversale, sia in  $z$ , ascissa lungo l'asse della trave, in conseguenza del fatto che il momento flettente varia linearmente con  $z$ .

Si consideri ora l'equazione differenziale di equilibrio che lega il momento flettente  $\mathbf{M}_{Gf}$  allo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T} = \mathbf{k} \times \mathbf{M}'_{Gf},$$

ovvero in componenti

$$\begin{cases} T_x = -M'_{Gy}, \\ T_y = M'_{Gx}. \end{cases}$$

L'espressione delle tensioni normali da flessione in funzione del vettore posizione  $\mathbf{r}$  rispetto al baricentro elastico della sezione trasversale è data da

$$\sigma(z) = E \mathbf{g}(z) \cdot \mathbf{r}.$$

Derivando rispetto a  $z$  e sostituendo nell'espressione del flusso  $q^*$  delle tensioni tangenziali da taglio si ottiene

$$q^* = -\int_{A^*} E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r} da = -\mathbf{g}' \cdot \int_{A^*} E \mathbf{r} da.$$

Dunque la formula di JOURAWSKI, che consente di valutare il flusso delle tensioni tangenziali uscente dall'area  $A^*$ , assume la semplice espressione

$$q^* = -\mathbf{g}' \cdot \mathbf{S}_G^*(E),$$

dove

$$\mathbf{g}' = \mathbf{J}_G^{-1}(E) \mathbf{T}, \quad \mathbf{S}_G^*(E) = \int_{A^*} E \mathbf{r} \, da.$$

Se gli assi  $x$  e  $y$  del riferimento sono principali d'inerzia, la matrice di  $\mathbf{J}_G(E)$  assume la forma canonica e dunque

$$[\mathbf{J}_G(E)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{Gx}(E)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_{Gy}(E)} \end{bmatrix},$$

ed il flusso delle tensioni tangenziali è fornito, in termini di componenti, dalla formula

$$q^* = -\frac{T_x}{J_{Gx}(E)} S_{Gx}^*(E) - \frac{T_y}{J_{Gy}(E)} S_{Gy}^*(E).$$

Nel caso di sezione elasticamente omogenea, e cioè di fibre longitudinali aventi tutte lo stesso modulo di YOUNG, risulta

$$\mathbf{S}_G^*(E) = E \mathbf{S}_G^*, \quad E \mathbf{J}_G^{-1}(E) = \mathbf{J}_G^{-1},$$

e l'espressione del flusso delle tensioni tangenziali assume la forma

$$q^* = -(\mathbf{J}_G^{-1}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_G^*,$$

in cui l'elasticità longitudinale delle fibre non gioca alcun ruolo.

In un riferimento principale si ha

$$q^* = -\frac{T_x}{J_{Gx}} S_{Gx}^* - \frac{T_y}{J_{Gy}} S_{Gy}^*.$$

Nel caso generale, sia  $\mathbf{m}$  il versore parallelo ed equiverso al gradiente  $\mathbf{g}'$  e si ponga

$$\mathbf{g}' = g'_m \mathbf{m}, \quad T_m = \mathbf{T} \cdot \mathbf{m}, \quad S_{Gm}^* = \mathbf{S}_G^* \cdot \mathbf{m}, \quad J_{Gm} = \mathbf{J}_G \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}.$$

Allora si ha che

$$T_m = \mathbf{T} \cdot \mathbf{m} = \mathbf{J}_G \mathbf{g}' \cdot \mathbf{m} > 0,$$

e quindi

$$T_m = (\mathbf{J}_G \mathbf{m} \cdot \mathbf{m}) g'_m = J_{Gm} g'_m.$$

Ne segue che vale la formula

$$q^* = -g'_m (\mathbf{m} \cdot \mathbf{S}_G^*) = -\frac{T_m}{J_{Gm}} S_{Gm}^*.$$

Sussiste il seguente risultato analogo a quello dimostrato per la sollecitazione di torsione nella proposizione 3.1 (p. 421).

**Proposizione 5.1.** *Una qualsiasi distribuzione di tensioni tangenziali che soddisfi le condizioni di equilibrio*

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma' = -E(\mathbf{J}_G^{-1}(E) \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r} & \text{in } A, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

ha un risultante equipollente a  $\mathbf{T}$ .

**Dim.** Dalla relazione  $\operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{r} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}$  si deduce che

$$\begin{aligned} \int_A \boldsymbol{\tau} \, da &= \int_A [\operatorname{div}(\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) \, da - \mathbf{r} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}] \, da = \\ &= \int_{\partial A} (\mathbf{r} \otimes \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_A \mathbf{r} \cdot E(\mathbf{J}_G^{-1}(E) \mathbf{T} \cdot \mathbf{r}) \, da = \\ &= \int_{\partial A} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r} \, dS + \left[ \int_A E \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \, da \right] \mathbf{J}_G^{-1}(E) \mathbf{T} = \\ &= \mathbf{J}_G(E) \mathbf{J}_G^{-1}(E) \mathbf{T} = \mathbf{T}, \end{aligned}$$

e quindi il risultato. □

### 5.1.1. Corda parallela all'asse neutro

Si consideri ora la generica sezione retta di una trave omogenea soggetta a taglio e flessione e si ponga l'ipotesi semplificativa consistente nell'assumere che su ogni corda parallela all'asse neutro del taglio la componente normale delle tensioni tangenziali  $\tau$  sia costante (fig.5.3).

Si consideri un riferimento cartesiano  $\{x, y, z\}$  con l'origine nel baricentro della sezione retta, l'asse  $z$  parallelo all'asse della trave, l'asse delle  $x$  coincidente con l'asse neutro  $n'$  del taglio e l'asse  $y$  orientato in modo che  $T_y > 0$ . Ponendo quindi

$$\tau_y := \frac{q^*}{\delta},$$

ove  $\delta$  è la lunghezza della corda, la *formula di JOURAWSKI* fornisce l'espressione

$$\tau_y = -\frac{T_y S_{Gy}^*}{\delta J_{Gy}}.$$

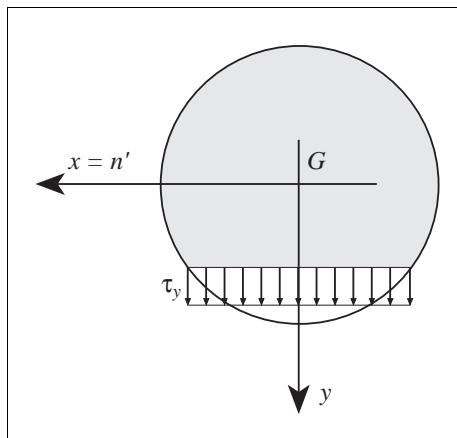


Fig. 5.3

*Componete  $\tau_y$  costante su ogni corda parallela all'asse neutro del taglio  $x$*

Per valutare la componente  $\tau_x$  parallela alla corda si osservi che, dalla condizione differenziale di equilibrio alla traslazione in direzione dell'asse della trave

$$\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0,$$

derivando rispetto ad  $x$ , si ottiene la condizione

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial z} = 0.$$

Si osservi che le corde parallele all'asse neutro  $x = n'$  sono linee di livello delle  $\sigma'$  in quanto ortogonali al gradiente  $g'$ . Inoltre la componente  $\tau_y$  della tensione tangenziale è con buona approssimazione costante rispetto ad  $x$ . Dalla relazione precedente si deduce pertanto che

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} = 0,$$

e cioè che la componente  $\tau_x$  della tensione tangenziale parallela alla corda varia linearmente lungo la corda.

Poiché sul contorno la tensione tangenziale  $\tau$  ha la direzione della tangente, la conoscenza della componente  $\tau_y$  normale alla corda consente di valutare, nei punti estremi della corda, la componente  $\tau_x$  parallela alla corda (vedi fig. 5.4).

Il diagramma si ottiene quindi congiungendo con una retta i valori della  $\tau_x$  agli estremi della corda. Ne segue che, se la corda è ortogonale al contorno nei punti estremi, la  $\tau_x$  è nulla su tutta la corda.

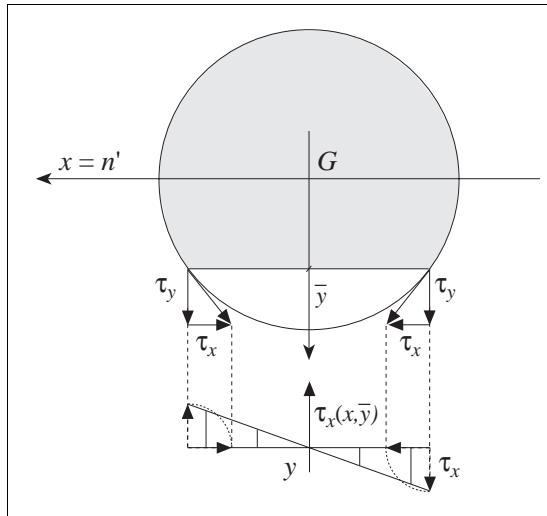


Fig. 5.4

Si noti che il valore massimo del flusso  $q^*$  attraverso una corda si ha quando la corda appartiene all'asse neutro del taglio. Infatti in tal caso

$$\frac{dq^*}{dy} = -\frac{T_y}{J_{Gy}} \frac{dS_{Gy}^*}{dy} = 0,$$

in quanto il momento statico  $S_{Gy}^*$  è massimo per tale posizione della corda.

Al valore massimo del flusso  $q^*$  può darsi una semplice espressione considerando il *braccio della coppia interna*

$$h^* = -\frac{J_{Gy}}{S_{Gy}^*},$$

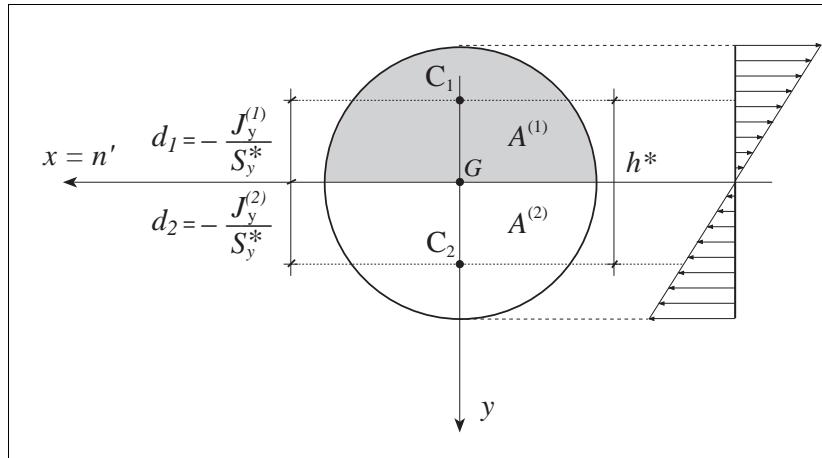


Fig. 5.5

Il braccio della coppia interna rappresenta la distanza nella direzione  $y$  tra i punti di applicazione delle risultanti delle  $\sigma'$  positive e negative (fig. 5.5). Si ha infatti che

$$q_{\max}^* = \frac{T_y}{h^*}.$$

Per mostrare il significato geometrico di  $h^*$ , si denotino con

$$J_{Gy}^{(1)}, \quad J_{Gy}^{(2)},$$

$$S_{Gy}^{(1)}, \quad S_{Gy}^{(2)},$$

i momenti d'inerzia ed i momenti statici rispetto all'asse neutro  $x$  dei domini  $A^{(1)}$  ed  $A^{(2)}$  di fig. 5.5.

Poiché l'asse neutro è baricentrico, si ha che

$$S_{Gy}^{(1)} + S_{Gy}^{(2)} = S_{Gy} = 0,$$

e quindi

$$S_{Gy}^* = S_{Gy}^{(1)} = -S_{Gy}^{(2)}.$$

Pertanto le distanze dall'asse neutro  $d_1$  e  $d_2$  dei punti di applicazione delle risultanti delle  $\sigma'$  positive e negative valgono

$$d_1 = \left| \frac{\int_{A^{(1)}}^{} \sigma' y \, da}{\int_{A^{(1)}}^{} \sigma' \, da} \right| = - \frac{\int_{A^{(1)}}^{} k y^2 \, da}{\int_{A^{(1)}}^{} k y \, da} = - \frac{J_{Gy}^{(1)}}{S_{Gy}^*},$$

$$d_2 = \left| \frac{\int_{A^{(2)}}^{} k y^2 \, da}{\int_{A^{(2)}}^{} k y \, da} \right| = - \frac{J_{Gy}^{(2)}}{S_{Gy}^*},$$

da cui:

$$h^* = d_1 + d_2 = - \frac{J_{Gy}^{(1)} + J_{Gy}^{(2)}}{S_{Gy}^*} = - \frac{J_{Gy}}{S_{Gy}^*}.$$

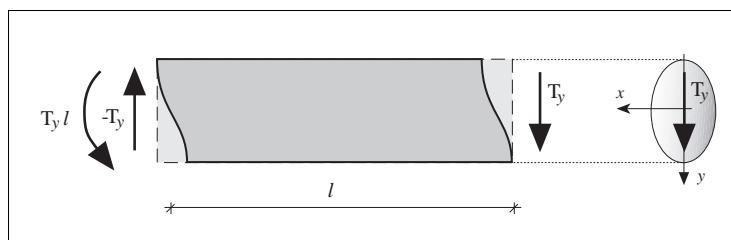
E' da notare che se la lunghezza della corda è stazionaria in corrispondenza dell'asse neutro, anche la  $\tau_y$  ha un massimo per tale posizione della corda. Si ha infatti che

$$\frac{d\tau_y}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{q^*(y)}{\delta(y)} = \frac{1}{\delta} \frac{dq^*}{dy} - \frac{q^*}{\delta^2} \frac{d\delta}{dy} = 0.$$

## 5.2. La deformabilità a taglio della sezione

La deformazione della trave soggetta a taglio e flessione è somma di quella dovuta alla flessione e di quella causata dagli scorrimenti associati al taglio.

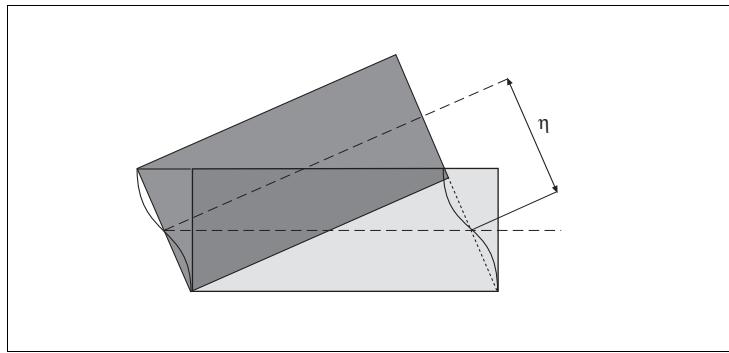
Quindi la deformazione della trave è caratterizzata da rotazioni relative tra le sezioni per unità di lunghezza, dovute alla curvatura flessionale e da un ingobbamento delle sezioni, uguale per tutte, come mostrato in figura.



### 5.2.1. Il tensore dei fattori di taglio

Nella teoria tecnica della trave si introduce uno *scorrimento medio equivalente* per unità di lunghezza della trave.

Si assume cioè che le sezioni rette della trave rimangano piane a deformazione avvenuta, e slittino l'una rispetto all'altra, come è mostrato in figura.



- Lo scorrimento equivalente associato ad uno sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  è il vettore  $\boldsymbol{\eta}$ , appartenente al piano della sezione trasversale, definito dalla proprietà di far compiere ad un arbitrario sforzo di taglio  $\mathbf{T}^*$  un lavoro virtuale, per unità di lunghezza della trave, pari al lavoro virtuale, compiuto dalle corrispondenti tensioni tangenziali da taglio  $\tau^*$ , per gli scorrimenti elastici da taglio  $\gamma = \tau/G$  indotti dalle tensioni tangenziali dovute allo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  (vedi fig. 5.6).

In formule si ha

$$\mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\eta} := \int_A \tau^* \cdot \frac{\tau}{G} da .$$

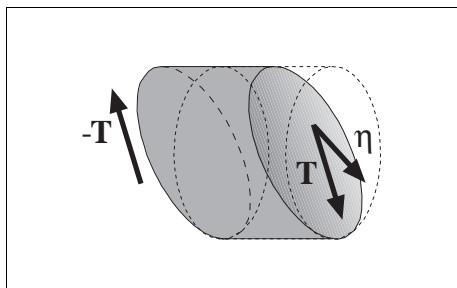


Fig. 5.6

Le tensioni tangenziali, variabili da punto a punto nella sezione, sono funzioni lineari dello sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  agente sulla sezione.

Esse dunque possono essere espresse mediante un campo tensoriale  $\Pi(\mathbf{r})$  che ad ogni sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  associa il corrispondente campo di tensioni tangenziali da taglio

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \Pi(\mathbf{r}) \mathbf{T}.$$

I tensori  $\Pi(\mathbf{r})$  hanno quindi la dimensione dell'inverso di un area.

Sia  $\mathbf{T}^*$  un'arbitraria forza tagliante e si ponga  $\boldsymbol{\tau}^* = \Pi(\mathbf{r}) \mathbf{T}^*$ . La condizione di egualanza dei lavori virtuali

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\eta} &= \int_A \boldsymbol{\tau}^* \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{G} \, da = \int_A \left[ \frac{1}{G(\mathbf{r})} \Pi(\mathbf{r}) \mathbf{T}^* \cdot \Pi(\mathbf{r}) \mathbf{T} \right] \, da = \\ &= \mathbf{T}^* \cdot \left( \int_A \frac{\Pi^T(\mathbf{r}) \Pi(\mathbf{r})}{G(\mathbf{r})} \, da \right) \mathbf{T}, \end{aligned}$$

in virtù dell'arbitrarietà di  $\mathbf{T}^*$ , fornisce il valore dello scorrimento equivalente  $\boldsymbol{\eta}$ :

$$\boldsymbol{\eta} = \left( \int_A \frac{\Pi^T(\mathbf{r}) \Pi(\mathbf{r})}{G(\mathbf{r})} \, da \right) \mathbf{T}.$$

Si introduca allora l'*area elastica a taglio* della sezione, definita da

$$A_G = \int_A G(\mathbf{r}) \, da,$$

ed il tensore adimensionale dei *tensori dei fattori di taglio* definito da

$$\chi = A_G \int_A \frac{\Pi^T(\mathbf{r}) \Pi(\mathbf{r})}{G(\mathbf{r})} \, da.$$

*Tensore dei fattori di taglio*

La *cedevolezza a taglio* della sezione è il tensore  $\mathbf{C}_s$  definito da

$$\mathbf{C}_s = \frac{\chi}{A_G}.$$

*Cedevolezza a taglio della sezione*

L'inversa della cedevolezza è la *rigidezza a taglio* della sezione:

$$\mathbf{K}_s = A_G \chi^{-1}.$$

*Rigidezza a taglio della sezione*

Il legame elastico tra lo scorrimento equivalente  $\eta$  e lo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  è

$$\boxed{\boldsymbol{\eta} = \frac{\chi}{A_G} \mathbf{T}.}$$

Il tensore dei fattori di taglio è simmetrico e definito positivo.

In un riferimento principale per il tensore dei fattori di taglio  $\chi$  la matrice associata assume la forma canonica

$$[\chi] = \begin{bmatrix} \chi_x & 0 \\ 0 & \chi_y \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori positivi  $\chi_x$  e  $\chi_y$  sono detti *fattori di taglio principali*.

In termini di componenti si ha

$$\begin{cases} \eta_x = \frac{\chi_x}{A_G} T_x, \\ \eta_y = \frac{\chi_y}{A_G} T_y. \end{cases}$$

Per una sezione omogenea, cioè con modulo  $G$  eguale per tutte le fibre, si ha  $A_G = G A$  e dunque il tensore dei fattori di taglio è definito dalla relazione

$$(\chi \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T}^* = A \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}^* \, da \quad \text{con} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) \mathbf{T}, \\ \boldsymbol{\tau}^*(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) \mathbf{T}^*, \end{cases}$$

e valgono le formule

$$\boxed{\boldsymbol{\eta} = \frac{\chi}{GA} \mathbf{T}, \quad \chi = A \int_A \boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r}) \, da.}$$

Il tensore dei fattori di taglio fornisce una misura adimensionale della disuniformità della distribuzione delle tensioni tangenziali da taglio nella sezione.

Tale caratterizzazione discende dalla proprietà dei fattori di taglio principali di essere maggiori dell'unità.

Per mostrarlo si fa ricorso al seguente risultato propedeutico.

**Lemma 5.2. Disegualanza del valor medio quadratico.** *Sia  $\boldsymbol{\tau}$  un campo vettoriale di quadrato integrabile nel dominio  $A$ . Allora vale la disegualanza*

$$\frac{1}{A} \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \, da \geq \frac{1}{A} \int_A \boldsymbol{\tau} \, da \cdot \frac{1}{A} \int_A \boldsymbol{\tau} \, da,$$

ed il segno di eguaglianza sussiste se e solo se il campo vettoriale  $\boldsymbol{\tau}$  è costante.

**Dim.** La diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ stabilisce che se  $\mathbf{a}$  è un campo vettoriale di quadrato integrabile nel dominio  $A$  risulta

$$\left( \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} \, da \right)^2 \leq \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \, da \int_A \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \, da,$$

dove il segno di egualanza sussiste se e solo se i campi  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\mathbf{a}$  sono proporzionali. Assumendo allora il campo  $\mathbf{a}$  costante e pari all'integrale del campo  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\mathbf{a} = \int_A \boldsymbol{\tau} \, da,$$

si ottiene che

$$\left\| \int_A \boldsymbol{\tau} \, da \right\|^4 \leq A \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \, da \left\| \int_A \boldsymbol{\tau} \, da \right\|^2,$$

con il segno di egualanza se e solo se

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{1}{A} \int_A \boldsymbol{\tau} \, da,$$

e cioè se il campo vettoriale  $\boldsymbol{\tau}$  è costante.  $\square$

Si può ora dimostrare il risultato concernente i fattori di taglio principali.

**Proposizione 5.3. Autovalori del tensore dei fattori di taglio.** *Gli autovalori del tensore dei fattori di taglio sono maggiori dell'unità.*

**Dim.** Sia  $\mathbf{T}$  un autovettore del tensore dei fattori di taglio e  $\lambda$  il corrispondente autovalore:

$$\chi \mathbf{T} = \lambda \mathbf{T}.$$

In virtù della proposizione 5.1 (p. 468) la risultante delle tensioni tangenziali da taglio è uguale alla forza tagliente e cioè

$$\int_A \boldsymbol{\tau} \, da = \mathbf{T}.$$

Allora dalla definizione del tensore dei fattori di taglio e dal lemma 5.2 si ha che

$$\lambda \|\mathbf{T}\|^2 = (\chi \mathbf{T}) \cdot \mathbf{T} = A \int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} \, da \geq \|\mathbf{T}\|^2,$$

dove  $\boldsymbol{\tau} = \Pi(\mathbf{r}) \mathbf{T}$ . Quindi  $\lambda \geq 1$  con  $\lambda = 1$  se e solo se il campo  $\boldsymbol{\tau}$  è costante. Notando quindi che un campo di tensioni tangenziali da taglio, avendo divergenza non nulla, non può essere costante, si deduce che deve essere  $\lambda > 1$ .  $\square$

### 5.2.2. La sezione rettangolare

Si consideri la sezione rettangolare omogenea di fig. 5.7. La trattazione svolta nella sezione 5.1.1 (p. 468) mostra che le tensioni tangenziali agenti sulle corde parallele all'asse neutro del taglio  $x = n'$  sono dirette secondo  $y$  e dipendono solo dalla coordinata  $y$ . Essendo

$$S_y^* = -B \left( \frac{H}{2} + y \right) \frac{1}{2} \left( \frac{H}{2} - y \right) = -\frac{B}{2} \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right), \quad J_y = \frac{B H^3}{12},$$

la formula di JOURAWSKI fornisce

$$\tau_y(y) = -\frac{T_y S_y^*}{B J_y} = \frac{6 T_y}{B H^3} \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right).$$

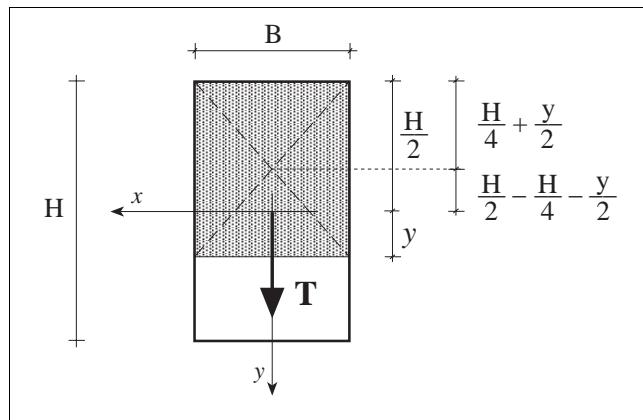


Fig. 5.7

Applicando la formula dello scorrimento equivalente:

$$\boldsymbol{\eta} = \left( \int_A \frac{\boldsymbol{\Pi}^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{r})}{G(\mathbf{r})} da \right) \mathbf{T},$$

tenendo presente che la direzione  $y$ , essendo un asse di simmetria, è principale per il tensore dei fattori di taglio, si ottiene l'espressione

$$\eta_y = \frac{T_y}{G} \left( \frac{6}{B H^3} \right)^2 \int_{-H/2}^{H/2} \left( \frac{H^2}{4} - y^2 \right)^2 B dy = \frac{6}{5} \frac{T_y}{G A}.$$

Il fattore di taglio principale  $\chi_y$  vale dunque  $6/5$ .

Poiché nella formula le dimensioni  $B$  e  $H$  giocano un ruolo simmetrico, anche il fattore di taglio principale  $\chi_x$  vale  $6/5$ .

### 5.2.3. La sezione a C

Si consideri la sezione omogenea di fig. 5.8 soggetta ad una forza tagliente parallela all'anima (asse  $y$ ).

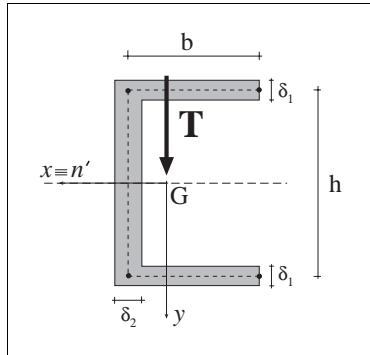


Fig. 5.8

L'asse  $x$  del riferimento baricentrico è di simmetria ortognonale e quindi è principale d'inerzia. Ne segue che l'asse neutro del taglio coincide con l'asse delle  $x$ . Il momento statico sulle ali e sull'anima risulta rispettivamente

$$S_y^*(\xi) = \xi \delta_1 \frac{h}{2}, \quad 0 < \xi < b,$$

$$S_y^*(\xi) = b \delta_1 \frac{h}{2} + \delta_2 \xi \frac{1}{2}(h - \xi), \quad 0 < \xi < h,$$

Il flusso delle tensioni tangenziali ha dunque andamento lineare sulle ali e parabolico sull'anima.

In figura 5.9 è riportato il diagramma del flusso delle tensioni tangenziali, in figura 5.10 è tracciato invece il diagramma dei valori medi delle tensioni tangenziali sulle corde.

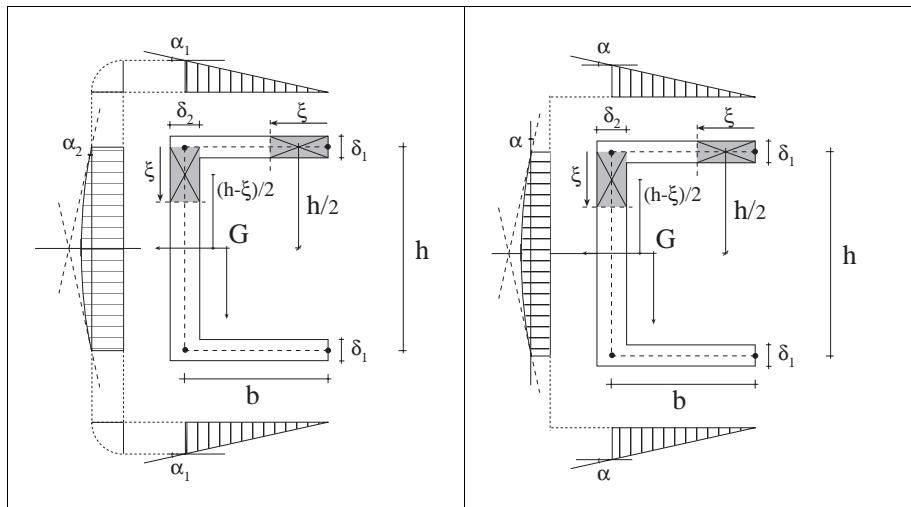


Fig. 5.9

Fig. 5.10

### 5.3. Il centro di taglio

La proposizione 5.1 (p. 468) assicura che qualsiasi campo di tensioni tangenziali che soddisfi le condizioni di equilibrio

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma' = -E(\mathbf{J}_G^{-1}(E)\mathbf{T}) \cdot \mathbf{r} & \text{in } A, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

ha un risultante equipollente a  $\mathbf{T}$ .

L'asse centrale del campo delle  $\boldsymbol{\tau}$  è la retta parallela a  $\mathbf{T}$  di equazione

$$M_{Gt} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{R} \mathbf{r},$$

dove  $M_{Gt}$  è il momento torcente scalare rispetto al baricentro

$$M_{Gt} = \mathbf{k} \cdot \int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau} \, da.$$

Il valore di  $M_{Gt}$  può essere variato ad arbitrio aggiungendo un campo di  $\boldsymbol{\tau}$  da torsione che verificano cioè le condizioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 & \text{su } A, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A, \\ \int_A \boldsymbol{\tau} \, da = \mathbf{o}. \end{cases}$$

Si vuole ora mostrare che

- per ogni assegnata geometria della sezione retta, esiste un punto  $C$  del suo piano, detto *centro di taglio*, che gode della seguente proprietà.

Un campo di tensioni tangenziali  $\boldsymbol{\tau}$  che soddisfa le equazioni di equilibrio

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma' = -E\mathbf{J}_E^{-1}\mathbf{T} \cdot \mathbf{r} & \text{su } A, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases}$$

ed il cui momento risultante rispetto a  $C$  è nullo, risulta ortogonale ad ogni campo di deformazioni  $\boldsymbol{\gamma}$  da torsione, nel senso che è nullo il lavoro virtuale mutuo:

$$\int_A \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\gamma} \, da = 0.$$

La dimostrazione è condotta con riferimento ad una trave omogenea.  
Si consideri un tratto unitario di trave (vedi fig.5.11) soggetto a:

- (sistema 1) uno sforzo di taglio  $\mathbf{T}_1$  con retta d'applicazione passante per  $C$ ,
- (sistema 2) un momento torcente  $M_{t2}$ ,

e si valuti il lavoro virtuale  $L_{12}$  compiuto dalle tensioni tangenziali  $\tau_1$  del sistema 1 per gli scorrimenti  $\gamma_2$  del sistema 2.

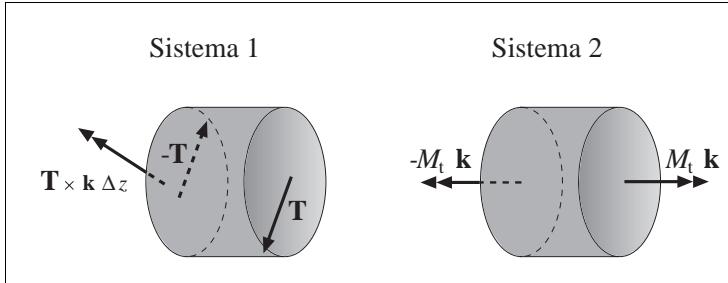


Fig. 5.11

Sia  $\theta'_2$  la curvatura torsionale nel sistema 2.

Ricordando l'espressione dello scorrimento  $\gamma$  da torsione in funzione della curvatura torsionale  $\theta'$ , il lavoro mutuo si scrive

$$\begin{aligned} L_{12} &= \theta'_2 \int_A \boldsymbol{\tau}_1 \cdot (\mathbf{R} \mathbf{r} + \text{grad } \varphi) \, da = \\ &= \theta'_2 \left( \int_A (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \, da + \int_A \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \text{grad } \varphi \, da \right). \end{aligned}$$

Dalla relazione

$$\text{div}(\varphi \boldsymbol{\tau}) = \varphi \text{ div } \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \text{grad } \varphi,$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \int_A \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \text{grad } \varphi \, da &= \int_A \text{div}(\varphi \boldsymbol{\tau}_1) \, da - \int_A \varphi \text{ div } \boldsymbol{\tau}_1 \, da = \\ &= \int_{\partial A} \varphi \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_A \varphi (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{r}) \, da = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{J}_G^{-1} \int_A \mathbf{r} \varphi \, da, \end{aligned}$$

in quanto  $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \mathbf{n} = 0$  su  $\partial A$ . Si ha poi

$$M_{Gt1} = \int_A (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\tau}_1) \cdot \mathbf{k} \, da = \int_A (\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot \boldsymbol{\tau}_1 \, da,$$

ed inoltre

$$M_{Gt1} = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{R} \mathbf{r}_C,$$

in cui  $\mathbf{r}_C$  è il vettore posizione del centro di taglio rispetto al centro geometrico  $G$ .

In definitiva si ha che

$$L_{12} = \theta'_2 \mathbf{T}_1 \cdot \left( \mathbf{R} \mathbf{r}_C + \mathbf{J}_G^{-1} \int_A \mathbf{r} \varphi \, da \right), \quad \forall \theta'_2, \quad \forall \mathbf{T}_1.$$

Ricordando che  $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = -\mathbf{R}$ , la posizione del centro di taglio  $C$  è data da

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{R} \mathbf{J}_G^{-1} \int_A \mathbf{r} \varphi \, da.$$

Se gli assi  $x$  e  $y$  sono principali d'inerzia le coordinate del centro di taglio sono dunque

$$\begin{cases} x_C = -\frac{1}{J_{Gy}} \int_A y \varphi \, dA, \\ y_C = +\frac{1}{J_{Gx}} \int_A x \varphi \, dA. \end{cases}$$

La determinazione del centro di taglio presuppone la soluzione del problema della torsione per la sezione considerata.

E' facile verificare che se la sezione retta ammette un asse di simmetria ortogonale il centro di taglio è un punto di tale asse.

Dunque, se esistono due assi di simmetria ortogonale, il centro di taglio coincide con la loro intersezione e cioè con il baricentro della sezione retta.

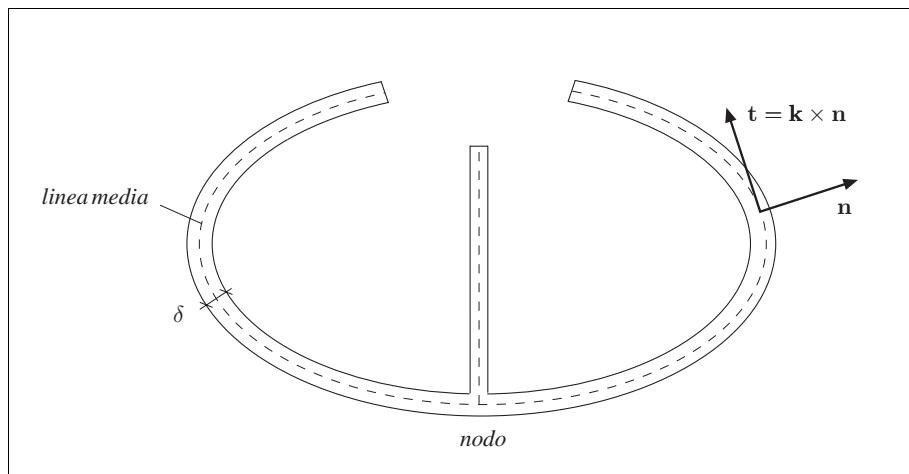
## RIFERIMENTI

1. A. J. C .B. DE SAINT VENANT, Mémoire sur la torsion des prismes, *Mém. Divers Savants Acad. Sci. Paris*, **14**, 233-560 (1853).
2. A. J. C .B. DE SAINT VENANT, Mémoire sur la flexion, *J. math. Liouville*, 2nd series, vol.1, pp. 89-189 (1856).
3. A. CLEBSCH, Théorie de l'élasticité des corps solides (Traduit par MM. Barré de Saint-Venant et Flamant, avec des Notes étendues de M. Barré de Saint-Venant), Dunod, Paris (1883) Reprinted by Johnson Reprint Corporation, New York, (1966).
4. A. E. H. LOVE, A Treatise on the mathematical theory of elasticity, first ed. (1893), Dover, New York, (1949)
5. R. BREDT, Kritische Bemerkungen zur Drehungseletizität, *Zeit. Ver. deutsch. Ing.* **40**, 815 (1896).
6. L. PRANDTL, Zur Torsion von prismatischen Stäben, *Physikalische Zeitschrift* **4**, 758-770 (1903).
7. C. WEBER, Forschungsarbeiten, VDI n° **249**, (1921).
8. O. D. KELLOGG, Foundation of Potential Theory, Springer, Berlin (1929)
9. I. S. SOKOLNIKOFF, Mathematical Theory of Elasticity, McGraw-Hill, (1956).
10. O. ZANABONI, Dimostrazione generale del principio del De Saint Venant, *Rend. Accad. Lincei*, **25**<sub>1</sub>, 117-121 (1937).
11. O. ZANABONI, Sull'approssimazione dovuta al principio del De Saint Venant nei solidi prismatici isotropi, *Rend. Accad. Lincei*, **26**<sub>2</sub>, 340-345 (1937).
12. R. VON MISES, On Saint-Venant's principle, *Bull. Amer. Math. Soc.* **51**, 552-562 (1945).
13. V. FRANCIOSI, Scienza delle Costruzioni, Vol. I-V, Liguori, Napoli (1959-1970).
14. R. TOUPIN, Saint-Venant's principle *Arch. Rat. Mech. & Anal.*, **18**, 83-96 (1965).
15. J. MANDEL, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Gauthier-Villars, Paris (1966).
16. L. LANDAU, E. LIFCHITZ, Théorie de l'Élasticité, Edition Mir, Moscou (1967).
17. R. BALDACCI, Scienza delle Costruzioni Vol. I-II, UTET, (1970-1976).
18. G. FICHERA, Remarks on Saint-Venant's principle, I.N. VEKUA 70th anniversary volume, Moskow, (1977).
19. G. FICHERA, Il principio di Saint-Venant: intuizione dell'ingegnere e rigore del matematico, *conferenza tenuta nella Facoltà di Ingegneria di Palermo il 25-XI-1976*, Oderisi, Gubbio (1977).
20. G. ROMANO, M. ROMANO, La pressoflessione nei materiali non resistenti a trazione, Atti Istituto Scienza delle Costruzioni, Napoli (1979).
21. M. CAPURSO, Lezioni di Scienza delle Costruzioni, Pitagora Editrice, Bologna (1984).
22. L. NUNZIANTE, Scienza delle Costruzioni, Il continuo, Jovene, Napoli (1997).
23. L. NUNZIANTE, Scienza delle Costruzioni, La Trave, Jovene, Napoli (2001).
24. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
25. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).

# XI – LE TRAVI CON PARETI SOTTILI

## 1. SEZIONI SOTTILI

Una *sezione sottile* è caratterizzata dall'avere l'area addensata lungo una o più curve del suo piano.



Una sezione sottile può pensarsi dunque composta da un numero  $t$  di *tratti* ognuno dei quali generato da un segmento, di spessore anche variabile, che trasli mantenendosi sempre ortogonale alla direzione di traslazione.

La curva generata dai centri dei segmenti si dice *linea media* della sezione.

In corrispondenza di ogni punto della linea media, il segmento ad essa ortogonale ed avente gli estremi sulla frontiera della sezione si dice la *corda*. La lunghezza della corda, che verrà indicato con  $\delta$ , definisce lo *spessore locale* della sezione.

Denotando con  $l$  la lunghezza di ogni tratto, l'ipotesi alla base della trattazione delle travi con pareti sottili, richiede che risulti  $\delta/l \ll 1$ .

I punti di diramazione della linea media si dicono *nodi* della sezione ed il loro numero si denoterà con  $n$ .

Il *grado di connessione* della sezione è pari al numero minimo di sezionamenti longitudinali che effettuano una separazione della linea media in parti disgiunte.

Le sezioni *monoconnesse* si dicono anche sezioni *aperte*.

Le sezioni *pluriconnesse* si dicono invece *chiuse*.

Le sezioni chiuse biconnesse sono anche dette *sezioni tubolari*.

Le sezioni chiuse con grado di connessione maggiore di 2, sono dette *sezioni multicellulari*.

Il numero  $m$  di maglie della sezione è pari dal grado di connessione diminuito di una unità.

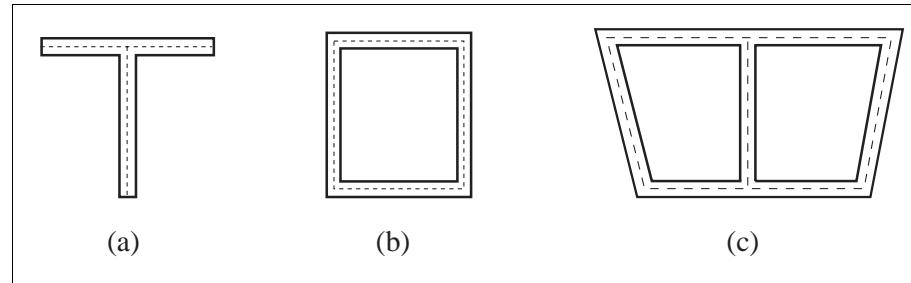


Fig. 1.1  
 a) sezione aperta (monoconnessa)  
 b) sezione tubolare (biconnessa)  
 c) sezione pluriconnessa (tre volte connessa)

I versori della tangente e della normale alla linea media sono denotati rispettivamente con  $\mathbf{t}$  ed  $\mathbf{n}$  ed orientati in modo che  $\mathbf{t} = \mathbf{k} \times \mathbf{n} = \mathbf{Rn}$ .

Si definisca un sistema di ascisse curvilinee  $\{O, s\}$  in ogni tratto. La linea media può allora esprimersi nella forma parametrica  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ .

Nel sistema di riferimento avnte per ascissa corrente lungo la linea media della sezione ed ordinate localmente dirette lungo le corde, le posizioni dei punti della sezione sono espresse da (fig.1.2)

$$\mathbf{r}(s, n) = \mathbf{r}(s) + n \mathbf{n}(s)$$

Le coordinate  $s$  ed  $n$  sono in generale *coordinate curvilinee*.

L'analisi dello stato di tensione e di deformazione nelle travi a parete sottile può condursi con una trattazione approssimata che consente di ottenere risultati di validità adeguata alle esigenze delle applicazioni anche in casi in cui le ipotesi alla base della teoria della trave di SAINT VENANT non sono soddisfatte.

La trattazione è svolta nell'ipotesi di materiale elastico isotropo ed omogeneo. e le tensioni normali  $\sigma$  dovute alla sollecitazione di sforzo normale e flessione sono valutate con la teoria di NAVIER.

La descrizione del campo delle tensioni tangenziali  $\tau$  nelle sezioni rette è basata sull'ipotesi che la generica sezione retta subisca, oltre agli spostamenti dovuti allo sforzo normale e alla flessione, una rotazione rigida  $\theta(z)$  attorno ad un asse  $z$  parallelo a quello baricentrico della trave, ed un ingobbamento, somma di quello dovuto alla torsione e di quello dovuto al taglio, definito da una funzione  $w(x, y, z)$ .

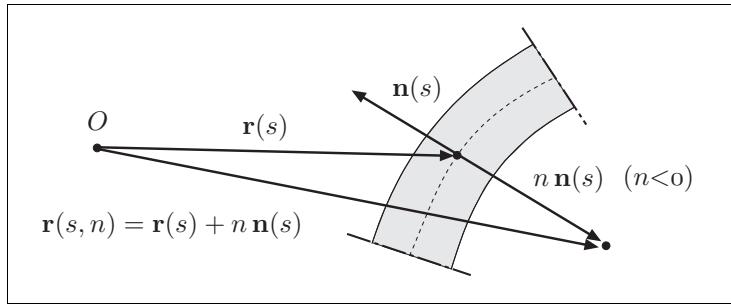


Fig. 1.2

Il campo di spostamenti può quindi scriversi

$$\begin{cases} u_x = -\theta(z) y + u_x^f, \\ u_y = \theta(z) x + u_y^f, \\ u_z = w(x, y, z) + u_z^f. \end{cases} \quad \text{Componenti dello spostamento}$$

Le componenti con l'apice  $f$  sono quelle dovute allo sforzo normale ed alla flessione. Poiché esse non provocano scorrimenti  $\gamma_x$  e  $\gamma_y$ , questi sono dati da

$$\begin{cases} \gamma_x = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = -y \theta'(z) + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_y = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = x \theta'(z) + \frac{\partial w}{\partial y}. \end{cases} \quad \text{Componenti dello scorrimento}$$

ovvero in termini vettoriali

$$\boldsymbol{\gamma} = \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} + \operatorname{grad} w.$$

Operando con il rotore ed osservando che  $\operatorname{rot} \operatorname{grad} w = \mathbf{0}$ , si ottiene la condizione necessaria di congruenza:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} = 2 \theta'(z).$$

Il legame elastico  $\tau = G\gamma$  consente di tradurre le relazioni precedenti in termini di tensioni tangenziali

$$\begin{cases} \tau_x = G \left( \frac{\partial w}{\partial x} - y \theta'(z) \right), \\ \tau_y = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + x \theta'(z) \right), \\ \boldsymbol{\tau} = G(\theta' \mathbf{R} \mathbf{r} + \operatorname{grad} w), \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 2G\theta'(z). \end{cases}$$

Le condizioni di equilibrio impongono che

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma' = -E \mathbf{g}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_G) \quad \text{nella sezione,}$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sul contorno,}$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{J}_G(E) \mathbf{g}'.$$

*Condizioni di equilibrio*

La proprietà di tangenza delle  $\boldsymbol{\tau}$  al contorno ed il ridotto spessore della sezione conducono ad assumere che, con buona approssimazione, le  $\boldsymbol{\tau}$  su di una generica corda siano ad essa ortogonali.

Dall'espressione della tensione tangenziale  $\boldsymbol{\tau}$  in funzione delle coordinate curvilinee longitudinali e trasversali,  $s$  ed  $n$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_s \mathbf{t} + \tau_n \mathbf{n},$$

osservando che  $\tau_n = 0$  e ponendo  $\tau_s = \tau$ , si ottiene che

$$\boldsymbol{\tau} = \tau \mathbf{t}.$$

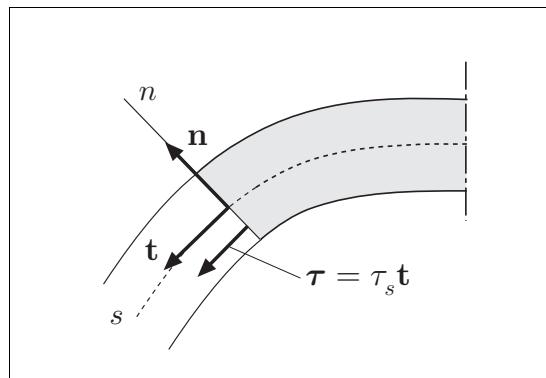


Fig. 1.3

Si può allora esprimere il rotore delle tensioni tangenziali in termini delle coordinate curvilinee  $s$  ed  $n$  e trascurare l'effetto della curvatura della linea media della sezione data la piccolezza dello spessore rispetto al raggio di curvatura.

Si ottiene quindi

$$\text{rot } \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \tau_s}{\partial n} - \frac{\partial \tau_n}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial n} = 2G\theta'(z),$$

da cui si evince che:

Le tensioni tangenziali variano linearmente lungo la corda.

Il flusso delle  $\tau$  attraverso la corda di spessore  $\delta$  all'ascissa curvilinea  $s$  vale pertanto (v. fig. 1.4):

$$q(s) = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \boldsymbol{\tau}(n, s) \cdot \mathbf{t} \, dn = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau(n, s) \, dn = \tau(0, s) \delta.$$

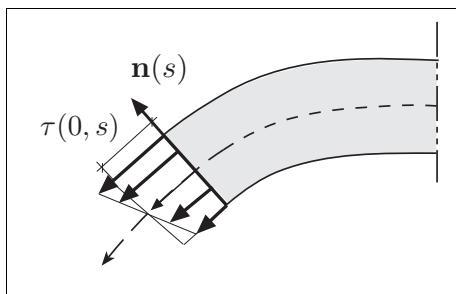


Fig. 1.4

Il valore della  $\tau$  al centro della corda è pari al valore medio delle  $\tau$  sulla corda ed è dato dal rapporto tra il flusso e lo spessore

$$\tau(0, s) = \tau_m = \frac{q}{\delta}.$$

La variazione del flusso lungo la linea media è fornita dalle condizioni di equilibrio. Osservando infatti che il flusso attraverso una qualsiasi porzione di contorno è nullo, si applichi il teorema della divergenza alla porzione di sezione  $A(s)$  compresa tra le due corde di ascissa 0 ed  $s$  (fig. 1.5).

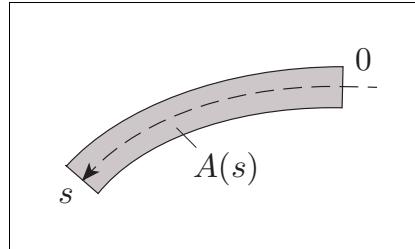


Fig. 1.5

Denotando con  $\sigma'_{\text{MED}}$  il valore medio di  $\sigma'$  lungo la corda, si ha che

$$q(s) - q(0) = \int_{A(s)} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} dA = - \int_0^s \sigma'_m \delta ds = - \int_0^s \sigma' \delta ds.$$

Poiché  $\sigma'$  varia linearmente sulla corda, il valor medio  $\sigma'_{\text{MED}}$  è pari al valore che  $\sigma'$  assume sulla linea media.

Derivando rispetto ad  $s$  si ottiene

$$\frac{dq}{ds} = -\sigma' \delta(s).$$

Ne segue che il flusso  $q(s)$  è stazionario in corrispondenza della corda il cui punto medio appartiene all'asse neutro del taglio.

Si deduce ora un semplice risultato di carattere geometrico.

Si consideri il tratto di sezione sottile di fig. 1.6. Denotando con  $\mathbf{r}$  il raggio vettore di un punto della linea media, essendo  $\mathbf{r} \times \mathbf{t}$  diretto secondo  $\mathbf{k}$ , si ha che

$$\mathbf{r} \times \mathbf{t} = [\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{t})] \mathbf{k}.$$

Inoltre, essendo  $\mathbf{t} = \mathbf{k} \times \mathbf{n}$ , risulta

$$\mathbf{r} \times \mathbf{t} = [\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{n})] \mathbf{k} = [(\mathbf{k} \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{n})] \mathbf{k} = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{k}.$$

Applicando il teorema della divergenza al triangoloide campito in grigio in fig. 1.6 (a) ed osservando che

- $\operatorname{div} \mathbf{r} = 2$ ,
- il prodotto scalare  $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$  è nullo lungo i lati rettilinei,

si ottiene

$$\int_0^s \mathbf{r} \times \mathbf{t} ds = \mathbf{k} \int_0^s \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = 2 \Omega(s) \mathbf{k}.$$

L'area  $\Omega(s)$  tratteggiata in fig. 1.6 (a) è detta *area settoriale* relativa al polo  $O$  ed al settore  $\{0, s\}$  della sezione sottile.

Derivando si ottiene

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}.$$

Tale formula può essere dedotta per via elementare osservando che  $h = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$  è l'altezza del triangolo di base infinitesima  $ds$  ed area  $d\Omega(s)$  di fig. 1.6 (b).

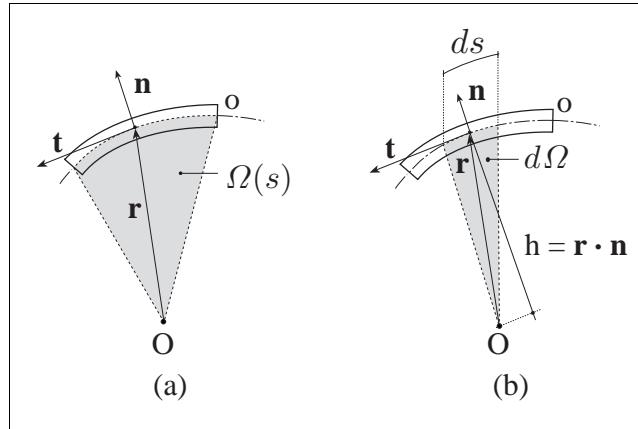


Fig. 1.6

Per dedurre l'espressione della variazione dell'ingombramento lungo la linea media, si consideri un tratto di trave compreso tra due sezioni trasversali poste a distanza unitaria e due sezioni longitudinali in corrispondenza dei valori  $\{0, s\}$  dell'ascissa curvilinea.

Si può procedere in due modi alternativi.

### ■ Primo metodo.

Si osservi preliminarmente che, essendo  $\tau = \tau \mathbf{t}$  e  $\gamma = \tau/G$ , risulta  $\gamma = \gamma \mathbf{t}$  con  $\gamma = \tau/G$ .

Si denoti con  $w(s)$  la restrizione della funzione di ingombramento alla linea media della sezione sottile. Dall'espressione dello scorrimento

$$\gamma = \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} + \text{grad } w,$$

ponendo  $\mathbf{t} = \mathbf{k} \times \mathbf{n} = \mathbf{Rn}$  si deduce che

$$\gamma = \gamma \cdot \mathbf{t} = \theta' \mathbf{R} \mathbf{r} \cdot \mathbf{t} + \text{grad } w \cdot \mathbf{t} = \theta' \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + \frac{\partial w}{\partial s},$$

e cioè che

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \gamma - \theta' \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \frac{\tau}{G \delta} - \theta' \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}.$$

Integrando lungo la linea media nell’intervallo  $\{0, s\}$  si giunge alla formula

$$w(s) - w(0) = \int_{A(s)} \frac{\tau}{G \delta} \, da - 2 \Omega(s) \theta' = \int_0^s \frac{q}{G \delta} \, ds - 2 \Omega(s) \theta'.$$

### ■ Secondo metodo.

Si applichi il principio dei lavori virtuali considerando quale *sistema degli spostamenti* il tratto di trave di fig.1.7 e quale *sistema delle forze* quello di fig.1.8 in cui si è posto  $\mathbf{w} = w \mathbf{k}$ . Il sistema delle forze è costituito da

- un campo di forze per unità di lunghezza, costanti e tangenti alla linea media delle sezioni sottili di estremità, e di intensità pari a  $q^*$ ,
- un campo di forze per unità di lunghezza dirette secondo l’asse della trave, agenti sulle facce dei sezionamenti longitudinali con verso opposto ed intensità pari a  $q^*$ .

Tale sistema di forze è in equilibrio con il campo di tensioni tangenziali aventi flusso  $q^*$  attraverso le corde della sezione.

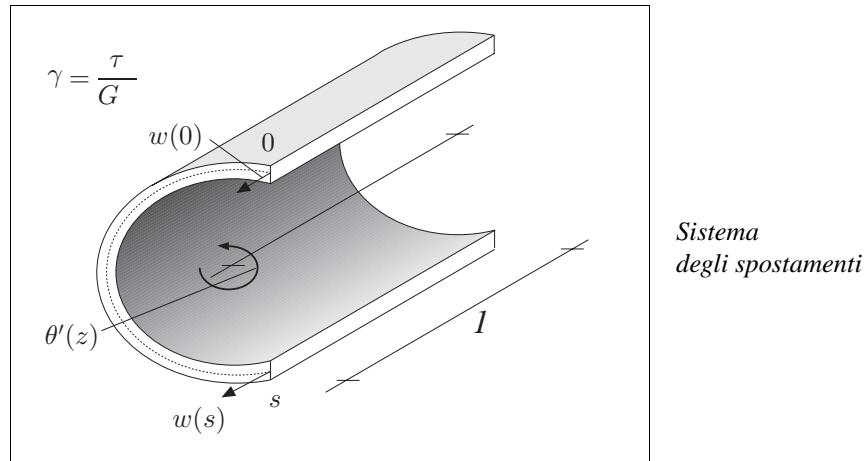


Fig. 1.7

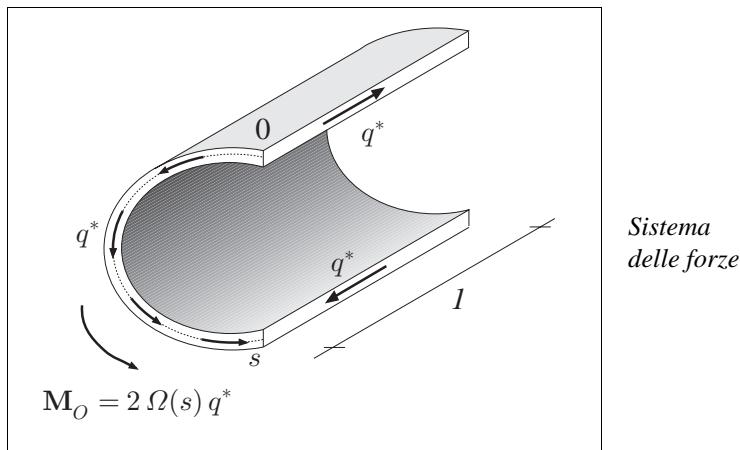


Fig. 1.8

Il momento rispetto ad  $O$  del flusso  $q^*$  è pari a

$$\mathbf{M}_O = \int_0^s \mathbf{r} \times q^* \cdot \mathbf{t} \, ds = 2 \Omega(s) q^* \mathbf{k},$$

e dunque, denotando con  $w(s)$  la funzione ingobbamento lungo la linea media, il principio dei lavori virtuali fornisce

$$q^* \left[ w(s) - w(0) + 2 \Omega(s) \theta' \right] = \int_{A(s)} \frac{q^*}{\delta} \gamma \, da,$$

e cioè, essendo  $da = \delta \, ds$ :

$$w(s) - w(0) + 2 \Omega(s) \theta' = \int_{A(s)} \frac{\tau}{G \delta} \, da = \int_0^s \frac{q}{G \delta} \, ds.$$

■ Il campo delle tensioni tangenziali in una sezione sottile si considera come somma di due campi complementari

- le  $\tau$  da torsione, caratterizzate dalle condizioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 2G\theta'(z), \end{cases}$$

- le  $\tau$  da taglio, caratterizzate dalle condizioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma', \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 0. \end{cases}$$

### 1.1. Le tensioni tangenziali da torsione

Le tensioni tangenziali da torsione soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = 0 & \text{su } A, \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A, \end{cases} \quad \begin{matrix} & \text{Equilibrio} \\ & \end{matrix}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\tau} = 2G\theta'(z). \quad \begin{matrix} & \text{Congruenza} \\ & \end{matrix}$$

*Condizioni sulle  
tensioni tangenziali  
da torsione*

Esse impongono che il campo vettoriale delle  $\boldsymbol{\tau}$  sia solenoidale (cioè a divergenza nulla) ed a rotore costante e che la sezione sia un tubo di flusso per il campo delle tensioni tangenziali.

Dall'annullarsi della divergenza e dalla condizione di tangenza al contorno, in virtù del teorema della divergenza, si deduce che il flusso attraverso la generica corda è costante in ogni ramo della sezione sottile. Infatti risulta

$$q(s) - q(0) = \int_{A(s)} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, dA = 0.$$

La determinazione della distribuzione delle  $\boldsymbol{\tau}$  da torsione in una sezione sottile si conduce utilizzando la soluzione di tre tipologie fondamentali di geometria della sezione:

- 1) i *tubi sottili*,
- 2) le *sezioni sottili aperte a spessore costante*,
- 3) le *sezioni multicellulari*.

#### 1.1.1. I tubi sottili

La soluzione approssimata del problema della torsione per sezioni tubolari sottili è dovuta a R. BREDT [1].

Si consideri una sezione sottile tubolare come in fig.1.9. Il flusso delle tensioni tangenziali è costante e rappresenta la risultante per unità di lunghezza lungo la linea media.

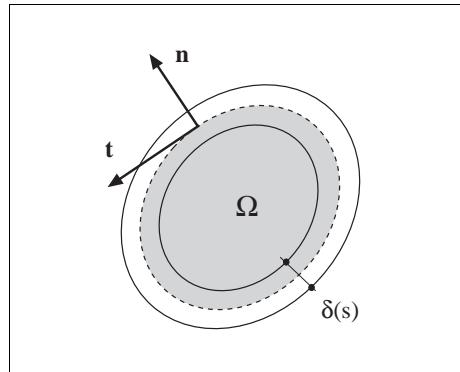


Fig. 1.9

Le caratteristiche della sollecitazione valgono dunque:

$$\mathbf{R} = \oint q \mathbf{t} \, ds = q \oint \mathbf{t} \, ds = q \oint \frac{d\mathbf{r}}{ds} \, ds = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}_t = \oint \mathbf{r} \times q \mathbf{t} \, ds = q \oint \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, ds \mathbf{k} = 2q \Omega \mathbf{k},$$

ove  $\Omega$  è l'area racchiusa dalla linea media.

La sollecitazione è dunque una coppia torcente ed il valore medio delle  $\tau$  è dato da

$$\tau_m(s) = \frac{q}{\delta(s)} = \frac{M_t}{2\Omega\delta(s)}.$$

*Prima formula di BREDT*

La rigidezza torsionale  $K_t = M_t/\theta'$  della sezione tubolare si ottiene imponendo una condizione di congruenza sull'ingombramento  $w$  della linea media della sezione sottile. Si supponga infatti di effettuare un sezionamento longitudinale nella trave.

Dall'espressione dell'ingombramento, imponendo che i lembi del sezionamento longitudinale non subiscano spostamenti longitudinali relativi in corrispondenza della linea media, si ha che

$$2\Omega\theta' = \frac{q}{G} \oint \frac{1}{\delta(s)} \, ds.$$

Esprimendo quindi il flusso in funzione del momento torcente mediante la prima formula di BREDT, si ottiene

$$2\Omega\theta' = \frac{M_t}{2\Omega G} \oint \frac{1}{\delta(s)} \, ds.$$

Si perviene così alla seguente espressione della *rigidezza torsionale*

$$K_t = G \frac{4 \Omega^2}{\oint \frac{1}{\delta(s)} ds}.$$

*Seconda formula di BREDT*

Nel caso di spessore costante la formula si semplifica in

$$K_t = G \frac{4 \Omega^2 \delta}{l},$$

ove  $l$  è la lunghezza della linea media.

Il valore dell'oscillazione della  $\tau$  lungo la corda rispetto al valore medio è

$$\Delta\tau = \tau_{max} - \tau_m = \frac{\partial n}{\partial \tau} \frac{\delta}{2} = 2G\theta' \frac{\delta}{2} = \frac{q\delta}{2\Omega} \oint \frac{1}{\delta} ds,$$

e, nel caso di spessore costante

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_m} = \frac{l\delta}{2\Omega} = \frac{A}{2\Omega},$$

ove  $A = l\delta$  è l'area della sezione sottile.

### 1.1.2. Le sezioni sottili aperte con spessore costante

Si consideri ora la sezione rettangolare sottile di figura 1.10. Il flusso delle  $\tau$  da torsione, essendo costante lungo la linea media e nullo sulle corde terminali che appartengono al contorno della sezione, sarà nullo su ogni corda.

L'andamento delle linee di flusso delle  $\tau$  è suggerito dall'analogia idrodinamica ed è indicato in fig.1.10:

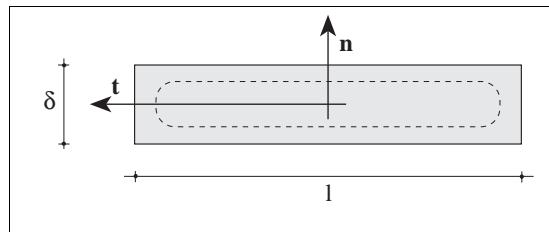


Fig. 1.10

Escludendo le zone terminali della sezione, esse sono rettilinee e parallele al lato maggiore del rettangolo. Sulle corde non prossime agli estremi si ha dunque:

$$\frac{\partial \tau(n)}{\partial n} = 2G\theta'(z)$$

da cui, osservando che  $\tau(0) = \tau_m = q/\delta = 0$  si ha:

$$\tau(n) = 2G\theta'(z)n.$$

Per calcolare la rigidezza torsionale si considera la sezione come l'insieme di infiniti tubi di flusso elementari (fig. 1.11), a ciascuno dei quali può applicarsi la trattazione effettuata per i tubi sottili.

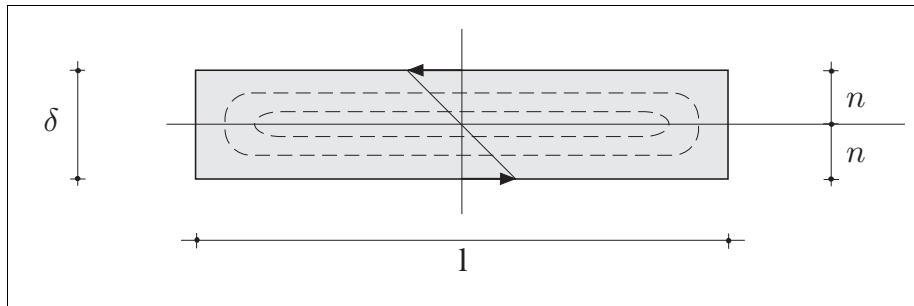


Fig. 1.11

Applicando allora la prima formula di BREDET al generico tubo di flusso elementare si ottiene l'aliquota elementare di momento torcente:

$$dM(n) = 2\Omega(n)dq(n) = 2\Omega(n)\tau(n)dn,$$

ove  $\Omega(n) = 2ln$  è l'area racchiusa dal tubo di flusso.

Sostituendo l'espressione di  $\Omega(n)$  e quella precedentemente ricavata per  $\tau(n)$  ed integrando si ha:

$$M_t = \int_0^{\frac{\delta}{2}} dM(n) = 8G\theta'(z)l \int_0^{\frac{\delta}{2}} n^2 dn = G\theta'(z) \frac{l\delta^3}{3}$$

e dunque:

$$K_t = G \frac{l\delta^3}{3}, \quad \theta' = \frac{3M_t}{Gl\delta^3},$$

$$\tau(n) = \frac{6M_t}{l\delta^3}n, \quad \tau_{max} = \frac{3M_t}{l\delta^2}.$$

*Formule per la sezione sottile rettangolare*

Si consideri ora una generica sezione sottile aperta di spessore costante come in fig.1.12.

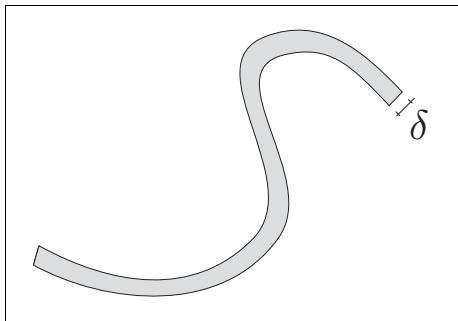


Fig. 1.12

L'andamento delle linee di flusso delle  $\tau$  da torsione è con buona approssimazione coincidente con quello che si avrebbe in una sezione rettangolare sottile avente eguale larghezza e spessore.

La trattazione esposta si può dunque applicare al caso generale.

### 1.1.3. Le sezioni multicellulari

Si consideri una sezione sottile multicellulare del tipo di quella indicata in fig.1.13.

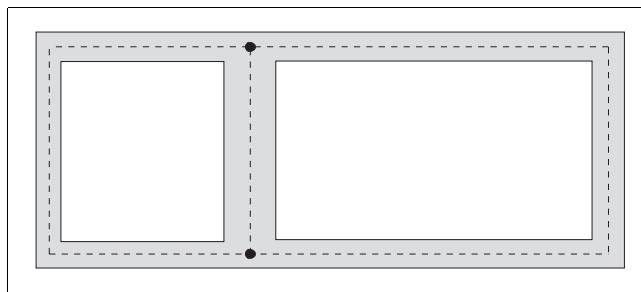


Fig. 1.13

In ogni *ramo* della sezione il flusso delle  $\tau$  da torsione è costante e la somma dei flussi uscenti da ogni *nodo* è nulla.

Si denoti con  $t$  il numero dei rami, con  $n$  il numero dei nodi.

Un insieme di maglie è *indipendente* se ciascuna di esse contiene un ramo di propria esclusiva pertinenza.

Un insieme massimale di maglie indipendenti è una *base di maglie*.

Tutte le basi di maglie sono costituite dallo stesso numero  $m$  di maglie e tale numero è pari al grado di connessione del reticolo, aumentato di una unità.

Le incognite del problema sono

- i  $t$  flussi nei rami,
- il valore della curvatura torsionale  $\theta'$ .

Esse devono soddisfare le seguenti equazioni.

- $n - 1$  equazioni indipendenti che esprimono l'annullarsi del flusso totale uscente da ogni nodo.

Esse equivalgono ad imporre l'equilibrio del nodo alla traslazione in direzione longitudinale

$$\sum_{j \in J(i)} q_j = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

dove  $q_j$  denota il flusso nel  $j$ -esimo tratto, considerato positivo se uscente dal nodo  $i$ , e  $j$  varia nell'insieme  $J(i)$  degli indici dei tratti afferenti al nodo  $i$ .

- La condizione di equilibrio che impone al momento torcente risultante dei flussi di eguagliare il momento torcente agente sulla sezione

$$\sum_{j=1}^t \int_j \mathbf{r} \times q_j \mathbf{t} \, ds = M_t,$$

dove l'integrale è esteso alla linea media del  $j$ -esimo tratto.

- $m$  condizioni di congruenza sulle maglie

$$\oint_j \tau(s) \, ds = 2G \Omega_j \theta', \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Infatti, supponendo di effettuare  $m$  sezionamenti longitudinali nella trave senza renderla sconnessa, i lembi dei sezionamenti non devono subire, nell'ingombramento della sezione, alcuno scorrimento relativo.

Poiché sussiste la relazione

$$m + n = t + 1,$$

il numero delle incognite è pari al numero delle equazioni indipendenti. ed il sistema lineare ammette una ed una sola soluzione.

In effetti per risolvere il problema conviene operare in modo diverso.

A tal fine si definiscano

- *m flussi di maglia* in corrispondenza di una base di maglie.

In ogni maglia della base il flusso è pari a quello che compete al ramo di sua esclusiva pertinenza.

Tutti i flussi di maglia sono assunti positivi con lo stesso verso di rotazione.

I flussi nei rami si ottengono come somma algebrica dei flussi di maglia nelle due maglie che hanno in comune quel ramo.

Le condizioni di equilibrio nei nodi risultano pertanto identicamente soddisfatte.

Le condizioni di congruenza si impongono in modo approssimato considerando solo gli spostamenti longitudinali della linea media della sezione sottile.

Siano  $q_1, \dots, q_m$ , i flussi di maglia, assunti tutti positivi nello stesso verso, ad esempio antiorario (fig. 1.14). Il flusso nel generico ramo appartenente alle maglie  $i$  e  $j$  è dato da

$$q_{ij} = q_i - q_j .$$

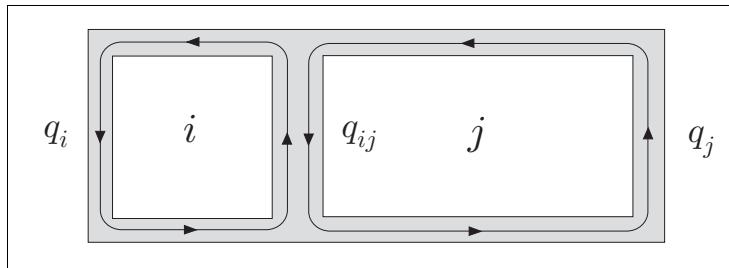


Fig. 1.14

Le condizioni di congruenza dell'ingobbamento  $w$  per le  $m$  maglie indipendenti si scrivono:

$$2G\Omega_i\theta' = \oint_i \tau(s) \, ds = q_i \left[ \oint_i \frac{1}{\delta} \, ds \right] - \sum_{j=1}^m q_j \left[ \int_{ij} \frac{1}{\delta} \, ds \right] \quad i = 1, \dots, m ,$$

in cui

- nella sommatoria si assume che  $j \neq i$ ,
- il pedice  $ij$  indica che l'integrale è esteso al tratto comune alle maglie  $i$  e  $j$  e si assume nullo se esse non hanno un tratto in comune.

Il sistema lineare di  $m$  equazioni indipendenti

$$2G\Omega_i = q_i^* \left[ \oint_i \frac{1}{\delta} \, ds \right] - \sum_{j=1}^m q_j^* \left[ \int_{ij} \frac{1}{\delta} \, ds \right] \quad i = 1, \dots, m ,$$

consente di calcolare le  $m$  incognite  $q_i^* = q_i / \theta'$ .

Risolvendo il sistema lineare di ordine  $m$  così ottenuto per un arbitrario valore di  $\theta'$  si ottengono i rapporti  $q_i / \theta'$ .

Il momento torcente  $M_{ti}$  relativo al flusso di maglia  $q_i$  si valuta mediante la prima formula di BREDT

$$M_{ti} = 2 q_i \Omega_i,$$

ove  $\Omega_i$  è l'area racchiusa dalla linea media dell'  $i$ -esima maglia.

Il momento torcente totale è dato da

$$M_t = \sum_{i=1}^m M_{ti} = 2 \sum_{i=1}^m q_i \Omega_i = 2 \theta' \sum_{i=1}^m \left( q_i^* \Omega_i \right).$$

Pertanto la *rigidezza torsionale* della sezione multicellulare è fornita dalla formula

$$K_t = 2 \sum_{i=1}^m \left( q_i^* \Omega_i \right),$$

da cui si ottengono le espressioni della *curvatura torsionale* e dei *flussi di maglia* delle tensioni tangenziali

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{M_t}{K_t}, \\ q_i &= \theta' \left( \frac{q_i}{\theta'} \right), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

**Osservazione 1.1.** Si noti l'analogia formale del sistema di equazioni di congruenza con il sistema di equazioni di KIRCHHOFF per la determinazione della distribuzione dell'intensità di corrente in una rete elettrica resistiva.

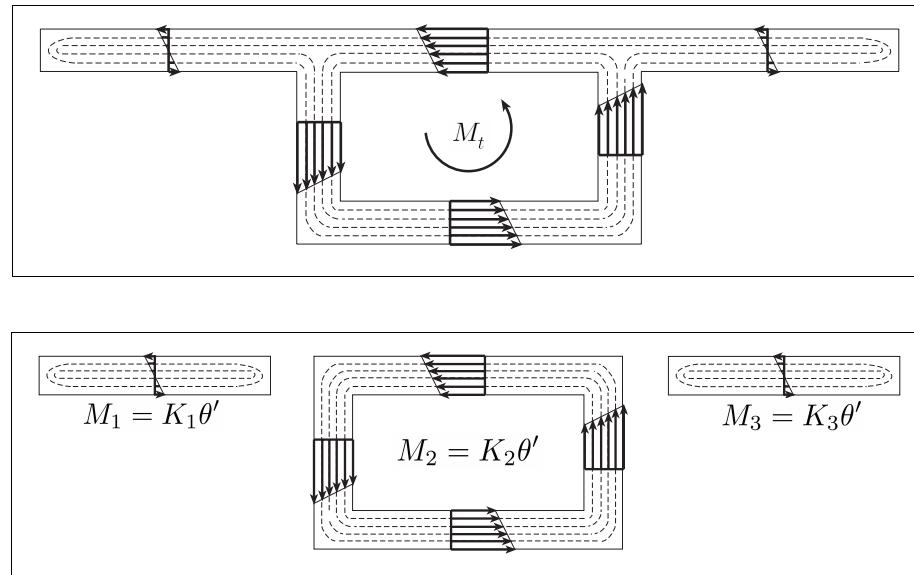
L'analogia consiste nell'identificare

- $2 G \Omega_i \theta'$  con la *forza elettromotrice* relativa alla maglia  $i$ ,
- $1/\delta$  con la *resistenza* per unità di lunghezza,
- $q_i$  con l'*intensità di corrente* nella maglia  $i$ .

Tale analogia ha suggerito il metodo di calcolo dei flussi delle tensioni tangenziali in termini di flussi di maglie. ■

### 1.1.4. Le sezioni sottili composte

Si consideri una sezione sottile composta da un insieme di *sezioni sottili semplici* e cioè da sezioni sottili appartenenti ad una delle tipologie per le quali è disponibile una soluzione approssimata.



Ciò significa che la sezione può essere suddivisa, mediante sezionamenti ideali, in un insieme di  $p$  sezioni senza che l'andamento delle linee di flusso, suggerito dall'analogia idrodinamica, venga sostanzialmente alterato.

La curvatura torsionale è la stessa per tutte le sezioni semplici che compongono la sezione e quindi valgono le relazioni

$$M_i = K_i \theta' \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

dove

- $M_i$  rappresenta l'aliquota di momento torcente sulla sezione  $i$ -esima,
- $K_i$  è la rigidezza torsionale della sezione  $i$ -esima,
- $\theta'$  è la curvatura torsionale della trave.

L'equilibrio globale richiede che il momento torcente totale sia pari alla somma di quelli agenti sulle singole sezioni semplici

$$M_t = \sum_{i=1}^p M_i = \theta' \sum_{i=1}^p K_i .$$

La rigidezza torsionale della sezione composta è quindi pari alla somma delle rigidezze torsionali delle sezioni semplici che la costituiscono

$$K_t = \frac{M_t}{\theta'} = \sum_i K_i.$$

Il momento torcente agente sulla singola sezione semplice si ottiene quindi con la formula di ripartizione:

$$M_i = M_t \frac{K_i}{K_t}.$$

Si possono allora considerare separatamente le singole sezioni semplici, ognuna soggetta all'aliquota di momento torcente che le compete.

Il rapporto  $K_i / K_t$  ha dunque il significato di *coefficiente di ripartizione* del momento torcente tra le varie parti semplici in cui è stata scomposta la sezione.

## 1.2. Le tensioni tangenziali da taglio

Le tensioni tangenziali da taglio soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau = -\sigma' & \text{su } A \\ \tau \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial A \\ \operatorname{rot} \tau = 0 & \end{cases}$$

*Condizioni sulle tensioni tangenziali da torsione*

Esse impongono che il campo vettoriale delle  $\tau$  abbia pozzi costituiti dalla rapidità di variazione della tensione normale lungo l'asse della trave e sia a rotore nullo. La sezione deve inoltre essere un tubo di flusso ter il campo delle tensioni tangenziali.

Infatti l'annullarsi del rotore delle  $\tau$  equivale alla condizione  $\theta'(z) = 0$ , essendo

$$\operatorname{rot} \tau = 2G\theta'(z) = 0.$$

Poiché inoltre

$$\operatorname{rot} \tau = \frac{\partial \tau}{\partial n},$$

ne segue che le  $\tau$  sono costanti lungo la generica corda e dunque si può scrivere

$$\tau(s) = \frac{q(s)}{\delta(s)}.$$

Dalla condizione differenziale di equilibrio

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\tau} = -\sigma' = -E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r} = -(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r},$$

si evince che l’andamento del flusso delle tensioni tangenziali da taglio  $q(s)$  in un ramo della sezione sottile è dato da

$$\begin{aligned} q(s_2) - q(s_1) &= - \int_{A(s_1, s_2)} \operatorname{div} \boldsymbol{\tau} \, ds = - \int_{s_1}^{s_2} \sigma'(s) \delta(s) \, ds = - \int_{s_1}^{s_2} E \delta(s) \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}(s) \, ds = \\ &= - \int_{s_1}^{s_2} E \delta(s) \mathbf{r}(s) \, ds \cdot \mathbf{g}' = -E \mathbf{S}_G(s_1, s_2) \cdot \mathbf{g}' = \\ &= -\mathbf{S}_G(s_1, s_2) \cdot (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}), \end{aligned}$$

dove  $A(s_1, s_2)$  è il tratto di sezione sottile compreso tra le ascisse  $s_1$  e  $s_2$  e  $\mathbf{S}_G(s_1, s_2)$  è il relativo momento del primo ordine rispetto al baricentro.

La derivata del flusso ha l’espressione

$$\frac{dq(s)}{ds} = -\sigma'(s) \delta(s) = -\delta(s) E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}(s) = -\delta(s) (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r}(s).$$

Se gli assi  $x$  e  $y$  sono principali d’inerzia, le relazioni precedenti si scrivono in termini di componenti

$$\begin{aligned} q(s_2) - q(s_1) &= - \left( \frac{T_x}{J_{Gx}} S_{Gx}(s_1, s_2) + \frac{T_y}{J_{Gy}} S_{Gy}(s_1, s_2) \right), \\ \frac{dq(s)}{ds} &= -\delta(s) \left( \frac{T_x}{J_{Gx}} x(s) + \frac{T_y}{J_{Gy}} y(s) \right). \end{aligned}$$

Si osservi che in particolare

Il campo di flussi  $q(s)$  delle tensioni tangenziali da taglio dipende linearmente dal vettore  $\mathbf{T}$  della forza tagliente e dal gradiente  $\mathbf{g}'$  delle  $\varepsilon'$ .

### 1.3. Le sezioni sottili aperte

Si consideri la sezione sottile aperta riportata in fig.1.15.

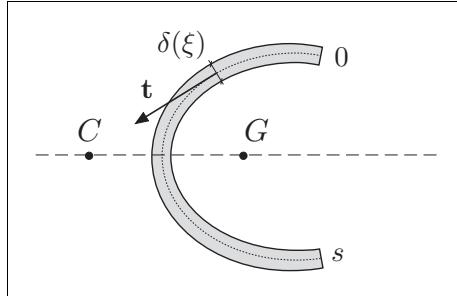


Fig. 1.15

Se  $O$  è un origine dell'ascissa curvilinea, dall'espressione

$$\frac{dq}{ds} = -\sigma'(s) \delta(s) = -\delta(s) E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}(s) - \delta(s) (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r}(s),$$

si ha

$$q(s) - q(0) = - \int_0^s E \delta(\xi) \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}(\xi) d\xi = -E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{S}_G(s) = -(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S}_G(s),$$

dove  $\mathbf{S}_G(s)$  il momento statico del tratto di sezione compreso tra le ascisse  $0$  ed  $s$  valutato rispetto al baricentro della sezione.

Se l'origine  $O$  coincide con un estremo della linea media della sezione sottile aperta risulta  $q(0) = 0$  e dunque

$$q(s) = -(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S}_G(s).$$

**Osservazione 1.2.** Tenendo conto che i flussi  $q(0)$  e  $q(l)$  in corrispondenza delle corde estreme sono nulli e ricordando l'espressione della derivata del flusso rispetto alla ascissa curvilinea, si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \int_0^l q(s) \mathbf{t} ds = \int_0^l q(s) \frac{d\mathbf{r}}{ds} ds = q \mathbf{r} \Big|_0^l - \int_0^l \mathbf{r} \frac{dq}{ds} ds = \\ &= \int_0^l \delta \mathbf{r} (\mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}) ds = \left[ \int_0^l (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \delta ds \right] \mathbf{g}' = \mathbf{J}_G \mathbf{g}' = \mathbf{T}. \end{aligned}$$

L'ultima uguaglianza si ricava dalla relazione:

$$\int_0^l (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \delta \, ds = \int_A (\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}) \, da = \mathbf{J}_G.$$

Si è così verificato che il risultante  $\mathbf{R}$  delle tensioni tangenziali  $\tau$  da taglio è uguale all'interazione tagliente. ■

#### 1.4. Le sezioni sottili tubolari

Si consideri la sezione tubolare sottile riportata in fig.1.16.

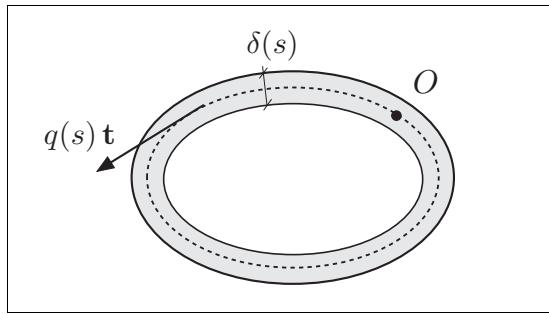


Fig. 1.16

Scelta a piacere un'origine  $O$  dell'ascissa curvilinea, integrando l'espressione

$$\frac{dq}{ds} = -\sigma'(s) \delta(s) = -\delta(s) E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{r}(s) = -\delta(s) (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r}(s),$$

si ha che

$$q(s) - q(0) = - \int_0^s \delta(s) (\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{r}(s) \, ds = -(\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}) \cdot \mathbf{S}_G(s),$$

dove  $\mathbf{S}_G(s)$  è il momento statico del tratto di sezione compreso tra le ascisse 0 ed  $s$  valutato rispetto al baricentro della sezione.

Se il riferimento è principale d'inerzia, si ha, in termini di componenti

$$q(s) - q(0) = - \left[ \frac{T_x}{J_{Gx}} S_{Gx}(s) + \frac{T_y}{J_{Gy}} S_{Gy}(s) \right].$$

Per determinare il valore del flusso delle tensioni tangenziali  $q(0)$  all'ascissa di riferimento, si effettua un sezionamento longitudinale nella sezione tubolare in corrispondenza dell'ascissa  $s = 0$ .

Si denoti con  $q_o(s) = q(s) - q(0)$  la distribuzione del flusso delle tensioni tangenziali da taglio nella sezione sottile aperta così ottenuta.

La condizione di congruenza impone l'egualianza dell'ingombramento in corrispondenza dei lembi estremi del taglio. Tenendo presente che  $\theta' = 0$ , si ha

$$0 = \oint \tau_m(s) \, ds = \oint \frac{q(s)}{\delta(s)} \, ds = \oint \frac{q_o(s) + q(0)}{\delta(s)} \, ds,$$

da cui si deduce che

$$q(0) = - \frac{\oint \frac{q_o(s)}{\delta(s)} \, ds}{\oint \frac{1}{\delta(s)} \, ds}.$$

Se lo spessore è costante l'espressione si specializza in

$$q(0) = - \frac{1}{l} \oint q_o(s) \, ds.$$

### 1.5. Le sezioni sottili multicellulari

Si consideri una sezione sottile multicellulare soggetta a taglio.

La determinazione del flusso delle tensioni tangenziali da taglio si consegna rendendo aperta la sezione mediante un numero di sezionamenti longitudinali pari al numero massimale di maglie indipendenti.

In ogni maglia di una base di maglie costituita da  $m$  elementi, si effettua quindi un sezionamento longitudinale in corrispondenza del tratto di propria esclusiva pertinenza.

Un esempio è fornito in fig. 1.17.

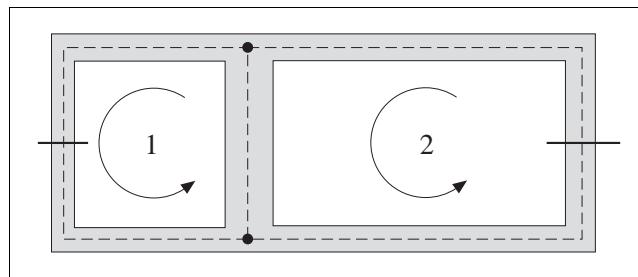


Fig. 1.17

Si calcola così la distribuzione del flusso  $q(s)$  nella sezione resa aperta.

Per ristabilire la congruenza dell'ingobbamento ai lembi dei sezionamenti si aggiunge un insieme di flussi di maglia  $q_i$  che, avendo risultante nulla, comportano solo una traslazione dell'asse centrale della sollecitazione, lasciando inalterato lo sforzo di taglio risultante.

In ogni ramo della  $i$ -esima maglia il flusso totale è dato da

$$q(s) + q_i - q_j,$$

dove  $j \neq i$  è l'indice della maglia che ha in comune con la maglia  $i$ -esima il ramo in questione.

I flussi  $q_j$  si determinano imponendo la condizione che sia nullo lo spostamento longitudinale relativo in corrispondenza dei lembi di ogni sezionamento longitudinale:

$$\oint_i \frac{q(s) + q_i}{\delta(s)} \, ds - \sum_{j \in J(i)} q_j \int_{ij} \frac{1}{\delta(s)} \, ds = 0,$$

e cioè

$$q_i \left[ \oint_i \frac{1}{\delta(s)} \, ds \right] - \sum_{j \in J(i)} q_j \left[ \int_{ij} \frac{1}{\delta(s)} \, ds \right] = - \oint_i \frac{q(s)}{\delta(s)} \, ds,$$

Si ottiene così un sistema lineare di  $m$  equazioni indipendenti negli  $m$  incogniti flussi di maglia  $q_i$ .

Esso consente di valutare in modo univoco i flussi di maglia e quindi la distribuzione delle tensioni tangenziali da taglio.

### 1.6. Il centro di taglio delle sezioni sottili

Siano  $q_1(s)$  e  $q_2(s)$  i flussi delle tensioni tangenziali in corrispondenza delle sollecitazioni taglienti  $\mathbf{T}_1$  e  $\mathbf{T}_2$ .

Il flusso corrispondente alla generica sollecitazione

$$\mathbf{T} = c_1 \mathbf{T}_1 + c_2 \mathbf{T}_2,$$

è dunque dato da

$$q(s) = c_1 q_1(s) + c_2 q_2(s).$$

Sia  $C$  è il punto di intersezione degli assi centrali dei campi delle tensioni tangenziali cui corrispondono i flussi  $q_1$  e  $q_2$ , e cioè il punto del piano della sezione retta rispetto al quale è nullo il momento risultante di entrambi i sistemi di forze.

Per la linearità delle equazioni cardinali della statica, essendo  $M_1 = M_2 = 0$  segue che

$$M = c_1 M_1 + c_2 M_2 = 0,$$

e cioè il momento risultante del sistema di forze corrispondente al flusso  $q(s)$  è nullo. Dunque l'asse centrale del sistema di forze corrispondente ad un qualsiasi flusso  $q(s)$  di tensioni tangenziali da taglio passa per il punto  $C$ .

Il punto  $C$  è il *centro di taglio* della sezione.

- Il centro di taglio è quindi definito come il polo rispetto al quale deve essere nullo il momento torcente affinché risulti nulla la curvatura torsionale.

La posizione del centro di taglio si determina pertanto imponendo che sia nullo il momento risultante rispetto a  $C$  del flusso di una qualsiasi distribuzione di tensioni tangenziali da taglio.

L'equazione che definisce il vettore posizione  $\mathbf{r}_C$  del centro di taglio rispetto al baricentro elastico è quindi la seguente:

$$\int_0^l (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{t}(s) q(s) ds = 0,$$

in cui  $q(s)$  è il flusso delle tensioni tangenziali in equilibrio con uno sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  agente sulla sezione.

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{k}$  ambo i membri dell'equazione precedente si ha

$$\int_0^l \mathbf{r}_C \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{k} q(s) ds = \int_0^l \mathbf{r} \times \mathbf{t} \cdot \mathbf{k} q(s) ds.$$

Ponendo  $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{t}$  risulta  $\mathbf{r} \times \mathbf{t} = -(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{k}$  e dunque si ha che il raggio vettore che unisce il baricentro al centro di taglio si determina con la condizione

$$\int_0^l \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n} q(s) ds = \int_0^l \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} q(s) ds.$$

Il centro di taglio dipende solo dalla geometria della sezione retta e quindi l'espressione precedente può essere formulata in termini di sole caratteristiche geometriche.

Nelle prossime sezioni questa riformulazione viene esplicitata nei due casi di sezioni sottili aperte e multicellulari.

### 1.6.1. Il centro di taglio delle sezioni sottili aperte

Sostituendo nella formula precedente l'espressione del flusso delle tensioni tangenziali da taglio nelle sezioni sottili aperte

$$q(s) = -E \mathbf{S}_G(s) \cdot \mathbf{g}',$$

il primo membro si scrive

$$\begin{aligned} \int_0^l (\mathbf{r}_C \times \mathbf{t}(s)) \cdot \mathbf{k} q(s) \, ds &= \int_0^l [(\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n}(s)) E \mathbf{S}_G \cdot \mathbf{g}'] \, ds = \\ &= \left[ \int_0^l (E \mathbf{S}_G(s) \otimes \mathbf{n}(s)) \, ds \right] \mathbf{r}_C \cdot \mathbf{g}', \end{aligned}$$

ed il secondo membro diventa

$$\int_0^l (\mathbf{r}(s) \times \mathbf{t}(s)) \cdot \mathbf{k} q(s) \, ds = \left[ \int_0^l (E \mathbf{S}_G \otimes \mathbf{n}) \mathbf{r}(s) \, ds \right] \cdot \mathbf{g}'.$$

Dunque il sistema lineare che fornisce la posizione  $\mathbf{r}_C$  del centro di taglio è

$$\left[ \int_0^l \mathbf{S}_G(s) \otimes \mathbf{n}(s) \, ds \right] \mathbf{r}_C = \int_0^l (\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \mathbf{S}_G(s) \, ds.$$

### 1.6.2. Il centro di taglio delle sezioni sottili multicellulari

Se la sezione sottile è multicellulare, il flusso in ogni ramo della  $i$ -esima maglia è dato da

$$q(s) + q_i - q_j,$$

dove  $j \neq i$  è l'indice della maglia che ha in comune con la maglia  $i$ -esima il ramo in questione.

Poiché il flusso delle  $\tau$  da taglio da sezione aperta è dato da

$$q(s) = -E \mathbf{g}' \cdot \mathbf{S}_G(s),$$

i flussi di maglia  $q_i, i = 1, \dots, m$  da aggiungere al flusso  $q(s)$  si possono scrivere

$$q_i = E \mathbf{q}_i \cdot \mathbf{g}'.$$

Il sistema lineare di ordine  $m$  che fornisce i flussi di maglia diventa allora

$$\mathbf{q}_i \left[ \oint_i \frac{1}{\delta(s)} ds \right] - \sum_{j \in J(i)} \mathbf{q}_j \left[ \int_{ij} \frac{1}{\delta(s)} ds \right] = - \oint_i \frac{\mathbf{S}_G(s)}{\delta(s)} ds.$$

Il flusso in un ramo è pari a

$$E(-\mathbf{S}_G(s) + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) \cdot \mathbf{g}'.$$

I flussi vettoriali  $\mathbf{q}_i$  hanno per componenti in un riferimento cartesiano i fusi scalari associati rispettivamente a gradienti  $\mathbf{g}'$  diretti secondo gli assi del riferimento.

Definendo il flusso vettoriale in ogni ramo della  $i$ -esima maglia mediate la formula

$$\mathbf{q}(s) = -\mathbf{S}_G(s) + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j,$$

dove  $j \neq i$  è l'indice della maglia che ha in comune con la maglia  $i$ -esima il ramo in questione, e sostituendo nella condizione che individua il centro di taglio, si ha che

$$\int_0^l (\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n}(s)) \mathbf{q}(s) ds = \int_0^l (\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \mathbf{q}(s) ds,$$

e quindi il sistema lineare che fornisce la posizione  $\mathbf{r}_C$  del centro di taglio rispetto al baricentro è

$$\left[ \int_0^l \mathbf{q}(s) \otimes \mathbf{n}(s) ds \right] \mathbf{r}_C = \int_0^l (\mathbf{r}(s) \cdot \mathbf{n}(s)) \mathbf{q}(s) ds.$$

### 1.7. Il tensore dei fattori di taglio per sezioni sottili

In corrispondenza di due sforzi di taglio  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}^*$  si considerino i corrispondenti campi di tensioni tangenziali da taglio  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\boldsymbol{\tau}^*$ .

- Lo *scorrimento medio da taglio*  $\boldsymbol{\eta}$  in una sezione trasversale della trave è definito dalla proprietà di egualanza tra il lavoro virtuale dello sforzo di taglio  $\mathbf{T}^*$  per lo scorrimento  $\boldsymbol{\eta}$  ed il lavoro virtuale del campo di tensioni tangenziali da taglio  $\boldsymbol{\tau}^*$  per il campo di scorrimenti elastici dovuti alle tensioni tangenziali  $\boldsymbol{\tau}$ .

$$\mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\eta} = \int_0^l \frac{q^*}{\delta} \frac{q}{G\delta} \delta ds,$$

Nelle prossime sezioni questa formula viene esplicitata nei due casi di sezioni sottili aperte e multicellulari.

### 1.7.1. Il tensore dei fattori di taglio per sezioni sottili aperte

Sostituendo nella espressione dello scorrimento medio da taglio la formula del flusso delle tensioni tangenziali da taglio  $q$  dovuto allo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$

$$q(s) = -\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_G(s),$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^* \cdot \boldsymbol{\eta} &= \int_0^l [\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{S}_G(s)] [\mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}_G(s)] \frac{1}{G\delta} ds = \\ &= \frac{1}{G} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{J}_G^{-1} \left[ \int_0^l \frac{\mathbf{S}_G(s) \otimes \mathbf{S}_G(s)}{\delta} ds \right] \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T}, \quad \forall \mathbf{T}^*. \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di  $\mathbf{T}^*$  mostra che lo scorrimento  $\boldsymbol{\eta}$  vale

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\chi}{GA} \mathbf{T}.$$

Il *tensore dei fattori di taglio*  $\chi$  ha l'espressione

$$\chi = A \mathbf{J}_G^{-1} \left[ \int_0^l \frac{\mathbf{S}_G(s) \otimes \mathbf{S}_G(s)}{\delta} ds \right] \mathbf{J}_G^{-1}.$$

Si noti che il tensore dei fattori di taglio è adimensionale.

### 1.7.2. Il tensore dei fattori di taglio per sezioni sottili multicellulari

La determinazione del tensore dei fattori di taglio per una sezione sottile multicellulare si conduce in modo perfettamente analogo a quanto visto per le sezioni sottili aperte, tenendo però conto del fatto che il flusso delle tensioni tangenziali da taglio  $q$  dovuto allo sforzo di taglio  $\mathbf{T}$  è espresso dalla formula

$$q(s) = \mathbf{J}_G^{-1} \mathbf{T} \cdot \mathbf{q}(s),$$

dove

$$\boxed{\mathbf{q}(s) = -\mathbf{S}_G(s) + \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j.}$$

Il *tensore dei fattori di taglio*  $\chi$  ha quindi l'espressione

$$\chi = A \mathbf{J}_G^{-1} \left[ \int_0^l \frac{\mathbf{q}(s) \otimes \mathbf{q}(s)}{\delta} ds \right] \mathbf{J}_G^{-1}.$$

## RIFERIMENTI

1. R. BREDT, Kritische Bemerkungen zur Drehungseletizität, *Zeit. Ver. deutsch. Ing.* **40**, 815 (1896).
2. V.Z. VLASOV, Torsion et stabilité des Tiges à Parois Mince et à Profil Ouvert, *Industrie de la Construction*, (1937).
3. S.P. TIMOSHENKO, Theory of Bending Torsion and Buckling of Thin-Walled Members of Open Sections, *Journal Franklin Institut*, vol. 239, (1945).
4. V. FRANCIOSI, Scienza delle Costruzioni, vol. II, Liguori, Napoli (1959).
5. M. CAPURSO, Sul Calcolo delle Travi di Parete Sottile in Presenza di Forze e Distorsioni, note I-V, *Ricerca Scientifica*, (II-A) (1964).
6. J.T. ODEN, Mechanics of Elastic Structures, McGraw-Hill, (1967).
7. V. FRANCIOSI, Problemi di Scienza delle Costruzioni, Vol. I, Liguori, (1975).
8. V.Z. VLASOV, Thin-Walled Elastic Beams, The Israel programm for scientific translation, Jerusalem, (1961).
9. R. BALDACCI, Scienza delle Costruzioni Vol. I-II, UTET, (1970-1976).
10. M. CAPURSO, Lezioni di Scienza delle Costruzioni, Pitagora Editrice, Bologna (1984).
11. L. CORRADI DELL'ACQUA, Meccanica delle Strutture. Le Teorie Strutturali ed il Metodo degli Elementi Finiti, McGraw-Hill, (1992)
12. A. SOLLAZZO, S. MARZANO, Scienza delle costruzioni Vol. 2. Elementi di Meccanica dei Continui e Resistenza dei Materiali. UTET, (1992)
13. L. ASCIONE, Sulla Statica delle Travi di Parete Sottile. Seminari Didattici, Università degli Studi di Napoli Federico II, Napoli, (1995).



## **XII – COMPORTAMENTI ULTRA ELASTICI**

### **1. INTRODUZIONE**

L'energia accumulata da un solido lungo un percorso di deformazione in campo elastico viene integralmente restituita quando il percorso viene chiuso lungo un cammino qualsiasi che ripristini lo stato deformativo iniziale. Il verificarsi di uno scostamento più o meno sensibile della risposta meccanica di un materiale da quella del modello ideale di comportamento elastico è dovuto a fenomeni di dissipazione di energia che rendono irreversibile il processo di deformazione.

A tali fenomeni si fa riferimento come comportamenti ultra-elastici di un materiale.

I comportamenti ultraelastici possono essere schematicamente raggruppati sotto il profilo qualitativo in classi tipologiche che individuano comportamenti plastici, viscosi, viscoelastici, etc.

Ai fini applicativi è però indispensabile stabilire con esattezza quale sia la classe di comportamento cui appartiene ciascun materiale in funzione dello stato termodinamico in cui si trova e delle azioni alle quali è soggetto durante un processo di deformazione.

Sperimentalmente si verifica che ogni materiale, in funzione del tipo e dell'entità dei valori delle variabili di stato e di processo, quali ad esempio sforzi, temperatura, velocità di deformazione, presenta proprietà che lo fanno appartenere ad una delle classi ideali prima citate.

Ad esempio, l'acciaio si comporta elasticamente sotto l'azione di stati tensionali di intensità limitata ed a temperature non eccessive ma presenta un comportamento viscoelastico per effetto di vibrazioni di bassa ampiezza ed alta frequenza. L'acciaio è poi caratterizzato da una viscosità non lineare ad alte temperature e da un comportamento viscoplastico se sottoposto ad elevate velocità di deformazione.

L'analisi delle proprietà meccaniche, elettriche e termiche dei materiali richiede inoltre di indagarne la composizione fisico-chimica ed in particolare la natura delle forze di legame tra le particelle elementari, le strutture microscopiche di aggregazione, la presenza di difetti ed impurità e la loro dinamica in presenza di campi di sforzi e di variazioni di temperatura.

E' questo il campo di indagine della Scienza dei Materiali che, fondata su presupposti teorici e sperimentali propri della Chimica e della Fisica, ha il compito di fornire metodi e criteri all'Ingegneria dei Materiali per la previsione del comportamento dei materiali nello svolgimento delle svariate funzioni cui sono chiamati dalle applicazioni e per la progettazione di nuovi materiali quali aggregati, compositi e polimeri.

## 2. PROVA DI TRAZIONE

Si descrivono le caratteristiche principali del comportamento meccanico dei materiali metallici così come si osservano sperimentalmente su di un provino soggetto, nella zona di misura, ad uno stato tensionale monoassiale ed omogeneo.

La prova di trazione monoassiale viene effettuata mediante una macchina costituita da un basamento e da una traversa mobile che può scorrere attraverso due guide laterali solidali al basamento.

Nelle macchine idrauliche il movimento della traversa viene attuato mediante un martinetto azionato da una pompa. La velocità di spostamento della traversa è controllata da un apposito dispositivo automatico pilotato da un trasduttore che misura lo spostamento trasformandolo in un segnale elettrico. Un programma analizza il segnale inviando gli opportuni comandi alla pompa per conseguire la legge oraria di spostamento programmata. La prova avviene quindi a *deformazione controllata*.

Nelle macchine ad azionamento meccanico il movimento della traversa è invece ottenuto mediante la rotazione di viti senza fine azionate da un motore elettrico opportunamente pilotato. La prova avviene dunque a *deformazione imposta*.

Lo spostamento della traversa mobile genera un allungamento del provino ed una cella di carico posizionata in corrispondenza della mezzeria della traversa provvede a quantificare l'entità del carico applicato.

Il provino oggetto della sperimentazione ha una geometria comunemente detta a *coda di rondine*. In particolare esso è costituito da due parti.

- Un tratto centrale in cui è compreso il *tratto utile*  $l_o$ , che è a sezione costante e di lunghezza prestabilita. Ad esempio, per un provino metallico di sezione circolare, le norme UNI stabiliscono che il tratto utile  $l_o$  non sia inferiore a 5 volte il diametro.
- Le *teste* ovvero le estremità del provino realizzate in modo da essere ammorsate dalla macchina di prova.

Questa particolare forma garantisce che lo stato tensionale nel tratto di misura si possa ritenere con buona approssimazione monoassiale ed omogeneo.

Infatti le zone di ammorsamento del provino in cui la distribuzione delle tensioni è più complessa risultano sufficientemente lontane dal tratto utile di misura.

In queste condizioni lo stato tensionale monoassiale generata dal carico  $F$  ha direzione parallela all'asse del provino ed un valore nominale pari a  $\sigma = F/A_o$  dove  $A_o$  denota l'area iniziale della sezione retta del provino.

Un estensimetro posizionato in corrispondenza del tratto utile consente di valutare localmente la dilatazione nella zona soggetta allo stato tensionale monoassiale.

In via alternativa, misurato l'allungamento  $\Delta l$  di un tratto utile di provino mediante un opportuno trasduttore, il valore nominale della dilatazione longitudinale  $\varepsilon$  lungo l'asse del provino è definito dal rapporto  $\varepsilon = \Delta l/l_o$  dove  $l_o$  è la lunghezza iniziale del tratto utile.

Diagrammando la tensione di trazione in funzione della dilatazione si ottiene un diagramma  $\sigma - \varepsilon$  che, nel caso di un provino metallico, presenta l'aspetto caratteristico illustrato in fig. 2.1.

La *tensione nominale* e la *dilatazione nominale* sono quindi definite con riferimento alle dimensioni iniziali  $A_o$  ed  $l_o$  del provino. Il relativo diagramma è detto *diagramma ingegneristico*. Vengono anche adoperate le definizioni di tensione e dilatazione in termini di dimensioni correnti del provino. La *tensione vera* è allora definita come rapporto  $\sigma_t = F/A$  tra la forza  $F$  e l'area attuale  $A$  della sezione trasversale e la *dilatazione attuale* è il rapporto  $\varepsilon_t = \Delta l/l$  tra l'allungamento  $\Delta l$  e la lunghezza attuale  $l$ . Nel diagramma è possibile distinguere alcuni tratti caratteristici che saranno descritti in maniera dettagliata nel seguito.

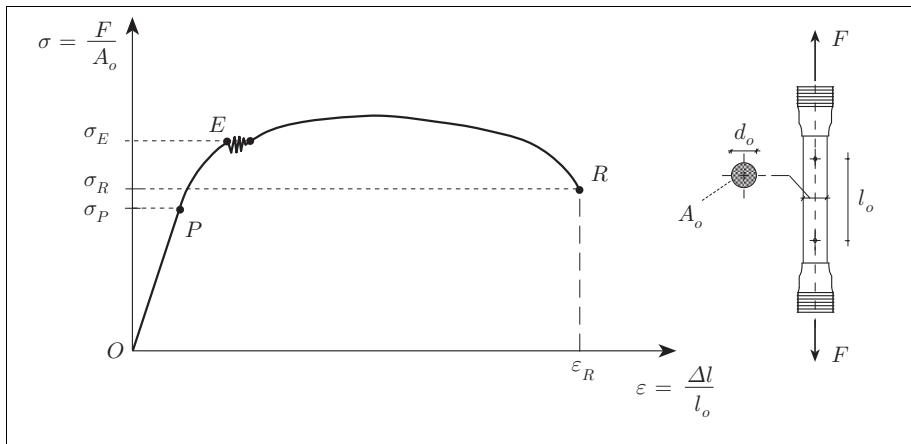
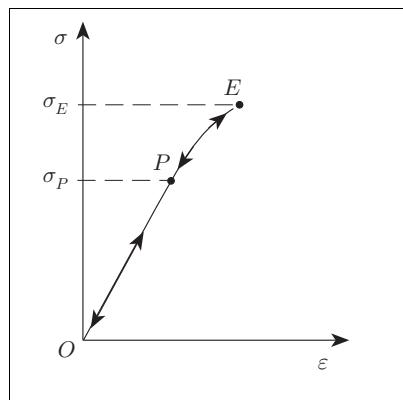


Fig. 2.1

### ■ Fase elastica

Tutti i materiali presentano, almeno in una prima fase del processo di carico, un comportamento elastico in cui la dilatazione subita a partire da uno stato vergine viene interamente recuperata una volta che il carico viene rimosso (vedi fig. 2.2).

Fig. 2.2  $\sigma \leq \sigma_E$

Al crescere del carico il legame è di tipo lineare (tratto OP) fino ad un valore della tensione indicato sul diagramma come  $\sigma_P$  e detto *tensione limite di proporzionalità*.

Per  $\sigma < \sigma_P$  esiste un coefficiente di proporzionalità tra tensione e dilatazione (modulo di YOUNG). Alcuni materiali presentano per  $\sigma > \sigma_P$  un comportamento elastico non lineare (tratto PE) fino ad un livello di sforzo pari a  $\sigma_E$  detto *tensione limite di elasticità*. In regime elastico, sia lineare che non lineare, durante la fase di scarico si ripercorre esattamente la curva seguita durante la fase di carico.

La tensione  $\sigma_E$  definisce un valore di frontiera tra il comportamento elastico e quello plastico ed è pertanto anche detta *tensione di plasticizzazione* (in inglese *yield stress* da cui la notazione alternativa  $\sigma_y$ ). Nella pratica sperimentale la *tensione di plasticizzazione* è definita come il valore della tensione monoassiale che produce una assegnata dilatazione permanente.

### ■ Fase plastica

Per valori della tensione maggiori di  $\sigma_E$  il materiale non ha più la capacità di recuperare interamente la dilatazione subita ma solo l'aliquota elastica. La deformazione irreversibile che subisce il materiale è detta *deformazione plastica*.

Il termine *plastico* deriva dal greco  $\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\varepsilon\nu$  che significa modellare, plasmare e per comportamento plastico si intende il verificarsi di deformazioni permanenti che non si annullano quando viene rimossa la causa che le ha prodotte.

La fig. 2.3 mostra come, superata la *tensione limite di elasticità*, in fase di scarico la curva non coincida con quella percorsa in fase di carico ma consista in una retta parallela al tratto elastico lineare.

L'intersezione tra questa retta e l'asse delle  $\varepsilon$  restituisce il valore  $\varepsilon^p$  di dilatazione residua. La differenza tra la dilatazione corrispondente al livello di tensione  $\sigma_Q$  raggiunto in fase di carico e la dilatazione residua  $\varepsilon^p$  fornisce il valore della deformazione elastica recuperata.

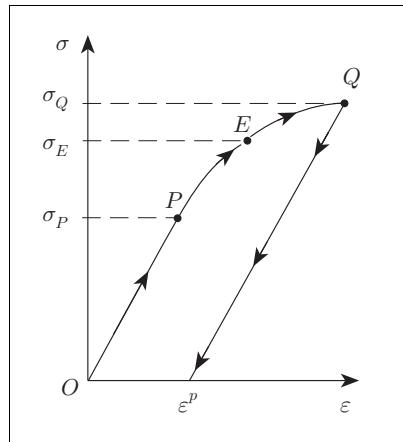


Fig. 2.3  $\sigma > \sigma_E$

### ■ Incrudimento

Per un breve tratto della curva a partire da questo valore si verifica uno scorrimento plastico del materiale a carico quasi costante e il diagramma presenta, a meno di qualche oscillazione dovuta ad instabilità della macchina di prova, un andamento pressoché orizzontale (vedi fig. 2.1).

Alla fine di questo tratto la curva inizia nuovamente a crescere, determinandosi un *incrudimento* (*work hardening*) del materiale. A partire da questo valore della tensione il materiale oppone alla deformazione plastica una resistenza maggiore di quella esercitata subito dopo lo snervamento.

La spiegazione di questo tipo di comportamento risiede nelle trasformazioni che si verificano a livello microscopico nel materiale durante la deformazione.

Nella sezione 3 (p. 521) verranno brevemente descritti i meccanismi microscopici responsabili dei fenomeni di scorrimento plastico che si generano nel reticolo cristallino.

Se il provino, dopo essere stato sottoposto ad una tensione  $\sigma_Q > \sigma_E$ , viene scaricato e quindi nuovamente caricato, esso si deformerà inizialmente seguendo una legge lineare ed il nuovo limite di elasticità è superiore a  $\sigma_E$ .

La deformazione plastica comporta quindi un incremento della tensione limite di plasticizzazione.

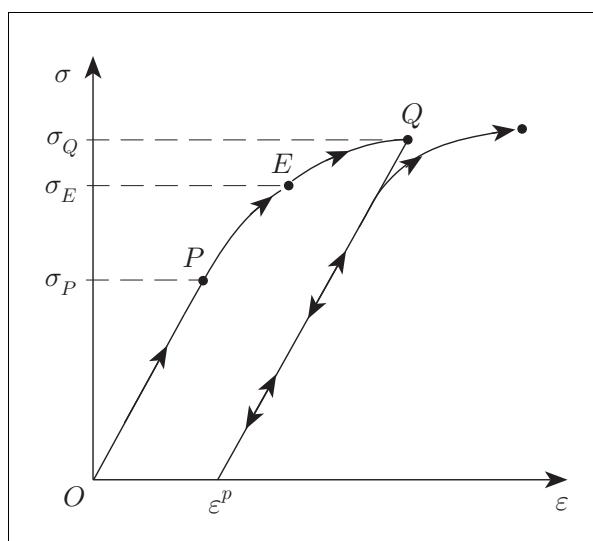


Fig. 2.4 Incrudimento

### ■ Effetto Bauschinger

Quando ad uno stato tensionale monoassiale di trazione segue uno scarico e quindi uno stato monoassiale di compressione, il diagramma  $\sigma - \varepsilon$  è lineare (tratto  $Q - C$ ) fino ad un punto  $C$  cui corrisponde una tensione di compressione  $\sigma_C$  minore in valore assoluto rispetto a  $\sigma_Q$ . Il percorso di carico è quindi individuato dai punti  $O, E, Q, C$ .

Tale fenomeno di trascinamento del tratto elastico, noto in letteratura come *effetto BAUSCHINGER*<sup>46</sup>, è illustrato in fig. 2.5.

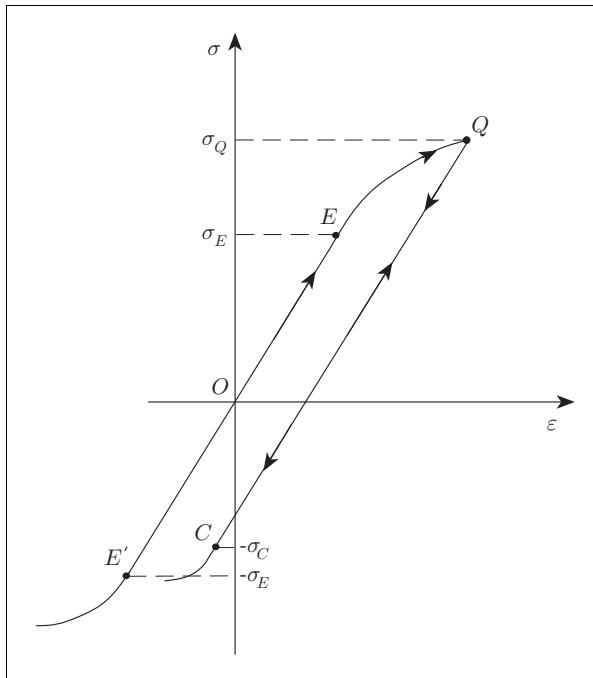


Fig. 2.5 Effetto BAUSCHINGER

### ■ Comportamento perfettamente plastico

I fenomeni di incrudimento sono praticamente assenti in un materiale che presenta un comportamento *elastico-perfettamente plastico*.

Nel diagramma  $\sigma - \varepsilon$  di questi materiali si evidenzia, alla fine del tratto elastico, un *plateau* orizzontale che termina in corrispondenza della deformazione di rottura. Lungo questo tratto orizzontale si verifica un flusso plastico che comporta sensibili aumenti della deformazione a stato tensionale sostanzialmente costante.

In corrispondenza di carichi ciclici si determina un ciclo di isteresi la cui area fornisce il valore dell'energia per unità di volume dissipata in ogni ciclo (fig. 2.6).

<sup>46</sup> JOHANN BAUSCHINGER (1834-1893). Professore di Meccanica al Politecnico di Monaco dal 1868 fino al 1893; nello stesso periodo fu Direttore del Laboratorio di Prove Meccaniche sui Materiali da egli stesso istituito. Nel 1884 organizzò il primo Congresso Internazionale sui Materiali. Nell'arco della sua vita si è occupato principalmente dei fenomeni connessi alla deformazione plastica nei metalli; in particolare ha osservato come varia il valore del limite elastico di un materiale quando questo viene sottoposto a riscaldamento, a raffreddamento o a cicli di carico. Relativamente ai carichi ciclici è stato il primo a rilevare e a descrivere una sorta di effetto di isteresi che successivamente ha preso il suo nome.

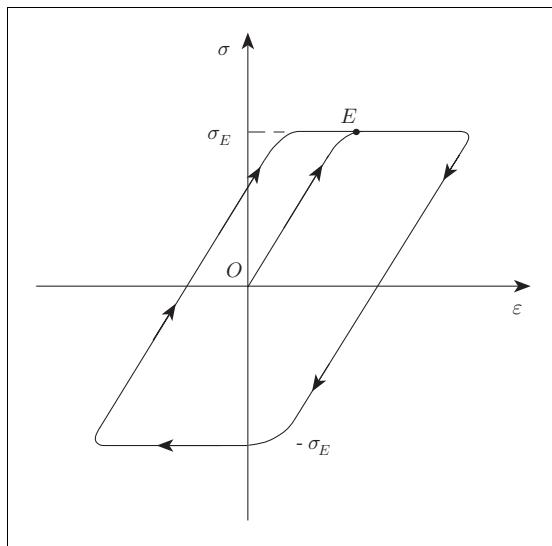


Fig. 2.6 Materiale elastico-perfettamente plastico

### ■ Rottura

Superato il limite di plasticizzazione la curva  $\sigma - \varepsilon$  cresce in maniera monotona fino ad attingere un massimo per poi decrescere fino ad un punto in corrispondenza del quale si determina la rottura del provino.

Le coordinate di tale punto sono rispettivamente dette *deformazione di rottura*  $\varepsilon_R$  e *tensione di rottura*  $\sigma_R$  (fig. 2.1).

Quando la tensione supera il punto di massimo la deformazione cessa di essere omogeneamente distribuita lungo il tratto utile del provino ed inizia a localizzarsi in una zona limitata per effetto di un fenomeno di instabilità dovuto alle imperfezioni presenti nel reticolo cristallino quali vacanze o inclusioni di particelle di soluto.

Il fenomeno è caratteristico della rottura duttile dei provini metallici nella prova a trazione monoassiale e prende il nome di *strizione* (in inglese *necking*).

In realtà anche in stato di deformazione omogenea si verificano concentrazioni di deformazione plastica in regioni molto poco estese ma l'effetto dell'*incrudimento* (*work hardening*) blocca tali fenomeni di localizzazione.

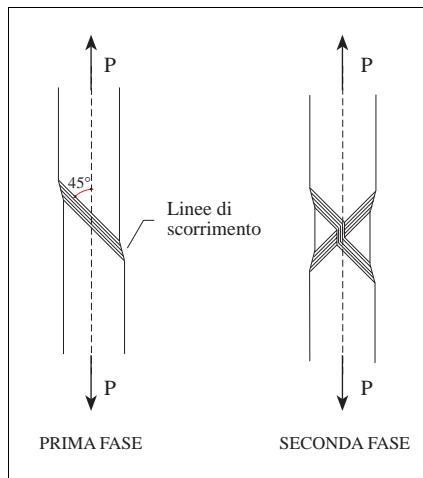
In queste zone, a causa dell'incrudimento del materiale, la tensione necessaria a proseguire la deformazione plastica diventa subito più elevata di quella applicata e quindi iniziano a deformarsi le zone immediatamente adiacenti. In tal modo lo stato deformativo si propaga lungo il provino.

All'aumentare del carico, quando l'incrudimento non ha più la capacità di opporsi allo sviluppo della deformazione plastica, nella zona debole si verifica la strizione.

Lungo quest'ultimo tratto della curva  $\sigma - \varepsilon$  la tensione nominale decresce. Nella zona di strizione si verifica invece un incremento locale della tensione vera.

La concentrazione della deformazione produce infatti una notevole riduzione dell'area della sezione resistente.

L'inversione nella pendenza della curva non si verifica dunque se il diagramma è tracciato riportando in ordinate la tensione *vera* in luogo di quella nominale; in tal caso le curve  $\sigma_t - \varepsilon$  e  $\sigma_t - \varepsilon_t$  sono crescenti fino a rottura.



Nella prova di trazione, durante il processo di deformazione plastica di un materiale duttile, sono visibili sulla superficie del provino dei segni trasversali che indicano le direzioni di scorrimento plastico e prendono il nome di *linee di LÜDERS*.

Lungo tali linee, approssimativamente inclinate a  $45^\circ$  rispetto all'asse del provino, la tensione tangenziale è massima.

### ■ Duttilità e fragilità

La *duttilità di un materiale* misura la capacità di subire notevoli deformazioni plastiche prima di giungere a rottura.

Un materiale duttile è pertanto caratterizzato dalla capacità di assorbire e dissipare energia nel corso della deformazione plastica.

Un *materiale duttile* presenta una resistenza alla separazione maggiore di quella allo scorrimento plastico almeno fino a quando l'incrudimento dovuto alla deformazione plastica non provoca un'inversione di tendenza.

Si verifica allora la *rottura duttile* e la separazione avviene in corrispondenza della massima riduzione di sezione del provino per effetto della strizione.

Un *materiale fragile* non ha invece capacità di dissipare energia di deformazione plastica e si rompe repentinamente senza subire grandi deformazioni.

La rottura per i materiali fragili segue quasi immediatamente la fase elastica e si manifesta in maniera improvvisa e catastrofica.

Nella *rottura fragile* e la separazione si può verificare in corrispondenza di una qualunque sezione trasversale del provino.

I parametri che intervengono nella determinazione delle condizioni che provocano la rottura dipendono fortemente dalla velocità di deformazione e dalla temperatura.

La resistenza allo scorrimento ad esempio aumenta con l'aumentare della velocità di deformazione e con il diminuire della temperatura.

Ciò spiega perché una barra di metallo può essere piegata come un materiale duttile sotto un carico lentamente crescente, mentre la stessa barra si rompe senza deformazioni plastiche apprezzabili se il carico è applicato molto rapidamente.

In conclusione ad alte velocità di deformazione e a basse temperature il rapporto tra resistenza allo scorrimento e resistenza alla separazione diventa maggiore di 1 e il materiale subisce una transizione da duttile a fragile.

### 3. ASPETTI MICROSCOPICI

La descrizione del comportamento dei materiali richiede sia l'analisi del comportamento rilevato sperimentalmente su provini sia la conoscenza dei meccanismi di deformazione del materiale a livello microscopico. E' dunque importante tener conto delle informazioni fornite dalla fisica dello stato solido, in particolare dalla fisica dei cristalli. Nel seguito si forniscono alcuni elementi essenziali sulla struttura microscopica dei materiali con particolare riferimento ai materiali metallici.

#### 3.1. La struttura cristallina

I corpi materiali a livello microscopico sono costituiti da aggregati più o meno ordinati di particelle che possono essere atomi o molecole. L'ordine presente nella struttura interna può estendersi a zone piuttosto limitate (*ordine a corto raggio*) oppure a regioni più estese (*ordine a lungo raggio*).

In questo secondo caso è possibile individuare una *cella unitaria* o *cristallite*, i cui vertici sono occupati da atomi o molecole, che ripetuta identicamente nelle tre direzioni dello spazio, permette di generare l'intero *reticolo cristallino*.

Per *cristallo* si intende una matrice tridimensionale di particelle la cui disposizione spaziale è regolare. La dimensione dei cristalli dipende dalle condizioni presenti all'atto della formazione del solido a partire dal fuso. In particolare essa si riduce all'aumentare della velocità di raffreddamento.

Tutte le strutture cristalline sono generate dalla ripetizione nello spazio di celle unitarie le cui geometrie possono variare in un ambito limitato. In particolare sono sette i tipi di geometrie da cui derivano tutti i sistemi cristallini. La diversa disposizione delle particelle all'interno delle celle permette di effettuare un'ulteriore distinzione tra i reticolati che complessivamente risultano essere 14. Essi costituiscono i cosiddetti reticolati di BRAVAIS<sup>47</sup>.

---

<sup>47</sup> AUGUSTE BRAVAIS (1811-1863). Fisico francese si interessò di astronomia, meteorologia, fisica, botanica e cristallografia. Ufficiale navale, partecipò a diverse spedizioni scientifiche in Algeria ed in Lapponia. Fu professore di astronomia a Lione (1841) e poi di fisica all'Ecole Polytechnique (1845) ed entrò all'Académie des Sciences nel 1854. Indipendentemente da J.F.C. HESSEL e da L. FRANKENHEIM, mostrò in modo rigoroso, l'esistenza dei 14 reticolati tridimensionali cristallini che portano il suo nome.

I solidi policristallini sono costituiti da aggregati di una moltitudine di singoli cristalli (o *grani*) variamente orientati e separati da interfacce dette *bordi dei grani*.

I materiali metallici hanno una struttura policristallina e solidificano generalmente in una delle forme cristalline riportate in fig. 3.1.

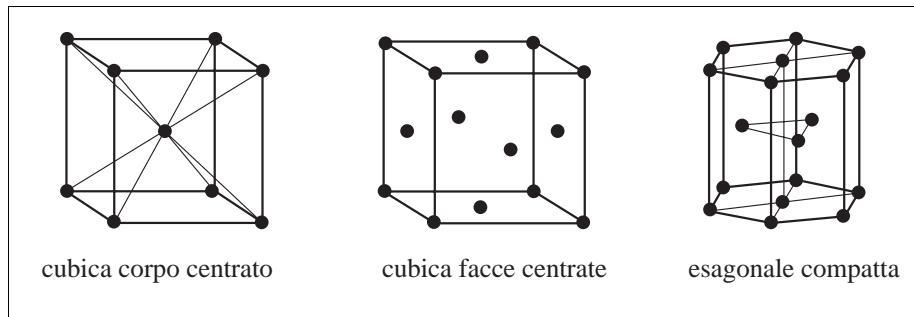


Fig. 3.1

Come si vede dalla figura, le prime due forme cristalline hanno una struttura cubica ma un diverso posizionamento degli atomi all'interno della cella.

La terza forma cristallina ha invece una geometria a prisma esagonale.

Il ferro allo stato puro, ad esempio, cristallizza a temperatura ambiente in un reticolo cubico a corpo centratoo (*ferro  $\alpha$*  o *ferrite*). Oltre i  $900^{\circ}\text{C}$  la fase a reticolo cubico a corpo centratoo si trasforma in una fase a reticolo cubico a facce centrate (*ferro  $\gamma$*  o *austenite*)<sup>48</sup>

La trasformazione è perfettamente reversibile solo se la velocità di raffreddamento è tale da permettere la diffusione degli atomi all'interno del reticolo.

Un tipico esempio di irreversibilità della trasformazione è fornito dal raffreddamento di un *acciaio eutettoidico* e cioè una soluzione interstiziale del carbonio nel ferro in cui la percentuale in peso del carbonio è 0.77.

A temperature superiori a  $700^{\circ}\text{C}$  la struttura reticolare del ferro è cubica a facce centrate ed al centro di ogni cella è presente un atomo di carbonio in posizione interstiziale. A temperature più basse la struttura reticolare termodinamicamente più stabile è quella cubica a facce centrate.

In queste condizioni la solubilità del carbonio all'interno del ferro si riduce notevolmente.

Se il raffreddamento si spinge sotto i  $250^{\circ}\text{C}$  ed è condotto molto velocemente gli atomi di carbonio non hanno il tempo di diffondere all'interno del reticolo.

<sup>48</sup> WILLIAM CHANDLER ROBERTS-AUSTEN (1843-1902). Metallurgista inglese, nel 1882 entrò nella Zecca di Stato come chimico e sperimentatore. I suoi studi sulle tecnologie per la fabbricazione delle monete gli fecero ottenere un posto di professore di metallurgia alla Royal School of Mines. Il suo libro *Introduction to the Study of Metallurgy* fu pubblicato in 6 edizioni tra il 1891 e il 1908. Nel 1885 egli adottò il cognome aggiuntivo in onore dello zio NATHANIEL AUSTEN .

D'altra parte gli atomi del ferro non hanno la possibilità di raggiungere le corrette posizioni reticolari. Ne deriva una forte distorsione della cella unitaria che diventa tetragonale a corpo centratò.

La struttura che si ottiene è detta *martensitica*<sup>49</sup> ed è metastabile, ciò significa che aumentando di poco la temperatura vengono riattivati i meccanismi diffusivi ed il reticolo tende alla configurazione di equilibrio stabile.

La *martensite* è caratterizzata a livello macroscopico da elevata durezza e fragilità. Ciò è dovuto alla struttura interna caratterizzata da elevati stati tensionali.

In un materiale metallico sollecitato al di là di una soglia limite, le dislocazioni presenti nel reticolo cristallino attivano meccanismi di scorrimento cristallografico: i piani del reticolo tendono infatti a scivolare uno sull'altro.

All'interno di un reticolo è possibile individuare una serie di piani cristallini alcuni dei quali sono di massimo addensamento.

Su questi piani si possono individuare le direzioni di massimo impacchettamento dette anche *direzioni di scorrimento* o *direzioni di slittamento*. Sono queste le direzioni lungo le quali tendono a muoversi le dislocazioni.

In fig. 3.2 sono mostrati tre piani cristallografici di scorrimento per i tre reticolli caratteristici dei materiali metallici.

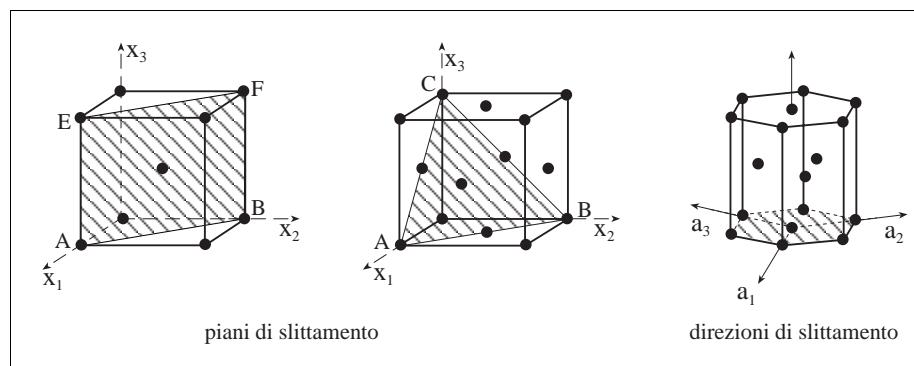


Fig. 3.2

La giacitura dei piani cristallografici è convenientemente individuata mediante gli *indici di MILLER*<sup>50</sup>

Gli indici di MILLER sono i reciproci degli interi che misurano in unità cristallografiche le intercette del piano sugli assi cristallografici della cella unitaria.

<sup>49</sup> ADOLF MARTENS (1850-1914). Metallurgista tedesco. Dopo gli studi di ingegneria meccanica si dedicò alla sperimentazione dei materiali da costruzione. Fu un pioniere nell'uso del microscopio come strumento pratico per l'analisi dei metalli. Assunto un posto di professore pubblicò il testo *Handbuch der Materialienkunde* che ricevette grande considerazione nel settore.

<sup>50</sup> WILLIAM HALLOWES MILLER (1801-1880). Cristallografo inglese, portò insieme a BRAVAIS i maggiori contributi alla cristallografia del diciannovesimo secolo. L'efficiente sistema di individuazione dei piani cristallografici è solo uno dei suoi risultati.

Per il sistema esagonale è anche conveniente considerare un sistema di quattro assi di riferimento, tre nel piano di base ruotati di  $2\pi/3$  ed il quarto ad essi ortogonale.

In tal caso gli indici corrispondenti sono detti *indici di MILLER-BRAVAIS* e godono della proprietà caratteristica che la somma dei primi tre indici è zero.

Ad esempio i piani indicati in fig. 3.2 sono individuati, i primi due dagli indici di MILLER  $(1, 1, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  ed il terzo dall'indice di MILLER  $(0, 0, 0)$  o dall'indice di MILLER-BRAVAIS  $(0, 0, 0, \infty)$ .

Lungo le direzioni di massimo impacchettamento le forze di coesione assumono valori molto elevati e la loro entità, che è inversamente proporzionale alla distanza interatomica, fornisce una misura del modulo di elasticità longitudinale (modulo di YOUNG) del materiale.

Per questo motivo il modulo di YOUNG dipende dalla temperatura; all'aumentare della temperatura le distanze interatomiche aumentano e il modulo diminuisce.

### 3.2. Forze di legame

Le forze di coesione presenti nel reticolo cristallino dipendono dal tipo di legame primario presente tra gli atomi. I legami possono essere forti o deboli.

I *legami deboli* (detti anche legami di VAN DER WAALS<sup>51</sup>) sono dovuti alla formazione di dipoli elettrici per effetto dello spostamento delle orbite elettroniche attorno ai nuclei.

Esempi caratteristici sono forniti dagli atomi di *argon* quando vengono posti in adiacenza, dalle molecole polari di  $H_2O$  che si legano tramite il *ponte a idrogeno* ed i legami secondari tra le catene di polietilene formate da celle di etilene concatenate da legami covalenti. I *legami forti* possono essere di tre tipi.

- Il *legame covalente* si stabilisce tra due atomi che presentano piccole differenze di elettronegatività se non addirittura nulle come accade nel caso in cui i due atomi sono uguali. Esso consiste nella condivisione di uno, due o tre coppie di elettroni (*doppietti elettronici*) ognuno dei quali viene attratto in maniera maggiore dall'atomo più elettronegativo. Se i due atomi non sono perfettamente uguali si genera un momento di dipolo dovuto alla distribuzione asimmetrica delle cariche e il legame si dice *polare*. La polarità del singolo legame non implica necessariamente che la molecola nel suo complesso sia polare.
- Il *legame ionico* si stabilisce tra due atomi che presentano grosse differenze di elettronegatività e può essere visto come l'estrapolazione di un legame covalente molto polare in cui i doppietti elettronici sono completamente spostati verso l'atomo più elettronegativo. Gli elettroni non sono propriamente condivisi ma vengono completamente trasferiti da un atomo all'altro.

---

<sup>51</sup> JOHANNES DIDERIK VAN DER WAALS (1837-1923). Metallurgista tedesco. Dopo gli studi di ingegneria meccanica si dedicò alla sperimentazione dei materiali da costruzione. Fu un pioniere nell'uso del microscopio come strumento pratico per l'analisi dei metalli. Assunto un posto di professore pubblicò il testo *Handbuch der Materialienkunde* che ricevette grande considerazione nel settore.

- Il *legame metallico* a differenza dei primi due non è un legame esclusivo tra due atomi ma coinvolge contemporaneamente tutti gli atomi del reticolo e per questo motivo si definisce *delocalizzato*. Gli elettroni degli atomi metallici sono legati ai rispettivi nuclei in maniera molto debole e sono quindi liberi di muoversi creando una sorta di nube elettronica che circonda e tiene uniti i nuclei positivi.

Durante il raffreddamento di un fuso, per effetto di un'instabilità termodinamica dovuta all'abbassamento di temperatura, si formano aggregati di atomi detti *embrioni (cluster)*.

Superata una dimensione critica caratteristica, gli embrioni diventano nuclei di cristallizzazione e continuano ad accrescere fino alla completa solidificazione.

La crescita di ogni cristallo è tuttavia indipendente da quella degli altri.

Ciò significa che quando la trasformazione giunge a termine la struttura interna è costituita da una moltitudine di cristalli orientati in maniera differente con superfici di separazione che possono essere più o meno coerenti.

Nonostante l'apparente disomogeneità, l'orientazione completamente casuale dei grani, sommata ad un numero elevatissimo di grani per unità di volume, consente di ritenere che il materiale sia macroscopicamente omogeneo ed isotropo.

Le superfici di separazione tra i grani cristallini dette anche *bordi dei grani* costituiscono delle zone in corrispondenza delle quali il reticolo presenta discontinuità dette *difetti superficiali*.

All'interno del reticolo sono presenti anche altri tipi di difetti che possono essere *puntuali* o *lineari* e la cui esistenza è legata a fattori di ordine energetico.

### 3.3. Vacanze e difetti interstiziali

I *difetti puntuali* coinvolgono singoli atomi del reticolo e si possono classificare in due tipologie (vedi fig. 3.3)

- *vacanze*,
- *difetti interstiziali*.

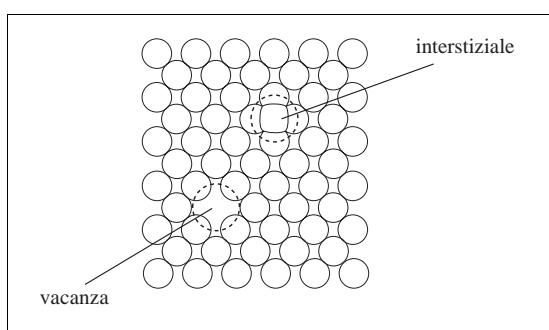


Fig. 3.3

Una vacanza è caratterizzata dalla mancanza di un atomo in una posizione reticolare mentre un difetto interstiziale è caratterizzato da un atomo che occupa una posizione diversa da un sito reticolare.

Alla presenza di un difetto puntuale è sempre associato uno stato tensionale locale, di compressione nel caso di un interstiziale, di trazione nel caso di una vacanza.

Anche le soluzioni solide, sostituzionali ed interstiziali, possono essere viste al livello microscopico come un reticolo all'interno del quale sono stati indotti difetti puntuali in maniera regolare.

Le *soluzioni solide sostituzionali* si ottengono per sostituzione di un certo numero di atomi del reticolo con atomi differenti.

Essi generano localmente uno stato tensionale di compressione se l'atomo sostitutivo è più grande di quello proprio del reticolo, di trazione se è più piccolo.

Le *soluzioni solide interstiziali* sono invece caratterizzate dalla presenza di atomi che si trovano in posizione interstiziale ad intervalli regolari.

La combinazione di una vacanza e di un difetto interstiziale è detta *difetto di FRENKEL*<sup>52</sup>.

Nei reticolati ionici la mancanza di uno ione negativo e del rispettivo ione positivo è detto *difetto di SHOTTKY*<sup>53</sup> (vedi fig. 3.4).

Nei reticolati ionici infatti i difetti sono sempre accoppiati per mantenere inalterata la neutralità del reticolo.

Non dovendo verificarsi sbilanciamenti di cariche, la mancanza di uno ione negativo comporta infatti sempre la mancanza del rispettivo ione positivo.

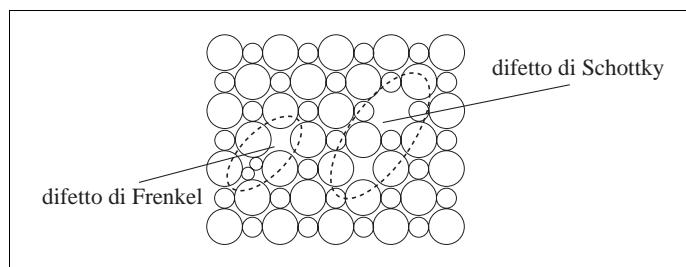


Fig. 3.4

Il numero di *difetti puntuali* è una funzione crescente della temperatura e tende a zero quando la temperatura tende a  $0^{\circ}K$ .

I difetti puntuali sono pertanto sempre presenti a temperatura ambiente e nelle comuni condizioni operative. La creazione di difetti puntuali è dovuta alla vibrazione degli atomi nella struttura cristallina.

<sup>52</sup> JACOV FRENKEL (1894-1952). Fisico russo ha portato contributi significativi in molti campi tra cui la fisica dello stato solido, l'elettrodinamica e la geofisica. Sebbene il suo nome sia citato principalmente in relazione al tipo di difetto strutturale dei cristalli da lui scoperto e studiato, i maggiori contributi sono stati da lui apportati nel campo del ferromagnetismo.

<sup>53</sup> WALTER HANS SHOTTKY (1886-1976). Fisico tedesco, figlio di un eminente matematico. Oltre ad identificare e a studiare il difetto nelle strutture cristalline che prende il suo nome, ha scoperto l'effetto di emissione termoionica. Esso consiste nell'incremento della corrente di elettroni che lascia una superficie metallica riscaldata a seguito all'applicazione di un campo elettrico.

Quando la temperatura aumenta l'energia cinetica delle vibrazioni aumenta e con essa aumenta la probabilità che gli atomi abbiano sufficiente energia per generare difetti puntuali. La distribuzione di MAXWELL-BOLTZMANN<sup>54</sup>

$$P \propto \exp(-\Delta E/kT),$$

fornisce la probabilità di trovare una molecola che abbia una energia che supera di  $\Delta E$  l'energia media corrispondente alla temperatura assoluta  $T$ .

In accordo con tale distribuzione il rapporto tra numero di difetti  $n_{\text{difetti}}$  ed il numero di siti  $n_{\text{siti}}$  nel cristallo è fornito dalla legge di ARRHENIUS<sup>55</sup>

$$\frac{n_{\text{difetti}}}{n_{\text{siti}}} = C \exp(-E_{\text{difetto}}/kT),$$

dove  $E_{\text{difetto}}$  è l'energia di attivazione di un difetto e  $k$  è la costante di BOLTZMANN (pari a  $13.8 \times 10^{-24} \text{ J/K}$ ) e  $C$  è una costante da determinarsi.

La legge di ARRHENIUS è convenientemente rappresentata in scala semilogaritmica in quanto in tale riferimento il diagramma è costituito da una retta. Bastano due prove sperimentali a temperature diverse per caratterizzare completamente la legge.

Le vacanze ed i difetti interstiziali si diffondono nel materiale con un flusso governato dalle leggi di diffusione di FICK<sup>56</sup>

- La *prima legge di FICK* esprime il flusso della specie che si diffonde in funzione del gradiente della relativa concentrazione:

$$\mathbf{J} = D \operatorname{grad} c,$$

dove  $\mathbf{J}$  è il vettore del flusso della specie che diffonde,  $D$  è la *diffusività o costante di diffusione* e  $c$  è il campo scalare che misura la concentrazione della specie che diffonde.

- La *seconda legge di FICK* lega la variazione temporale della concentrazione della specie che si diffonde al gradiente del flusso:

$$\frac{dc}{dt} = -\operatorname{div} \mathbf{J}.$$

---

<sup>54</sup> LUDWIG EDWARD BOLTZMANN (1844-1906). Fisico austriaco il cui nome è associato a molti risultati scientifici della fisica del diciannovesimo secolo. La costante che porta il suo nome gioca un ruolo centrale nell'enunciato in termini statistici della seconda legge della termodinamica.

<sup>55</sup> SVANTE AUGUST ARRHENIUS (1859-1927). Chimico svedese che ha potato molti contributi alla chimica fisica tra cui la prova sperimentale della legge esponenziale che porta il suo nome.

<sup>56</sup> ADOLF EUGEN FICK (1829-1901). Medico tedesco che introdusse le leggi della diffusione nei suoi studi sul flusso del sangue.

La seconda legge di FICK è una legge di bilancio in assenza di sorgenti volumetriche ed in forma integrale si scrive (Tomo I, sezione II.12.4 (p. 283))

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} c \, dv = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Si noti anche la perfetta analogia tra la prima legge di FICK e la legge di trasmissione del flusso di calore secondo FOURIER (Tomo I, sezione II.12.3 (p. 282)).

L'analogia tra i modelli di conduzione termica e di diffusione di una specie consiste nelle seguenti corrispondenze.

$$\text{temperatura } \theta \iff \text{concentrazione } c,$$

$$\text{flusso di calore } \mathbf{h} \iff \text{flusso della specie } \mathbf{J},$$

$$\text{conducibilità } k \iff \text{diffusività } D,$$

Le leggi di FICK conducono alla seguente equazione differenziale alle derivate parziali di tipo parabolico

$$\frac{dc}{dt} = - \operatorname{div}(D \operatorname{grad} c),$$

che nel caso diffusività  $D$  costante si scrive

$$\frac{dc}{dt} = -D \Delta c,$$

con  $\Delta$  operatore di LAPLACE.

La *diffusività*  $D$  aumenta con la temperatura secondo una legge che costituisce l'esempio più noto di equazione di ARRHENIUS

$$D = D_0 \exp(-q/kT),$$

in cui  $D_0$  è un fattore caratteristico del materiale e  $q$  è l'*energia di attivazione* per il moto di un difetto.

- Nel caso di un difetto interstiziale l'energia  $q$  è l'energia  $E_{\text{moto-del-difetto}}$  richiesta per il moto di quel difetto nella struttura cristallina. Tale energia non coincide con l'energia  $E_{\text{difetto}}$  di attivazione del difetto.
- Se il difetto è una vacanza, l'energia  $q$  è la somma dell'energia  $E_{\text{moto-del-difetto}}$  richiesta per il moto della vacanza e dell'energia  $E_{\text{difetto}}$  necessaria per la formazione della vacanza.

### 3.4. Dislocazioni

I difetti lineari, noti come *dislocazioni*, interessano porzioni di reticolo che con buona approssimazione si possono considerare monodimensionali.

Le dislocazioni si determinano durante la solidificazione di solidi cristallini, in seguito ad addensamento di vacanze.

Si possono distinguere due tipi di difetti lineari:

- le *dislocazioni a spigolo* o *dislocazioni di bordo* (*edge dislocations*) e
- le *dislocazioni a vite* o *dislocazioni elicoidali* (*screw dislocations*).

#### ■ Dislocazioni di bordo

Le dislocazioni di bordo sono caratterizzate dalla mancanza di un intero semipiano di atomi; in figura 3.5 è mostrata la traccia di tale semipiano.

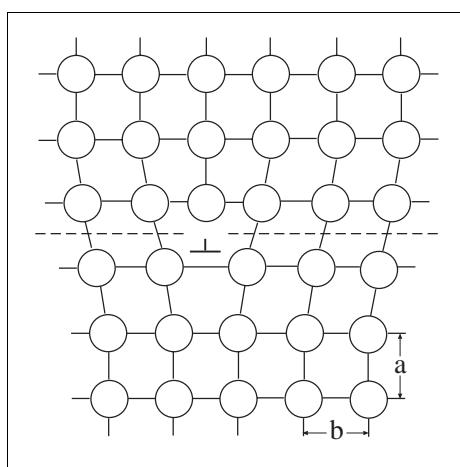


Fig. 3.5 Dislocazione di bordo

Ad eccezione di una regione approssimativamente cilindrica contenente la linea trasversale da cui si diparte il semipiano mancante, il reticolo non risente della presenza della dislocazione. Esso mantiene intatta la sua regolarità al di sopra e al di sotto della linea di dislocazione.

Per avere un’idea dell’ordine di grandezza del difetto strutturale si valuta l’entità del vettore di BURGERS.

Il *vettore di BURGERS*<sup>57</sup> rappresenta il vettore spostamento necessario a chiudere il circuito intorno al difetto.

In un cristallo perfetto è possibile, a partire da una posizione reticolare, tracciare un circuito rettangolare che si chiude sul punto di partenza se il numero di passi effettuati lungo due direzioni parallele è lo stesso.

<sup>57</sup> JOHANNES MARTINUS BURGERS (1895-1981). Fluidomeccanico olandese-americano. Sebbene la sua carriera altamente produttiva fu centrata su problemi di aerodinamica ed idrodinamica, nel 1940, a seguito degli studi effettuati prima sulla struttura reticolare degli aggregati policristallini e poi sui moti dislocativi, pubblicò un famoso contributo relativo alla definizione dell’entità di una dislocazione e noto nella scienza dei materiali come vettore di BURGERS.

Quando è presente una dislocazione di bordo invece, per chiudere un circuito intorno al difetto è necessario effettuare un numero di passi diverso lungo due direzioni parallele che si trovano rispettivamente su lati opposti rispetto alla linea di dislocazione.

Il vettore che consente di chiudere correttamente il circuito è detto *vettore di BURGERS*.

In fig. 3.6 è mostrato che, nel caso di dislocazione di bordo, il vettore di BURGERS è ortogonale alla linea di dislocazione.

Lo stato tensionale che circonda una dislocazione è abbastanza complesso, sono infatti presenti tutte le componenti di sforzo sia normali che di taglio.

In particolare gli atomi che si trovano al di sopra della linea di dislocazione sono sottoposti a compressione mentre quelli che giacciono al di sotto sono sottoposti a trazione.

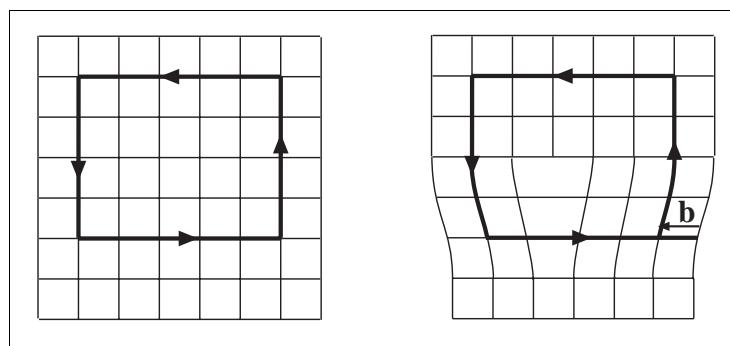


Fig. 3.6 Dislocazione a spigolo

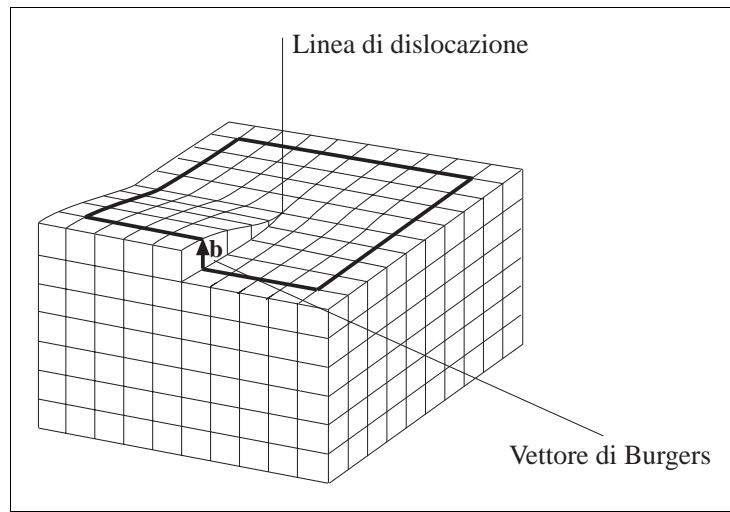


Fig. 3.7 Dislocazione a vite

### ■ Dislocazioni a vite

Le dislocazioni a vite derivano la propria denominazione dalla tipica *distorsione elicoidale* del reticolo intorno alla linea di dislocazione.

In questo caso il vettore di BURGERS è parallelo alla linea di dislocazione (vedi fig. 3.8). Lo stato tensionale intorno al difetto non presenta componenti normali ma solo sforzi di taglio.

Esiste inoltre tutta una serie di dislocazioni miste che derivano dalla combinazione di dislocazioni di bordo e dislocazioni a vite. Il vettore di BURGERS associato a ciascuna di esse ha direzione e verso che dipendono dalla disposizione spaziale delle dislocazioni semplici che la compongono.

La struttura atomica che circonda il difetto è difficilmente visualizzabile. Allo stesso modo lo stato tensionale generato da una tale distorsione del reticolo si presenta molto complesso.

### ■ Meccanismi di deformazione plastica

Le dislocazioni rivestono un ruolo molto importante nella deformazione plastica dei materiali cristallini e sono responsabili della riduzione dello sforzo che teoricamente sarebbe necessario a deformare plasticamente il reticolo.

Il calcolo dello sforzo massimo teorico che è possibile applicare senza che si verifichi uno scorrimento plastico tra due piani cristallini si effettua ipotizzando che, nella direzione dello sforzo applicato, tutti i legami si rompano contemporaneamente (vedi fig. 3.8).

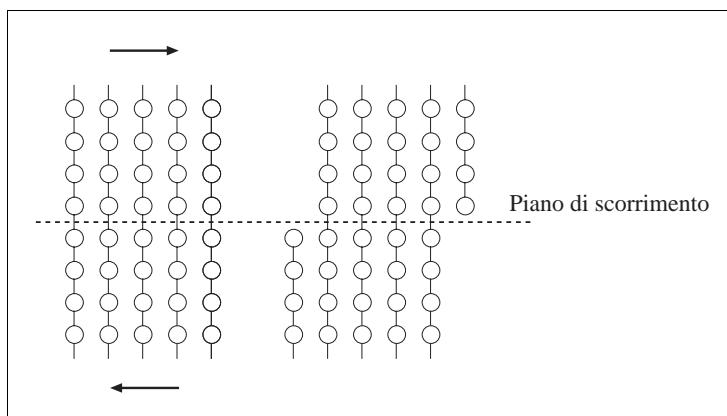


Fig. 3.8

In realtà lo scorrimento si verifica sempre attraverso il moto delle dislocazioni.

Come mostrato schematicamente in fig. 3.9 la presenza delle dislocazioni rende sufficiente rompere un legame alla volta per mettere in moto il meccanismo di deformazione plastica.

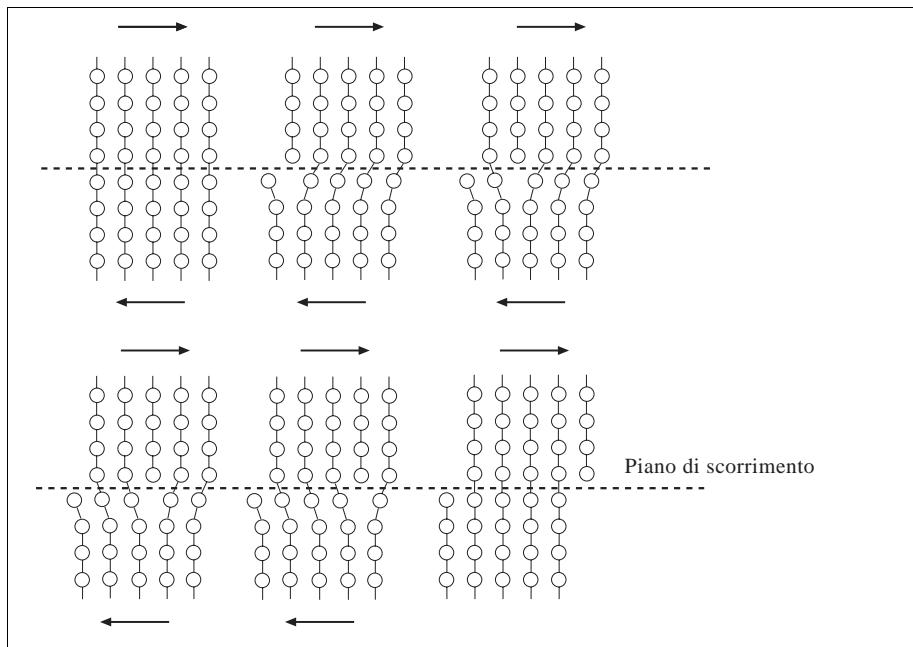


Fig. 3.9 Moto della dislocazione

Una stima approssimata del valore della tensione reale necessaria a deformare plasticamente il reticolo è fornita dalla *relazione di PEIERLS*<sup>58</sup>-*NABARRO*<sup>59</sup>:

$$\tau = G \exp \left[ \frac{-2\pi a}{(1-\nu)b} \right]$$

dove  $a$  rappresenta la distanza interplanare e  $b$  quella interatomica (fig. 3.6).

Dalla relazione di PEIERLS-NABARRO si deduce che le dislocazioni tendono a muoversi lungo i piani maggiormente distanziati tra loro e cioè lungo i piani di massimo addensamento atomico.

I piani di massimo addensamento sono detti *piani di scorrimento*

I legami tra gli atomi appartenenti a piani distinti di scorrimento sono molto deboli e quindi più facilmente scindibili se sottoposti a sforzo.

<sup>58</sup> RUDOLPH ERNST PEIERLS (1907-1995). Nato a Berlino da famiglia ebrea studiò fisica nucleare sotto la guida di WERNER HEISENBERG. Nel 1929 formulò la teoria delle cariche positive per interpretare la condutività termoelettrica nei semiconduttori. Rifugiatosi in Inghilterra insegnò Fisica all'Università di Birmingham dove svolse ricerche di fisica atomica con JAMES CHADWICK e OTTO FRISCH.

<sup>59</sup> FRANK NABARRO. Nato a Londra ha studiato alle Università di Oxford, Bristol e Birmingham. È membro della Royal Society of London, Medaglia di platino del British Institute of Materials e membro fondatore dell'Accademia delle Scienze in Sud Africa. La sua principale attività di ricerca ha riguardato i processi microscopici che sono alla base della resistenza dei metalli e delle leghe.

Sui piani di scorrimento si possono poi individuare le direzioni di massimo impacchettamento lungo le quali le dislocazioni si muovono in maniera preferenziale essendo minori le distanze interatomiche.

I piani di scorrimento sono individuati dalla linea di dislocazione e dal vettore di BURGERS.

Per questo motivo le dislocazioni a vite hanno più possibilità di movimento rispetto a quelle di bordo.

Infatti mentre nelle dislocazioni a spigolo il vettore di BURGERS e la linea di dislocazione sono ortogonali, in quelle a vite le due direzioni sono parallele e individuano un fascio di piani lungo i quali la dislocazione può muoversi.

La possibilità di spostarsi da un piano all’altro consente alla dislocazione di aggirare facilmente gli ostacoli presenti nel reticolo come ad esempio un’impurità o una particella di precipitato (meccanismo di *cross slipping*); ne consegue una maggiore deformabilità plastica del materiale.

Una famiglia di piani cristallografici di scorrimento e di direzioni di scorrimento ad essi associate costituisce un *sistema di scorrimento*.

I meccanismi di deformazione plastica si attivano quando la tensione tangenziale sul piano di scorrimento raggiunge il limite di elasticità.

In corrispondenza di questo valore si attivano i *sistemi di scorrimento primari*.

Aumentando la temperatura si attivano anche i *sistemi di scorrimento secondari*, ed è questo il motivo per cui ad alte temperature i valori di sforzo in corrispondenza dei quali inizia la deformazione plastica sono notevolmente più bassi.

Quando la tensione raggiunge il valore di snervamento, le dislocazioni che si sono formate durante la prima fase della deformazione plastica, iniziano a muoversi ognuna all’interno del proprio grano.

Tale meccanismo non richiede un incremento dello sforzo da applicare almeno fino a quando le dislocazioni non incontrano il bordo del grano.

Il superamento di un ostacolo di tale entità richiede uno sforzo più elevato di quello necessario al movimento del difetto all’interno del proprio grano.

Il materiale, a partire da questo momento, si presenta sempre più resistente alla deformazione plastica.

L’aumento della densità di dislocazioni che si determina man mano che prosegue la deformazione plastica, produce un ulteriore aumento della resistenza allo scorrimento.

Le dislocazioni infatti iniziano ad interagire tra loro attraverso i propri stati tensionali o addirittura si intersecano dando luogo ai cosiddetti *punti di ancoraggio (jogs)*. L’insieme di questi fenomeni determina l’*incrudimento* del materiale.

Nei materiali metallici la tensione limite di elasticità e il valore di snervamento tendono in pratica a coincidere in quanto il numero di dislocazioni presenti all’atto del consolidamento del fuso è già sufficientemente elevato.

Le interazioni tra le dislocazioni sono pertanto abbastanza forti da determinare subito un incremento dello sforzo e quindi l’incrudimento si verifica alla fine della fase elastica.

### ■ Legge di Schmid

In una prova di trazione monoassiale sia  $\sigma = F/A$  la tensione principale,  $\varphi$  l'angolo tra l'asse del provino e la normale ad un piano di slittamento preferenziale e  $\vartheta$  l'angolo tra l'asse del provino e una direzione di massimo addensamento nel piano di slittamento.

La *tensione tangenziale risolta* definita come

$$\tau = \sigma \cos \varphi \cos \vartheta$$

rappresenta la componente sul piano di slittamento della tensione monoassiale di trazione (vedi fig. 3.10). La definizione di tensione tangenziale risolta sarà ripresa nella sezione XIII.4 (p. 556).

Nel 1924 E. SCHMID ha osservato che lo scorrimento in un monocristallo avviene quando la tensione tangenziale risolta supera un valore critico. Tale valore è caratteristico di ogni materiale, una volta fissata la temperatura.

Da quanto detto emerge che la deformazione plastica non altera localmente la struttura del reticolo il quale rimane indifferente al processo deformativo anelastico.

Una diretta conseguenza è che l'anisotropia, essendo una caratteristica fisica legata esclusivamente alla geometria del reticolo, rimane inalterata.

La deformazione elastica al contrario, distorce localmente il reticolo alterandone l'ordine strutturale.

Ne segue che una disposizione reticolare ordinata all'interno di un solido non assicura che non si sia verificato alcun effetto deformativo: dietro una struttura reticolare inalterata si può infatti nascondere un meccanismo anelastico attivo.

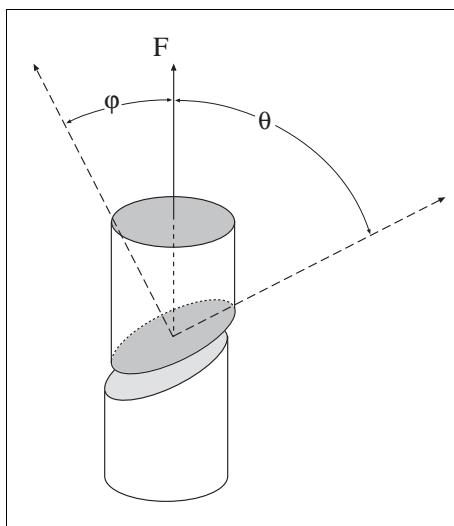


Fig. 3.10

## RIFERIMENTI

1. J. MANDEL, Cours de Mécanique des Milieux Continus, Gauthier-Villars, Paris (1966).
2. R. BALDACCI, Scienza delle Costruzioni Vol. I-II, UTET, (1970-1976).
3. W.N. FINDLEY, J.S. LAI, K. ONARAN, Creep and relaxation of non linear viscoelastic materials with an introduction to linear viscoelasticity. Dover Pubblications, Inc., New York, (1975).
4. V. FEODOSSIEV, Resistenza dei materiali. Editori Riuniti, (1977).
5. J. LEMAITRE, J.L. CHABOCHE, Mechanics of solid materials. Cambridge University Press, (1990).
6. A. SOLLAZZO, S. MARZANO, Scienza delle Costruzioni 2. Elementi di meccanica dei continui e resistenza dei materiali. UTET, (1992)
7. J.M. SHACKELFORD, Introduction to Materials Science for Engineers. Prentice Hall International, Inc., (1992)
8. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
9. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).



## XIII – CRITERI di RESISTENZA

### 1. PREMESSA

Il limite caratteristico di primo snervamento di molti materiali policristallini con comportamento macroscopico di tipo isotropo, quali l'acciaio, l'alluminio e varie leghe metalliche, può essere valutato con la sola prova di trazione semplice.

Nella prova di trazione si induce in un provino cilindrico uno stato di tensionale che, nella prevedibile zona di snervamento, è di tipo monoassiale. La prova di trazione consente di determinare il valore della tensione principale che corrisponde allo snervamento del materiale. Se lo stato tensionale in un punto di una struttura costituita dallo stesso materiale non è monoassiale, la valutazione del coefficiente di sicurezza rispetto allo snervamento richiede di stabilire un criterio di confronto. Analoghe considerazioni sussistono per altre situazioni limite, quali quelle che comportano la rottura di alcuni materiali fragili.

Per materiali con comportamento più complesso è in generale necessario effettuare un insieme di prove di laboratorio per poter determinare i valori caratteristici dei parametri significativi che caratterizzano lo stato limite del materiale. L'individuazione di tali parametri è tra i compiti più ardui della meccanica delle strutture ed è stato ed è ancora oggetto di ricerche sia teoriche che sperimentali. Risposte tecnicamente soddisfacenti sono state fornite per importanti classi di materiali di interesse ingegneristico; esse sono compendiate nella formulazione di criteri, detti *criteri di resistenza*. Tali criteri, basati sia su risultanze sperimentali sia su indicazioni fornite dalla modellazione della struttura microscopica del materiale, consentono di individuare l'insieme dei parametri maggiormente significativi per la determinazione dello stato limite del materiale e di progettare le prove sperimentali per la loro valutazione.

Nel seguito si fornisce un quadro sintetico dei principali criteri di snervamento e di rottura cui fa ricorso l'ingegneria delle strutture. Sono prima illustrati i criteri che si applicano a materiali con comportamento ultraelastico di tipo isotropo, distinguendo quelli più idonei a descrivere il comportamento di materiali fragili da quelli che sono adottati per prevedere il comportamento di materiali metallici duttili. Si illustra poi un criterio per materiali con comportamento ultraelastico di tipo anisotropo sviluppando una applicazione al caso di compositi con struttura ortotropa. In effetti il comportamento duttile o fragile dipende anche dalla scala dimensionale dell'elemento strutturale considerato. Questo importante aspetto del comportamento ultraelastico è brevemente illustrato nella sezione finale del capitolo.

A LEONARDO<sup>60</sup> (vedi fig. 1.1) sono dovute le prime ricerche di meccanica dopo il Medio Evo. LEONARDO si interessò della resistenza di fili metallici soggetti a trazione e di travi appoggiate o incastrate. Le note di LEONARDO costituiscono le testimonianze di un primo tentativo di applicare la statica per calcolare le sollecitazioni nelle strutture ed i primi esperimenti per determinare la resistenza dei materiali strutturali.



Fig. 1.1 Leonardo

Fig. 1.2 Galileo

---

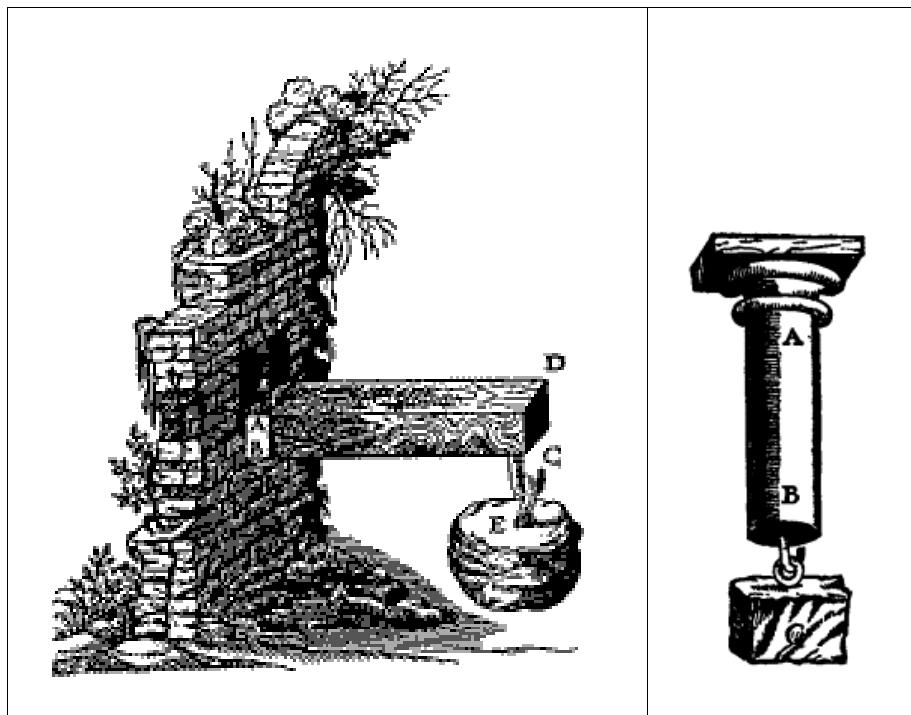
<sup>60</sup> LEONARDO DA VINCI (1452-1519). Nato a Vinci (Firenze) nel 1452, figlio naturale del notaio PIERO e di una contadina, fu accolto in casa del padre che non aveva avuto figli legittimi dai primi due matrimoni. Dal 1467 al 1476 approfondì la sua formazione artistica presso la bottega del VERROCCHIO a Firenze, interessandosi anche di matematica, meccanica e ingegneria. Nel 1482 fu chiamato a Milano da LUDOVICO IL MORO; durante il soggiorno milanese si occupò degli allestimenti scenici per gli spettacoli teatrali della corte, oltre a dipingere alcuni dei suoi capolavori (la Vergine delle rocce e l'Ultima cena). Dopo la caduta di LUDOVICO nel 1499, LEONARDO lavorò presso varie corti italiane: Mantova, Venezia, Firenze, Roma. Durante questi anni dipinse capolavori come la Gioconda. Nel 1517 accettò l'invito di FRANCESCO I a lavorare per la corte francese. Gli fu assegnato il castello di Cloux vicino alla reggia di Amboise; trascorse gli ultimi anni immerso negli studi, tra gli onori della corte. Morì nel 1519 a Cloux, Amboise. LEONARDO amava definirsi "omo senza lettere": conosceva superficialmente il latino, ignorava completamente il greco e aveva appreso la maggior parte delle sue cognizioni attraverso i volgarizzamenti delle opere più importanti e con l'aiuto di amici, il matematico e filosofo PACIOLI ed il medico MARCANTONIO DELLA TORRE. Si interessò di meccanica, fisica, anatomia, filosofia naturale e lasciò una enorme quantità di appunti (si calcolano 5000 fogli). Oltre agli appunti tecnici e ai progetti di trattati, LEONARDO scrisse anche numerosi apologhi, aforismi e favole che testimoniano un gusto arguto e uno stile vivace. Giunto a noi grazie alla compilazione dell'allievo FRANCESCO MELZI che si basò sui materiali del maestro, il *Trattato della pittura* è l'unica opera organica; si tratta di un grandioso tentativo di coordinare ogni scienza, ogni filosofia, ogni riflessione sulla scienza e sulla vita all'interno dell'ottica e delle esigenze del pittore.

La storia moderna della resistenza dei materiali inizia nel XVII secolo con l'opera di GALILEO GALILEI<sup>61</sup> (fig. 1.3, 1.4).

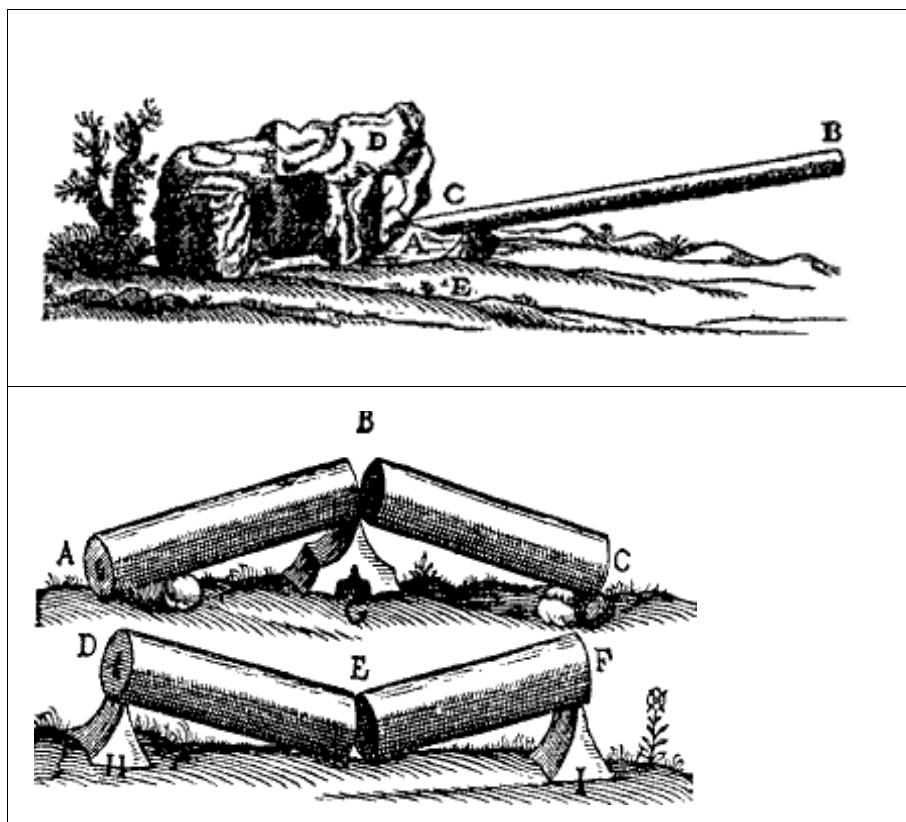


Nelle figure che seguono sono riportati alcuni suggestivi disegni di GALILEO che testimoniano la tipologia delle problematiche affrontate.

<sup>61</sup> GALILEO GALILEI (1564-1642). GALILEO GALILEI nacque a Pisa il 15 febbraio 1564 da GIULIA AMMANNATI e VINCENZIO GALILEI, entrambi appartenenti alla media borghesia. VINCENZIO, nato a Firenze nel 1520, ex liutista ed ex insegnante di musica, in passato era entrato in conflitto con la tradizione classica che attribuiva la consonanza tra tutti i suoni al controllo delle proporzioni numeriche ed aveva proposto idee proprie al riguardo. Era quindi ferrato in matematica, ma, intuendo le difficoltà pratiche che la professione di matematico presentava, spinse il figlio a studiare medicina proprio come un loro avo, quel GALILEO BONAIUTI che nel XV secolo si era distinto nell'esercizio dell'arte medica ed in onore del quale un ramo della famiglia aveva preso il nome di GALILEI. GALILEO compì i primi studi di retorica, grammatica e logica nel monastero camaldolesco di Vallombrosa ed entrò a far parte dell'ordine come novizio. La decisione non poté che contrariare VINCENZIO, il quale, nutrendo appunto ben altri progetti per il figlio, lo fece tornare a Pisa ed iscrivere a Medicina. I corsi della facoltà vertevano su GALENO e sui libri di scienza naturale di ARISTOTELE, che costituirono i principali oggetti di critica da parte del giovane Galileo, sempre più attratto dalla matematica e dalla filosofia e sempre meno produttivo in veste di studente di medicina. Nel 1583 vi fu il suo incontro con OSTILIO RICCI, un matematico allievo di TARTAGLIA. RICCI era aggregato alla corte di Toscana e teneva le sue lezioni in volgare, come in volgare era scritto il testo di EUCLIDE su cui basava i suoi corsi. Si trattava infatti della traduzione di NICCOLÒ TARTAGLIA, il quale, a differenza delle versioni latine, aveva chiarito la discrepanza esistente tra la teoria delle proporzioni di EUDOSO e quella dell'aritmetica medievale, chiarimento che si rivelò fondamentale per la formazione di GALILEO. Le prime indagini nel campo della fisica lo portarono, tra l'83 e l'86, a determinare il peso specifico dei corpi tramite un congegno chiamato 'bilancetta', simile ad un utensile già in uso presso i mercanti orafi. Nell'88 diede anche una prova di erudizione letteraria con delle lezioni su DANTE tenute presso l'Accademia



fiorentina. Nell'89, nonostante non si fosse laureato, grazie alla stima ed alla fama che si era guadagnato presso certe frange del mondo accademico ottenne la cattedra di Matematica all'Università di Pisa, un lavoro che gli assicurò l'indipendenza economica dal padre. A Pisa GALILEO rimase 3 anni, durante i quali scoprì la legge di caduta dei gravi con i suoi famosi esperimenti. Ma il periodo più sereno e fruttuoso della sua vita lo passò come insegnante di matematica presso l'Università di Padova, dove si trasferì nel 1592 e dove rimase per 18 anni. durante i suoi primi anni a Padova GALILEO fu straordinariamente attivo e le sue lezioni attirarono tanti studenti anche stranieri che infine dovette far lezione in un'aula capace di contenere 2000 persone. A Padova continuò i suoi studi di meccanica e di astronomia, nell'ambito della quale abbracciò la teoria copernicana. Nel 1594 scrisse il famoso trattato *Della Scienza Meccanica*. Dal 1609 cominciò a perfezionare ed usare il cannocchiale come strumento per le osservazioni astronomiche e ne costruì uno capace di un ingrandimento di 36 volte. Il cannocchiale non era un'invenzione di GALILEO (artigiani olandesi e italiani ne avevano già approntati diversi tipi) ma i miglioramenti che lo scienziato vi apportò inaugurarono l'epoca delle grandi scoperte astronomiche, di cui lo stesso GALILEI diede annuncio nel *Sidereus Nuncius* (Ragguaggio astronomico) del 1610. I 4 maggiori satelliti di Giove, le montagne ed i crateri della Luna, le macchie solari, furono fenomeni fino ad allora sconosciuti che destarono meraviglia ed ammirazione tanto nel mondo accademico (KEPLERO riconobbe e confermò l'importanza delle scoperte di GALILEI), quanto in certo ambiente politico (COSIMO DÉ MEDICI lo nominò matematico dello studio di Pisa e (FERDIANDO II DÉ MEDICI lo protesse), ma anche ostruzionismo ed astio da parte delle gerarchie ecclesiastiche (in particolare del cardinale BELLARMINO) e degli aristotelici. Nel 1616 il Sant'Uffizio mise all'indice sia la cosmologia copernicana, sia le opere di GALILEO, che fu convocato a Roma per giustificare le sue opinioni. Qui il suo tentativo di difendere le concezioni astronomiche copernicane (e le proprie), sostenendo che non



Nell'opera di GALILEO [1] è anche ideata la formulazione di un criterio di resistenza per materiali fragili che sarà illustrato nella sezione 3 (p. 552).

fossero offensive nei confronti della Bibbia, venne respinto e lo scienziato fu intimato a non professarle più. GALILEO continuò tuttavia ad approfondire ed ampliare i suoi studi e, nel 1623, compose in volgare il *Saggiatore*, nel quale polemizzava con il padre gesuita ORAZIO GRASSI riguardo alla natura delle comete ed a problemi di ordine metodologico. Sempre nel '23 salì al soglio pontificio URBANO VIII, un BARBERINI che si era dimostrato disponibile nei suoi confronti, tanto che proprio all'ex cardinale, spirito illuminato ed aperto ai discorsi scientifici, GALILEO aveva dedicato il *Saggiatore*. Nel 1632 pubblicò il *Dialogo sopra i 2 massimi sistemi del mondo*, un testo fondamentale per la scienza moderna in cui GALILEO, sotto un'apparente neutralità, dava risalto all'astronomia copernicana a discapito di quella tolemaica. A causa dell'influenza di alcuni padri gesuiti, URBANO VIII ebbe allora un'involuzione e, nel 1633, GALILEO venne processato a condannato al carcere a vita dal Sant'Uffizio, una pena da cui poté salvarsi solo abiurando le sue teorie. Il carcere a vita fu così commutato in isolamento, che GALILEO scontò prima nel palazzo dell'Arcivescovado di Siena e poi nella sua villa di Arcetri dove egli visse gli ultimi otto anni dedicandosi alla scrittura del suo famoso libro *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze* che fu poi pubblicato dagli ELZEVIRII a Leida nel 1638. Morì a Firenze l'8 gennaio 1642, circondato da pochi allievi e nella quasi totale cecità. GALILEO GALILEI è stato formalmente assolto dall'accusa di eresia solo nel 1992, trecentocinquanta anni dopo la sua morte.

## 2. CRITERI ISOTROPI

La formulazione di un criterio di resistenza tende a stabilire, per una assegnata classe di materiali, quali siano le caratteristiche dello stato tensionale che contribuiscono significativamente a determinare il verificarsi di fenomeni ultraelastici di rottura fragile o di plasticizzazione. Nel seguito tali fenomeni ultraelastici saranno indicati col nome generico di *fenomeni di crisi*.

La formalizzazione di un criterio di resistenza si effettua mediante la definizione di funzioni di crisi.

- Una *funzione scalare di crisi* è una applicazione

$$f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R},$$

che ad ogni stato tensionale  $\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  associa lo scalare  $f(\mathbf{T}) \in \mathbb{R}$  che definisce un *grado di pericolosità* dello stato tensionale.

La forma analitica delle *funzioni scalari di crisi* è fortemente condizionata dal requisito di *indifferenza materiale*. Precisamente si ha che

**Proposizione 2.1. Isotropia della funzione di crisi.** *Una funzione scalare di crisi  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  deve essere isotropa e cioè deve soddisfare la condizione*

$$f(\mathbf{T}) = f(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T), \quad \begin{aligned} & \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}), \\ & \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V}), \end{aligned}$$

*di invarianza sotto l'azione del gruppo  $\text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  delle isometrie.*

**Dim.** Si consideri un processo dinamico e due osservatori  $O$  e  $O^*$  in moto rigido relativo. Gli osservatori  $O$  e  $O^*$  misurano in ogni istante gli stati tensionali

$$\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}), \quad \mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

ruotati, uno rispetto all'altro, di un'isometria propria  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  pari alla rotazione istantanea di  $O$  rispetto ad  $O^*$ . D'altro canto il valore dello scalare indicatore del grado di pericolosità deve essere lo stesso per entrambi gli osservatori e ciò comporta che la funzione di crisi deve essere *invariante* sotto l'azione del gruppo  $\text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  delle rotazioni:

$$f(\mathbf{T}) = f(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T), \quad \begin{aligned} & \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}), \\ & \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V}). \end{aligned}$$

Si osservi ora che  $(-\mathbf{Q}) \mathbf{T} (-\mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T$  e che, se  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  è una isometria, allora una delle isometrie  $\{\mathbf{Q}, -\mathbf{Q}\}$  è una rotazione (isometria propria). La condizione di invarianza di  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  sotto l'azione del sottogruppo delle rotazioni  $\text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  è pertanto equivalente a quella di isotropia.  $\square$

■ Più in generale una *funzione scalare di crisi* è un'applicazione

$$f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \times \mathfrak{R}^n \mapsto \mathfrak{R},$$

che ad ogni stato tensionale  $\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  e ad ogni  $n$ -upla di parametri scalari caratteristici del materiale associa lo scalare  $f(\mathbf{T}, p_1, \dots, p_n) \in \mathfrak{R}$  che definisce un *grado di pericolosità* dello stato tensionale.

La dimostrazione della proposizione 2.1 mostra che anche le funzioni scalari di crisi di questo tipo devono essere funzioni isotrope dello stato tensionale.

Esempi di funzioni scalari isotrope del tipo  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathfrak{R}$  sono forniti dagli invarianti scalari di un tensore simmetrico.

La terna degli *invarianti principali* è costituita dalle funzioni scalari

$$I_k : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathfrak{R}, \quad k = 1, 2, 3,$$

che associano ad ogni tensore  $\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  la corrispondente terna dei coefficienti del polinomio caratteristico

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) = -\lambda^3 + I_1(\mathbf{T})\lambda^2 + I_2(\mathbf{T})\lambda + I_3(\mathbf{T}).$$

Gli invarianti principali sono quindi definiti da

$$I_1(\mathbf{T}) = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \text{tr}(\mathbf{T}),$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^3 (T_{ij} T_{ij} - T_{ii} T_{kk}) = \frac{1}{2} [\text{tr}(\mathbf{T}^2) - (\text{tr} \mathbf{T})^2],$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \det \mathbf{T}.$$

E' facile verificare che gli invarianti principali sono funzioni isotrope. Ciò consegue dalla proprietà di invarianza del polinomio caratteristico rispetto al gruppo  $\text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  delle isometrie. Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{I}) &= \det(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{Q} \mathbf{I} \mathbf{Q}^T) = \\ &= \det \mathbf{Q} \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}) \det \mathbf{Q}^T = \\ &= \det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{I}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V}). \end{aligned}$$

Sia ora  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  una base principale ortonormale di  $\mathbf{T}$  e siano

$$\sigma_k : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathfrak{R}, \quad k = 1, 2, 3,$$

i relativi autovalori definiti dalle relazioni

$$\mathbf{T} \mathbf{d}_k = \sigma_k(\mathbf{T}) \mathbf{d}_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Le funzioni  $\sigma_k : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  sono anch'esse isotrope in forza della proprietà di invarianza del polinomio caratteristico rispetto al gruppo  $\text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$ .

Le relazioni tra i coefficienti di un polinomio e le sue radici mostrano che gli invarianti principali hanno le seguenti espressioni in termini degli autovalori

$$I_1(\mathbf{T}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2(\mathbf{T}) = -(\sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2),$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3,$$

dove per semplicità si è omesso di indicare la dipendenza delle  $\sigma_k$  da  $\mathbf{T}$ .

La rappresentazione dei criteri di resistenza per materiali isotropi è basata sul seguente risultato.

**Proposizione 2.2. Rappresentazione delle funzioni scalari isotrope.** *Una funzione scalare  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  è isotropa se e solo se esiste una funzione  $\phi : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$  tale che*

$$f(\mathbf{T}) = \phi(\sigma_1(\mathbf{T}); \sigma_2(\mathbf{T}); \sigma_3(\mathbf{T})), \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

con  $\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  invariante rispetto ad un'arbitraria permutazione degli argomenti.

**Dim.** Se vale la formula rappresentazione, l'isotropia di  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  è una diretta conseguenza dell'isotropia degli autovalori  $\sigma_k : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$ .

Si assuma viceversa che  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  sia isotropa. Bisogna dimostrare che, per ogni  $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$ , sussiste l'implicazione

$$\{\sigma_1(\mathbf{T}); \sigma_2(\mathbf{T}); \sigma_3(\mathbf{T})\} = \{\sigma_1(\mathbf{S}); \sigma_2(\mathbf{S}); \sigma_3(\mathbf{S})\} \Rightarrow f(\mathbf{T}) = f(\mathbf{S}).$$

A tal fine si osservi che se gli autovalori di  $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  coincidono, sussistono le rappresentazioni spettrali

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i, \quad \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \sigma_i \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i.$$

Sia quindi  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  l'isomeria che porta la base ortonormale  $\mathbf{d}_i, i = 1, 2, 3$  nella base ortonormale  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3$ . Ne segue che, essendo

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{Q} \mathbf{d}_i \Rightarrow \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = (\mathbf{Q} \mathbf{d}_i) \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{d}_i) = \mathbf{Q} (\mathbf{d}_i \otimes \mathbf{d}_i) \mathbf{Q}^T, \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

risulta  $\mathbf{S} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T$ . L'isotropia di  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R}$  assicura allora che  $f(\mathbf{S}) = f(\mathbf{T})$ .

L'invarianza di  $\phi(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  rispetto ad un'arbitraria permutazione degli argomenti è poi conseguenza del fatto che scambiare di posto due autovalori equivale a ruotare il tensore  $\mathbf{T}$  di  $\pi/2$  attorno all'asse principale associato al terzo autovalore.  $\square$

La proposizione 2.1 ed il teorema di rappresentazione 2.2 assicurano che una funzione di crisi  $f : \text{Sym}(V; V) \mapsto \Re$  è composta da una funzione  $\phi : \Re^3 \mapsto \Re$  e da una terna di *invarianti scalari* costituita dagli autovalori relativi ad una base ortonormale di autovettori.

Tale terna di invarianti può essere sostituita da una qualsiasi altra terna di invarianti indipendenti, quale ad esempio quella degli *invarianti principali*

$$f(\mathbf{T}) = \phi(I_1(\mathbf{T}); I_2(\mathbf{T}); I_3(\mathbf{T})), \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(V; V).$$

Infatti se le terne degli invarianti principali di  $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \text{Sym}(V; V)$  coincidono, ai due tensori corrisponde la stessa equazione caratteristica e dunque lo stesso insieme di autovalori.

Gli invarianti scalari possono anche essere espressi in termini degli *invarianti fondamentali o momenti*

$$\bar{I}_k : \text{Sym}(V; V) \mapsto \Re, \quad k = 1, 2, 3,$$

definiti da

$$\bar{I}_1(\mathbf{T}) := \text{tr}(\mathbf{T}), \quad \bar{I}_2(\mathbf{T}) := \text{tr}(\mathbf{T}^2), \quad \bar{I}_3(\mathbf{T}) := \text{tr}(\mathbf{T}^3).$$

Infatti dalle espressioni di  $I_1(\mathbf{T}), I_2(\mathbf{T})$  e dal teorema di CAYLEY<sup>62</sup>-HAMILTON<sup>63</sup>

$$-\mathbf{T}^3 + I_1(\mathbf{T})\mathbf{T}^2 + I_2(\mathbf{T})\mathbf{T} + I_3(\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathbf{O}, \quad \forall \mathbf{T} \in L\{V; V\},$$

si deducono le relazioni

$$I_1(\mathbf{T}) = \bar{I}_1(\mathbf{T}),$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} [\bar{I}_2(\mathbf{T}) - \bar{I}_1^2(\mathbf{T})],$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \frac{1}{6} [2\bar{I}_3(\mathbf{T}) - 3\bar{I}_1(\mathbf{T})\bar{I}_2(\mathbf{T}) + \bar{I}_1(\mathbf{T})^3].$$

I *momenti* hanno le seguenti semplici espressioni in termini degli autovalori

$$I_1(\mathbf{T}) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$

$$I_2(\mathbf{T}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2,$$

$$I_3(\mathbf{T}) = \sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3.$$

<sup>62</sup> ARTHUR CAYLEY (1821-1895). Professore di matematica a Cambridge, amico e collega del matematico SYLVESTER, è considerato il creatore della teoria delle matrici.

<sup>63</sup> WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805-1865). Professore di matematica al Trinity College di Dublino è considerato il più grande fisico e matematico inglese dopo NEWTON. Noto particolarmente per la scoperta dei quaternioni, per aver fondato l'ottica geometrica e per le ricerche di dinamica.

Denotando con  $\mathbf{T}_D$  la parte deviatorica del tensore  $\mathbf{T}$ , definita da

$$\mathbf{T}_D = \text{dev } \mathbf{T} = \mathbf{T} + \pi(\mathbf{T}) \mathbf{I}, \quad \pi(\mathbf{T}) = -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T},$$

ed osservando che per definizione  $\bar{I}_1(\mathbf{T}_D) = \text{tr}(\mathbf{T}_D) = 0$ , dalle formule precedenti si deducono le espressioni degli *invarianti deviatorici*:

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{T}) &:= I_1(\mathbf{T}_D) = \bar{I}_1(\mathbf{T}_D) = 0, \\ J_2(\mathbf{T}) &:= I_2(\mathbf{T}_D) = \frac{1}{2} \bar{I}_2(\mathbf{T}_D) \geq 0, \\ J_3(\mathbf{T}) &:= I_3(\mathbf{T}_D) = \frac{1}{3} \bar{I}_3(\mathbf{T}_D). \end{aligned}$$

- Un *criterio di resistenza* isotropo si esprime analiticamente considerando una famiglia di *funzioni scalari di crisi*:

$$f_\alpha(\mathbf{T}), \quad \alpha \in \mathcal{A},$$

- Un *dominio di resistenza* è definito assegnando una corrispondente famiglia di insiemi di livello:

$$f_\alpha(\mathbf{T}) \leq k_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}.$$

- Un *criterio di resistenza semplice* è definito da un'unica funzione scalare di crisi.
- La *tensione ideale* associata ad una funzione di crisi  $f : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathfrak{R}$  è la funzione scalare  $\sigma_{\text{id}} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathfrak{R}$  definita dall'identità

$$f(\mathbf{T}) = f(\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}), \quad \begin{cases} \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(V; V), \\ \forall \mathbf{d} \in S^2(1). \end{cases}$$

In altri termini la *tensione ideale* è il valore della tensione principale di uno stato tensionale monoassiale cui corrisponde lo stesso valore della funzione di crisi.

L'isotropia della funzione di crisi  $f : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathfrak{R}$  assicura che la definizione di tensione ideale è ben posta in quanto il valore della funzione di crisi è lo stesso in corrispondenza di ogni stato tensionale monoassiale, a parità di tensione principale  $\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T})$ . Infatti, se  $\mathbf{d} \in V$  è un versore, un qualsiasi altro versore si può scrivere come  $\mathbf{Q} \mathbf{d}$  con  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(V; V)$  e l'isotropia assicura che

$$\begin{aligned} f(\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T})(\mathbf{Q} \mathbf{d}) \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{d})) &= f(\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) \mathbf{Q} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \mathbf{Q}^T) = \\ &= f(\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) \mathbf{d} \otimes \mathbf{d}), \quad \forall \mathbf{Q} \in \text{Orth}(V; V), \end{aligned}$$

dove si è fatto ricorso all'identità

$$\mathbf{Q} (\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \mathbf{Q}^T = (\mathbf{Q} \mathbf{d}) \otimes (\mathbf{Q} \mathbf{d}).$$

Un criterio di resistenza semplice è convenientemente espresso mediante la relativa *tensione ideale*.

- Il dominio di resistenza corrispondente alla tensione monoassiale di crisi  $\sigma_o \in \Re$  è costituito dall'insieme di livello  $\sigma_o$  della funzione di crisi  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \Re$ , e cioè dall'insieme definito da

$$\mathcal{K}(f, \sigma_o) := \{\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) : \sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) \leq \sigma_o\}.$$

La famiglia degli insiemi di livello associata alla funzione  $f : \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \Re$  è l'unione disgiunta degli insiemi di livello al variare del valore della tensione monoassiale di crisi  $\sigma_o \in \Re$ .

- Due funzioni di crisi sono equivalenti se generano la stessa famiglia di insiemi di livello. A funzioni di crisi equivalenti corrisponde la stessa funzione *tensione ideale*.

I criteri di resistenza isotropi possono essere rappresentati da domini di resistenza nello spazio delle tensioni principali o *spazio di HAIGH-WESTERGAARD* [20], [21].

Nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD ad ogni punto  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  corrisponde una famiglia di stati tensionali  $\{\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \mid \mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})\}$  che possono ottenersi l'uno dall'altro tramite una rotazione di una terna principale ortonormale cui corrisponde la terna di tensioni principali  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ .

Nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD si possono individuare sei *sestanti* in ciascuno dei quali sussiste tra le tensioni principali una relazione del tipo

$$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1.$$

In ciascuno di essi la frontiera del dominio di resistenza ha la stessa forma.

La proprietà di invarianza rispetto allo scambio di due qualsiasi tensioni principali implica inoltre che per determinare la forma dell'intera superficie limite è sufficiente conoscerne solo la porzione contenuta in un semi-sestante.

Se la funzione di crisi dipende solo dallo stato tensionale il dominio di resistenza può essere definito effettuando una prova di trazione semplice per determinare il valore della tensione ideale di crisi.

Quando invece la funzione di crisi dipende anche da un insieme di parametri scalari caratteristici del materiale, per definire il dominio di resistenza è necessario effettuare una molteplicità di prove sperimentali in quanto la determinazione degli incogniti parametri scalari richiede un pari numero di prove indipendenti.

Nel caso di materiali con *comportamento anisotropo* le funzioni di crisi devono dipendere, oltre che dallo stato tensionale, anche da un insieme di parametri tensoriali che descrivono il particolare tipo di anisotropia del materiale.

Un criterio di resistenza anisotropo formulato da RODNEY HILL è illustrato nella sezione 4.4 (p. 569) insieme al criterio di TSAI-HILL, che è la specializzazione del criterio di HILL a materiali con comportamento ortotropo e fornisce uno strumento efficace per definire il dominio di resistenza di materiali compositi.

## 2.1. Rappresentazione nel piano deviatorico

Dette  $\sigma_M(\mathbf{T})$  e  $\sigma_m(\mathbf{T})$  le tensioni principali massima e minima relative allo stato tensionale  $\mathbf{T}$ , è conveniente introdurre i parametri [35]

$$\begin{cases} p(\mathbf{T}) = \frac{\sigma_M(\mathbf{T}) + \sigma_m(\mathbf{T})}{2}, \\ r(\mathbf{T}) = \frac{\sigma_M(\mathbf{T}) - \sigma_m(\mathbf{T})}{2} \geq 0, \end{cases}$$

rispettivamente ascissa del centro e raggio del massimo cerchio di MOHR.

- La tensione principale intermedia  $\sigma_I(\mathbf{T})$  può essere allora individuata tramite il *parametro di LODE* definito, per  $r(\mathbf{T}) > 0$ , da

$$\mu(\mathbf{T}) := \frac{\sigma_I(\mathbf{T}) - p(\mathbf{T})}{r(\mathbf{T})} \quad \text{con } |\mu| \leq 1,$$

essendo  $|\sigma_I(\mathbf{T}) - p(\mathbf{T})| \leq r(\mathbf{T})$ .

Viceversa, assegnati i parametri  $p$  ed  $r \geq 0$  le tensioni principali massima, minima ed intermedia sono data da

$$\begin{cases} \sigma_M(\mathbf{T}) = p(\mathbf{T}) + r(\mathbf{T}), \\ \sigma_m(\mathbf{T}) = p(\mathbf{T}) - r(\mathbf{T}), \\ \sigma_I(\mathbf{T}) = p(\mathbf{T}) + \mu(\mathbf{T}) r(\mathbf{T}). \end{cases}$$

Nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD sia  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  il riferimento ortonormale relativo alle coordinate principali  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ . Il vettore posizione  $\sigma_1 \mathbf{a}_1 + \sigma_2 \mathbf{a}_2 + \sigma_3 \mathbf{a}_3$  rappresenta quindi la classe di equivalenza degli stati tensionali aventi quali valori principali  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ .

Stante l'invarianza delle funzioni di crisi di un materiale isotropo, per rappresentare la frontiera del dominio di resistenza è conveniente considerare nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD un nuovo riferimento ortonormale, ruotato rispetto a quello canonico  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  ed avente uno degli assi diretto lungo la trisettrice

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3),$$

del primo quadrante del riferimento canonico.

Il nuovo riferimento  $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*\}$ , assumendo che il versore  $\mathbf{a}_3^*$  sia diretto lungo la trisettrice, è individuato dalla rotazione

$$\mathbf{a}_i^* = \mathbf{Q} \mathbf{a}_i = \mathbf{Q}_{ki} \mathbf{a}_k, \quad i, k = 1, 2, 3,$$

rappresentata nel riferimento  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  dalla matrice ortogonale

$$[\mathbf{Q}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Siano  $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*\}$  le coordinate nel riferimento  $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*\}$ .

- Il piano deviatorico, o piano  $\pi$  che nel riferimento  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  ha equazione

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0,$$

nel nuovo riferimento è rappresentato dalla condizione  $\sigma_3^* = 0$ .

- Le sezioni del dominio di resistenza con piani paralleli a quello deviatorico sono dette *sezioni di MELDHAL*.

Se il criterio è indipendente dall'invariante lineare dello stato tensionale, le sezioni di MELDHAL sono tutte coincidenti tra loro poiché il dominio di crisi è un cilindro con generatrice parallela all'asse idrostatico.

Al parametro di LODE si può dare una semplice interpretazione geometrica calcolando la pendenza di una retta che passa per l'origine e forma nel piano deviatorico  $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*\}$  un angolo antiorario  $\theta$  con l'asse coordinato  $\mathbf{a}_1^*$  cui corrisponde la  $\sigma_{\max}$ .

Sia infatti  $\Pi$

$$\Pi = \mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \mathbf{d},$$

il proiettore ortogonale sul piano deviatorico e si osservi che l'asse  $\mathbf{a}_1^*$  biseca il sestante  $\{-\Pi \mathbf{a}_2, \Pi \mathbf{a}_1\}$  e che l'asse  $\mathbf{a}_2^*$  ha la stessa direzione e verso opposto alla proiezione  $\Pi \mathbf{a}_3$  dell'asse  $\mathbf{a}_3$  sul piano deviatorico.

Ad una terna di coordinate principali  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  corrisponde la terna di coordinate  $\{\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*\}$  secondo la legge controvariante governata da  $[\mathbf{Q}]^T$ , così che

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} \sigma_3 \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Ne segue che

$$\tan \theta = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2) - 2\sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_2)}.$$

Ricordando la definizione del parametro di LODE ed osservando che nel sestante  $\{-\Pi a_2, \Pi a_1\}$  risulta  $\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2$ , si ha che

$$\mu = -\sqrt{3} \tan \theta, \quad -\pi/6 \leq \theta \leq \pi/6.$$

La relazione vale in tutti i sestanti a patto di ridefinire l'angolo  $\theta$  in modo che in ognuno di essi vari tra  $-\pi/6$  e  $\pi/6$ .

In ogni sestante la frontiera del dominio nel piano deviatorico è simmetrica rispetto alla bisettrice del sestante.

Ne segue che la funzione di crisi deve essere una funzione pari del parametro di LODE e quindi dell'angolo  $\theta$ .

Per rappresentare una sezione di MELDHAL della superficie limite basta quindi far variare l'angolo  $\theta$  tra  $0$  e  $\pi/6$ .

La rappresentazione nel piano deviatorico è illustrata nella figura 2.1. Si noti che nel sestante  $\{-\Pi a_2, \Pi a_1\}$  l'ascissa  $\sigma_1^*$  è proporzionale al raggio  $r$ .

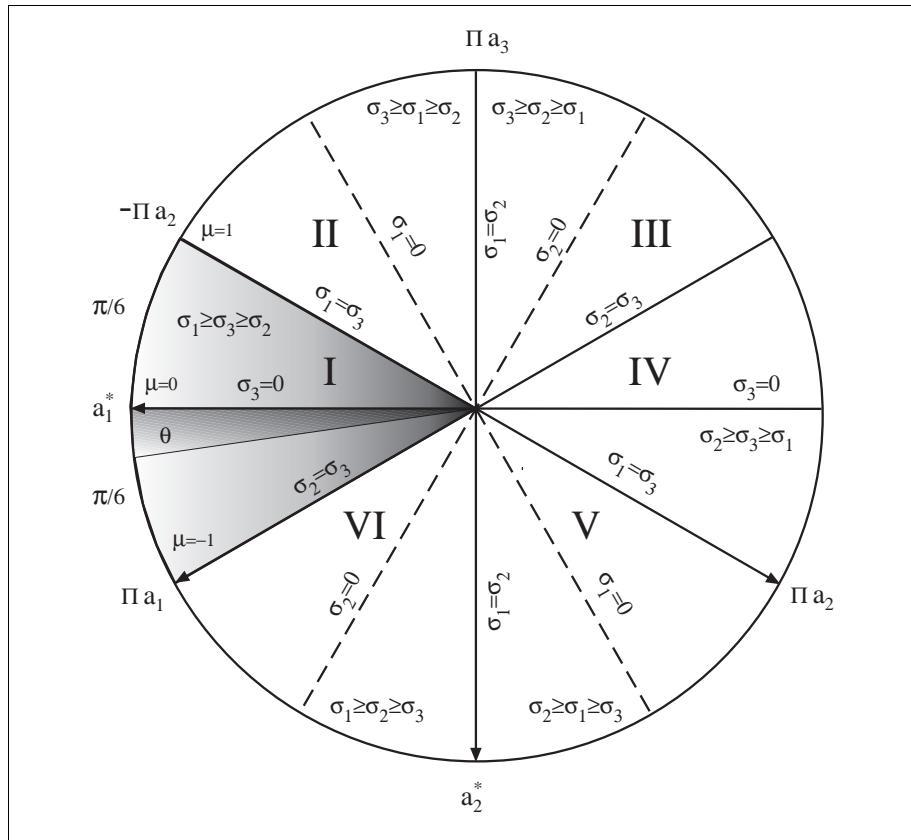


Fig. 2.1 Rappresentazione nel piano deviatorico.

Precisamente si ha che

$$\sigma_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_M - \sigma_m) = \sqrt{2} r.$$

Dunque in ogni sestante

- le linee a  $r$  costante sono segmenti ortogonali alla bisettrice del sestante,
- le linee a  $\mu$  costante sono radiali.

L'analisi delle rappresentazioni degli stati tensionali nel piano deviatorico dello spazio di HAIGH-WESTERGAARD può essere completata considerando un ulteriore riferimento  $\{\mathbf{a}_1^{**}, \mathbf{a}_2^{**}, \mathbf{a}_3^{**}\}$ , con  $\mathbf{a}_3^{**} = \mathbf{d}$ .

Il riferimento  $\{\mathbf{a}_1^{**}, \mathbf{a}_2^{**}, \mathbf{a}_3^{**}\}$  si ottiene ruotando il riferimento  $\{\mathbf{a}_1^*, \mathbf{a}_2^*, \mathbf{a}_3^*\}$  di  $\pi/6$  in senso antiorario attorno a  $\mathbf{d}$ .

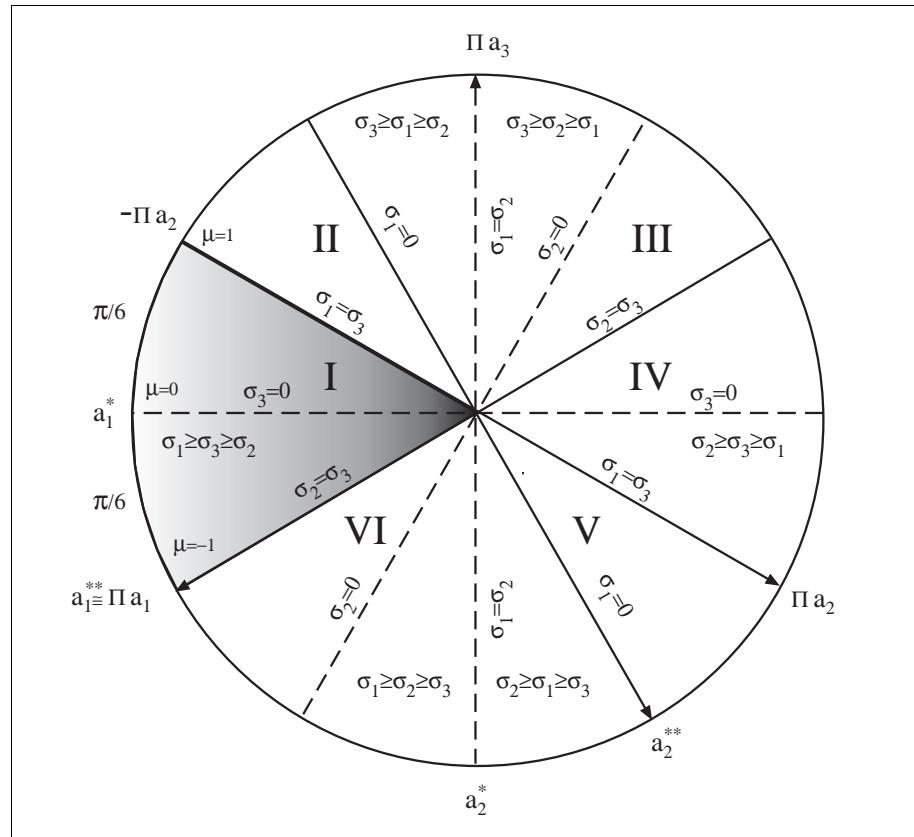


Fig. 2.2 Rappresentazione nel piano deviatorico.

La matrice di trasferimento dal riferimento canonico  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  al riferimento  $\{\mathbf{a}_1^{**}, \mathbf{a}_2^{**}, \mathbf{a}_3^{**}\}$  è la matrice ortogonale

$$[\bar{\mathbf{Q}}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

Si osservi che il versore  $\mathbf{a}_1^{**}$  è proporzionale al vettore  $\Pi \mathbf{a}_1$ .

Precisamente, essendo  $\|\Pi \mathbf{a}_1\| = \sqrt{2/3}$ , risulta

$$\mathbf{a}_1^{**} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Pi \mathbf{a}_1.$$

Il versore  $\mathbf{a}_1^{**}$  è pertanto disteso lungo la frontiera di un sestante (vedi fig. 2.2).

Ad una terna di coordinate principali  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  corrisponde la terna di coordinate  $\{\sigma_1^{**}, \sigma_2^{**}, \sigma_3^{**}\}$  secondo la legge controvariante governata da  $[\bar{\mathbf{Q}}]^T$ , così che

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^{**} \\ \sigma_2^{**} \\ \sigma_3^{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} (\sigma_2 + \sigma_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \end{bmatrix}.$$

Nel piano deviatorico risulta  $\sigma_2 + \sigma_3 = -\sigma_1$ .

Dunque, essendo  $\sigma_1 = \sigma_M$  in entrambi i sestanti I e VI a cavallo dell'asse  $\mathbf{a}_1^{**}$  ed osservando che

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

si conclude che

$$\sigma_1^{**}(\mathbf{T}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sigma_M(\text{dev } \mathbf{T}).$$

Nel piano deviatorico sussiste quindi la proprietà:

- le rette ortogonali ai raggi che delimitano i sestanti sono i luoghi di ogni sessante in cui la tensione normale massima dovuta alla componente deviatorica è costante.

### 3. CRITERI PER MATERIALI FRAGILI

I criteri di resistenza per materiali fragili esprimono condizioni per la formazione ed il propagarsi di fratture. I più semplici fanno riferimento a funzioni scalari di crisi i cui valori sono i massimi delle tensioni normali o delle dilatazioni elastiche.

Per materiali con diverso con diverso comportamento a trazione e compressione le funzioni scalari di crisi sono espresse dai valori sono i massimi e min delle tensioni normali o delle dilatazioni elastiche.

#### 3.1. Criterio della massima tensione normale

Il criterio della massima tensione normale, ideato da GALILEO<sup>64</sup> [1] e formulato da RANKINE<sup>65</sup> nel 1868, assume quale parametro determinante la crisi il valore del massimo modulo della tensione normale nel punto al variare della giacitura.

Per formulare il criterio con riferimento a materiali con diverso comportamento a trazione e compressione, si considerino le funzioni

$$\sigma_{\max} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathbb{R}, \quad \sigma_{\min} : \text{Sym}(V; V) \mapsto \mathbb{R},$$

definite da

$$\sigma_{\max}(\mathbf{T}) = \max \{ (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in S^2(1) \},$$

$$\sigma_{\min}(\mathbf{T}) = \min \{ (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in S^2(1) \}.$$

In termini di tensioni principali si ha che

$$\sigma_{\max}(\mathbf{T}) = \max_{i=1,2,3} \sigma_i(\mathbf{T}), \quad \sigma_{\min}(\mathbf{T}) = \min_{i=1,2,3} \sigma_i(\mathbf{T}).$$

E' facile verificare che le funzioni  $\sigma_{\max}$  e  $-\sigma_{\min}$  sono convesse ed in particolare sublineari (positivamente omogenee e subadditive) in quanto

$$\sigma_{\max}(\alpha \mathbf{T}) = \alpha \sigma_{\max}(\mathbf{T}), \quad \forall \alpha \geq 0,$$

$$\sigma_{\max}(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) \leq \sigma_{\max}(\mathbf{T}_1) + \sigma_{\max}(\mathbf{T}_2), \quad \forall \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2 \in \text{Sym}(V; V).$$

Gli insiemi di livello di  $\sigma_{\max}$  e  $-\sigma_{\min}$  sono pertanto insiemi convessi.

<sup>64</sup> GALILEO GALILEI (1564-1642), *Discorsi su due nuove scienze*, Leida 1638.

<sup>65</sup> WILLIAM JOHN MACQUORN RANKINE (1820-1872). Nato ad Edinburgo, ingegnere ferroviario e scienziato, fu professore di ingegneria civile e di meccanica a Glasgow.

Il criterio di resistenza è isotropo, in quanto tali sono le funzioni  $\sigma_i(\mathbf{T})$  per  $i = 1, 2, 3$  che forniscono le tensioni normali relative ad un riferimento principale. Dunque

$$\sigma_{\max}(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T) = \max_{i=1,2,3} \sigma_i(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T) = \max_{i=1,2,3} \sigma_i(\mathbf{T}) = \sigma_{\max}(\mathbf{T}).$$

Denotando con  $\sigma_o^+$  e  $\sigma_o^-$  le tensioni di crisi monoassiali a trazione ed a compressione, la condizione di ammissibilità dello stato tensionale si scrive

$$\begin{cases} \sigma_{id}^+(\mathbf{T}) = \sigma_{\max}(\mathbf{T}) \leq \sigma_o^+, \\ \sigma_{id}^-(\mathbf{T}) = \sigma_{\min}(\mathbf{T}) \geq \sigma_o^-. \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Il dominio di resistenza è convesso in  $\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  in quanto intersezione di due insiemi convessi.

Nello spazio delle tensioni principali il dominio di resistenza è delimitato da sei piani, a due a due paralleli, di equazione

$$\begin{cases} \sigma_i \leq \sigma_o^+, \\ \sigma_i \geq \sigma_o^-. \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

### 3.2. Criterio della massima dilatazione

Il *criterio della massima dilatazione*, proposto da GRASHOF nel 1878, assume, quale parametri determinanti la crisi la massima e la minima dilatazione elastica.

Per materiali linearmente elasticci le funzioni di crisi sono dunque

$$\varepsilon_{\max}(\mathbb{C}; \mathbf{T}) = \max \{(\mathbb{C}[\mathbf{T}]\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in S^2(1)\},$$

$$\varepsilon_{\min}(\mathbb{C}; \mathbf{T}) = \min \{(\mathbb{C}[\mathbf{T}]\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \mid \mathbf{n} \in S^2(1)\}.$$

dove  $\mathbb{C} \in \text{Sym}(\text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}); \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}))$  è il tensore di deformabilità elastica.

Per esplicitare la richiesta di indifferenza materiale si consideri il tensore di deformabilità elastica  $\mathbb{C}_Q$  ruotato di  $\mathbf{Q}$ , rispetto a  $\mathbb{C}$ , con  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(\mathbf{V}; \mathbf{V})$ . Il tensore  $\mathbb{C}_Q$  è definito dall'identità

$$\mathbb{C}_Q[\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T] = \mathbf{Q}\mathbb{C}[\mathbf{T}]\mathbf{Q}^T, \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

ed associa quindi, al tensore ruotato, il ruotato del tensore immagine tramite  $\mathbb{C}$ .

Si ponga

$$\mathbb{Q} = \mathbf{Q} \boxtimes \mathbf{Q}.$$

Le principali proprietà del prodotto tensoriale quadrato  $\boxtimes$  sono riportate nella sezione I.4 (p. 26). La relazione tra il tensore di deformabilità elastica  $C$  ed il suo ruotato  $C_Q$  si può scrivere in forma sintetica

$$C_Q = Q C Q^T.$$

Detta  $f(C; T)$  la funzione di crisi, il principio di indifferenza materiale richiede che sia

$$f(C; T) = f(Q C Q^T; Q T Q^T), \quad \forall T \in \text{Sym}(V; V),$$

e cioè che la funzione di crisi sia un invariante simultaneo di  $C$  e di  $T$ .

Tale proprietà è soddisfatta dalla funzione di crisi del criterio di GRASHOF. Si ha infatti che

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\max}(Q C Q^T; Q T Q^T) &= \max \{ (Q C [Q^T Q T Q^T] Q n) \cdot (Q n) \mid n \in S^2(1) \} = \\ &= \max \{ (Q C [Q^T Q T] Q n) \cdot (Q n) \mid n \in S^2(1) \} = \\ &= \max \{ (Q^T Q) C [T] n \cdot n \mid n \in S^2(1) \} = \\ &= \max \{ (C [T] n) \cdot n \mid n \in S^2(1) \} = \varepsilon_{\max}(C; T), \end{aligned}$$

essendo  $Q^T Q = \mathbb{I}$ . Si noti che la linearità del legame elastico non gioca nessun ruolo nella dimostrazione. Analogamente si procede per  $\varepsilon_{\min}(C; T)$ .

Se il materiale è elasticamente isotropo, le funzioni di crisi del criterio di GRASHOF sono espresse, in termini di tensioni principali, da

$$\varepsilon_{\max}(T) = \max_{i=1,2,3} \varepsilon_i(T) = \max_{i=1,2,3} \left\{ \frac{1+\nu}{E} \sigma_i(T) - \frac{\nu}{E} \text{tr}(T) \right\},$$

dove  $E$  è il modulo di YOUNG e  $\nu$  è il rapporto di POISSON.

Analogamente per  $\varepsilon_{\min}$ . Le condizioni di ammissibilità dello stato tensionale si scrivono quindi

$$\begin{cases} \sigma_{id}^+(T) = E \varepsilon_{\max}(T) \leq \sigma_o^+, \\ \sigma_{id}^-(T) = E \varepsilon_{\min}(T) \geq \sigma_o^-. \end{cases}$$

Nello spazio delle tensioni principali il dominio di resistenza corrispondente ai valori di soglia  $\sigma_o^+$  e  $\sigma_o^-$  è dunque delimitato da sei piani a due a due paralleli di equazione

$$\begin{cases} (1+\nu) \sigma_i - \nu (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_o^+, \\ (1+\nu) \sigma_i - \nu (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \geq \sigma_o^-. \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

### 3.3. Criterio del potenziale elastico

Nel 1885 E. BELTRAMI<sup>66</sup> formulò in [10] un criterio di crisi in cui assumeva quale indice di pericolosità dello stato tensionale il valore puntuale del potenziale elastico complementare.

Una analoga proposta fu poi fatta da B.P. HAIGH nel 1919 [17].

Per materiali linearmente elastici la funzione di crisi è

$$f(\mathbb{C}; \mathbf{T}) = \frac{1}{2} (\mathbb{C}[\mathbf{T}]) : \mathbf{T} .$$

dove

$$\mathbb{C} \in \text{Sym}(\text{Sym}(V; V); \text{Sym}(V; V)) ,$$

è il tensore di deformabilità elastica.

La richiesta del principio di indifferenza materiale è soddisfatta. L'energia di deformazione elastica non dipende infatti dall'osservatore e ciò in quanto la funzione di crisi del criterio di BELTRAMI è un invariante simultaneo dei tensori  $\mathbb{C}$  e  $\mathbf{T}$ :

$$\begin{aligned} f(Q\mathbb{C}Q^T; Q\mathbf{T}Q^T) &= \frac{1}{2} (Q\mathbb{C}[Q^T Q\mathbf{T}Q^T]) : (Q\mathbf{T}Q^T) = \\ &= \frac{1}{2} (Q\mathbb{C}[Q^T Q\mathbf{T}]) : (Q\mathbf{T}) = \\ &= \frac{1}{2} (Q^T Q\mathbb{C}[\mathbf{T}]) : \mathbf{T} = \frac{1}{2} (\mathbb{C}[\mathbf{T}]) : \mathbf{T} = f(\mathbb{C}; \mathbf{T}) . \end{aligned}$$

Si noti che la linearità del legame elastico non gioca nessun ruolo nella dimostrazione.

La tensione ideale del criterio di BELTRAMI dipende dalla componente idrostatica dello stato tensionale. Ciò è in disaccordo con le risultanze degli esperimenti condotti per la determinazione dei domini di plasticizzazione di materiali metallici duttili. La questione sarà discussa in dettaglio nella prossima sezione.

## 4. CRITERI PER MATERIALI METALLICI

Le ricerche sperimentali, in particolare quelle condotte da BRIDGMAN<sup>67</sup> negli anni 1940, hanno messo in evidenza che i fenomeni di plasticizzazione nei materiali metallici policristallini non sono influenzati dal valore della componente sferica (o idrostatica) dello stato tensionale [30].

---

<sup>66</sup> EUGENIO BELTRAMI (1835-1900). Professore di matematica a Bologna ed in altre Università italiane. Con RUDOLF OTTO SIGISMUND LIPSCHITZ (1832-1903) e ELWIN BRUNO CHRISTOFFEL (1829-1900) fu un prosecutore dell'opera di RIEMANN.

<sup>67</sup> PERCY WILLIAMS BRIDGMAN (1882-1961). Fisico statunitense che per le ricerche nel campo della fisica delle alte pressioni ha ottenuto il premio NOBEL nel 1946.

Tali osservazioni sono in accordo con l’analisi della struttura microscopica del materiale e con leggi che governano il movimento delle dislocazioni nel reticolo cristallino.

Gli scorrimenti tra piani cristallografici preferenziali avvengono infatti essenzialmente per effetto delle azioni tangenziali agenti su tali piani, e risultano indipendentemente dal valore delle azioni normali.

Più precisamente in ogni cristallo esistono piani preferenziali di slittamento, coincidenti con le giaciture in cui le distanze interatomiche sono minori, ed in ogni piano di slittamento esistono direzioni preferenziali di slittamento, aventi la direzione lungo la quale le distanze interatomiche sono minori.

In una prova di trazione monoassiale in direzione del versore  $\mathbf{d}$  sia  $\sigma$  la tensione principale e sia  $\varphi$  l’angolo tra l’asse del provino e la normale ad un piano di slittamento preferenziale e  $\theta$  l’angolo tra l’asse  $\mathbf{d}$  del provino ed una direzione di slittamento preferenziale individuata da un versore  $\mathbf{s}$  nel piano di slittamento.

Allora la tensione sul piano di slittamento preferenziale è

$$\sigma(\mathbf{d} \otimes \mathbf{d}) \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{d} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{d} = \sigma \cos \varphi \mathbf{d}.$$

La componente tangenziale di tale tensione nella direzione di slittamento preferenziale è allora data da

$$\tau = \sigma \cos \varphi \mathbf{d} \cdot \mathbf{s} = \sigma \cos \varphi \cos \theta.$$

Nel 1924 E. SCHMID ha osservato che lo scorrimento in un monocristallo avviene quando la *tensione tangenziale risolta*

$$\tau = \sigma \cos \varphi \cos \theta.$$

superà un valore critico. Tale risultato, confermato da molti esperimenti, è noto come *legge di SCHMID*.

Per quanto detto, i criteri di plasticizzazione dei materiali metallici policristallini assumono che la funzione di crisi dipenda dalla parte deviatorica dello stato tensionale.

Nel seguito si illustrano i più importanti criteri di plasticizzazione e si illustrano le relative rappresentazioni nello spazio delle tensioni principali.

I criteri deviatorici ammettono tutta una rappresentazione alternativa in due dimensioni in quanto la dipendenza dalle tensioni principali può essere espressa dalle differenze

$$\sigma_1 - \sigma_2, \quad \sigma_2 - \sigma_3, \quad \sigma_3 - \sigma_1.$$

Ora la differenza  $\sigma_1 - \sigma_2$  può essere scritta

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -(\sigma_3 - \sigma_1) - (\sigma_2 - \sigma_3),$$

e pertanto il criterio di resistenza può essere rappresentato in un piano i cui assi hanno per ascisse  $\sigma_2 - \sigma_3$  e  $\sigma_3 - \sigma_1$ .

#### 4.1. Criterio di Tresca-Saint Venant

Un criterio di resistenza materiali metallici policristallini fu pubblicato dall'ingegnere francese TRESCA in una serie di note a partire dal 1864 [3], [4].

I risultati di TRESCA erano basati su di una lunga serie di esperimenti condotti per valutare il carico da applicare per estrudere i metalli attraverso trafile di differenti forme.

TRESCA osservò che la plasticizzazione del materiale aveva luogo quando la tensione tangenziale massima raggiungeva un valore ben definito, in ciò probabilmente influenzato dal più generale criterio di plasticizzazione formulato per i terreni da COULOMB nel 1773 in [2] e che sarà illustrato nella sezione 6.1 (p. 579).

SAINT VENANT, dovendo esaminare la nota che TRESCA aveva presentato alla Accademia di Francia nel 1868 [5], si interessò al problema della deformazione plastica dei metalli duttili e pubblicò nel 1870 un lavoro in cui formulò le equazioni fondamentali della plasticità sotto l'ipotesi che il flusso plastico è piano ed avviene a volume costante quando la massima tensione tangenziale attinge un valore limite [8].

Il suo lavoro è contemporaneo alle ricerche di M. LEVY [9], che estese il modello al caso tridimensionale assumendo che il tasso di deformazione plastica fosse proporzionale al deviatore degli sforzi.

SAINT VENANT trattò anche il problema della deformazione plastica di alberi circolari soggetti a torsione, di travi a sezione rettangolare soggetti a flessione e di cilindri circolari cavi soggetti a pressione interna.

Una criterio analogo a quello di TRESCA-SAINT VENANT fu proposto da J.J. GUEST nel 1900 in [12], [28].

Per formulare il criterio di TRESCA-SAINT VENANT si denoti con  $S^2(1)$  la sfera bidimensionale di raggio unitario nello spazio euclideo  $\mathbb{S}$  e si consideri la norma del vettore tensione tangenziale

$$\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}) := \| \boldsymbol{\tau}(\mathbf{T}, \mathbf{n}) \|,$$

dove

$$\| \boldsymbol{\tau}(\mathbf{T}, \mathbf{n}) \|^2 = \| \mathbf{T}\mathbf{n} \|^2 - (\mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2.$$

La funzione di crisi del criterio di TRESCA-SAINT VENANT-GUEST si scrive allora

$$f(\mathbf{T}) = \tau_{\max}(\mathbf{T}) = \max_{\mathbf{n} \in S^2(1)} \tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}).$$

L'isotropia della funzione di crisi è di immediata verifica in quanto

$$\begin{aligned} \tau(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{n})^2 &= \| \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{n} \|^2 - \sigma(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{n})^2 = \\ &= \| \mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{n} \|^2 - \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2 = \| \mathbf{T}\mathbf{n} \|^2 - \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2 = \tau(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

Ne segue che

$$f(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T) = \max_{\mathbf{n} \in S^2(1)} \tau(\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T, \mathbf{n}) = \max_{\mathbf{n} \in S^2(1)} \tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}) = f(\mathbf{T}).$$

E' conveniente esprimere la massima tensione tangenziale in funzione delle tensioni principali. A tal fine è comodo far ricorso alla rappresentazione di MOHR da cui si evince in modo immediato che la massima norma della tensione tangenziale è pari alla semidifferenza tra la massima e la minima tensione principale. Si ha dunque

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \},$$

ovvero

$$\tau_{\max} = \frac{1}{4} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|),$$

Al criterio di TRESCA-SAINT VENANT corrisponde dunque la *tensione ideale*

$$\sigma_{\text{id}} = \sigma_M - \sigma_m = 2r,$$

ed in termini di tensioni principali

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{id}} &= \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \} = \\ &= \frac{1}{2} (|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|). \end{aligned}$$

Il dominio di resistenza associato al criterio di TRESCA è individuato dalla condizione

$$\tau_{\max}(\mathbf{T}) \leq \tau_o \iff \sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) \leq \sigma_o = 2\tau_o \iff r(\mathbf{T}) \leq \tau_o,$$

dove  $\tau_o$  è il valore limite della tensione tangenziale in stato tensionale di puro taglio e  $\sigma_o$  è il valore limite della tensione normale in stato tensionale monoassiale. Si noti che la relazione  $\sigma_o = 2\tau_o$  è conseguenza del fatto che in uno stato tensionale monoassiale la massima tensione tangenziale è pari alla metà della tensione principale di trazione.

Nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD la superficie di TRESCA è un cilindro con asse parallelo alla retta idrostatica.

Ricordando che le rette a  $r(\mathbf{T})$  costante sono, in ogni sestante, ortogonali alla bisettrice del sestante, si deduce che la proiezione della superficie di plasticizzazione relativa al criterio di TRESCA sul piano deviatorico, ortogonale all'asse idrostatico, è un esagono regolare i cui vertici giacciono sulle proiezioni degli assi  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  sul piano deviatorico, vedi fig. 4.1. Le ascisse lungo le proiezioni degli assi principali sul piano deviatorico sono denotate con  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$ .

Dalla trattazione svolta nella sezione 2.1 (p. 547), si deduce che le intersezioni del cilindro con le proiezioni degli assi del riferimento canonico  $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$  hanno distanza dall'origine pari a

$$\sigma_1^{**}(\mathbf{T}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \sigma_M(\text{dev } \mathbf{T}).$$

Ora la massima tensione normale della componente deviatorica in una prova monoassiale con tensione principale  $\sigma_o$  è pari a

$$\sigma_M(\text{dev } \mathbf{T}) = \frac{2}{3} \sigma_o,$$

e quindi risulta

$$\sigma_1^{**}(\mathbf{T}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sigma_o.$$

L'esagono di TRESCA interseca quindi le proiezioni degli assi del riferimento canonico in punti situati su di una circonferenza di raggio  $\sqrt{2/3} \sigma_o$ .

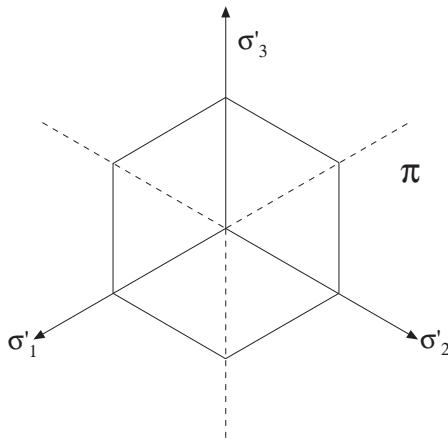


Fig. 4.1 Criterio di Tresca

Nel piano coordinato con gli assi  $\sigma_3 - \sigma_1$  e  $\sigma_2 - \sigma_3$  la superficie di plasticizzazione di TRESCA assume la forma di un esagono irregolare come mostrato nella fig. 4.2, dove  $\sigma_o$  denota la tensione monoassiale di snervamento del materiale.

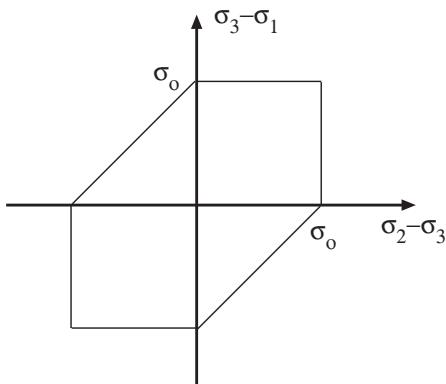


Fig. 4.2 Criterio di Tresca

## 4.2. Criterio di Maxwell-Huber-von Mises

Il criterio di plasticizzazione enunciato per primo da MAXWELL e formulato poi indipendentemente da M. T. HUBER nel 1904 e da R. VON MISES nel 1913, e ripreso poi da H. HENCKY nel 1928, è suscettibile di enunciati diversi che conducono però a funzioni di crisi isotrope tra loro equivalenti. Il lavoro di M.T. HUBER [14], scritto in polacco, ricevette attenzione solo circa vent'anni dopo la pubblicazione.

Nelle varie forme che assume il criterio è detto

- criterio del *potenziale elastico complementare di forma* (J.C. MAXWELL-M.T. HUBER),
- criterio dell'*invariante quadratico del deviatore degli sforzi* (R. VON MISES),
- criterio della *tensione tangenziale ottaedrale* (A. NADAI),
- criterio del *valor medio quadratico della tensione tangenziale*.

Le diverse formulazioni sono illustrate in dettaglio nelle sezioni seguenti.

La validità di tale criterio di plasticizzazione per materiali metallici è stata verificata mediante molti esperimenti di laboratorio.

Una prima serie di esperienze fu condotta nel 1926 da W. LODE che, su suggerimento di A. NADAI, sottopose a prove di trazione e di pressione interna provini tubolari di ferro, rame e nickel.

Una ulteriore verifica sperimentale fu condotta nel 1931 da G.I. TAYLOR e H. QUINNEY su provini tubolari sottili di alluminio, rame e acciaio dolce soggetti a trazione e torsione.

Entrambe le campagne di prove consentivano di generare stati tensionali bias-siali con vari rapporti delle tensioni principali. L'accordo tra i risultati delle prove di laboratorio e le previsioni del criterio di MAXWELL-HUBER-VON MISES (MHM) fu soddisfacente.

Tra le esperienze condotte per verificare l'affidabilità dei criteri di plasticizzazione si ricordano quelle condotte con grande accuratezza da MORRISON nel 1940.

### 4.2.1. Criterio del potenziale elastico di forma

Il primo enunciato del criterio è dovuto a MAXWELL<sup>68</sup> che lo comunicò per lettera all'amico WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN).

L'idea di MAXWELL fu quella di decomporre l'energia elastica come somma di due parti, l'energia volumetrica e quella di forma e di attribuire a quest'ultima il ruolo di parametro di pericolosità dello stato tensionale.

---

<sup>68</sup> JAMES CLERK MAXWELL (1831-1879). Fisico matematico scozzese, allievo con l'amico TAIT del Trinity college di Cambridge dove poi fu il professore di fisica e progettò l'HENRY CAVENDISH laboratory. Straordinari furono i suoi contributi alla teoria dell'elettromagnetismo (Electricity and Magnetism, 1873), all'ottica, alla teoria dell'elasticità ed alla teoria cinetica dei gas (teoria di MAXWELL-BOLTZMANN).

La proposta di MAXWELL divenne nota alla comunità scientifica solo dopo la pubblicazione delle sue lettere a KELVIN.

Nel 1904 in [14] M.T. HUBER propose una modifica del criterio di BELTRAMI. Il modello di HUBER distingueva due casi a seconda che la componente sferica dello stato tensionale fosse di trazione o di compressione. Nel primo caso proponeva di assunere quale funzione di crisi il potenziale elastico complementare di forma e nel secondo caso tutto il potenziale elastico complementare come proposto da BELTRAMI.

Decomponendo lo stato tensionale nelle aliquote sferica e deviatorica

$$\mathbf{T} = \text{dev } \mathbf{T} - \pi(\mathbf{T}) \mathbf{I}, \quad \pi(\mathbf{T}) = -\frac{1}{3} \text{tr } \mathbf{T},$$

si perviene alla seguente decomposizione dell'energia elastica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mathbb{C} \mathbf{T}) : \mathbf{T} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1+\nu}{E} \| \mathbf{T} \|^2 - \frac{\nu}{E} (\text{tr } \mathbf{T})^2 \right] = \\ &= \frac{1}{4G} \| \text{dev } \mathbf{T} \|^2 + \frac{3}{2k} p(\mathbf{T})^2, \end{aligned}$$

dove  $k = E / (1 - 2\nu)$  è il modulo volumetrico. La funzione di crisi è quindi

$$f(\mathbf{T}) = \frac{1}{4G} \| \text{dev } \mathbf{T} \|^2.$$

#### 4.2.2. Criterio dell'invariante quadratico del deviatore degli sforzi

Una teoria della resistenza dei materiali metallici isotropi è stata formulata da R. VON MISES<sup>69</sup> nel 1913 [16]. Il criterio di VON MISES assume quale indice di pericolosità dello stato tensionale l'invariante quadratico del deviatore dello stato tensionale. Per tal motivo il criterio è anche detto *criterio dell'invariante  $J_2$* .

---

<sup>69</sup> RICHARD VON MISES (1883-1953). Nacque a Lvov allora sotto la dominazione austriaca, ora in Ucraina. Dopo aver frequentato la Technische Hochschule di Vienna conseguì nel 1907 il dottorato a Brünn (ora Brno nella repubblica Ceca) e nel 1908 l'abilitazione all'insegnamento di costruzione di macchine. Fu quindi professore di matematica applicata a Strasburgo dal 1909 al 1918. Durante la prima guerra mondiale fu pilota dell'aviazione austro-ungarica. Alla fine della guerra insegnò idrodinamica e aerodinamica alla Technische Hochschule di Dresden e nel 1919 divenne direttore del nuovo Istituto di Matematica Applicata dell'Università di Berlino. Nel 1921 fondò il *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* di cui divenne editore. Dopo l'avvento del Nazismo si trasferì prima in Turchia e poi nel 1944 negli Stati Uniti alla Harvard University dove divenne Gordon-McKay Professor di Aerodinamica e Matematica Applicata. RICHARD VON MISES ha fornito contributi in molte aree scientifiche tra cui la meccanica, la fluidodinamica, l'aeronautica, la statistica e la teoria della probabilità dove formulò la teoria della frequenza limite, poi superata come teoria di base dall'approccio di KOLMOGOROV fondato sulla teoria della misura.

Il criterio è descritto dalla funzione di plasticizzazione

$$f(\mathbf{T}) := J_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[(\operatorname{dev} \mathbf{T})^2] = \frac{1}{2} \|\operatorname{dev} \mathbf{T}\|^2.$$

Si noti che risulta

$$\begin{aligned} 2J_2(\mathbf{T}) &= \operatorname{tr}[(\mathbf{T} + \pi(\mathbf{T}) \mathbf{I})^2] = \|\mathbf{T}\|^2 + 2\pi(\mathbf{T}) \operatorname{tr} \mathbf{T} + 3\pi(\mathbf{T})^2 = \\ &= \|\mathbf{T}\|^2 - \frac{2}{3}\pi(\mathbf{T})(\operatorname{tr} \mathbf{T})^2 + \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{T})^2 = \|\mathbf{T}\|^2 - \frac{1}{3}(\operatorname{tr} \mathbf{T})^2. \end{aligned}$$

Per esprimere il secondo invariante del deviatore delle tensioni in termini delle tensioni principali si consideri nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD il punto  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  rappresentativo di uno stato tensionale deviatorico  $\mathbf{T}_D$ , così che

$$\operatorname{tr} \mathbf{T}_D = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$

Ponendo  $\sigma_3 = -(\sigma_1 + \sigma_2)$ , la distanza dall'origine  $d = \|\mathbf{T}_D\|$  è data da

$$d^2 = \|\mathbf{T}_D\|^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_1 + \sigma_2)^2 = 2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2).$$

D'altro canto si ha che

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] &= \\ = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (2\sigma_2 + \sigma_1)^2 + (2\sigma_1 + \sigma_2)^2] &= \\ = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_1 \sigma_2. & \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} J_2(\mathbf{T}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{T}_D\|^2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \\ &= \frac{1}{3} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1]. \end{aligned}$$

In termini delle tensioni principali la tensione ideale si scrive

$$\begin{aligned} \sigma_{id}(\mathbf{T}) &:= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1}. \end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$\sigma_{id}(\mathbf{T}) = \sqrt{3} \sqrt{J_2(\mathbf{T})} = \sqrt{3/2} \|\mathbf{T}_D\|.$$

Nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD il dominio di plasticizzazione di VON MISES è un cilindro avente per asse la retta idrostatica che è la trisettrice del primo ottante. Essendo

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sqrt{3/2} d, \quad d = \sqrt{2/3} \sigma_o, \quad \sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sqrt{2} \sqrt{J_2(\mathbf{T})},$$

il cilindro di VON MISES ha sezione circolare con raggio pari a

$$d = \sqrt{2/3} \sigma_o,$$

dove  $\sigma_o$  è la tensione monoassiale di snervamento (vedi fig. 4.3).

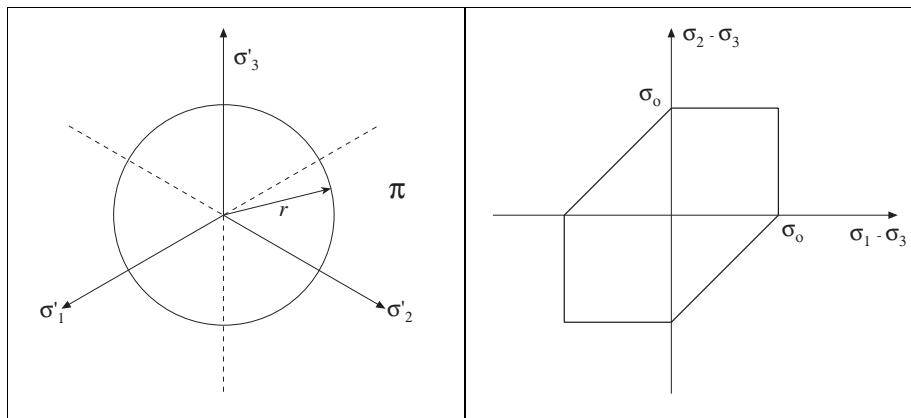


Fig. 4.3

Fig. 4.4

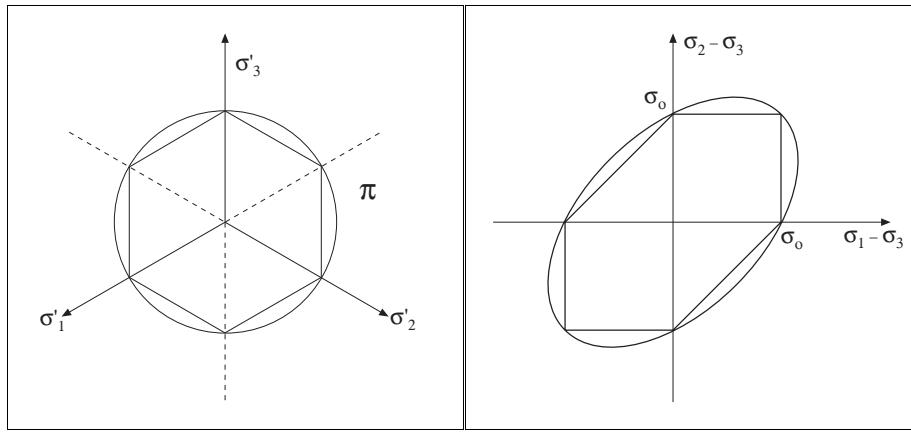


Fig. 4.5

Fig. 4.6

Nel piano individuato dagli assi  $\sigma_2 - \sigma_3$  e  $\sigma_3 - \sigma_1$  la superficie di plasticizzazione diventa un ellisse (vedi fig. 4.8).

Sia  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  è un riferimento ortonormale.

Per uno *stato tensionale di puro taglio* nel piano  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , risulta

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque  $\mathbf{T} = \text{dev } \mathbf{T}$  e si ha che

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{2}\tau, \quad \sqrt{J_2(\mathbf{T})} = \tau, \quad \sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sqrt{3}\tau.$$

La tensione tangenziale di snervamento per stato tensionale di puro taglio e la tensione normale di snervamento per stato tensionale di trazione monoassiale sono dunque legati dalla relazione

$$\tau_o = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}.$$

Dunque il cilindro di VON MISES ha sezione circolare con raggio pari a

$$d = \sqrt{2/3} \sigma_o = \sqrt{2} \tau_o.$$

I domini di TRESCA e di VON MISES sono sovrapposti nelle figg. 4.5 e 4.6.

In un sestante del piano deviatorico la tensione ideale si può scrivere

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sigma_M - \sigma_m)^2 + (\sigma_M - \sigma_I)^2 + (\sigma_m - \sigma_I)^2]^{1/2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [4r^2 + (1-\mu)^2 r^2 + (1+\mu)^2 r^2]^{1/2} = \\ &= r(\mathbf{T}) \sqrt{3 + \mu(\mathbf{T})^2}. \end{aligned}$$

Ciò mostra esplicitamente la dipendenza del criterio di MISES dal paramentro di LODE e cioè dalla tensione principale intermedia. Si osservi che

- Per i valori  $\mu(\mathbf{T}) = \pm 1$  del paramentro di LODE, si ha che

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = 2r(\mathbf{T}),$$

e dunque le tensioni ideali del criterio di TRESCA e del criterio di VON MISES coincidono.

Tale coincidenza si evidenzia nei punti di contatto tra l'esagono di TRESCA ed il cerchio di MISES in corrispondenza dei raggi che delimitano i sei sestanti del piano deviatorico.

Nel 1924 M.T. HUBER [14] ha interpretato il criterio di MISES osservando che l'invariante quadratico del deviatore dello stato tensionale è un parametro equivalente all'energia elastica complementare di forma, riprendendo così l'idea originaria di MAXWELL.

### 4.2.3. Criterio della tensione tangenziale ottaedrale

A NADAI [27] è dovuta l'osservazione che il criterio di VON MISES può essere espresso in termini del parametro *tensione tangenziale ottaedrale*  $\tau_{\text{ott}}$ .

Per mostrarlo si consideri una base ortonormale principale  $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3\}$  e si indichi con  $\mathbf{n}$  uno degli otto vettori di componenti

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} (\pm \mathbf{d}_1, \pm \mathbf{d}_2, \pm \mathbf{d}_3)$$

i cui piani ortogonali sono le facce di un ottaedro regolare.

In corrispondenza di uno stato tensionale  $\mathbf{T}$  la tensione  $\mathbf{t}_{\text{ott}}$  su tali piani è data da

$$\mathbf{t}_{\text{ott}}(\mathbf{T}) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\pm \sigma_1 \mathbf{d}_1, \pm \sigma_2 \mathbf{d}_2, \pm \sigma_3 \mathbf{d}_3).$$

La tensione normale coincide con la tensione sferica ed è fornita dalla relazione

$$\sigma_{\text{ott}}(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1(\mathbf{T}).$$

La norma della componente tangenziale è

$$\begin{aligned} \tau_{\text{ott}}(\mathbf{T}) &= \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{9} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)}. \end{aligned}$$

ed è detta *tensione tangenziale ottaedrale*.

Se si confronta l'espressione di  $\tau_{\text{ott}}$  con quella del secondo invarianto  $J_2$  della parte deviatorica dello stato tensionale si può concludere che

$$\tau_{\text{ott}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{J_2(\mathbf{T})}.$$

La tensione ideale coincide ovviamente con quella del criterio di VON MISES.

### 4.2.4. Criterio della tensione tangenziale media quadratica

Una formulazione del criterio di plasticizzazione di VON MISES che ne fornisce una interpretazione statistica consiste nell'assumere che il parametro di crisi sia il valor medio quadratico della norma della tensione tangenziale.

Questa formulazione del criterio di plasticizzazione di VON MISES è senz'altro da privilegiare in quanto fornisce una chiara motivazione della scelta della funzione di crisi.

Infatti nei materiali metallici, secondo la legge di SCHMID, lo slittamento plastico avviene quando la tensione tangenziale risolta attinge un valore critico. Negli aggregati policristallini, per effetto dell'orientamento casuale dei grani, è naturale assumere che lo sviluppo macroscopico delle deformazioni plastiche, si attivi quando il valore medio quadratico della norma della tensione tangenziale attinge un valore critico.

Il valor medio quadratica della norma della tensione tangenziale è definito dall'espressione

$$\tau_{mq}(\mathbf{T}) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2(1)} \tau^2(\mathbf{T}, \mathbf{n}) \, da .$$

dove

$$\tau^2(\mathbf{T}, \mathbf{n}) = \| \mathbf{T}\mathbf{n} \|^2 - (\mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2 .$$

Poichè la parte sferica dello stato tensionale non dà luogo a tensioni tangenziali, è lecito sostituire il tensore  $\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbb{V}; \mathbb{V})$  con la sua parte deviatorica,  $\mathbf{T}_D = \text{dev } \mathbf{T}$ , così che

$$\tau_{mq}^2(\mathbf{T}) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2(1)} \left[ \| \mathbf{T}_D \mathbf{n} \|^2 - (\mathbf{T}_D \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2 \right] da .$$

Si definiscano quindi il valor medio quadratico della norma del vettore tensione deviatorica

$$t_{mq}^2(\mathbf{T}_D) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2(1)} \| \mathbf{T}_D \mathbf{n} \|^2 da ,$$

ed il valor medio quadratico della tensione normale deviatorica

$$\sigma_{mq}^2(\mathbf{T}_D) := \frac{1}{4\pi} \int_{S^2(1)} (\mathbf{T}_D \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2 da .$$

Si può allora scrivere

$$\tau_{mq}^2(\mathbf{T}) = t_{mq}^2(\mathbf{T}_D) - \sigma_{mq}^2(\mathbf{T}_D) .$$

Per calcolare  $t_{mq}^2(\mathbf{T}_D)$  si osservi preliminarmente che, posto  $\mathbf{r}(\lambda) = \lambda \mathbf{n}$ , risulta

$$\int_{B^3(1)} \| \mathbf{T}_D \mathbf{r} \|^2 dv = \frac{1}{3} \int_{S^2(1)} \| \mathbf{T}_D \mathbf{n} \|^2 da .$$

Allora, invocando la simmetria di  $\mathbf{T}$  ed il teorema della divergenza, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{S^2(1)} \| \mathbf{T}_D \mathbf{n} \|^2 da &= \int_{S^2(1)} \mathbf{T}_D \mathbf{r} \cdot \mathbf{T}_D \mathbf{n} da = \int_{S^2(1)} \mathbf{T}_D^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} da = \\ &= \int_{B^3(1)} \text{div} [\mathbf{T}_D^2 \mathbf{r}] dv = \int_{B^3(1)} \text{tr} \mathbf{T}_D^2 dv = \frac{4\pi}{3} \text{tr} \mathbf{T}_D^2 . \end{aligned}$$

Dunque

$$t_{mq}^2(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2.$$

Per calcolare  $\sigma_{mq}^2(\mathbf{T}_D)$  si fa ricorso al teorema della divergenza che fornisce

$$\begin{aligned} \int_{S^2(1)} (\mathbf{T}_D \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2 d\mathbf{a} &= \int_{S^2(1)} (\mathbf{T}_D \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{n}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{a} = \\ &= \int_{S^2(1)} (\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\mathbf{a} = \\ &= \int_{B^3(1)} \operatorname{div} [(\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{r}] dv. \end{aligned}$$

Si osserva poi che

$$\begin{aligned} d[(\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{r}] [\mathbf{h}] &= (\mathbf{T}_D \mathbf{h} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{r} + \\ &\quad + (\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{h}) \mathbf{r} + \\ &\quad + (\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{h}. \end{aligned}$$

Essendo quindi

$$(\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{h}) \mathbf{r} = (\mathbf{T}_D \mathbf{h} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{T}_D \mathbf{r} = (\mathbf{h} \cdot \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{T}_D \mathbf{r},$$

si conclude che

$$d[(\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{r}] = (\mathbf{T}_D \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{T}_D + 2(\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}).$$

Valutando la traccia e tenendo conto che  $\operatorname{tr} \mathbf{T}_D = 0$ , si ottiene che

$$\operatorname{div} [(\mathbf{T}_D \mathbf{r} \otimes \mathbf{T}_D \mathbf{r}) \mathbf{r}] = 2 \|\mathbf{T}_D \mathbf{r}\|^2.$$

Quindi

$$\int_{S^2(1)} (\mathbf{T}_D \mathbf{n} \cdot \mathbf{n})^2 d\mathbf{a} = 2 \int_{B^3(1)} \|\mathbf{T}_D \mathbf{r}\|^2 dv = \frac{2}{3} \int_{S^2(1)} \|\mathbf{T}_D \mathbf{n}\|^2 d\mathbf{a} = \frac{8\pi}{9} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2.$$

In definitiva

$$\sigma_{mq}^2(\mathbf{T}) = \frac{2}{9} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2.$$

Ne segue che

$$\tau_{mq}^2(\mathbf{T}) = t_{mq}^2(\mathbf{T}_D) - \sigma_{mq}^2(\mathbf{T}_D) = \frac{1}{3} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2 - \frac{2}{9} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2 = \frac{1}{9} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2.$$

Ricordando che  $J_2(\mathbf{T}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2$  si può concludere che

$$\tau_{mq}(\mathbf{T}) = \frac{1}{3} \sqrt{\operatorname{tr} \mathbf{T}_D^2} = \frac{1}{3} \|\mathbf{T}_D\| = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{J_2(\mathbf{T})} = \frac{1}{\sqrt{3}} \tau_{\text{ott}}(\mathbf{T}).$$

### 4.3. Criterio di Schleicher

Un criterio che tiene conto della differente resistenza a trazione ed a compressione fu proposto nel 1926 da SCHLEICHER [26] mediante una modifica del criterio di VON MISES.

Detti  $\sigma_o^+$  e  $\sigma_o^-$  i valori assoluti delle tensioni limite a trazione ed a compressione monoassiale, il *criterio di SCHLEICHER* assume quale dominio limite l'insieme di livello zero della funzione di crisi

$$f(\mathbf{T}) = 3 J_2(\mathbf{T}) + (\sigma_o^+ - \sigma_o^-) I_1(\mathbf{T}) - \sigma_o^+ \sigma_o^- .$$

Per  $\sigma_o^+ = \sigma_o^- = \sigma_o$  la funzione di crisi diventa

$$f(\mathbf{T}) = 3 J_2(\mathbf{T}) - \sigma_o^2 ,$$

ed il criterio di SCHLEICHER collassa in quello di VON MISES.

### 4.4. Criterio di Hill

R. HILL in [29] ha formulato un criterio di snervamento di materiali metallici in cui la funzione di crisi è il massimo modulo della tensione normale dovuta alla componente deviatorica dello stato tensionale.

Si tratta quindi di una modifica del criterio di GALILEO-RANKINE in cui si tiene conto del fatto che le sollecitazioni di tipo idrostatico non inducono fenomeni di plasticizzazione nei metalli.

La funzione di crisi del *criterio di HILL* è data da  $f(\mathbf{T}) = \max \{f_M(\mathbf{T}), f_m(\mathbf{T})\}$  dove

$$\begin{cases} f_M(\mathbf{T}) := [\sigma_M - \frac{1}{3} (\sigma_M + \sigma_I + \sigma_m)] , \\ f_m(\mathbf{T}) := [\frac{1}{3} (\sigma_M + \sigma_I + \sigma_m) - \sigma_m] . \end{cases}$$

Effettuando il cambiamento di variabili

$$\begin{cases} \sigma_M = p + r , \\ \sigma_m = p - r , \\ \sigma_I = p + \mu r . \end{cases}$$

l'invariante lineare di tensione si scrive

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = \sigma_M + \sigma_I + \sigma_m = 3p + \mu r .$$

Dunque

$$\begin{cases} f_M(r, \mu) = [p + r - p - \frac{\mu}{3} r] = r [1 - \frac{\mu}{3}], \\ f_m(r, \mu) = [p + \frac{\mu}{3} r - p + r] = r [1 + \frac{\mu}{3}]. \end{cases}$$

Si può concludere che la funzione di crisi ha l'espressione

$$f(r, \mu) = \begin{cases} r [1 - \frac{\mu}{3}] & \text{per } -1 \leq \mu \leq 0, \\ r [1 + \frac{\mu}{3}] & \text{per } 0 \leq \mu \leq 1, \end{cases}$$

Nel criterio di HILL la funzione di crisi dipende dunque dalla tensione principale intermedia tramite il parametro di LODE.

In uno stato tensionale monoassiale con tensione principale  $\sigma$  risulta  $\mu = -1$  e  $p = r = \sigma/2$ . Dunque

$$f(r, \mu) = \sigma - \frac{1}{3} \sigma = \frac{2}{3} \sigma.$$

La tensione ideale associata al criterio di HILL è dunque data da

$$\sigma_{\text{id}}(r, \mu) = \begin{cases} \frac{3}{2} r [1 - \frac{\mu}{3}] & \text{per } -1 \leq \mu \leq 0, \\ \frac{3}{2} r [1 + \frac{\mu}{3}] & \text{per } 0 \leq \mu \leq 1, \end{cases}$$

Per i valori  $\mu = \pm 1$  del parametro di LODE si ha che

$$\sigma_{\text{id}}(r, \mu) = \frac{3}{2} r [1 + \frac{1}{3}] = r \frac{3}{2} \frac{4}{3} = 2r,$$

ed il valore della tensione ideale del criterio di HILL coincide con quella relativa al criterio di TRESCA (vedi sezione 4.1 (p. 557)).

Nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD il dominio di HILL è un cilindro avente per asse la retta idrostatica.

In figura 4.7 sono riportati le tracce nel piano deviatorico dei domini di TRESCA, VON MISES e HILL. La costruzione degli esagoni di TRESCA e di HILL è una diretta conseguenza delle proprietà delle rappresentazioni nel piano deviatorico illustrate nella sezione 2.1 (p. 547),

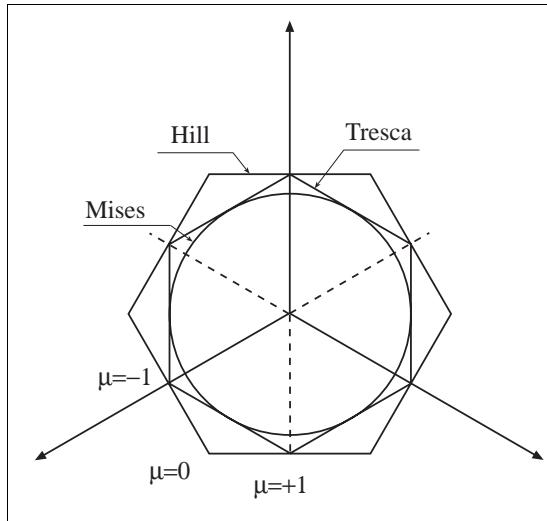


Fig. 4.7

## 5. CRITERI PER MATERIALI ANISOTROPI

Un criterio di resistenza anisotropo è stato formulato da RODNEY HILL in [29].

La struttura formale del criterio è analoga a quella del criterio di BELTRAMI in quanto la funzione di crisi è un forma quadratica dello stato tensionale.

Il tensore rappresentativo della forma quadratica, che nel criterio di BELTRAMI descrive la cedevolezza elastica del materiale, nel criterio di HILL è invece definito dalle caratteristiche ultraelastiche del materiale.

Nel seguito è presentata la formulazione generale del criterio di HILL ed è illustrata la sua specializzazione a materiali con comportamento ultraelastico di tipo ortotropo nota come criterio di TSAI-HILL.

Il criterio di TSAI-HILL fornisce uno strumento efficace per definire il dominio di resistenza di materiali compositi.

### 5.1. Criterio di Hill per materiali anisotropi

Si richiamano preliminarmente le seguenti notazioni per gli spazi dei tensori del quarto ordine.

$$\text{Sym}(V) := \text{Sym}(\text{Sym}(V; V); \text{Sym}(V; V)),$$

$$\text{Lin}(V) := \text{Lin}(\text{Lin}(V; V); \text{Lin}(V; V)).$$

Nel *criterio di HILL* la funzione di crisi

$$f : \text{Sym}(\mathbf{V}) \times \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}) \mapsto \mathbb{R},$$

è una forma quadratica nello stato tensionale  $\mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V})$  associata ad un tensore del quarto ordine, simmetrico e positivo

$$\mathbb{A} \in \text{Sym}(\mathbf{V}), \quad (\mathbb{A} \mathbf{T}) : \mathbf{T} \geq 0, \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Sym}(\mathbf{V}; \mathbf{V}),$$

che, in virtù delle simmetrie maggiori e minori, ha 21 componenti indipendenti.

Il criterio crisi di HILL è dunque espresso dalla condizione

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = \frac{1}{2} (\mathbb{A} \mathbf{T}) : \mathbf{T} \leq 1.$$

Il tensore  $\mathbb{A}$  definisce le proprietà di invarianza della funzione di crisi.

**Osservazione 5.1.** Il criterio di VON MISES è un caso particolare del criterio di HILL.

Sia infatti  $\tau_o$  la tensione tangenziale di snervamento per stato tensionale di puro taglio e si ponga

$$\mathbb{A} = \frac{1}{\tau_o^2} \text{dev} = \frac{1}{\tau_o^2} \left( \mathbb{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) \right),$$

dove  $\mathbb{I} = \mathbf{I} \boxtimes \mathbf{I}$  è l'identità in  $\text{Lin}(\mathbf{V})$ .

Si ha allora che

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = \frac{1}{2 \tau_o^2} \text{dev} \mathbf{T} : \text{dev} \mathbf{T} = \frac{1}{2 \tau_o^2} \| \text{dev} \mathbf{T} \|^2.$$

La condizione di crisi del criterio di HILL diventa allora

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = \frac{1}{\tau_o^2} J_2(\mathbf{T}) \leq 1,$$

e si ritrova la condizione  $\sqrt{J_2(\mathbf{T})} \leq \tau_o$  del criterio di VON MISES. ■

## 5.2. Criterio di Tsai-Hill

Il *criterio di TSAI-HILL* è la specializzazione del criterio di HILL per materiali con comportamento ultraelastico di tipo *ortotropo* [33].

Più precisamente il criterio di TSAI-HILL si deduce dal criterio di HILL assumendo che il tensore di crisi  $\mathbb{A}$  sia ortotropo e che la funzione di crisi non dipenda dalla componente idrostatica dello stato tensionale.

Devono dunque essere soddisfatte le seguenti condizioni.

- Esiste una terna ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  in  $V$  che individua tre piani di simmetria ortogonale per il tensore di crisi  $\mathbb{A}$ .

- La funzione di crisi si annulli per  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ , e cioè sia

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbb{A} \mathbf{I}) : \mathbf{I} = 0.$$

La positività della funzione di crisi assicura che il valore nullo è un punto di minimo assoluto per la forma quadratica e dunque che il gradiente della forma sia nullo. La funzione di crisi si annulla dunque se e solo se

$$\mathbb{A} \mathbf{I} = \mathbf{O}.$$

La prima condizione implica che nel riferimento  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  la matrice rappresentativa del tensore di crisi nella notazione di VOIGT sia

$$[\mathbb{A}] = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{1111} & \mathbb{A}_{1122} & \mathbb{A}_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{1122} & \mathbb{A}_{2222} & \mathbb{A}_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{A}_{1133} & \mathbb{A}_{2233} & \mathbb{A}_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{3131} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{A}_{1212} \end{bmatrix},$$

Dunque le componenti distinte non nulle del tensore di crisi sono al più 9.

La seconda condizione si traduce nella richiesta che nel riferimento  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  si abbia

$$\mathbb{A}_{ijkk} = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, 3,$$

dove si intende una sommatoria sull'indice ripetuto  $k = 1, 2, 3$ .

In conseguenza della proprietà di ortotropia, 3 di queste 6 condizioni, e precisamente quelle per  $i \neq j$  risultano identicamente soddisfatte essendo nulli i blocchi  $3 \times 3$  fuori diagonale. Il numero delle componenti indipendenti del tensore  $\mathbb{A}$  è dunque  $9 - 3 = 6$ . Ponendo

$$\mathbb{A}_{1111} = B + \mathbf{C}, \quad \mathbb{A}_{1122} = -\mathbf{C}, \quad \mathbb{A}_{1133} = -B,$$

$$\mathbb{A}_{2222} = \mathbf{C} + \mathbf{A}, \quad \mathbb{A}_{2211} = -\mathbf{C}, \quad \mathbb{A}_{2233} = -\mathbf{A},$$

$$\mathbb{A}_{3333} = \mathbf{A} + B, \quad \mathbb{A}_{3311} = -B, \quad \mathbb{A}_{3322} = -\mathbf{A},$$

$$\mathbb{A}_{2323} = D, \quad \mathbb{A}_{3131} = E, \quad \mathbb{A}_{1212} = F,$$

la funzione di crisi del criterio di TSAI-HILL si scrive

$$\begin{aligned} f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = & A(T_{22} - T_{33})^2 + B(T_{11} - T_{33})^2 + \mathbf{C}(T_{11} - T_{22})^2 + \\ & + 4(D T_{23}^2 + E T_{31}^2 + F T_{12}^2). \end{aligned}$$

Il criterio di TSAI-HILL trova soddisfacente riscontro sperimentale per materiali compositi, quali ad esempio la *vetroresina*, in stato piano di tensione.

Si consideri infatti un *composito* di vetroresina con le fibre dirette lungo l'asse materiale  $\mathbf{e}_1$  [36]. Sottponendo il provino a trazione e compressione in direzione assiale  $\mathbf{e}_1$ , in direzione trasversale  $\mathbf{e}_2$  ed a taglio nel piano  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  si determinano le corrispondenti tensioni di crisi (+ trazione, - compressione)

$$\begin{aligned}\sigma_1^+ &= 150 \text{ ksi}, & \sigma_1^- &= -150 \text{ ksi}, \\ \sigma_2^+ &= 4 \text{ ksi}, & \sigma_2^- &= -20 \text{ ksi}, \\ \tau_o &= 6\psi.\end{aligned}$$

dove ksi sta per kilopound per square inch e si ha  $1 \text{ ksi} = 6.895 \text{ N/mm}^2 = 6.895 \text{ MPa}$  e quindi  $1 \text{ MPa} = 0.145 \text{ ksi}$ , essendo

$$1 \text{ pound} = 4.448 \text{ newton} \quad \text{e} \quad 1 \text{ inch} = 25.4 \text{ mm}.$$

L'isotropia trasversa del provino implica che  $T_{33} = 0$  e  $T_{13} = T_{23} = 0$  ed inoltre che  $B = C$  ed  $E = F$ . Il criterio di TSAI-HILL si scrive dunque

$$\begin{aligned}f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) &= A T_{22}^2 + B (T_{11}^2 + (T_{11} - T_{22})^2) + 4 E T_{12}^2 = \\ &= (A + B) T_{22}^2 + 2 B T_{11}^2 - 2 B T_{11} T_{22} + 4 E T_{12}^2.\end{aligned}$$

La prova a taglio nel piano  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$  fornisce la condizione

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = 4 E T_{12}^2 = 4 E \tau_o^2 = 1,$$

e dunque

$$E = \frac{1}{4 \tau_o^2}.$$

La prova di trazione in direzione dell'asse materiale  $\mathbf{e}_1$  impone che

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = 2 B T_{11}^2 = 2 B (\sigma_1^+)^2 = 1,$$

e quindi

$$B = \frac{1}{2 (\sigma_1^+)^2}.$$

Infine dalla prova di trazione in direzione trasversale  $\mathbf{e}_2$  si ha che

$$f(\mathbb{A}; \mathbf{T}) = (A + B) T_{22}^2 = (A + B) (\sigma_2^+)^2 = 1,$$

e pertanto

$$A + B = \frac{1}{(\sigma_2^+)^2}, \quad A = \frac{1}{(\sigma_2^+)^2} - \frac{1}{2 (\sigma_1^+)^2}.$$

Si sottoponga a prova di rottura monoassiale un provino cilindrico con l'asse del cilindro che forma un angolo  $\theta$  con la direzione delle fibre.

Detta  $T_{xx}$  la tensione monoassiale di trazione o di compressione, si ha che

$$\begin{cases} T_{11} = T_{xx} \cos^2 \theta, \\ T_{22} = T_{xx} \sin^2 \theta, \\ T_{12} = T_{xx} \sin \theta \cos \theta. \end{cases}$$

Il criterio di TSAI-HILL fornisce allora la condizione di crisi

$$T_{xx} \leq \left[ \frac{1}{(\sigma_1^+)^2} \cos^4 \theta + \frac{1}{(\sigma_2^+)^2} \sin^4 \theta + \left( \frac{1}{\tau_o^2} - \frac{1}{(\sigma_1^+)^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right]^{1/2},$$

per la prova di trazione ed una analoga per la prova di compressione.

In fig. 5.1 sono riportate in scala lineare-logaritmica le curve limiti relative alle prove di trazione (curva inferiore) e di compressione (curva superiore) in funzione dell'angolo  $\theta$  tra l'asse delle fibre e quello dello sforzo monoassiale di trazione o compressione.

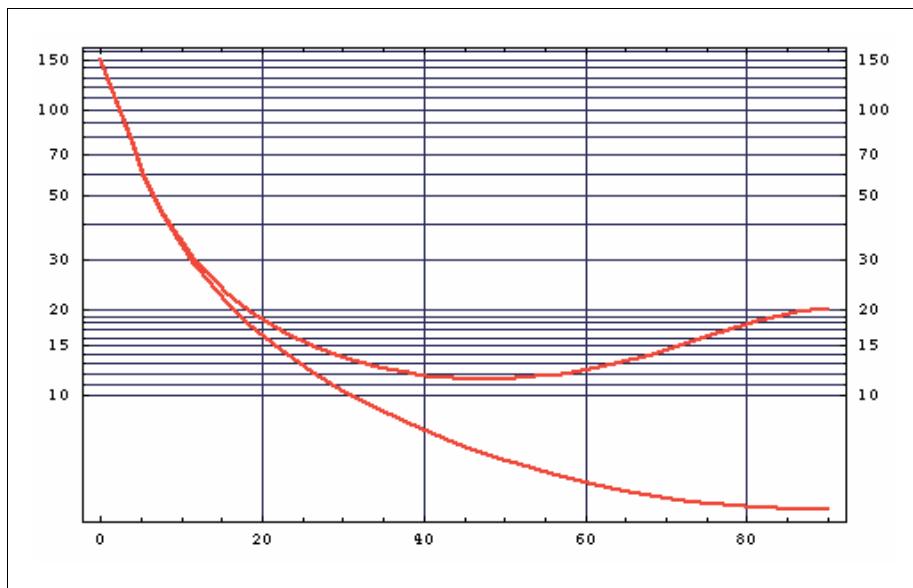


Fig. 5.1

La rispondenza del criterio con i dati sperimentali è soddisfacente sia a trazione che a compressione.

## 6. CRITERIO DI MOHR-CAQUOT

Un criterio di resistenza basato su di una funzione scalare di crisi che dipende dalla componente sferica dello stato tensionale diventa necessario quando si voglia descrivere il comportamento di materiali quali le rocce, le terre ed i conglomerati che presentano un comportamento marcatamente differente a trazione ed a compressione.

Un modello di comportamento che coglie gli aspetti essenziali dei fenomeni di rottura di tali materiali consiste nell'assumere che la crisi puntuale si verifica quando tra la norma del vettore tensione tangenziale e la tensione normale sussiste una relazione critica su almeno una giacitura di normale  $\mathbf{n} \in S^2(1)$ .

Se la definizione della relazione critica è la stessa per tutte le giaciture il criterio di crisi così formulato è *isotropo*.

Infatti una rotazione  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+(V; V)$  dello stato tensionale  $\mathbf{T} \in \text{Sym}(V; V)$  che lo trasforma nel tensore  $\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \in \text{Sym}(V; V)$  non altera il criterio di crisi in quanto non modifica l'insieme delle coppie costituite dalle tensioni normali e dalle norme delle corrispondenti tensioni tangenziali.

Si consideri infatti, in corrispondenza di un stato tensionale  $\mathbf{T}$ , una giacitura di normale  $\mathbf{n} \in S^2(1)$ .

La tensione  $\mathbf{t} = \mathbf{T}\mathbf{n}$  ha componenti normale e tangenziale date da

$$\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n}) = (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad \tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}\mathbf{n} - \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})\mathbf{n}.$$

Dunque, denotando la norma del vettore tensione tangenziale con

$$\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}) := \|\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n})\|,$$

risulta

$$\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2 = \|\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n})\|^2 = \|\mathbf{T}\mathbf{n}\|^2 - \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2.$$

Allora, se  $\mathbf{Q} \in \text{Orth}^+$  è un'arbitraria rotazione, in corrispondenza dello stato tensionale ruotato  $\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T$  sulla giacitura di normale  $\mathbf{Q}\mathbf{n}$  si ha

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{n}) &= (\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{Q}\mathbf{n} = (\mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n}), \\ \tau(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{n})^2 &= \|\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{n}\|^2 - \sigma(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{n})^2 = \\ &= \|\mathbf{Q} \mathbf{T}\mathbf{n}\|^2 - \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2 = \|\mathbf{T}\mathbf{n}\|^2 - \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2 = \tau(\mathbf{T}, \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

Dunque la coppia di valori  $\{\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n}), \tau(\mathbf{T}, \mathbf{n})\}$  si ritrova sulla giacitura  $\mathbf{Q}\mathbf{n}$ .

La relazione critica, essendo la stessa per tutte le giaciture, è convenientemente descritta nel semipiano di MOHR (si veda [38] sezione III.4 (p. 343)).

Si consideri a tal fine un riferimento cartesiano in cui sull'asse delle ascisse è riportato il valore  $\sigma$  della tensione normale su una generica giacitura e sul semiasse positivo delle ordinate è riportato il modulo  $\tau = \|\tau\|$  del corrispondente vettore tensione tangenziale.

- Il criterio di crisi di MOHR<sup>70</sup> [13] consiste nell'imporre che lo stato tensionale sia tale che le coppie  $\{\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}), \sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})\}$  soddisfino una condizione del tipo

$$\tau(\mathbf{T}, \mathbf{n}) \leq g(\sigma(\mathbf{T}, \mathbf{n})), \quad \forall \mathbf{n} \in S^2(1),$$

dove  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$  è una funzione positiva, continua, monotona decrescente e che si annulla per un valore finito dell'argomento.

Nel semipiano di MOHR la rappresentazione è effettuata da un osservatore solidale al versore normale  $\mathbf{n} \in S^2(1)$ .

La condizione di crisi si scrive dunque

$$\tau \leq g(\sigma).$$

L'equazione

$$\tau = g(\sigma),$$

rappresenta una curva nel semipiano di MOHR che è detta la *curva di crisi*.

Uno stato tensionale è ammissibile se la condizione di crisi è verificata su ogni giacitura e cioè se i tre semicerchi principali di MOHR relativi allo stato tensionale giacciono entro il dominio delimitato dalla curva di crisi nel semipiano di MOHR.

- La curva di crisi può dunque essere determinata sperimentalmente come inviluppo di cerchi principali di MOHR di crisi.

Il criterio di MOHR fu ulteriormente analizzato e perfezionato da CAQUOT<sup>71</sup> e perciò è anche detto criterio di MOHR-CAQUOT. La curva di crisi nel semipiano di MOHR fu detta da CAQUOT *curva intrinseca* del materiale.

Il criterio è per tal motivo anche detto *criterio della curva intrinseca*.

Per esprimere il criterio di MOHR-CAQUOT in termini di tensioni principali si denotino l'ascissa del centro ed il raggio del cerchio massimo nel semipiano di MOHR con

$$\begin{cases} p = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}, \\ r = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \end{cases}$$

Una coppia  $(\sigma, \tau)$  è un punto di tangenza di un cerchio di MOHR alla curva di crisi se sono verificate le seguenti tre condizioni.

---

<sup>70</sup> OTTO MOHR (1835-1918). Ingegnere e professore al Politecnico di Stoccarda. Fu un pioniere della progettazione di strutture metalliche in Germania. Per primo applicò le linee d'influenza in ingegneria delle strutture.

<sup>71</sup> ALBERT CAQUOT (1881-1978). Ingegnere francese, laureato alla Ecole Polytechnique ed alla Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, nel 1905 iniziò la carriera di ingegnere civile dello Stato. Per mezzo secolo è stato considerato il maggior ingegnere della Francia. La sua attività pratica e scientifica ha spaziato dall'aviazione alla meccanica dei terreni, dall'elasticità e resistenza dei materiali alle strutture in conglomerato armato ed al drenaggio urbano.

- La condizione di MOHR-CAQUOT:

$$\boxed{\psi(\sigma, \tau) = \tau - g(\sigma) = 0,}$$

- L'equazione del cerchio principale di MOHR di centro  $(p, 0)$  e raggio  $r$ :

$$\boxed{(\sigma - p)^2 + \tau^2 = r^2,}$$

che in forma parametrica si scrive

$$\begin{cases} \sigma = p + r \cos 2\alpha, \\ \tau = r \sin 2\alpha, \end{cases}$$

dove  $\alpha$  è l'angolo tra la direzione della normale  $\mathbf{n} \in S^2(1)$  e la direzione della massima tensione normale nel fascio relativo al cerchio principale considerato.

- La condizione di tangenza del cerchio di MOHR alla curva di crisi che si scrive

$$\boxed{\sigma - p = -\tau \frac{dg}{d\sigma}.}$$

Infatti la curva di crisi è la frontiera dell'insieme di livello zero della funzione  $\psi(\sigma, \tau)$  e dunque la normale al dominio deve essere parallela al gradiente di  $\psi(\sigma, \tau)$ , dato da

$$\text{grad } \psi(\sigma, \tau) = \left\{ -\frac{dg}{d\sigma}, 1 \right\}.$$

D'altra parte il raggio del cerchio tangente nel punto  $\{\sigma, \tau\}$  è il vettore di componenti

$$\{\sigma - p, \tau\},$$

e deve essere proporzionale al gradiente di  $\psi(\sigma, \tau)$ .

Eliminando la coppia  $(\sigma, \tau)$  delle tensioni normale e tangenziale da queste tre equazioni si ottiene una relazione tra  $p$  e  $r$  che, espressa in termini di tensioni principali, fornisce la funzione di crisi del criterio di resistenza.

Si noti che tramite la conoscenza dei punti di tangenza del semicerchio di MOHR alla curva intrinseca, il criterio di resistenza di MOHR-CAQUOT consente di determinare l'inclinazione della giacitura di crisi rispetto alle direzioni principali relative alla massima e minima tensione principale.

In particolare, se la curva intrinseca ha curvatura nulla in corrispondenza del vertice, e cioè all'intersezione con l'asse delle  $\sigma$ , uno stato monoassiale di trazione genera linee di frattura non ortogonali alla direzione di trazione.

Si noti inoltre che nel criterio di resistenza di MOHR-CAQUOT sono prese in considerazione solo le tensioni principali massima e minima.

Per una ampia disanima sulla teoria della curva intrinseca e sui criteri di resistenza che da essa discendono si veda [35].

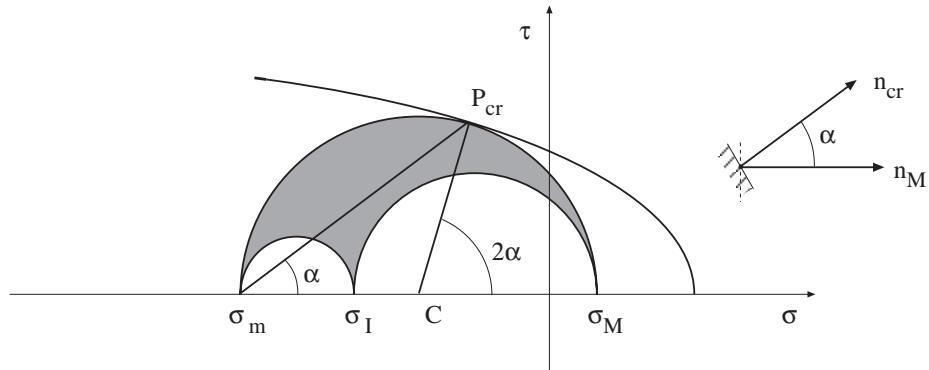


Fig. 6.1 Criterio di Mohr-Caquot

### 6.1. Criterio di Coulomb-Mohr

L'espressione del criterio di MOHR può essere facilmente esplicitata in termini di invarianti scalari nel caso in cui la funzione  $g$  è lineare.

In tal caso infatti essa definisce nel piano di MOHR un cono di COULOMB delimitato dalla retta

$$\tau = g(\sigma) = c - \mu \sigma.$$

Essendo  $\tau \geq 0$  l'ascissa deve appartenere alla semiretta  $\sigma \leq c/\mu$ .

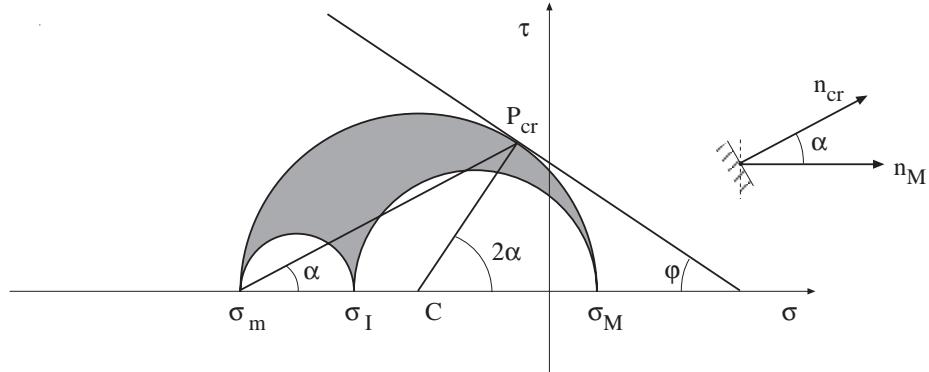


Fig. 6.2 Criterio di Coulomb-Mohr

I parametri caratteristici del *criterio di COULOMB-MOHR* sono

- $c \geq 0$ , *coesione del materiale*,
- $\varphi$ , *angolo di attrito*,
- $\mu = \tan \varphi$ , *coefficiente di attrito*.

Si consideri il cerchio di MOHR tangente alla bilateria di COULOMB.

La rappresentazione parametrica del cerchio è

$$\sigma = p + r \cos 2\alpha, \quad \tau = r \sin 2\alpha,$$

in cui  $\alpha$  è l'angolo tra la normale al piano di crisi e la direzione principale di trazione massima. La condizione di tangenza è

$$\sigma - p = \mu \tau.$$

Sostituendo nella equazione parametrica del cerchio si ha che

$$r \cos 2\alpha = \mu r \sin 2\alpha,$$

e quindi che

$$\mu = \tan \varphi = \cot 2\alpha.$$

Dunque

$$2\alpha = \pi/2 - \varphi \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha = \sin \varphi, \\ \sin 2\alpha = \cos \varphi. \end{cases}$$

L'equazione parametrica del cerchio tangente è quindi

$$\begin{cases} \sigma = p + r \cos \varphi, \\ \tau = r \sin \varphi. \end{cases}$$

Sostituendo nella condizione di COULOMB  $\tau = c - (\tan \varphi) \sigma$ , si perviene alla relazione

$$r + p \sin \varphi = c \cos \varphi.$$

In termini di tensioni principali  $\sigma_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , la condizione di ammissibilità di COULOMB-MOHR si scrive pertanto

$$\max_{i \neq j} \{ |\sigma_i - \sigma_j| + (\sigma_i + \sigma_j) \sin \varphi \} \leq 2c \cos \varphi.$$

Se l'angolo di attrito è nullo ( $\varphi = 0$ ), il criterio di COULOMB-MOHR si specializza in quello di TRESCA-SAINT VENANT.

Per fornire un'espressione del criterio di COULOMB-MOHR in termini degli invarianti principali si osservi che se  $\sigma_I$  è la tensione principale intermedia risulta

$$(\sigma_M - \sigma_I) + (\sigma_m - \sigma_I) + 2(\sigma_M + \sigma_m + \sigma_I) = 3(\sigma_M + \sigma_m).$$

Dunque la condizione di crisi del criterio di MOHR-COULOMB

$$(\sigma_M - \sigma_m) + (\sigma_M + \sigma_m) \sin \varphi \leq 2c \cos \varphi.$$

si può riscrivere

$$(\sigma_M - \sigma_m) + \frac{1}{3} (\sigma_M - \sigma_I) + (\sigma_m - \sigma_I) \sin \varphi \leq 2c \cos \varphi - \frac{2}{3} I_1(\mathbf{T}) \sin \varphi.$$

Il primo termine, dipendendo solo da differenze tra tensioni principali, è una funzione isotropa del deviatore degli sforzi e dunque degli invarianti  $J_2(\mathbf{T})$  e  $J_3(\mathbf{T})$ .

Il criterio di COULOMB-MOHR è pertanto un elemento particolare della famiglia di criteri descritti da equazioni del tipo

$$f(J_2(\mathbf{T}), J_3(\mathbf{T})) = \alpha - \beta I_1(\mathbf{T}),$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  costanti scalari caratteristiche del materiale.

## 6.2. Criterio di Drucker-Prager

Alla stessa famiglia appartiene il criterio proposto nel 1952 da DRUCKER e PRAGER [31] cui si perviene combinando quelli di COULOMB-MOHR e di VON MISES.

Il criterio di DRUCKER-PRAGER assume quale dominio limite l'insieme di livello zero della funzione di crisi

$$f(\mathbf{T}) = \sqrt{J_2(\mathbf{T})} + \frac{\beta I_1(\mathbf{T})}{\sqrt{6}} - \tau_o,$$

dove  $\tau_o$  è il valore limite della tensione tangenziale in stato tensionale di puro taglio.

La superficie limite nello spazio di HAIGH-WESTERGAARD è un cono circolare il cui asse coincide con la retta idrostatica  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  e la cui semiampiezza è pari a  $\tan^{-1}(\beta)$ .

Infatti la distanza del vertice del cono dall'origine dello spazio si ottiene ponendo  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = t/\sqrt{3}$  e valutando la condizione limite.

Essendo  $J_2(\mathbf{T}) = 0$  e  $I_1(\mathbf{T}) = \sqrt{3}t$ , dalla condizione limite si deduce che l'ascissa  $t_o$  del vertice del cono, misurata lungo la retta idrostatica, è tale che

$$\beta t_o = \sqrt{2} \tau_o.$$

Sul piano deviatorico, essendo  $I_1(\mathbf{T}) = 0$ , la condizione di DRUCKER-PRAGER coincide con quella di VON MISES

$$\sqrt{J_2(\mathbf{T})} = \tau_o.$$

Come mostrato nella sezione 4.2.2 (p. 562), Il raggio del cerchio intersezione del cono con il piano deviatorico è pari a

$$d = \sqrt{2} \sqrt{J_2(\mathbf{T})} = \sqrt{2} \tau_o.$$

Ne segue che la pendenza delle generatrici del cono è data da  $d/t_o = \beta$ .

## 7. STATI TENSIONALI SPECIALI

In molti problemi di interesse applicativo lo stato tensionale è di tipo particolare e ciò comporta che i criteri di resistenza assumono forme speciali.

Nel seguito si descrivono brevemente le espressioni assunt da diversi criteri nel caso di stati tensionali equibiassiali, piani e del tipo di SAINT VENANT nelle travi.

### 7.1. Stati tensionali equibiassiali

Uno *stato tensionale equibiassiale* è caratterizzato da una tensione principale doppia e da una semplice.

Tale è ad esempio lo stato tensionale che si cerca di realizzare nella prova triassiale nella meccanica delle terre.

Si può quindi porre

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma.$$

La tensione ideale del criterio di TRESCA è

$$\sigma_{id}(\mathbf{T}) = 2r(\mathbf{T}) = |\sigma - \sigma_3|,$$

e coincide con la tensione ideale del criterio di MISES che è data da

$$\sigma_{id}(\mathbf{T}) := r(\mathbf{T}) \sqrt{3 + \mu(\mathbf{T})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2} = |\sigma - \sigma_3|.$$

Tale coincidenza è peraltro conseguenza del fatto che il parametro di LODE ha valore assoluto unitario. Infatti, come osservato nella sezione 4.2.2 (p. 562), dalla condizione  $|\mu(\mathbf{T})| = 1$  segue che

$$r(\mathbf{T}) \sqrt{3 + \mu(\mathbf{T})^2} = 2r(\mathbf{T}).$$

Anche i criteri di COULOMB-MOHR e di DRUCKER-PRAGER assumono la stessa espressione formale.

## 7.2. Stati tensionali alla Saint Venant

Nella teoria della trave di SAINT VENANT lo stato tensionale è rappresentato dalla tensione sulla sezione trasversale e dunque da una componente normale  $\sigma = \sigma_z$  e due componenti tangenziali  $\tau_{zx}$  e  $\tau_{zy}$ . Si può assumere poi che sia  $\tau_{zy} = 0$  e  $\tau_{zx} = \tau$ .

Le tensioni principali sono allora date da

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2},$$

$$\sigma_3 = 0.$$

### 7.2.1. Criterio di Tresca

Il dominio di TRESCA è pertanto individuato dalla condizione

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \leq \tau_o,$$

che in termini di tensione ideale si scrive

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq 2\tau_o = \sigma_o.$$

Per uno stato tensionale monoassiale, quale quello che si ha in una trave soggetta a sforzo normale contratto, la tensione ideale vale quindi

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sigma.$$

Per uno stato tensionale di puro taglio, quale quello che si ha in una trave soggetta a torsione, la tensione ideale vale invece

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = 2\tau.$$

Secondo il criterio di VON MISES la tensione tangenziale limite in puro taglio è dunque minore della tensione normale limite a trazione o a compressione secondo un fattore  $\sqrt{2} \approx 1.41$ .

### 7.2.2. Criterio di von Mises

Nella teoria della trave la tensione ideale del criterio di VON MISES assume l'espressione

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \\ &= \sqrt{2 \left[ \left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2 \right] - \left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \left( \frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}.\end{aligned}$$

Per uno stato tensionale monoassiale, quale quello che si ha in una trave soggetta a sforzo normale contratto, la tensione ideale vale quindi

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sigma.$$

Per uno stato tensionale di puro taglio, quale quello che si ha in una trave soggetta a torsione, la tensione ideale vale invece

$$\sigma_{\text{id}}(\mathbf{T}) = \sqrt{3} \tau.$$

Secondo il criterio di VON MISES la tensione tangenziale limite in puro taglio è dunque minore della tensione normale limite a trazione o a compressione secondo un fattore  $\sqrt{3} \approx 1.73$ .

## RIFERIMENTI

1. GALILEO GALILEI, Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno à due nuove Scienze attinenti alla Mecanica & i movimenti Locali, del signor Galileo Galilei Linceo, filosofo e matematico primario del serenissimo Gran duca di Toscana con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi, in Leida, appresso gli Elzevirii M.D.C.XXXVIII (1638).
2. C.A. COULOMB, *Mem. Math. et Phys.*, **7**, p. 343 (1773).
3. H. TRESCA, Sur l'écoulement des corps solides soumis à fortes pressions, *Compt. Rend.*, **59**, p. 754 (1864).
4. H. TRESCA, *Compt. Rend.*, **64**, p. 809 (1867).
5. H. TRESCA, *Mém. Sav. Acad. Sci. Paris*, **18**, p. 809 (1868).
6. H. TRESCA, Mémoires sur l'écoulement des corps solides *Mém. présentés par divers savants Sav. Acad. Sci. Paris*, **20**, (1869).
7. A. WÖHLER, Wöhler's Experiments on the Strength of Metals, *Engineering*, August 23, p. 160 (1867).
8. A.J.C.B. DE SAINT VENANT, Memoire sur l'établissement des équations différentielles des mouvements interieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'elasticité pourrait les ramener à leur premier état, *Compt. Rend.*, **70**, pp. 473-480 (1870).
9. M. LEVY, Memoire sur les équations générales des mouvements interieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'elasticité pourrait les ramener à leur premier état, *Compt. Rend.*, **70**, pp. 1323-1325 (1870).
10. E. BELTRAMI, *Rendiconti Istituto Lombardo*, **18**, p. 704 (1885).
11. J. BAUSCHINGER, On the Change of the Position of the Elastic Limit of Iron and Steel under Cyclic Variations of Stress, *Mitt. Mech.-Tech. Lab.*, Munich, **13**, n. 1. (1886).
12. J.J. GUEST, *Phil. Mag.*, **50**, p. 69 (1900).
13. O. MOHR, *Zeit. Ver. deut. Ing.*, p. 1524 (1900).
14. M.T. HUBER, *Czasopismo tech.*, **15**, Lvov (1904).
15. J.H. SMITH, Some Experiments on the Fatigue of Metals, *Journal of Iron and Steel Institute*, **91**, pp. 365-397 (1910).
16. R. von MISES, Mechanik der festen Körper in plastisch deformablen Zustand, *Goettinger Nachr. Math.-Phys. Kl.*, pp. 582-592 (1913).
17. B.P. HAIGH, Report on Alternating Stress Tests of a Sample of Mild Steel received from the British Association Stress Committee, *Report of the British Association*, **85**, pp. 163-170 (1915).
18. B.P. HAIGH, *British. Ass. Reports*, section G (1919).
19. A.A. GRIFFITH, The Phenomena of Rupture and Flow in Solids, *Trans. Royal Society, London*, vol. A221, p. 163 (1920).
20. B.P. HAIGH, *Engineering*, **109**, p. 158 (1920).
21. H.M. WESTERGAARD, *Journ. Franklin Inst.*, **189**, p. 627 (1920).
22. L. PRANDTL, Spannungsverteilung in plastischen Körpern, *Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics*, Delft, pp. 43-54 (1924).

23. H. HENCKY, Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen, *Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics*, Delft, pp. 312-317 (1924).
24. W. LODE, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **5**, p. 142 (1925).
25. W. LODE, *Zeits. Phys.*, **36**, p. 913 (1926).
26. F. SCHLEICHER, *Zeits. angew. Math. Mech.*, **6**, p. 199 (1926).
27. A. NADAI, *Journ. Appl. Phys.*, **8**, p. 205 (1937).
28. J.J. GUEST, *Proc. Inst. Auto. Eng.*, **35**, p. 33 (1940).
29. R. HILL, A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, R. Soc. Proc. series A, **193**, 281, (1948).
30. P.W. BRIDGMAN, Studies in large plastic flow and fracture with special emphasis on the effect of hydrostatic pressure, McGraw-Hill, New York (1952).
31. D.C. DRUCKER, W. PRAGER, *Quart. Appl. Math.*, **10**, p. 157 (1952).
32. G.R. IRWIN, Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **24**, p. 361 (1957).
33. S.W. TSAI, Strength characterization of anisotropic materials, NASA-CR 224, (1965).
34. J.R. RICE, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentrations by Notches and Cracks, *Journal of Applied Mechanics*, **35**, pp. 379-386 (1968).
35. M. ROMANO, On Leon's criterion, *Meccanica*, n. 1, vol. **IV**, pp. 1-21 (1969).
36. A. CARPINTERI, Scienza delle Costruzioni, vol 1, Pitagora, Bologna (1992).
37. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo Zero, Hevelius, Benevento (2001).
38. G. ROMANO, Scienza delle Costruzioni, Tomo I, Hevelius, Benevento (2001).

## INDICE ANALITICO

- $J_2$ , criterio del, 562  
 $\alpha$ , ferro, 522  
 $\gamma$ , ferro, 522  
 $\pi$ , piano, 549  
ARRHENIUS, legge di, 527  
BANACH, teorema dell'immagine chiusa, 75  
BELTRAMI, criterio di, 555  
BETTI, principio di, 59, 61  
BREDT, prima formula di, 493  
BREDT, seconda formula di, 493  
BRIDGMAN, esperienze di, 556  
BURGERS, vettore di, 530  
CASTIGLIANO, primo teorema di, 153  
CASTIGLIANO, secondo teorema di, 152  
CAUCHY, materiale elastico di, 16  
CAUCHY-RIEMANN, relazione di, 433  
CAUCHY-SCHWARZ, diseguaglianza di, 75  
CLAPEYRON, teorema di, 57  
CLAPEYRON, teorema generalizzato di, 152  
CLAUSIUS-DUHEM, diseguaglianza di, 3  
COSSERAT, continuo di, 320  
COULOMB-MOHR, criterio di, 579  
CÉA, lemma di, 310  
DRUCKER-PRAGER, criterio di, 581  
FENCHEL, coniugio secondo, 108  
FENCHEL, relazioni di, 107  
FENCHEL-LEGENDRE, trasformata di, 22  
FICK, leggi di, 527  
FRENKEL, difetto di, 526  
GALILEO-RANKINE, criterio di, 553  
GRASHOF, criterio di, 554  
GREENBERG, principio di, 171  
GREEN, materiale elastico di, 15  
GREEN, misura di deformazione, 320  
GREEN-regolare, spostamento, 227  
HAAR, matrici di, 182  
HAIGH-WESTERGAARD, spazio di, 547  
HELLINGER-REISSNER, funzionale di, 148, 245, 274  
HELMHOLTZ, energia libera di, 5  
HELMHOLTZ, formula di, 456  
HERMITE, polinomi di, 71, 182  
HILL, criterio di, 569, 571, 572  
HILL, principio di, 157  
HU-WASHIZU, funzionale di, 150  
JAUMANN, derivata di, 9  
JOURAWSKI, formula di, 465  
KIRCHHOFF, analogia di, 499  
KIRCHHOFF, principio di, 53  
KOSZUL, formula di, 325  
LADYZHENSKAYA-BABUVSKA-BREZZI, 304  
LAPLACE, operatore di, 426  
LEGENDRE, trasformata di, 5, 107  
LEGENDRE, trasformazione di, 20, 230  
LEVI-CIVITA, connessione di, 325  
LIE, derivata di, 9  
LIE, parentesi di, 325  
LODE, parametro di, 548  
LÜDERS, linee di, 520  
MACAULAY, parentesi di, 163  
MAXWELL, criterio di, 562  
MELDHAL, sezioni di, 549  
MILLER, indici di, 523  
MOHR, criterio di crisi di, 576  
MOHR-CAQUOT, criterio di, 577  
NADAI, criterio di, 565  
OLDROYD, derivata di, 11  
PEIERLS-NABARRO, relazione di, 532  
POISSON, problema di, 428  
POISSON, rapporto di, 32  
PRAGER-HODGE, principio di, 171  
PRAGER, condizione di, 159  
PRANDTL, analogia di, 443  
RAYLEIGH, onde di, 92  
RAYLEIGH-RITZ, metodo di, 306  
RIEMANN, varietà di, 325  
RITZ, teorema di, 306  
ROCKAFELLAR-MOREAU, teorema di, 118  
SAINT VENANT, problema di, 377  
SAINT VENANT, trave di, 377  
SCHLEICHER, criterio di, 569  
SCHMID, legge di, 557  
SHOTTKY, difetto di, 526  
STOKES, teorema di, 433  
TIMOSHENKO, trave di, 320  
TRESCA-SAINT VENANT, criterio di, 557  
TSAI-HILL, criterio di, 572  
VOLTERRA, condizione di, 123  
VON MISES, criterio di, 562

- DIRICHLET, problema di, 428  
 NEUMANN, problema di, 426, 428
- acciaio eutettoidico, 522  
 acustico, tensore, 91  
 addizione, operatore di, 120  
 adiabatico, processo, 4  
 affine, insieme, 96  
 affinità termodinamica, 5  
 algoritmo, 174  
 ammissibilità elastocinematica, 240  
 ammissibilità elastostatica, 240  
 ammissibilità, domini di, 126  
 ampiezza, 90  
 Analisi Convessa, 95  
 analisi convessa, 116  
 Analisi Limite, 95  
 analisi limite cinematica, 139  
 analisi limite, teorema fondamentale, 140  
 analogia della membrana, 443  
 analogia di KIRCHHOFF, 499  
 analogia di PRANDTL, 443  
 analogia idrodinamica, 443  
 angolo di attrito, 580  
 angolo specifico di torsione, 416  
 antipolare, 362  
 antipolarità, 362, 367  
 antipolo, 362  
 apporto superficiale di entropia, 3  
 apporto volumetrico di entropia, 3  
 approssimazione, errore di, 305  
 approssimazioni interne, 306  
 area elastica, 346  
 area elastica a taglio, 474  
 area settoriale, 488  
 armonica, 426  
 armonica coniugata, 435  
 asse della trave, 379  
 asse di sollecitazione, 397  
 asse di sollecitazione del taglio, 463  
 asse neutro del taglio, 463  
 asse neutro della flessione, 391  
 assemblaggio, 196
- Assioma della Scelta, 98  
 assioma di localita, 6  
 associata, modello di plasticità, 157  
 associata, plasticità, 157  
 assoluta, temperatura, 3  
 attivazione, energia di, 528  
 attrito interno, coefficiente di, 580  
 attrito, angolo di, 580  
 austenite, 522
- baricentro, 347  
 baricentro elastico, 394  
 baricentro geometrico, 348  
 base di maglie, 496  
 base, varietà, 316  
 bordi dei grani, 521, 525  
 braccio della coppia interna, 470  
 buona posizione, 238, 264
- calore apportato, tasso di, 1  
 campi di prova, 235  
 campi di tentativo, 235  
 campo irrotazionale, 432  
 campo solenoidale, 432  
 carico efficace, 52, 75  
 cedevolezza a taglio, 474  
 cedevolezza anelastica, 172  
 cedevolezza di iterazione, 175  
 cedevolezza elastica, 13, 85, 172, 175, 228, 249  
 cedevolezza elastica al contorno, 233  
 cedevolezza elastica efficace, 230  
 cedevolezza elastica tangente, 14  
 cedevolezza secante, 175  
 sedimenti vincolari, 234  
 sedimenti, forze equivalenti, 235  
 cella unitaria, 521  
 centro, 347  
 centro dei pesi, 347  
 centro di sollecitazione, 400  
 centro di taglio, 479, 507  
 centro elastico, 394  
 centro relativo, 362  
 chiuso, funzionale, 105

- ciclica, monotonia, 100, 101  
cinematico, operatore, 126  
cinematismi di prova, 142  
cinematismi discreti rigidi, 298  
cinematismo di collasso, 140  
cinematismo libero, 140  
cluster, 525  
co-rotazionale, derivata, 9  
coefficiente di attrito, 580  
coefficiente di ripartizione, 501  
coesione del materiale, 580  
cofattore, 359  
collasso, moltiplicatori di, 143  
collasso, tipologie di, 140  
complementare, energia, 144, 150  
complementare, energia elastica, 19  
complementare, formulazione, 250  
complementare, formulazione mista, 248  
complementarietà, condizione di, 158  
comportamento anisotropo, 547  
comportamento elastico, 13  
composito, 573  
compressione, 386  
concavo, funzionale, 111  
condizione di complementarietà, 158  
condizione di congruenza elastica, 233, 241  
condizione di congruenza elastica primale, 236  
condizione di coniugio, 158  
condizione di consistenza, 317  
condizione di consistenza di PRAGER, 159  
condizione di ellitticità, 51  
condizione di equilibrio elastico, 233, 241  
condizione di equilibrio elastico primale, 236  
condizione di integrabilità di VOLTERRA, 123  
condizione inf-sup, 244, 284, 292  
condizione LBB, 304  
condizione variazionale di ammissibilità, 238  
condizione variazionale di congruenza, 235  
condizione variazionale di equilibrio, 235  
condizione variazionale di equilibrio dinamico, 54  
condizioni normali all'infinito, 455  
configurazione, 316  
configurazione naturale, 322  
congruenza, condizione variazionale, 235  
coniugata di funzione armonica, 435  
coniugate, direzioni, 357  
coniugati, potenziali, 107  
coniugio secondo FENCHEL, 108  
coniugio secondo YOUNG, 109  
coniugio tra funzioni convesse, 108  
coniugio, condizione di, 158  
coniugio, relazione di, 107, 357  
connessione di LEVI-CIVITA, 325  
connessione multipla, 433  
connessione, grado di, 483  
cono, 96  
cono convesso normale, 134  
cono delle normali, 134  
conservatività, 21  
conservatività, proprietà di, 99  
conservativo, legame, 15  
consistenza, condizione di, 317  
continuo di CAUCHY, 319  
continuo di COSSERAT, 320  
convessità stretta, 115  
convesso, funzionale, 104  
convesso, insieme, 96  
convettiva, derivata, 11  
corda, 483  
costante di diffusione, 527  
costante di viscosità, 162  
covalente, legame, 524  
crisi, curva di, 577  
crisi, fenomeni di, 542  
crisi, funzione scalare di, 542  
cristallite, 521  
cristallo, 521  
criteri di resistenza, 537  
criterio dell'invariante  $J_2$ , 562  
criterio della curva intrinseca, 577  
criterio della massima dilatazione, 554  
criterio della massima tensione normale, 553  
criterio di crisi di MOHR, 576  
criterio di plasticizzazione, 164  
criterio di resistenza, 546  
criterio di resistenza semplice, 546  
criterio di BELTRAMI, 555  
criterio di COULOMB-MOHR, 579

- criterio di DRUCKER-PRAGER, 581
- criterio di GALILEO-RANKINE, 553
- criterio di GRASHOF, 554
- criterio di HILL, 569, 571, 572
- criterio di MAXWELL, 562
- criterio di MOHR-CAQUOT, 577
- criterio di NADAI, 565
- criterio di SCHLEICHER, 569
- criterio di TRESCA-SAINT VENANT, 557
- criterio di TSAI-HILL, 572
- criterio di VON MISES, 562
- curva di crisi, 577
- curva intrinseca, 577
- curvatura flessionale, 411
- curvatura torsionale, 416, 424, 499
- definizione positiva, 15
- deformabilità flessionale, tensore di, 395
- deformata elastica, 53
- deformazione, 227
- deformazione controllata, 514
- deformazione di rottura, 519
- deformazione elastica, energia di, 18
- deformazione imposta, 514
- deformazione libera di collasso, 140
- deformazione linearizzata, 227
- deformazione plastica, 156, 516
- deformazioni elasticamente ammissibili, 228, 229
- deformazioni tangenti libere, 300
- densità di entropia, 3
- derivata co-rotazionale, 9, 10
- derivata convettiva, 11
- derivata da destra, 158
- derivata di JAUMANN, 9, 10
- derivata di LIE, 9
- derivata di OLDROYD, 11
- derivata di TRUESELL, 11
- derivata unidirezionale, 116
- deviatorico, piano, 549
- diagramma ingegneristico, 514
- difetti lineari, 528
- difetti puntuali, 525, 526
- difetti superficiali, 525
- difetto di FRENKEL, 526
- difetto di SHOTTKY, 526
- differenziale, 10, 317
- diffusione, leggi di FICK, 527
- diffusività, 527, 528
- dilatazione attuale, 514
- dilatazione nominale, 514
- direttori, 212
- direzione, 90
- direzione principale d'inerzia, 357
- direzioni coniugate, 357
- direzioni di scorrimento, 523
- direzioni di slittamento, 523
- diseguaglianza del valor medio quadratico, 475
- diseguaglianza della dissipazione, forma ridotta, 4
- diseguaglianza di CAUCHY-SCHWARZ, 75
- diseguaglianza di CLAUSIUS-DUHEM, 3
- diseguaglianza di POINCARÉ, 460
- dislocazioni, 528
- dislocazioni a spigolo, 528
- dislocazioni a vite, 529
- dislocazioni di bordo, 528
- dislocazioni elicoidali, 529
- dissipazione intrinseca, 4
- dissipazione plastica, 157
- dissipazione termica, 4
- dissipazione virtuale, 142
- dissipazione viscoplastica, 164
- distorsione elicoidale, 531
- distorsione equivalente, 236
- distorsioni, forza equivalente alle, 52
- divario della deformazione, 320
- domini di ammissibilità, 126
- domini efficaci, 21, 96
- dominio di resistenza, 546
- dominio efficace, 103
- dominio monoconnesso, 437
- dominio pluriconnesso, 437, 438
- doppietti elettronici, 524
- dualità secondo FENCHEL, 108
- dualità tra funzioni convesse, 108
- duttile, materiale, 520
- duttile, rottura, 520
- duttilità di un materiale, 520

- eccentricità, 401  
edge dislocations, 528  
effetto , 517  
effetto d'intaglio, 450  
efficace, carico, 52  
efficaci, vincoli elastici al contorno, 233  
elastica, cedevolezza, 85, 249  
elasticamente ammissibili, deformazioni, 228  
elasticamente congruente, 51  
elasticamente inefficaci, campi di sforzo, 228  
elasticità isotropa, 26  
elasticità strutturale ellittica, 243  
elasticità tangenziale, modulo di, 37  
elastico, legame generalizzato, 101  
elastodinamico, problema, 54  
elastostatica, 53  
elementi, 196  
elicoidali, dislocazioni, 529  
ellittica elasticità strutturale, 243  
ellitticità, condizione di, 51  
ellitticà, proprietà di, 231  
embrioni, 525  
energia complementare, 50, 144, 150  
energia complementare della struttura, 152  
energia complementare, elastica, 19  
energia complementare, forma bilineare, 255  
energia complementare, funzionale, 256, 274  
energia di attivazione, 528  
energia di deformazione elastica, 18, 122  
energia di deformazione, forma bilineare, 247  
energia elastica, 322  
energia elastica complementare, 19, 122  
energia elastica della struttura, 122, 152  
energia interna, tasso di incremento, 1  
energia libera di HELMHOLTZ, 5  
energia potenziale, 50, 144, 150  
energia potenziale elastica, 322  
energia potenziale, funzionale, 246  
entropia, 3  
entropia, densità di, 3  
entropia, tasso di incremento, 3  
epigrafo, 104  
equazione canonica, 358  
equazione scalare del moto, 89  
equazione vettoriale del moto, 89  
equilibrio dinamico, condizione di, 54  
equilibrio elastico generalizzato, 126  
equilibrio elastico, problema del, 51  
equilibrio, condizione variazionale, 235  
equilibrio, operatore di, 126  
equivalente, distorsione, 236  
equivalente, forza attiva, 236  
errore di approssimazione, 303, 305  
errore di interpolazione, 305  
esperienze di BRIDGMAN, 556  
estensione canonica, 324  
estensione, proprietà di, 128  
estrazione, matrice di, 221  
famiglia di potenziali, 149  
famiglia invariante, 29  
fattore di torsione, 427  
fattori di taglio principali, 475  
fattori di taglio, tensore dei, 474  
fenomeni di crisi, 542  
ferrite, 522  
ferro  $\alpha$  , 522  
ferro  $\gamma$  , 522  
fibrato tangente, 316  
flessione composta, 400  
flessione deviata , 399  
flessione retta , 399  
flessione semplice, 398  
flessione, asse della, 391  
flessione, modulo di resistenza a, 404  
flessione, piano di, 391  
flettente, momento, 387  
fluidità, 162  
flussi di maglia, 499  
flusso, 316  
flusso di deformazione plastica, 156  
fondamentale, trinomio, 106  
forma bilineare dell'energia elastica, 52  
forma bilineare energia complementare, 255  
forma bilineare energia di deformazione, 247  
forma bilineare non degenere, 182  
forma ridotta della disegualanza della dissipazione, 4

- formula di HELMHOLTZ, 456  
 formula di JOURAWSKI, 465, 469  
 formula di KOSZUL, 325  
 formulazione complementare, 250  
 formulazione ibrida complementare I, 268, 275  
 formulazione ibrida complementare II, 271, 276  
 formulazione ibrida primale I, 261, 263, 275  
 formulazione ibrida primale II, 265, 275  
 formulazione mista complementare, 248  
 formulazione mista primale, 236, 274  
 formulazione primale, 245  
 formulazioni ibride, 260  
 formulazioni ibride complementari, 260  
 formulazioni ibride primali, 260  
 formule di trasporto, 355  
 forza attiva equivalente, 236  
 forza elettromotrice, 499  
 forza equivalente alle distorsioni, 52  
 forze ammissibili, 50  
 forze dissipanti, 55  
 forze reattive discrete, 298  
 forze reattive, sottospazio delle, 237  
 forze, metodo delle, 81  
 fragile, materiale, 520  
 fragile, rottura, 520  
 frontiera relativa, 132  
 fune, 319  
 funzionale chiuso, 105  
 funzionale concavo, 111  
 funzionale convesso, 104, 105  
 funzionale di interdizione, 157, 164  
 funzionale di supporto, 111  
 funzionale di HELLINGER-REISSNER, 148, 245, 274  
 funzionale di HU-WASHIZU, 150  
 funzionale energia complementare, 256, 274  
 funzionale energia potenziale, 246, 274  
 funzionale ibrido complementare I, 269, 276  
 funzionale ibrido complementare II, 271  
 funzionale ibrido primale, 275  
 funzionale ibrido primale I, 264  
 funzionale ibrido primale II, 266  
 funzionale indicatore, 111  
 funzionale inferiormente semicontinuo, 105  
 funzionale misto complementare, 254, 274  
 funzionale misto primale, 245, 274  
 funzionale proprio, 109  
 funzionale sublineare, 104  
 funzione armonica, 426, 432  
 funzione armonica coniugata, 435  
 funzione di flusso, 164  
 funzione scalare di crisi, 542  
 funzioni di forma, 179  
 funzioni olomorfe, 444  
 generalizzato, legame elastico, 101  
 geometria delle masse, 345  
 germe, 317  
 grado di connessione, 483  
 grado di iperstaticità, 80  
 grado di labilità, 80  
 grado di pericolosità, 542  
 grafico di una relazione, 96  
 grafico regolare, 110  
 grani, 521  
 grani, bordi dei, 525  
 gruppo di simmetria materiale, 29  
 ibrido complementare, funzionale I, 269  
 ibrido complementare, funzionale II, 271  
 ibrido primale, funzionale, 275  
 ibrido primale, funzionale I, 264  
 ibrido primale, funzionale II, 266  
 immagine chiusa, 229  
 immagine inversa, 113  
 implicito, schema, 156  
 incrementale, plasticità, 158  
 incrudimento, 517, 519  
 indicatore, funzionale, 111  
 indici di MILLER, 523  
 indici di MILLER-BRAVAIS, 524  
 indifferente, 8  
 indifferenza, 378  
 indifferenza materiale, 542  
 indifferenza, principio di, 378  
 inerzia polare, momento di, 421  
 inf-convoluzione, 113

- inf-sup, condizione, 244, 284, 292  
inferiormente semicontinua, 117  
inferiormente semicontinuo, funzionale, 105  
influenza, linee di, 64  
ingegneristico, diagramma, 514  
ingobbamento, 424  
ingobbamento specifico, 425, 428  
insieme affine, 96  
insieme convesso, 96  
insieme delle variazioni, 132  
insieme di livello, 546  
insieme lineare, 96  
intaglio, effetto di, 450  
intensità di corrente, 499  
interdizione, funzionale di, 164  
interne, approssimazioni, 306  
interpolazione lineare, problema di, 179  
interpolazione, errore di, 305  
invariante quadratico del deviatore degli sforzi, 561  
invariante, famiglia, 29  
invariante, legame, 29  
invarianti deviatorici, 545  
invarianti fondamentali, 545  
invarianti principali, 543, 544  
invarianti scalari, 544  
invarianza, proprietà di, 105, 106, 317  
inviluppo affine, 132  
ionico, legame, 524  
iperpiani di supporto, 131  
iperpiano di separazione, 136  
iperpiano di separazione propria, 136  
ipoeasticità, 7  
ipotesi di piccoli spostamenti, 49  
irrotazionale, 432  
irrotazionale, velocità, 87  
isocora, velocità, 87  
isoentropico, processo, 4  
isomorfismo quoziante, 185  
isotermo, processo, 4  
isotropia elastica, 26  
iterazione, operatore di, 120  
  
LBB, condizione di, 304  
  
legame conservativo, 15  
legame covalente, 524  
legame elastico, 322  
legame elastico generalizzato, 21  
legame elastico lineare, 124  
legame elastico, stabilità del, 13  
legame elastico, stretta monotonia del, 13  
legame invariante, 29  
legame ionico, 524  
legame metallico, 524  
legami deboli, 524  
legami elastici generalizzati, 101  
legami forti, 524  
legge di normalità, 157  
legge di ARRHENIUS, 527  
legge di SCHMID, 557  
leggi di diffusione di FICK, 527  
lemma di CÉA, 310  
lemma di ZORN, 98  
liberi, parametri vincolari, 216  
linea media, 483  
linearizzata, teoria, 49, 227  
linee di influenza, 64  
linee di LÜDERS, 520  
località, assioma di, 6  
localmente convesso, 116  
longitudinale, onda, 90  
longitudinale, velocità, 87  
  
maggiore, simmetria, 24  
maglie indipendenti, 496  
mappe multivoche, 21, 96  
martensite, 523  
massima dissipazione, principio di, 157  
massimale, monotonia, 97  
massimalità, proprietà di, 97  
materiale duttile, 520  
materiale elastico alla CAUCHY, 16  
materiale elastico alla GREEN, 15  
materiale elastico secondo GREEN, 315  
materiale fragile, 520  
materiale iperelastico, 6, 315  
materiale monoclinico, 42

- materiale ortotropo, 43  
 materiale trasversalmente isotropo, 43  
 materiali emitropi, 30  
 materiali ipoelastici, 7  
 materiali isotropi, 29  
 materiali ælotropi, 29  
 matrice dei cofattori, 360  
 matrice di estrazione, 221  
 matrice di rigidezza parametrica, 212  
 matrice di rotazione, 209  
 matrici di HAAR, 182  
 membrana, 319  
 membrana, analogia della, 443  
 messa in carico semplice, 59  
 metallico, legame, 524  
 metodo degli spostamenti, 66, 81, 195  
 metodo delle forze, 81, 196  
 metodo iterativo, 174  
 minima energia potenziale, 83  
 minimax, 246, 255  
 minore, simmetria, 23  
 misura di deformazione di GREEN, 319, 320  
 misura di deformazione finita, 317  
 misura di deformazione tangente, 317  
 misura locale di deformazione, 322  
 misure compatibili, 318  
 modello di flusso plastico associato, 157  
 modello discretizzato, 297  
 modulo di elasticità tangenziale, 33, 37  
 modulo di resistenza a flessione, 404  
 modulo volumetrico, 34  
 moltiplicatore, 157  
 moltiplicatori di collasso, 143  
 momenti, 545  
 momenti di ordine 0, 1, 2, 392  
 momento d'inerzia polare, 421  
 momento di ordine  $k$ , 346  
 momento flettente, 387, 463  
 momento principale d'inerzia, 357  
 momento statico, 348  
 momento statico elastico, 346  
 momento torcente, 387  
 monoclino, materiale, 42  
 monoconnesse, 483  
 monoconnesse, sezioni, 484  
 monotonia ciclica, 100  
 monotonia massimale, 97  
 monotonia, proprietà di, 96, 97  
 monotono non crescente, 125  
 monotono non decrescente, 125  
 multicellulari, sezioni, 484  
 necking, 519  
 neutro, asse del taglio, 463  
 neutro, asse della flessione, 391  
 nocciolo d'inerzia, 367  
 nodali, parametri, 70  
 nodi fissi, schema a, 70  
 nodi spostabili, schema a, 70  
 nominale, dilatazione, 514  
 nominale, sforzo, 514  
 norma, 105  
 norma del residuo, 175  
 normale, sforzo, 386  
 normalità, legge di, 157  
 omoentropico, processo, 4  
 onda longitudinale, 90  
 onda progressiva sinusoidale, 90  
 onda trasversale, 90  
 onda, operatore di, 87  
 onde di taglio, 90  
 onde di RAYLEIGH, 92  
 onde primarie, 90  
 onde secondarie, 90  
 onde superficiali, 92  
 onde volumetriche, 90  
 operatore cinematico, 126  
 operatore d'onda, 87  
 operatore di addizione, 120  
 operatore di assemblaggio, 196  
 operatore di equilibrio, 126  
 operatore di iterazione, 120  
 operatore di rigidezza, 173  
 operatore di rigidezza elastica, 50, 51, 230  
 operatore di LAPLACE, 426

- operatore strutturale, 237, 288  
 operatori di assemblaggio elementare, 196  
 operatori di connessione, 210  
 operatori ridotti, 236  
 ordine a corto raggio, 521  
 ordine a lungo raggio, 521  
 ortotropo, materiale, 43  
 ottaedrale, tensione tangenziale, 566  
  
 parametri cinematici nodali, 198  
 parametri di forza, 212  
 parametri nodali, 70  
 parametri standard, 219  
 parametri vincolari liberi, 216, 219  
 parametri vincolari schiavi, 216, 218  
 parametro di LODE, 548  
 parentesi di LIE, 325  
 parentesi di MACAULAY, 163  
 passo finito, visco-plasticità, 156  
 pericolosità, grado di, 542  
 peso, 345  
 piano  $\pi$ , 549  
 piano deviatorico, 549  
 piano di flessione, 391  
 piano di simmetria, 42  
 piano neutro, 391  
 piccole deformazioni, 11  
 piccoli spostamenti, 11  
 plasticità associata, 157  
 plasticità incrementale, 156, 158  
 plasticità perfetta, 156  
 plasticità standard, 157  
 plasticizzazione, limite di, 517  
 plastico, 516  
 pluriconnesse, 484  
 pluriconnesse, sezioni, 484  
 polare, 368  
 polarità, 367  
 polinomi di HERMITE, 71, 182  
 polinomio interpolante, 181  
 polo, 367  
 positivamente omogenea, 116  
 postulato di HELMHOLTZ, 5  
  
 potenza meccanica compiuta, 1  
 potenziale di deformazione elastica, 230  
 potenziale elastico, 12, 231, 322  
 potenziale elastico complementare, 12, 228  
 potenziale elastico complementare di forma, 561  
 potenziale logaritmico, 456  
 potenziale logaritmico vettoriale, 455  
 potenziale viscoplastico, 162  
 potenziale, energia, 144, 150  
 potenziali complementari, 102  
 potenziali coniugati, 107  
 prima costante elastica di LAMÉ, 33  
 prima legge di FICK, 527  
 primale, condizione di congruenza elastica, 236  
 primale, condizione di equilibrio elastico, 236  
 primale, formulazione, 245  
 primale, formulazione mista, 236, 274  
 primo principio della termodinamica, 1  
 primo teorema di CASTIGLIANO, 153  
 principali, fattori di taglio, 475  
 principi di stazionarietà, 144  
 principio del flusso di calore, 2  
 principio della massima dissipazione, 157  
 principio di conservazione delle sezioni piane, 390  
 principio di indifferenza materiale, 6, 331  
 principio di reciprocità, 59–61  
 principio di GREENBERG, 171  
 principio di HILL, 157  
 principio di KIRCHHOFF, 53  
 principio di PRAGER-HODGE, 171  
 privo di resistenza a trazione, 414  
 problema dell'equilibrio elastico, 51  
 problema di interpolazione lineare, 179  
 problema di POISSON, 428  
 problema di POISSON-DIRICHLET, 459  
 problema di SAINT VENANT, 377  
 problema di DIRICHLET, 428, 437, 438  
 problema di NEUMANN, 426, 428, 438  
 problema elastico lineare, 233  
 problema elastico misto primale, 242, 288  
 problema elastico misto primale discreto, 301  
 problema elastodinamico, 54  
 problema misto, 233  
 problema misto primale, 237

- problema POISSON-NEUMANN, 459  
 procedura di montaggio, 196  
 processo adiabatico, 4  
 processo evolutivo, 316  
 processo isoentropico, 4  
 processo isotermo, 4  
 processo omoentropico, 4  
 proprietà di complementarietà, 183  
 proprietà di ellitticà, 231  
 proprietà di estensione, 128  
 proprietà di identificazione, 182  
 proprietà di invarianza, 105, 106, 317, 331  
 proprietà di massimalità, 97  
 proprietà di minimo, 107  
 proprietà di monotonia, 96, 97  
 proprietà di monotonia massimale, 97  
 proprietà di proiezione, 184  
 proprietà di reciprocità, 64  
 proprietà di semiellitticità, 228  
 proprietà di sottodifferenziabilità, 106  
 proprio, funzionale, 109  
 punto di sella, 246, 254  
 punto fisso, 174  
 puntuali, difetti, 525, 528  
 puro taglio, stato tensionale di, 564
- raffinamento, 99  
 raggi coniugati d'inerzia, 358  
 raggi principali d'inerzia, 358  
 rapporto di POISSON, 32  
 reciprocità, principio di, 59, 61  
 reciprocità, proprietà di, 64  
 regolarizzazione dei potenziali, 108  
 regole di complementarietà, 86  
 relazione, 101  
 relazione di compatibilità, 318  
 relazione di coniugio, 107  
 relazione di ricorrenza, 174  
 relazione di CAUCHY-RIEMANN, 433  
 relazione di PEIERLS-NABARRO, 532  
 relazione elastica generalizzata, 125  
 relazione non lineare, 172  
 relazioni di FENCHEL, 107
- resistenza, 499  
 resistenza a flessione, modulo di, 404  
 resistenza a trazione, 159, 414  
 reticollo cristallino, 521  
 rette, sezioni, 380  
 riferimento cartesiano locale, 198  
 rigidezza a taglio, 474  
 rigidezza elastica, 14, 173  
 rigidezza elastica della struttura, 245  
 rigidezza elastica tangente, 14, 328, 332  
 rigidezza tangente, 101, 315, 327  
 rigidezza tangente elastica, 338  
 rigidezza tangente geometrica, 328, 332, 339  
 rigidezza torsionale, 421, 427, 493, 499  
 ripartizione, coefficiente di, 501  
 risposta elastica, 52  
 rottura duttile, 520  
 rottura fragile, 520  
 rottura, deformazione di, 519  
 rottura, tensione di, 519
- scalare, equazione del moto, 89  
 scatola di montaggio, 196  
 schema a nodi fissi, 70  
 schema a nodi spostabili, 70  
 schema implicito, 156  
 schiavi, parametri vincolari, 216  
 scorrimento medio da taglio, 509  
 scorrimento medio equivalente, 473  
 scorrimento visco-plastico, 166  
 scorrimento, sistema di, 533  
 screw dislocations, 529  
 seconda costante elastica di LAMÉ, 35  
 seconda diseguaglianza di KORN, 460  
 seconda legge di FICK, 527  
 secondo principio della termodinamica, 2  
 secondo teorema di CASTIGLIANO, 152  
 sella, punto di, 246, 254  
 semiellitticità, proprietà di, 228  
 seminorma, 104  
 seminorma in energia elastica complementare, 229  
 semplicemente connesso, 433  
 sestanti, 547

- sezione sottile, 483  
sezioni di MELDHAL, 549  
sezioni multicellulari, 484, 496  
sezioni piane, principio di conservazione, 390  
sezioni rette, 380  
sezioni sottili aperte, 494  
sezioni trasversali, 380  
sezioni tubolari, 484  
sforzi conformi elasticamente ammissibili, 255  
sforzi discreti in autoequilibrio, 298  
sforzi discreti in autoequilibrio, 299  
sforzi elasticamente inefficaci, 228, 229  
sforzi in equilibrio con forze ammissibili, 127  
sforzo coniugato, 318  
sforzo di taglio, 386, 463  
sforzo elasticamente efficace, 230  
sforzo normale, 386  
sforzo normale centrale, 400  
sforzo normale eccentrico, 400  
simmetria maggiore, 24  
simmetria minore, 23  
simmetria,piano di, 42  
sistema degli spostamenti, 490  
sistema delle forze, 490  
sistema di forze equivalente alle distorsioni, 52  
sistema di scorrimento, 533  
sistemi di forze ammissibili, 142  
sistemi di scorrimento primari, 533  
sistemi di scorrimento secondari, 533  
snervamento, limite di, 517  
soglia di plasticizzazione, 164  
solenoidale, 432  
solidi policristallini, 521  
sollecitazione, asse di, 397  
sollecitazione, piano di, 397  
soluzioni solide interstiziali, 526  
soluzioni solide sostituzionali, 526  
sottodifferenziale locale, 116, 117  
sottodifferenziale regolare, 117  
sottodifferenziali, 106  
sottospazi lineari delle variazioni, 140  
sottospazio delle forze reattive, 237  
sottostrutture, 196  
spazio cinematico, 126  
spazio degli sforzi, 126  
spazio delle deformazioni tangenti, 126  
spazio delle forze, 126  
spazio di HAIGH-WESTERGAARD, 547  
spigolo, dislocazioni a, 529  
spinta, 10, 317  
spinta di un campo tensoriale, 317  
spinta inversa, 317  
spostamenti ammissibili, 50, 235  
spostamenti conformi elasticamente amm., 230  
spostamenti conformi elasticamente ammissibili, 247  
spostamenti congruenti con deformazioni ammissibili, 126  
spostamenti elasticamente ammissibili, 261  
spostamenti rigidi, 49  
spostamenti, metodo degli, 66  
spostamento assiale, 411  
spostamento tangente, 316  
spostamento trasversale, 411  
spostamento virtuale, 316, 332  
spostamento GREEN-regolare, 227  
stabilità del legame elastico, 13, 228  
stabilità del legame elastico dei vincoli, 231  
stabilità della risposta elastica, 13  
standard, plasticità, 157  
stato locale di sforzo, 322  
stato piano di tensione, 382  
stato tensionale di puro taglio, 564  
stato tensionale equibassiale, 582  
stretta convessità, 115  
stretta monotonia, 115  
stretta monotonia del legame elastico, 13  
strettamente convesso, 115  
strettamente monotono, 115  
strizione, 519  
struttura geometrica locale, 316  
struttura locale, 323  
strutturale, operatore, 237, 288  
strutture semplici, 80  
sublineare, 116  
sublineare, funzionale, 104  
superficiali, onde, 92  
supplementari topologici, 183  
supporto, iperpiani di, 131

- tagliante, sforzo, 386  
 taglio, centro di, 479  
 taglio, onde di, 90  
 taglio, tensore dei fattori di, 474  
 tangente, rigidezza, 315  
 tangente, spostamento, 316  
 tasso di calore apportato, 1  
 tasso di incremento dell'energia interna, 1  
 tasso di incremento di entropia, 3  
 temperatura assoluta, 3  
 tensione di plasticizzazione, 516  
 tensione di rottura, 519  
 tensione ideale, 546, 559  
 tensione limite di elasticità, 516  
 tensione limite di proporzionalità, 515  
 tensione limite di elasticità, 516  
 tensione nominale, 514  
 tensione tangenziale ottaedrale, 561, 565, 566  
 tensione tangenziale risolta, 534, 557  
 tensione vera, 514  
 tensore acustico, 91  
 tensore centrale d'inerzia, 355  
 tensore centrale d'inerzia geometrica, 403  
 tensore dei fattori di taglio, 474, 510  
 tensore di deformabilità flessionale , 395  
 tensore di microcurvatura, 320  
 tensore di EULER, 348  
 tensore di PIOLA, 7  
 tensore di PIOLA-KIRCHHOFF, 7  
 tensore momento d'inerzia, 348  
 tensore momento d'inerzia elastico, 346  
 tensore, tensore di, 348  
 teorema dell'immagine chiusa, 75  
 teorema di CLAPEYRON, 57  
 teorema di CLAPEYRON generalizzato, 152  
 teorema di MENABREA, 154  
 teorema di RITZ, 306  
 teorema di ROCKAFELLAR-MOREAU, 118  
 teorema di STOKES, 434  
 teorema fondamentale dell'analisi limite, 140  
 teoria geometricamente linearizzata, 227  
 teoria linearizzata, 49, 227  
 teoria tecnica della trave, 390  
 termodinamica dei continui, 1  
 termodinamica, primo principio, 1  
 termodinamica, secondo principio, 3  
 tipologie di collasso, 140  
 torcente, momento, 387  
 torsione, 416  
 torsione, fattore di, 427  
 trasformata di LEGENDRE, 5, 20, 107  
 trasformata di LEGENDRE-FENCHEL, 22  
 trasformazione di LEGENDRE, 108, 230  
 trasformazione rigida, 330  
 trasporto, formule di, 355  
 trasversale, onda, 90  
 trasversale, velocità, 87  
 trasversali, sezioni, 380  
 trasversalmente isotropo, materiale, 43  
 tratti, 483  
 travature, 179  
 travature piene, 179, 195  
 trave di SAINT VENANT, 377  
 trave di TIMOSHENKO, 321  
 trave, asse della, 379  
 trave, teoria tecnica della, 390  
 trazione, 386  
 trazione, non resistente a, 414  
 trinomio fondamentale, 106  
 tubi sottili, 492  
 valor medio quadratico della tensione tangenziale, 561  
 valor medio quadratico, diseguaglianza del, 475  
 variabili interne, 5  
 variazioni, sottospazi lineari delle, 140  
 varietà base, 316  
 varietà di RIEMANN, 325  
 velocità, 90  
 velocità irrotazionale, 87  
 velocità isocora, 87  
 velocità longitudinale, 87  
 velocità trasversale, 87  
 vetroresina, 573  
 vettore assiale curvatura, 321  
 vettore di BURGERS, 529  
 vettore scorrimento, 321  
 vettoriale, equazione del moto, 89

- vincoli e cedimenti nodali, 211  
vincoli elastici al contorno efficaci, 233  
vincoli elastici lineari, 231  
virtuale, spostamento, 316  
visco-plasticità, 156  
visco-plasticità al passo finito, 156  
visco-plasticità con incrudimento, 156  
viscosità, 156  
vite, dislocazioni a, 529  
volumetriche, onde, 90  
vorticità, 411  
work hardening, 517, 519  
yield stress, 516

## INDICE DELLE NOTE BIOGRAFICHE

- ABEL, NIELS, 379  
ARRHENIUS, AUGUST, 527  
AUSTEN, WILLIAM, 522  
BAUSCHINGER, JOHANN, 517  
BELTRAMI, EUGENIO, 82, 555  
BETTI, ENRICO, 59  
BOLTZMANN, LUDWIG, 526  
BRAVAIS, AUGUSTE, 521  
BRIDGMAN, PERCY, 556  
BUNSEN, ROBERT, 53  
BURGERS, JOHANNES MARTINUS , 529  
CAQUOT, ALBERT, 577  
CARNOT, SADI, 2, 57  
CASTIGLIANO, ALBERTO, 12, 154  
CAUCHY, AUGUSTIN, 435  
CAYLEY, ARTHUR, 545  
CESÀRO, ERNESTO, 409  
CHRISTOFFEL, ELWIN, 82, 555  
CLAPEYRON, EMILE, 57  
CLAUSIUS, RUDOLF, 3  
CLEBSCH, RUDOLF, 379  
COULOMB, CHARLES, 417  
CULMANN, KARL, 358  
DIRICHLET, LEJEUNE, 428  
DUHEM, PIERRE, 3  
EULER, LEONHARD, 31  
FICK, ADOLF, 527  
FOURIER, JOSEPH, 77  
FREDHOLM, ERIK, 16  
FRENKEL, JACOV, 526  
GALILEI, GALILEO, 538, 553  
GERGONNE, JOSEPH, 361  
GORDAN, PAUL, 379  
GREEN, GEORGE, 12  
HADAMARD, JACQUES, 3, 109  
HAMILTON, WILLIAM, 545  
HELMHOLTZ, HERMANN, 53  
HESSE, LUDWIG, 379  
HILBERT, DAVID, 16  
HOOKE, ROBERT, 12  
HUYGENS, CHRISTIAAN, 355  
JOULE, JAMES, 2  
JOURAWSKI, D.J., 464  
KIRCHHOFF, GUSTAV, 53  
LAMÉ, GABRIEL, 33, 78  
LEGENDRE, ADRIEN-MARIE, 19  
LEONARDO DA VINCI, 537  
LIPSCHITZ, RUDOLF, 82, 555  
MACAULAY, FRANCIS, 163  
MANDELBROJT, SZOLEM, 109  
MARTENS, ADOLF, 523  
MAXWELL, JAMES, 61, 561  
MAYER, VON ROBERT, 2  
MENABREA, FEDERICO, 12, 154  
MILLER, WILLIAM, 523  
MOHR, OTTO, 576  
NABARRO, FRANK, 532  
NAVIER, CLAUDE-LOUIS, 77  
NEUMANN, CARL, 379, 428  
NEUMANN, FRANZ, 379  
OHM, GEORG, 53  
PEIERLS, RUDOLPH, 532  
POINCARÉ, HENRI, 59  
POISSON, SIMÉON-DENIS, 32, 428, 440  
PONCELET, JEAN, 361  
PRANDTL, LUDWIG, 439  
RANKINE, WILLIAM, 553  
RIEMANN, GEORG, 435  
RITZ, WALTER, 306  
ROMANO, MANFREDI, 414  
RUMFORD, ROBERT, 2  
SAINT-VENANT, BARRÉ, 377  
SHOTTKY, WALTER, 526  
SOMIGLIANA, CARLO, 89  
STEINER, JAKOB, 355  
STRUTT, WILLIAM, 92  
VANDERMONDE, ALEXANDRE, 41  
VOIGT, WOLDEMAR, 41  
VOLTERRA, VITO, 16  
VAN DER WAALS, JOHANNES, 524  
VON MISES, RICHARD, 562  
YOUNG, THOMAS, 31  
YOUNG, WILLIAM, 109