Parcial 5

2. Sea $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ g(x), & x \geqslant 2 \end{cases}$.

Proponga $g(x)$ **"no constante" tal que** f **sea continua pero <u>no</u> derivable en** $x_0 = 2$**; <u>justifique</u> que con su propuesta se cumplen dichas propiedades.**

Para que f sea continua en $x_0 = 2$ se debe cumplir:

1. $\exists \lim_{x \to 2} f(x) = L$
2. $\exists f(2)$
3. $f(2) = L$

Para que se cumpla el punto 1:

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x)$, donde $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$

Con lo cual, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} g(x) = 4$

Para que se cumpla el punto 2:

$\exists g(2)$, ya que g vale para $x \geqslant 2$

De esta primera parte del análisis, concluimos que $g(2) = 4$.

Para que $\nexists f'(2)$ las rectas tangentes a las funciones $h(x) = x^2$ y $g(x)$ en $x = 2$ deben tener distintas pendientes.

Obtenemos la recta tangente a $h(x) = x^2$ en $x = 2$:

$y - h(2) = h'(2)(x-2) \Longrightarrow y - 4 = 2 \cdot 2(x-2) \Longrightarrow y - 4 = 4x - 8 \Longrightarrow y = 4x - 4$ (tiene pendiente $m = 4$)

Podríamos elegir que g sea una función lineal, con una pendiente distinta a 4 (es decir, $g'(x) \neq 4 \ \forall x \in \mathbb{R}$). Yo por ejemplo, voy a elegir que la pendiente de g sea 2 (pero podría elegir cualquier valor)

$g(x) = 2x + b$, donde b es la ordenada al origen.

Recordemos que $g(2) = 4 \Longrightarrow 4 = 2 \cdot 2 + b \Longrightarrow b = 0$, con esto: $g(x) = 2x$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 2x, & x \geqslant 2 \end{cases}}$$