Introducción al Procesamiento Digital de Imágenes

2do cuatrimestre de 2024

Práctica: Transformada Discreta de Fourier

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Notación: $\mathcal{F}$ corresponde a la DFT y $\mathcal{F}^{-1}$ a la inversa ($IDFT$).

1. Sea $f(n) : n \in [0, \ldots, N-1]$, se define el par transformada-antitransformada discreta de Fourier 1-D:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(k) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\, e^{\frac{-2\pi i n k}{N}}, \qquad k = 0, \ldots, N-1 \\
f(n) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{F}(k)\, e^{\frac{2\pi i n k}{N}}, \qquad n = 0, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

   Demostrar las siguientes propiedades de la DFT:

   (a) $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(k)) = f(n)$
   (b) $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$
   (c) $\mathcal{F}(k) = \mathcal{F}(k+N)$
   (d) Si $f(n)$ es real, entonces $\mathcal{F}(k) = \mathcal{F}^*(-k)$[1]
   (e) $|\mathcal{F}(k)| = |\mathcal{F}(-k)|$
   (f) $\mathcal{F}^*(N-k) = \mathcal{F}(k)$
   (g) $\mathcal{F}^*(\frac{N}{2}+k) = \mathcal{F}(\frac{N}{2}-k)$ para $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}-1$.

2. Sea $f(m,n) : m, n \in [0, .., N-1]$, se define el par transformada-antitransformada discreta de Fourier 2-D:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(k,l) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} f(m,n)\, e^{\frac{-2\pi i (mk+nl)}{N}}, \qquad k, l = 0, \ldots, N-1 \\
f(m,n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \mathcal{F}(k,l)\, e^{\frac{2\pi i (mk+nl)}{N}}, \qquad m, n = 0, \ldots, N-1
\end{aligned}
$$

   (a) Demostrar:
      i. $a f(m,n) \xrightarrow{\texttt{DFT}} a\mathcal{F}(u,v)$, con $0 \leq u, v, m, n \leq N-1$ y $a \in K$
      ii. $f(a\,n, b\,m) \xrightarrow{\texttt{DFT}} \frac{1}{|ab|}\mathcal{F}\left(\frac{u}{|a|}, \frac{v}{|b|}\right)$, con $a, b \in K$
      iii. $f(r, \phi + \phi_0) \xrightarrow{\texttt{DFT}} \mathcal{F}(r, \theta + \phi_0)$, con $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi), u = r\cos(\theta), v = r\sin(\theta)$
   (b) Hallar la DFT de $f(m - m_0, n - n_0)$, con m_0, n_0 fijos.
   (c) Hallar la $IDFT$ de $\mathcal{F}(u - u_0, v - v_0)$, con u_0, v_0 fijos.

[1] $\mathcal{F}^*$ corresponde a la simétrica conjugada de $\mathcal{F}$.