Encuentro con los números

“Los Números: historia, importancia, maravillas, curiosidades, enigmas”

Juan Diego Vélez C.
Antonio Vélez M.

Introducción

Desde muy temprano en el desarrollo y evolución de la cultura humana el hombre inventó los números, quizá porque los necesitaba para una operación básica en la vida diaria: contar. Contar las pertenencias, los miembros de sus familias, sus animales domésticos, sus amigos… Así que se inventaron, o descubrieron, los números naturales, y a partir de ellos, con el avance de la cultura, se fue ampliando el panorama numérico para cumplir cada vez nuevas funciones matemáticas y de representación abstracta de la realidad.

Con los números naturales aparecieron los sistemas de numeración, y entre ellos, el más distinguido, el sistema en base diez, tal vez correspondiéndole a la naturaleza que eligió, quizá por azar, la pentadactilia. A la par con el sistema de numeración en base diez, el hombre inventó algoritmos de cálculo para la suma, la resta, la multiplicación, la división y la extracción de raíces. Debieron aparecer con ella los calculadores prodigio, calculadoras humanas de alta velocidad.

Al ampliar los naturales y llegar a los números enteros, la resta se pudo llevar cabo en todos los casos, y así se eliminó una molesta restricción. También, desde el punto de vista de la modelación matemática, los enteros permitieron representar los faltantes, las deudas, las pérdidas… Finalmente, al disponer de estos conjuntos numéricos, el hombre creó la aritmética, la reina de las matemáticas, la reina de las ciencias según el matemático Carl F. Gauss, y que junto con la geometría, debieron constituir los primeros logros matemáticos de la humanidad.

Ahora bien, en el conjunto de los enteros, la división solo se puede llevar a cabo en aquellos casos en que el dividendo es múltiplo del divisor y este es distinto de cero. Tal restricción hizo que los matemáticos del pasado inventaran o crearan los números racionales, dentro de los cuales no existe dicha limitación.

Pero en los racionales también se descubrió otra restricción: no puede resolverse con toda generalidad la extracción de raíces. Entonces se crearon los números irracionales y con ellos se completó el conjunto de los números reales. Y con los reales el hombre dispuso de la herramienta ideal para pensar el mundo. Sin embargo, en los reales también se descubrieron molestas restricciones: la extracción de raíces de orden par de números negativos, lo que dio lugar a los números imaginarios, complemento necesario para armar los números complejos.

Con los reales y complejos ya se anunció la aparición del análisis matemático, una de las conquistas más monumentales de la cultura humana, y con ellos se tuvieron las herramientas mentales para el desarrollo de las demás ciencias. La misma matemática se amplió en direcciones insospechadas. La física dispuso al fin de un lenguaje a su medida.

Al formalizar los conjuntos numéricos aparecieron los teoremas y los métodos de demostración, esto es, dispuso el hombre de las matemáticas, logro máximo de la cultura humana. La lógica se puso al servicio de las matemáticas, y nació el rigor, y comenzaron a estructurarse los conocimientos matemáticos, a formar alianzas entre los diferentes campos. Aparecieron los desafíos: problemas que superaban los conocimientos de la mayoría de sus usuarios.

Como complemento a lo anterior, y utilizando propiedades de la representación en base 10, se mostrarán algunos divertimentos matemáticos o matemática recreativa. Se aprovechará la ocasión para mostrar curiosidades numéricas, un campo amplísimo y divertido, apto para poner a prueba la inteligencia y para aprender a pensar. Se mostrarán números enanos y gigantes, y números especiales: primos, primos gemelos, números perfectos y amigos, números útiles, números bellos...

Entrando en temas de más calado, hablaremos del infinito aplicado a los sistemas numéricos. Encontraremos el infinito más pequeño, el benjamín de la familia, el de los números naturales, y mostraremos como, contra toda intuición, los enteros y los racionales son igualmente numerosos. Pero al saltar a los irracionales, o a los reales, el salto es de gran magnitud, pues nos hallaremos con un infinito que supera ampliamente al de los racionales, ¡tan numeroso que nos parece!

Los temas relacionados con el infinito nos permitirán mostrar paradojas que se revelan con la continuidad, propiedad que encontramos al estudiar los números reales, y veremos propiedades que se salen de toda humana imaginación, verdaderas fantasías, joyas talladas por la inteligencia humana. A la vez lograremos un mayor entendimiento de los números, más profundo, y con ello una más amplia comprensión del mundo.

Para terminar, enunciaremos una galería de teoremas extraordinarios, ya famosos, algunos de ellos pendientes de demostración, es decir, que por el momento se trata de conjeturas, aunque muy bien fundamentadas.

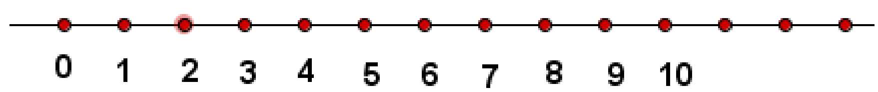
****

Parte 1: Los conjuntos numéricos

1.1 Números naturales

En el universo de los números, bello o no pero con seguridad una de las creaciones intelectuales más importantes de la humanidad, encontramos en su misma puerta de entrada el conjunto de los *números naturales*, el conjunto infinito **N = {**1, 2, 3,…}. Y si de estos nos piden su miembro más importante, acertado sería elegir el 1. ¿La razón? Es el átomo de la estructura matemática; además, la primera operación matemática que el hombre realiza es la de contar, y esto se hace partiendo de 1 y añadiendo ese mismo número en cada paso.

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10…}



En este punto alguien podría pensar que nos hemos saltado uno de los números más notables, aunque represente la nada, el *cero,* pero que nos sirve para llenar los vacíos en los sistemas de numeración. Sin embargo, por caprichos de la cultura, para algunos el cero no pertenece a los naturales, aunque sí a los enteros. Vale la pena comentar que apenas hacia el año 500, un matemático hindú lo introdujo en la escritura aritmética, y así los hombres no confundieron más el 105, que se escribía 1_5, con el 15.

Es natural pensar que la matemática surgió con el fin de llevar la contabilidad en el comercio, para medir la Tierra y para predecir los acontecimientos astronómicos. Antes de que surgieran los números para la representación de cantidades, el hombre usó otros métodos para contar, utilizando para ello objetos como piedras, palitos, nudos de cuerdas, o simplemente los dedos. Más adelante comenzaron a aparecer los símbolos gráficos, por ejemplo, marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena. Pero fue en Mesopotamia, alrededor del año 4.000 a. C., donde aparecieron los primeros vestigios escritos de los números: señales en formas de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla empleando para ello un palito aguzado. De allí el nombre de escritura cuneiforme. Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos gráficos diferentes, en la Grecia Antigua y en la Roma Antigua. En Grecia se empleaban simplemente las letras de su alfabeto, mientras que en Roma, además de las letras, se utilizaron algunos símbolos.

En la Cueva Blombos, cerca de Ciudad del Cabo, en Sudáfrica, un equipo de paleontólogos sudafricanos descubrió dos pedazos de roca ocre decorados con motivos geométricos. Los artefactos datan de hace más de 70.000 años. Estos hallazgos sugieren que desde aquella época remota el *Homo sapiens* ya era capaz de pensar en forma abstracta.

Objeto hallado en la Cueva Blombos

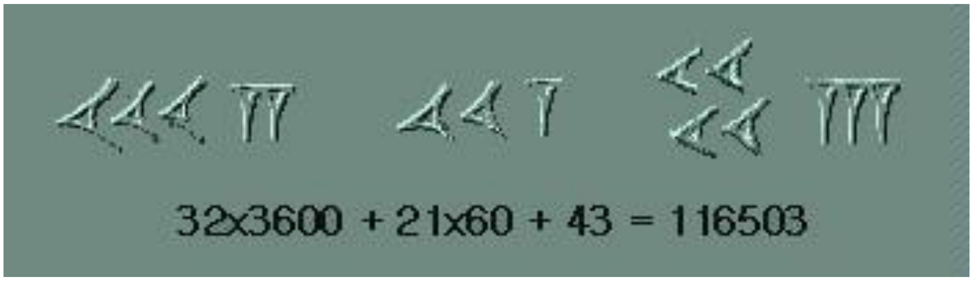
Los textos matemáticos más antiguos disponibles son la tablilla de barro *Plimpton 3*22 (1900 a. C.), el *Papiro de Moscú* (1850 a. C.), el *Papiro de Rhind* (1650 a. C.) y los textos védicos *Shulba Sutras* (800 a. C.). En todos estos textos se menciona el teorema de Pitágoras, que parece ser el más antiguo y extendido desarrollo matemático después de la aritmética y la geometría básicas. El *Papiro de Rhind* contiene 87 problemas matemáticos con cuestiones aritméticas básicas, cálculo de áreas, volúmenes y progresiones, reglas de tres, ecuaciones lineales y trigonometría básica.

Tablilla Plimpton

Papiro de Rhind

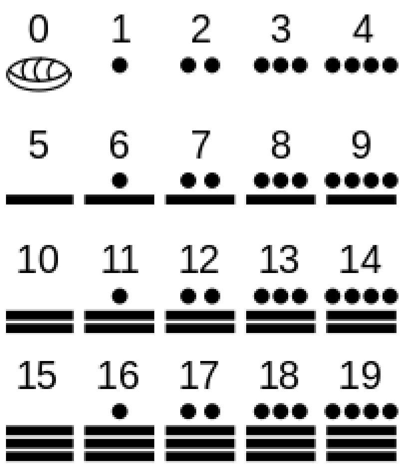
1.2 Sistemas de numeración

Antes del año 1.700 a. C. los babilonios idearon un sistema de numeración posicional (el valor de las cifras depende de su posición dentro del número), sexagesimal o en base 60, en el cual cada unidad grande está formada por 60 unidades más pequeñas. En la figura acompañante se muestra el número 116.503 descompuesto así: $32 \times 60^2 + 21 \times 60 + 43$. El sistema utilizaba dos signos básicos: la unidad, una cuña en posición vertical, y la decena, una cuña en posición horizontal. Combinando éstas se pueden escribir los 59 primeros números utilizando dos cuñas oblicuas (no utilizaron el cero hasta el 400 a. C.).



Sistema sexagesimal de los babilonios

Los mayas utilizaban un sistema de numeración vigesimal, o de base 20 (aunque mixto, pues representaban los primeros 19 números en base 5), similar al de otras civilizaciones mesoamericanas. También desarrollaron el concepto de cero alrededor del año 36 a. C.



Numeración Maya del 0 al 19

Nosotros estamos familiarizados con la base de numeración diez; sin embargo, la base cinco ha tenido amplio uso. En muchos idiomas, las palabras que significan “cinco” y “mano” son, o bien la misma, o bien parientes muy cercanos. *Pentcha*, por ejemplo, significa *mano* en persa, y *pantcha* es *cinco* en sánscrito. Los tamanacos, una tribu de indios sudamericanos, designaban el 5 con la misma palabra que usaban para decir *una mano entera*. El término que designaba el 6 significaba *uno en la otra mano*, 7 era *dos en la otra mano*, y análogamente para 8 y 9; el 10 era *ambas manos;* y para expresar del 11 al 14, los tamanacos extendían ambas manos y contaban *uno del pie, dos del pie…*, y así sucesivamente hasta 15, que era *un pie completo*. Como podemos presumir, el sistema continuaba expresando el 16 como *uno del otro pie*, y así hasta 19. La palabra que expresaba veinte era la misma empleada para decir *un indio*. El 21 era *uno en la mano de otro indio*. *Dos indios* significaba 40, *tres indios*, 60...

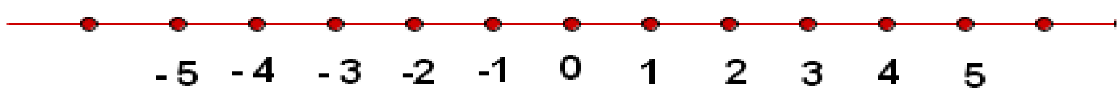
Las antiguas semanas de los aztecas constaban de cinco días, y hay una teoría según la cual la *X* con que los romanos denotaban el 10 se deducía de dos letras *V*, una de ellas invertida, mientras que la *V* era una representación de la mano humana.

Con frecuencia los nombres primitivos de los números eran idénticos a los de partes del cuerpo, como dedos de las manos y de los pies, u otras. Aun hoy, cuando hablamos de los *dígitos* refiriéndonos a los números de 0 a 9, estamos dando testimonio de este hecho, pues *dígito* se deriva del latín *digitus*, dedo. Hay excepciones humorísticas: el nombre maorí del 4 es *perro*, al parecer por tener esos animales 4 patas. Entre los abipones, tribu sudamericana hoy extinguida, el nombre del cuatro significaba *los dedos del ñandú*, tres adelante y uno atrás.

1.3 Números enteros

Cuando en una resta el sustraendo es mayor que el minuendo, y estamos trabajando en los naturales, el resultado es un número negativo, problema que exige una ampliación, de la cual resultaron los enteros. Los *enteros* se forman con los números naturales, sus inversos aditivos y el cero. El conjunto de enteros se acostumbra representarlo con la letra **Z**. El conjunto de los enteros es cerrado para las operaciones aritméticas de suma, producto y diferencia, esto es, el resultado de realizar cualquiera de esas tres operaciones entre enteros, siempre será un entero.

$$\mathbf{Z = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\ldots\}}$$

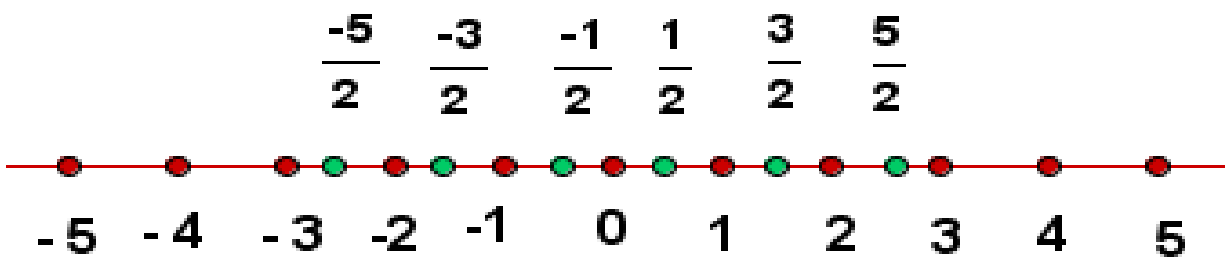


Al disponer de los enteros, el hombre pudo modelar las operaciones del mundo diario que conducen a sumas, restas y multiplicaciones, sin ninguna restricción: el dinero que nos queda después de una transacción, si es negativo, nos indica que quedamos debiendo, la temperatura en grados centígrados, sobre y bajo cero, las profundidades respecto al nivel del mar…

1.4 Números racionales

Los *números racionales,* representados por la letra **Q**, son todos aquellos números que pueden ser expresados como un cociente entre dos enteros, pero denominador distinto de cero. Por ejemplo, las fracciones 1/3 y –11/8 son números racionales. Todos los enteros están incluidos en los números racionales, ya que cualquier entero n puede ser escrito como la fracción n/1. **Q** es cerrado bajo las cuatro operaciones básicas: suma, diferencia, producto, y cociente (siempre que no dividamos entre 0). **Q** es *denso* sobre la recta real, esto es, dados dos racionales, existe siempre otro situado entre ellos. No tiene sentido hablar de *contigüidad*, es decir, no tiene sentido hablar del racional *siguiente* o *anterior* a uno dado. Esto no ocurre en los naturales ni en los enteros.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z};\ \ b \in \mathbb{Z};\ \ b \neq 0 \right\}$$



Si partimos de un número racional cualquiera, *a*/*b*, y efectuamos la división de *a* entre *b*, obtenemos, o bien un entero o un número con cifras decimales, cifras que gozan de la propiedad de que de cierto punto en adelante, están formadas por un conjunto de dígitos que se repite periódica e indefinidamente. Esta característica es precisamente lo que distingue la escritura decimal de un racional y de un irracional (los veremos más adelante).

Cuando en el números racional a/b efectuamos la división, obtenemos su expresión decimal, caracterizada porque de cierto punto en delante, siempre en sus cifras decimales aparecerá un conjunto de dígitos que se repite indefinidamente. Ejemplos: 1/2 = 0,5000…; 349/900 = 0,3 52 52 52… En este último observamos que 0 y 52 se repiten indefinidamente; 3/7 = 0,428571 428571 428571… El grupo 428571 se repite indefinidamente. Si en el desarrollo decimal de X, de un punto en adelante solo hay ceros, X es racional. Por ejemplo, 8,27000… puede ser escrito como 827/100.

1.5 Números reales

El mundo numérico de muchas personas se mueve entre los naturales y los fraccionarios, sin sospechar que existen otros números con propiedades poco intuitivas, pero relacionados con la vida diaria, o con el mundo de la física. Los griegos fueron los primeros en advertirlo: descubrieron que la raíz cuadrada de 2 era un número que servía para medir la diagonal de un cuadrado de lado unitario, y sin embargo no correspondía a los naturales ni a los racionales, así que lo llamaron *irracional*, en la creencia de que se trataba de un caso excepcional. En realidad descubrieron que hay ecuaciones que no pueden ser resueltas usando relaciones de enteros, como ocurre con $x^2 = 2$, cuyas soluciones son $\pm\sqrt{2}$, que expresadas con decimales son ±1,41421356237309…, porque $(\pm 1{,}41421356237309)^2 = 1{,}9999..$, que está cerca de 2, aunque nunca se obtendrá el 2 por más que aumentemos el número de cifras decimales.

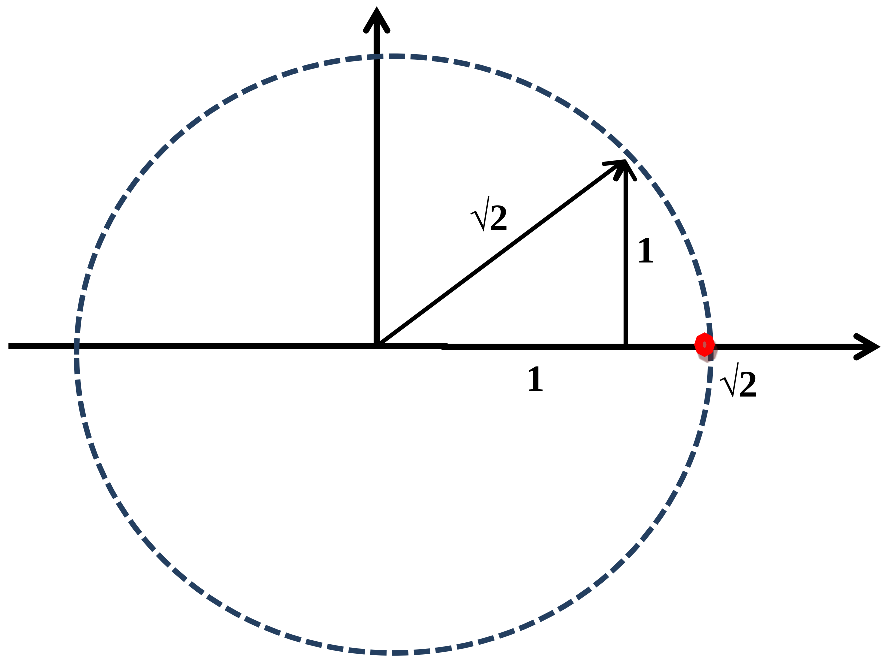
Un *número irracional* es un número que no puede ser escrito como una relación o fracción formada por dos enteros. Escrito en forma decimal, los irracionales nunca terminan ni se repiten, como ocurre con los racionales. Los antiguos griegos descubrieron que no todos los números son racionales, que hay ecuaciones que no pueden ser resueltas usando relaciones entre enteros. La primera ecuación estudiada fue $x^2 = 2$. ¿Qué número multiplicado por sí mismo es igual a 2? La respuesta es √2 (también -√2), cuyo valor aproximado con 14 decimales es 1,41421356237309. En efecto, $1{,}41421356237309^2 = 1{,}999999…$, un valor cercano a 2, valor que se irá aproximando cada vez más y más a 2 a medida que obtengamos más cifras decimales.

Puede probarse que nunca hallaremos una fracción o número racional que elevada al cuadrado nos dé 2, lo que significa que √2 no es racional, esto, es, que es irracional. Es fácil demostrarlo por reducción al absurdo o contradicción. Supongamos que existe un racional a/b tal que $(a/b)^2 = 2$, entonces $a^2 / b^2 = 2$, de donde $a^2 = 2b^2$. Ahora bien, en la descomposición única de a^2 en factores primos, de existir el 2, aparecería en ella elevado a una potencia par, pero en la descomposición de $2b^2$, en el lado derecho, ese mismo 2 aparecería elevado a una potencia impar, de lo que se deduce que tal igualdad es imposible. Parece que el resultado anterior no gustó a todo el mundo: cuenta la leyenda que los antiguos matemáticos griegos que probaron que √2 **no** podía ser escrito como una relación de enteros a/b hicieron enojar tanto a sus colegas, que los pusieron en un barco y ¡lo hundieron en alta mar!

¿Cuántos irracionales hay? Co un argumento similar al usado para la raíz de 2 se demuestra que las raíces cuadradas de aquellos números naturales que no sean cuadrados perfectos son todas irracionales, y también las raíces cúbicas y las… de orden n, más ∏, *e,* φ,… En consecuencia, el conjunto de los irracionales es infinito.

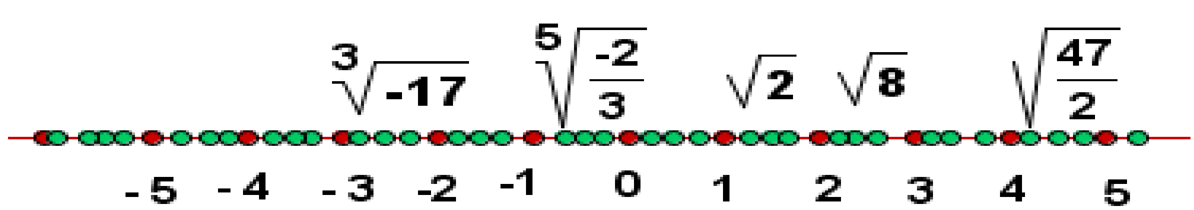
Aclaremos que los *números irracionales* tienen un desarrollo decimal que no exhibe ninguna regularidad, por lo que nunca podremos predecir las cifras decimales que siguen a una cifra dada, lo que nos obliga a calcularlas hasta que nuestra paciencia se agote. Por otro lado, las raíces cuadradas de aquellos números naturales que no sean cuadrados perfectos son todas irracionales y, en consecuencia, el conjunto formado por esos números es infinito.

Ahora bien, si los racionales de (0,1) llenan densamente el intervalo, entonces ¿dónde se acomoda √2, y dónde los demás reales? (se demostrará más adelante que los reales son más numerosos que los racionales.



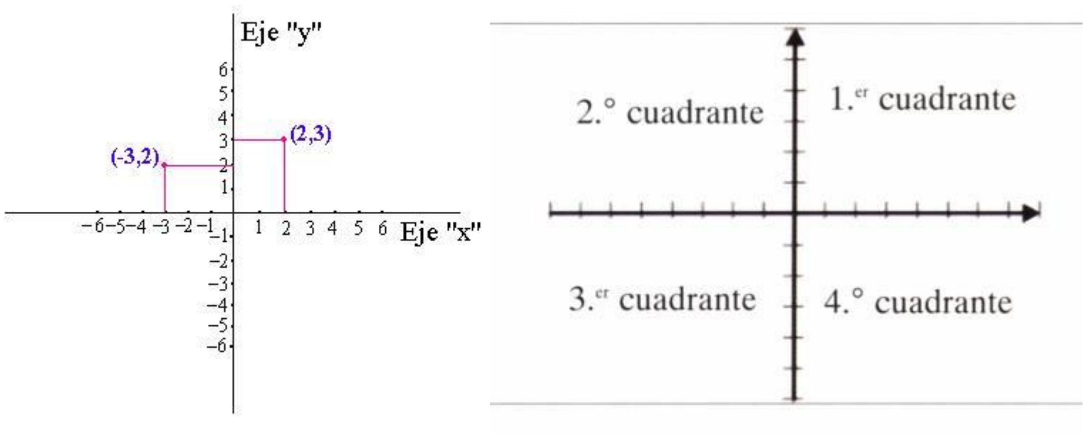
Construcción de √2 sobre la recta real

Los *números reales,* conjunto designado por **R**, es el conjunto de números formado por la unión de todos los números racionales y todos los irracionales. Los números reales son "todos los números" de la recta numérica. En **R** podemos realizar todas las operaciones aritméticas, salvo la división por cero; además, podemos llevar a cabo la radicación, con la restricción de que no existen raíces de orden para de números negativos. Al disponer los reales sobre una recta llegamos a la *recta real*, de tal suerte que a todo punto de la recta corresponde un real, y a cada real, un punto, de allí el nombre de *recta real*. **R,** como **Q**, es **denso** sobre la recta real, esto es, dado dos reales, existe siempre otro situado entre ellos. Tampoco tiene sentido la **contigüidad**, es decir, no tiene sentido hablar del real **siguiente** o **anterior** a uno dado.



Recta real

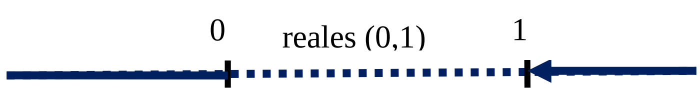
Y si disponemos dos rectas reales en ángulo recto formamos el plano cartesiano, el gran invento de René Descartes. A partir de allí se desarrolló el *análisis de variable real*, una de las grandes conquistas de la inteligencia humana.



El plano cartesiano

Los números irracionales pueden ser subdivididos aún más: números *algebraicos*, que son aquellos que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes racionales ($\sqrt{2}$ es algebraico, por ser solución de $x^2 = 2$), y los números *transcendentes*, que son aquellos que no son soluciones de ninguna ecuación polinómica de este tipo (se demuestra que π y e son transcendentes, pero no son demostraciones sencillas).

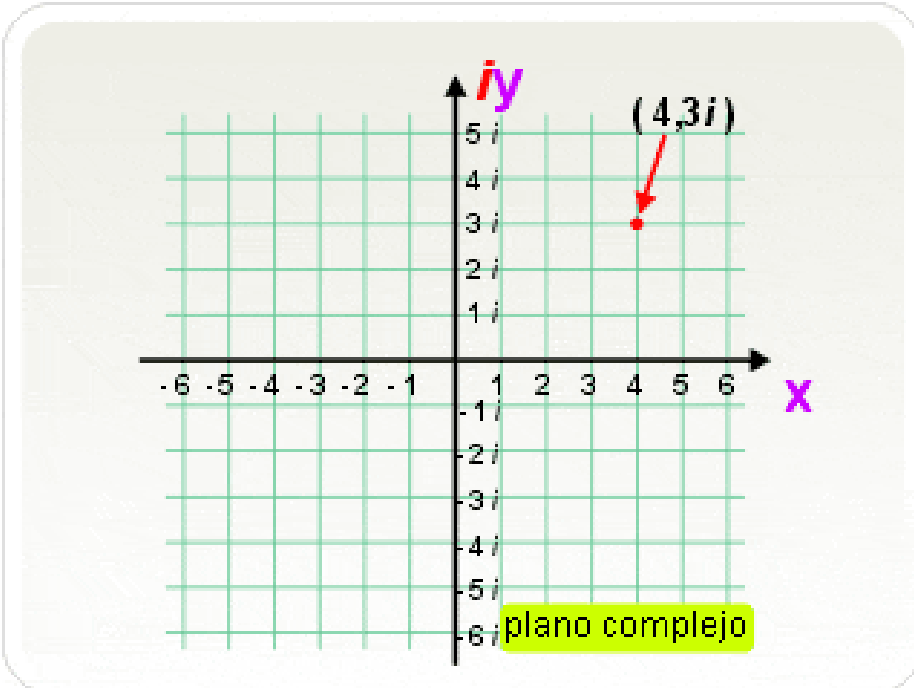
La densidad y la no contigüidad de los números reales dan lugar a ciertos comportamientos extraños: a pesar de que nuestra intuición nos dice que cuando la flecha negra de la figura acompañante se desplaza de derecha a izquierda, debe haber un primer instante en que su punta toca la zona punteada, formada por el intervalo abierto (0,1). Pero tal punto no existe. Nuestra intuición queda perpleja.



1.6 Los números complejos

Los números complejos son todos los números de la forma $a + bi$, con a y b reales, e $i = \sqrt{(-1)}$**.** En los complejos encontramos el conjunto de los números reales, cuando $b = 0$, y los imaginarios, cuando $a = 0$. El conjunto de los números complejos es cerrado para todas las operaciones aritméticas y para la radicación, sin excepciones. Es importante porque para cualquier polinomio $p(x)$ con coeficientes racionales, según el *teorema fundamental del álgebra*, existe al menos una solución en **C**.

C = {$a + bi$ | a y b son números reales}, en donde ***i*** es la unidad imaginaria, **√(–1) }**



Plano complejo

Es importante destacar que en el plano complejo se pueden resolver todas las ecuaciones polinómicas. En efecto, en los complejos se cumple el llamado *Teorema fundamental del álgebra*, que dice así: *Todo polinomio p(x) de grado n>0 con coeficientes complejos tiene al menos una solución en C. Se deduce de allí que admite exactamente n soluciones.*

1.7 Los Cuaterniones

Hay conjuntos de números aún "más grandes" que los complejos, y son usados por los matemáticos. Los *cuaterniones,* también llamados *cuaternios*, inventados por William H. Hamilton en 1845, forman un sistema numérico con tres unidades imaginarias diferentes. Mientras que los números complejos son una extensión de los reales por la adición de la unidad imaginaria *i*, tal que $i^2 = -1$, los cuaterniones son una extensión generada de manera análoga añadiendo las unidades imaginarias: *i*, *j* y *k* a los números reales, tal que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$

Las operaciones entre ellos y la unidad se muestran en la siguiente tabla:

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	I
k	k	j	-i	-1

1, *i*, *j*, *k*, son las "bases" de las componentes de un cuaternión.

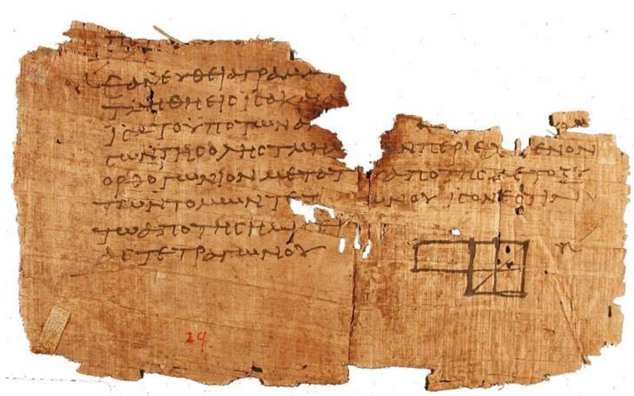
****

Parte 2: Los números: maravillas, curiosidades, enigmas, fobias….

2.1 Números naturales distinguidos

Los *números primos* se caracterizan por admitir exactamente dos divisores propios, esto es, divisores menores que el mismo número. El primero de la lista es el 2, muy especial puesto que es primo y par, además, es el único con esta característica. Los primeros números primos pueden hallarse siguiendo el viejo método de Eratóstenes y su criba: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17… Pero, ¿cuántos hay? El libro IX de *los Elementos,* la monumental obra de Euclides, contiene la respuesta: ¡infinitos! La demostración de este teorema, llamado *segundo teorema de Euclides*, es una joya de la cultura humana, por su belleza, ingenio y profundidad. Una obra de alta estética, si es que Paul Ërdos tiene razón y la belleza es un atributo aplicable a las frías matemáticas.

Para probarlo, Euclides supuso lo contrario: existe un número primo máximo, $\boldsymbol{P}$. Formemos entonces $\boldsymbol{N} = (2\times3\times5\times7\times11\times \ldots \times \boldsymbol{P}) + 1$. Si $\boldsymbol{N}$ fuese compuesto, entonces podrá escribirse como producto de factores primos. Sea $\boldsymbol{q}$ uno de ellos. Entonces $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{q\,N1}$ (1). Pero $\boldsymbol{q}$ debe pertenecer a la lista de primos con los que se construyó $\boldsymbol{N}$, por tanto, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{qN2 + 1}$ (2). Igualamos (1) y (2): $\boldsymbol{q\,N1 = qN2 + 1,}$ de donde $\boldsymbol{q\,(N1 - N2) = 1}$, luego $\boldsymbol{q}$ divide a **1.** ¡contradicción! Y a propósito de números primos, cabe mencionar aquí el llamado *Teorema fundamental de la aritmética*, demostrado por Euclides y cuyo enunciado es como sigue: *Todo número natural puede descomponerse en factores primos, de manera única*.



Fragmento de *los Elementos*, obra clásica debida a Euclides

Euclides

El peroné de un babuino, conocido como el *hueso de Ishango*, tallado hace más de 20,000 años, registra la lista de todos los primos entre diez y veinte. Este tesoro arqueológico sugiere que algunas culturas del Paleolítico Superior conocían ya el concepto. Y millones de años antes, las fuerzas ciegas de la evolución lo habían codificado en el genoma de las cicadas o cigarras periódicas de Norteamérica. En efecto, una noche, cada 13 años, o 17, según la especie, las cicadas brotan por millones de la tierra. Durante varias semanas los machos llenan el aire con sus coros estridentes, melodías seductoras para el oído de sus enamoradas. Tras una fugaz aventura amorosa, la calma regresa a la Tierra. Después de unas semanas, los huevos eclosionan y las ninfas descienden de nuevo a las profundidades de sus sepulcros donde permanecerán enterradas otro número primo de años. Ciclos de 13 y 17 años, que por ser números primos, confieren a estos insectos una extraña ventaja evolutiva, pues la estrategia minimiza las nefastas coincidencias con los ciclos reproductivos de otros depredadores periódicos.

Hueso de Ishango *Cicada periódica de 17 años*

Los primos de la forma 2^q*-1* se llaman *primos de Mersenne*, en honor al monje francés Marin Mersenne, del siglo XVII, contemporáneo del gran Pierre de Fermat. Mersenne conjeturó que para q = 13, 17, 19, 31, 67, 127 y 257, (2^q-1) era un número primo, aunque se equivocó en los valores 67 y 257, y omitió los exponentes 61, 89 y 107, lo que no obstante es una hazaña asombrosa si tenemos en cuenta que, por ejemplo, $(2^{257}- 1)$ tiene más de 80 cifras, y que la demostración de que $(2^{127}- 1)$ es primo solo se vino a conocer en 1876, y fue dada por el matemático Francois E. A. Lucas.

Encontrar nuevos números de Mersenne ocupa hoy en día a decenas de miles de aficionados que colaboran poniendo a su disposición sus computadores en un proyecto mundial conocido por las siglas GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search). El más grande de todos los números primos conocido hasta enero de 2013 es el número de Mersenne $2^{57885161} - 1$, un monstruo con 17.425.170 cifras. Como somos bien aficionados a los récords, digamos que el máximo primo conocido hasta noviembre de 2012 era nada menos que $2^{57885161} - 1$, un peso pesado que se escribe con 17.425.170 dígitos. Nadie sabe hasta el momento *si existen infinitos primos de Mersenne*.

De paso anotemos que números primos como 13 y 17, que se llevan dos unidades de diferencia, se llaman *primos gemelos*. Entre los primeros cien naturales existen varias parejas de gemelos, 2 y 3, 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 41 y 43, … Y ¿dónde terminan? Nadie sabe, ni sabemos aún si el conjunto de los primos gemelos es infinita, proposición conocida con el nombre de *Conjetura de los primos gemelos*.

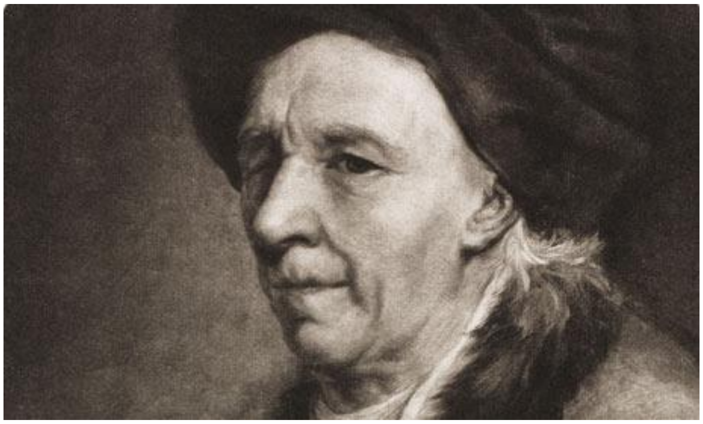
Hay quienes dedican sus vidas a rastrear seres inteligentes en lugares remotos de la galaxia, mientras que otros "extraterrestres", aquí en la Tierra, gastan sus horas explorando los abismos de ese mundo de las ideas que Platón imaginó más allá de su caverna. En ese universo abstracto, los cazadores de números primos buscan día y noche los átomos más grandes de la aritmética, primos, esos gigantes singulares divisibles únicamente por sí mismos y por la unidad.

En la universidad de Göttingen existe una verdadera rareza: un manuscrito con la construcción con regla y compás de un polígono regular de 65.537 lados. Gauss demostró que para que un polígono regular de n lados sea construible con regla y compás, n tiene que ser un entero de la forma $n = 2^m \times p_1 \times \ldots \times p_r$, donde cada p_i es un número *primo de Fermat*, es decir, un número primo de la forma $\boldsymbol{p_i = 2^Q+1}$, donde $\boldsymbol{Q = 2^k}$, y k es un entero mayor o igual a cero. Fermat conjeturó que esta fórmula siempre produce números primos. Cuando k toma los valores 0, 1, 2, 3 y 4 se obtienen los primos 3, 5, 17, 257 y 65.537. Sin embargo, un siglo más tarde, Euler demostró que al llegar a $k = 5$ se obtenía el número 4.294.967.297, que no es primo, ya que admite el factor 641. Hasta el día de hoy *nadie sabe si existe algún primo de Fermat mayor que 65.537*, aunque se cree que probablemente no exista ninguno.

Al ascender un poco por la escalera de los naturales, pronto nos topamos con el 6, un *número perfecto* en el sentido de los griegos, esto es, un número que es igual a la suma de todos sus divisores menores que él, en este caso 1, 2 y 3, que al sumarlos se obtiene 6. Y, además, es el menor de la familia de los perfectos. San Agustín decía: "Seis es un número que es perfecto en sí mismo. Dios creó todas las cosas en seis días porque ese número es perfecto". Los perfectos son rarezas matemáticas, baste decir que entre los primeros 30 millones de números naturales sólo existen cuatro números perfectos.

Euclides ya había demostrado en sus *Elementos* que si q y (2^q-1) son primos entonces $2^{q-1} \times (2^q-1)$ es un número perfecto. En un artículo póstumo, Euler demostró la afirmación recíproca: que todo número perfecto par es necesariamente de la forma anterior. Esta fórmula nos permite construir fácilmente números perfectos. Si $q = 2$, $2^2-1 = 3$ es primo y por tanto $2^1 \times (2^2-1) = 2 \times 3 = 6$ es perfecto. Si damos a q los valores 3 y 5, los números $2^3 - 1 = 7$, $2^5 - 1 = 31$ son números primos y en consecuencia $2^2 \times (2^3- 1) = 28$ y $2^4 \times (2^5-1) = 16 \times 31 = 496$ son perfectos. Euler, en 1752, encontró el siguiente número perfecto: $2^{30} \times (2^{31} - 1)$. También es perfecto $2^{60}\times (2^{61} - 1)$. Y el mayor perfecto conocido hasta el 2009 era el monstruo $2^{43112608} \times (2^{43112609}-1)$.

Los matemáticos creen que el *número de números perfectos es infinito*, pero nadie ha sido capaz de probarlo. Y no se conocen números *perfectos impares*, teorema cuya demostración ha sido un desafío, no superado aún, propuesto desde la época de los griegos antiguos, por lo que se constituye en el problema abierto más antiguo de las matemáticas. Pero sí se sabe que de existir alguno, el menor de ellos tendría que ser ¡mayor que $10^{\mathbf{300}}$!.

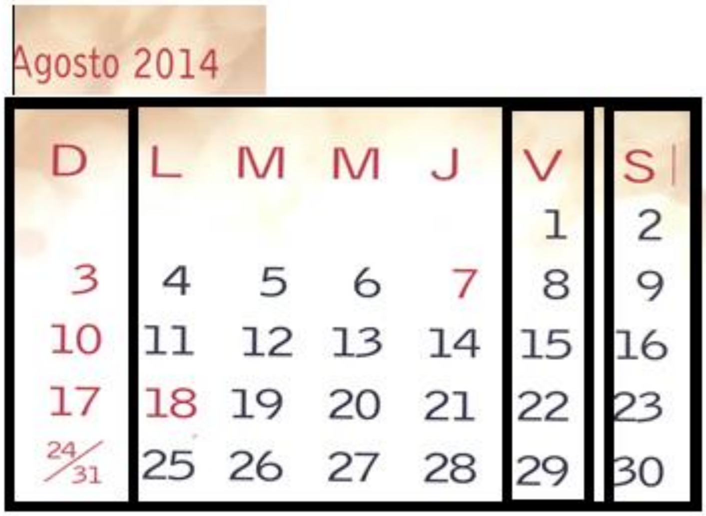


Leonhard Euler

Dos *números amigos* son dos enteros positivos *a* y *b* tales que la suma de los divisores propios de uno es igual al otro, y viceversa, es decir ∑d(*a*)=*b* y ∑d(*b*)=*a*, donde ∑d(*n*) es igual a la suma de los divisores de *n*, sin incluir a *n* (la unidad se considera divisor propio, pero no lo es el mismo número). Los números 220 y 284 son *amigos*, ya que los divisores propios de 220 son 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 y 110, que suman 284; y los divisores propios de 284 son 1, 2, 4, 71 y 142, que suman 220. Fermat descubrió esta pareja: 17.296 y 18.416. Y quién lo creyera, el famoso violinista y compositor Nicolo Paganini descubrió a los 16 años la pareja 1.184 y 1.210.

Números *narcisistas* son aquellos que son iguales a la suma de los factoriales de sus cifras. Por ejemplo, son narcisistas 145 = 1!+4!+5! y 40.585 = 4! +0! +5! + 8! +5! Un entero de N dígitos se llama *cíclico* si al multiplicarlo por otro número entre 1 y N se obtienen los mismos N dígitos en el mismo orden cíclico. El número cíclico más pequeño es 142.857. En efecto, si lo multiplicamos por 2, el resultado es 285.714, que contiene los mismos seis dígitos pero el 1 y el 4 se han trasladado a la cola. Si lo multiplicamos por 3, el resultado es 428.571, y el 1 se ha trasladado a la parte final. Algo similar ocurre si lo multiplicamos por 4, 5 y 6. En el siglo XIX, un inglés descubrió un número cíclico formado por 17388 cifras. Pura ociosidad de la inteligencia humana.

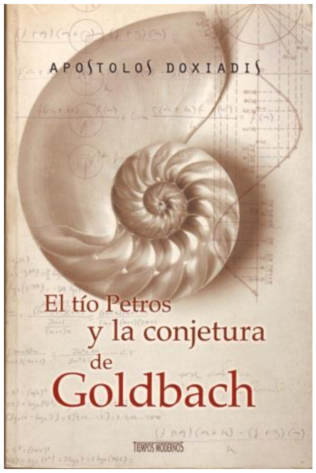
Existen muchas curiosidades numéricas, sin mayor importancia en las matemáticas, pero divertidas. Son más bien pruebas de ingenio aritmético. Veamos algunas. El número 199 es un primo *invertible,* entendiéndose por esto que si se gira 180° se forma otro primo, 661; además, es *permutable*, pues 199, 919 y 991 son primos también. Los días de un año son 365, pero $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. Los días de un año son 365, pero $365 = 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$. El número 12.345.678.987.654.321, formado por los dígitos del 1 al 9 en orden ascendente y luego descendente, se obtiene de esta sorprendente manera: 111.111.111 x 111.111.111. El número 37 goza de esta curiosa propiedad: 37 ×3 = 111; 37 × 6 = 222; 37× 9= 333; 37 × 12 = 444; 37 × 15 = 555; 37 × 18= 666; 37 × 21 = 777; 37 × 24= 888 y 37 × 27 = 999. Y estas curiosidades se refieren a la raíces cuadradas: √2025 es 45, pero 45 = 20+25; √3025 = 55, pero 55 = 30 + 25 y √9801 = 99, pero 99 = 98 + 01. Agosto de 2014 es un mes bien particular: posee cinco viernes, cinco sábados y cinco domingos. Esto sucede sólo una vez cada 823 años. Los chinos lo llaman "bolsas llenas de plata". Dizque al enviar este mensaje a tus amigos, en cuatro días el dinero no te será indiferente. Basado en el chino Feng Shui. El que no transmite el mensaje puede volverse pobre. Si César Augusto lo hubiese sabido, bien orgulloso se hubiese sentido, pues el nombre del mes se estableció para rendirle homenaje, y además se lo cambió de 30 a 31 días, pues no podía ser menor que Julio, dedicado a Julio César.

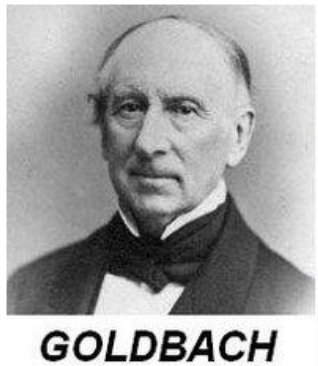


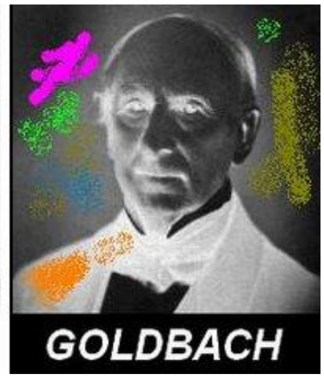
2.2 Desafíos matemáticos

Muchas conjeturas tratan sobre si existen infinitos números primos de una determinada forma. Así, se conjetura que hay infinitos números primos de Fibonacci, e infinitos Primos de Mersenne, pero sólo un número finito de primos de Fermat. No se sabe si hay infinitos primos de Euclides. En 1912, Landau estableció en el Quinto congreso Internacional de Matemáticas de Cambridge una lista de cuatro de los problemas ya mencionados sobre números primos, que se conocen como los *Problemas de Landau*. Ninguno de ellos está resuelto hasta la fecha. Se trata de la conjetura de Goldbach, la de los números primos gemelos, la de Legendre y la de los primos de la forma $n^2 + 1$.

Un desafío matemático terrible es la llamada *conjetura de Golbach*, la cual afirma que todo número par mayor que 2 se puede descomponer en la suma de dos números primos: 4 = 2+2; 6 = 3 + 3; 8 = 2+5; 10 = 5+5… Una simpleza su enunciado, pero uno de los enigmas de más difícil solución, aún pendiente. Es tan famosa que ha dado lugar a una novela: *El tío Petros y la conjetura de Golbach*.



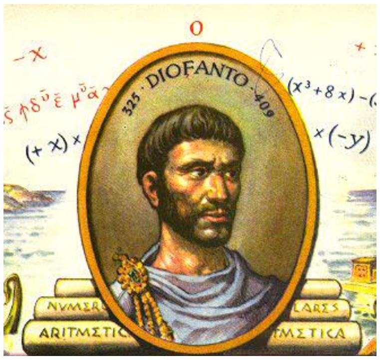




Carátula del libro *El tío Petros y la conjetura de Golbach*

Como lo saben algunos bachilleres, el teorema de Pitágoras asegura que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los dos catetos. Ahora bien, cuando se dispone de tres números naturales tales que la suma de los cuadrados de los dos más pequeños es igual al cuadrado del mayor, al trío se lo llama *terna pitagórica*. La más pequeña está formada por 3, 4 y 5, pero hay infinitas. Y se conocen desde tiempos remotos: una tableta del período babilónico contiene quince ternas.

Un día de 1630, el abogado y matemático aficionado Pierre de Fermat estaba leyendo una traducción al latín de la *Arithmetica*, obra del matemático Diophanto de Alejandría. Una sección del libro estaba dedicada al teorema de Pitágoras. Concentrado en el asunto, Fermat se preguntó si se podría extender la idea de las ternas pitagóricas a otras potencias mayores que dos. E intentó demostrar que no era posible tal extensión, y supuestamente lo logró. Satisfecho, escribió en el margen del libro una frase que llegaría a ser la más famosa de toda la historia de las matemáticas: “Resulta imposible separar un cubo en dos cubos, una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o en general, cualquier potencia mayor que la segunda en dos potencias semejantes. He hallado una demostración verdaderamente maravillosa de esto, pero el margen del libro es muy angosto para contenerla”.




DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

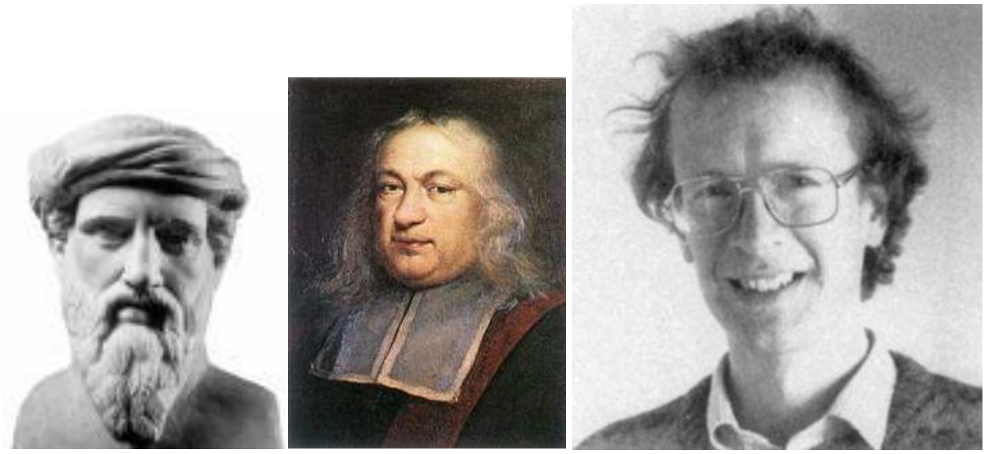
TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

Diophanto y su Arithmetica

Después de la muerte de Fermat se encontró la frase, pero no la demostración, lo que significó un desafío abierto para las mejores mentes matemáticas del mundo, y para legiones de aficionados, deseosos de tener el honor de resolver el enigma involuntario planteado por el célebre abogado matemático, desafío conocido mucho más tarde como el *último teorema de Fermat*. El teorema dice que la ecuación $a^n + b^n = c^n$, con n entero y mayor que 2, no admite solución en enteros.

Se duda seriamente de que Fermat tuviera la respuesta, pues las herramientas matemáticas necesarias no estuvieron disponibles hasta casi terminar el siglo XX, y porque de haber encontrado una solución, tuvo que ser de extrema ingeniosidad, pues en más de tres siglos ningún matemático había podido, con los conocimientos disponibles por Fermat, llegar a la solución. Y de haber sido muy ingeniosa, Fermat no la habría dejado en el olvido; sin embargo, en su extensa correspondencia con los colegas nunca volvió a mencionar la supuesta prueba.

Más de tres siglos de intentos frustrados y nadie fue capaz de hallar la demostración. Pero… le llegó el día. Un inglés, Andrew Wiles, en la década de 1990, encontró la elusiva prueba. Tras muchos años de trabajo, y después de haber presentado ante sus colegas una prueba incompleta, con la ayuda del colega Richard Taylor culminó su trabajo: “Comenzando septiembre, estaba sentado en mi escritorio cuando, de repente, de una manera totalmente inesperada, tuve una increíble revelación. Fue el momento más importante de mi vida de trabajo”, contó más tarde Wiles. Esta revelación es sin duda uno de los más triunfos más grandes de la matemática del siglo XX. Y de la inteligencia humana en toda su historia.


Una terna pitagórica notable: Pitágoras, Fermat y Wiles.

2.3 Juegos con números

Hay variedad de juegos que se pueden realizar con los números, entre ellos, sencillas adivinanzas para divertir a los amigos en la cafetería. Trucos que, en general, se derivan de las propiedades de nuestro sistema de numeración en base diez.

El número 6174 se llama la *constante de Kaprekar*, en honor a su descubridor, un genial profesor hindú. De paso y como simple curiosidad, digamos que 6.174 es un número muy especial pues es divisible por la suma de sus dígitos; en efecto, 6.174/(6+1+7+4) = 343. Pues bien, esta constante nos permite realizar una sencilla prueba de adivinación.


Dattatreya Ramachandra Kaprekar

Para comenzar la demostración, escribimos en una hoja de papel y al escondido esta constante, 6.174, luego doblamos el papel para que los presentes no lo puedan leer. En este momento le pedimos al amigo escogido que escriba en otra hoja de papel un número de cuatro dígitos, no todos iguales (puede ser a espaldas de nosotros o a la vista, pues el futuro está predicho ya en el papel que tenemos doblado). Supongamos, por ejemplo, que escribe 2.738. Ahora debe ordenar los cuatro dígitos de mayor a menor, lo que lo lleva a 8.732, y luego de menor a mayor, para obtener 2.378. En este momento resta del mayor el menor (8.732-2.378), y obtiene 6.354. Le pedimos ahora que repita el procedimiento pero partiendo del número obtenido, 6.354, es decir: 6.543-3.456 = 3.087; volvemos a pedirle que haga la operación, pero sobre el resultado anterior, esto es, sobre 3.087, lo que lo lleva a 8.352. Repite la operación de nuevo, 8.532-2.358, y obtiene 6.174, ¡Eureka!, es decir, ¡Kaprekar! En este momento mostramos orgullosos el número que habíamos escrito en la hoja de papel y ¡adivinamos! La verdad matemática es que en ocho pasos a lo sumo se llegará indefectiblemente a 6.174, nuestro número mágico. *Nadie hasta ahora conoce la razón de tan extraña regularidad*. Más aún, si se repite el conjunto de operaciones de ordenar en forma creciente y decreciente y restar, pero ahora partiendo del número 6.174, ahí se permanecerá por una eternidad. Pruébelo el lector.

Esta otra demostración de "poderes paranormales" es bien sencilla. Comenzamos por escribir en una hoja de papel el número misterioso 1.089, la doblamos antes de que alguien la pueda leer y dejamos la hoja doblada a la vista de los presentes. Pedimos ahora a un voluntario que escoja un número de tres cifras tal que el primer dígito sea diferente del último, por ejemplo, 853; luego, le pedimos que invierta el orden de los tres dígitos y reste del mayor el menor: 853 – 358 = 495. En este punto tenemos dos alternativas: como en el centro aparece *siempre* el 9, y los dos extremos *siempre* suman 9, podríamos, por ejemplo, pedirle a nuestra "víctima" que nos dijera en que número terminó la operación que acaba de hacer, 5 en el caso presente, de lo cual obtenemos la diferencia a 9, esto es, 4, y armamos el número 495. La otra alternativa, más interesante aún, es pedirle que el resultado obtenido, en este caso 495, lo sume con el que se obtiene al invertir el orden de sus cifras, 594, y… llega indefectiblemente a 1.089. Es el momento de desdoblar la hoja en que habíamos escrito el 1.089 y, ¡adivinamos!

Existe una sencilla demostración de cálculo mental: elevar al cuadrado un número de dos dígitos que comience o termine en 5. Por ejemplo, para calcular mentalmente el cuadrado de 35, multiplicamos el 3 por el número que le se sigue, 4, para obtener 12. Finalmente, armamos un número de cuatro dígitos con el 12 al comienzo y, siempre, el 25 en los dos últimos lugares, lo que nos da 1.225. Veámoslo en forma general, para el número a5, usando la descomposición en base 10:

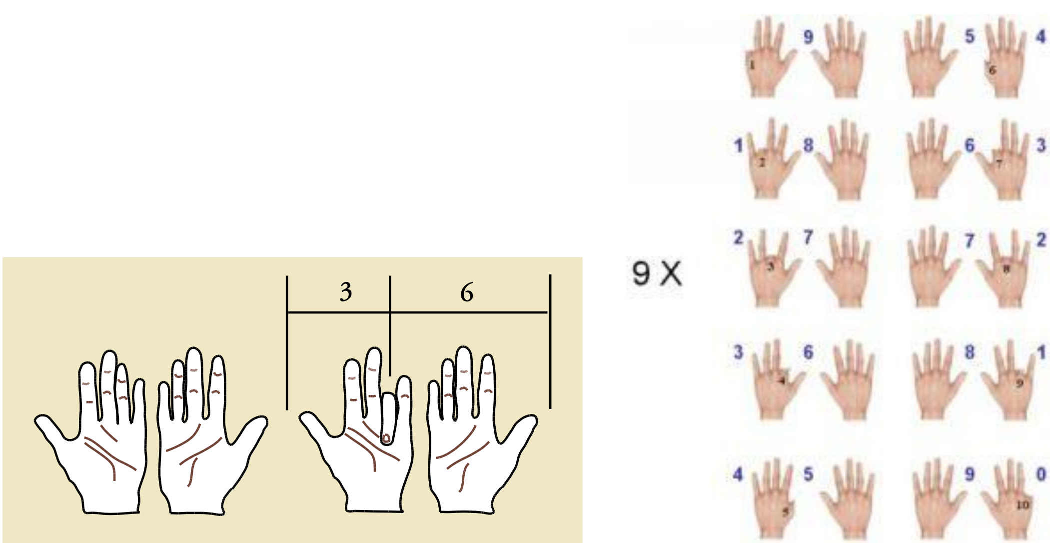
$$(\underline{a5})^2 = (10a + 5)^2 = 100a^2 + 100a + 25 = a(a+1)100+25$$

Si ahora queremos el cuadrado de un número que comienza por 5, digamos 56, formamos los dos primeros dígitos del resultado sumándole 25 al segundo dígito, 6, para obtener 31, y los dos últimos los obtenemos elevando al cuadrado la última cifra, 6 en nuestro caso, para obtener 36. El resultado será 3136. En forma general,

$$(\underline{5a})^2 = (5x10 + a)^2 = 25x100 + 100a + a^2 = (25+a)100 + a^2$$

2.4 Calculadora digital primitiva

Si se ponen las manos con las palmas vueltas hacia arriba (véase figura siguiente, parte izquierda), y se numeran mentalmente los dedos, comenzando por el pulgar izquierdo y terminando en el pulgar derecho, puede obtenerse de allí una curiosa calculadora manual que nos permite recordar la tabla del nueve, es decir, multiplicar cualquier número de un dígito por 9 (útil para los niños que están aprendiendo a multiplicar). Si, por ejemplo, se desea multiplicar 4 por 9, simplemente se dobla hacia adentro el cuarto dedo contados de izquierda a derecha, en este caso el anular izquierdo (véase parte derecha de la figura) y se lee el resultado así: con el número de dedos que anteceden al que se encuentra doblado se determina el primer digito, 3 en nuestro caso, y con los que le siguen, el segundo dígito, 6. La respuesta es entonces 36.



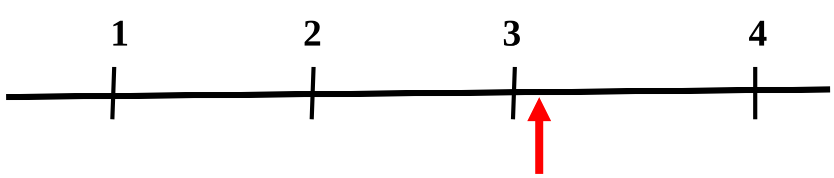
Izquierda, calculadora digital para multiplicar por nueve, dispuesta para el caso $4 \times 9 = 36$; derecha, la tabla del 9 completa.

¿Cómo se puede explicar esta propiedad de las manos, o se debe a una simple casualidad? No es casualidad, a no ser que consideremos el hecho de poseer diez dedos una casualidad evolutiva, como tal vez lo sea. Al multiplicar por 9 un número entre 2 y 9, el resultado será siempre un número entre 18 y 81, y la suma de sus cifras será siempre 9, justo el número de dedos no doblados al utilizar las manos como calculadora. Asimismo, el primer dígito del resultado es siempre una unidad menor que el factor elegido, como es fácil comprobarlo. En efecto, $4 \times 9 = 36$; $5 \times 9 = 45$; $8 \times 9 = 72$, etcétera. Y esto es justamente lo que ocurre con los dedos de las manos dispuestos como se indicó al principio. Si doblamos el cuarto dedo, demos por caso, quedan a su izquierda 3, como es lo requerido y, dado que son 9 dedos los no doblados, a la derecha quedará el complemento a 9 del primer factor, justo 6, el segundo dígito del resultado.

2.5 Números reales distinguidos

Entre los números irracionales, ninguno ha recibido más atención que **π,** 3,141592…, que se define como el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro. La búsqueda de sus cifras decimales ha sido una competencia abierta que empezó en la época de los faraones con los dos primeros dígitos, los griegos antiguos lo ampliaron a cuatro, hoy se han sobrepasado los diez billones y apenas estamos comenzando. Porque nunca terminaremos: conocer a π es una empresa sobrehumana: tiene principio, pero, como todo lo irracional, no tiene fin.

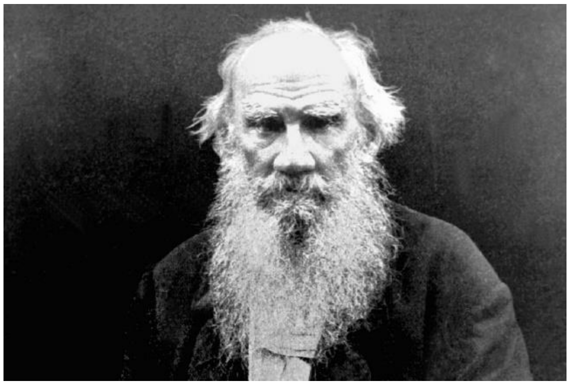
La fascinación que suscita ha hecho que muchos se hayan ocupado de él. Se han dicho cosas serias y profundas, también banales. Por ejemplo, existe el día de π: 22 de julio (22/7= 3,1428…) para unos; 14 de marzo (3/14), para otros. Como hecho curioso, la última fecha corresponde al cumpleaños de Einstein. Y otra curiosidad sin importancia: en Argentina, el número telefónico móvil para emergencias es ∗31416. ¡Inolvidable, che!



Ubicación de ∏= 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510…

El domingo 16 de octubre de 2011 se completó la comprobación del nuevo récord de cifras de Pi: diez billones. ¡Inolvidable!

Otro famoso es el *número de Euler*, representado por la letra **e**, en honor al matemático Leonhard Euler. Su valor es 2,7 1828 1828… Por su forma especial, el matemático Gregory Chudnovsky lo escribía de manera nemotécnica: 2,7 Tolstoi Tolstoi…", pues el escritor ruso nació en 1828. En 2010 se calculó hasta la cifra mil millones. Digamos que **e** aparece de manera natural al calcular el valor acumulado en *n* periodos de un peso puesto a un interés 1/*n*, pues dicho valor es $(1+1/n)^n$, y cuando crecemos el valor de *n* de manera indefinida nos vamos acercando a **e**. Se usa como base para los logaritmos naturales, aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria, curva que forman las líneas de transmisión eléctrica. Y existe una curiosidad estética: muchos consideran que la ecuación más bonita de toda la matemática es $e^{i\pi} + 1 = 0$, que relaciona las dos enteros más comunes, el 1 y el 0, con la unidad imaginaria **i**, los números **e** y π, y los símbolos de suma e igualdad. Más no se puede pedir.



León Tolstoi

No menos notable que los anteriores es la llamada *razón áurea o divina*, representada por la letra griega φ, equivalente a nuestra *F*, en honor al escultor Fidias, quien supuestamente la usaba con frecuencia en sus esculturas, y que vale $(1+\sqrt{5})/2=$ 1,618033988749… La razón áurea se obtiene al tratar de partir un segmento de recta en dos partes de distinto tamaño de tal modo que la relación entre la pequeña y la grande sea igual a la relación entre la grande y todo el segmento.

El número áureo aparece con frecuencia en la naturaleza: el caparazón del nautilo, los girasoles, la distancia entre el ombligo y la planta de los pies de una persona respecto a su altura… Asimismo, se le atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. La razón aúrea fue utilizada por Leonardo, por Durero y por Dalí. El Partenón, por ejemplo, fue construido respetando la razón áurea en las dimensiones de su fachada. Y si ahora dividimos el largo por el ancho de nuestra cédula de ciudadanía, o de nuestra tarjeta de crédito, aparece algo como 1,6. Otro número irracional famoso es *la Relación Dorada*, de gran importancia en la biología es $(1+\sqrt{5})/2=$ 0,618033988749 = φ -1.

El Partenón, en Atenas.

Tiene φ propiedades curiosas: si buscamos su inverso, 1/φ, obtenemos 0,6180…, igual al mismo φ restándole una unidad, y si lo elevamos al cuadrado obtenemos el mismo número más una unidad. En 2008 se conocieron cien mil millones de sus cifras decimales. ¡Para qué? Para lo mismo que se baten las marcas atléticas: por placer, por ir más allá…

2.6 Números monstruosos

Dentro de los infinitos números naturales podríamos preguntarnos, cuál es el mayor de los que poseen un nombre propio. Los aficionados a las curiosidades los conocen, y son dos: el benjamín, un monstruo de cien cifras, se lo llama *gúgol*, y se escribe con un 1 seguido de cien ceros. Y el oro es para el *gugolplex*, un superpesado que se escribe con un 1 seguido de ¡un gúgol de ceros! Y aunque parezca mentira, hoy se conoce un divisor de (gugolplex + 1), y se sabe que posee 36 cifras. Creamos por pura fe.

Cabe añadir que ninguno de estos superpesados nos sirve en el diario vivir, pues según cálculos efectuados por los físicos, el llamado *Número del universo* o número de partículas de nuestro mundo, 10^{80} (un uno seguido de 80 ceros), es un enano invisible al lado de un gúgol, y menos que la pura nada si se lo pone al lado de un gugolplex.

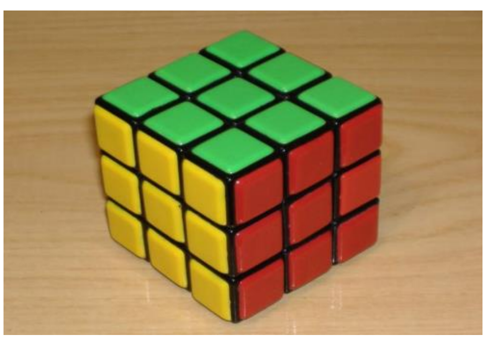
En el mundo vivo existen enanos y gigantes, microorganismos al lado de secuoyas y ballenas. En el reino de la aritmética ocurre algo igual: números muy grandes al lado de otros muy pequeños, extremos que se salen de nuestra comprensión. Un nanosegundo es algo tan fugaz que nuestra mente no puede concebirlo, pero es la unidad apropiada para entender el tiempo que tardan ciertas operaciones en un computador digital. Y un virus puede medir hasta 30 nanómetros.

La astronomía nos tiene acostumbrados a cifras gigantescas, por eso han cambiado las unidades a fin de facilitar el manejo de las distancias. Para medir el universo han recurrido a una vara de medida curiosa, el *año luz;* esto es, el recorrido de un rayo de luz en un año o, equivalentemente, 9,46 billones de kilómetros, de tal manera que el diámetro del universo observable, según el sabio Google, es de unos 93.000 millones de años luz. Y si queremos hablar de pesos descomunales, basta tratar de levantar una enana blanca, una estrella de la cual una brizna del tamaño de un cubo de azúcar puede pesar y diez toneladas.

Para hablar del origen del cosmos debemos recurrir a números que se salen por completo de nuestra imaginación. Hace unos 14 mil millones de años el universo surgió de un suceso singular y enormemente energético. Después de ese instante, la temperatura era de 10^{32} grados Kelvin, temperatura infernal llamada de *Planck*, y los conceptos de espacio y tiempo que maneja nuestra mente no eran aplicables. Comenzaron la expansión y el enfriamiento, y con el plasma se formaban grumos y remolinos. Una cienmilésima de segundo después de la explosión, la temperatura era de 10 billones de grados Kelvin, lo que permitió que los quarks se agruparan y formaran protones y neutrones. Una centésima de segundo más tarde, menos que un parpadeo, comenzaron a formarse los primeros núcleos atómicos. Y mil millones de años después emergieron las galaxias, las estrellas y los planetas. ¿Cómo lo sabemos? Por fe: confiamos en los físicos, y estos en los modelos matemáticos.

Hablando ahora de nuestra experiencia cotidiana, existe un número descomunal, aunque desapercibido por nuestros sentidos: el número de Avogadro. En efecto, Amadeo Avogadro, químico y físico italiano, descubrió que en cualquier *mol* (peso molecular en gramos) de una sustancia existe siempre el mismo número monstruoso de moléculas, un total de ¡602.000 trillones! ¿Quién los ha contado? Nadie, pero no tenemos más que creer ciegamente en esa verdad. Un comentarista insiste en que esa opinión es profundamente paradójica y sorprendente, una afrenta al sentido común, en lugar de ser una extensión de él. Por ejemplo, cada vez que usted bebe un vaso de agua, 180 ml, o 10 moles, estamos introduciendo al organismo un poco más de ¡6 millones de trillones de moléculas de agua! En consecuencia, probablemente estamos ingiriendo al menos una molécula que pasó por la vejiga de Aristóteles. Este es un resultado tentador y sorprendente, pero en realidad es obtenido por medio de sentido común organizado, pues hay más moléculas en un vaso de agua que vasos de agua en el agua del mar. Puesto de otro modo: si se tomara un vaso de agua, se vertiera en el mar y luego, varios siglos después, se llenara con agua de mar un vaso igual al primero, entonces, contra todo lo que el sentido común nos diga, en el segundo vaso habrá en promedio cerca de 4 moléculas de agua de aquellas que siglos atrás ocuparon el primer vaso. Increíble, pero muy probable.

El Cubo de Rubik admite $(1/2) \times 8! \times 3^7 \times 12! \times 2^{11} \approx 4{,}3 \times 10^{19}$ configuraciones distintas. Realizando una jugada cada segundo se necesitaría un tiempo equivalente a 430 veces la edad del universo (que es del orden de 10^{17} segundos) para lograr todas sus posibles configuraciones.



Cubo de Rubik

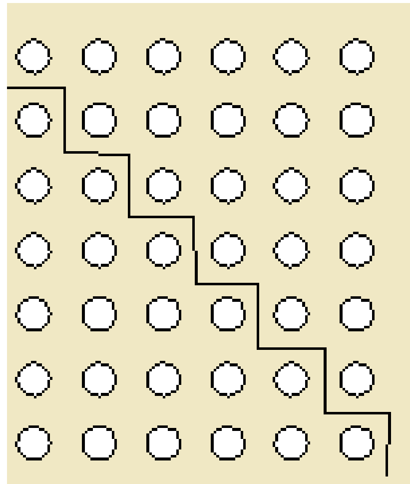
He aquí algunos enteros gigantes y enanos notables: el mayor número en la religión budista ese llama *asankhyeya* y es equivalente a 10^{140}. Ahora bien, en el mundo ocioso de la fantasía existen los mayores gigantes que la imaginación humana pueda concebir. Por ejemplo, el número máximo de sonetos posibles que se podrían componer en español es 10^{415}. Decía alguien que es un número tan grande que uno se queda sin adjetivos. Que ni la totalidad del cosmos serviría de inspiración. El número cuenta las distintas alternativas que hay en un idioma con unas 85.000 palabras en su diccionario (como el español) para ordenar seis de ellas en cada uno de los 14 versos. Quevedo quizá no llegara a saberlo, pero sus sonetos ya estaban escritos en el mundo de lo realizable pero aún no realizado.

Se pueden escribir $10^{354.918}$ novelas cortas, de 200 páginas cada una, con 360 palabras por página. Nos deja sin aliento la magnitud de este número. Por otro lado, alguien calculaba que la probabilidad de que un chimpancé tecleando al azar terminara escribiendo el *Hamlet* de Shakespeare sería del orden de 1 en $10^{40.000}$, algo que supera con holgura la categoría de los milagros. Lo que prueba que esa no es una tarea para monos. Y se calcula que el número de posibles partidas de ajedrez debe ser algo parecido a 10^P, donde P es igual a 10^{705}.

La llamada velocidad de Planck es de un quantum de espacio sobre un quantum de tiempo. Vale la pena mencionar en este punto que, aunque existen buenas razones físicas para pensar que no se puede medir intervalos de tiempo tan pequeños como queramos ni distancias inferiores a cierto valor mínimo, tanto la física relativista como la mecánica cuántica y la física moderna adoptan como modelos del mundo espacios finito e infinito dimensionales, construidos sobre los números reales, es decir, sobre el continuo matemático, y hasta donde se conoce, la discusión sobre la divisibilidad del tiempo y el espacio no parece importar demasiado. Posiblemente esto se deba al carácter metafísico de estos problemas y al hecho de que resulta imposible descartar o preferir un modelo sobre otro, basándose en hechos experimentales. Sin embargo, los físicos han conjeturado que posiblemente no tenga sentido hablar de intervalos espaciales menores que la *longitud de Planck*, 10^{-35} metros, ni tiempos menores que el llamado *tiempo de Planck*, 10^{-43} segundos. Anotemos que un móvil que recorriera un quantum de espacio en un quantum de tiempo viajaría a una velocidad, que podríamos llamar de *velocidad de Planck,* de 10^8 metros por segundos, lo que significa un tercio de la velocidad de la luz, aproximadamente.

2.7 Sucesiones de números naturales

Existen maneras gráficas de hallar fórmulas para sumar ciertas sucesiones notables de números naturales. Podemos, por ejemplo, hallar un representación gráfica que nos lleve a la suma de los naturales de 1 a n, o a los n primeros impares, o a los n primeros cubos de los naturales. Existen varias formas de llegar a una fórmula que nos permita sumar progresiones aritméticas. En la figura siguiente, basta contar los pequeños círculos para deducir la fórmula 1 + 2 + 3 +4 + 5 + 6 = 6 x 7 /2 = 21. En forma general, 1 +2 + 3+...+ $n = n^2 /2 + n/2 = n(n + 1)/2$. Esto que acabamos de hacer no es más ni menos que una elegante “mostración”, o una demostración sin rigor pero que nos da una fórmula correcta.

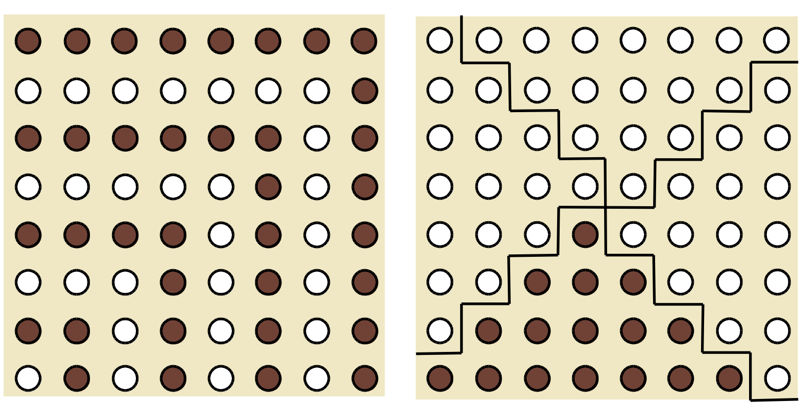


Suma gráfica de los naturales entre 1 y 6

Suma de impares: Probar que la suma de los k primeros impares está dada por la fórmula:
$S(k) = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2k\text{-}1) = k^2$
Solución
Apliquemos el principio de inducción: 1. Para $k = 1$ es trivial. 2. Supongamos que es válida para k y probemos que los es para $(k+1)$:
Sea $1 + 3 + 5 + 7 +... + (2k\text{-}1) = k^2$
Sumemos en ambos miembros el término siguiente, $(2k+1)$:
$1+3+5+…+ (2k\text{-}1) + (2k+1)= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$
Luego para $(k+1)$ se cumple también la igualdad.

Podemos obtener gráficamente la siguiente fórmula para sumar los primero n números impares: $I = 1+ 3 + 5 + 7 +…+ (2n\text{-}1) = n^2$. No se trata de una demostración rigurosa; más bien se trata de otra “mostración”.

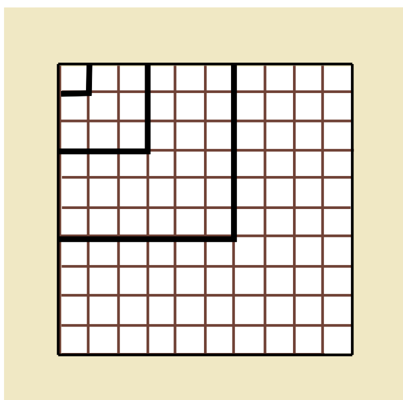
En el dibujo siguiente se muestra la suma de los 8 primeros impares, es decir, del 1 al 15. Como se forma con ellos un cuadrado, para contarlos basta elevar al cuadrado el número de elementos que aparecen en cada uno de sus lados, 8 en nuestro caso, de lo que resulta 64, de acuerdo con la fórmula pedida, en la que n = 8. A partir de aquí es fácil generalizar el procedimiento y justificar --no probar-- la fórmula dada.



Izquierda, suma gráfica de impares entre 1 y 15 = 8^2; derecha: suma gráfica de impares entre 1 y 7 = $8^2/4$ = 16.

Usando el segundo dibujo se puede obtener la suma de los cuatro primeros impares, esto es, del 1 al 7. Basta para ello sumarle una unidad al último número, elevar el resultado al cuadrado y dividir entre 4. Entonces, suma = 8x8/4 = 16, lo que está de acuerdo con la fórmula n^2, pues n, el número de sumandos, es en este caso 4.

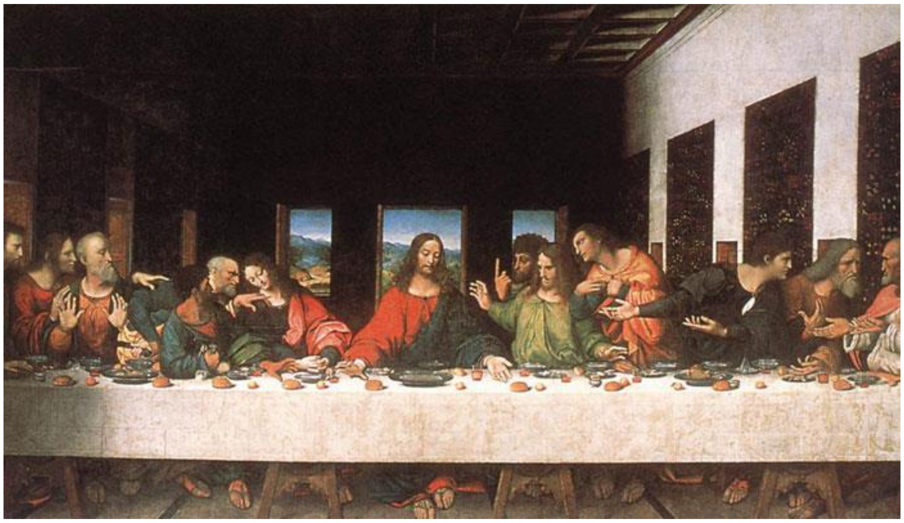
Para sumar los cubos de los n primeros números naturales basta que "leamos" la figura siguiente. No es riguroso, pero usando el principio de inducción justificamos fácilmente la fórmula $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+...+n)^2$. Por ejemplo, para sumar los primeros cuatro cubos basta sumar los números, 1 + 2 + 3 + 4= 10, y elevar al cuadrado su suma, para obtener 10^2 = 100.



Suma gráfica de los cubos de los 4 primeros números naturales

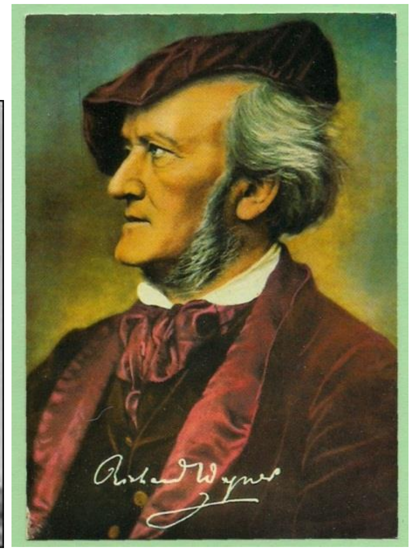
2.8 Fobias numéricas

El número 13, primo, es sinónimo de mala suerte, de desgracias, de negras expectativas, aun para gente que se considera civilizada, y hasta hay personas con fobia a dicho número (*triscaidecafobia*), que se ha relacionado con el hecho de que hubo 13 personas en la *Última Cena* de Jesús, y que este último fue ejecutado poco después.



"La Última Cena", famosa obra de Leonardo da Vinci

James Joyce nunca tomaba decisiones importantes en los días 13 de cada mes. El destino correspondió a sus presagios: su madre murió un 13 de agosto; él, un 13 de enero. Hay casos que nos invitan a pensar que hay algo raro en el 13, como lo que le pasó al músico alemán Richard Wagner: nació en un año acabado en 13; la suma de las letras de su nombre y apellido son 13; los números de su año de nacimiento, 1813, suman también 13; compuso 13 óperas y falleció un día 13.

James Joyce y Rixchard Wagner

La hexakoeioihexekontahexafobia o miedo al 666, número que aparece en el Apocalipsis, llamado por el apóstol Juan el *número del Anticristo*, ha tenido a los místicos ensimismados en él. El expresidente Ronald Wilson Reagan le temía al Anticristo, con razón, pues sus nombres y apellido tenía cada uno 6 letras, y su dirección en California era 666 St. Cloud Road. Dando muestras de su gran inteligencia la hizo cambiar a 668.

Ronald Reagan

Como entretención, y sin que tenga nada que ver con anticristos, he aquí unas curiosas igualdades matemáticas que involucran el 666:

$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6$ $\quad 666 = 6 + 6 + 6 + 6^3 + 6^3 + 6^3$ $\quad 666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2$

$666 = 6+6+6+6^3+6^3+6^3=666$ $\quad$ Número de Euler: $\Phi(666) = 6\times6\times6$

Esa fobia a los números parece ser una tontería de alcance planetario. El inofensivo 4 tiene también sus víctimas: la *tetrafobia* o fobia al 4. Esta es común en oriente: en China, Japón y Corea es frecuente que los hoteles y los hospitales no tengan cuarto piso. La palabra japonesa *shi* quiere decir muerte, y se pronuncia igual que el 4, así que para remediarlo lo pronuncia algunos como *yon.* En algunos hospitales no existe la habitación número 42 *(shi-nz)* ya que este es un número de muy mal augurio, pudiendo ser su significado la expresión *prepararse para morir*. De la misma forma, algunos hospitales de maternidad no poseen habitación *43 (shi-san)* ya que se pronuncia igual que *parto muerto.*

****

Parte 3: El infinito y los números

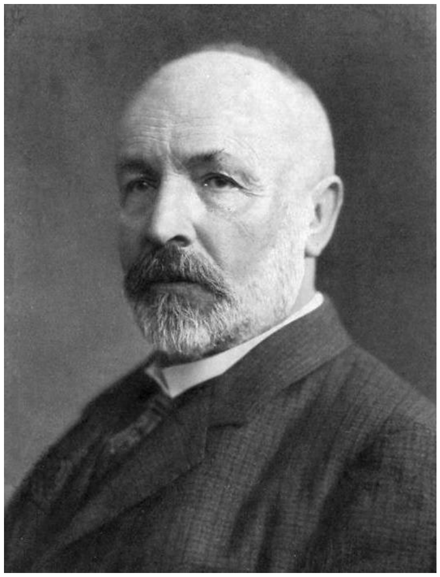
3.1 El infinito

Como una extensión abusiva de lo inmensamente numeroso, el hombre adquirió el concepto de *infinito*. Los pensadores más ilustres en todas las épocas se han ocupado alguna vez de él; sin embargo, a decir verdad, es poco lo que han revelado tan sesudas reflexiones. Por las vías puras del pensamiento, nosotros, seres finitos en todos los aspectos, lo único claro que podemos decir sobre el infinito es que no es finito. Una perogrullada de gran tamaño. En verdad, todo discurso en palabras sobre el infinito, después de eliminar lo trivial, queda reducido al cero absoluto.

Fue sólo al promediar el siglo XIX cuando por fin se hizo claridad en el problema. George Cantor, matemático alemán, gracias a una mente revolucionaria y genial y a un poderoso instrumento matemático (herramienta simbólica), pudo revelar al mundo las características asombrosas del infinito, hasta ese momento un ente elusivo y amorfo.

Cantor demostró que el reino de lo inagotable estaba lleno de riquezas inexploradas. Que la clase de los conjuntos infinitos poseía una estructura bien determinada, en la que había infinitos pequeños, medianos e inmensamente grandes; comparables cuantitativamente unos con otros por medio de una medida, su *número cardinal,* especie de numerosidad asignable a cada conjunto.

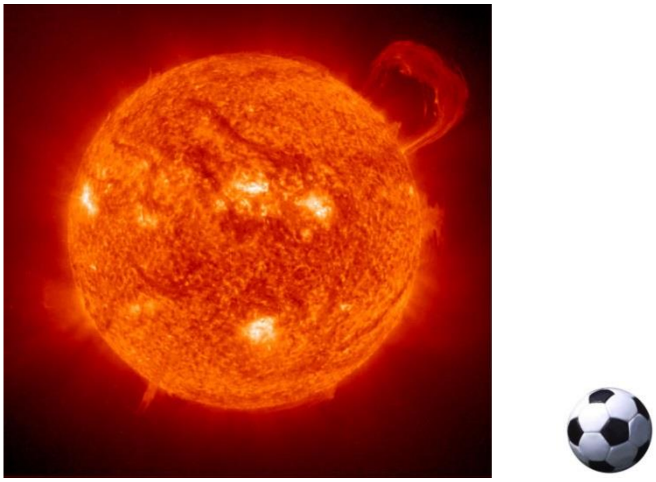
Más aún, Cantor probó que con los infinitos se podía formar una escalera jerárquica que se extendía también hasta el infinito; esto es, que existían infinitos "tan grandes" como los deseáramos. "Cantor y sus terribles dinastías", murmuraba Jorge Luis Borges, alucinado. Descubrió Cantor que había un infinito mínimo, el pequeño de la clase, y que éste coincidía con el cardinal asignado al familiar conjunto de los números enteros, que desinó con $\aleph_0$, (*alef cero*). Esto significaba que no podía existir ningún conjunto infinito que fuese "menos numeroso" que aquél.

 Georg Cantor

Las verdades asombrosas reveladas por Cantor más parecían fantasías que teoremas. Encontró, por ejemplo, que existía el mismo número de elementos (el mismo cardinal) en el conjunto de los enteros, que en el de los enteros pares; esto es, que en cuanto a cantidad, en este caso *cardinalidad*, un subconjunto propio podía ser igual al conjunto principal. Escandaloso resultado: contra toda lógica natural, la parte podía ser igual al todo. Asimismo, Cantor demostró que existían tantos puntos en el interior de un cuadrado como en cada uno de sus lados, y que un cubo poseía tantos puntos en su interior como puntos había en cada una de sus aristas. Verdades, estas, como para Ripley, imposibles de descubrir con el pensamiento puro, pero que sí pudieron avistarse usando la lupa aportada por el formalismo simbólico.

Después del trabajo seminal de Cantor, el infinito perdió muchos de sus misterios, pero no disminuyeron sus encantos. Ya no hubo ningún temor en manejar conjuntos infinitos de naturaleza variada. Sumas de infinitos sumandos (series infinitas) con sumas finitas se volvieron objetos comunes en el mundo de los seres abstractos, y lo mismo ocurrió con los espacios de infinitas dimensiones, monstruos de peso supercompleto, pero manejables por medio de delicados procedimientos finitos.

A los asombrosos resultados de Cantor sobre el infinito se fueron añadiendo muchos más. Resulta imposible no mencionar, por su belleza, *el teorema de Tarsky-Banach.* En términos elementales, el teorema asegura que una esfera cualquiera --podría ser del tamaño del sol-- puede desarmarse en un número finito de piezas y, luego, con ellas, dispuestas en cierto orden bien determinado, y sin deformarlas, sería posible ensamblar otra, pero del tamaño de una pelota de tenis, ¡y no sobran piezas! ¿Magia? Sí, la magia del infinito revelada por el ingenio humano.



El sol y un balón de fútbol

3.2 Las terribles dinastías de Cantor

El estudio iniciado por George Cantor en sus *Fundamentos de la teoría transfinita de conjuntos* es sin duda una de las joyas más valiosas del pensamiento humano. El gran mérito de Cantor consistió en dar por primera vez una definición precisa de la noción de *tamaño de un conjunto infinito* y a la vez establecer claramente una manera de comparar los tamaños, o como técnicamente se lo denomina, de determinar y comparar la *cardinalidad* de los conjuntos infinitos. Este trabajo es un perfecto ejemplo de cómo la introducción de un lenguaje formal preciso resulta ser el elemento clave en la solución de un problema que parecía inatacable. El uso que hacemos en el lenguaje ordinario de palabras como *infinito*, *dimensión, existencia*, y de conceptos como *más grande que*, *superior a*, etcétera, nos lleva con frecuencia a discusiones interminables que suelen empantanarse desde el comienzo debido precisamente a que cada interlocutor les atribuye a estos conceptos un significado de acuerdo con sus gustos e inclinaciones intelectuales, y que por lo general son extensiones laxas del significado que les atribuimos a estas palabras en el lenguaje cotidiano.

Un ejemplo perfecto que ilustra este punto es el argumento que engañó a Zenón, como también a muchos otros grandes pensadores. Se ha afirmado repetidamente que *el todo es mayor que cualquiera de sus partes.* A las palabras *todo, partes* y *mayor* se les atribuye aquí, en un contexto general, su significado intuitivo. Por ejemplo, el hecho de que todos los océanos del mundo contienen más agua que el lago Titicaca pareciera corroborar este principio general, pero si nos preguntáramos si el conjunto de los números naturales {1, 2, 3, 4, ...), es mayor que el conjunto de los números pares, estaríamos tentados a contestar afirmativamente, como resultado de una simple extrapolación de nuestras experiencias. Pero, ¿qué significa ser *más grande que*? Galileo ya había descubierto, con anterioridad a Cantor, un argumento que parecía violar el sentido común: a cada número natural se le puede asociar su doble, que es par, y a cada par se le hace corresponder su mitad, que es un natural, sin que sobren elementos ni en el conjunto de los naturales ni en el de los pares, y sin que un mismo elemento de uno de los conjuntos quede asociado a dos elementos del otro.

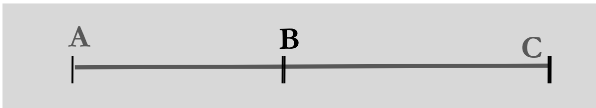
$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \dots & 2n \end{array}$$

Una correspondencia de esta naturaleza, entre conjuntos con un número finito de elementos, sólo es posible si ambos conjuntos tienen el mismo número de elementos. Si, por ejemplo, en una fiesta todos los invitados bailan en parejas (suponemos que cada pareja está formada por un hombre y una mujer), y si en un determinado momento todos los asistentes se encuentran bailando, entonces podremos concluir que hay igual número de hombres que de mujeres. La perfecta correspondencia entre números naturales y pares pudo haber conducido a Galileo al esclarecimiento de las propiedades del infinito; sin embargo, lo rechazó como repugnante a la intuición, y fueron tan poderosos los mandatos del sentido común, que hasta mediados del siglo XIX se consideró que el concepto de infinito debía evitarse so pena de entrar en contradicciones. ¡Un pez bien gordo se le escapó al gran Galileo!

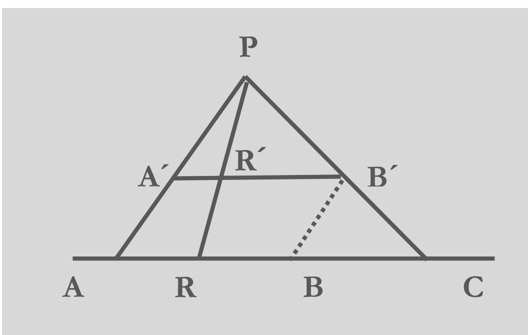
Si los elementos de dos conjuntos *A* y *B* pueden ponerse en *correspondencia biunívoca*, es decir, si se puede establecer una correspondencia tal que a cada elemento de *A* le corresponda uno y sólo un elemento de *B*, y, recíprocamente, a cada elemento de *B* le corresponde uno y sólo un elemento de *A*, sin que sobren elementos en ninguno de los conjuntos, entonces diremos, siguiendo a Cantor, que *A* y *B* tienen el mismo *cardinal* (tamaño), y escribiremos card *A* = card *B*, o decimos que son e*quipotentes*. Y se afirma que el cardinal de *A* es mayor que el de *B* (card *A* > card *B*), si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre *B* y un subconjunto de *A*, pero no existe ninguna correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos.

Estas definiciones fueron la piedra angular que permitió a Cantor construir la teoría del infinito. Cantor comenzó por definir el primer infinito, el menor de todos, al cual denotó con la primera letra del alfabeto hebreo, aleph, y le puso de subíndice cero ($\aleph_0$). Un conjunto tendrá este cardinal si puede ponerse en correspondencia biunívoca con el conjunto de los números naturales. Según esto, y lo visto atrás, el conjunto de los números pares es equipotente al conjunto de los naturales y, en consecuencia, tienen el mismo cardinal, a pesar que los pares forman un subconjunto propio de los naturales. De aquí concluimos que el intuitivo principio que asegura que *el todo siempre es mayor que cada una de sus partes* es falso.

Con un argumento elemental se demuestra que un segmento de recta *AB*, que forme parte de otro segmento *AC* más grande, tiene el mismo cardinal, es equipotente a él; en otras palabras, que a pesar de tener longitudes diferentes, o ser parte del otro, tiene el mismo “número de puntos”, esto es, tienen el mismo cardinal.



La prueba es simple. Comencemos por construir un segmento de recta *A´B´* de igual longitud a la del segmento *AB* y paralelo a él (véase figura siguiente). Tracemos ahora las rectas *PA´A* y *PB´C*. Es claro que la proyección desde *P* establece una correspondencia biunívoca entre *todos* los puntos de *A´B´* y los de *AC*, pues a cada punto *R* de *AC* le hace corresponder uno y sólo uno, *R´*, de *AC*, y recíprocamente, a cada punto *R´* de *A´B´*, uno y sólo uno de *AC*. Al quedar establecida la correspondencia biunívoca se ha probado que los dos segmentos tienen el mismo cardinal, a pesar de tener longitudes distintas.



La proyección desde P pone en correspondencia biunívoca los puntos del segmento A´B´con los del AC.

El intervalo (0,1) puede ponerse en correspondencia biunívoca con los reales (1,+Infinto), de lo cual se deduce que son “igualmente numerosos”. Basta establecer la correspondencia X <-----> 1/x.

La naturaleza del infinito se reveló aún más misteriosa que lo que la más desbordada intuición aceptaba, después de que Cantor descubrió que el conjunto de todos los puntos de un segmento de recta poseía un cardinal mayor que $\aleph_0$. Es decir, que aquel conjunto poseía un infinito “tan grande” que impedía aparearlos con los naturales, esto es, impedía ponerlo en correspondencia biuinívoca con el de los números naturales y, por tanto, que los naturales constituían un subconjunto propio de menor tamaño o cardinal que el del conjunto total. Este teorema le aportó a Cantor un infinito aún más grande que $\aleph_0$, al que denotó con la letra ***C,*** y lo llamó el cardinal del *continuo*.

Trataremos ahora de probar que si se acepta la existencia de una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números naturales, **N**, y el de los reales entre 0 y 1, conjunto que posee el mismo cardinal de **R**, se llega a una contradicción, lo que prueba que Card **N** = $\aleph_0 \neq$ card **R**.

Sea **N** el conjunto de los números naturales y **S** el de los reales entre 0 y 1. Supongamos que card **N** = card **S**; es decir, que se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los dos conjuntos (esta demostración es la original del creador de la teoría del infinito, George Cantor, y se conoce tan fértil idea con el nombre del método de *la diagonal de Cantor*), y de allí derivemos una contradicción, lo que prueba que tienen distinto cardinal, es decir, que como infinitos poseen distinta categoría. En la tabla que sigue se presenta la supuesta correspondencia entre *N* y *S* (por estar los elementos de **S** entre cero y uno, su escritura decimal es de la forma $0{,}x_1x_2x_3x_4...$)

N		***S***
---		------------------------
1	$\leftrightarrow$	$r_1 = 0{,}a_1a_2a_3a_4a_5a_6...$
2	$\leftrightarrow$	$r_2 = 0{,}b_1b_2b_3b_4b_5b_6...$
3	$\leftrightarrow$	$r_3 = 0{,}c_1c_2c_3c_4c_5c_6...$
4	$\leftrightarrow$	$r_4 = 0{,}d_1d_2d_3d_4d_5d_6...$
5	$\leftrightarrow$	$r_5 = 0{,}e_1e_2e_3e_4e_5e_6...$

....

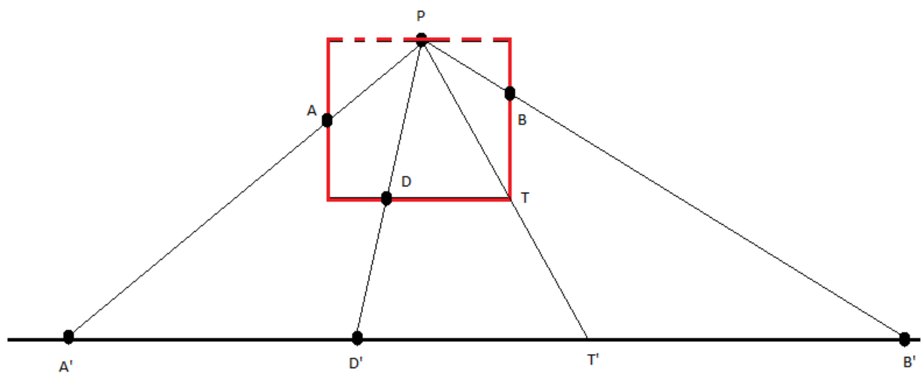
Veamos ahora que es posible encontrar un número real entre 0 y 1 que no está en la lista anterior, lo que obviamente es una contradicción, pues hemos supuesto que la correspondencia es entre todos los naturales y *todos* los reales entre 0 y 1. Efectivamente, el número real $X = 0{,}x_1x_2x_3x_4x_5x_6...$, construido de tal modo que x_1 sea distinto de a_1, x_2 distinto de b_2, x_3 distinto de c_3, y así sucesivamente, está entre 0 y 1 por empezar por 0 seguido de una coma, pero no está en la lista de reales de la tabla anterior, pues difiere de cada uno de ellos en un dígito de su desarrollo decimal. Por ejemplo, difiere de r_1 en la primera cifra decimal, de r_2 en la segunda, de r_3 en la tercera, y así sucesivamente. Con esto hemos probado que cardinal **N** $\neq$ cardinal **S** (dado que existe la posibilidad de la doble escritura del mismo número, como es el caso de 0,25 y 0,249999999...., escogeremos a x_1 de tal modo que sea distinto de a_1 y de 9, y así para los restantes).

Pero podemos probar que es posible establecer una correspondencia biunívoca entre **N** y un subconjunto de **S**, lo que demuestra que card **N** < card **S**. Basta para ello hacerle corresponder al numero natural *n* el real encabezado por cero, seguido de una coma y luego por los dígitos de *n* como cifras decimales, precedidas por tantos ceros como dígitos tenga. Por ejemplo, al 5 se le hace corresponder el 0,05, al 23 el 0,0023, al 2.539 el 0,00002539, etcétera. Llegamos así a una sorprendente conclusión: hay más reales en el intervalo entre 0 y 1 que números naturales; es decir, estamos en presencia de un conjunto, los reales entre 0 y 1, con un cardinal mayor que $\aleph_0$. Ahora bien, se puede demostrar que el cardinal de cualquier segmento de recta y el del conjunto de todos los números reales son iguales, y en consecuencia, que todos ellos tienen como cardinal a ***c***.

3.3 Cardinal de la recta real

Es fácil probar que hay tantos puntos en la recta real como en el segmento (0,1); en otras palabras, que el cardinal del intervalo (0,1) es igual al de toda la recta real, ***c***.

Doblemos en forma de *U* el segmento (0,1), con ángulos de 90 grados, como se muestra en la figura siguiente, y dibujemos el punto P dentro de la U. Desde P proyectamos los puntos del segmento unitario sobre la recta real. Se ve claramente que a todo punto de la recta le corresponde uno y solo uno del segmento, y recíprocamente. Por ejemplo, al punto A corresponde el *A´*, al *B*, el *B´*, al *D*, el *D´*, al *T* el *T´*. También podemos proceder al revés y partir de un punto cualquiera de la recta real, lo unimos por medio de una recta con *P* y siempre encontraremos uno y solo uno sobre la *U* que le corresponde.



Correspondencia biunívoca entre un segmento de longitud unitaria y toda la recta real

Parte 4: Modelación matemática

4.1 La modelación: poderosa herramienta cognitiva

El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje matemático para la formulación de las leyes físicas es un regalo maravilloso, que no entendemos ni merecemos.
Eugene Wigner

La *modelación mental* es el gran descubrimiento de la vida. Las experiencias del diario vivir van formando en nuestro cerebro, sobre un substrato heredado, una imagen comprimida del mundo; más exactamente, se van creando en las redes neuronales, a su modo, réplicas de las parcelas del mundo que se experimenten, y se integran en una sola unidad, en un *mapa mental* que se mantiene en permanente cambio, sin esfuerzo alguno, sin cesar, automáticamente, aun durante el sueño. Y en todo instante nos sirve de guía para gestionar el momento siguiente y dirigir las conductas. La conciencia nos permite percibir esos mapas como imágenes, para luego manipularlos por medio del razonamiento. Aun el mismo pensamiento cambia el mapa mental: recordamos, descubrimos relaciones no observadas antes, inferimos, analizamos y sintetizamos: nuestro mapa mental se infecta de pensamiento (palabras de un físico).

Cuando entendemos algo, es porque lo hemos representado, en forma clara, ordenada y coherente, en nuestras redes neuronales, y luego lo hemos integrado con el resto. Allí podemos hacer predicciones y anticiparnos a los hechos, antes de comprometernos con la realidad; podemos ensayar sin riesgos ni costos, y luego tomar las decisiones apropiadas. Es posible retroceder al pasado, mediante el recuerdo, y proyectar el futuro con base en todas nuestras vivencias. Como los dioses, podemos estar aquí y allá al mismo tiempo, provechosa ubicuidad mental que evita peligros y economiza esfuerzos. Y podemos crear entes nuevos, casi de la nada. Todo esto convierte nuestros cerebros en creativas máquinas inteligentes.

Pero, además, disponemos de la *modelación matemática*, quizás el logro máximo de la inteligencia humana, pues ella constituye una herramienta de pensamiento de una potencia casi imposible de describir. Se trata de una modelación por fuera del cerebro, transhumana. Su esencia es simple: los entes del mundo se remplazan por símbolos abstractos. Una descomunal metáfora, en el sentido más libre del término. Y es un proceso de suma economía, pues comprime la realidad en expresiones minimalistas: reduce parcelas del mundo a su mínima expresión. La *compresión* o cambio de escala es crucial, pues hace manejable el modelo.

La meta es construir representaciones que sean *físicamente isomorfas*. Esto significa que por cada elemento relevante de la parte del mundo en estudio debe existir un elemento correspondiente en el modelo; y por cada ley o regularidad observada, otra en el modelo que la imite con cierta fidelidad. Imitaciones muy osadas, que solemos llamar *teorías*. Al hacer esto, buscamos que las propiedades formales de los símbolos copien las propiedades pertinentes de la parcela del mundo que hemos elegido, sus invariantes.

Las leyes físicas, entonces, se conmutan en leyes matemáticas, mientras que los teoremas desprendidos de allí se traducen en propiedades del mundo. Nos olvidamos de la realidad física y nos trasladamos a su réplica simbólica o virtual; allí hacemos las preguntas y el modelo nos responde en su lenguaje hermético, abstracto, a veces abstruso, pero económico, sin ambigüedades, lacónico pero preciso. Y confiamos en que las repuestas que obtengamos se correspondan con las propiedades de la realidad. En este nuevo universo de jeroglíficos matemáticos realizamos transformaciones "mecánicas", que luego "leemos" para que nos revelen propiedades del universo real, muchas veces desconocidas, inéditas; es decir, por medio de estas máquinas virtuales podemos anticiparnos a los hechos, predecir, crear futuro.

La modelación matemática nos evita pensar o, mejor, nos permite pensar de otra manera. Cerramos los ojos y confiamos en que la manipulación ciega del modelo nos lleve a soluciones que se ajusten con fidelidad al mundo. Los modelos se convierten entonces en ampliaciones cognitivas, *extensiones exosomáticas* de nuestra inteligencia. Y así como el microscopio amplía la visión, los modelos amplían el pensamiento y dilatan la imaginación. Con grandes diferencias, siempre a favor de los modelos. Nuestro sistema cognitivo, por ejemplo, entiende muy bien todo aquello que se describa en una, dos o tres dimensiones; pero superado este límite, dejamos de entender. Un espacio curvo de tres dimensiones lo rechaza nuestra intuición, pero es tarea sencilla en los espacios matemáticos. En los modelos, las tres dimensiones de nuestras experiencias terrícolas son casi lo mismo que las cuatro del espacio-tiempo de la relatividad o las más de cuatro usadas para describir la teoría de supercuerdas o, después de un salto audaz, las infinitas dimensiones de los espacios de Hilbert, usados en mecánica cuántica. Más aún, los modelos permiten pensar fenómenos que para nuestra razón desnuda son contradictorios, mientras que a las ecuaciones eso no las perturba.

Platón y Aristóteles, por geniales que fuesen, no podían entender, con sus razones humanas, mundos de esas dimensiones, y, en consecuencia, no podían concebir objetos que las poseyeran. Había verdades físicas muy bien escondidas, invisibles para la razón pura. Pero se requería la lupa prodigiosa aportada por la modelación. La intuición y lo inteligible, antes de que el hombre inventase los modelos matemáticos, tenían frenos y barreras insuperables.

De este modo, entonces, y con gran osadía, hemos copiado el universo real en modelos teóricos que se le asemejan con una pasmosa fidelidad. Un físico llamó a esto "la eficacia irrazonable de las matemáticas". Albert Einstein se maravillaba: "El eterno misterio del mundo radica en su inteligibilidad... El hecho de que sea comprensible es un milagro". Y lo que más nos asombra es que sea compresible en teorías, agregamos.

La teoría gravitatoria de Newton, la relativista de Einstein, la mecánica cuántica, la termodinámica, la acústica, el electromagnetismo, la economía, las finanzas, el azar, la estadística… se han convertido en un puñado de ecuaciones que caben, con todos sus desarrollos, en un libro mediano. De cierta forma, el mundo queda convertido en un objeto portátil, domesticado, a nuestro servicio. Lo asombroso es que en ese universo de bolsillo podamos hacer predicciones acertadas que atañen a todo el universo real.

Con la modelación hemos adquirido un poder que nos deja atónitos. Gracias a ella hemos penetrado en el conocimiento de la realidad de un modo inesperado, por lo profundo, por lo detallado, por lo esencial. Es una prótesis cognitiva que nos permite pensar el mundo de una manera enriquecedora: explorarlo, descubrirlo, explicarlo, calcularlo, descifrarlo, entenderlo, predecirlo, manipularlo, cambiarlo y construirlo. Los prodigios de la magia, reconozcámoslo, son un juego trivial de niños al lado de la magia encantada de los modelos matemáticos. Y a su lado, la imaginación más desbordada, extravagante y loca nos parece inocente.

Pero no olvidemos que todos los modelos importantes de las aplicaciones matemáticas descansan en las propiedades de los números reales y en las de los complejos. Son estos elementos los átomos con los cuales se construye el universo de los modelos. Sin ellos, la modelación matemática no existiría.