

Inicialización del simplex

Table of contents

1	Motivaciones	1
1.1	La partición trivial	1
1.1.1	Ejemplo	2
1.1.2	No todo es color de rosa: las particiones triviales son atípicas	3
1.1.3	Ejemplo 2	3
1.2	Las soluciones a esta dificultad	4
2	Método de las 2 fases	5
2.1	Esquema general del método	5
2.2	Ejemplo de aplicación	6
2.2.1	Fase 1	8
2.2.2	Fase 2	9
3	Método de la gran M	11
3.1	Esquema general del método	11
3.2	Ejemplo de aplicación	12
4	Ejercicios y lecturas complementarias.	15
4.1	Ejercicios	15
4.2	Lecturas complementarias (Leer para el lunes próximo se evaluará el contenido de esta guía y el de las lecturas complementarias.)	18

1 Motivaciones

1.1 La partición trivial

En los problemas lineales, para poder inicializar el método simplex necesitamos de una solución básica factible inicial, esto es una base \mathcal{B} tal que $x_{\mathcal{B}} \geq 0$.

En problemas con todas las restricciones de tipo \leq y con el vector de recursos $b \geq 0$, se garantiza una solución básica inicial factible, ya que al agregar las variables para estandarizar las restricciones, todas las variables son de holgura.

1.1.1 Ejemplo

Modelo sin estandarizar:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

S. a:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & \leq & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

\Rightarrow

Modelo estandarizado:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1}^s + 0x_{n+2}^s + \dots + 0x_{n+m}^s$$

S. a:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & & +x_{n+1}^s & & & & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & & & +x_{n+2}^s & & & & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & & & & + \ddots & & & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & & & & & +x_{n+m}^s & = & b_m \end{array}$$

La partición $\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, la cual llamaremos **partición trivial**, da las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note que $B = I$. Esta es la principal característica de la *partición trivial*, da como resultado una matriz básica que es la **identidad**. Por propiedades de la inversa, $I^{-1} = I$, es decir que $B^{-1} = I$ también. Por lo tanto, considerando un $b \geq 0$, la partición trivial garantiza una solución básica factible inicial, ya que:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = b \geq 0$$

Lo cual es una solución básica factible inicial y se puede iniciar el algoritmo del simplex para resolver el problema.

1.1.2 No todo es color de rosa: las particiones triviales son atípicas

Sin embargo, no siempre se puede conseguir una partición trivial. Por ejemplo, si hay restricciones de tipo \leq o de tipo \geq se añaden variables de exceso, que tendrán coeficientes negativos en la matriz tecnológica. Similar caso ocurre si hay restricciones de tipo $=$, en las cuales, no se añaden ni variables de holgura ni de exceso.

1.1.3 Ejemplo 2

Observe el ejemplo anterior pero con la segunda restricción siendo de tipo \geq :

Modelo sin estandarizar:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

S. a:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & \leq & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \end{array}$$

\Rightarrow

Modelo estandarizado:

$$\min z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0x_{n+1}^s + 0x_{n+2}^s + \dots + 0x_{n+m}^s$$

S. a:

$$\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & + & x_{n+1}^s & & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & & -x_{n+2}^s & & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \ddots & + & \vdots & & & \ddots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & & & & +x_{n+m}^s & = & b_m \end{array}$$

La partición $\mathcal{B} = \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$, la cual llamaremos **partición trivial**, da las siguientes matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Note que ahora $B \neq I$, y su inversa resulta en:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener la solución básica, hacemos:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ -b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Observe que debido a la componente $-b_1$, $x_{\mathcal{B}} \not\geq 0$. Por lo tanto no podríamos inicializar el método simplex.

1.2 Las soluciones a esta dificultad

Para solucionar la dificultad de encontrar una partición básica factible inicial, se pueden varias vías:

1. Buscar otra partición dentro del problema existente.
2. Adicionar **variables ficticias o artificiales** para producir una base que desemboque en $B = I$.

La primera de las soluciones es problemática por que si bien podríamos hacer esa búsqueda de forma heurística. En el peor de los casos, el gasto computacional de hacerlo podría ser prohibitivo. Por ejemplo, en un problema de 40 variables y 15 restricciones, en el peor caso habría que probar $40C15$ posibles bases. Esto equivale a más de 40mil millones de bases diferentes.

La solución 2 se vuelve más atractiva. Pero estas nuevas variables serán apenas un auxilio en la consecución de una base factible inicial para el problema original. Por lo tanto ellas deben ser eliminadas una vez conseguido este objetivo.

Para lograrlo hay dos formas bien conocidas y documentadas en la literatura:

- 2.1. El método de las 2 fases.

2.2. El método de la gran M.

En ambos métodos se adicionan unas variables nuevas llamadas variables artificiales, que se eliminarán posteriormente durante el desarrollo del método.

2 Método de las 2 fases

Este método consiste en crear un problema auxiliar (**Fase 1**) con las nuevas variables artificiales añadidas. La función objetivo de este problema auxiliar será la minimización (y por tanto, la eliminación) de esas variables artificiales nuevas.

En seguida, se resolverá el problema auxiliar con el método simplex ya visto, y una vez encontremos la solución óptima, si esta existe, la base óptima encontrada servirá como base factible inicial para la siguiente fase.

La **Fase 2** del problema consiste en recuperar el problema original y resolverlo usando como base inicial, la base óptima encontrada en la fase 1 (eliminando los índices añadidos por la adición de las variables artificiales).

Con la base inicial se empieza nuevamente el simplex, y se continúan las iteraciones del simplex de forma normal hasta llegar al óptimo original del problema.

Observe que si el problema de la fase 1 fuese ilimitado o infactible, entonces el problema original no puede ser resuelto y por tanto se concluye el proceso de resolución.

2.1 Esquema general del método

Fase 1:

Resolver y guardar la base óptima de:

$$\min \sum_{i \in F} x_i^a$$

Sujeto a

$$\begin{aligned} Ax + x^a &= b \\ x, x^a &\geq 0 \end{aligned}$$

Siendo x_i^a las variables artificiales adicionadas, F el conjunto de índices de las columnas adicionadas y x^a el vector de variables adicionadas al modelo.

Fase 2:

Con la base óptima resolver hasta la optimalidad:

$$\min c^T x$$

Sujeto a

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

2.2 Ejemplo de aplicación

Considere el siguiente problema:

Se desea fabricar un alimento a partir de dos materias primas con existencias limitadas. El silo de maíz aporta, por kg usado en la mezcla, 45% de carbohidratos y 15% de proteína. La melaza provee 20% de carbohidratos y 65% de proteína. El alimento debe tener un máximo de 40% de carbohidratos y un mínimo de 26% de proteína. Cada kg de silo cuesta \$3 y cada kg de melaza cuesta \$5. Al mezclarse y cocerse, el silo de maíz pierde el 270 g por kg usado, la melaza se reduce en 50 gramos por kg. Se debe producir mínimo 50kg del alimento al menor costo posible. Si se excede de los 50kg, el excedente se pierde y cuesta \$6 el kg. ¿Cuánto de cada tipo de materia prima debe usarse?

Este problema se puede modelar de la forma mostrada, a continuación. Sea:

x_1 := Cantidad de kg de silo de maíz usado en la mezcla.

x_2 := Cantidad de kg de melaza usada en la mezcla.

e := Cantidad de mezcla hecha de más por encima de los 50kg.

Minimizar el costo total de la mezcla:

$$\min c_{Total} = 3x_1 + 5x_2 + 6e$$

Sujeto a:

Requisito de carbohidratos:

$$0.45x_1 + 0.20x_2 \leq 0.4 * 50$$

Requisito de proteína:

$$0.15x_1 + 0.65x_2 \geq 0.26 * 50$$

La cantidad fabricada debe ser mínimo 50kg. Observe que la variable de exceso que se debe insertar en esta restricción es equivalente al sobrante e (vea el modelo estandarizado).

$$0.77x_1 + 0.95x_2 \geq 50$$

Dominio:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Luego de estandarizar este problema queda de la siguiente forma:

$$\min c_{Total} = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 6x_5$$

Sujeto a:

$$0.45x_1 + 0.20x_2 + x_3 = 20$$

$$0.15x_1 + 0.65x_2 - x_4 = 13$$

$$0.77x_1 + 0.95x_2 - x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Observe que la variable x_5 es el exceso de mezcla producido, para continuar con la notación y facilitar el entendimiento del lector, se sustituye a e por esta variable en la FO.

El problema anterior resulta en las siguientes matrices:

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 & 1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & 0 & -1 & 0 \\ 0.77 & 0.95 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Observe que la base trivial compuesta por las variables adicionadas al estandarizar $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$, genera las matrices:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 \\ 0.15 & 0.65 \\ 0.77 & 0.95 \end{bmatrix}$$

$$\text{Con } B^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Y se produce la siguiente solución básica:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -13 \\ -50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}$$

Tal y como se puede ver por los valores de x_4 y x_5 , esta solución básica inicial (base $\mathcal{B} = \{3, 4, 5\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2\}$) no es una solución factible. Por lo tanto no podríamos iniciar el método simplex para encontrar la solución del problema de la mezcla.

Por esta razón, usemos el método simplex de 2 fases para encontrar, en la primera fase, una base factible inicial, y en la segunda fase, encontraremos el óptimo del problema.

2.2.1 Fase 1

Para formar la matriz identidad que necesitamos, necesitamos agregar las columnas $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Por este motivo asociaremos estas columnas a las **nuevas variables artificiales** x_6^a y x_7^a , respectivamente.

La función objetivo para el problema auxiliar será:

$$\min z = x_6^a + x_7^a \equiv 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6^a + x_7^a$$

Y las restricciones modificadas (ya estandarizadas) quedan de la siguiente forma:

$$0.45x_1 + 0.20x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6^a + 0x_7^a = 20$$

$$0.15x_1 + 0.65x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 + x_6^a + 0x_7^a = 13$$

$$0.77x_1 + 0.95x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 0x_6^a + x_7^a = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6^a, x_7^a \geq 0$$

Entonces obtenemos las matrices del problema auxiliar:

$$c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6^a \\ x_7^a \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.77 & 0.95 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Observe que la base (base $\mathcal{B} = \{3, 6, 7\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 5\}$) es una *base trivial* de este problema auxiliar. Esta base es factible, como se demuestra en seguida:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & -1 & 0 \\ 0.77 & 0.95 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que $B^{-1} = B = I$, y por tanto la solución básica queda:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_6^a \\ x_7^a \end{bmatrix}$$

Con esto podemos comenzar el simplex (puede auxiliarse en octave para los cálculos):

🔥 Desarrollo del simplex de la **Fase 1**

Iteración 1

$$\mathcal{B} = \{3, 6, 7\}, \mathcal{N} = \{1, 2, 4, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [20 \ 13 \ 50]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \ 1 \ 1]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [-0.92 \ -1.6 \ 1 \ 1]$
4. y 5. Debe entrar x_2 a la base, y dado que hay negativos, debemos continuar.
6. Preparación para la MRT: $y^T = (B^{-1}a_2)^T = [0.20 \ 0.65 \ 0.95]$
7. Test de la razón mínima: $MRT = \{100, 20, 52.63\}$
8. y 9. Hay denominadores > 0 , se debe continuar. La variable saliente de la base es x_6^a . Actualizamos la base y continuamos.

Iteración 2

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 7\}, \mathcal{N} = \{1, 6, 4, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [16 \ 20 \ 31]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \ -1.4615 \ 1]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [-0.5508 \ 2.4615 \ -1.4615 \ 1]$
4. y 5. Debe entrar x_4 a la base, y dado que hay negativos, debemos continuar.
6. Preparación para la MRT: $y^T = (B^{-1}a_4)^T = [0.30 \ -1.54 \ 1.46]$
7. Test de la razón mínima: $MRT = \{52, \infty, 21.21\}$
8. y 9. Hay denominadores > 0 , se debe continuar. La variable saliente de la base es x_7^a . Actualizamos la base y continuamos.

Iteración 3

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{1, 6, 7, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [9.47 \ 52.63 \ 21.21]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \ 0 \ 0]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [0 \ 1 \ 1 \ 0]$
4. y 5. No hay costos reducidos negativos, Se debe parar ya que hemos llegado al óptimo.

Así, luego de resolver la Fase 1, la base óptima es $\mathcal{B} = \{3, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{1, 6, 7, 5\}$. Podemos continuar a la Fase 2.

2.2.2 Fase 2

Para esta fase, recuperamos la formulación original y ya podemos prescindir de las variables artificiales que fueron adicionadas en el problema auxiliar. Es decir, la base inicial es la base óptima anterior pero sin las columnas 6 y 7:

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{1, 6, 7, 5\} \rightarrow \mathcal{B} = \{3, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{1, 5\}$$

Esta base es factible en el problema original, recordemos los datos, y evaluémosla:

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 & 1 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & 0 & -1 & 0 \\ 0.77 & 0.95 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix}$$

A partir de la partición \mathcal{B}, \mathcal{N} , tenemos:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.65 & -1 \\ 0 & 0.95 & 0 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 \\ 0.15 & 0 \\ 0.77 & -1 \end{bmatrix}$$

La solución básica queda:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0.20 & 0 \\ 0 & 0.65 & -1 \\ 0 & 0.95 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.21 \\ 0 & 0 & 1.05 \\ 0 & -1 & 0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.47 \\ 52.63 \\ 21.21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Como todos los $x_{\mathcal{B}} \geq 0$ podemos comenzar el método simplex.

Desarrollo del simplex de la **Fase 2**

Iteración 1

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{1, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [9.47 \quad 52.63 \quad 21.21]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 5.26]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [-1.05 \quad 11.26]$
4. **y 5.** Debe entrar x_1 a la base, y dado que hay negativos, debemos continuar.
6. Preparación para la MRT: $y^T = (B^{-1}a_1)^T = [0.28 \quad 0.81 \quad 0.38]$
7. Test de la razón mínima: $MRT = \{32.91, 64.94, 56.28\}$
8. **y 9.** Hay denominadores > 0 , se debe continuar. La variable saliente de la base es x_3 . Actualizamos la base y continuamos.

Iteración 2

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{3, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [32.91 \quad 25.96 \quad 8.81]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [-3.66 \quad 0 \quad 6.03]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [3.66 \quad 12.03]$
4. **y 5.** No hay costos reducidos negativos, Se debe parar ya que hemos llegado al óptimo.

De esta forma llegamos al óptimo del problema, siendo la solución óptima:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.91 \\ 25.96 \\ 0 \\ 8.81 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Es decir, que se debe usar aproximadamente 32.91 kg de silo de maíz y 25.96 kg de melaza para producir el alimento. La variable $x_4 = 8.81$ indica que habrá un sobrante de proteína equivalente a 8.81 kg de la mezcla.

3 Método de la gran M

Este método, al igual que el anterior consiste en adicionar variables artificiales al problema. Sin embargo, a diferencia del anterior método, este consiste en mantener el problema original con las variables nuevas en su estructura sin recurrir a un problema auxiliar. Esto con el único objetivo de hacer viable el inicio del simplex.

Las variables artificiales añadidas se irán eliminando de forma paulatina hasta que todas ellas sean no básicas. En ese momento se puede prescindir de ellas (aunque esto es opcional) y continuar resolviendo el problema hasta la optimalidad.

La forma en que durante la optimización, se opte por ir eliminándolas de forma automática y paulatina, es penalizarlas fuertemente en la función objetivo. Esta penalización es simbólica y se simboliza como un valor M. De ahí el nombre del método.

Este valor debe ser lo suficientemente grande como para priorizar la eliminación de estas variables artificiales por encima del objetivo original del problema sin modificar. Sin embargo, se debe tener cuidado si se elige un valor exagerado, puesto que los cálculos del vector multiplicador y costos reducidos se podrían complicar un poco más por los números mayores.

3.1 Esquema general del método

Resolver hasta la optimalidad, el problema modificado:

$$\min c^T x + M \sum_{i \in F} x_i^a$$

Sujeto a

$$Ax + x^a = b$$

$$x, x^a \geq 0$$

Siendo x_i^a las variables artificiales adicionadas, F el conjunto de índices de las columnas adicionadas y x^a el vector de variables adicionadas al modelo.

3.2 Ejemplo de aplicación

Considere el problema anterior de la Sección 2.2. El modelo sin modificaciones se muestra a continuación. Se presenta junto con un recordatorio de la notación final utilizada.

Sea:

x_1 := Cantidad de kg de silo de maíz usado en la mezcla.

x_2 := Cantidad de kg de melaza usada en la mezcla.

x_5 := Cantidad de mezcla hecha de más por encima de los 50kg.

Minimizar el costo total de la mezcla:

$$\min c_{Total} = 3x_1 + 5x_2 + 6x_5$$

Sujeto a:

$$0.45x_1 + 0.20x_2 \leq 50$$

$$0.15x_1 + 0.65x_2 \geq 13$$

$$0.77x_1 + 0.95x_2 - x_5 = 50$$

$$x_1, x_2, x_5 \geq 0$$

De la misma forma como se actuó en el método de las dos fases, se necesita agregar 2 variables artificiales x_6^a y x_7^a , asociadas a las columnas $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ de la matriz identidad respectivamente.

Estas variables serán adicionadas a la función objetivo actual, con una penalización simbólica M . Para nuestro caso, el M seleccionado es de 100, que será una penalización más que suficiente para garantizar la priorización de la eliminación de las variables artificiales añadidas de manera paulatina.

El problema modificado (y estandarizado) queda de la siguiente forma:

$$\min \bar{z} = 3x_1 + 5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 6x_5 + 100x_6^a + 100x_7^a$$

Sujeto a:

$$0.45x_1 + 0.20x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6^a + 0x_7^a = 20$$

$$0.15x_1 + 0.65x_2 + 0x_3 - x_4 + 0x_5 + x_6^a + 0x_7^a = 13$$

$$0.77x_1 + 0.95x_2 + 0x_3 + 0x_4 - x_5 + 0x_6^a + x_7^a = 50$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6^a, x_7^a \geq 0$$

Entonces obtenemos las matrices del problema auxiliar:

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6^a \\ x_7^a \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0.77 & 0.95 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix}$$

Observe que la base (base $\mathcal{B} = \{3, 6, 7\}$, $\mathcal{N} = \{1, 2, 4, 5\}$) es una *base trivial* de este problema auxiliar. Esta base es factible, como se demuestra en seguida:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.20 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.65 & -1 & 0 \\ 0.77 & 0.95 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Observe que $B^{-1} = B = I$, y por tanto la solución básica queda:

$$x_{\mathcal{B}} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 13 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_6^a \\ x_7^a \end{bmatrix}$$

Que es ≥ 0 y por tanto es factible. Con esto podemos comenzar el simplex (Nuevamente, puede auxiliarse en octave para los cálculos):

Desarrollo del simplex **Gran M**

Iteración 1

$$\mathcal{B} = \{3, 6, 7\}, \mathcal{N} = \{1, 2, 4, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [20 \ 13 \ 50]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \ 100 \ 100]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [-0.89 \ -155 \ 100 \ 106]$
4. y 5. Debe entrar x_2 a la base, y dado que hay negativos, debemos continuar.
6. Preparación para la MRT: $y^T = (B^{-1}a_2)^T = [0.20 \ 0.65 \ 0.95]$
7. Test de la razón mínima: $MRT = \{100, 20, 52.63\}$
8. y 9. Hay denominadores > 0 , se debe continuar. La variable saliente de la base es x_6^a . Actualizamos la base y continuamos.

Iteración 2

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 7\}, \mathcal{N} = \{1, 6, 4, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [16 \ 20 \ 31]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \ -138.46 \ 100]$

3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [-53.23 \quad 238.46 \quad -138.46 \quad 106]$
4. y 5. Debe entrar x_4 a la base, y dado que hay negativos, debemos continuar.
6. Preparación para la MRT: $y^T = (B^{-1}a_4)^T = [0.31 \quad -1.54 \quad 1.46]$
7. Test de la razón mínima: $MRT = \{52, \infty, 21.21\}$
8. y 9. Hay denominadores > 0 , se debe continuar. La variable saliente de la base es x_7^a . Actualizamos la base y continuamos.
- ¡! **OBS:** A partir de aquí podríamos continuar sin las variables artificiales x_6^a y x_7^a . Sin embargo, para efectos de este ejemplo continuaremos con ellas.

Iteración 3

$$\mathcal{B} = \{3, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{1, 6, 7, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [9.47 \quad 52.63 \quad 21.21]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [0 \quad 0 \quad 5.26]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [-1.05 \quad 100 \quad 94.74 \quad 11.26]$
4. y 5. Debe entrar x_1 a la base, y dado que hay negativos, debemos continuar.
6. Preparación para la MRT: $y^T = (B^{-1}a_1)^T = [0.28 \quad 0.81 \quad 0.38]$
7. Test de la razón mínima: $MRT = \{32.91, 64.94, 56.28\}$
8. y 9. Hay denominadores > 0 , se debe continuar. La variable saliente de la base es x_3 . Actualizamos la base y continuamos.

Iteración 4

$$\mathcal{B} = \{1, 2, 4\}, \mathcal{N} = \{3, 6, 7, 5\}$$

1. Solución básica: $x_{\mathcal{B}}^T = B^{-1}b = [32.91 \quad 25.96 \quad 8.81]$
2. Vector multiplicador: $p^T = c_{\mathcal{B}}^T B^{-1} = [-3.66 \quad 0 \quad 6.03]$
3. Costos reducidos: $s^T = c_{\mathcal{N}}^T - p^T b = [3.66 \quad 100 \quad 93.97 \quad 12.03]$
4. y 5. No hay costos reducidos negativos, Se debe parar ya que hemos llegado al óptimo.

De esta manera hemos llegado a la solución óptima del problema modificado. Observe que la solución óptima, dado que no eliminamos las variables artificiales es:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6^a \\ x_7^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32.91 \\ 25.96 \\ 0 \\ 8.81 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como es de esperarse, llegamos a la misma solución óptima del problema anterior. Es decir, que se debe usar aproximadamente 32.91 kg de silo de maíz y 25.96 kg de melaza para producir el alimento. La variable $x_4 = 8.81$ indica que habrá un sobrante de proteína equivalente a 8.81 kg de la mezcla.

Como se deseaba, las variables artificiales tienen valor 0 en la solución óptima.

4 Ejercicios y lecturas complementarias.

4.1 Ejercicios

Resuelva por medio del Simplex 2 fases los siguientes ejercicios:

1. Considere el siguiente conjunto de restricciones:

$$-2x_1 + 3x_2 = 3 \quad (1)$$

$$4x_1 + 5x_2 \geq 10 \quad (2)$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 5 \quad (3)$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 3 \quad (4)$$

$$4x_1 + 8x_2 \geq 5 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resuelva los siguientes problemas con el método especificado al final de cada ítem:

- (a) Maximizar $z = 5x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (3) y (4). Use simplex gran M.
 - (b) Maximizar $z = 2x_1 + 7x_2$ sujeto a (1), (2) (4) y (5). Use simplex 2 fases.
 - (c) Minimizar $z = 3x_1 + 6x_2$ sujeto a (3), (4) y (5). Use simplex gran M.
 - (d) Minimizar $z = 4x_1 + 6x_2$ sujeto a (1), (2) y (5). Use simplex gran M.
 - (e) Minimizar $z = 3x_1 + 2x_2$ sujeto a (1) y (5). Use simplex 2 fases.
 - (f) Minimizar $z = 6x_1 + 2x_2$ sujeto a (1), (3) y (5). Use simplex 2 fases.
2. Modele y resuelva por el método de su preferencia el siguiente problema de optimización.

Una universidad ha sido premiada con un nuevo centro de cómputo de alto poder destinado a surtir labores de investigación. El centro de cómputo está compuesto de 3 salas que funcionan en paralelo. Los usuarios apartan su horario, alistan sus experimentos en la sala solicitada y se deja trabajar a los equipos. La universidad ha dispuesto que debe haber un auxiliar por sala durante el horario de atención.

Los auxiliares son estudiantes de posgrado a los que se les reconoce un salario por hora que depende de su nivel de experiencia y habilidades informáticas. Este precio fue fijado por la Universidad en el estudio de las hojas de vida de los aspirantes a auxiliar. En la sala 2, hay equipos especiales que solo pueden manipular auxiliares que sean estudiantes de doctorado. En las otras dos salas puede haber tanto estudiantes de maestría como de doctorado.

La tabla a continuación explica las disponibilidades de los diferentes estudiantes de maestría y doctorado así como el costo por hora para la universidad. Se trabaja una jornada continua de 7 horas de lunes a viernes. A cada auxiliar se le garantiza un mínimo de 8 horas semanales asignadas.

Est	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Estudia	Salario/h
Donald	4	4	7	0	6	Doctorado	10
Ana	7	4	0	8	4	Doctorado	12
Jonas	5	6	6	4	0	Maestría	11
Pepito	6	0	4	5	6	Maestría	8
Taylor	0	6	8	4	6	Maestría	10

Ayude a la universidad a tomar la mejor decisión respecto a la asignación de horas a cada estudiante garantizando.

3. Modele y resuelva por el método de su preferencia el siguiente problema de optimización.

Hodor vive en el mundo de los espíritus y se prepara para embarcarse en un viaje que le permitirá desarrollar sus poderes al máximo. En el camino le esperan monstruos y retos que le exigirán tener buena salud, puntos de ataque, velocidad y defensa. Hodor puede embarcar ciertas sustancias que le permitirán potenciar algunos de estos aspectos o curarse en caso de heridas. Sin embargo la mochila de Hodor tiene ciertos límites de peso, volumen, valor monetario y karma.

Aquí tienes la tabla de los objetos que Hodor puede llevar en su viaje:

Loading required package: readr

Loading required package: kableExtra

Table 2: Datos sobre los objetos.

Objeto	Peso (kg)	Volumen (l)	Costo (monedas)	Consumo de Karma
Poción de Salud	3	1	100	10
Elixir de Ataque	2	1	150	15
Tónico de Velocidad	1	0.5	200	20
Escudo de Defensa	10	5	250	25
Hierbas Curativas	0.5	0.2	50	5
Cristal de Poder	5	2	300	30
Crema de la Sapiencia	0.1	0.05	500	50
Polvo de Agilidad	4	3	200	20
Brevaje de Invisibilidad	2	1	350	35
Pudin de Regeneración	0.05	0.01	100	10
Límite mochila de Hodor	50	30	1500	500

Table 3: Atributos mejorados por los objetos y límites de existencia.

Objeto	Atributos mejorados	Disponibilidad
Poción de Salud	Salud (+50), Defensa (-2)	10 und
Elixir de Ataque	Ataque (+20), Velocidad (+5)	5 und
Tónico de Velocidad	Velocidad (+20), Ataque (+10)	3 und
Escudo de Defensa	Defensa (+20), Salud (+10)	6 und
Hierbas Curativas	Salud (+10)	∞
Cristal de Poder	Todos los atributos (+10)	8 und
Crema de la Sapiencia	Salud (+10), Defensa (+25)	∞
Polvo de Agilidad	Defensa (+25), Velocidad (+10)	3 und
Brevaje de Invisibilidad	Velocidad (+45), Salud (-3)	7 und
Pudin de Regeneración	Salud (+40), Ataque (-5)	2 und

Eres el mejor amigo de Hodor y deberías ayudarlo a determinar cuáles deben ser las cantidades que necesita de cada ítem para poder iniciar su viaje con la mejor preparación posible.

Para ayudarlo en su viaje, has preguntado a Hodor qué le gustaría priorizar, y este te ha respondido que le gustaría tener equilibrio en los 4 atributos, le ha dado una nota de 8/10 a cada aspecto menos a la salud a la que le ha dado una nota de 10/10. Siendo este, claramente el aspecto más importante.

Sé un buen amigo y ayuda a Hodor a decidir cuánta cantidad de cada objeto llevar en su mochila para maximizar sus atributos, sin exceder los límites de su mochila.

¡Buena suerte en tu viaje, Hodor!

4. Otros ejercicios Hacer cuantos más puedan.

Ejercicios 2.4 A

Ejercicios 2.4 B

Ejercicios 2.4 C

Ejercicios 2.4 D

Ejercicios 2.4 E

Ejercicios 2.4 F

4.2 Lecturas complementarias (Leer para el lunes próximo se evaluará el contenido de esta guía y el de las lecturas complementarias.)

Se recomienda leer los casos especiales del simplex y cómo tratarlos:

- Soluciones degeneradas o degeneración (Adicional a la lectura, investigar sobre ciclamientos o *looping* en el simplex y regla de Bland).
- Óptimos alternativos: ¿Cuáles son las condiciones necesarias y suficientes para que se den?.
- Problemas ilimitados (Solución no acotada).
- Solución no factible.

La lectura recomendada se encuentra en el libro Investigación de Operaciones de Hamdy Taha 9na Edición. Capítulo 3, Sección 3.5 (Página 99 en adelante.)