

# Otimização em Redes

## Trabalho Computacional

Victor São Paulo Ruela  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Belo Horizonte, Brasil  
Email: victorspruela@gmail.com

**Resumo**—Este relatório apresenta os resultados do desenvolvimento do trabalho computacional proposto na disciplina de Otimização em Redes no semestre 2020/1. O problema de escolha da política ótima de manutenção dos equipamentos de uma empresa foi modelado como um problema de programação linear inteiro multi-objetivo, para o qual a técnica de escalarização  $\epsilon$ -restrito foi utilizada na estimativa da fronteira pareto. Os resultados comprovam o correto funcionamento do método de solução proposto e um hipervolume acima da faixa mínima do trabalho pôde ser obtido com um baixo esforço computacional.

### I. INTRODUÇÃO

O problema proposto neste trabalho consiste na determinação da política ótima de manutenção para cada um dos equipamentos de uma determinada empresa, objetivando a minimização do custo de manutenção e do custo de falha esperado. Uma política consiste na escolha de um plano de manutenção dentre três disponíveis para cada equipamento, sendo que cada um possui diferentes custos e fatores de risco associados. O custo total de manutenção é a soma dos custos dos planos adotados para cada equipamento, enquanto que o custo esperado de falha total é a soma dos produtos da probabilidade de falha do equipamento pelo respectivo custo da falha do plano de manutenção escolhido.

Como este é um problema multi-objetivo, sua solução consiste na estimativa de sua fronteira pareto. A qualidade da solução final será avaliada pelo hipervolume (HVI) da fronteira estimada. Ele indica o volume entra um ponto de referência no espaço de solução e a fronteira pareto estimada, indicado pela área hachurada na Figura 1.

### II. METODOLOGIA

#### A. Análise do Problema

Cada equipamento irá possuir uma determinada idade, além de um custo decorrente de sua falha, de forma que este seja diretamente proporcional à sua importância para a empresa. Eles foram separados em quatro clusters, de acordo com suas características de uso e construtivas. A distribuição da idade e custo de falha dos equipamentos em cada cluster pode ser vista na Figura 2. As seguintes características podem ser observadas:

- A distribuição do custo de falha dos equipamentos em cada cluster é bem similar. Além disso, é importante

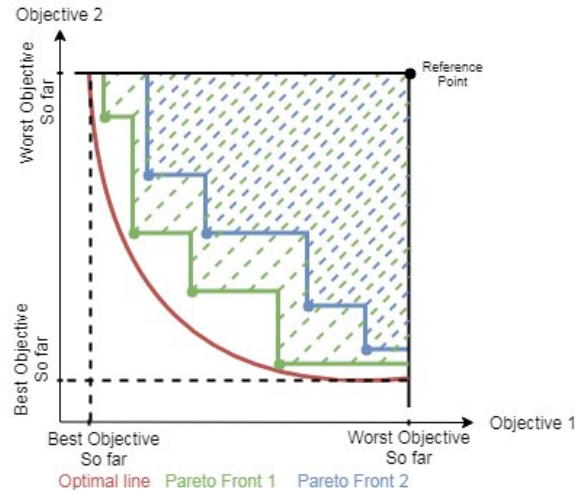


Fig. 1. Representação do Hipervolume. Retirado de [1].

notar que esta aparenta ser uma distribuição bi-modal para todos os clusters.

- Não há forte correlação entre a idade e o custo de falha
- Os equipamentos do cluster 1 possuem uma idade média inferior às demais e uma distribuição bem mais estreita. Os valores da média e desvio padrão são exibidos na tabela I.
- Pela Figura 2 e ainda com o auxílio da Tabela I, é possível notar que os demais clusters possuem distribuições bastante similares para a idade do equipamento.
- Na Tabela II é possível observar que a quantidade de equipamentos por cluster está balanceada.

TABELA I

IDADE MÉDIA E DESVIO PADRÃO DA IDADE DOS EQUIPAMENTOS POR CLUSTER

Cluster	Idade	
	$\mu$	$\sigma^2$
1	4.898148	4.092253
2	6.964539	6.286506
3	7.467153	5.252522
4	7.894737	5.972457

Para cada cluster foi construído um modelo para a estimativa da probabilidade de falha do equipamento em função da idade

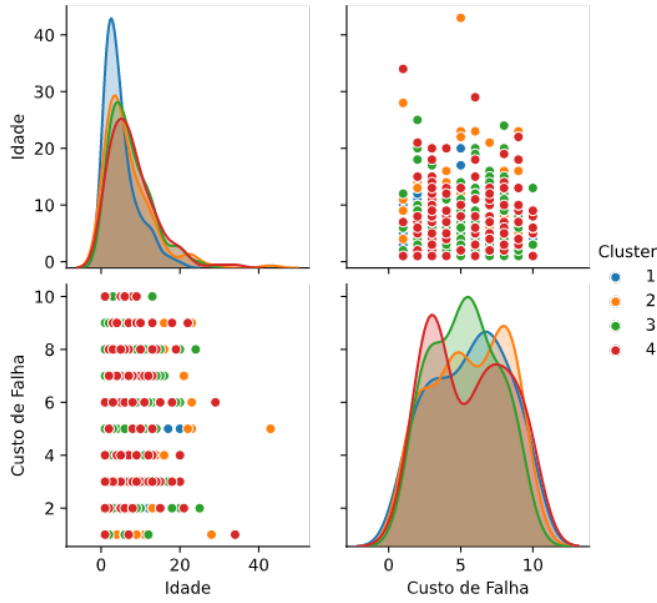


Fig. 2. Correlação e distribuição da idade e custo de falha dos equipamentos por cluster

TABELA II  
QUANTIDADE DE EQUIPAMENTOS POR CLUSTER

Cluster	# de Equipamentos
1	108
2	141
3	137
4	114

e horizonte de planejamento da manutenção, usando como base a distribuição de Weibull. As probabilidades de falha em função do tempo de uso são exibidas na Figura 3.

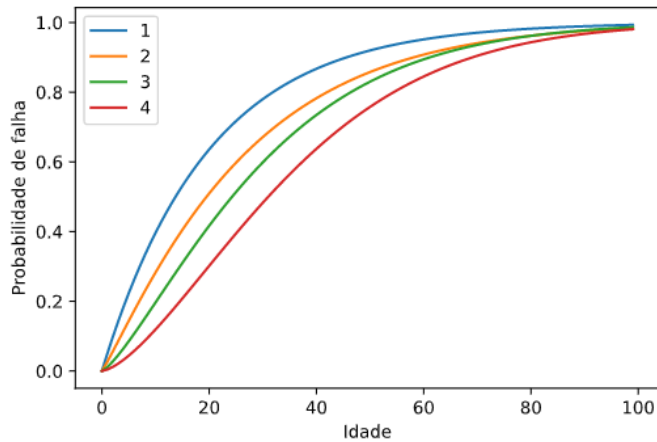


Fig. 3. Probabilidade de falha em função da idade para cada cluster

Nota-se que equipamentos do cluster 1 possuem em geral uma maior probabilidade de falha que os demais, enquanto que o cluster 4 possui a menor probabilidade de falha. Uma observação interessante está no fato de que mesmo possuindo

em média uma idade menor, conforme visto anteriormente, os equipamentos do cluster 1 em geral terão uma maior probabilidade de falha que os demais para uma mesma idade.

Os valores de custo e fatores de risco para os planos de manutenção podem ser vistos na Tabela III. É importante notar que um dos extremos da fronteira pareto será a solução onde todos os equipamentos utilizam o plano 1, com custo nulo de manutenção e máximo risco, e que no outro extremo todos utilizarão o plano 3, minimizando o risco de falha, porém com custo máximo de manutenção.

TABELA III  
FATOR DE RISCO E CUSTO PARA CADA PLANO DE MANUTENÇÃO

Plano	Fator de Risco	Custo
1	2.0	0
2	1.5	1
3	1.0	2

### B. Formulação do Problema

A maior dificuldade para a modelagem deste problema consiste no fato de que os principais parâmetros variam de acordo com o plano de manutenção escolhido, que é a nossa variável de decisão. Ou seja, o modelo teria que ser alterado para cada avaliação de uma determinada solução. Entretanto, é possível contornar essa situação através do uso de variáveis de decisão binárias e sabendo que o horizonte de planejamento é fixo em 5 anos.

Dado um equipamento  $i$ , o plano  $j$  está em uso se  $X_{i,j} = 1$ , onde  $X_{i,j} \in \{0, 1\}$  é uma variável de decisão. Naturalmente, somente um plano deve estar em uso, exigindo a restrição de que para um mesmo equipamento, a soma de todos os planos alocados seja igual a 1. Portanto, é possível realizar uma modelagem de forma linear:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar: } \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M C_j^m X_{i,j} \\
 &\quad \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^M X_{i,j} p_{i,j} \right) C_i^f \\
 &\text{sujeito a: } \sum_{j=1}^M X_{i,j} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \\
 &\quad X_{i,j} \in \{0, 1\}
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde  $M = 3$  é o número de planos de manutenção disponíveis,  $N = 500$  a quantidade de equipamentos da empresa,  $p_{i,j}$  as probabilidades de manutenção para o equipamento  $i$  no plano  $j$ ,  $C_j^m$  o custo de manutenção do plano  $j$  e  $C_i^f$  o custo de falha do equipamento  $i$ .

### C. Método de Solução

Como foi formulado um problema de programação linear inteiro, pode-se utilizar qualquer algoritmo exato, como o *Branch & Bound*, ou alguma meta-heurística aplicável a este tipo de problema. Ele será resolvido utilizando um algoritmo

exato através do CPLEX versão 12.10.0.0, licença acadêmica. Por se tratar de problema relativamente pequeno, com 1500 variáveis de decisão e 500 restrições, espera-se que este sover não tenha grandes dificuldades em resolvê-lo.

O trabalho será desenvolvido na linguagem de programação Python versão 3.7.7, sendo necessários os pacotes *pandas*, *numpy*, *matplotlib*, *seaborn* e *docplex*. Instruções para a instalação e configuração da biblioteca *docplex* estão disponíveis em [2]. Opcionalmente, pode-se instalar o pacote *oct2py*, o qual permita a execução do arquivo fornecido via octave sem a necessidade da instalação do MATLAB [3].

Para a solução deste problema multi-objetivo, será utilizada a técnica de escalarização  $\epsilon$ -restrito. É possível notar que para a formulação adotada o custo de manutenção só pode possuir valores inteiros, os quais variam de 0 a 1000. Logo, este objetivo será transformado em restrição e adicionado ao modelo descrito em 1, de forma que um problema de otimização mono-objetivo minimizando o custo esperado de falha seja resolvido para cada valor dentro deste intervalo. O modelo final é descrito em 2.

$$\begin{aligned} \text{minimizar: } & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M C_j^m X_{i,j} \\ \text{sujeito a: } & \sum_{j=1}^M X_{i,j} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N \\ & \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^M X_{i,j} p_{i,j} \right) C_i^f \leq \epsilon \\ & X_{i,j} \in 0, 1 \end{aligned} \quad (2)$$

### III. RESULTADOS

A fronteira pareto estimada para a estratégia de solução descrita na seção anterior pode ser vista na Figura 4. O HVI calculado foi de 0.632575 após a execução do arquivo *EvalParetoApp.m*. A solução do problema de otimização 2 demorou menos de 0.5 segundos para ser resolvido pelo CPLEX, sendo que o tempo total necessário para amostrar a fronteira pareto girou em torno de 4 minutos. O programa foi executado em um notebook com processador Intel Core i7 2.4GHz, 8Gb de memória RAM e sistema operacional Windows 10.

É importante observar que, para o modelo linear escolhido para representar o problema, não há como estimar uma fronteira pareto melhor do que a obtida, mesmo se aumentarmos a quantidade de amostras. Isso é decorrente do fato de que o valor do custo de manutenção sempre será inteiro para essa formulação. Aumentar este número geraria soluções repetidas, as quais seriam descartadas do cálculo do HVI. Portanto, seria possível somente atingir valores maiores do HVI se uma formulação diferente tivesse sido selecionada. Uma ideia seria permitir a adoção de múltiplos planos para um mesmo equipamento ao longo dos anos, de forma a escolher um plano por ano ao invés de considerar todo o horizonte de planejamento. Ela não foi avaliada pois geraria uma solução diferente do formato exigido para avaliação do trabalho.

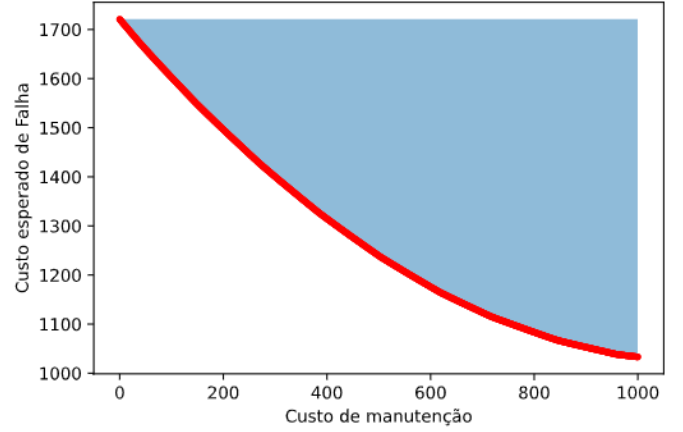


Fig. 4. Fronteira pareto estimada (vermelho). A área em azul corresponde à região utilizada para calcular o HVI.

Na Figura 5 é possível ver o quanto cada ponto da fronteira pareto contribuiu para o HVI final. Note que há uma contribuição maior para maiores custos de manutenção, o que é explicado pela curvatura da fronteira nesta região, uma vez que pequenos passos irão resultar em uma área maior em relação aos custos próximos de 0. Outra observação importante é que quando o custo de manutenção máximo é atingido, não há contribuição para o HVI uma vez que ele está logo abaixo dos pontos de referência utilizados, vide a Figura 1.

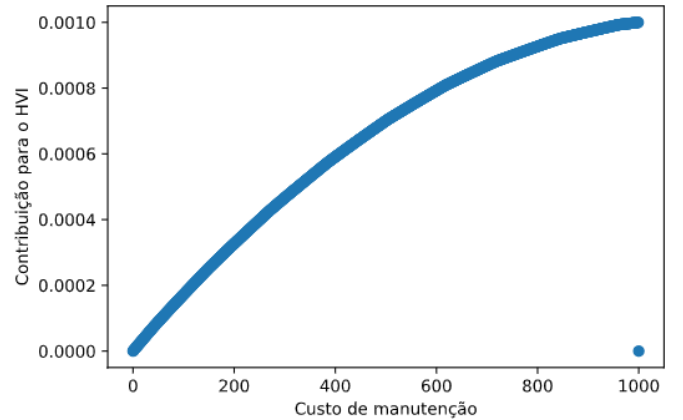


Fig. 5. Contribuição de cada ponto da fronteira pareto para o HVI

Na Figura 6 é exibido o mapa de calor para as soluções encontradas em cada ponto na fronteira pareto estimada. Conforme esperado, à medida em que o custo de manutenção cresce, o otimizador opta em utilizar o plano 3 ao invés do 1, o qual minimiza o custo esperado de manutenção. Um resultado interessante está no fato de que a proporção de soluções que utilizam o plano de manutenção 2 é bem baixa. Isso sugere uma possível limitação da formulação escolhida para o problema, uma vez que na maioria das vezes é preferível ter um maior risco de falha do equipamento ao invés de utilizar um plano intermediário e com menor custo e risco de manutenção.

Através da Tabela IV, a qual agrupa as soluções por cluster

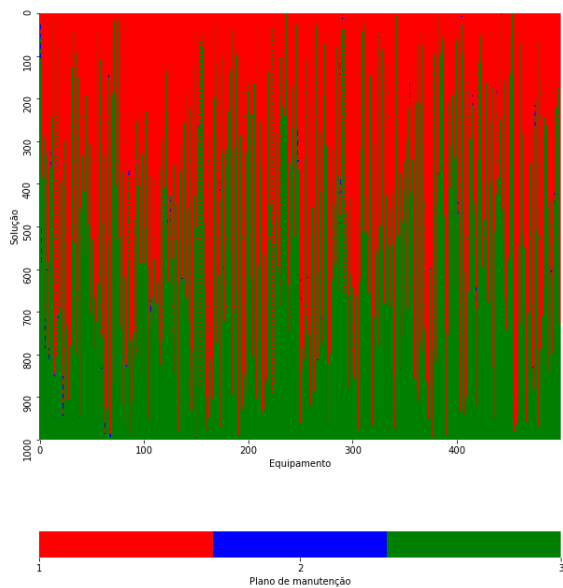


Fig. 6. Mapa de calor das soluções na fronteira pareto. Cada cor corresponde ao plano de manutenção escolhido.

e em seguida calcula a proporção obtida para cada plano, é possível notar que, embora muito menor em relação às demais, para o cluster 4 há uma proporção maior de equipamentos que usam o plano 2. Isso pode ser um reflexo destes equipamentos possuírem uma média de idades um pouco maior do que os outros clusters.

TABELA IV

PROPORÇÃO DOS PLANOS AGRUPADOS POR CLUSTER PARA TODAS AS SOLUÇÕES NA FRONTEIRA PARETO

Cluster	Plano	Proporção (%)
1	1	48.315573
	2	0.094350
	3	51.590077
2	1	49.476764
	2	0.082896
	3	50.440340
3	1	51.682624
	2	0.032085
	3	48.285291
4	1	50.424796
	2	0.209525
	3	49.365679

#### IV. CONCLUSÃO

Neste trabalho computacional for implementado um modelo de programação linear inteira multi-objetivo para a

determinação do plano de manutenção ótimo para os equipamentos de uma empresa. Utilizando a técnica de escalarização  $\epsilon$ -restrito e o solver CPLEX, 1001 pontos da fronteira pareto foram calculados, resultando em um hipervolume de 0.632575.

A implementação do trabalho ocorreu sem grandes dificuldades após o entendimento do enunciado do trabalho, e também pelas facilidades introduzidas pelo uso da biblioteca *docplex* para a modelagem. Todos os códigos utilizados no desenvolvimento deste trabalho também estão disponíveis online no repositório <https://github.com/vicrsp/otredes-pggee>.

#### REFERÊNCIAS

- [1] Demir, İbrahim, Fatma Corut Ergin, and Berna Kırız. "A New Model for the Multi-Objective Multiple Allocation Hub Network Design and Routing Problem." *IEEE Access* 7 (2019): 90678-90689.
- [2] IBM® Decision Optimization CPLEX® Modeling for Python (DOPlex) V2.15 documentation: <http://ibmdecisionoptimization.github.io/docplex-doc/>. Acessado em 27/09/2020
- [3] Oct2Py: Python to GNU Octave Bridge — Oct2Py 4.3.0 documentation: <https://oct2py.readthedocs.io/en/latest/>. Acessado em 28/09/2020)