Aula 26 – O Teorema Fundamental do Cálculo

Metas da aula: Provar o Teorema Fundamental do Cálculo e dar exemplos de suas aplicações no cálculo de integrais.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber os enunciados das duas formas do Teorema Fundamental do Cálculo e aplicar corretamente esses resultados para o cálculo de integrais.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer a conexão entre as noções de derivada e integral, usualmente bastante explorada nos cursos de Cálculo para se computar integrais. O Teorema Fundamental do Cálculo é o resultado que exprime essa conexão. Ele possui duas formas: a primeira versa sobre a integral da derivada de uma função; a segunda sobre a derivada de uma integral com limite superior variável. Juntas essas duas formas do Teorema Fundamental podem ser sintetizadas a grosso modo com a afirmação de que a derivada e a integral são operações inversas uma da outra. Porém, é preciso tomar cuidado com as sutilezas nas hipóteses para a validade de cada um desses resultados.

O Teorema Fundamental (Primeira Forma)

A Primeira Forma do Teorema Fundamental fornece a base teórica para o método de calcular integrais que você aprendeu no curso de Cálculo. Ela afirma que se uma função f é a derivada de uma função F, *e se f pertence a* $\mathcal{R}[a,b]$, então $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. É comum denotar-se $F\big|_a^b := F(b) - F(a)$. A função F tal que $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$ é chamada uma **antiderivada** ou **primitiva de** f em $[a,b]$. O enunciado que daremos a seguir admite um conjunto *finito* de pontos excepcionais c onde $F'(c)$ não existe ou não é igual a $f(c)$.

Teorema 26.1 (Teorema Fundamental (Primeira Forma))
Suponhamos que exista um conjunto **finito** E em $[a,b]$ e funções $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que:

(a) F é contínua em $[a,b]$;

(b) $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b] \setminus E$;

(c) $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Então temos

$$\int_a^b f = F(b) - F(a). \tag{26.1}$$

Prova: Como o conjunto E é finito, podemos supor sem perda de generalidade que $E = \{a, b\}$; o caso geral se reduz a esse fazendo-se uma partição do intervalo $[a, b]$ numa união finita de intervalos concatenados.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $f \in \mathcal{R}[a, b]$ pela hipótese (c), existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é uma partição qualquer de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$\int_a^b f - \varepsilon \le S_*(f; \mathcal{P}) \le \int_a^b f \le S^*(f; \mathcal{P}) \le \int_a^b f + \varepsilon. \tag{26.2}$$

Pelo Teorema do Valor Médio 22.4 aplicado a F sobre $[x_{i-1}, x_i]$ temos que existe $u_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(u_i)(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{para } i = 1, \dots, n.$$

Somando-se as equações anteriores de $i = 1$ a $i = n$, notando que os membros à esquerda formam uma soma telescópica, e usando o fato de que $F'(u_i) = f(u_i)$ obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Agora, consideremos a partição aferida $\dot{\mathcal{P}} := \{[x_{i-1}, x_i], u_i)\}_{i=1}^n$. Temos $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(u_i)(x_i - x_{i-1})$, $S_*(f; \mathcal{P}) \le S(f; \dot{\mathcal{P}}) \le S^*(f; \mathcal{P})$, e portanto

$$\int_a^b f - \varepsilon \le S(f; \dot{\mathcal{P}}) \le \int_a^b f + \varepsilon.$$

Como $F(b) - F(a) = S(f; \dot{\mathcal{P}})$, segue que

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que vale a equação (26.1).

$\square$

Observação 26.1

Se a função F é diferenciável em todo ponto de $[a,b]$, então a hipótese (a) é automaticamente satisfeita (por quê?). Mesmo que F seja derivável em todo ponto de $[a,b]$ a condição (c) pode não valer já que existem funções F satisfazendo essa condição tais que F' não é integrável à Riemann (veja Exemplo 26.1 (e)).

Exemplos 26.1

(a) Se $f(x) := x^4$ para $x \in [a,b]$, então $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [a,b]$, onde $F(x) := \frac{1}{5}x^5$. Além disso, f é contínua, logo $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Portanto, o Teorema Fundamental (com $E = \emptyset$) implica

$$\int_a^b x^4\,dx = \frac{1}{5}(b^5 - a^5).$$

(b) Se $f(x) = 1/(x^2+1)$ para $x \in [a,b]$, então f é contínua e $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [a,b]$, onde $F(x) := \arctan x$. Portanto, o Teorema Fundamental (com $E = \emptyset$) implica que

$$\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan b - \arctan a.$$

(c) Se $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ para $x \in [-5,5]$, então $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [-5,5] \setminus \{0\}$, onde $F(x) = |x|$. Como $\operatorname{sgn}(x)$ é uma função degrau em $[-5,5]$, temos que $f \in \mathcal{R}[-5,5]$. Segue então do Teorema Fundamental (com $E = \{0\}$) que

$$\int_{-5}^{5} \operatorname{sgn}(x)\,dx = |5| - |-5| = 5 - 5 = 0.$$

(d) Se $f(x) := 1/\sqrt{x}$ para $x \in (0,4]$ e $f(0) := 0$, então $f(x) = F'(x)$ para $x \in (0,4] = [0,4] \setminus \{0\}$. Porém, como f não é limitada em $[0,4]$, $f \notin \mathcal{R}[0,4]$. Logo o Teorema Fundamental não pode ser aplicado nesse caso. (Entretanto é possível se estender o conceito de integral para além da noção de integral de Riemann que aprendemos neste curso, de modo a incluir a função f na classe das funções integráveis (relativamente à noção mais geral de integral) e de tal forma que o Teorema Fundamental ainda seja válido nesse caso.)

(e) Se $f(x) := 2x\operatorname{sen}(1/x^2) - (2/x)\cos(1/x^2)$ para $x \in (0,1]$ e $f(0) := 0$, então $f(x) = F'(x)$ para todo $x \in [0,1]$, onde $F(x) := x^2\operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \in (0,1]$ e $F(0) := 0$ ($F'(0) = 0\,(!)$, por quê?). Embora F seja contínua em $[0,1]$ e $F'(x) = f(x)$ em $[0,1]$, a função f não é limitada em $[0,1]$, donde concluímos que $f \notin \mathcal{R}[0,1]$. Logo, o Teorema Fundamental não pode ser aplicado nesse caso. (Cabe aqui também uma observação semelhante à do exemplo anterior quanto a possibilidade de extensão da noção de integral de modo a incluir esse exemplo mantendo a validade do Teorema Fundamental.)

O Teorema Fundamental (Segunda Forma)

Vamos em seguida estabelecer a segunda forma do Teorema Fundamental na qual desejamos derivar uma integral com limite superior variável. Antes porém introduziremos o conceito de integra indefinida e daremos um simples resultado mostrando a continuidade dessa função.

Definição 26.1
Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então a função definida por

$$F(x) := \int_a^x f \quad \text{para } x \in [a,b], \tag{26.3}$$

é chamada a **integral indefinida** de f com **ponto-base** a. Qualquer outro ponto em $[a,b]$ pode ser escolhido como ponto base: nesse caso a integral indefinida diferirá da F em (26.3) por uma constante.

Teorema 26.2
Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [a,b]$. Então a integral indefinida F definida por (26.3) satisfaz $|F(z) - F(w)| \le M|z-w|$ para todos $z, w \in [a,b]$. Em particular, F é contínua em $[a,b]$.

Prova: Pelo Teorema da Aditividade 25.8 temos

$$F(z) = \int_a^z f = \int_a^w f + \int_w^z f = F(w) + \int_w^z f,$$

donde segue que

$$F(z) - F(w) = \int_w^z f.$$

Agora, como $-M \le f(x) \le$ para $x \in [a,b]$, o Teorema 24.3(i) implica que

$$-M(z-w) \le \int_w^z f \le M(z-w),$$

donde concluímos que

$$|F(z) - F(w)| = \left| \int_w^z f \right| \le M|z-w|,$$

como afirmado. Como F é Lipschitz em $[a,b]$, segue que F é contínua em $[a,b]$.

□

Teorema 26.3 (Teorema Fundamental (Segunda Forma))
Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e suponhamos que f é contínua em $\bar{x} \in [a,b]$. Então a integral indefinida, dada por (26.3), é diferenciável em $\bar{x}$ e $F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$.

Prova: Inicialmente suporemos que $\bar{x} \in [a,b)$ e vamos analisar a derivada à direita de F em $\bar{x}$. Como f é contínua em $\bar{x}$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\bar{x} \le x < \bar{x} + \delta$, então

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon. \tag{26.4}$$

Suponha que h satisfaz $0 < h < \delta$. O Teorema da Aditividade 25.8 implica que f é integrável nos intervalos $[a,\bar{x}]$, $[a,\bar{x}+h]$ e $[\bar{x},\bar{x}+h]$ e que

$$F(\bar{x}+h) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f.$$

Porém, no intervalo $[\bar{x},\bar{x}+h]$ a função f satisfaz a desigualdade (26.4), de modo que (pelo Teorema 24.3(i)) temos

$$(f(\bar{x}) - \varepsilon)\, h \le F(\bar{x}+h) - F(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{\bar{x}+h} f \le (f(\bar{x}) + \varepsilon)\, h.$$

Dividindo por h e subtraindo $f(\bar{x})$, obtemos

$$\left| \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} - f(\bar{x}) \right| \le \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que o limite à direita quando $h \to 0+$ do quociente de Newton é dado por

$$\lim_{h \to 0+} \frac{F(\bar{x}+h) - F(\bar{x})}{h} = f(\bar{x}).$$

Do mesmo modo provamos que a derivada à esquerda de F em $\bar{x} \in (a,b]$ é $f(\bar{x})$, o que conclui a prova da afirmação.

□

Como conseqüência imediata do resultado anterior temos que se f é contínua em $[a,b]$, então a integral indefinida F, dada por (26.3), é diferenciável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Isto pode ser resumido da seguinte forma: *Se f é contínua em $[a,b]$, então sua integral indefinida é uma antiderivada de f.*

Veremos a seguir que, em geral, a integral indefinida não precisa ser uma antiderivada: seja porque a derivada da integral indefinida não existe, seja porque essa derivada não é igual a f.

Exemplos 26.2

(a) Se $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ em $[-1,1]$, então $f \in \mathcal{R}[-1,1]$ e tem a integral indefinita $F(x) := |x| - 1$ com ponto-base em -1. No entanto, como $F'(0)$ não existe, F não é uma antiderivada de f em $[-1,1]$.

(b) Seja $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função de Thomae, considerada no Exemplo 24.1(f), definida por $g(x) := 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional, $g(0) := 0$ e por $g(x) := 1/n$ se $x \in [0,1]$ é um número racional, e $x = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$ não possuem divisores comuns a não ser 1. Então sua integral indefinida $G(x) := \int_0^x g$ é identicamente 0 em $[0,1]$, pois $g \geq 0$ e assim temos $0 \leq \int_0^x g \leq \int_0^1 g = 0$, como vimos no Exemplo 24.1(f). Em particular, temos $G'(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto, $G'(x) \neq g(x)$ para $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, de modo que G não é uma antiderivada de g em $[0,1]$.

Mudança de Variáveis

O Teorema a seguir justifica o método da mudança de variáveis muito utilizado para computar integrais, já estudado nos cursos de Cálculo.

Teorema 26.4 (Mudança de Variáveis)
Seja $J := [\alpha, \beta]$ e suponhamos que $\varphi : J \to \mathbb{R}$ possui derivada contínua em J. Se $f : I \to \mathbb{R}$ é contínua num intervalo I contendo $\varphi(J)$, então

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx. \tag{26.5}$$

Prova: Definamos $F(x) := \int_{\varphi(\alpha)}^x f(s)\, ds$ para $x \in I$; F é uma integral indefinida de f com ponto-base em $\varphi(\alpha)$. Seja $G(t) := F(\varphi(t))$ para $t \in J$. Pela Regra da Cadeia, temos $G'(t) = F'(\varphi(t))\, \varphi'(t) = f(\varphi(t))\, \varphi'(t)$, onde na última igualdade aplicamos o Teorema Fundamental 26.3. Como $G(\alpha) = 0$, o Teorema Fundamental 26.2 implica

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(s)\, ds = F(\varphi(\beta)) = G(\beta) = G(\beta) - G(\alpha) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

$\square$

Exemplos 26.3

(a) $\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^2 \cos t \, dt = 1/3$.

De fato, tomando $\varphi(t) = \operatorname{sen} t$, $J = [0, \pi/2]$ e $f(x) = x^2$, podemos aplicar o Teorema 26.4 para obter

$$\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} t)^2 \cos t \, dt = \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

(b) Seja $I(a) := \int_{a^2}^{(\pi/2)^2} \dfrac{\operatorname{sen} \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, dt$ para $a \in (0, \pi/2]$. Então, $I(a) = 2\cos a$. Em particular, $I(0+) = 2$.

De fato, se $\varphi(t) := \sqrt{t}$ para $t \in [a^2, (\pi/2)^2]$, então $\varphi'(t) = 1/(2\sqrt{t})$ é contínua em $[a^2, (\pi/2)^2]$. Tomando $f(x) := 2 \operatorname{sen} x$, então o integrando tem a forma $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ e podemos aplicar o Teorema 26.4 para obter

$$I(a) = \int_a^{\pi/2} 2 \operatorname{sen} x \, dx = -2\cos x|_{x=a}^{\pi/2} = 2\cos a,$$

como afirmado. Claramente, $I(0+) = \lim_{a \to 0+} I(a) = 2$.

Exercícios 26.1

1. Se $n \in \mathbb{N}$, mostre que o Teorema Fundamental 26.2 implica $\int_a^b x^n \, dx = (b^{n+1} - a^{n+1})/(n+1)$. Quem é o onjunto finito E neste caso?

2. Se $f(x) := -x$ para $x < 1$ e $f(x) := x$ para $x \geq 1$ e se $F(x) := \frac{1}{2}|x^2 - 1|$, mostre que $\int_{-2}^3 f(x) \, dx = F(3) - F(-2) = 5/2$.

3. Seja $F(x) := -\frac{1}{2}x^2$ para $x < 0$ e $F(x) := \frac{1}{2}x^2$ para $x \geq 0$. Mostre que $\int_a^b |x| \, dx = F(b) - F(b)$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma antiderivada de f em $[a, b]$, mostre que $F_c(x) := F(x) + c$ também é uma antiderivada de f em $[a, b]$.

   (b) Se F_1 e F_2 são antiderivadas de f em $[a, b]$, mostre que $F_1 - F_2$ é uma função constante em $[a, b]$.

5. Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e se $c \in [a, b]$, a função definida por $F_c(x) := \int_c^x f$ para $x \in [a, b]$ é chamada a **integral indefinida** de f com **ponto-base** c. Encontre uma relação entre F_a e F_c.

6. Seja $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e defina $F(x) := \int_a^x f$ para $x \in [a, b]$.

(a) Determine $G(x) := \int_x^b f$ em termos de F.

(b) Determine $H(x) := \int_x^{\operatorname{sen} x} f$ em termos de F.

7. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e seja $v : [c, d] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $[c, d]$ com $v([c, d]) \subset [a, b]$. Se definirmos $G(x) := \int_a^{v(x)} f$, mostre que $G'(x) := f(v(x))\, v'(x)$ para todo $x \in [c, d]$.

8. Encontre F' quando F é definida em $[0, 1]$ por:

   (a) $F(x) := \int_0^{x^2} (1 + t^3)^{-1}\, dt$.

   (b) $F(x) := \int_{x^2}^{x} \sqrt{1 + t^2}\, dt$.

9. Se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e $\int_0^x f = \int_x^1 f$ para todo $x \in [0, 1]$, mostre que $f(x)0$ para todo $x \in [0, 1]$.

10. Use o Teorema 26.4 (Mudança de Variáveis) para calcular as seguintes integaris.

    (a) $\int_0^1 t\sqrt{1 + t^2}\, dt$;

    (b) $\int_0^2 t^2(1 + t^3)^{-1/2}\, dt$;

    (c) $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\, dt$;

    (d) $\int_1^4 \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\, dt$.