Aula 24 – A Integral de Riemann

Metas da aula: Definir a integral de Riemann e dar vários exemplos onde o cálculo da integral de funções particulares é feito a partir da definição.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber a definição de integral de Riemann de uma função;
- Saber utilizar a definição de integral para o cálculo de integrais das funções mais simples;
- Saber utilizar a definição de integral para provar suas propriedades mais elementares;

Introdução

Nesta aula vamos definir a integral de Riemann como limite das somas de Riemann quando a norma das partições tende a zero, como é usualmente feito nos cursos de cálculo. Nestes é comum se enfatizar a interpretação geométrica da integral como a área sob o gráfico de uma função não-negativa, bem como suas diversas aplicações em física, engenharia, economia, etc. Aqui vamos focalizar os aspectos puramente matemáticos da integral.

Uma vez definida a integral de uma função f num intervalo $[a, b]$, apresentaremos exemplos onde calculamos a integral de certas funções usando apenas a definição dada. Em seguida provaremos o Teorema da Limitação que afirma que uma função integrável à Riemann num intervalo $[a, b]$ é necessariamente limitada.

Estabeleceremos também uma propriedade da integral bastante conhecida desde os cursos de Cálculo, que é o fato de que combinações lineares de funções integráveis são também funções integráveis cujas integrais são as combinações lineares correspondentes das respectivas funções.

Ao final definiremos somas superiores e inferiores de uma função e daremos uma caracterização para funções integráveis num intervalo $[a, b]$ através dessas somas.

Partições e Partições Aferidas

Se $I := [a, b]$ é um intervalo limitado em $\mathbb{R}$, então uma **partição** de I é um conjunto finito ordenado $\mathcal{P} := (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ de pontos em I tais que

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Os pontos de $\mathcal{P}$ servem para dividir $I = [a, b]$ em subintervalos sucessivos

$$I_1 := [x_0, x_1], \quad I_2 := [x_1, x_2], \ldots, \quad I_{n-1} := [x_{n-2}, x_{n-1}], \quad I_n := [x_{n-1}, x_n].$$

Com o objetivo de chamar a atenção para os subintervalos da partição $\mathcal{P}$ freqüentemente escreveremos $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$.

Definimos a **norma** da partição $\mathcal{P}$ como o número

$$\|\mathcal{P}\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}. \tag{24.1}$$

Portanto, a norma de uma partição é meramente o comprimento do maior dentre os subintervalos no qual a partição subdivide $[a, b]$. Claramente, várias partições podem ter a mesma norma, de modo que a partição *não* é uma função da norma.

Dada uma partição $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ e uma escolha de n pontos $t_i \in I_i = [x_{i-1}, x_i]$, chamamos uma **partição aferida** ao conjunto de pares (I_i, t_i), $i = 1, \ldots, n$ e denotamos

$$\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n;$$

os pontos selecionados $t_i \in I_i$ são chamados **aferições**.

Num contexto em que tivermos de nos referir a mais de uma partição aferida associada a uma mesma partição $\mathcal{P}$, além de $\dot{\mathcal{P}}$, utilizaremos também as notações $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}$ ou $\ddot{\mathcal{P}}$ para denotar partições aferidas.

As aferições podem ser escolhidas de maneira totalmente abitrária. Por exemplo, podemos escolher como aferições os extremos à esquerda, ou os extremos à direita, ou os pontos médios, ou, enfim, quaisquer outros pontos nos subintervalos da partição. Observe então que um mesmo ponto pode servir de aferição para dois intervalos consecutivos: $x_i \in I_i \cap I_{i+1}$ e podemos tomar $t_i = t_{i+1} = x_i$, para algum $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Se $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}$ é uma partição aferida, definimos a **soma de Riemann** de uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ como sendo o número

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) := \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{24.2}$$

Vê-se facilmente que se f é positiva em $[a, b]$, então a soma de Riemann (24.2) é a soma das áreas dos n retângulos cujas bases são os subintervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e cujas alturas são os valores $f(t_i)$ correspondentes. (Veja Figura **24.1**.)

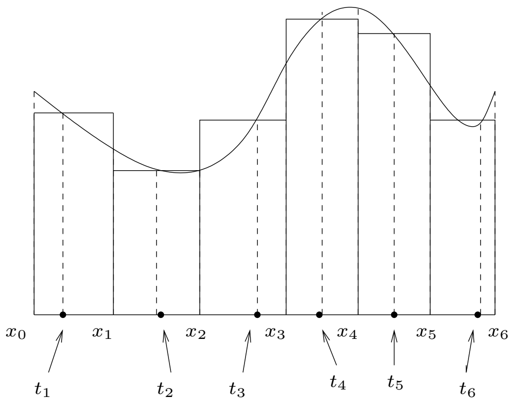

Figura **24.1**: Uma soma de Riemann.

Definição de Integral de Riemann

A seguir definimos a integral de Riemann de uma função f sobre um intervalo $[a, b]$.

Definição 24.1
Diz-se que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é **integrável à Riemann** em $[a, b]$ se existe um número $L \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a, b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon. \tag{24.3}$$

Quando f é integrável à Riemann em $[a, b]$ usamos as notações para representar o número L correspondente:

$$L = \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\, dx.$$

O conjunto de todas as funções integráveis no intervalo $[a, b]$ será denotado $\mathcal{R}[a, b]$.

Observação 24.1
É comum resumir a definição anterior dizendo que a integral $\int_a^b f$ é o "limite" das somas de Riemann $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ quando a norma $\|\dot{\mathcal{P}}\| \to 0$. No entanto, como

$S(f, \dot{\mathcal{P}})$ não é uma função de $\|\dot{\mathcal{P}}\|$, a palavra "limite" assim empregada tem um significado distinto daquele que foi estudado anteriormente para funções, embora a afinidade entre as situações seja bastante visível.

Para que a definição de integral que acabamos de dar faça sentido, precisamos mostrar antes de tudo que o número L está unicamente definido.

Teorema 24.1
Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$, então o valor da integral está unicamente determinado.

Prova: Provaremos este fato por contradição. Suponhamos então que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e que existam dois números distintos L' e L'' satisfazendo a Definição 24.1. Seja $\ell = |L' - L''| > 0$. Tomemos $\varepsilon := \ell/3$ na Definição 24.1. Então existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a, b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então devemos ter

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L'| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - L''| < \varepsilon.$$

Assim, fixada uma tal partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$, teremos

$$\ell = |L' - L''| \leq |L' - S(f; \dot{\mathcal{P}})| + |L'' - S(f; \dot{\mathcal{P}})| < 2\varepsilon = \frac{2\ell}{3},$$

o que é absurdo e, portanto, conclui a prova por contradição.

□

Em seguida veremos alguns exemplos elementares em que usamos a Definição 24.1 para provar que um determinado número, que "chutamos" de início corretamente, corresponde de fato ao valor da integral da função dada em cada caso. Como na situação análoga do limite de funções, nossa tarefa será essencialmente determinar, para cada $\varepsilon > 0$ dado, o número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que vale (24.3) para toda partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \varepsilon$.

Exemplos 24.1

(a) Toda função constante em $[a, b]$ pertence a $\mathcal{R}[a, b]$.

De fato, seja $f(x) := C$ para todo $x \in [a, b]$, onde C é um número real qualquer. Se $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}$ é uma partição aferida qualquer de $[a, b]$, então é claro que

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} C(x_i - x_{i-1}) = C(b - a).$$

Portanto, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos escolher um $\delta > 0$ qualquer, por exemplo $\delta = b - a$, de modo que se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - C(b - a)| = 0 < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = C(b-a)$.

(b) Seja $a < c < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := C_1$ para $a \le x \le c$ e $f(x) := C_2$ para $c < x \le b$, onde C_1 e C_2 são dois números reais quaisquer. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = C_1(c-a) + C_2(b-c)$.

De fato, seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\dot{\mathcal{P}} < \delta$. Temos que $c \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ para algum subintervalo $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ da partição $\mathcal{P}$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$. Claramente temos $x_{i_0} - x_{i_0-1} < \delta$, $c - x_{i_0-1} < \delta$ e $x_{i_0} - c < \delta$. Além disso,

$$\begin{aligned} S(f;\dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{i=1}^{i_0-1} C_1(x_i - x_{i-1}) + f(t_i)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + \sum_{i=i_0+1}^{n} C_2(x_i - x_{i-1}) \\ &= C_1(x_{i_0-1} - a) + f(t_i)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + C_2(b - x_{i_0}) \\ &= C_1(c-a) + C_2(b-c) + f(t_i)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \\ &\qquad - C_1(c - x_{i_0-1}) - C_2(x_{i_0} - c). \end{aligned}$$

Como t_i é um ponto arbitrário em $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, não conhecemos o valor preciso de $f(t_i)$ mas sabemos que $f(t_i) \in \{C_1, C_2\}$. Em particular, temos que $|f(t_1)| \le |C_1| + |C_2|$. Por conseguinte, temos

$$\begin{aligned} |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (C_1(c-a) + C_2(b-c))| &\le |f(t_i)|(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \\ &\quad + |C_1|(c - x_{i_0-1}) + |C_2|(x_{i_0} - c) \\ &\le 3(|C_1| + |C_2|)\delta. \end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, para que tenhamos $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (C_1(c-a) + C_2(b-c))| < \varepsilon$ basta tomarmos $\delta > 0$ tal que $3(|C_1| + |C_2|)\delta < \varepsilon$, ou seja, $\delta < \varepsilon/(3(|C_1| + |C_2|))$. Podemos então refazer os passos anteriores e obter que $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (C_1(c-a) + C_2(b-c))| < \varepsilon$. Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = C_1(c-a) + C_2(b-c)$ como afirmado.

(c) Seja $f(x) := x$ para $x \in [a,b]$. Mostraremos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

De fato, dada uma partição qualquer $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$ de $[a,b]$, com $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, escolhemos inicialmente uma aferição especial para $\mathcal{P}$ tomando os pontos $q_i \in I_i$ definidos por $q_i := \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1})$. Denotemos $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, q_i)\}_{i=1}^n$. Temos

$$f(q_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}(x_1 + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2),$$

e, portanto,

$$S(f;\overset{\bullet}{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

Agora, consideremos uma aferição arbitrária para $\mathcal{P}$ definindo assim uma partição aferida $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e suponhamos que $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Como ambos t_i e q_i pertencem ao subintervalo I_i de comprimento $< \delta$, segue que $|t_i - q_i| < \delta$. Assim, temos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\overset{\bullet}{\mathcal{P}})| = \left|\sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |t_1 - q_i|(x_i - x_{i-1}) < \delta \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta(x_n - x_0) = \delta(b-a).$$

Logo, usando o valor calculado para $-S(f;\overset{\bullet}{\mathcal{P}})$ obtemos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)| < \delta(b-a).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, para que tenhamos $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \frac{1}{2}(b^2 - a^2)| < \varepsilon$ bastará tomarmos $\delta > 0$ tal que $\delta(b-a) < \varepsilon$, ou seja, $\delta < \varepsilon/(b-a)$, e refazermos os passos anteriores. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que a f dada pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$.

(d) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [a,b] \setminus F$, onde $F = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N\}$ é um subconjunto finito de pontos em $[a,b]$. Então $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

De fato, como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tal que para toda partição aferida de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta'(\varepsilon)$, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seja $M := \max\{|f(\xi_1) - g(\xi_1)|, \ldots, |f(\xi_N) - g(\xi_N)|\}$. Dada uma partição aferida de $[a,b]$ qualquer, $\dot{\mathcal{P}}\{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, o subconjunto $F' := \{t_i : i = 1, \ldots, n\} \cap F$ tem no máximo N elementos (por quê?). Assim, temos

$$
\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(g(t_i) - f(t_i))(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\le \sum_{\{i\,:\,t_i\in F'\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(por quê?)} \\
&\le MN\|\dot{\mathcal{P}}\|.
\end{aligned}
$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Tomemos

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \min\{\delta'(\varepsilon),\ \frac{\varepsilon}{2NM}\}.$$

Se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então pela desigualdade triangular temos

$$
\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| &\le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| + |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + NM\delta \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Segue daí que $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$, como afirmado.

Por exemplo, se $g(x) := 1$ para $x = \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}$, e $f(x) := 0$ para $x \in [0,1] \setminus \{\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\}$, então $g \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_0^1 g = 0$.

(e) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [a,b] \setminus E$, onde $E = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots\}$ é um subconjunto enumerável de pontos em $[a,b]$. Suponhamos ainda que

$$\lim_{k\to\infty} |f(\xi_k) - g(\xi_k)| = 0. \tag{24.4}$$

Então $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b f = \int_a^b g.$$

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, por (24.4) sabemos que é possível obter $N = N(\varepsilon)$ tal que se $k > N$, então

$$|f(\xi_k) - g(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Por outro lado, como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, podemos obter $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta'(\varepsilon)$, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Defina, como no ítem anterior, $F := \{\xi_1, \dots, \xi_N\}$, $M := \max\{|f(\xi_1) - g(\xi_1)|, \dots, |f(\xi_N) - g(\xi_N)|\}$ e, dada $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, ponhamos $F' := \{t_i \,:\, i = 1, \dots, n\} \cap F$. Temos

$$\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| &= |\sum_{i=1}^n (g(t_i) - f(t_i))(x_i - x_{i-1})| \\
&\le \sum_{\{i\,:\,t_i\in F'\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&+ \sum_{\{i\,:\,t_i\in E\setminus F'\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \quad \text{(por quê?)} \\
&\le MN\|\dot{\mathcal{P}}\| + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) \qquad \text{(por quê?)} \\
&= MN\|\dot{\mathcal{P}}\| + \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Tomemos

$$\delta = \delta(\varepsilon) := \min\{\delta'(\varepsilon),\ \frac{\varepsilon}{3NM}\}.$$

Se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, novamente pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned}
|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| &\le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| + |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + NM\delta + \frac{\varepsilon}{3} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Concluímos então que $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$, como afirmado.

Por exemplo, se $g(1/n) := 1/n$ para $n \in \mathbb{N}$ e $g(x) := 0$ para $x \in [0,1] \setminus \{1/n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$, então $g \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_0^1 g = 0$.

(f) Suponhamos agora que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e seja $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = f(x)$ para $x \in [a,b] \setminus E$, onde

$$E = \cup_{m=1}^\infty E_m, \qquad E_m = \{\xi_1^m, \xi_2^m, \xi_3^m, \dots\}.$$

Suponhamos também que:

(i) para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} |f(\xi_k^m) - g(\xi_k^m)| = 0; \tag{24.5}$$

(ii) dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > m_0$ então

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} |f(\xi_k^m) - g(\xi_k^m)| < \varepsilon. \tag{24.6}$$

Então $g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b g = \int_a^b f$.

A demonstração desta afirmação é bastante semelhante àquela do ítem anterior. Com efeito, dado $m_0 \in \mathbb{N}$ denotemos

$$\mathcal{A}_1 := \cup_{m=1}^{m_0} E_m, \qquad \mathcal{A}_2 := \cup_{m=m_0+1}^{\infty} E_m.$$

Em particular, temos $E = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$.

Seja $\tilde{g} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por $\tilde{g}(x) := g(x)$ para $x \in [a,b] \setminus \mathcal{A}_2$ e $\tilde{g}(x) := f(x)$ para $x \in \mathcal{A}_2$. Usando indução em $m_0 \in \mathbb{N}$ e o ítem anterior provamos facilmente que $\tilde{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ e que $\int_a^b \tilde{g} = \int_a^b f$. (Você seria capaz de fornecer os detalhes da prova por indução dessa afirmação sobre $\tilde{g}$?)

Por outro lado, dado qualquer $\varepsilon > 0$, por (24.6) podemos escolher $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{m > m_0,\, k \in \mathbb{N}} |f(\xi_k^m) - g(\xi_k^m)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Fixado um tal $m_0 \in \mathbb{N}$, como $\tilde{g} \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b \tilde{g} = \int_a^b f$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$|S(\tilde{g}; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Agora, dada qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ temos

$$\begin{aligned} |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}})| &\leq \sum_{\{i\,:\,t_i \in \mathcal{A}_2\}} |g(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \qquad \text{(por quê?)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{(por quê?).} \end{aligned}$$

Assim, temos que se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então pela desiguadade triangular temos

$$|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| \leq |S(g;\dot{\mathcal{P}}) - S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}})| + |S(\tilde{g};\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que completa a prova da afirmação.

Como exemplo, consideremos a função de Thomae $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida, como no Exemplo 14.1(h), por $g(x) := 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional, $g(0) := 0$ e por $g(x) := 1/n$ se $x \in [0,1]$ é um número racional e $x = m/n$ onde $m, n \in \mathbb{N}$ não possuem divisores comuns a não ser 1.

Tomando, $E_m = \{m/p_{m,k} \,:\, k \in \mathbb{N}\}$ onde $(p_{m,k})_{k=1}^{\infty}$ é a sucessão preservando a ordem dos números naturais maiores que m que não possuem divisores comuns com m exceto 1. Neste caso, tomando $f(x) := 0$ para $x \in [0,1]$, temos $g(x) = f(x)$ para $x \in [0,1] \setminus E$, com $E = \cup_{m=1}^{\infty} E_m$, e é fácil verificar que são satisfeitas as condições (i) e (ii) da afirmação (por quê?). Logo, $g \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_a^b g = 0$.

O Teorema da Limitação

A seguir vamos mostrar que toda função integrável à Riemann é necessariamente limitada.

Teorema 24.2
Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.

Prova: Suponhamos por contradição que f é uma função ilimitada em $\mathcal{R}[a,b]$ com integral igual a L. Então existe $\delta > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < 1$, o que implica que

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}})| < |L| + 1. \tag{24.7}$$

Agora, seja $\mathcal{Q} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{Q}\| < \delta$. Como $|f|$ não é limitada em $[a,b]$, então existe ao menos um subitervalo em $\mathcal{Q}$, digamos $[x_{k-1}, x_k]$, no qual $|f|$ não é limitada (por quê?).

Escolheremos aferições para $\mathcal{Q}$ que nos conduzirão a uma contradição com (24.7). Aferimos $\mathcal{Q}$ pondo $t_i := x_i$ para $i \neq k$ e escolhemos $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ tal que

$$|f(t_k)(x_k - x_{k-1})| > |L| + 1 + \left| \sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right|.$$

Então segue da desigualdade triangular (na forma $|A + B| \geq |A| - |B|$) que

$$|S(f;\dot{\mathcal{Q}})| \geq |f(t_k)|(x_k - x_{k-1}) - \left| \sum_{i \neq k} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| > |L| + 1,$$

o que contradiz (24.7), concluindo a prova.

□

Algumas propriedades elementares da integral

A seguir usamos a Definição 24.1 para estabelecer as propriedades mais básicas da integral.

Teorema 24.3

(i) Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

(ii) Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $c \in \mathbb{R}$, então $cf \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

(iii) Se $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, então $f + g \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(iv) Se $f_1, \dots, f_n$ estão em $\mathcal{R}[a,b]$ e se $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, então a combinação linear $f := \sum_{i=1}^n c_i f_i$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i$.

Prova: Vamos provar o ítem (iii). As provas dos ítens (i), (ii) e (iv) serão deixadas para você como exercício (veja os exercícios 7, 8 e 9 ao final desta aula).

(iii) Suponhamos $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida de $[a,b]$ qualquer, com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_1| < \varepsilon/2$ e $|S(g;\dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \varepsilon/2$, onde $L_1 := \int_a^b f$ e $L_2 := \int_a^b g$ (por quê?). Agora, $S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) = S(f;\dot{\mathcal{P}}) + S(f;\dot{\mathcal{P}})$ (por quê?). Segue que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$\begin{aligned}|S(f+g;\dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| &= |(S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_1) + (S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2)| \\ &\le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_1| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

o que conclui a prova de (iii).

□

Somas Superiores e Somas Inferiores

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\mathcal{P} = \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ uma partição qualquer de $[a,b]$. Denotemos

$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{e} \quad m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

A **soma superior de f associada a partição** $\mathcal{P}$ é denotada por $S^*(f;\mathcal{P})$ e definida por

$$S^*(f;\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$

A **soma inferior de f associada a partição** $\mathcal{P}$ é denotada por $S_*(f;\mathcal{P})$ e definida por

$$S_*(f;\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

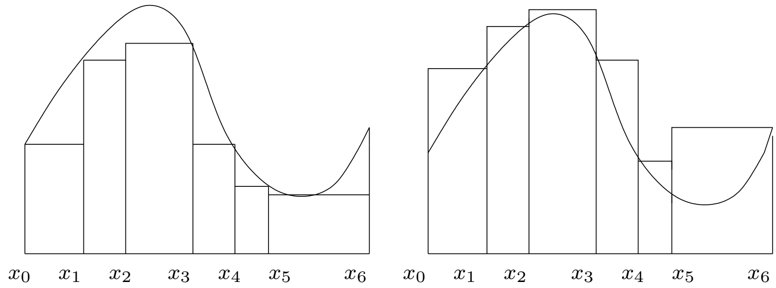

Figura **24.2**: À esquerda uma soma inferior. À direita a soma superior correspondente.

Temos o seguinte resultado que pode servir também para dar uma outra definição equivalente de integral de f em $[a,b]$.

Teorema 24.4
As duas afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Existe um número $L \in \mathbb{R}$ satisfazendo o seguinte. Qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

Nesse caso, temos $L = \int_a^b f$.

Prova: ((i)⇒(ii)) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| < \varepsilon/2$, onde $L = \int_a^b f$. Escolhendo $\dot{\mathcal{P}}$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, tal que

$$M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(t_i) \le M_i,$$

o que é sempre possível pelas propriedades do supremo, obtemos

$$\begin{aligned}
|S^*(f;\mathcal{P}) - L| &\le |S^*(f;\mathcal{P}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |M_i - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Da mesma forma, escolhendo as aferições t_i de modo que

$$m_i \le f(t_i) < m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

o que é sempre possível pelas propriedades do ínfimo, obtemos

$$\begin{aligned}|S_*(f;\mathcal{P}) - L| &\le |S_*(f;\mathcal{P}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

((ii)⇒(i)) Suponhamos agora que f satisfaz a propriedade de que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \varepsilon$, então

$$|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta' = \delta'(\varepsilon/2)$ tal que se $\|\mathcal{P}\| < \delta'$, então

$$|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dada qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, claramente temos $S_*(f;\mathcal{P}) \le S(f;\dot{\mathcal{P}}) \le S^*(f;\mathcal{P})$, onde $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ é a partição de $[a, b]$ correspondente a $\dot{\mathcal{P}}$ (por quê?). Por outro lado, temos

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) \le |S^*(f;\mathcal{P}) - L| + |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Segue então que $S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \varepsilon$ (por quê?). Logo, se $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta = \delta(\varepsilon) := \delta'(\varepsilon/2)$, temos

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - L| \le |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S_*(f;\mathcal{P})| + |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e $L = \int_a^b f$.

□

Exercícios 24.1

1. Se $I := [0, 4]$, calcule as normas das seguintes partições:

   (a) $\mathcal{P}_1 := (0, 1, 2, 4)$;

   (b) $\mathcal{P}_2 := (0, 2, 3, 4)$;

   (c) $\mathcal{P}_3 := (0,\ 0.5\ ,\ 1.5\ ,\ 2\ ,\ 3.4\ ,\ 4)$;

   (d) $\mathcal{P}_4 := (0,\ 0.5\ ,\ 2.5\ ,\ 3.5\ ,\ 4)$.

2. Se $f(x) := x^2$ para $x \in [0, 4]$, calcule as seguintes somas de Riemann, onde $\dot{\mathcal{P}}_i$ corresponde à partição $\mathcal{P}_i$ do exercício anterior aferida como indicado:

(a) $\mathcal{P}_1$ com aferições correspondentes aos extremos à esquerda dos subintervalos;

(b) $\mathcal{P}_1$ com aferições correspondentes aos extremos à direita dos subintervalos;

(c) $\mathcal{P}_2$ com aferições correspondentes aos extremos à esquerda dos subintervalos;

(d) $\mathcal{P}_2$ com aferições correspondentes aos extremos à direita dos subintervalos;

Calcule as somas superiores $S^*(f;\mathcal{P}_3)$, $S^*(f;\mathcal{P}_4)$ e inferiores $S_*(f;\mathcal{P}_3)$, $S_*(f;\mathcal{P}_4)$.

3. Mostre que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável à Riemann em $[a,b]$ se, e somente se, existe um $L\in\mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon>0$ existe um $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer com $\|\dot{\mathcal{P}}\|\le\delta$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}})-L|\le\varepsilon$.

4. Seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição aferida de $[0,3]$.

   (a) Mostre que a união U_1 de todos os subintervalos em $\dot{\mathcal{P}}$ com aferições em $[0,1]$ satisfaz $[0,1-\|\dot{\mathcal{P}}\|]\subset U_1\subset[0,1+\|\dot{\mathcal{P}}\|]$.

   (b) Mostre que a união U_2 de todos os subintervalos em $\dot{\mathcal{P}}$ com aferições em $[1,2]$ satisfaz $[1+\|\dot{\mathcal{P}}\|,2-\dot{\mathcal{P}}\|]\subset U_2\subset[1-\|\dot{\mathcal{P}}\|,2+\|\dot{\mathcal{P}}\|]$.

5. Seja $\dot{\mathcal{P}}:=\{I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição aferida de $[a,b]$ e seja $c_1<c_2$.

   (a) Se u pertence a um subintervalo I_i cuja aferição satisfaz $c_1\le t_i\le c_2$, mostre que $c_1-\|\dot{\mathcal{P}}\|\le u\le c_2+\|\dot{\mathcal{P}}\|$.

   (b) Se $v\in[a,b]$ e satisfaz $c_1+\|\dot{\mathcal{P}}\|\le v\le c_2-\|\dot{\mathcal{P}}\|$, então a aferição t_i de qualquer subintervalo I_i que contenha v satisfaz $t_i\in[c_1,c_2]$.

6. (a) Seja $f(x):=2$ se $0\le x<1$ e $f(x):=1$ se $1\le x<2$. Mostre, usando a definição, que $f\in\mathcal{R}[0,2]$ e calcule sua integral.

   (b) Seja $h(x):=2$ se $0\le x<1$, $h(1):=3$ e $h(x):=1$ se $1<x\le 2$. Mostre que $h\in\mathcal{R}[0,2]$ e calcule sua integral.

7. Se $f,g\in\mathcal{R}[a,b]$ e $f(x)\le g(x)$ para todo $x\in[a,b]$, use a definição de integral para mostrar que $\int_a^b f\le\int_a^b g$. [Dica: Observe que para qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a,b]$ vale $S(f;\dot{\mathcal{P}})\le S(g;\dot{\mathcal{P}})$.]

8. Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $c \in \mathbb{R}$, use a definição de função integrável em $[a,b]$ para mostrar que $cf \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b cf = c\int_a^b f$. [Dica: Observe que para qualquer partição aferida $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a,b]$ vale $S(cf;\dot{\mathcal{P}}) = cS(f;\dot{\mathcal{P}})$.]

9. Use Indução Matemática e os resultados dos dois ítens anteriores para mostrar que se $f_1,\dots,f_n$ estão em $\mathcal{R}[a,b]$ e se $c_1,\dots,c_n \in \mathbb{R}$, então a combinação linear $f := \sum_{i=1}^n c_i f_i$ pertence a $\mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b f = \sum_{i=1}^n c_i \int_a^b f_i$.

10. Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e $|f(x)| \le M$ para todo $x \in [a,b]$, mostre que $\left|\int_a^b f\right| \le M(b-a)$.

11. Se $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e se $(\dot{\mathcal{P}}_k)$ é qualquer seqüência de partições aferidas de $[a,b]$ tais que $\|\dot{\mathcal{P}}_k\| \to 0$, quando $k \to \infty$, prove que $\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} S(f;\dot{\mathcal{P}}_k)$.

12. Seja J um subintervalo qualquer de $[a,b]$ com extremos $c < d$ e $\varphi_J(x) := 1$ para $x \in J$ e $\varphi_J(x) := 0$ para $x \in [a,b]\setminus J$. Mostre que $\varphi_J \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\int_a^b \varphi_J = d-c$. Chamamos a uma tal φ_J de **função degrau elementar**.

13. Uma **função degrau** $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função em $[a,b]$ da forma
$$\varphi := \sum_{l=1}^N k_l \varphi_{J_l},$$
onde os J_l são subintervalos de $[a,b]$ com extremos $c_l < d_l$, cada φ_{J_l} é uma função degrau elementar, e $k_l \in \mathbb{R}$, para $l = 1,\dots,N$. Use os exercícios 7, 8 e 9 anteriores para mostrar que se φ é uma função degrau em $[a,b]$, então $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ e
$$\int_a^b \varphi = \sum_{l=1}^N k_l(d_l - c_l).$$

14. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) := 0$ e $f(x) = 1/2^n$ se $1/2^{n+1} < x \le 1/2^n$, para $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Prove que $f \in \mathcal{R}[0,1]$ e calcule $\int_0^1 f$.