Matemática Discreta – EP2 – Versão aluno, de 2009/1

Observações: Caro aluno, aqui está o EP2, referente as aulas 4 e 5 do Módulo 1. Estas aulas são muito importantes pois nelas você inicia o seu aprendizado das *técnicas básicas de contagem*, através do estudo de dois princípios, o *Princípio da Inclusão-Exclusão* e o *Princípio Aditivo*.

Estes princípios são muito importantes, por duas razões principais:

(1) **Fazem parte do conhecimento básico que todo estudante de matemática deve possuir**;

(2) Serão utilizados na resolução de muitos problemas de contagem bem como nos estudos posteriores de *Probabilidade Discreta*.

Por isso, muita atenção quando usar as notações e os conceitos apresentados nas Aulas 4 e 5: eles são de vital importância para que você consiga resolver muitos dos problemas que serão propostos daqui por diante.

Técnicas básicas de contagem são uma parte importante da *combinatória* que, por sua vez, é um dos ramos da matemática que mais evoluiu, nas últimas décadas. Esta evolução se deve tanto a sua importância teórica quanto a sua ampla gama de aplicações na Computação, na Engenharia, na Química, etc.

Conteúdo:

Este EP2 contém:

- algumas dicas de como estudar as aulas e resolver os exercícios;
- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comenários sobre os exercícios propostos;
- uma dica de textos e sítios na internet aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.
- complementos ao conteúdo dás Aulas 4 e 5.

Como *não* estudar o conteúdo:

A cada semana um novo EP de MD será postado na plataforma, contendo algumas observações sobre o conteúdo das aulas, alguns cometários sobre os exercícios propostos no módulo, e alguns exercícios novos para você testar o seu aprendizado. **Isto não quer dizer, de maneira nenhuma, que os EPs substituem os Módulos e que basta você resolver os EPs para estar preparado para as avaliações. Procure, cada vez mais e sempre, se organizar e estudar detalhadamente os Módulos (previamente e/ou seguindo as dicas dos EPs)** pois isto o ajudará a ter sucesso em nossa disciplina.

Como *não* resolver os exercícios:

Existem muitos exercícios resolvidos, disponíveis nos Módulos e nas referências de MD e, também, na rede de computadores. Uma maneira de se preparar para as avaliações é estudar e analisar algumas destas soluções, referentes ao conteúdo que está sendo estudado. Embora, esta seja uma atividade que pode ser proveitosa, no aprendizado de uma disciplina, cabe ressaltar que **o simples estudo e/ou análise de exercícios resolvidos por outras pessoas não**

é, na maioria das vezes, suficiente para levar um estudante a desenvolver as suas próprias habilidades matemáticas. Procure, cada vez mais e sempre, se organizar, estudar detalhadamente os Módulos e EPs e resolver —sem copiar as soluções— o máximo de exercícios que você puder.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 4 e 5 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O Princípio da Inclusão-Exclusão (PIE) para 2 e 3 conjuntos;
- O Princípio Aditivo (PA) para n conjuntos.

Tanto o PIE quanto o PA serão aplicados na resolução de problemas de contagem e, posteriormente, na resolução de problemas de Probabildade Discreta.

Sobre a Aula 4:

- **Página 35:** Você não precisa estudar o conteúdo desta página.
- **Página 36:** Você não precisa estudar o conteúdo desta página.
- **Página 37:** Você pode começar a estudar o conteúdo desta página (e, portanto, a Aula 4) a partir das duas linhas acima do Exemplo 25 e do próprio Exemplo 25.
- **Página 38:** Na *Solução* do Exemplo 26, os conjuntos especificados sevem ser:

  $$B = \{x \in U \mid x \text{ á aluno que quer fazer Bacharelado}\}$$

  e

  $$L = \{x \in U \mid x \text{ á aluno que quer fazer Licenciatura}\},$$

  onde U é o conjunto dos alunos da turma em que a pesquisa foi feita.
- **Página 39:** A expressão "partes de $B \cup L$" que aparece nas explicações deve ser lida como "partes de $B \cup L$ indicadas no diagrama de Venn".
- **Página 39:** Uma maneira mais adequada de escrever a frase que precede o Exemplo 27 é:

  > Substituindo o valor de x no diagrama de Venn acima e efetuando as operações indicadas, obtemos o número de elementos de cada uma das regiões $B - L$, $B \cap L$ e $L - B$.
- **Página 41:** A expressão "partes de $A \cup B \cup C$" deve ser lida como "partes de $A \cup B \cup C$ indicadas no diagrama de Venn".
- **Página 42:** No Resumo, nesta Aula 4, e em tudo o que segue no curso de MD, sempre que nos referirmos a determinação do número de elementos de conjuntos, tenha sempre em mente que estamos nos referindo a *conjuntos finitos.*
- **Página 44–46:** Você não precisa estudar o conteúdo destas páginas.

Sobre a Aula 5:

- **Página 47:** A expressão "Representamos este problema por quatro regiões" que aparece nas explicações deve ser lida como "Representamos este problema por quatro regiões, usando um diagrama de Venn para 3 conjuntos".
- **Página 48:** Deletar as circunferências rotuladas com o numeral 2 —mas não o numeral 2— que ocorrem nos diagramas de Venn que aparecem nas explicações. Observe que, de acordo com as convenções sobre o uso dos diagramas de Venn, a região externa as circunferências que representam os três conjuntos D, M e A é disjunta do interior das mesmas e, por isso, não é necessário isolar a região que representa o conjunto G.

- **Página 50:** No enunciado do Princípio da Inclusão-Exclusão para três conjuntos, e em tudo o que segue nesta Aula 5, está subentendido que estamos tratando de conjuntos finitos.
- **Página 50:** Observe que o conceito "disjuntos dois a dois"' não significa o mesmo que "ter interseção vazia", isto é n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podem ser tais que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ sem serem disjuntos dois a dois.

  Por exemplo, os conjuntos $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ são tais que $\{1,2\} \cap \{1,3\} \cap \{2,3\} = \emptyset$ mas não são disjuntos dois a dois.

  Formalmente, temos:

  - Se os conjuntos $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ são disjuntos dois a dois, então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$;
  - Existem conjuntos $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ tais que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ mas $A_1, A_2, \ldots, A_n$ não são disjuntos dois a dois.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 4, Exercícios 4–8. Sua habilidade em determinar o número de elementos de conjuntos definidos pela aplicação das operações a outros conjuntos será muito útil no estudo das Probabilidades.
- Aula 5, Exercícios 1–6. Cedo ou tarde, alguém exigirá que você resolva um exercício desse tipo.

  Exercício 7. Considere o diagrama de Venn para três conjuntos com os círculos rotulados com A, B e C e a região externa aos círculos rotulada com D. Observe que a informação de que as pessoas que votaram no Partido D nunca votaram em nenhum outro partido nos pemite usar um diagrama desta forma. Sem esta informação, teríamos que utilizar um *diagrama para quatro conjuntos.*

Bibliografia sobre Combinatória de Contagem:

Para mais informações sobre a Combinatória de Contagem, principalmente sobre as técnicas básicas utilizadas nesta disciplina, você pode consultar os seguintes textos:

- S. Hazzan. *Combinatória e Probabilidade.* Fundamentos de Matemática Elementar, volume 5. Atual, Rio de Janeiro, s.d.
- A.C. de O. Morgado, J.B.P. de Carvalho, P.C.P. Carvalho e P. Fernandez. *Análise Combinatória e Probabilidade: com as soluções dos exercícios.* Sexta edição. SBM, Rio de Janeiro, 2004.
- J.P.O. Santos e E.L. Estrada. *Problemas Resolvidos de Combinatória.* Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.
- J.P.O. Santos, M.P. de Mello e I.T.C. Murari. *Introdução à Análise Combinatória.* 4ª edição revista. Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.

Sítios sobre Diagramas de Venn:

O estudo da existência e da configuração dos Diagramas de Venn é um dos estudos mais fascinantes da combinatória, utilizando ferramentas de várias partes da matemática. Na verdade, pode-se provar que existem Diagramas de Venn para um número qualquer de conjuntos e não só para um, dois e três conjuntos, que são os únicos casos tratados em nossos estudos de MD. Para visualizar Diagramas de Venn para 4 e 5 conjuntos, consulte os sítios:

http://math.gmu.edu/ eobrien/Venn4.html
http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennSymmEJC.html

Alguns exercícios para fixação:

1. Uma indústria de perfumes está desenvolvendo um novo sabonete e contratou uma empresa de pesquisa de opinião para realizar uma pesquisa de mercado. A indústria queria saber quais dentre os itens *perfume*, *fácil produção de espuma* e *ingredientes naturais* os possíveis consumidores consideram mais relevantes na decisão de compra de um sabonete. A empresa de opinião, num universo de 450 entrevistados, coletou os seguintes dados sobre as preferências:

Consumidores	**Consideram mais relevantes**
425	Perfume
397	Fácil produção de espuma
340	Ingredientes naturais
284	Perfume e fácil produção de espuma
315	Perfume e ingredientes naturais
219	Fácil produção de espuma e ingredientes naturais
147	Todos os três fatores

   Um dos diretores da indústria questionou a legitimidade da pesquisa. Outro disse que os dados eram legítimos. Para resolver a questão de forma pacífica, os outros diretores não envolvidos diretamente na disputa, contrataram você —aluno de Matemática Discreta— para avaliar os dados apresentados. Qual foi a decisão que você apresentou em seu relatório para os diretores da empresa? Como ela foi justificada?

2. (a) Observe o diagrama de Venn para um conjunto, apresentando na página 28 do Módulo 1. Ele define duas regiões, que podem ser denominadas pelas expressões A e A^c.

   (b) Observe, agora, o diagrama de Venn para dois conjuntos, apresentando na página 26 do Módulo 1. Ele define quatro regiões. Denomine estas regiões, usando as expressões $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ e $A^c \cap B^c$.

   (c) Observe, agora, o diagrama de Venn para três conjuntos, apresentando na página 29 do Módulo 1. Ele define oito regiões. Denomine estas regiões, usando expressões formadas a partir das letras D,A e V pelo uso das operações de interseção e complementação.

3. (a) Em primeiro lugar, estude detalhadamente a justificativa do PIE para dois conjuntos dada na página 38 do Módulo 1.

   (b) Agora, resolva o Exercício 8 da Aula 5, seguindo a dica dada pelos autores.

Soluções comentadas:

1. A decisão apresentada é que os dados são inconsistentes. A justificativa consiste em, primeiramente, definir os seguintes conjuntos:

$$A = \{x : x \text{ considera perfume}\},$$

$$B = \{x : x \text{ considera fácil produção de espuma}\},$$

$$C = \{x : x \text{ considera ingredientes naturais}\}.$$

Agora, observar que, segundo os dados levantados, temos: $n(A \cup B \cup C) = 450$, $n(A) = 425$, $n(B) = 397$, $n(C) = 340$, $n(A \cap B) = 284$, $n(A \cap C) = 315$, $n(B \cap C) = 219$, e $n(A \cap B \cap C) = 147$. E que, segundo o PIE para três conjuntos, temos: $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$. Por fim, substituindo os dados na fórmula, temos:

$$450 = 425 + 397 + 340 - 284 - 315 - 219 + 147,$$

o que nos leva a:

$$450 = 491,$$

uma contradição.

2. (c) As regiões devem ser denominadas $D \cap A \cap V$, $D \cap A \cap V^c$, $D^c \cap A \cap V$, $D \cap A^c \cap V$, $D \cap A^c \cap V^c$, $D^c \cap A \cap V^c$, $D^c \cap A^c \cap V$, $D^c \cap A^c \cap V^c$.

3. Sejam A, B e C conjuntos finitos.

   Como $n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C)$, pelo PIE para dois conjuntos, temos:

   $n(A \cup B \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C)$. (1)

   Vamos, agora, reescrever $n(A \cup B)$ e $n((A \cup B) \cap C)$.

   Pelo PIE para dois conjuntos, temos: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

   Além disso, como $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$, mais uma vez, pelo PIE para dois conjuntos, temos:

   $n((A\cup B)\cap C) = n(A\cap C)+n(B\cap C)-n((A\cap C)\cap(B\cap C)) = n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$.

   Substituindo as expressões obtidas em (1), temos:

   $n(A\cup B\cup C) = [n(A)+n(B)-n(A\cap B)]+n(C)-[n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)] = n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

   Assim, concluímos que $n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$.

O Princípio da Bijeção

Daqui em diante você vai encontrar uma série de exercícios que têm por objetivo aprimorar as suas habilidades em resolver questões de contagem, referentes a determinação da quantidade de elementos pertencentes a conjuntos numéricos. Questões deste tipo não são raras em textos de Combinatória de Contagem e demandam do estudante, apenas, alguma familiaridade com raciocínios bem básicos.

Esses raciocínios são, usualmente, simples aplicações de um princípio básico chamado *Princípio da Bijeção* (PB). O PB é frequentemente usado na solução de problemas de contagem mas é tão básico que, na grande maioria das vezes, seu uso não é sequer notado, quanto mais explicitamente enunciado. Para enunciar adequadamente o PB, necessitamos do conceito de correspondência um-a-um ou bijeção.

Uma *bijeção* entre dois conjuntos A e B é uma maneira de associar os elementos de A e os elementos de B, de modo que cada elemento de A esteja associado a um único elemento de B e cada elemento de B esteja associado a um único elemento de A.

Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$, uma bijeção entre seus elementos é dada na figura:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 2 \\ 2 & \leftrightarrow & 3 \\ 3 & \leftrightarrow & 5 \\ 4 & \leftrightarrow & 7 \end{array}$$

A idéia de que, para definir uma bijeção entre os conjuntos A e B, devemos associar cada elemento de A a um elemento de B e um elemento de B a cada elemento de A, nos leva a considerar que quando existe uma bijeção entre dois conjuntos, eles possuem a mesma quantidade de elementos.

Princípio da Bijeção Seja A um conjunto finito. Se existe uma bijeção entre os elementos de A e os elementos de um conjunto B, tal que $n(B) = n$, então $n(A) = n$.

Em se tratando da determinação de elementos em conjuntos numéricos, os alunos, geralmente, não elaboram as soluções simples ilustradas abaixo, utilizando o PB. Desta maneira, perdem um tempo precioso que deveria ser destinado a questões mais elaboradas, usando conceitos como Progressões Aritméticas e ouros, para contar o número de elementos de conjuntos que podem ser determinados diretamente.

Alguns exercícios para fixação:

O objetivo dos exercícios abaixo é desenvolver as suas habilidades em, dado um conjunto $A \subset \mathbb{N}$, contar quantos elementos de A satisfazem a certas condições.

A. Contando números em sequência:

1. Considere a seguinte tabela:

Conjunto	Número de elementos
$\{1\}$	1
$\{1, 2\}$	2
$\{1, 2, 3\}$	3
$\{1, 2, 3, 4\}$	4
$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	5

Baseado *apenas* na tabela acima, responda:

(a) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 15\}$?

(b) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 123\}$?

(c) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq n\}$, onde n é um número natural não nulo?

2. Considere a seguinte tabela:

Conjunto	Conjunto transladado	Número de elementos
$\{5, \ldots, 78\}$	$\{1, \ldots, 74\}$	74
$\{27, \ldots, 332\}$	$\{1, \ldots, 306\}$	306

Baseado *apenas* na tabela acima, e no item (c) do Exercício 1, responda:

(a) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 25 \leq x \leq 79\}$?

(b) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 334\}$?

(c) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : m \leq x \leq n\}$, onde m e n são números naturais não nulos, com $1 < m < n$?

(d) Quantos elementos tem o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : m < x < n\}$, onde m e n são números naturais não nulos, com $1 < m < n$?

B. Contando múltiplos:

3. Considere o seguinte raciocínio:

> Seja A o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, de números naturais. De cada dois elementos consecutivos em A, um é par. Assim, em A, metade dos elementos são números pares. Como $n(A) = 100$, temos que A possui $\dfrac{100}{2} = 50$ números pares.

Empregando raciocínios análogos ao elaborado acima, responda:

(a) Quantos elementos do conjunto $B = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 99\}$ são múltiplos de três?

(b) Quantos elementos do conjunto $C = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 168\}$ são múltiplos de quatro?

(c) Quantos elementos do conjunto $D = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 468\}$ são múltiplos de dois e de três, simultaneamente?

(d) Quantos elementos do conjunto $E = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 167\}$ são múltiplos de três?

Soluções comentadas:

1. (a) 15 elementos; (b) 123 elementos; (c) n elementos.

2. (a) O conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 25 \leq x \leq 79\}$ tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 55\}$, ou seja, 55 elementos.

   (b) O conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 334\}$ tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 333\}$ que, por sua vez, tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 332\}$, ou seja, 332 elementos.

   (c) O conjunto $\{x \in \mathbb{N} : m \leq x \leq n\}$, onde m e n são números naturais não nulos, com $1 < m < n$, tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : m \leq x \leq n - (m-1)\}$, ou seja, $n - (m-1)$ elementos.

   (d) O conjunto $\{x \in \mathbb{N} : m < x < n\}$, onde m e n são números naturais não nulos, com $1 < m < n$, tem a mesma quantidade delementos que o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : m+1 \leq x \leq n-1\}$ que, por sua vez, tem a mesma quantidade de elementos que o conjunto $\{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq (n-1) - m\}$, ou seja, $(n-1) - m$ elementos.

3. (a) De cada três elementos consecutivos em B, um é múltiplo de 3. Assim, em B, um terço dos elementos são múltiplos de 3. Como $n(B) = 99$, temos que B possui $\dfrac{99}{3} = 33$ múltiplos de 3.

   (b) De cada quatro elementos consecutivos em C, um é múltiplo de 4. Assim, em C, um quarto dos elementos são múltiplos de 4. Como $n(C) = 168$, temos que C possui $\dfrac{168}{4} = 42$ múltiplos de 4.

   (c) Observe que um número é múltiplo de 2 e de 3 se, e somente se, ele é múltiplo de 6. De cada seis elementos consecutivos em D, um é múltiplo de 6. Assim, em D, um sexto dos elementos são múltiplos de 6. Como $n(D) = 468$, temos que D possui $\dfrac{468}{6} = 78$ múltiplos de 6.

   (d) Observe que os elementos do conjunto E que são múltiplos de três são os mesmos do conjunto $F = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 165\}$ que são múltiplos de 3. Como $n(F) = 165$, temos que E possui $\dfrac{165}{3} = 55$ múltiplos de 3.