Matemática Discreta – EP2 – 2007/2

Observações: Caro aluno, aqui está o EP2, referente as aulas 4 e 5 do Módulo 1. Nestas aulas você iniciará o seu aprendizado das *técnicas básicas de contagem*. O conteúdo apresentado nestas aulas, e nas aulas seguintes, é muito importante, por duas razões principais:

(1) **Faz parte do conhecimento básico que todo estudante de matemática deve possuir**;

(2) Será utilizado nos estudos posteriores de *Probabilidade Discreta*.

Este EP2 contém:

- algumas dicas de como estudar as aulas e resolver os exercícios;
- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- uma dica de sítio na internet aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Como estudar o conteúdo:

Sugerimos que você siga as mesmas dicas já expostas no EP1, de como estudar o conteúdo. Ou seja, para o estudo das aulas, sugerimos que você efetue os passos a seguir (estes passos também podem ser aplicados no estudo de todas as aulas que estão por vir):

1. Estude o texto, acompanhando os comentários que são feitos sobre cada aula, em cada EP.
2. Leia o texto atentamente, procurando compreender cada conceito e propriedade, através dos exemplos que são apresentados.
3. Após compreeder a informação contida neles, memorize todos os textos dentro dos retângulos, que estão em destaque.
4. Anote todas as suas dúvidas num caderno, da maneira mais clara possível, e entre em contato com o(s) tutor(es) presencial(is) ou à distância ou, ainda, com outros alunos, na tentativa de esclarecê-las.
5. Se um conteúdo parecer um pouco mais difícil, em um primeiro (ou segundo) contato, não desanime: descanse um pouco a cabeça e volte a estudá-lo mais tarde.

Como resolver os exercícios:

Sugerimos que você siga as mesmas dicas já expostas no EP1, de como resolver os exercícios. Ou seja, para a resolução de cada exercício, sugerimos que você efetue os passos a seguir (estes passos também podem ser aplicados na resolução de todos os outros EPs e ADs que estão por vir):

1. Faça uma revisão detalhada dos conteúdos apresentados nas aulas em questão. Esclareça as dúvidas que ainda persistam com o(s) tutor(es).
2. Para cada questão: leia seu enunciado, procure entendê-lo completamente e faça uma lista preliminar dos conteúdos que você acha que serão usados na sua resolução.
3. Antes de tentar resolver cada questão, use a lista obtida no passo anterior para certificar-se de que você domina os conceitos, notações e resultados envolvidos.

4. Agora, sim, comece a resolver a questão, respondendo cada item proposto de forma clara e objetiva, utilizando, se possível, a linguagem e o estilo dos módulos.
5. Se durante a resolução das questões você tiver dúvidas, discuta-as com os tutores ou com outros alunos.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 4 e 5 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O Princípio da inclusão-exclusão para 2 e 3 conjuntos;
- O princípio aditivo para n conjuntos.

Este último é um princípio básico que será usado nas Aulas 6–11, em conjunto com os outros princípios que serão introduzidos.

Sobre a Aula 4:

- **Página 35:** Você não precisa estudar o conteúdo desta página.
- **Página 36:** Você não precisa estudar o conteúdo desta página.
- **Página 37:** Você pode começar a estudar o conteúdo desta página (e, portanto, a Aula 4) a partir das duas linhas acima do Exemplo 25 e do próprio Exemplo 25.
- **Página 38:** Na *Solução* do Exemplo 26, os conjuntos especificados sevem ser:

  $$B = \{x \in U \mid x \text{ é aluno que quer fazer Bacharelado}\}$$

  e

  $$L = \{x \in U \mid x \text{ é aluno que quer fazer Licenciatura}\},$$

  onde U é o conjunto dos alunos da turma em que a pesquisa foi feita.
- **Página 39:** A expressão "partes de $B \cup L$" que aparece nas explicações deve ser lida como "partes de $B \cup L$ indicadas no diagrama de Venn".
- **Página 39:** Uma maneira mais adequada de escrever a frase que precede o Exemplo 27 seria:

  > Substituindo o valor de x no diagrama de Venn acima e efetuando as operações indicadas, obtemos o número de elementos de cada uma das regiões $B - L$, $B \cap L$ e $L - B$.
- **Página 41:** A expressão "partes de $A \cup B \cup C$" deve ser lida como "partes de $A \cup B \cup C$ indicadas no diagrama de Venn".
- **Página 42:** No Resumo, nesta Aula 4, e em tudo o que segue no curso de MD, sempre que nos referirmos a determinação do número de elementos de conjuntos, tenha sempre em mente que estamos nos referindo a *conjuntos finitos.*
- **Página 44–46:** Você não precisa estudar o conteúdo destas páginas.

Sobre a Aula 5:

- **Página 47:** A expressão "Representamos este problema por quatro regiões" que aparece nas explicações deve ser lida como "Representamos este problema por quatro regiões, usando um diagrama de Venn para 3 conjuntos".

- **Página 48:** Deletar as circunferências rotuladas com o numeral 2 —mas não o numeral 2— que ocorrem nos diagramas de Venn que aparecem nas explicações. Observe que, de acordo com as convenções sobre o uso dos diagramas de Venn, a região externa as circunferências que representam os três conjuntos D, M e A é disjunta do interior das mesmas e, por isso, não é necessário isolar a região que representa o conjunto G.
- **Página 50:** No enunciado do Princípio da Inclusão Exclusão para três conjuntos, e em tudo o que segue nesta Aula 5, está subentendido que estamos tratando de conjuntos finitos.
- **Página 50:** Observe que o conceito "disjuntos dois a dois"' não significa o mesmo que "ter interseção vazia", isto é n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podem ser tais que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ sem serem disjuntos dois a dois.

  Por exemplo, os conjuntos $\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}$ são tais que $\{1,2\} \cap \{1,3\} \cap \{2,3\} = \emptyset$ mas não são disjuntos dois a dois.

  Formalmente, temos:

  - Se os conjuntos $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ são disjuntos dois a dois, então $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$;
  - Existem conjuntos $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ tais que $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$ mas $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ não são disjuntos dois a dois.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 4, Exercícios 4–8. Sua habilidade em determinar o número de elementos de conjuntos definidos pela aplicação das operações a outros conjuntos será muito útil no estudo das Probabilidades.
- Aula 5, Exercícios 1–6. Cedo ou tarde, alguém exigirá que você resolva um exercício desse tipo.

  Exercício 7. Considere o diagrama de Venn para três conjuntos com os círculos rotulados com A, B e C e a região externa aos círculos rotulada com D. Observe que a informação de que as pessoas que votaram no Partido D nunca votaram em nenhum outro partido nos pemite usar um diagrama desta forma. Sem esta informação, teríamos que utilizar um diagrama para quatro conjuntos.

Informações extras:

Para visualizar Diagramas de Venn para 4 e 5 conjuntos, consulte os sítios:

http://math.gmu.edu/ eobrien/Venn4.html

http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennSymmEJC.html

Alguns exercícios para fixação:

As Aulas 4 e 5 do Módulo 1 contém uma quantidade suficiente de exercícios aritméticos. Por isso, vamos tratar de exercícios algébricos envolvendo conteúdos e habilidades que serão úteis posteriormente.

1. (a) Observe o diagrama de Venn para um conjunto, apresentando na página 28 do Módulo 1. Ele define duas regiões, que podem ser denominadas pelas expressões A e A^c.

   (b) Observe, agora, o diagrama de Venn para dois conjuntos, apresentando na página 26 do Módulo 1. Ele define quatro regiões. Denomine estas regiões, usando as expressões $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ e $A^c \cap B^c$.

   (c) Observe, agora, o diagrama de Venn para três conjuntos, apresentando na página 29 do Módulo 1. Ele define oito regiões. Denomine estas regiões, usando expressões formadas a partir das letras D,A e V pelo uso das operações de intereseção e complementação.

2. (a) Em primeiro lugar, estude detalhadamente a justificativa do PIE para dois conjuntos dada na página 38 do Módulo 1.

   (b) Agora, resolva o Exercício 8 da Aula 5, seguido a dica dada pelos autores.

3. Para resolver este exercício, você deve revisar o Exercício 2 acima e estar, realmente, dominando o PIE para três conjuntos.

   (a) Enuncie o princípio da inclusão-exclusão para quatro conjuntos.

   (b) Prove o princípio da inclusão-exclusão para quatro conjuntos usando o PIE para três conjuntos.

Soluções comentadas:

1. (c) As regiões devem ser denominadas $D \cap A \cap V$, $D \cap A \cap V^c$, $D^c \cap A \cap V$, $D \cap A^c \cap V$, $D \cap A^c \cap V^c$, $D^c \cap A \cap V^c$, $D^c \cap A^c \cap V$, $D^c \cap A^c \cap V^c$.

2. Está com dúvidas sobre a sua solução? Escreva para o Coordenador de MD e converse com ele.

3. (a) Sejam A, B, C e D conjuntos finitos. Então:

$$\begin{aligned}
&n(A \cup B \cup C \cup D) = \\
&n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - \\
&n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + \\
&n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - \\
&n(A \cap B \cap C \cap D).
\end{aligned}$$

   (b) Sejam A, B, C e D conjuntos finitos.

   Como $n(A \cup B \cup C \cup D) = n((A \cup B \cup C) \cup D))$, pelo PIE para três conjuntos, temos:

   $n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A \cup B \cup C) + n(D) - n((A \cup B \cup C) \cap D)$. (1)

   Novamente, pelo PIE para três conjuntos, temos:

   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$.

   E como $(A \cup B \cup C) \cap D = (A \cap D) \cup (B \cap D) \cup (C \cap D)$, mais uma vez, pelo PIE para três conjuntos, temos:

   $n((A \cup B \cup C) \cap D) = n(A \cap D) + n(B \cap D) + n(C \cap D) - n(A \cap D \cap B \cap D) - n(A \cap D \cap C \cap D) - n(B \cap D \cap C \cap D) + n(A \cap D \cap B \cap D \cap C \cap D) = n(A \cap D) + n(B \cap D) + n(C \cap D) - n(A \cap B \cap D) - n(A \cap C \cap D) - n(B \cap C \cap D) + n(A \cap B \cap C \cap D)$.

   Substituindo as expressões obtidas em (1), temos:

   $n(A \cup B \cup C \cup D) = [n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)] + n(D) - [n(A \cap D) + n(B \cap D) + n(C \cap D) - n(A \cap B \cap D) - n(A \cap C \cap D) - n(B \cap C \cap D) + n(A \cap B \cap C \cap D)] = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)$.

   Outra possibilidade de resolver o Exercício 2(b) é considerar que $n(A \cup B \cup C \cup D) = n((A \cup B) \cup (C \cup D))$. Elabore esta solução.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF