Aula 22 – O Teorema do Valor Médio

Metas da aula: Estabelecer o Teorema do Extremo Interior, estudar a relação da derivada com o crescimento local de funções, e apresentar a propriedade do valor intermediário das funções derivadas. Estabelecer o Teorema do Valor Médio e apresentar algumas de suas aplicações, tais como no estudo dos valores extremos locais de funções e na obtenção de desigualdades.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do Teorema do Extremo Interior e algumas de suas aplicações. Conhecer as relações entre a derivada e o crescimento local de funções e a propriedade o valor intermediário das funções derivadas.
- Saber o significado do Teorema do Valor Médio e algumas de suas aplicações, tais como no estudo dos valores extremos locais de funções e na obtenção de desigualdades.

Introdução

O principal resultado que veremos nesta aula é o Teorema do Valor Médio, que relaciona os valores de uma função com os de sua derivada. Esse é sem dúvida um dos resultados mais úteis de toda a Análise Real. Para provar o Teorema do Valor Médio, precisaremos primeiro estabelecer o Teorema do Extremo Interior. Este último justifica a prática de se examinar os zeros da derivada para encontrar os extremos locais de uma função no interior de seu intervalo de definição. O Teorema do Extremo Interior também é usado para demonstrar a propriedade do valor intermediário exibida pelas derivadas de funções diferenciáveis ao longo de intervalos.

O Teorema do Extremo Interior

Iniciaremos nossa aula com o enunciado e a demonstração do Teorema do Extremo Interior, que justifica a prática de se examinar os zeros da derivada para encontrar os extremos locais de uma função.

Recordemos que, se I é um intervalo, diz-se que a função $f : I \to \mathbb{R}$ tem um **máximo local** em $\bar{x} \in I$ se existe uma vizinhança $V := V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) \le f(\bar{x})$ para todo $x \in V \cap I$. Neste caso também dizemos que $\bar{x}$ é um **ponto de máximo local de** f. Analogamente, dizemos que f

tem um **mínimo local** em $\bar{x} \in I$ se existe uma vizinhança $V := V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$ para todo $x \in V \cap I$. Recordemos também que por definição $V_\delta(\bar{x}) = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$. Dizemos que f tem um **extremo local** em $\bar{x} \in I$ se ela tem um máximo local ou um mínimo local em $\bar{x}$.

Diz-se que o ponto $\bar{x}$ é um **ponto interior de** I se $\bar{x}$ não é um extremo de I ou, equivalentemente, se existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ tal que $V_\delta(\bar{x}) \subset I$.

Teorema 22.1 (Teorema do Extremo Interior)
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\bar{x}$.

(i) Se $\bar{x}$ não é o extremo à direita de I, então $f'(\bar{x}) > 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$. Por outro lado, $f'(\bar{x}) < 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$

(ii) Se $\bar{x}$ não é o extremo à esquerda de I, então $f'(\bar{x}) < 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > f(\bar{x})$ para $\bar{x} - \delta < x < \bar{x}$. Por outro lado, $f'(\bar{x}) > 0$ implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < f(\bar{x})$ para $\bar{x} - \delta < x < \bar{x}$.

(iii) Se $\bar{x}$ é um ponto interior de I e f tem um extremo local em $\bar{x}$, então $f'(\bar{x}) = 0$.

Prova: (i) Suponhamos que $\bar{x}$ não é o extremo à direita de I. Inicialmente, consideremos o caso em que $f'(\bar{x}) > 0$. Neste caso, como

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = f'(\bar{x}) > 0,$$

segue do Teorema 13.5 (na discussão sobre desigualdades e limites de funções) que existe um $\delta > 0$ tal que se $x \in I$ e $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} > 0. \tag{22.1}$$

Como $\bar{x}$ não é o extremo à direita de I, podemos obter $\delta > 0$ suficientemente pequeno tal que vale (22.1) e $(\bar{x}, \bar{x} + \delta) \subset I$. Sendo assim, se $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$, então

$$f(x) - f(\bar{x}) = (x - \bar{x}) \cdot \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} > 0, \tag{22.2}$$

ou seja, $f(x) > f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$.

No caso em que $f'(\bar{x}) < 0$, teremos a desigualdade oposta, isto é, '$<$' em lugar de '$>$', tanto em (22.1) como em (22.2). Isso nos dará que $f(x) < f(\bar{x})$ para $\bar{x} < x < \bar{x} + \delta$, como afirmado.

A demontração de (ii) é inteiramente análoga a de (i) e ficará para você como exercício.

(iii) Seja $\bar{x}$ um ponto interior de I tal que f é diferenciável em $\bar{x}$ e tem um extremo local em $\bar{x}$. Para fixar idéias, suponhamos que $\bar{x}$ é um ponto de máximo local de f. Se $f'(\bar{x}) > 0$, então o ítem (i) nos dá uma contradição com o fato de $\bar{x}$ ser um máximo local. Por outro lado, se $f'(\bar{x}) < 0$, então o ítem (ii) nos dá uma contradição com o fato de f ter um máximo local em $\bar{x}$. Logo, devemos ter $f'(\bar{x}) = 0$. O caso em que $\bar{x}$ é mínimo local segue de maneira semelhante (como?).

□

O ítem (iii) do Teorema 22.1 é o que se refere diretamente ao ponto de extremo interior. Observe que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ pode ter um extremo local num ponto $\bar{x}$ sem que exista $f'(\bar{x})$. Um exemplo disso é o caso da função $f(x) := |x|$, para $x \in I := [-1, 1]$. Observe também que se o extremo local $\bar{x}$ não for um ponto interior de I, então pode existir $f'(\bar{x})$ com $f'(\bar{x}) \neq 0$. Um exemplo desta última afirmação é dado pela função $f(x) := x$, para $x \in I := [0, 1]$, onde $\bar{x} = 0$ é um ponto de mínimo e $\bar{x} = 1$ é um ponto de máximo.

A seguir, como primeira aplicação do Teorema 22.1, vamos estabelecer a propriedade do valor intermediário exibida pela derivada de função diferenciável em todo ponto de um intervalo $I = [a, b]$. Esse resultado é devido ao matemático francês Gaston Darboux (1842-1917) que a ele empresta seu nome. Já vimos que a propriedade do valor intermediário é exibida pelas funções contínuas. O curioso é que a derivada de uma função diferenciável num intervalo $[a, b]$ pode não ser contínua nesse intervalo!

Teorema 22.2 (Teorema de Darboux)
Se f é diferenciável em $I = [a, b]$ com $f'(a) \neq f'(b)$ e se k é um número qualquer entre $f'(a)$ e $f'(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k$.

Prova: Para fixar idéias, suponhamos que $f'(a) < k < f'(b)$. Definimos g em I por $g(x) := kx - f(x)$ para $x \in I$. Como g é contínua, ela assume um valor máximo em I. Como $g'(a) = k - f'(a) > 0$, segue do Teorema 22.1(i) que o máximo de g não ocorre em $x = a$. Similarmente, como $g'(b) = k - f'(b) < 0$, segue do Teorema 22.1(ii) que o máximo de g não ocorre em $x = b$. Portanto, g assume seu máximo em algum ponto interior $c \in (a, b)$. Então, do Teorema 22.1(iii) temos que $0 = g'(c) = k - f'(c)$. Logo, $f'(c) = k$.

□

Exemplos 22.1

1. A função $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{para } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{para } x = 0, \\ -1 & \text{para } -1 \leq x < 0, \end{cases}$$

   que é a restrição da função sinal a $I := [-1, 1]$, claramente não satisfaz a propriedade do valor intermediário. Por exemplo, $0 = g(0) < 1/2 < 1 = g(1)$, mas não existe $c \in (0, 1)$ tal que $g(c) \neq 1/2$. Portanto, pelo Teorema de Darboux, não existe uma função f difenciável em $[-1, 1]$ tal que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [-1, 1]$.

2. Por outro lado, já vimos que a função $f : I := [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ é diferenciável em I. Sua derivada é a função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$ que, apesar de descontínua em $x = 0$, satisfaz a propriedade do valor intermediário (veja Figura **22.1**).

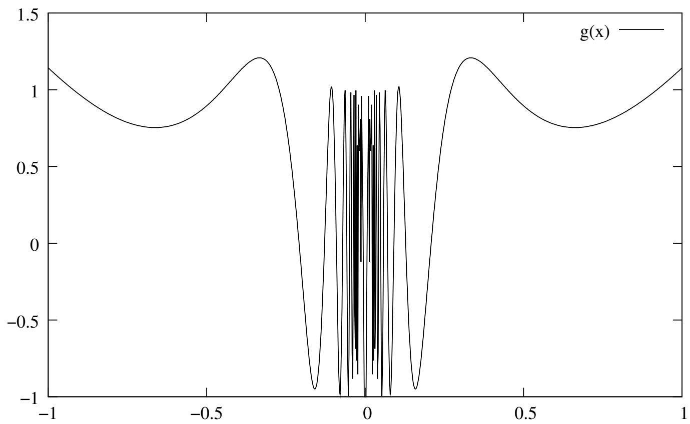

Figura **22.1**: A função $g(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x)$.

O Teorema do Valor Médio

A seguir estabeleceremos um resultado famoso conhecido como Teorema de Rolle, cujo nome faz referência ao matemático francês Michel Rolle (1652–1719). Trata-se de um caso particular do Teorema do Valor Médio que lhe é, na verdade, equivalente.

Teorema 22.3 (Teorema de Rolle)
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $I := [a, b]$ que é diferenciável em todo ponto do intervalo aberto (a, b) e satisfaz $f(a) = f(b) = 0$. Então existe ao menos um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que $f'(\bar{x}) = 0$.

Prova: Se f se anula identicamente em I, então qualquer $\bar{x} \in (a, b)$ satisfaz a conclusão. Logo, vamos assumir que f não se anula identicamente. Trocando f por $-f$ se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que f é positiva em algum ponto de (a, b). Pelo Teorema do Máximo-Mínimo 16.2, f assume o valor $\sup\{f(x) : x \in I\} > 0$ em algum ponto $\bar{x} \in I$. Como $f(a) = f(b) = 0$, o ponto $\bar{x}$ deve pertencer ao intervalo aberto (a, b). Logo, $f'(\bar{x})$ existe. Como f tem um máximo relativo em $\bar{x}$, concluímos do Teorema do Extremo Interior 22.1(iii) que $f'(\bar{x}) = 0$. (Veja Figura **22.2**).

□

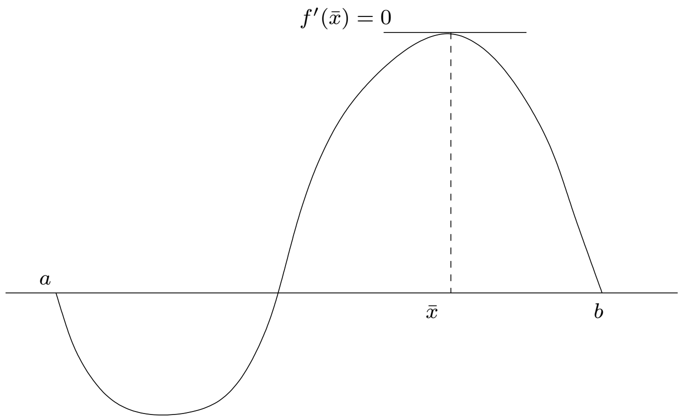

Figura **22.2**: O Teorema de Rolle.

Como uma conseqüência do Teorema de Rolle, obtemos o fundamental Teorema do Valor Médio.

Teorema 22.4 (Teorema do Valor Médio)
Suponhamos que f é contínua num intervalo fechado $I := [a, b]$, e que f é diferenciável em todo ponto do intervalo aberto (a, b). Então existe ao menos um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a). \tag{22.3}$$

Prova: Consideremos a função φ definida em I por

$$\varphi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Observe que φ é simplesmente a diferença entre f e a função cujo gráfico é o segmento de reta ligando os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$; veja Figura **22.3**. As hipóteses do Teorema de Rolle são satisfeitas por φ já que esta é contínua em $[a, b]$, diferenciável em (a, b), e $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Portanto, existe um ponto $\bar{x} \in (a, b)$ tal que

$$0 = \varphi'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Logo, $f(b) - f(a) = f'(\bar{x})(b - a)$.

□

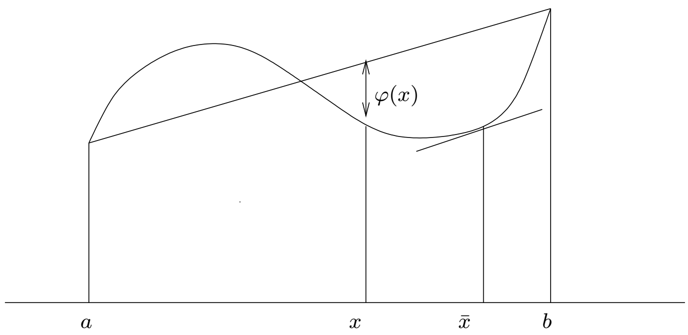

Figura **22.3**: O Teorema do Valor Médio.

A seguir damos algumas aplicações do Teorema do Valor Médio que mostram como esse resultado pode ser utilizado para retirar conclusões sobre a natureza de uma função f a partir de informação sobre sua derivada f'.

Teorema 22.5
Suponhamos que f é contínua no intervalo fechado $I := [a, b]$, diferenciável no intervalo aberto (a, b), e $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$. Então f é constante em I.

Prova: Mostraremos que $f(x) = f(a)$ para todo $x \in I$. De fato, dado $x \in I$, com $x > a$, aplicamos o Teorema do Valor Médio a f sobre o intervalo fechado $[a, x]$. Obtemos que existe um ponto $\bar{x} \in (a, x)$, dependendo de x, tal que $f(x) - f(a) = f'(\bar{x})(x - a)$. Como $f'(\bar{x}) = 0$ por hipótese, concluímos que $f(x) - f(a) = 0$, ou seja, $f(x) = f(a)$, como afirmado.

□

Corolário 22.1
Suponhamos que f e g são contínuas em $I := [a, b]$, diferenciáveis em (a, b), e que $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Então existe uma constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + C$ para todo $x \in I$.

Prova: Basta considerar a função $h := f - g$ e aplicar o Teorema 22.5.

□

Teorema 22.6
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável no intervalo I. Então:

(i) f é não-decrescente em I se, e somente se, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

(ii) f é não-crescente em I se, e somente se, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$.

Prova: (i) Suponhamos que $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Se $x_1, x_2 \in I$ satisfazem $x_1 < x_2$, então aplicamos o Teorema do Valor Médio a f no intervalo fechado $J := [x_1, x_2]$ para obter um ponto $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2 - x_1).$$

Como $f'(\bar{x}) \geq 0$ e $x_2 - x_1 > 0$, segue que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, ou seja, $f(x_1) \leq f(x_2)$, o que prova que f é não-decrescente.

Para provar a recíproca, suponhamos que f é diferenciável e não-decrescente em I. Logo, dado qualquer ponto $\bar{x} \in I$, para todo $x \in I$ com $x \neq \bar{x}$ temos $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x}) \geq 0$ (por quê?). Logo, pelo Teorema 13.3 concluímos que

$$f'(\bar{x}) = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \geq 0.$$

(ii) A prova da parte (ii) é semelhante e será deixada para você como exercício.

□

Observação 22.1
Note que um argumento idêntico ao da prova do Teorema 22.6 mostra que se $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$, então f é crescente em I, isto é, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in I$. No entanto, a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, ou seja, é possível ter f crescente num intervalo I com f' se anulando em alguns pontos de I. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^3$ é crescente em $\mathbb{R}$, mas $f'(0) = 0$. Claramente, uma observação análoga vale para funções decrescentes.

Teorema 22.7 (Teste da Primeira Derivada)
Seja f contínua no intervalo $I := [a, b]$ e seja c um ponto interior de I. Suponhamos que f é diferenciável nos intervalos abertos (a, c) e (c, b).

(i) Se existe uma vizinhança $(c-\delta, c+\delta) \subset I$ tal que $f'(x) \geq 0$ para $c-\delta < x < c$ e $f'(x) \leq 0$, então f tem um máximo local em c.

(ii) Se existe uma vizinhança $(c-\delta, c+\delta) \subset I$ tal que $f'(x) \leq 0$ para $c-\delta < x < c$ e $f'(x) \geq 0$ para $c < x < c+\delta$, então f tem um mínimo local em c.

Prova: (i) Se $x \in (c-\delta, c)$, então segue do Teorema do Valor Médio que existe $\bar{x} \in (x, c)$, dependendo de x, tal que $f(c) - f(x) = f'(\bar{x})(c-x)$. Como $f'(\bar{x}) \geq 0$ concluímos que $f(x) \leq f(c)$ para $x \in (c-\delta, c)$. Similarmente, segue do Teorema do Valor Médio e da hipótese $f'(x) \leq 0$ para $x \in (c, c+\delta)$ que $f(x) \leq f(c)$ para $x \in (c, c+\delta)$. Portanto, $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in (c-\delta, c+\delta)$, de modo que f tem um máximo local em c.

(ii) A prova de (ii) é inteiramente análoga e ficará para você como exercício.

□

Observação 22.2
A recíproca do Teste da Primeira Derivada 22.7 *não* é válida. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2(\operatorname{sen}(1/x) + 2)$ se $x \neq 0$ e $f(0) := 0$ é diferenciável em todo $\mathbb{R}$ e satisfaz $f(x) > 0$ se $x \neq 0$, já que $|\operatorname{sen}(1/x)| \leq 1$. Em particular, 0 é um ponto de mínimo local. A derivada de f é dada por $f'(x) := 2x(\operatorname{sen}(1/x) + 2) - \cos(1/x)$ se $x \neq 0$ e $f'(0) = 0$. Assim, se $x_k := 1/(2k\pi)$ para $k \in \mathbb{N}$, temos $x_k \to 0$, quando $k \to \infty$, e $f'(x_k) < 0$ para todo k suficientemente grande, já que $\cos(1/x_k) = 1$ e $\lim (2x_k(\operatorname{sen}(1/x_k) + 2)) = 0$. Por outro lado, se $z_k := 2/((2k+1)\pi)$ para $k \in \mathbb{N}$, temos $z_k \to 0$ quando $k \to \infty$, e $f'(z_k) > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, já que $z_k > 0$, $\cos(1/z_k) = 0$ e $\operatorname{sen}(1/z_k) = 1$. Portanto, existem pontos arbitrariamente próximos de 0 para os quais f' é negativa e pontos arbitrariamente próximos de 0 para os quais f' é positiva.

Aplicações do Teorema do Valor Médio em desigualdades

A seguir estabeleceremos uma aplicação do Teorema do Valor relacionada com funções Lipschitz. Concluiremos depois dando outros exemplos de aplicações desse resultado para a obtenção de desigualdades.

Teorema 22.8
Seja $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em todo ponto do intervalo I. Se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo $x \in I$, então $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$, para todos $x, y \in I$.

Prova: Dados $x, y \in I$, pelo Teorema do Valor Médio existe $\bar{x} \in (x, y)$ tal que $f(x) - f(y) = f'(\bar{x})(x - y)$. Logo,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(\bar{x})||x - y| \leq C|x - y|,$$

já que, por hipótese, $|f'(\bar{x})| \leq C$.

$\square$

Exemplos 22.2

1. Como já foi dito anteriormente, as funções trigonométricas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ satisfazem $D \operatorname{sen} x = \cos x$ e $D \cos x = -\operatorname{sen} x$. Além disso vale a relação fundamental $(\operatorname{sen} x)^2 + (\cos x)^2 = 1$, donde segue que $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$. Esses fatos serão provados rigorosamente em aulas futuras. Do Teorema **??** segue que $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Em particular, tomando $x \geq 0$ e $y = 0$ obtemos

$$-x \leq \operatorname{sen} x \leq x \qquad \text{para todo } x \geq 0.$$

2. A função exponencial $f(x) := e^x$ tem derivada $f'(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $f'(x) > 1$ para $x > 0$ e $0 < f'(x) < 1$ para $x < 0$. A partir dessas relações, provaremos a desigualdade

$$e^x \leq 1 + x \qquad \text{para } x \in \mathbb{R}, \tag{22.4}$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = 0$.

Se $x = 0$, como $e^0 = 1$, claramente vale a igualdade. Se $x > 0$, aplicamos o Teorema do Valor Médio à função f no intervalo $[0, x]$, o que nos dá

$$e^x - 1 = e^{\bar{x}} x \qquad \text{para algum } \bar{x} \in (0, x).$$

Segue daí que $e^x - 1 > x$, ou seja, $e^x > 1 + x$ se $x > 0$. Se $x < 0$, aplicando o Teorema do Valor Médio à função f no intervalo $[x, 0]$, de novo obtemos $e^x > 1 + x$. Portanto, temos $e^x > 1 + x$ para todo $x \neq 0$.

3. (Desigualdade de Bernoulli) Para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, define-se a função $f(x) := x^\alpha$ para $x > 0$ por

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x}.$$

Usando o fato já mencionado, a ser provado em aula futura, de que $D \log x = 1/x$ para $x > 0$, juntamente com a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}(x^\alpha)' &= (e^{\alpha \log x})' = e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x} \\ &= \alpha e^{\alpha \log x} e^{-\log x} = \alpha e^{(\alpha-1)\log x} \\ &= \alpha x^{\alpha-1},\end{aligned}$$

o que estende a fórmula que havíamos estabelecido anteriormente para α racional. Usando isso provaremos a desigualdade de Bernoulli que estabelece que para todo $\alpha > 1$ vale

$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \qquad \text{para todo } x > -1, \tag{22.5}$$

com igualdade valendo se, e somente se, $x = 0$. Observe que para $\alpha = 1$ vale trivialmente a igualdade para todo $x \in \mathbb{R}$; por isso esse caso é descartado.

Essa desigualdade foi estabelecida anteriormente para $\alpha \in \mathbb{N}$, usando Indução Matemática. Vamos estendê-la a todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha > 1$ usando o Teorema do Valor Médio.

Se $g(x) := (1+x)^\alpha$, então $g'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. Se $x > 0$, aplicamos o Teorema do Valor Mádio a g no intervalo $[0, x]$, obtendo $g(x) - g(0) = g'(\bar{x})x$ para algum $\bar{x} \in (0, x)$, ou seja,

$$(1+x)^\alpha - 1 = \alpha(1+\bar{x})^{\alpha-1}x.$$

Como $\bar{x} > 0$ e $\alpha - 1 > 0$, segue que $(1+\bar{x})^{\alpha-1} > 1$ e portanto $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$.

Se $-1 < x < 0$, um aplicação semelhante do Teorema do Valor Médio à função g no intervalo $[x, 0]$ nos dá novamente $(1+x)^\alpha > 1 + \alpha x$ (por quê?).

Como o caso $x = 0$ resulta em igualdade, concluímos que vale (22.5) com igualdade ocorrendo se, e somente se, $x = 0$.

4. Se $0 < \alpha < 1$, $a > 0$ e $b > 0$, então vale a desigualdade

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1-\alpha)b, \tag{22.6}$$

onde a igualdade vale se, e somente se, $a = b$. Vamos provar essa afirmação usando o Teorema do Valo Médio. Essa desigualdade pode ser provada também usando-se a concavidade da função logaritmo, que veremos mais tarde.

A desigualdade (22.6) e a afirmação sobre a ocorrência da igualdade serão obtidas como conseqüência da afirmação de que vale a desigualdade

$$x^{\alpha} \leq \alpha x + (1 - \alpha) \qquad \text{para todo } x \geq 0 \text{ e } 0 < \alpha < 1, \tag{22.7}$$

valendo a igualdade se, e somente se $x = 1$, tomando-se $x = a/b$, $a > 0, b > 0$ (como?).

Provaremos então a desigualdade (22.7) e a afirmação correspondente a validade da igualdade. Consideremos a função $g(x) = \alpha x - x^{\alpha}$, com $x \geq 0$, $0 < \alpha < 1$. Temos $g'(x) = \alpha(1 - x^{\alpha-1})$, de modo que $g'(x) < 0$ para $0 < x < 1$ e $g'(x) > 0$ para $x > 1$. Conseqüentemente, se $x \geq 0$, então $g(x) \geq g(1)$ e $g(x) = g(1)$ se, e somente se, $x = 1$, o que é equivalente a desigualdade (22.7) e a afirmação sobre a ocorrência da igualdade (por quê?).

Exercícios 22.1

1. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Mostre que se f' nunca se anula em I, então ou $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ ou $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$. [Dica: Use o Teorema de Darboux.]

2. Seja I um intervalo, $g : I \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in I$ um ponto interior de I. Mostre que se existem os limites laterais $L_- := \lim_{x\to\bar{x}-} g(x)$ e $L_+ := \lim_{x\to\bar{x}+} g(x)$ e $L_- \neq L_+$, então g não é a derivada de nenhuma função $f : I \to \mathbb{R}$. [Dica: Use o Teorema de Darboux.]

3. Para cada uma das seguintes funções, encontre os pontos de extremo local, os intervalos nos quais a função é crescente e aqueles nos quais a função é decrescente.

   (a) $f(x) := x^2 - 3x + 5$ para $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) := x^3 - 3x - 4$ para $x \in \mathbb{R}$.

   (c) $f(x) := x^4 + 2x^2 - 4$ para $x \in \mathbb{R}$.

   (d) $f(x) := x + 1/x$ para $x \neq 0$.

   (e) $f(x) := \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ para $x > 0$.

   (f) $f(x) := 2x + 1/x^2$ para $x \neq 0$.

4. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais e seja f definida em $\mathbb{R}$ por
$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} (x - a_i)^2.$$
Encontre o único ponto de mínimo local para f.

5. Sejam $a > b > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n \geq 2$. Prove que $a^{1/n} - b^{1/n} < (a - b)^{1/n}$. [Dica: Mostre que $f(x) := x^{1/n} - (1 - x)^{1/n}$ é decrescente para $x \geq 1$, e tome os valores de f em 1 e a/b.]

6. Use o Teorema do Valor Médio e os fatos já mencionados sobre a função exponencial para provar a desigualdade
$$e^a - e^b \leq e^a(a - b) \qquad \text{para todos } a, b \in \mathbb{R}.$$

7. Use o Teorema do Valor Médio para provar que $(x-1)/x < \log x < x-1$ para $x > 1$. [Dica: Use o fato de que $D \log x = 1/x$ para $x > 0$.]

8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Mostre que se $\lim_{x \to a} f'(x) = A$, então $f'(a)$ existe e é igual a A. [Dica: Use a definição de $f'(a)$ e o Teorema do Valor Médio.]

9. Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciável em I. Mostre que se f' é positiva em I, então f é crescente em I.