Matemática Discreta – AP1 – 2006/2

Soluções comentadas:

---

1. Quantos anagramas podemos formar com a palavra $PROBLEMA$:

   (a) (1,0) que têm as letras P, R e O sempre juntas?

   (c) (1,0) que têm as consoantes P, R, B, L, M sempre juntas bem como as vogais O, E, A sempre juntas?

Solução:

(a) Cada anagrama onde as letras P, R e O ocorrem juntas pode ser formado se realizamos duas tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para escrever as letras P, R, O e considerar esta seqüência como uma única letra X

T_2 : formar um anagrama com as letras X, B, L, E, M, A.

Assim, pelo PFC, o número total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ que têm as letras P, R e O sempre juntas é $3! \times 6! = 4.320$.

(b) Cada anagrama onde as consoantes P, R, B, L, M ocorrem juntas e onde as vogais O, E, A ocorrem juntas pode ser formado se realizamos três tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para escrever as consoantes P, R, B, L, M e considerar esta seqüência como uma única letra X

T_2 : escolher uma ordem para escrever as vogais O, E, A e considerar esta seqüência como uma única letra Y

T_3 : formar um anagrama com as letras X, Y.

Assim, pelo PFC, o número total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ que têm as consoantes P, R, B, L, M sempre juntas bem como as vogais O, E, A sempre juntas é $5! \times 3! \times 2! = 1.140$.

---

2. Num concurso, os candidatos foram numerados de 1 a 10.000.

   (a) (0,5) Quantos candidatos receberam números com apenas um algarismo?

   (b) (1,5) Quantos candidatos receberam números com mais de um algarismo, cujos algarismos são distintos?

Solução:

(a) **Primeira interpretação:** Os números com apenas um algarismo no intervalo considerado são: 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9. Assim, 9 candidatos receberam números com apenas um algarismo.

(a) **Segunda interpretação:** Os números com apenas um algarismo no intervalo considerado são: 1,2,..., 9, 11, 22, ..., 99, 111, 222, ..., 999, 1.111, 2.222, ..., 9.999. Assim, $9 \times 4 = 36$ candidatos receberam números com apenas um algarismo.

(b) O conjunto dos números entre 1 e 10.000 com mais de um algarismo, cujos algarismos são distintos, pode ser particionado em três conjuntos.

1. Os números com 2 algarimos distintos;
2. Os números com 3 algarismos distintos;
3. Os números com 4 algarismos distintos.

Pelo PFC, no primeiro conjunto temos $9 \times 9 = 81$ elementos; no segundo conjunto temos $9 \times 9 \times 8 = 648$ elementos; e no terceiro conjunto temos $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4.536$ elementos. Assim, pelo PA, $81 + 648 + 4.536 = 5265$ candidatos receberam números com mais de um algarismo, cujos algarismos são distintos

---

3. De quantas maneiras trinta moedas de mesmo valor (e indistinguíveis) podem ser colocadas consecutivamente em uma linha reta:

   (a) (1,0) De modo que 10 caras e 20 coroas fiquem para cima.

   (b) (1,0) De modo que 15 caras e 15 coroas fiquem para cima mas as 15 caras ocorram juntas.

Solução:

(a) Cada ordenação das 30 moedas em linha reta de modo que 10 caras e 20 coroas fiquem para cima corresponde a uma permutação de 10 ocorrências da letra K e 20 ocorrências da letra C. Assim, temos um total de $\dfrac{30!}{10!20!} = 2.731.365$ maneiras de seis moedas serem colocadas consecutivamente em uma linha reta de modo que 10 caras e 20 coroas fiquem para cima.

(b) Cada ordenação das 30 moedas em linha reta de modo que 15 caras e 15 coroas fiquem para cima mas as 15 caras ocorram juntas corresponde a uma permutação das letras:

$$K, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C.$$

Assim, temos um total de $\dfrac{16!}{1!15!} = 16$ maneiras de trinta moedas serem colocadas consecutivamente em uma linha reta de modo que modo que 15 caras e 15 coroas fiquem para cima mas as 15 caras ocorram juntas.

---

4. Numa mesa de jogo existem seis lugares.

   (a) (1,0) De quantas maneiras diferentes podem sentar-se 6 pessoas, se duas delas, previamente escolhidas, devem ficar lado a lado?

   (b) (1,0) De quantas maneiras diferentes podem sentar-se 6 pessoas, se os parceiros, que formam 3 pares, já estão previamente fixados? Lembre-se que dois parceiros não podem sentar-se lado a lado.

Solução:

(a) Cada maneira de sentar as 6 pessoas na mesa pode ser formada se realizamos duas tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para as duas pessoas escolhidas e considera-las como uma pessoa só
T_2 : sentar as 5 "pessoas" disponíveis em torno da mesa.

Assim, pelo PFC, o número total de maneiras diferentes em que 6 pessoas podem sentar-se de modo que duas delas, previamente escolhidas, fiquem lado a lado é $2! \times 4! = 48$.

(b) Cada maneira de sentar as 6 pessoas na mesa pode ser formada se realizamos duas tarefas:

T_1 : sentar uma pessoa de cada parceria
T_2 : sentar uma pessoa restante, de cada parceria intercalada com pessoas das outras parcerias.

Assim, pelo PFC, o número total de maneiras diferentes em que 6 pessoas podem sentar-se quando os parceiros, que formam 3 pares, já estão previamente fixados é $2! \times 1! = 2$.

---

5. Dado um conjunto de sete pontos de uma circunferência, quantos polígonos existem cujos vértices pertencem ao conjunto?

Solução:

O conjunto dos polígonos cujos vértices pertencem a circunferência pode ser particionado em 5 conjuntos:

1. O conjunto dos triângulos que têm vértices na circunferência;
2. O conjunto dos quadriláteros que têm vértices na circunferência;
3. O conjunto dos pentágonos que têm vértices na circunferência;
4. O conjunto dos hexágonos que têm vértices na circunferência
5. O conjunto dos heptágonos que têm vértices na circunferência

No primeiro conjunto temos $C(7,3) = 35$ elementos; no segundo conjunto temos $C(7,4) = 35$ elementos; no terceiro conjunto temos $C(7,5) = 21$ elementos; no quarto conjunto temos $C(7,6) = 7$ elementos; e no quinto conjunto temos $C(7,7) = 1$ elemento. Assim, pelo PA, existem $35+35+21+7+1 = 99$ polígonos cujos vértices pertencem ao conjunto de pontos dados.