Aula 4 – Os Números Reais I

Metas da aula: Definir os números reais tendo por base representações decimais. Mostrar que os números racionais podem ser caracterizados como decimais periódicos. Mostrar através de exemplos que o sistema dos números racionais possui falhas que motivam a introdução de decimais não-periódicos que correspondem aos números irracionais. Definir uma relação de ordem para os números reais e mostrar que ela coincide com a ordem dos racionais quando restrita aos decimais periódicos. Mostrar que o conjunto dos números reais não é enumerável. Introduzir os conceitos fundamentais de supremo e de ínfimo.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado e o uso das representações decimais dos números reais.
- Saber o significado e o uso da identificação dos números racionais com os decimais periódicos.
- Demonstrar proposições simples envolvendo os conceitos de supremo e ínfimo.

Introdução

Nesta aula vamos iniciar nosso estudo sobre os números reais e suas propriedades. A discussão aqui conterá aspectos informais mas procurará se manter o mais próximo possível da argumentação matemática rigorosa. Assim, apresentaremos, de modo um tanto informal, o conjunto dos números reais como o conjunto dos decimais. Estes últimos são expressões onde aparecem um inteiro não-negativo, precedido ou não por um sinal de menos, seguido por um ponto, à direita do qual segue uma sucessão infindável de dígitos que tomam valores no conjunto dos algarismos $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. No que segue vamos estabelecer essa noção de forma mais precisa.

Essa abordagem tem a vantagem de dar aos números reais uma forma concreta, próxima da ideia que fazemos deles, pelo modo como já estamos habituados a lidar com expressões decimais do tipo mencionado. Porém tem a desvantagem de ter de trabalhar com expressões "pesadas" do ponto de vista notacional. De qualquer modo, logo que concluirmos a apresentação dos números reais na próxima aula, ficará claro que esse conjunto fica caracterizado não pela forma de seus elementos (de fato, eles poderiam assumir formas completamente distintas), mas pela relação de ordem entre esses elementos, as operações que podemos realizar entre eles e a completude do conjunto, que será explicada mais adiante. Assim, poderemos dispensar totalmente a representação dos reais como decimais logo após o término dessa apresentação.

Observe que adotamos aqui a convenção de apresentar os decimais com a parte inteira separada da fracionária por um ponto realçado "•" e não por uma vírgula, que é a forma mais usual no Brasil. Fazemos isso para dar melhor visibilidade ao mesmo e evitar confusões, uma vez que a vírgula "," assim como o ponto "·" usual são utilizados frequentemente com outras finalidades.

Os números reais vistos como decimais

Você certamente já está bastante familiarizado com a representação decimal para os números racionais. Essa representação é obtida através do conhecido algoritmo da divisão que aprendemos no ensino fundamental. O algoritmo para obter a representação decimal de 5/7 está descrito na Fig. **4.1**.

Seja p/q, $p, q \in \mathbb{N}$, um número racional positivo. Podemos, também supor que p e q sejam primos entre si, isto é, não possuem divisores comuns. A representação decimal de p/q tem a forma $a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots$, onde $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e

$$a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Chamamos *algarismos* os elementos do conjunto

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

De modo geral, ou essa representação termina em zeros, isto é, $a_n = 0$, para $n \geq k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, ou apresenta um bloco de m algarismos (período), com $m \in \mathbb{N}$, repetindo-se indefinidamente a partir da $(k+1)$-ésima casa decimal, para um certo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n = a_{n+m}$ para todo natural $n > k$. Chamamos tal representação decimal *periódica*, incluindo nessa denominação também o caso em que a representação decimal termina em zeros, considerando nesse caso $m = 1$ e 0 como o bloco que se repete periodicamente com período 1.

$$
\begin{array}{l|l}
5 & 7 \\ \hline
50 & 0.\underbrace{714285}_{\text{período}}71\cdots \\
\ 10 & \\
\ \ 30 & \\
\ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ 10 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \vdots &
\end{array}
$$

Figura 4.1: Algoritmo da divisão $5 \div 7$

O racional 0 tem a representação decimal trivial $0{\bullet}000\ldots$. Os racionais negativos da forma $r = -p/q$ com $p, q \in \mathbb{N}$, têm representação decimal da forma $-a_0{\bullet}a_1a_2a_3\ldots$, onde $a_0{\bullet}a_1a_2a_3\ldots$ é a representação decimal de p/q.

O fato de que a representação decimal de um racional positivo p/q, fornecida pelo algoritmo da divisão, é sempre periódica se explica do seguinte modo. Consideremos, para simplificar, apenas o caso em que $0 < p/q < 1$. Suponhamos, então, $x = p/q$, com $p, q \in \mathbb{N}$ e $0 < p < q$, como no exemplo da Figura **4.1**, em que $p = 5$, $q = 7$. Notamos que cada passo do algoritmo da divisão de p por q fornece um resto que é um inteiro entre 0 e $q - 1$. Portanto, após um número de passos nunca maior que q, algum resto ocorrerá uma segunda vez e, a partir daí, os algarismos no quociente começarão a se repetir em ciclos. Portanto, essa representação decimal é periódica.

Formalmente, a representação decimal de um racional positivo p/q deixa de ser sempre única pelo seguinte fato. Para cada racional cuja representação decimal obtida através do algoritmo da divisão termina em 0's, $p/q = a_0{\bullet}a_1\ldots a_k000\ldots$, com $a_k \geq 1$, poderíamos também considerar uma representação decimal na forma

$$a_0{\bullet}a_1\ldots(a_k - 1)999\ldots$$

terminando em 9's. De fato, tal representação também se aplicaria ao mesmo racional p/q, já que, multiplicando-se essa representação, que chamaremos x, por 10^{k+1}, obteríamos $10^{k+1}x = a_0a_1\dots(a_k-1)9\bullet 999\dots$ e, multiplicando-a por 10^k, obteríamos $10^kx = a_0a_1\dots(a_k-1)\bullet 999\dots$. Fazendo a diferença, temos

$$\begin{aligned} 9\cdot 10^kx &= a_0a_1\dots(a_k-1)9\bullet 000\dots - a_0a_1\dots(a_k-1)\bullet 000\dots \\ &= 10\cdot a_0a_1\dots(a_k-1)+9-a_0a_1\dots(a_k-1) \\ &= 9\cdot a_0a_1\dots(a_k-1)+9 \\ &= 9\cdot(a_0a_1\dots a_k-1+1) \\ &= 9\cdot a_0a_1\dots a_k, \end{aligned}$$

donde se conclui que $10^kx = a_0a_1\dots a_k$, isto é, $x = a_0\bullet a_1\dots a_k$, ou seja, $x = p/q$. Nos cálculos anteriores, por abuso de notação, denotamos por $a_0a_1\dots a_k$ o inteiro N cuja representação decimal é obtida justapondo-se à direita de a_0 os algarismos $a_1, \dots, a_k$, sucessivamente, ou seja, $N = a_0\cdot 10^k + a_1\cdot 10^{k-1}+\cdots+a_k$.

Por exemplo, $1/2 = 0\bullet 5$ ou $1/2 = 0\bullet 49999$, $11/50 = 0\bullet 22$ ou $11/50 = 0\bullet 21999\dots$. No que segue, estaremos sempre descartando representações decimais terminadas em 9's.

Definição 4.1

1. Chamaremos *decimal geral não-nulo* qualquer expressão da forma

   $$\pm a_0\bullet a_1a_2a_3\dots,$$

   onde $a_0 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$,

   $$a_1, a_2, a_3, \dots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

   e para algum $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ tem-se $a_k > 0$. Em geral escreve-se $a_0\bullet a_1a_2a_3\dots$ em vez de $+a_0\bullet a_1a_2a_3\dots$, e estes são chamados *positivos* ao passo que os decimais da forma $-a_0\bullet a_1a_2a_3\dots$ são chamados *negativos*.

2. O *decimal nulo* é definido por $0\bullet 000\dots$.

3. Decimais gerais não-nulos da forma $\pm a_0\bullet a_1a_2\dots a_k999\dots$, onde $a_n = 9$ se $n > k$, $a_k \neq 9$, ou $\pm a_0\bullet 9999\dots$ serão por nós chamados *redundantes* e identificados com os decimais que lhes são equivalentes, isto é, $\pm a_0\bullet a_1a_2\dots(a_k+1)000\dots$ e $\pm(a_0+1)\bullet 000\dots$, respectivamente.

4. Um *decimal* é um decimal geral positivo, negativo ou nulo que não é redundante.

5. Um *decimal periódico* é um decimal que apresenta um bloco de m algarismos (período), com $m \in \mathbb{N}$, repetindo-se indefinidamente a partir da $(k+1)$-ésima casa decimal, para um certo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $a_n = a_{n+m}$, para todo natural $n > k$. Em particular, o decimal nulo é periódico.

Quando a representação decimal periódica termina em 0's é usual omitir os zeros que se repetem indefinidamente. A seguir, damos uma definição informal para os números reais.

Definição 4.2 (Informal)
Um *número real* é um objeto que é representado por um decimal. O conjunto de todos os números reais é denotado por $\mathbb{R}$. O número real é *positivo* se é representado por um decimal positivo, *negativo* se é representado por um decimal negativo e *nulo* ou *zero* se é representado pelo decimal nulo.

A todo $p \in \mathbb{Z}$, associamos o decimal $p^* = p\bullet 000\ldots$ que continuará sendo denotado, simplesmente, por p. Em particular, $0 := 0\bullet 000\ldots$ e $1 := 1\bullet 000\ldots$.

Dado $x \in \mathbb{R}$, se $x = +a_0\bullet a_1a_2a_3\ldots$, denotamos por $-x$ o número real $-x := -a_0\bullet a_1a_2a_3\ldots$, se $x = -a_0\bullet a_1a_2a_3\ldots$ então pomos $-x := a_0\bullet a_1a_2a_3\ldots$. Temos também a identidade $-0\bullet 000\cdots = 0\bullet 000\cdots = 0$.

Dizemos que a definição anterior é informal porque ela apresenta $\mathbb{R}$ apenas como um conjunto cujos elementos podem ser representados de uma forma determinada, e não como uma estrutura algébrica com propriedades que possam caracterizá-lo sem que precisemos saber exatamente que forma têm seus elementos.

Em particular, ela não fornece nenhuma indicação do que venha a ser a adição $x + y$, a subtração $x - y$, o produto $x \cdot y$ e a divisão x/y (quando $y \neq 0$) de dois números reais x e y quaisquer. Vamos definir essas operações de modo geral e dar uma caracterização estrutural para $\mathbb{R}$ em breve.

Por enquanto, vamos definir as referidas operações apenas em alguns casos bastante particulares, que nos serão úteis na discussão que faremos logo a seguir.

Definição 4.3

(a) Se x e y são decimais periódicos representando números racionais $x = p/q$, $y = p'/q'$, $p, p', q, q' \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, $q' \neq 0$, então $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ e x/y (quando $y \neq 0$) são definidos como sendo os decimais obtidos por meio do algoritmo da divisão para as divisões $(pq'+qp') \div qq'$, $(pq'-qp') \div qq'$, $pp' \div qq'$ e $pq' \div qp'$, respectivamente.

(b) A multiplicação de um número real positivo x por uma potência positiva de 10 qualquer, $10^k \cdot x$, $k \in \mathbb{N}$, é o número real cuja representação decimal é obtida simplesmente deslocando-se para a direita, k casas decimais, o ponto decimal da representação de x. Além disso, se x é um número real negativo com $x = -y$, onde y é um número real positivo, então $10^k \cdot x := -10^k \cdot y$.

(c) Se x e y são dois reais positivos cujas representações decimais coincidem à direita de "$\bullet$", isto é,

$$x = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots$$
$$y = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots,$$

então,

$$x - y = a_0 - b_0.$$

Em particular, $x - x = 0$.

O resultado a seguir fornece uma caracterização precisa para a representação decimal dos números racionais.

Teorema 4.1
Um número real é racional se, e somente se, é um decimal periódico.

Prova: A prova de que todo racional é um decimal periódico já foi dada no início desta aula. Reciprocamente, mostraremos que se um decimal é periódico, então ele representa um número racional. A ideia da prova fica mais clara por meio de um exemplo. Suponhamos que $x = 5 \bullet 42323 \dots 23 \dots$. Multiplicamos x por uma potência de 10 para mover o ponto decimal até o primeiro bloco que se repete periodicamente: para o nosso exemplo, obtemos $10x = 54 \bullet 232323 \dots$. Observe que estamos usando (b) da Definição 4.3. Em seguida, multiplicamos x por uma potência de 10 para mover um bloco periódico para a esquerda do ponto decimal: no nosso exemplo obtemos $1000x = 5423 \bullet 2323 \dots$. Finalmente, subtraímos o último número do primeiro, usando o item (c) da Definição 4.3, para obter um inteiro: no caso do nosso exemplo, $1000x - 10x = 5369$. Segue daí que $x = 5369/990$, um número racional. $\square$

Definição 4.4

1. Dizemos que $x \in \mathbb{R}$ é um *decimal não-periódico* se x não é um decimal periódico.

2. O conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ é chamado conjunto dos *números irracionais*.

O Teorema 4.1 pode ser reescrito da seguinte forma.

Teorema 4.2
Um número real x é irracional se, e somente se, é um decimal não-periódico.

Agora vem a pergunta que não quer calar: *Por que precisamos dos irracionais? Por que não nos contentamos com os racionais? Por que introduzir decimais não-periódicos?*

Os exemplos a seguir servem como primeiras indicações de que os racionais são insuficientes para os propósitos da Análise Matemática.

Exemplo 4.1
Vamos mostrar que a equação

$$x^2 = 2 \tag{4.1}$$

não é satisfeita por nenhum número racional x.

Se existisse um tal racional x, poderíamos escrever $x = p/q$ com p e q inteiros primos entre si. Em particular, p e q não são ambos pares. Então, de (4.1) obtemos

$$p^2 = 2q^2. \tag{4.2}$$

Isso mostra que p^2 é par. Portanto, p é par, pois, se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar (por quê?). Assim, $p = 2m$, para algum inteiro m, e, portanto, $p^2 = 4m^2$. Segue de (4.2) que $q^2 = 2m^2$. Logo, q^2 é par e, por conseguinte, q é par, o que nos dá uma contradição! Portanto, é impossível um racional x satisfazer (4.1).

Exemplo 4.2
Seja A o conjunto de todos os racionais positivos r tais que $r^2 < 2$ e seja B o conjunto de todos os racionais positivos r tais que $r^2 > 2$. Vamos mostrar que A *não contém um maior elemento e* B *não contém um menor elemento.*

Mais explicitamente, para todo $r \in A$ vamos mostrar que é possível encontrar um $s \in A$ tal que $r < s$; e, para todo $r \in B$, vamos mostrar que é possível encontrar um $s \in B$ tal que $s < r$.

Para isso, associamos a cada racional $r > 0$ o número (racional)

$$s = r - \frac{r^2 - 2}{r + 2} = \frac{2r + 2}{r + 2}. \tag{4.3}$$

Então

$$s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r + 2)^2} \tag{4.4}$$

Se $r \in A$, então $r^2 - 2 < 0$, (4.3) mostra que $s > r$ e (4.4) mostra que $s^2 < 2$, logo, $s \in A$.

Se $r \in B$, então $r^2 - 2 > 0$, (4.3) mostra que $0 < s < r$ e (4.4) mostra que $s^2 > 2$, logo, $s \in B$.

Os exemplos acima mostram que o sistema dos números racionais tem "falhas", "buracos". Os números irracionais são introduzidos para preencher essas "falhas", tapar esses "buracos". Essa é a razão principal do papel fundamental dos números reais na Análise.

Apesar dos buracos, o sistema dos racionais apresenta uma propriedade notável, que é a de ser *denso*. Usamos esse termo para expressar que *entre dois racionais existe sempre um outro racional.* De fato, se $r < s$, então $r < (r + s)/2 < s$.

Ainda não nos é possível afirmar que existe um número real satisfazendo a equação (4.1), dentre outras razões, porque ainda não definimos o que é o quadrado de um número real qualquer. No entanto, estamos bastante próximos de poder fazê-lo.

A relação de ordem dos números reais

Definição 4.5
Seja A um conjunto. Uma *ordem* em A é uma relação, denotada por $<$, com as duas seguintes propriedades:

1. (Tricotomia) Se $x \in A$ e $y \in A$, então uma, e somente uma, das alternativas abaixo é verdadeira:

$$x < y, \qquad x = y, \qquad y < x.$$

2. (Transitividade) Se $x, y, z \in A$, se $x < y$ e $y < z$, então $x < z$.

A expressão "$x < y$" pode ser lida como "x é menor que y" ou "x precede y". Frequentemente é conveniente escrever $y > x$ em vez de $x < y$.

A notação $x \leq y$ significa $x < y$ ou $x = y$. Em outras palavras, $x \leq y$ é a negação de $x > y$.

Definição 4.6
Um *conjunto ordenado* é um conjunto A no qual está definida uma ordem.

Definição 4.7
Dados números reais positivos $x = a_0{\scriptstyle\bullet} a_1a_2a_3\dots$ e $y = b_0{\scriptstyle\bullet} b_1b_2b_3\dots$, dizemos que x *é menor que* y e escrevemos $x < y$ se $a_0 < b_0$ ou existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$, para $j = 0, \dots, k-1$, e $a_k < b_k$. Se $x \in \mathbb{R}$ é negativo ou igual a 0 e $y \in \mathbb{R}$ é positivo então, por definição, $x < y$. Se $x, y \in \mathbb{R}$ e ambos são negativos, então diremos, por definição, que $x < y$ se $-y < -x$.

Teorema 4.3
Com a relação $<$ entre números reais, dada pela Definição 4.7, $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado.

Prova: Claramente, a relação $<$ dada pela Definição 4.7 satisfaz as duas condições da Definição 4.5. Logo, pela Definição 4.6, $\mathbb{R}$ é um conjunto ordenado. $\square$

Cabe aqui perguntar se, de fato, coincidem, sobre os números racionais, a ordem induzida pela definição anterior, quando identificamos os racionais com suas representações decimais periódicas, e a ordem usual dos racionais, vistos como frações de inteiros. Lembremos que esta última é definida como segue. Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$, representados como fração na forma $x = p/q$, $y = p'/q'$, com $p, p' \in \mathbb{Z}$ e $q, q' \in \mathbb{N}$. Então $x < y$ se, e somente se, $pq' < qp'$.

A seguir, enunciamos um resultado que estabelece essa coincidência. Omitiremos sua demonstração por ser um pouco extensa, embora simples. Se você tiver curiosidade poderá vê-la na seção Prossiga ao final desta aula.

Teorema 4.4
A relação $x < y$ dada pela Definição 4.7 para os números reais coincide com a relação de ordem usual dos números racionais se $x, y \in \mathbb{Q}$.

O resultado a seguir mostra que $\mathbb{R}$, com a ordem dada pela Definição 4.7, também possui a propriedade de ser denso, apresentada pelos racionais, como vimos anteriormente.

Teorema 4.5 (Teorema da Densidade)
Dados dois números reais a, b, com $a < b$, existe $\xi \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a < \xi < b$. Mais ainda, podemos tomar ξ em $\mathbb{Q}$ ou em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ conforme nossa vontade.

Prova: Bastará analisar o caso em que x e y são positivos. Suponhamos $a = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \dots$ e $b = b_0 \bullet b_1 b_2 b_3 \dots$. Como $a < b$, ou $a_0 < b_0$, ou existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, e $a_k < b_k$. Por concretude, suponhamos que aconteça o segundo caso, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_j = b_j$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, e $a_k < b_k$; o primeiro caso pode ser tratado do mesmo modo. Obtemos um racional ξ, com $a < \xi < b$, fazendo

$$\xi = a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_k \dots a_{m-1}(a_m + 1)000\dots,$$

onde $m > k$ é tal que $a_m < 9$, o qual sabemos existir, pois a não é decimal redundante.

Para obter um irracional ξ satisfazendo $a < \xi < b$, tomamos para ξ o decimal não-periódico

$$\xi = a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_k \dots a_{m-1}(a_m + 1)01\underbrace{00}_{2\times}1\underbrace{000}_{3\times}1\underbrace{0000}_{4\times}1\underbrace{00000}_{5\times}1\underbrace{\dots}_{\dots},$$

onde, como antes, $m > k$ é tal que $a_m < 9$. $\square$

Usamos as seguintes notações que definem os diversos tipos de intervalos de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},\\
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\},\\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\},\\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\},\\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\},\\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \le b\},\\
(a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\},\\
[a, +\infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\},\\
(-\infty, +\infty) &:= \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Chamamos atenção para o fato de que $-\infty$ e $+\infty$ são apenas símbolos convenientes, que se lêem “menos infinito” e “mais infinito”; não representam, em hipótese alguma, números reais.

Na lista de tipos de intervalos de $\mathbb{R}$ que acabamos de dar, os quatro primeiros são ditos *limitados*, ao passo que os cinco últimos são ditos *ilimitados*. O primeiro, o quinto e o sétimo intervalos são ditos *abertos*, ao passo que o segundo, o sexto e o oitavo são ditos *fechados*.

A Não-Enumerabilidade dos Reais

A seguir, vamos dar uma prova da não-enumerabilidade de $\mathbb{R}$ devida a Cantor. Mais uma vez, assistiremos a um brilhante ataque pela diagonal!

Teorema 4.6
O intervalo unitário aberto $(0,1) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ não é enumerável.

Prova: A prova é por contradição. Se $x \in (0,1)$ então

$$x = 0\bullet a_1 a_2 a_3 \dots .$$

Suponhamos que exista uma enumeração $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \dots$ de todos os números em $(0,1)$, a qual disporemos na forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0\bullet a_{11}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots,\\
x_2 &= 0\bullet a_{21}a_{22}a_{23}\dots a_{2n}\dots,\\
x_3 &= 0\bullet a_{31}a_{32}a_{33}\dots a_{3n}\dots,\\
&\dots\quad \dots\quad \dots\\
x_n &= 0\bullet a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots a_{nn}\dots,\\
&\dots\quad \dots\quad \dots
\end{aligned}$$

Agora definimos um número real $y := 0\bullet b_1 b_2 b_3 \dots b_n \dots$, pondo $b_1 := 2$, se $a_{11} \geq 5$, e $b_1 := 7$, se $a_{11} \leq 4$; em geral, definimos

$$b_n := \begin{cases} 2 & \text{se } a_{nn} \geq 5,\\ 7 & \text{se } a_{nn} \leq 4. \end{cases}$$

Então, $y \in (0,1)$. Como y e x_n diferem na n-ésima casa decimal, então, $y \neq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, y não está incluído na enumeração de $(0,1)$, o que nos dá a contradição desejada. $\square$

Supremos e Ínfimos

Definição 4.8
Seja C um conjunto ordenado e $B \subset C$. Se existe $y \in C$ tal que $x \leq y$ para todo $x \in B$, então dizemos que B é *limitado superiormente* e chamamos y uma *cota superior* de B. Se existe $z \in C$ tal que $z \leq x$ para todo $x \in B$, então dizemos que B é *limitado inferiormente* e chamamos z uma *cota inferior* de B.

A seguir uma definição de importância fundamental para tudo que se seguirá no curso de Análise Real.

Definição 4.9
Suponhamos que C seja um conjunto ordenado, $B \subset C$ e B é limitado superiormente. Suponhamos que exista um $\alpha \in C$ com as seguintes propriedades:

(i) α é uma cota superior de B.

(ii) Se $y < \alpha$, então y não é uma cota superior de B.

Então, α é chamado *supremo* de B.

Existe, no máximo, um supremo. De fato, se α e β são dois supremos de B, devemos ter, por (ii), $\beta \geq \alpha$, já que β é cota superior, por (i), e, de novo por (ii), $\alpha \geq \beta$, já que α é cota superior, por (i). Logo, $\alpha = \beta$. Escrevemos

$$\alpha = \sup B.$$

A definição a seguir é o análogo da definição anterior no caso das cotas inferiores.

Definição 4.10
Suponhamos que C seja um conjunto ordenado, $B \subset C$ e B é limitado inferiormente. Suponhamos que exista um $\alpha \in C$ com as seguintes propriedades:

(i) α é uma cota inferior de B.

(ii) Se $y > \alpha$ então y não é uma cota inferior de B.

Então, α é chamado *ínfimo* de B.

Da mesma forma que para o supremo, existe, no máximo, um ínfimo. Escrevemos

$$\alpha = \inf B.$$

Exemplos 4.1

(a) Consideremos os conjuntos A e B do Exemplo 4.2 como subconjuntos do conjunto ordenado $\mathbb{Q}$. O conjunto A é limitado superiormente. De fato, as cotas superiores de A são exatamente os elementos de B. Como B não contém nenhum menor elemento, *A não possui supremo em $\mathbb{Q}$*. Analogamente, B é limitado inferiormente. O conjunto das cotas inferiores de B consiste de A e todos os $r \in \mathbb{Q}$ com $r \leq 0$. Como A não possui um maior elemento, *B não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$*.

(b) Se $\alpha = \sup B$ existe, então α pode ou não ser membro de B. Por exemplo, seja B_1 o conjunto de todos os $r \in \mathbb{Q}$ com $r < 0$, e B_2 o conjunto de todos $r \in \mathbb{Q}$ com $r \leq 0$. Então,

$$\sup B_1 = \sup B_2 = 0,$$

e $0 \notin B_1$, mas $0 \in B_2$.

(c) Seja $B \subset \mathbb{Q}$ o conjunto dos números da forma $1/n$, onde $n = 1, 2, 3, \ldots$. Então $\sup B = 1$, o qual pertence a B, e $\inf B = 0$, que não pertence a B.

Definição 4.11
Dizemos que um conjunto ordenado C tem a *propriedade do supremo* se para todo conjunto $B \subset C$ tal que B não é vazio e B é limitado superiormente, então existe o $\sup B$ em C.

O Exemplo 4.1(a) mostra que $\mathbb{Q}$ não tem a propriedade do supremo.

O resultado a seguir mostra que não é necessário definir o que venha a ser um conjunto ordenado C ter a "propriedade do ínfimo", em analogia à propriedade do supremo. Ele mostra, em suma, que a propriedade do supremo implica a "propriedade do ínfimo".

Teorema 4.7
Suponhamos que C seja um conjunto ordenado com a propriedade do supremo. Seja $B \subset C$ tal que B não é vazio e B é limitado inferiormente. Seja A o conjunto de todas as cotas inferiores de B. Então,

$$\alpha = \sup A$$

existe em C e $\alpha = \inf B$. Em particular, $\inf B$ existe em C.

Prova: Como B é limitado inferiormente, A não é vazio. Como A consiste exatamente daqueles $y \in C$ que satisfazem $y \leq x$ para todo $x \in B$, vemos que todo $x \in B$ é uma cota superior de A. Assim, A é limitado superiormente. Como, por hipótese, C tem a propriedade do supremo, temos que $\sup A$ existe em C. Seja $\alpha = \sup A$. Vamos mostrar que $\alpha = \inf B$.

Se $\gamma < \alpha$, então, pela Definição 4.9, γ não é uma cota superior de A e, portanto, $\gamma \notin B$. Segue que $\alpha \leq x$ para todo $x \in B$. Logo, $\alpha \in A$. Se $\alpha < \beta$, então $\beta \notin A$, já que α é uma cota superior de A. Em outras palavras, α é uma cota inferior de B e, se $\beta > \alpha$, então β não é cota inferior de B. Isso significa que $\alpha = \inf B$, como queríamos mostrar. $\square$

O fato de um conjunto ordenado C ter a propriedade do supremo também pode ser expresso dizendo-se que C é *completo*.

Exercícios 4.1

1. Mostre que se $a_k, b_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ e se
$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_m}{10^m} \neq 0,$$
então $n = m$ e $a_k = b_k$, para $k = 1, \dots, n$.

2. Ache a representação decimal de $-\frac{13}{11}$.

3. Expresse $\frac{1}{7}$ e $\frac{2}{19}$ como decimais periódicos.

4. Que racionais são representados pelos decimais periódicos
$$1{\bullet}25137137\dots137\dots \quad \text{e} \quad 35{\bullet}14653653\dots653\dots?$$

5. Mostre que se $F \subset \mathbb{Q}$ é finito, então $\sup F = \max F$, $\inf F = \min F$, onde $\max F$ e $\min F$ são, respectivamente, o maior elemento (máximo) e o menor elemento (mínimo) de F.

6. Para cada um dos intervalos abaixo, diga quais são limitados superiormente, quais são limitados inferiormente e diga em cada caso, justificando, se existem em $\mathbb{R}$ e, caso existam, quem são o supremo e/ou o ínfimo:
$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & (a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\
\text{(ii)} & [a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \le x \le b\}, \\
\text{(iii)} & (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}, \\
\text{(iv)} & [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}, \\
\text{(v)} & (-\infty,b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}, \\
\text{(vi)} & (-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} : x \le b\}, \\
\text{(vii)} & (a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\
\text{(viii)} & [a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}.
\end{array}$$

7. Prove que a equação $x^2 = 3$ não possui solução racional. Defina os subconjuntos de $\mathbb{Q}$,
$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\} \qquad B := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 3\},$$

e mostre que A é limitado superiormente, mas não possui supremo em $\mathbb{Q}$, ao passo que B é limitado inferiormente, mas não possui ínfimo em $\mathbb{Q}$.

Prossiga: A ordem usual dos racionais e a ordem dos decimais

Prova do Teorema 4.4 Inicialmente, vamos provar que se $x, y \in \mathbb{Q}$ e $x < y$, de acordo com a Definição 4.7, então $x < y$ no sentido usual para números racionais: se $x = p/q$ e $y = p'/q'$, com $p, p' \in \mathbb{Z}$ e $q, q' \in \mathbb{N}$, então $x < y$ se, e somente se, $pq' < qp'$.

Vamos ilustrar essa afirmação com um exemplo. De acordo com a Definição 4.7, temos

$$x := 5\bullet 42323\ldots 23\cdots < y := 5\bullet 4234234\ldots 234\ldots.$$

Vamos proceder como na demonstração do Teorema 4.1, porém, desta feita, como temos dois decimais periódicos com períodos distintos (2 e 3, respectivamente), vamos multiplicar ambos por $10^7 - 10 = 9999990$ (note que 6 é o mínimo múltiplo comum de 2 e 3). Obtemos, desse modo, os seus múltiplos inteiros $9999990x = 54232323 - 54$ e $9999990y = 54234234 - 54$. Assim, temos

$$x = \frac{54232323 - 54}{9999990} \quad \text{e} \quad y = \frac{54234234 - 54}{9999990}.$$

Fica, então, evidente que, de fato, $x < y$, como queríamos mostrar.

O argumento que acabamos de dar, para demonstrar nesse exemplo particular que a noção de ordem dada pela Definição 4.7 implica a noção de ordem usual, pode ser perfeitamente adaptado para demonstrar que, se $x, y \in \mathbb{Q}$ e $x < y$, de acordo com a Definição 4.7, então $x < y$ no sentido usual da ordem entre os números racionais descrito anteriormente.

Reciprocamente, se $x, y \in \mathbb{Q}$, $x = p/q$, $y = p'/q'$, $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}$, e $x < y$ no sentido que $pq' < qp'$, então vale também $x < y$ no sentido da Definição 4.7. Para simplicar, vamos considerar apenas o caso em que $0 < x < y$ no qual podemos supor $p, q, p', q' \in \mathbb{N}$.

Observemos que a representação decimal de x fornecida pelo algoritmo da divisão $p \div q$ é a mesma fornecida pela divisão $pq' \div qq'$. Da mesma forma, a representação decimal de y fornecida pelo algoritmo da divisão $p' \div q'$ é a mesma fornecida pela divisão $p'q \div qq'$. Observe também que, no caso das divisões $pq' \div qq'$ e $p'q \div qq'$, os divisores são iguais, ao passo que o dividendo da primeiro é menor que o dividendo da segunda.

Portanto, o primeiro quociente obtido pelo algoritmo da divisão para $pq' \div qq'$ será no máximo igual ao primeiro quociente obtido para $p'q \div qq'$.

Se ele for de fato menor na primeira divisão que na segunda, então teremos $x < y$ de acordo com a Definição 4.7.

Se for igual, o resto da primeira divisão terá sido menor do que o resto da segunda divisão e, portanto, o segundo quociente da divisão $pq' \div qq'$ será no máximo igual ao segundo quociente da divisão $p'q \div qq'$.

Se ele for menor na primeira divisão que na segunda, então teremos $x < y$ de acordo com a Definição 4.7.

Se for igual, o resto da primeira divisão terá sido menor do que o resto da segunda divisão e, portanto, o terceiro quociente da divisão $pq' \div qq'$ será no máximo igual ao terceiro quociente da divisão $p'q \div qq'$ etc.

Continuando esse processo, em no máximo qq' passos teremos chegado a um ponto em que o quociente obtido na divisão $pq' \div qq'$ terá sido menor que o quociente correspondente na divisão $p'q \div qq'$, ao mesmo tempo em que todos os quocientes anteriores terão sido iguais para ambas as divisões. Poderemos, então, de qualquer modo, concluir que $x < y$, de acordo com a Definição 4.7. $\square$