
Matemática Discreta – EP13 – 2007/2

Observações: Caro aluno, este é o segundo EP de uma série especial. Ele contém uma seleção de questões sobre *números binomiais* e *Teorema Binomial* que foram cobradas nas APs de 2003 a 2006. Meu objetivo, ao formular este tipo de EP, é dar a você uma amostra do grau de dificuldade que você enfretará ao resolver as questões da(s) próxima(s) AP(s). Ele contém:

- uma dica de como estudar para as avaliações, usando este EP;
- uma seleção das questões que foram cobradas nas APs de 2003 a 2006;
- um gabarito com as soluções utilizadas como parâmetro para a correção.

Apesar de não ser cobrado com frequência nas APs, a Coordenação de MD considera que este conteúdo é de extrema importância para a sua formação e poderá ser cobrado nas próximas avaliações.

Como estudar:

---

1. Leia o enunciado da questão cuidadosamente, separando, de um lado, os dados e, do outro, aquilo que foi perguntado;
2. Faça uma lista dos conceitos que, na sua opinião podem ser utilizados na solução da questão (se necessário, revise estes conceitos);
3. Elabore uma solução para a questão e escreva-a, tentando atingir o máximo de clareza;
4. Confira a sua *resposta* com a do gabarito;
5. *Se estiver correta*, leia atentamente a solução do gabarito e confronte-a com a solução que você apresentou (melhore sua redação, se achar necessário);

   Se não, não leia a solução do gabarito mas pense novamente na questão e tente elaborar uma solução que leve ao resultado que, agora, você já conhece;
6. Procure os tutores e colegas da disciplina para trocar informações, se familiarizar com outras idéias e superar suas dificuldades.

Questões selecionadas:

---

1. **(2003/1)** Determine, em cada item, condições sobre n de modo a satisfazer a afirmação apresentada.

   (a) (1,5) $C(10, n+1) = C(10, 3n-3)$.

   b) (1,5) O coeficiente do termo de grau 2 da expansão do binômio $(x-n)^4$ seja igual a 24.

---

2. **(2005/1)** (2,5) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$.

---

3. **(2005/2)** (2,0) Calcule a e b, sabendo que

$$a^3 + C(3,1)a^2b + C(3,2)ab^2 + b^3 = 64$$

e que

$$a^5 - C(5,1)a^4b + C(5,2)a^3b^2 - C(5,3)a^2b^3 + C(5,4)ab^4 - b^5 = 32.$$

---

4. **(2005/2)** (1,0 pt) Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{x})^{18}$.

Solucões das questões selecionadas:

---

1. (a) De acordo com as propriedades dos números binomiais, temos: $C(m,r) = C(m,p)$ se $r = p$ ou $p = m - r$.

   Assim, para que tenhamos $C(10, n+1) = C(10, 3n-3)$, devemos ter $n + 1 = 3n - 3$ ou $3n - 3 = 10 - (n + 1)$.

   Logo, $3n + n = 1 + 3$ ou $3n - 3 = 10 - n - 1$, ou seja, $2n = 4$ ou $4n = 10 + 3 - 1 = 12$.

   Assim, temos que $C(10, n+1) = C(10, 3n-3)$, quando $n = 2$ ou $n = 3$.

   (b) Devemos determinar uma condição sobre n tal que o coeficiente do termo de grau 2 da expansão do binômio $(x - n)^4$ seja igual a 24.

   O termo de grau 2 do binômio considerado é $C(4,2)x^{4-2}(-n)^2$. Logo, o coeficiente que nos interessa é $C(4,2)(-n)^2$.

   Para que este coeficiente seja igual a 24, devemos ter $C(4,2)(-n)^2 = 24$, o que fornece $\frac{4 \times 3}{2 \times 1}n^2 = 24$, ou seja, $6n^2 = 24$ ou, ainda, $n^2 = 4$

   Logo, o coeficiente do termo de grau 2 da expansão do binômio considerado será igual a 24 quando $n = 2$ ou $n = -2$.

---

2. O termo geral de $(X + Y)^n$ é dado pela fórmula $\binom{n}{j} X^{n-j}Y^j$. Substituindo os valores de X, Y e n dados no binômio, temos $\binom{6}{j}(x^2)^{6-j}(x^{-1})^j = \binom{6}{j}x^{12-2j}x^{-j} = \binom{6}{j}x^{12-3j}$. Como o termo é independente de x, devemos ter $12 - 3j = 0$, o que acarreta $j = 4$. Assim, o termo procurado é $\binom{6}{4} = 15$.

---

3. Observe que, pela fórmula do Teorema Binomial:

$$a^3 + C(3,1)a^2b + C(3,2)ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

   e

$$a^5 - C(5,1)a^4b + C(5,2)a^3b^2 - C(5,3)a^2b^3 + C(5,4)ab^4 - b^5 = (a-b)^5.$$

   Assim, temos $(a + b)^3 = 64$ e $(a - b)^5 = 32$. Daí, obtemos $a + b = 4$ e $a - b = 2$. Finalmente, resolvendo o sistema linear, temos $a = 3$ e $b = 1$.

---

4. O termo geral do desenvolvimento de $(A-B)^n$ é dado por:

$$T_{i+1} = (-1)^i C(n,i) A^{n-i} B^i.$$

No caso considerado, temos $n = 18$, $A = x^{-\frac{1}{2}}$ e $B = x^{\frac{1}{4}}$. Substituindo, temos:

$$\begin{array}{rcl} T_{i+1} & = & (-1)^i C(18,i)(x^{-\frac{1}{2}})^{18-i}(x^{\frac{1}{4}})^i \\ & = & (-1)^i C(18,i) x^{\frac{3i-36}{4}} \end{array}$$

Como estamos procurando o termo independente de x, devemos ter $\dfrac{3i-36}{4} = 0$, ou seja $i = 12$. Logo, o termo procurado é $T_{13} = (-1)^{12} C(18,12) = C(18,12)$.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF