Aula 18 – Transformações lineares

Objetivos

Definir os conceitos de transformação matricial e linear;
Apresentar vários exemplos de transformações lineares.

Introdução

Um dos conceitos centrais na Matemática é o de *função*. De modo geral usa-se os termos função, aplicação e transformação como sinônimos.

Uma função é uma associação entre dois conjuntos A e B, envolvendo todos os elementos de A, mas não necessariamente todos os elementos de B, e que associa cada elemento de A à somente um elemento de B. Esta maneira de ver uma função somente como uma associação é uma visão essencialmente estática.

Uma outra meneira de ver o mesmo conceito, porem mais dinâmica, é que uma função é uma transformação, que ¨leva¨ elementos do conjunto A em elementos do conjunto B, ou seja, ¨transforma¨ elementos de A em elementos de B.

Na Álgebra Linear, usa-se mais o termo transformação do que função, especialmente no caso das transformações lineares, que definiremos nesta aula. Em resumo, uma transformação de um espaço vetorial V em um espaço vetorial W é simplesmente uma função de V em W.

Como observamos, são de interesse especial as transformações lineares. Comecaremos definindo transformações matriciais e depois as lineares. Veremos que para transformações de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$, os dois conceitos são equivalentes.

Transformações matriciais

Uma transformação matricial é uma função dada por $T(x) = Ax$, onde A é uma matriz. Mais precisamente, seja A uma matriz $m \times n$. Então a aplicação $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $x \to Ax$ é uma transformação matricial.

Exemplo 1

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

então A induz a transformação matricial $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dada por $x \to Ax$.

Por exemplo, se $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, então

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix} .$$

Em geral, se $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, então

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} .$$

Exemplo 2

Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encontre um $x \in \mathbb{R}^3$, tal que $Ax = b$.

Solução: Seja $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, então $Ax = b$, leva a

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 &= 2 - 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 &= 2 + x_3 \end{cases}$$

Somando as duas equações, obtemos

$$4x_1 = 4 - x_3 \Rightarrow x_1 = 1 - \frac{x_3}{4} \ .$$

Subtraindo as mesmas equações, obtemos

$$2x_2 = 0 + 3x_3 \ \Rightarrow x_2 = \frac{3x_3}{2} \ .$$

Portanto, todo vetor $x = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x_3}{4} \\ \frac{3x_3}{2} \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$, é levado a b pela transformação matricial $T = Ax$.

Exemplo 3

Seja $A = x = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine a imagem de $T = Ax$.

Solução: Temos que $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Seja $u = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e seja $Tu = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Então

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= a \\ 2x_1 + x_2 &= b \\ x_1 - x_2 &= c \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 &= a \\ -x_2 &= b - 2a \\ -2x_2 &= c - a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 &= b - a \\ x_2 &= 2a - b \\ 0 &= c - a - 2b + 4a \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 &= b - a \\ x_2 &= 2a - b \\ 0 &= 3a - 2b + c \end{cases} ,$$

o que mostra que $Ax = b$ tem solução quando $3a - 2b + c = 0$. Portanto, a aplicação dada pela matriz A leva $\mathbb{R}^2$ no plano $3x - 2y + z = 0$.

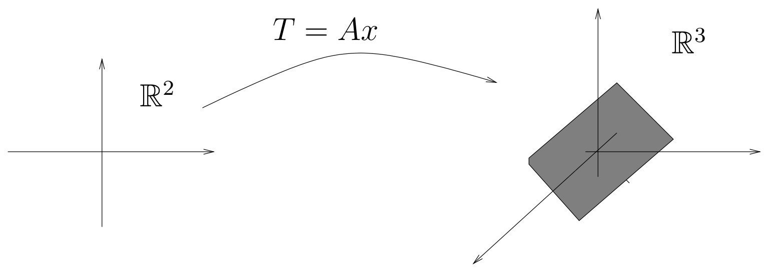


Figura 1: Aplicação T leva $\mathbb{R}^2$ no plano $3x - 2y + z = 0$.

Transformações lineares

Dada uma matrix $m \times n$ A, vetores $n \times 1$ u e v, e um escalar c, segue-se das propriedades da multiplicação de matrizes que

$$A(u + v) = Au + Av \quad \text{e} \quad A(cu) = cAu \; .$$

De maneira geral, quando uma função possui as duas propriedades acima, dizemos que ela é linear. Definiremos agora as transformações lineares.

Definição 1

Uma transformação T é *linear* se:

1. $T(u + v) = Tu + tv$, para todos u e v no domínio de T.
2. $T(cv) = cT(v)$, para todo v e para todo escalar c.

Em outras palavras, podemos dizer que uma transformação é linear quando preserva a soma de vetores e o produto de vetores por escalares.

Preservar a soma de vetores quer dizer que se somarmos os vetores primeiro $(u + v)$ e, em seguida, aplicarmos T, obtendo $T(u + v)$, o resultado é o mesmo que aplicarmos T aos vetores e depois somarmos os resultados $(Tu + Tv)$, isto é $T(u + v) = Tu + Tv$.

Se A é uma matriz, u e v são vetores no domínio de $T = Ax$ e c é um escalar, então, a propriedade $A(u + v) = Au + Av$ mostra que T preserva a soma de matrizes e a propriedade $A(cu) = cA(u)$ mostra que T preserva o produto por escalar. Portanto, *toda transformação matricial é linear*.

Por outro lado, nem toda transformação linear de espaços vetoriais é matricial. Veremos um exemplo deste tipo abaixo. Porem, transformações lineares de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ são sempre matriciais. Provaremos este fato na aula 23 onde tambem estudaremos em detalhes como obter a representação matricial de uma transformação linear.

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear, onde V e W são espaços vetoriais, e seja $v \in V$. Então

$$T(0_V) = T(0.v) = 0.T(v) = 0_W \ ,$$

onde 0_V indica o vetor nulo do espaço vetorial v e 0_W indica o vetor nulo do espaço vetoria W. Mostramos então que uma transformação linear $T\colon V \to W$, leva o vetor nulo de V no vetor nulo de W.

Outra propriedade muito utilizada é a seguinte:

$$T(cv + du) = T(cv) + T(du) = cT(v) + dT(u) \ .$$

A dedução acima utiliza as duas propriedades que definem linearidade. Observe que esta propriedade, sozinha, implica em linearidade.

Isto é, se uma transformação T satisfaz

$$T(cv + du) = cT(u) + dT(v) \ ,$$

então ela é linear. Para ver isto, basta notar que fazendo $c = d = 1$ obtemos $T(u+v) = Tu+Tv$ (preservação da soma de vetores) e fazendo $c = 1$ e $d = 0$, obtemos $T(cu) = cT(u)$ (preservação do produto de vetores por escalares).

Aplicando sucessivamente o mesmo raciocínio acima, podemos mostrar que

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_kv_k) = c_1T(v_1) + \cdots + c_kT(v_k) \ ,$$

onde $c_1, \cdots , c_k$ são escalares e $v_1, \cdots , v_k$ são vetores no domínio de T.

Exemplo 4

A transformação $T\colon V \to W$ dada por $T(x) = 0_W$ é linear. Esta transformação, chamada transformação nula, leva todo vetor de V no vetor nulo de W.

Exemplo 5

Seja V um espaço vetorial qualquer, a transformação $T\colon V \to V$ dada por $T(u) = u$ é linear. Esta transformação é chamada indentidade. Se $V = \mathbb{R}^n$, então a transformação linear dada pela matriz I_n, identidade de ordem n, é a transformação identidade de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 6

Seja $r \in \mathbb{R}$. Mostre que a transformação $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $T(x) = rx$ é uma transformação linear.

Solução: Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ e c, d escalares. Então

$$T(cu + dv) = r(cu + dv) = rcu + rdv = c(ru) + d(rv) = cT(u) + dT(v)\ .$$

Portanto T é uma transformação linear.

Se $r = 0$ então temos a transformação nula. Se $r = 1$ temos a transformação identidade. Se $0 \leq r < 1$ então dizemos que T é uma contração. Se $r > 1$ então dizemos que T é uma dilatação. A figura abaixo mostra a dilatação $T(x) = 2x$.

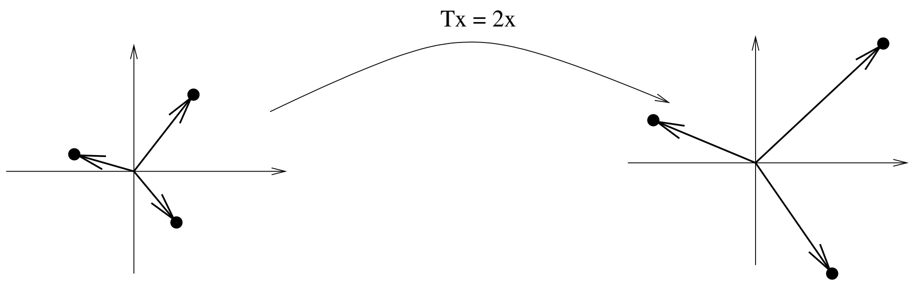


Figura 2: Dilatação $T(x) = 2x$.

Exemplo 7

A transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x) = x + (1, 0)$ **não** é linear. Para ver isto, basta notar que ela não leva o vetor nulo no vetor nulo. Esta é uma translação de vetores no $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 8

A transformação linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, isto é

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}\ .$$

Como esta transformação é matricial, então ela é linear. Determinando a imagem de alguns vetores e representando em um gráfico estes vetores e suas imagens, podemos ver que esta transformação gira os vetores em torno da origem, no sentido anti-horário, de um ângulo de 90^0. Isto é verdade. Estudaremos com maiores detalhes transformações lineares especiais, como a rotação de um ângulo θ, nas aulas 25 e 26.

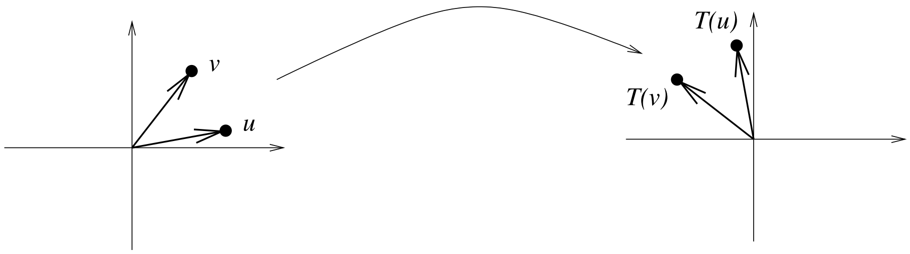


Figura 3: Rotação de um ângulo de 90^0.

Exemplo 9

Seja $\mathbf{P}_n$ o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a n. Definimos o operador derivação $D\colon \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^{n-1}$ por

$$D(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n) = a_1 + 2a_2 t + \cdots + n a_n t^{n-1} \ .$$

Isto é, D leva cada termo $a_k t^k$ em $k a_k t^{k-1}$.

É fácil ver que este operador é uma transformação linear. Note que ele é a derivação de funções no sentido usual, restrito ao espeço dos polinômios. Sabemos que para a derivação vale

$$D(cf_1 + df_2) = cD(f_1) + dD(f_2) \ ,$$

confirmando que D é uma transformação linear.

Note que esta transformação é linear mas não é matricial. Não há uma matrix A tal que $D = Ax$. No entanto, veremos na aula 23 que toda transformação linear entre espaços de dimensão finita têm uma representação matricial. Há uma matriz A tal que se p é um polinômio e se $[p]_B$ é a representação deste polinômio em uma base B escolhida de $\mathbf{P}^n$, então $A[p]_B$ é a representação de Dp nesta base.

Exemplo 10

Um banco de investimentos possui 4 tipos de investimentos, que chamaremos de investimentos A, B, C e D. Um cliente faz sua carteira distribuindo cada seu dinheiro entre as 4 opções do banco. Representamos a carteira de um cliente por um vetor 4×1. Assim uma carteira $x = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix}$ indica x_A reais investidos na opção A, x_B reais investidos na opção B etc.

Se o investimento A resultou em y_A reais por real aplicado, B resultou em y_B reais por real aplicado etc, então o resultado total de cada cliente será calculado pela transformação linear $T: \mathbb{R}^4 \to R$, dada por

$$T(x) = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \\ x_D \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_A & y_B & y_C & y_D \end{bmatrix} = x_A y_a + x_B y_B + x_C y_C + x_D y_D \, .$$

Resumo

Nesta aula estudamos um dos conceitos fundamentais em Álgebra Linear, que é o de Transformação Linear.

Vimos, inicialmente, as transformações matriciais. Em seguida, definimos transformações lineares.

Vimos diversos exemplos de transformações lineares, inclusive uma aplicação à economia.

Exercícios

1. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação definida por $Tx = Ax$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre a imagem de

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Quantas linhas e colunas deve ter uma matriz A para definir uma aplicação de $\mathbb{R}^4$ em $\mathbb{R}^6$ por $T(x) = Ax$.

3. Para os valores da matriz A e vetor b nos ítens abaixo, encontre, se for possível, um vetor x tal que $Tx = b$.

   (a)
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

   (b)
$$A = \begin{bmatrix} 11 & -1 \\ 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

4. Encontre todos os valores de $x \in \mathbb{R}^4$ que são levados no vetor nulo pela transformação $x \to Ax$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Nos ítens abaixo, use um sistema de coordenadas para representar graficamente os vetores u $= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, v $= \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, Tu e Tv. Faça uma descrição geométrica do efeito da aplicação de T nos vetores de $\mathbb{R}^2$.

   (a) $T(x) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (b) $T(x) = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}$.

   (c) $T(x) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (d) $T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Seja $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear. Se

$$T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

determine $T(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix})$ e $T(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix})$.

Respostas dos exercícios

1. $\begin{bmatrix} -4 \\ -8 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

2. A deve ser uma matriz 6×4.

3. (a) $x = \begin{bmatrix} 2-c \\ c+1 \\ c \end{bmatrix}$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Não há valor de x tal que $Tx = b$.

4. O espaço gerado por $\{(-\frac{3}{2}, -1, \frac{3}{2}, 1)\}$ é levado no vetor nulo.

5. (a) Dilatação por um fator de 3.

   (b) Contração por uma fator de $0,5$.

   (c) Rotação de 180^0.

   (d) Projeção sobre o eixo-y.

Aula 19 – Propriedades das Transformações Lineares

Objetivos

Reconhecer e aplicar as propriedades das transformações lineares.

Na aula 18 conhecemos um tipo muito especial de função - as transformações lineares, que são funções definidas entre espaços vetoriais e com características que as tornam muito úteis, em uma gama imensa de problemas e situações da Matemática, Física, Engenharia e Computação, entre outras áreas de estudo e trabalho.

Nesta aula veremos várias propriedades das transformações lineares. Em especial, veremos um fato muito importante, que é o seguinte: para determinar uma transformação linear $T\colon V \to W$, basta conhecer seus valores em uma base qualquer de V.

Propriedades das transformações lineares

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Valem as seguintes propriedades:

(i) $T(0_V) = 0_W$
Em palavras: uma transformação linear leva o vetor nulo do domínio ao vetor nulo do contra-domínio. Esta propriedade já foi demonstrada na aula 18.

(ii) $T(-v) = -T(v), \forall v \in V$
Em palavras: A imagem do vetor oposto é o oposto da imagem do vetor.

Como $T[(-1)v] = (-1)T(v)$, decorre que $T(-v) = -T(v)$.

(iii) Se U é um subespaço de V então $T(U)$ é um subespaço de W.

Devemos mostrar que $0_W \in T(U)$ e que $T(U)$ é fechado para soma de vetores e multiplicação por escalar.

Como U um subespaço de V, então $0_V \in U$. Pela propriedade (i), $T(0_V) = 0_W \in T(U)$.

Sejam $x, y \in T(U)$. Existem $u, v \in U$ tais que $T(u) = x$ e $T(v) = y$. Como U é subespaço de V, então $u + v \in U$. De $T(u+v) \in T(U)$ resulta que

$$T(u+v) = T(u) + T(v) = x + y \in T(U) \ .$$

Finalmente, sejam $x \in T(U)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Existe $u \in U$ tal que $T(u) = x$. Como $\alpha u \in U$, então $T(\alpha u) \in T(U)$, o que resulta em

$$T(\alpha u) = \alpha T(u) = \alpha x \in T(U) \ ,$$

e podemos concluir que $T(U)$ é subespaço de W.

(iv) Dados $v_1, v_2, ..., v_n \in V$,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) \ .$$

Em palavras: A imagem de uma combinação linear de vetores de V é uma combinação linear das imagens desses vetores, com os mesmos coeficientes.

Esta propriedade já foi apresentada na Aula 18. Vamos dar aqui uma demonstração usando indução sobre n.

O caso $n = 1$ segue diretamente da definição de transformação linear, pois $T(\alpha_1 v_1) = \alpha_1 T(v_1)$. Vamos supor que a propriedade vale para $n = k$, isto é,

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_k T(v_k) \ .$$

Vamos provar que vale para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
& T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1}) \\
& = T[(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) + (\alpha_{k+1} v_{k+1})] \\
& \overset{T\,linear}{=} T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) \\
& \overset{hip.\,ind.}{=} \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_k T(v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1}) \\
& \overset{T\,linear}{=} \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_k T(v_k) + \alpha_{k+1} T(v_{k+1}) \ ,
\end{aligned}$$

isto é, vale a propriedade para $n = k+1$, o que conclui a demonstração.

(v) Se $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ é um conjunto gerador de V então $\{T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)\}$ é um conjunto gerador da imagem de T.

Demonstração. Seja $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um conjunto gerador de V. Seja w um vetor na imagem de T, isto é, existe v em V tal que $w = T(v)$. Então existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} w &= T(v) = \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) \stackrel{(iv)}{=} \\ &= \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n). \end{aligned}$$

Logo, os vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ geram a imagem de T.

(vi) Se $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n) \in W$ são LI então os vetores $v_1, v_2, ..., v_n \in V$ são LI.

Demonstração. Seja a combinação linear

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n = o_V. \qquad (1)$$

Vamos aplicar a transformação T a ambos os lados dessa igualdade:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = T(0_V) \;\Rightarrow$$

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0_W\ .$$

Como os vetores $T(v_1), T(v_2), ..., T(v_n)$ são LI, concluímos que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Ou seja, todos os coeficientes da combinação linear (1) são iguais a zero, o que implica que os vetores $v_1, v_2, ..., v_n$ são LI.

Exemplo **11**

Sejam V um espaço vetorial e $u \in V$. A aplicação

$$\begin{array}{rccc} T_u: & V & \rightarrow & V \\ & v & \mapsto & v + u \end{array}$$

é chamada *translação definida por u*. É fácil verificar que, quando $u \neq 0_V$, essa aplicação não é linear, pois $T_u(0_V) = 0_V + u = u \neq 0_V$, violando a propriedade (i), acima. Por outro lado, quando $u = 0_V$, essa aplicação é o operador identidade de V, que é linear.

Exemplo **12**

A recíproca da propriedade (vi) não é verdadeira, isto é, é possível termos um conjunto de vetores de V que sejam LI, mas com suas imagens formando um conjunto LD em W. Considere, por exemplo, o operador projeção ortogonal sobre o eixo x, definido em $\mathbb{R}^2$, isto é, a transformação linear tal que $T(x,y) = (x,0)$, para todo vetor (x,y) do plano. Os vetores $v_1 = (3,1)$ e $v_2 = (3,4)$ são LI, mas suas imagens coincidem: $T(v_1) = T(v_2) = (3,0)$. Logo, o conjunto $\{T(v_1), T(v_2)\} \subset \mathbb{R}^2$ é LD. Essa situação é ilustrada na figura 1.

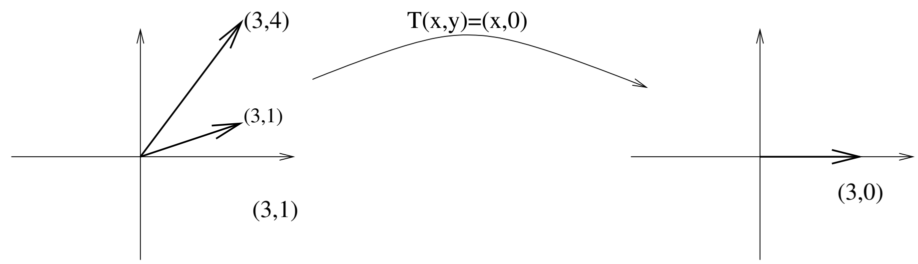


Figura 1: v_1 e v_2 são LI; $T(v_1)$ e $T(v_2)$ são LD.

Uma característica importante das transformaçõs lineares é que elas ficam completamente determinadas se as conhecemos nos vetores de uma base do domínio. Isto é, dada uma transformação linear $T : V \to W$, se conhecemos as imagens por T dos vetores de uma base de V, podemos obter a expressão de $T(v)$, para um vetor v genérico de V. O exemplo a seguir mostra esse procedimento:

Exemplo 13

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, linear, tal que

$T(1,0,0) = (1,1,1);$

$T(0,1,0) = (2,-1,1);$

$T(0,0,1) = (1,0,2).$

Vamos determinar $T(x,y,z)$, onde (x,y,z) é um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$.

Os vetores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$ e $v_3 = (0,0,1)$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Assim, um vetor $v = (x,y,z)$, genérico, de $\mathbb{R}^3$, se escreve $(x,y,z) = xv_1 + yv_2 + zv_3$. Aplicando a propriedade (iv), temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x,y,z) = \\ &= T(xv_1 + yv_2 + zv_3) = \\ &= xT(v_1) + yT(v_2) + zT(v_3) = \\ &= x(1,1,1) + y(2,-1,1) + z(1,0,2) = \\ &= (x+2y+z, x-y, x+y+2z). \end{aligned}$$

Logo, T é dada por $T(x,y,z) = (x+2y+z, x-y, x+y+2z)$.

Vamos ver como fazer no caso em que a base na qual a transformação linear é conhecida não seja a canônica:

Exemplo 14

Uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é tal que

$T(1, -1) = (1, 1, 2)$;

$T(2, 0) = (2, -1, 1)$.

Vamos determinar $T(x, y)$, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Primeiramente, verificamos que os vetores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (2, 0)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Neste caso, como são dois vetores num espaço bi-dimensional, uma forma rápida de verificar que são LI é calcular o determinante formado pelas suas coordenadas e constatar que é diferente de zero. Deixamos isso com você, como exercício (!).

A seguir, escrevemos um vetor genérico do espaço como uma combinação linear dos vetores dessa base:

$$v = (x, y) = av_1 + bv_2 = a(1, -1) + b(2, 0) \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = x \\ -a = y \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = -y$ e $b = \frac{x+y}{2}$. Portanto,

$$(x, y) = -y(1, -1) + \frac{x + y}{2}(2, 0)$$

Usando a linearidade de T, obtemos

$$\begin{aligned} T(v) &= T(x, y) = \\ &= T(-yv_1 + \tfrac{x+y}{2}v_2) = \\ &= -yT(v_1) + \tfrac{x+y}{2}T(v_2) = \\ &= -y(1, 1, 2) + \tfrac{x+y}{2}(2, -1, 1) = \\ &= \left(x, \tfrac{-x-3y}{2}, \tfrac{x-3y}{2}\right). \end{aligned} .$$

Logo, T é dada por $T(x, y) = \left(x, \frac{-x-3y}{2}, \frac{x-3y}{2}\right)$.

Exemplo 15

Em relação à transformação linear do exemplo 4, encontre $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (3, 1, 4)$.

Queremos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (3, 1, 4)$.

$$\left(x, \frac{-x-3y}{2}, \frac{x-3y}{2}\right) = (3,1,4) \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \frac{-x-3y}{2} = 1 \\ \frac{x-3y}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ -x-3y = 2 \\ x-3y = 8 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$.
Logo, o vetor procurado é $(3, -5/3)$.

Exemplo 16

Dado um espaço vetorial V, um *funcional linear* definido em V é uma transformação linear $f : V \to \mathbb{R}$. Considere o funcional linear f definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = 2$ e $f(2,1) = 3$. Vamos determinar $f(x,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Note que o conjunto dos números reais é, ele mesmo, um espaço vetorial real.

Novamente, começamos conferindo que os vetores $(1,1)$ e $(2,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Escrevemos, então, um vetor genérico (x,y), como combinação linear dos vetores dados: $(x,y) = a(1,1) + b(2,1)$. Resolvendo, obtemos

$$\begin{cases} a + 2b &= x \\ a + b &= y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a &= -x + 2y \\ b &= x - y \end{cases},$$

isto é, $(x,y) = (-x+2y)(1,1) + (x-y)(2,1)$.

Então

$$T(x,y) = T((-x+2y)(1,1)+(x-y)(2,1)) = (-x+2y)T(1,1)+(x-y)T(2,1)$$

$$= (-x+2y).2 + (x-y).3 = x + y\ .$$

Logo, T é dada por $T(x,y) = x + y$.

Exemplo 17

Em relação ao funcional linear definido no exemplo acima, vamos procurar os vetores v de $\mathbb{R}^2$ tais que $f(v) = 0$. Isto é, queremos (x,y) tal que $f(x,y) = x + y = 0$. Isso nos leva aos vetores do plano da forma $(x, -x)$. Logo, há infinitos vetores de $\mathbb{R}^2$ que são levados ao zero, pelo funcional f - a saber, todo vetor do conjunto $\{(x,-x) | x \in \mathbb{R}\}$.

Para finalizar, um exemplo no espaço dos polinômios:

Exemplo 18

Seja T a transformação linear em $P_3(\mathbb{R})$ dada por

$T(1) = 1 - t;$

$T(1+t) = t^3;$

$T(t+t^2) = 3 - t^2;$

$T(t^2+t^3) = 1 + t^2.$

Vamos determinar $T(x + yt + zt^2 + wt^3)$, onde $x + yt + zt^2 + wt^3$ é um polinômio qualquer de $P_3(\mathbb{R})$ e, a seguir, calcular $T(2 - 3t + 4t^3)$.

Como nos exemplos anteriores, constatamos que $\{1, 1+t, t+t^2, t^2+t^3\}$ é uma base de $P_3(\mathbb{R})$.

A seguir, escrevemos o vetor genérico de $P_3(\mathbb{R})$ nessa base:

$$\begin{aligned} x + yt + zt^2 + wt^3 &= a.1 + b(1+t) + c(t+t^2) + d(t^2+t^3) = \\ &= (a+b) + (b+c)t + (c+d)t^2 + dt^3. \end{aligned}$$

Obtemos, assim, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a + b = x \\ b + c = y \\ c + d = z \\ d = w \end{cases},$$

que, resolvido, fornece a solução:

$$\begin{cases} a = x - y + z - w \\ b = y - z + w \\ c = z - w \\ d = w \end{cases}.$$

Escrevemos então:

$$x+yt+zt^2+wt^3 = (x-y+z-w).1+(y-z+w)(1+t)+(z-w)(t+t^2)+w(t^2+t^3)\ .$$

Aplicamos a transformação T em ambos os lados dessa igualdade:

$$\begin{aligned} & T(x + yt + zt^2 + wt^3) \\ = \;& T((x-y+z-w).1 + (y-z+w)(1+t) + (z-w)(t+t^2) \\ & + w(t^2+t^3)) \\ = \;& (x-y+z-w).T(1) + (y-z+w).T(1+t) + (z-w).T(t+t^2) \\ & + w.T(t^2+t^3) \\ = \;& (x-y+z-w).(1-t) + (y-z+w).t^3 + (z-w).(3-t^2) + w.(1+t^2) \\ = \;& (x-y+4z-3w) + (-x+y-z+w)t + (-z+2w)t^2 + (y-z+w)t^3\ . \end{aligned}$$

Logo, a transformação procurada é dada por:

$$T(x+yt+zt^2+wt^3) = (x-y+4z-3w)+(-x+y-z+w)t+(-z+2w)t^2+(y-z+w)t^3 \ .$$

Vamos, agora, calcular $T(2-3t+4t^3)$. Temos $x = 2; y = -3; z = 0$ e $w = 4$. Então

$$T(2-3t+4t^3) = -7 - t + 8t^2 + t^3 \ .$$

Resumo

Nesta aula estudamos as propriedades das transformações lineares. O fato mais relevante é que podemos determinar uma transformação linear a partir da sua aplicação nos vetores de uma base, apenas. Assim, o número de informações necessárias a respeito de uma transformação linear, para que a conheçamos completamente, é igual à dimensão do espaço vetorial no qual ela é definida. Isso é uma especificidade das transformações lineares: nenhuma outra função permite uma manipulação tão simples. É por essa qualidade, em particular, que as transformações lineares são, por excelência, as funções usadas na Computação em geral.

Exercícios

1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a transformação linear para a qual $T(1,1) = 3$ e $T(0,1) = -2$. Encontre $T(x,y)$, para $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. Um operador linear T, definido em $P_2(\mathbb{R})$, é tal que $T(1) = t^2, T(x) = 1 - t$ e $T(t^2) = 1 + t + t^2$.

   (a) Determine $T(a + bt + ct^2)$, onde $a + bt + ct^2$ é um vetor genérico de $P_2(\mathbb{R})$.

   (b) Determine $p \in P_2(\mathbb{R})$ tal que $T(p) = 3 - t + t^2$.

3. Encontre $T(x,y)$ onde $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é definida por $T(1,2) = (3,-1,5)$ e $T(0,1) = (2,1,-1)$.

4. Determine $T(x,y,z)$ onde $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é dada por $T(1,1,1) = 3, T(0,1,-2) = 1$ e $T(0,0,1) = -2$.

Auto-avaliação

Você deverá assimilar o significado de cada propriedade vista. A primeira delas é extremamente útil para rapidamente identificar algumas transformações que não são lineares, por não levarem o vetor nulo do domínio ao vetor nulo do contra-domínio. A translação é o exemplo mais importante disso. Além disso, você deve se familiarizar com a técnica de encontrar uma transformação linear a partir de seus valores nos vetores de uma base do domínio. Veja que os exercícios são repetitivos: mudam o espaço e a base considerada, mas a estrutura se repete. Caso você tenha alguma dúvida, entre em contato com o tutor da disciplina. E... vamos em frente!!

Respostas dos exercícios

1. $T(x,y) = 5x - 2y$

2. (a) $T(a + bt + ct^2) = (b + c) + (-b + c)t + (a + c)t^2$

   (b) $p = 2t + t^2$

3. $T(x,y) = (-x + 2y, -3x + y, 7x - y)$

4. $T(x,y,z) = 8x - 3y - 2z$

Aula 20 – Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Objetivos

Determinar o núcleo e a imagem de uma transformação linear.
Identificar o núcleo de uma transformação linear como um subespaço do domínio.
Identificar a imagem de uma transformação linear como um subespaço do contra-domínio.

Na aula 19 mencionamos a imagem de uma transformação linear. Nesta aula definiremos o núcleo de uma transformação linear e mostraremos que, tanto o núcleo, como a imagem, possuem estrutura de espaço vetorial.

Núcleo de uma transformação linear

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. Chamamos de *núcleo* de T, representado por $N(T)$, o seguinte conjunto:

$$N(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\} .$$

Alguns textos usam a notação $ker(T)$, pois núcleo, em inglês, é *kernel*.

Em palavras: o núcleo de uma transformação linear é o subconjunto do domínio formado pelos vetores que são levados ao vetor nulo do contra-domínio.

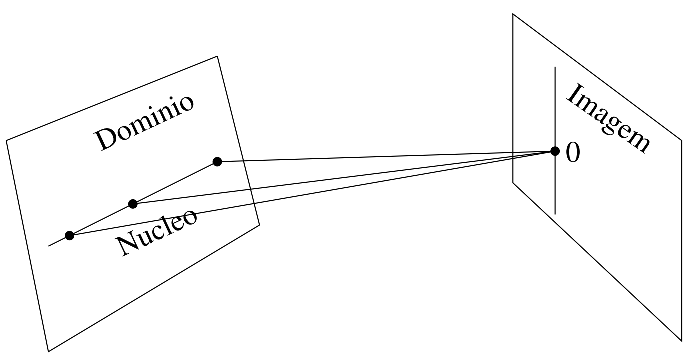


Figura 1:

Exemplo 19

- Seja $T : V \to W$ a transformação linear nula, isto é, a transformação tal que $T(v) = 0_W, \forall v \in V$. É fácil ver que seu núcleo é todo o espaço V.

- O núcleo da transformação identidade, definida no espaço vetorial V, é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo de V.

- A projeção ortogonal sobre o eixo dos x, em $\mathbb{R}^2$, é uma transformação linear cujo núcleo é o eixo dos y.

Exemplo **20**

O núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x + y, x - y, x - 2y)$$

é o conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid T(x, y) = (0, 0, 0)\}$, isto é

$$(x + y, x - y, x - 2y) = (0, 0, 0) \;\Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} .$$

Esse sistema tem solução $x = 0$ e $y = 0$. Logo, $N(T) = \{(0, 0)\}$.

Exemplo **21**

Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z, t) = (2x, x + 2y - z, x - y + z + t) \,.$$

Então, $N(T) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid T(x, y, z, t) = (0, 0, 0)\}$. Isto é, um vetor (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ pertence ao núcleo de T se, e somente se,

$$(2x, x + 2y - z, x - y + z + t) = (0, 0, 0) \;\Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{cases} .$$

Esse sistema tem conjunto-solução $\{(0, k, 2k, -k); k \in \mathbb{R}\}$, que é o núcleo de T.

Imagem de uma transformação linear

Sejam V e W espaços vetoriais e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. A *imagem* de T, representado por $Im(T)$, é o conjunto de todos os vetores de W da forma $T(v)$, para algum $v \in V$, isto é

$$\mathrm{Im}(T) = \{w \in W \mid w = T(v),\ \text{para algum } v \in V\}.$$

Exemplo **22**

- Se $T : V \to W$ é a transformação linear nula, isto é, tal que $T(v) = 0_W, \forall v \in V$, sua imagem é o conjunto formado apenas pelo vetor nulo de W.
- A imagem da transformação identidade, definida no espaço vetorial V, é o espaço V.
- A projeção ortogonal sobre o eixo dos x, em $\mathbb{R}^2$ é uma transformação linear cuja imagem é o eixo dos x.

Exemplo **23**

Vamos determinar a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y)\ .$$

Queremos encontrar os vetores $w = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ para os quais existe $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = w$, isto é, queremos que a equação

$$T(x,y) = (x+y, x-y, x-2y) = (a,b,c)$$

tenha solução. Isso equivale a analisar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \\ x-2y=c \end{cases}$$

admita solução. Escalonando, obtemos o seguinte sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+y=a \\ y=(a-b)/2 \\ 0=(a-3b+2c)/2 \end{cases},$$

que admite solução se, e somente se, $a-3b+2c=0$.

Logo,

$$\mathrm{Im}(T) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a-3b+2c=0\}\ .$$

Note que a representação geométrica de $Im(T)$ é um plano passando pela origem. Você se lembra? Os subespaços de $\mathbb{R}^3$ são as retas e os planos passando pela origem, além do subespaço nulo e do próprio $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 24
Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por

$$T(x, y, z, t) = (2x, x + 2y - z, x - y + z + t) \ .$$

Queremos determinar as condições para que um vetor (a, b, c), de $\mathbb{R}^3$ seja a imagem, por T, de algum vetor de $\mathbb{R}^4$. Como no exemplo anterior, queremos que o sistema

$$\begin{cases} 2x = a \\ x + 2y - z = b \\ x - y + z + t = c \end{cases}$$

admita solução. Escalonando, chegamos ao sistema equivalente

$$\begin{cases} x - y + z + t = c \\ y + t = b + c - a \\ -z - 2t = (3a - 2b - 4c)/2 \end{cases} ,$$

que é compatível para quaisquer valores de a, b e c. Logo, todo vetor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pertence à imagem de T, ou seja, $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^3$.

Você já deve ter se dado conta de que as transformações lineares possuem propriedades realmente especiais, que não encontramos nas demais funções. O núcleo e a imagem de uma transformação linear não são apenas conjuntos: ambos apresentam estrutura de espaço vetorial, como mostraremos nos resultados a seguir.

Teorema 1
Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. O núcleo de T é subespaço vetorial de V.

Demonstração.

Primeiramente, vemos que $0_V \in N(T)$, uma vez que $T(0_V) = 0_W$. Portanto $N(T) \neq \emptyset$.

Sejam v_1, v_2 vetores no núcleo de T. Isto é, $T(v_1) = T(v_2) = 0_W$, então $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = 0_W + 0_W = 0_W$. Logo, $(v_1 + v_2) \in N(T)$. Portanto, o núcleo é fechado para a soma.

Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in N(T)$. Isto é, $T(v) = 0_W$, então $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha 0_W = 0_W$. Logo, $(\alpha v) \in N(T)$, o que mostra que o núcleo é fechado para o produto por escalar. $\square$

Teorema 2

Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear. A imagem de T é subespaço vetorial de W.

Demonstração.

A imagem de T não é vazia, pois 0_W é a imagem de 0_V.

Sejam w_1, w_2 vetores na imagem de T. Isso significa que existem vetores v_1 e v_2 em V, tais que $T(v_1) = w_1$ e $T(v_2) = w_2$. Então o vetor $(w_1 + w_2)$ pertence à imagem de T, pois é a imagem do vetor $(v_1 + v_2)$. De fato, temos: $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + t(v_2) = w_1 + w_2$.

Finalmente, sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $w \in Im(T)$. Isto é, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Então, como $T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha w$, temos que $(\alpha w) \in \mathrm{Im}(T)$.

$\square$

Uma vez provado que o núcleo e a imagem são subespaços vetoriais, o próximo passo é determinar a dimensão e obter uma base para cada um. É o que faremos nos exemplos seguintes.

Exemplo **25**

Dada a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z, y + z) \ ,$$

determine uma base e a dimensão de seu núcleo e de sua imagem.

Vamos determinar o núcleo de T. Queremos encontrar os vetores (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tais que

$$T(x, y, z) = (x + y, x - z, y + z) = (0, 0, 0) \ \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} ,$$

cujo conjunto-solução é $\{(k, -k, k); k \in \mathbb{R}\} = \{k(1, -1, 1); k \in \mathbb{R}\}$.

Logo, o núcleo de T é gerado pelo vetor $(1, -1, 1)$. Então temos que $\dim N(T) = 1$ e uma base de $N(T)$ é $\{(1, -1, 1)\}$.

Vamos, agora, determinar a imagem de T. Queremos estabelecer as condições que um vetor (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ deve satisfazer para que exista um vetor (x, y, z), em $\mathbb{R}^3$, tal que $T(x, y, z) = (x + y, x - z, y + z) = (a, b, c)$. Essa igualdade leva a um sistema linear que, escalonado, fornece

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = a - b \\ 0 = a - b - c \end{cases} .$$

Para que existam soluções, devemos ter $a - b - c = 0$, que é a equação que caracteriza os vetores da imagem de T. Como $a = b + c$, um vetor da imagem pode ser escrito $(b + c, b, c) = b(1, 1, 0) + c(1, 0, 1)$. Logo, a imagem possui dimensão 2 e uma base para ela é $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.

Os dois próximos exemplos "invertem" o processo: vamos determinar uma transformação linear (ela não será única) a partir do seu núcleo ou de sua imagem.

Exemplo 26

Encontrar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cuja imagem é gerada pelos vetores $(1, 2, 3)$ e $(1, 1, 1)$.

Vimos, na aula passada, que uma transformação linear fica completamente determinada se a conhecemos nos vetores de uma base de seu domínio. Consideremos, por simplicidade, a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e vamos determinar as imagens dos vetores dessa base, por T:

$T(1, 0, 0) = (1, 2, 3)$

$T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$

Note que a escolha de T neste exemplo não é de forma alguma única. Poderíamos, por exemplo, ter escolhido $T(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (1, 2, 3)$.

Note que o terceiro vetor deve ser levado a um que forme, com os dois vetores dados no enunciado, um conjunto LD, uma vez que a dimensão da imagem é 2. Então, como $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$, temos $T(x, y, z) = xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) = x(1, 2, 3) + y(1, 1, 1) + z(0, 0, 0) = (x + y, 2x + y, 3x + y)$, que é a lei que define a transformação T.

Exemplo 27

Encontrar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, cujo núcleo é gerado pelos vetores $(1, 2, 3)$ e $(1, 1, 1)$.

Aqui, também, vamos definir uma transformação linear numa base de $\mathbb{R}^3$, mas esta base deve conter os vetores dados. Isto é, vamos completar o conjunto $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1)\}$ para que se torne uma base de $\mathbb{R}^3$. Para isso, devemos escolher um vetor (x, y, z) tal que o conjunto $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (x, y, z)\}$ seja LI. Em outras palavras, basta que seja um vetor tal que o determinante formado pelas coordenadas dos 3 vetores do conjunto seja diferente de zero. Isto é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow z \neq -x + 2y \, .$$

Podemos considerar, por exemplo, o vetor $(1,0,0)$. Temos, então, uma base de $\mathbb{R}^3$ em cujos vetores iremos definir a transformação:

$T(1,2,3) = (0,0,0)$

$T(1,1,1) = (0,0,0)$

$T(1,0,0) = (1,0,0)$ (por exemplo)

Observe que a dimensão do núcleo é 2; logo, o terceiro vetor da base deve estar fora do núcleo, ou seja, ter imagem não nula.

Para finalizar, temos que escrever um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$ como combinação linear dos vetores da base considerada e, enfim, determinar a expressão de T:

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= a(1,2,3)+b(1,1,1)+c(1,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=x \\ 2a+b=y \\ 3a+b=z \end{cases} \\ &\Rightarrow a=-y+z; b=3y-2z; c=x-2y+z \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= aT(1,2,3)+bT(1,1,1)+cT(1,0,0) = \\ &= (-y+z)(0,0,0)+(3y-2z)(0,0,0)+(x-2y+z)(1,0,0) \end{aligned}.$$

Assim, uma possível resposta é $T(x,y,z) = (x-2y+z,0,0)$.

Resumo

Nesta aula definimos o núcleo e a imagem de uma transformação linear T. Vimos que ambos são subespaços vetoriais: o núcleo, do domínio de T e a imagem, do contradomínio de T. Os exemplos visaram ajudar na assimilação da técnica para caracterizar o núcleo e a imagem, determinar suas dimensões e encontrar uma base para cada. Na próxima aula veremos um resultado importante que relaciona as dimensões do núcleo, da imagem, e do domínio de uma transformação linear.

Exercícios

1. Verifique se o vetor $v \in V$ pertence ao núcleo da transformação linear $T : V \to W$, em cada caso:

   (a) $V = R^3$; $W = \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x + y - z, 3y + z)$; $v = (4, -1, 3)$

   (b) $V = R^3$; $W = \mathbb{R}^2$; $T(x, y) = (x + y - z, 3y + z)$; $v = (1, -1, 2)$

   (c) $V = M_2(\mathbb{R})$; $W = \mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12} + 2a_{21} + 2a_{22}$;
   $v = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   (d) $V = M_2(\mathbb{R})$; $W = \mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12} + 2a_{21} + 2a_{22}$;
   $v = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

2. Seja $T : P_2 \to P_3$ a transformação linear definida por $T(p(t)) = tp(t)$. Quais dos seguintes vetores estão na imagem de T?

   (a) t^2

   (b) 0

   (c) $t + 1$

   (d) $t^2 - 2t$

3. Determine a dimensão e uma base do núcleo, a dimensão e uma base da imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$T(x, y, z) = (y - 2z, x - y - z).$$

4. Seja T a transformação linear definida em M_2 tal que $T(v) = Av$, para $v \in M_2$, onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a dimensão e encontre uma base da imagem, determine a dimensão e encontre uma base do núcleo de T.

5. A transformação $T : P_3 \to P_2$ que associa cada polinômio $p(t)$ ao polinômio obtido pela derivação, isto é: $T(p(t)) = p'(t)$, é linear. Descreva o núcleo de T.

6. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ cuja imagem seja gerada pelos vetores $(1, 0, 2, 3)$ e $(1, 0, -1, 5)$.

7. Encontre uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado pelo vetor $(1, 0, 3)$.

Respostas dos exercícios

1. (a) pertence

   (b) não pertence

   (c) não pertence

   (d) pertence

2. a); b); d)

3. $dim\, N(T) = 1$; uma base de $N(T) : \{(3, 2, 1)\}$ (Há infinitas bases.)
   $dim\, Im(T) = 2 \ \ (Im(T) = \mathbb{R}^2)$; uma base de $Im(T) : \{(1, 0), (0, 1)\}$ (Há infinitas bases.)

4. $N(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$; $dim\, N(T) = 0$; $Im\,(T) = M_2$; uma base para a imagem de $T : \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

5. O núcleo de T é formado pelos polinômios constantes de P_3.

6. Há infinitas soluções.

7. Há infinitas soluções.

Aula 21 – Teorema do Núcleo e da Imagem

Objetivo

Apresentar o teorema do núcleo e da imagem, algumas conseqüências e exemplos.

Na aula passada vimos que, se $T\colon V \to W$ é uma transformação linear, o núcleo $N(T)$ é um subespaço vetorial de V e a imagem $\mathrm{Im}(T)$ é um subespaço vetorial de W.

Nesta aula apresentaremos o teorema do núcleo e da imagem, que relaciona as dimensão de V, $N(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

Teorema 1

Sejam V e W espaços vetoriais de dimewnsão finita. Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear, então

$$\dim V = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \ .$$

Demonstração.

Seja $p = \dim \mathrm{Im}(T)$ e $q = \dim N(T)$. Sejam $\{v_1, \ldots, v_q\}$ uma base de $N(T)$ e $\{w_1, w_2, \ldots, w_p\}$ uma base de $\mathrm{Im}(T)$.

Existem $\{u_1, \ldots, u_p\} \subset V$ tais que $w_1 = T(u_1), w_2 = T(u_2), \ldots, w_p = T(u_p)$. Vamos mostrar que o conjunto

$$\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$$

é uma base de V, o que demonstra o teorema, pois então temos

$$\dim V = q + p = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \ .$$

Vamos iniciar provando que o conjunto $\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$ é LI. Suponha que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q = 0 \quad (1) \ ,$$

onde os α´s e β´s são escalares. Aplicando o operator T, temos

$$\alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_p T(u_p) + \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_q T(v_q) = T(0) = 0 \ .$$

Como $T(u_i) = w_i, i = 1, \ldots, p$ e $T(v_i) = 0, i = 1, \ldots, q$, resulta que

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_p w_p = 0 \ .$$

Mas $\{w_1, \ldots, w_p\}$ é um conjunto L.I. (sendo base de $\mathrm{Im}(T)$), portanto $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$. Substituindo na equação (1), resulta

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_q v_q = 0 \ .$$

Como $\{v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $N(T)$, então é um conjunto LI, o que implica em $\beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$.

Concluímos que $\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$ é LI.

Vamos agora mostrar que esse conjunto gera V. Seja $v \in V$ um vetor qualquer. Como $T(v) \in \mathrm{Im}(T)$, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tais que

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + \ldots + \alpha_p w_p = \alpha_1 T(u_1) + \ldots + \alpha_p u_p \ .$$

Podemos escrever esta equação como

$$T(v - \alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_p u_p) = 0 \Rightarrow v - \alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_p u_p \in N(T) \ .$$

Como $\{v_1, \ldots, v_q\}$ é uma base de $N(T)$, existem $\beta_1, \ldots, \beta_q$ tais que

$$v - \alpha_1 u_1 - \ldots - \alpha_p u_p = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q \ ,$$

ou seja

$$v = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_p u_p + \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_q v_q$$

Isto mostra que $\{v_1, \ldots, v_q, u_1, \ldots, u_p\}$ gera o espaço V. $\square$.

Exemplo 28

A projeção ortogonal sobre o eixo-x é a transformação $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

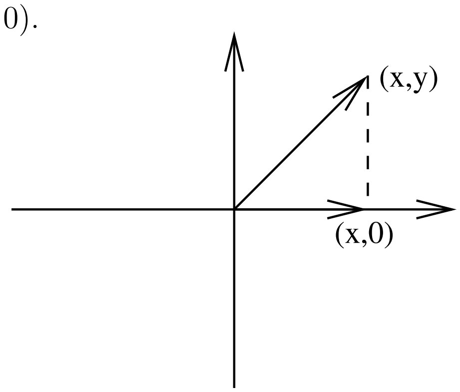


Figura 1: Projeção ortogonal sobre o eixo-x

Temos que o núcleo de T é formado pelos (x, y) tais que

$$T(x, y) = (x, 0) = (0, 0) \Rightarrow x = 0 \ .$$

Ou seja, $N(T) = \{(0, y)\}$ que é gerado por $\{(0, 1)\}$. Portanto $\dim N(T) = 1$.

A imagem de T é

$$\mathrm{Im}T = T(x, y) = (x, 0) \ ,$$

que é um espaço gerado por $\{(0, 1)\}$. Portanto, $\dim \mathrm{Im}(T) = 1$.

Os valores de $\dim(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ confirmam o teorema do núcleo e da imagem, pois

$$2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) = 1 + 1 = 2 \ .$$

Exemplo **29**

A transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y) = (x + y, x - y, x - 2y) \ .$$

Vimos no exemplo 20 da aula 20 que $N(T) = \{(0, 0)\}$. Portanto,

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow 2 = 0 + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 2 \ .$$

Para confirmar isto, vamos calcular $\mathrm{Im}(T)$. Seja $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(T)$. Então

$$T(x, y) = (x + y, x - y, x - 2y) = (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \\ x - 2y = c \end{cases}$$

Reduzindo este sistema, obtemos

$$\begin{array}{l} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \\ 0 = c - \frac{3b}{2} - \frac{a}{2} \end{array}$$

Exemplo **30**

No exemplo 21 da aula 20, vimos que a transformação linear $T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T(x, y, z, t) = (2x, x + 2y - z, x - y + z + t)$$

tem núcleo $N(T) = \{0, k, 2k, -k)\}$ que é gerado por $\{(0, 1, 2, -10\}$. Portanto $\dim N(t) = 1$. Aplicando o teorema do núcleo e da imagem, obtemos

$$\dim \mathbb{R}^4 = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T) \Rightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = 4 - 1 = 3 \ .$$

De fato, se $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(T)$ então

$$(2x, x + 2y - z, x - y + z + t) = (a, b, c) \Rightarrow \begin{cases} 2x = a \\ x + 2y - z = b \\ x - y + z + t = cc \end{cases} .$$

Não é difícil verificar que este sistema tem solução para qualquer valor de (a, b, c), o que demonstra que $\dim \mathrm{Im}(T) = 3$.

Na próxima seção veremos algumas aplicações do teorema que acabamos de provar para transformações injetoras e sobrejetoras.

Transformações injetoras e sobrejetoras

Vamos recordar algumas definições. Uma transformação $T \colon V \to W$ é sobrejetora quando $\mathrm{Im}(T) = W$. Como $\mathrm{Im}(T)$ é subespaço de W, então, se W tem dimensão finita, temos que T é sobrejetora quando $\dim \mathrm{Im}(T) = \dim W$.

Uma transformação é injetora quando

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \ .$$

No caso de transformações lineares, podemos dar outra caracterização.

Proposição 1

Uma transformação linear T é injetora se, e somente se, vale o seguinte

$$T(v) = 0 \Rightarrow v = 0 \ .$$

Demonstração.

Se T é injetora então claramente vale a propriedade acima, pois $T(v) = 0$ e $T(0) = 0$ implica em $v = 0$ pela propriedade injetiva.

Se vale a propriedade acima, temos que

$$T(v_1) = T(v_2) \Rightarrow T(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2 \ .$$

□

Assim, entre as tranformações lineares, as injetoras são aquelas em que apenas o vetor nulo é levado no vetor nulo, isto é T é injetora quando $N(T) = 0$.

Resumindo, em termos dos subespaços $\mathrm{Im}(T)$ e $N(T)$, temos o seguinte:

- T é sobrejetora quando $\mathrm{Im}(T) = W$.
- T é injetora quando $N(T) = 0$.

Vamos agora provar uma conseqüência muito interessante do teorema do núcleo e da imagem.

Teorema 2

Uma transformação linear entre espaços vetorias de mesma dimensão finita é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Demonstração.

Isto é verdade porque, se $T\colon V \to W$ e $n = \dim V = \dim W$, então, como pelo teorema do núcleo e da imagem, $n = \dim N(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$, temos

$$N(T) = \{0_V\} \Leftrightarrow \dim N(T) = 0 \Leftrightarrow \dim \mathrm{Im}(T) = n \Leftrightarrow \mathrm{Im}(T) = W\ .$$

A última equivalência é conseqüência do fato de que

$$n = \dim \mathrm{Im}(T) = \dim W \Rightarrow \mathrm{Im}(T) = W\ .$$

Em geral, se U é subespaço de W e $\dim U = \dim W$ então $U = W$.

□

Uma característica importante das transformações lineares bijetoras é que levam uma base em uma base. Mais precisamente:

Teorema 3

Seja $T\colon V \to W$ uma transformação linear entre os espaços V e W. Então T é bijetora se, e somente se, T leva uma base de V em uma base de W.

Demonstração.

Suponha que T leve uma base de V em uma base de W. Seja $n = \dim V$ e $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Então $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é uma base de W, logo V e W têm a mesma dimensão n. Alem disso, se $w \in W$ então existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$w = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \Rightarrow w \in \mathrm{Im} T\ .$$

Portanto, T é sobrejetora.

Pelo teorema anterior, como T é uma transformação linear sobrejetora entre espaços de mesma dimensão, então T é bijetora.

Suponha agora que T seja uma transformação linear bijetora. Seja $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Queremos mostrar que $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é uma base de W.

Se existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que

$$\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = 0$$

então

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0 \ .$$

Como T é injetora então

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0 \ .$$

Já que $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é base, então $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, o que mostra que $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ é um conjunto L.I.

Resta apenas mostrar $\{T(v_1), \cdots, T(v_n)\}$ gera W. Seja $w \in W$. Como T é sobrejetora, então existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$. Como $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é uma base de V, então existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ tais que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Portanto,

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) \ .$$

□

Isomorfismos e automorfismos

Um isomorfismo dos espaços vetorias V em W é uma aplicação linear $T\colon V \to W$ que é bijetora. Dizemos que dois espaços vetoriais V e W são *isomorfos* quando existe algum isomorfismo $T\colon V \to W$.

Vimos, no Teorema 3, que, se T é um isomorfismo entre V e W, então T leva uma base de V em uma base de W. Conseqüentemente, V e W têm a mesma dimensão. Isto é, espaços vetoriais isomorfos têm a mesma dimensão.

um isomorfismo $T\colon V \to V$ é chamado *automorfismo* de V.

Exemplo 31

1. O operador identidade $I\colon V \to V$ é um automorfismo de V, para qualquer espaço vetorial V.

2. O operador $T\colon \mathbb{R}^2 \to P_1(\mathbb{R})$ dado por $T(x_1, x_2) = x_1 + x_2 X$ é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ no espaço $P_1(\mathbb{R})$ dos polinômios de grau menor ou igual a 1 e coeficientes reais.

A verificação de que T é linear e é bijetora é muito simples e será deixada como exercícios.

Resumo

O resultado mais importante desta aula é o teorema do núcleo e da imagem (Teorema 1).

Provamos, como conseqüência do Teorema 1, que uma transformação entre espaços de mesma dimensão é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Provamos tambem que as transformações lineares bijetoras são caracterizadas pela propriedade de levarem base em base.

Exercícios

1. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x, y, z) = (x + y, 2x - z)$.
   (a) Determine o núcleo de T.
   (b) Determine a imagem de T.
2. Seja $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
   (a) Determine o núcleo de T.
   (b) Determine a imagem de T.
3. Mostre que a aplicação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$T(x, y, z) = (x + z, y + z, x + 2z)$$
   é um automorfismo de $\mathbb{R}^3$.
4. Determine uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Im}T$ seja o espaço gerado por $\{(1, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 1)\}$.
5. Determine uma transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cujo núcleo seja gerado por $\{(1, 0, 1)\}$.
6. Mostre que a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \to P_2(\mathbb{R})$ dada por $T(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2X + x_3X^2$ é um isomorfismo.
7. Prove que o espaço $\mathbb{R}^2$ é isomorfo ao espaço
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} .$$

Respostas dos exercícios

1. (a) $N(T)$ é o espaço gerado por $\{(1,-1,2)\}$.

   (b) $\text{Im}T = \mathbb{R}^2$.

2. (a) $N(T)$ é o espaço gerado por $\{(0,0,1)\}$.

   (b) $\text{Im}T$ é o espaço gerado por $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

3. Vamos determinar $N(T)$.

$$T(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} x+z &= 0 \\ y+z &= 0 \\ x+2z &= 0 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$$

   Portanto T é transformação linear injetora entre espaços de mesma dimensão, o que implica que é bijetora.

4. Partindo da base $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, base canônica do $\mathbb{R}^3$, vamos definir uma transformação linear por

$$(1,0,0) \to (1,1,0,1) \quad (0,1,0) \to (2,0,1,1) \quad (0,0,1) \to (0,0,0,0)$$

   A transformação é

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= xT(1,0,0) + yT(0,1,0) + zT(0,0,1) \\ &= x(1,1,0,1) + y(2,0,1,1) + z(0,0,0,0) \\ &= (x+2y, x, y, x+y)\ . \end{aligned}$$

5. Vamos iniciar determinando uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclua o vetor $(1,0,1)$. Por exemplo, $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ (verifique!). Agora definimos uma transformação linear por

$$(1,0,0) \to (1,0) \quad (0,1,0) \to (0,1) \quad (1,0,1) \to (0,0)\ .$$

   Um vetor (x,y,z) se escreve nesta base como

$$(x,y,z) = (x-z)(1,0,0) + y(1,0,0) + z(1,0,1)$$

   Portanto,

$$T(x,y,z) = (x-z)(1,0) + y(1,0) + z(0,0) = (x-z,y)\ .$$

6. Como $\dim \mathbb{R}^3 = \dim P_2(\mathbb{R}) = 3$, basta mostrar que T é injetora (ou que T é sobrejetora).

$$T(x_1,x_2,x_3) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2X + x_3X^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$$

7. Um isomorfismo é dado por $T(x,y) = (x,y,0)$.

Aula 22 – Representação Matricial de uma Transformação Linear

Objetivos

Determinar a representação matricial de uma transformação linear;
Determinar uma transformação linear a partir de sua representação matricial;

Na aula 18, vimos que toda transformação matricial é linear. Num sentido inverso, mostraremos agora que toda transformação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita é matricial, isto é, pode ser representada por uma matriz, de modo que sua aplicação a um vetor do domínio se resuma a multiplicar essa matriz pelo vetor. Veremos que os elementos dessa matriz dependem das bases escolhidas, tanto para o domínio quanto para o contradomínio, como obtê-la e como aplicá-la em exercícios.

Na aula 18 dissemos que faríamos isso na aula 23, mas resolvemos adiantar esse tópico!!

A idéia:

Dados V e W, espaços vetoriais, e $T : V \to W$, linear, queremos determinar uma matriz M que nos possibilite escrever:

$$T(v) = Mv,$$

para todo $v \in V$.

Sejam:

V: espaço vetorial, de dimensão n;

W: espaço vetorial, de dimensão m;

$A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, base de V;

$B = \{w_1, w_2, ..., w_m\}$, base de W;

$T : V \to W$, uma transformação linear;

$v \in V$.

Primeiramente, como $v \in V$, e A é base de V, podemos escrever v como combinação linear dos vetores de A, isto é, existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ tais que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n. \qquad (1)$$

Usando (1) e a linearidade de T, podemos escrever:

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) + ... + \alpha_n T(v_n). \qquad (2)$$

Cada vetor $T(v_i), i = 1, 2, ..., n$, presente em (2), pertence a W; logo, pode ser expresso como combinação linear dos vetores da base B. Ou seja, para cada vetor $v_i, i = 1, 2, ..., n$, de A, existem escalares $a_{1i}, a_{2i}, ..., a_{mi}$ tais que

$$T(v_i) = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + ... + a_{mi}w_m.$$

Detalhando mais, temos:

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m$$

Substituindo essas expressões em (2), temos:

$$\begin{aligned} T(v) &= \alpha_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m) \\ &\quad +\alpha_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{m2}w_m) \\ &\quad +... \\ &\quad +\alpha_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m) = \\ &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + ... + \alpha_n a_{1n})w_1 \\ &\quad +(\alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + ... + \alpha_n a_{2n})w_2 \\ &\quad +... \\ &\quad +(\alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + ... + \alpha_n a_{mn})w_m \qquad (3) \end{aligned}$$

O vetor $T(v)$, por sua vez, está em W. Logo, pode ser escrito em relação à base B, isto é, existem escalares $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ tais que

$$T(v) = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + ... + \beta_m w_m. \qquad (4)$$

Comparando as expressões (3) e (4), concluimos que:

$$\beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_n$$
$$\beta_2 = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + ... + a_{2n}\alpha_n$$
$$\vdots$$
$$\beta_m = a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + ... + a_{mn}\alpha_n$$

As igualdades acima podem ser representadas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & ... & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Observe que os vetores-coluna que aparecem nessa igualdade são os vetores-coordenadas dos vetores v e $T(v)$, em relação às bases A e B, respectivamente. Representando a matriz $m \times n$ por $[T]_{A,B}$, podemos escrever a igualdade (5) na forma:

$$[T]_{A,B}[v]_A = [T(v)]_B$$

Dizemos que a matriz $[T]_{A,B}$ é a *matriz de T (ou matriz associada a T) em relação às bases A e B.*

Obtendo a matriz associada a uma transformação linear

Você não terá que repetir todo esse procedimento para obter a matriz associada a uma transformação linear. Primeiramente, note que, se $\dim V = n$ e $\dim W = m$, então a matriz associada a uma transformação linear de V em W é $m \times n$ e é tal que:

- a primeira coluna é formada pelos elementos do vetor-coordenadas de $T(v_1)$ em relação à base B, ou seja, é $[T(v_1)]_B$;
- a segunda coluna é formada pelos elementos do vetor-coordenadas de $T(v_2)$ em relação à base B, ou seja, é $[T(v_2)]_B$;
- de modo geral, a i-ésima coluna da matriz é a imagem do i-ésimo vetor da base A, escrito na base B.

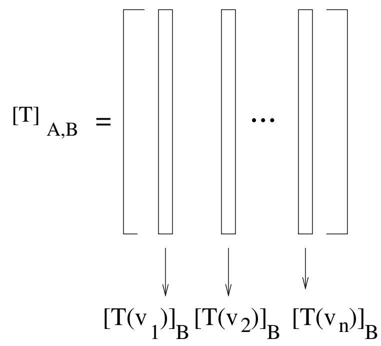


Figura 1: A matriz $[T]_{A,B}$, onde $A = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$

Essa idéia está ilustrada na figura 1.

Observações. Quando as bases consideradas são as canônicas, dizemos que a matriz obtida é a matriz canônica da transformação linear. Além disso, quando lidamos com operadores lineares, ou seja, com transformações lineares em que o domínio e o contradomínio coincidem, se consideramos uma única base para representar, tanto os vetores de entrada quanto suas imagens, podemos simplificar a notação. Por exemplo, sendo A a base escolhida, representamos $[T]_{A,A}$ por $[T]_A$.

Exemplo **32**

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear dada por $T(x, y) = (x + y, 2x, x - 3y)$. Vamos determinar a matriz associada a T, relativamente às bases $A = \{(2, 1), (-1, 0)\}$ e $B = \{(1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 3)\}$.

Sabemos que $[T]_{A,B}$ é do tipo 3×2 e que cada coluna é a imagem do respectivo vetor da base A, escrita na base B. Vamos proceder aos seguintes passos:

(1) Aplicar T aos vetores da base A:

$T(2, 1) = (3, 4, -1)$

$T(-1, 0) = (-1, -2, -1)$

(2) Explicitar como a base B gera $\mathbb{R}^3$, isto é, determinar como um vetor genérico de $\mathbb{R}^3$ se decompõe como combinação linear dos vetores de B:

$$(x, y, z) = a(1, 2, 1) + b(0, 1, 1) + c(0, 0, 3) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = y - 2x \\ c = \frac{x-y+z}{3} \end{cases} .$$

Assim, o vetor-coordenada de (x, y, z), em relação à base B, é $\begin{bmatrix} x \\ y - 2x \\ \frac{x-y+z}{3} \end{bmatrix}$.

(3) Obter os vetores-coordenadas dos vetores do item (1):

$$[(3,4,-1)]_A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \text{ e } [(-1,-2,-1)]_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(4) Escrever a matriz:

$$[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

No exemplo 1, dada uma transformação e fixadas duas bases, obtivemos a matriz associada. No próximo exemplo seguiremos o percurso inverso: vamos determinar a transformação, a partir da matriz.

Exemplo 33

Sejam $A = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,2)\}$ e $B = \{(1,1),(2,0)\}$, bases, respectivamente, de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, transformação linear com matriz associada $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Vamos determinar a transformação T, isto é, a expressão de $T(x,y,z)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Pela definição de matriz associada, temos que

$T(1,1,0) = 1.(1,1) + 0.(2,0) = (1,1)$

$T(0,1,0) = 1.(1,1) + 3.(2,0) = (7,1)$

$T(0,0,2) = 2.(1,1) + 0.(2,0) = (2,2)$

Agora, vamos escrever $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base B:

$$(x,y,z) = a.(1,1,0) + b(0,1,0) + c(0,0,2) = (a, a+b, 2c).$$

Daí, temos $a = x; b = y - x$ e $c = \frac{z}{2}$.

Então,

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= x.T(1,1,0) + (y-x)T(0,1,0) + \frac{z}{2}T(0,0,2) \\ &= x(1,1) + (y-x)(7,1) + \frac{z}{2}(2,2) \\ &= (-6x + 7y + z, y + z). \end{aligned}$$

Exemplo **34**

Seja T o operador linear definido em P_3 tal que $T(a + bx + cx^2 + dx^3) = (2a+b)+(2b+c)x+(2c+d)x^2+2dx^3$. Determine a matriz canônica de T.

A base canônica de P_3 é $C = \{1, x, x^2, x^3\}$. Vamos aplicar T em cada um dos vetores de C:

$$T(1) = 2 \Rightarrow [T(1)]_C = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(x) = 1 + 2x \Rightarrow [T(x)]_C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(x^2) = x + 2x^2 \Rightarrow [T(x^2)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$T(x^3) = x^2 + 2x^3 \Rightarrow [T(x^3)]_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

Logo, $[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Resumo

Nesta aula vimos como determinar a matriz associada a uma transformação linear. Essa matriz depende das bases de saída e de chegada, fixadas. A representação matricial é privilégio das transformações lineares e possibilita, entre outras aplicações importantes, um tratamento computacional: armazenando a matriz, a própria transformação linear está armazenada, pronta para ser aplicada a quantidade de vezes que se fizer necessária. Nas próximas aulas veremos que, à medida que operamos com transformações lineares, operações análogas podem ser realizadas com as matrizes dessas transformações.

Exercícios

1. Determine a matriz $[T]_{A,B}$, sendo $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear definida por $T(x,y,z) = (2x+y-z, x+2y)$, $A = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ e $B = \{(-1,1),(0,1)\}$.

2. Determine o operador linear T, definido em $\mathbb{R}^2$, sabendo que sua matriz em relação à base $A = \{1,1),(1,2)\}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, sendo $A = \{(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1)\}$ e $B = \{(-1,0),(0,-1)\}$, bases do $\mathbb{R}^3$ e do $\mathbb{R}^2$, respectivamente.

   (a) Encontre a expressão de $T(x,y,z)$.

   (b) Determine o núcleo de T.

   (c) Determine a imagem de T.

   (d) T é injetora? É sobrejetora?

4. Seja T a transformação linear de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y,z) = (2x + y - z, x + 2y)$. Fixadas as bases $A = \{(1,0,0),(2,-1,0),(0,1,1)\}$ e $B = \{(-1,1),(0,1)\}$, de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente, e considerando $v = (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$,

   (a) Dê o vetor-coordenadas de v em relação à base A.

   (b) Calcule $T(v)$.

   (c) Determine o vetor-coordenadas de $T(v)$ em relação à base B.

   (d) Obtenha a matriz $[T]_{A,B}$.

   (e) Calcule o vetor-coordenadas de $T(v0$ em relação à base B, usando a matriz obtida no item d) (isto é, calcule $[T]_{A,B}[v]_A$) e compare com o item c)).

5. A transformação linear $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tem matriz $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, em relação às bases $A = \{(-1,1),(1,0)\}$, do $\mathbb{R}^2$, e $B = \{(1,1,-1),(2,1,0),(3,0,1)\}$, do $\mathbb{R}^3$. Determine:

   (a) A expressão de $T(x,y)$.

(b) A matriz canônica de T.

6. Sejam $A = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $B = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$, bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente, e $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (a) Determine T.

   (b) Ache uma base C de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{A,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Considere o operador identidade I, definido em $\mathbb{R}^2$, isto é, o operador linear tal que $I(x,y) = (x,y)$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Considere as bases $A = \{(1,1),(0,-1)\}$ e $B = \{(2,-3),(-3,5)\}$, de $\mathbb{R}^2$. Encontre a matriz $[I]_{A,B}$.

Auto-avaliação

Basicamente, vimos duas técnicas: *obter* e *aplicar* a matriz associada a uma transformação linear. Você deverá estar familiarizado com os passos que levam à obtenção dessa matriz e, além disso, ter sempre em mente que a matriz $[T]_{A,B}$ só pode ser multiplicada por vetores representados na base A, e que o produto é a imagem do vetor, escrita em relaçao à base B. Caso você tenha alguma dúvida, entre em contato com o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. $[T]_{A,B} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

2. $T(x, y) = 2x, 2x + y)$

3. (a) $T(x, y, z) = (z - 2y, -x + y)$

   (b) $Im\, T = \mathbb{R}^2$

   (c) $N(T) = [(1, 1, 2)]$ (subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo vetor $(1, 1, 2)$).

   (d) T não é injetora; T é sobrejetora.

4. (a) $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (b) $(4, 5)$

   (c) $\begin{bmatrix} -4 \\ 9 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

5. (a) $T(x, y) = (8x + 18y, 6x + 11y, -2x - 4y)$

   (b) $[T] = \begin{bmatrix} 8 & 18 \\ 6 & 11 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

6. (a) $T(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x-y}{2}, 2x + y\right)$

   (b) $C = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (-1, -1, 2)\}$.

7. $\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Aula 23 – A Álgebra das Transformações

Pré-requisito: Aulas 2, 3, 18 a 22.

Objetivos

Operar algebricamente com as transformaçõs lineares;
Reconhecer as analogia entre as operações efetuadas com transformações lineares e as efetuadas com suas matrizes associadas.
Reconhecer a estrutura de espaço vetorial no conjunto das transformações lineares.

Na aula anterior, vimos que toda transformação linear entre espaços de dimensão finita são matriciais. Por outro lado, nas aulas 2 e 3, do módulo I, aprendemos a somar matrizes, a multiplicar uma matriz por um número real e a multiplicar duas matrizes. Pois bem: nesta aula, iremos unir os conceitos de operações com matrizes e com transformações lineares matriciais. Definiremos operações que nos possibilitarão combinar transformações lineares, de modo a obter novas transformações lineares. Veremos, também, que, com essas operações, o conjunto de todas as transformações lineares definidas entre dois espaços fixados é, ele próprio, um espaço vetorial.

Adição de transformações lineares

Sejam V e W espaços vetoriais, $T : V \to W$, $S : V \to W$ transformações lineares. Definimos a transformação *soma* de T e S como sendo:

$$\begin{aligned} (T+S): \ & V \to W \\ & v \mapsto T(v)+S(v) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que a soma de transformações lineares é uma transformação linear. Para isso, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- $(T+S)(u+v) = T(u+v)+S(u+v) = T(u)+T(v)+S(u)+S(v) = T(u)+S(u)+T(v)+S(v) = (T+S)(u)+(T+S)(v)$.

- $(T+S)(\alpha v) = T(\alpha v)+S(\alpha v) = \alpha T(v)+\alpha S(v) = \alpha[T(v)+S(v)] = \alpha(T+S)(v)$.

Multiplicação de uma transformação linear por um número real

Sejam V um espaço vetorial, $T : V \to W$, uma transformação linear e $k \in \mathbb{R}$. Definimos a transformação *produto* de k por T como sendo:

$$\begin{aligned}(kT): \quad & V \to W \\ & v \mapsto kT(v)\end{aligned}$$

Vamos mostrar que o produto de transformação linear por escalar é uma transformação linear. Para isso, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- $(kT)(u+v) = kT(u+v) = k(T(u)+T(v)) = kT(u)+kT(v) = (kT)(u)+(kT)(v)$.

- $(kT)(\alpha v) = kT(\alpha v) = k\alpha T(v) = \alpha[kT(v)] = \alpha(kT)(v)$.

Podemos afirmar o seguinte resultado:

Sejam V e W espaços vetoriais. Com as operações de adição e multiplicação por escalar vistas acima, o conjunto de todas as transformações lineares de V em W formam um espaço vetorial. Representaremos esse espaço por $L(V, W)$. Além disso, se $dim\, V = n$ e $dim\, W = m$, temos que $dim\, L(V, W) = mn$. No caso particular de $V = W$, o espaço vetorial de todos os operadores lineares definidos em V será representado por $L(V)$.

Você poderá encontrar uma desmontração desse resultado no livro de Álgebra Linear, de Seymour Lipschutz, da Coleção Schaum.

Exemplo 35

Sejam $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ as transformações lineares dadas por $T(x, y, z) = (x + y, x - y + z)$ e $S(x, y, z) = (x, y)$. Então:

- $(T + S)(x, y, z) = T(x, y, z) + S(x, y, z) = (2x + y, x + z)$.

- $(3T)(x, y, z) = 3(x + y, x - y + z) = (3x + 3y, 3x - 3y + 3z)$.

- $(2T-5S)(x, y, z) = 2(x+y, x-y+z)-5(x, y) = (-3x+2y, 2x-7y+2z)$.

Composição de transformações lineares

Sejam V, U, W espaços vetoriais, $T : V \to U$ e $S : U \to W$ transformações lineares. Definimos a transformação *composta* $S \circ T$ como sendo:

$$\begin{aligned} S \circ T : \ & V \to W \\ & v \mapsto S(T(v)) \end{aligned}$$

A figura 1 ilustra essa idéia:

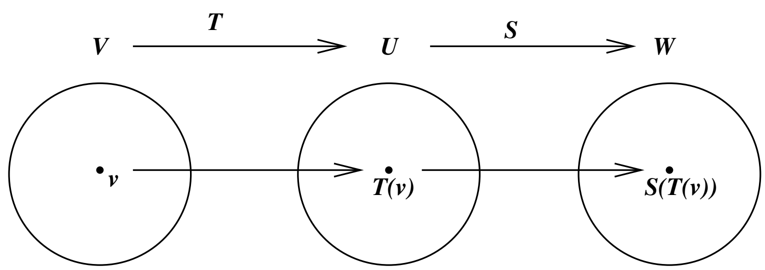


Figura 1: A transformação composta $S \circ T$

Vamos mostrar que a composta de transformações lineares é uma transformação linear. Para isso, sejam $u, v \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

- $(S \circ T)(u+v) = S[T(u+v)] = S[T(u)+T(v)] = S(T(u)) + S(T(v)) = (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)$.
- $(S \circ T)(\alpha v) = S[T(\alpha v)) = S[\alpha T(v)] = \alpha S(T(v)) = \alpha(S \circ T)(v)$.

Exemplo **36**

Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x+y, 3x, x-2y)$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ dada por $S(x, y, z) = (x+y, x-y, 0, x+y+z)$. A transformação composta $S \circ T$, de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^4$, é dada por:

$$(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(x+y, 3x, x-2y) = (4x+y, -2x+y, 0, 5x-y).$$

As operações análogas com as matrizes associadas

Sendo V e W espaços vetoriais de dimensão finita, vimos, na aula 22, que, fixadas bases em V e em W, cada transformação linear definida entre esses espaços está associada a uma matriz. Ora, qual será a matriz associada à soma de duas transformações lineares? E ao produto de uma transformação linear por um escalar? E à composta de duas transformações lineares? Fazendo os cálculos que levam à obtenção da matriz associada, chegamos às seguintes conclusões:

- A matriz associada à soma de duas transformações lineares é a soma das matrizes associadas a essas transformações.
- A matriz associada ao produto de uma transformação linear por um escalar é o produto da matriz associada à transformação pelo mesmo escalar.
- A matriz associada à composta de duas transformações lineares é o produto (numa determinada ordem) das matrizes associadas às transformações.

Mais formalmente, o que temos é:

- Se T e S são transformações lineares de V em W; A é base de V; B é base de W, então
$[T+S]_{A,B} = [T]_{A,B} + [S]_{A,B}$
- Se T é transformação linear de V em W; A é base de V; B é base de W e $k \in \mathbb{R}$, então
$[kT]_{A,B} = k[T]_{A,B}$
- Se T é transformação linear de V em U; S é transformação linear de U em W; A é base de V, B é base de U e C é base de W, então
$[S \circ T]_{A,C} = [T]_{A,B}.[S]_{B,C}$

Exemplo 37

Vamos retomar as transformações do exemplo 1: $T, S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, dadas por $T(x,y,z) = (x+y, x-y+z)$ e $S(x,y,z) = (x,y)$. As matrizes canônicas de T e S são:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad [S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então (em cada caso, você pode obter a matriz diretamente e comparar os resultados!!):

- $[T+S] = [T] + [S] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
- $[3T] = 3[T] = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$.
- $[2T-5S] = 2[T]-5[S] = 2\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & -7 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 38

Consideremos, novamente, as transformações dadas no exemplo 2: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, com $T(x, y) = (x+y, 3x, x-2y)$ e $S(x, y, z) = (x+y, x-y, 0, x+y+z)$. Vamos aplicar essas transformações aos vetores das bases canônicas dos espaços envolvidos:

$T(1, 0) = (1, 3, 1)$

$T(0, 1) = (1, 0, -2)$

$S(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1)$

$S(0, 1, 0) = (1, -1, 0, 1)$

$S(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1)$.

Logo, $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $[S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Daí, $[S \circ T] = [T].[S] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 39

Considere o operador linear T, definido em $\mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2x, x+3y)$. Representamos por T^2 a composta $T \circ T$. Vamos determinar a matriz (canônica) de T, a expressão de T^2 e a matriz de T^2.

Como $T(1, 0) = (2, 1)$ e $T(0, 1) = (0, 3)$, temos $[T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Agora, $T^2(x, y) = T(T(x, y)) = T(2x, x+3y) = (4x, 5x+9y)$.

Temos duas maneiras de obter a matriz de T^2:

1. Pela construção da matriz associada:

   $T^2(1, 0) = (4, 5)$

   $T^2(0, 1) = (0, 9)$

   Logo, $[T^2] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$.

2. Usando o fato de que a matriz de $T \circ T$ é o produto da matriz de T por ela mesma:

$[T^2] = [T].[T] = [T]^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, como já havíamos obtido.

Resumo

Nesta aula aprendemos a obter novas transformações lineares, através de operações algébricas e de composição de transformações lineares. Vimos, também, como as matrizes associadas das transformações lieares envolvidas nas operações se relacionam entre si. Nas próximas aulas estudaremos, em detalhes, as principais transformações lineares geométricas (aquelas definidas em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$) e exploraremos bastante a praticidade de se trabalhar com composição de transformações e suas matrizes associadas.

Exercícios

1. Sejam T e S transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$ definidas por $T(x,y,z) = (3x, y-z)$ e $S(x,y,z) = (x-z, x+y+z)$. Encontre fórmulas para as transformações $T+S$, $4T$ e $3T-2S$.

2. Sejam $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dadas por $T(x,y) = (5x, x-y, 3y)$ e $S(x,y,z) = (x+3z, 2y-z)$. Deduza fórmulas para as compostas $S \circ T$ e $T \circ S$.

3. Na aula 18, exercício 5, você descreveu, geometricamente, o efeito de cada aplicação dada, nos vetores de $\mathbb{R}^2$. As transformações dadas foram:

   $T_1(v) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad T_2(v) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   $T_3(v) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad T_4(v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   Faça uma descrição geométrica do efeito da aplicação de cada transformação linear abaixo, nos vetores de $\mathbb{R}^2$:

   (a) $T_3 \circ T_1$

   (b) $T_1 \circ T_2$

   (c) $T_4 \circ T_2$

4. Sejam F e T operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ definidos por $F(x,y) = (y,x)$ e $T(x,y) = (0,x)$. Estabeleça fórmulas que definam os operadores $F+T$, $2F-3T$ e $TF \circ T$.

5. Seja $C = \{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ o operador dado por $T(e_1) = e_2; T(e_2) = e_3$ e $T(e_3) = e_1$.

   (a) Determine $T(x,y,z)$.

   (b) Mostre que $T^3 = I$.
   (Obs.: $T^3 = T \circ T \circ T$; I indica o operador identidade.)

6. Sejam $T, F \in L(V)$ tais que $T \circ F = F \circ T$. Mostre que:

   (a) $(T+F)^2 = T^2 + 2(T \circ F) + F^2$

   (b) $(T+F) \circ (T-F) = T^2 - F^2$

7. Dizemos que um operador $T \in L(V)$ é *idempotente* quando $T^2 = T$. Dizemos que um operador $T \in L(V)$ é *nilpotente* quando $T^n = 0$ (operador nulo), para algum número n natural.

   Determine se os seguintes operadores lineares são idempotentes, nilpotentes, ou nenhuma das duas coisas:

   (a) $T \in L(\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (0,x)$.

   (b) O operador derivação $D \in L(P_n)$.

   (c) $T \in L(\mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y,z) = (-x,-y,-z)$

   (d) $F \in L(\mathbb{R}^2$ dado por $F(x,y) = (x,0)$

   (e) $T \in L(\mathbb{R}^3)$ tal que $T(x,y,z) = (z,x,y)$

8. **Desafio:** Suponha $T : V \to U$ e $S : U \to W$, transformações lineares. Demonstre o seguinte:

   (a) Se T e S são injetoras, então $S \circ T$ é injetora.

   (b) Se T e S são sobrejetoras, então $S \circ T$ é sobrejetora.

   (c) Se $S \circ T$ é injetora, então T é injetora.

   (d) Se $S \circ T$ é sobrejetora, então S é sobrejetora.

Auto-avaliação

Esta aula reuniu conceitos que você talvez já conhecesse, como soma e composição de funções, e operações com matrizes. O interessante é reunir essas idéias e verificar como as operações entre transformações lineares são análogas ao que ocorre com as matrizes associadas. Além disso, o fato de que o conjunto das transformações lineares seja um espaço vetorial nos dá a visão de como poderíamos construir novos espaços, num processo infinito: o próximo passo seria considerar o conjunto das transformações lineares definidas entre espaços de transformações lineares!! Se você tiver sentido qualquer dificuldade na resolução dos exer-cícios, ou na compreensão dos exemplos, peça ajuda do tutor da disciplina. As próximas duas aulas serão de aplicação desses conceitos às principais transformações geométricas. Vamos a elas!!

Respostas dos exercícios

1. $(T+S)(x,y,z) = (4x-z, x+2y)$

   $(4T)(x,y,z) = (12x, 4y-4z)$

   $(3T-2S)(x,y,z) = (7x+2z, -2x+y-5z)$

2. $(S \circ T)(x,y) = S(5x, x-y, 3y) = (5x+9y, 2x-5y)$.
   $(T \circ S)(x,y,z) = T(x+3z, 2y-z) = (5x+15z, x-2y+4z, 6y-3z)$.

3. (a) Dilatação por um fator de 3 e rotação, no sentido anti-horário, de 180^o.

   (b) Dilatação por um fator de 3/2.

   (c) Contração por um fator de 1/2 e projeção sobre o eixo y.

4. $F+T)(x,y) = (y, 2x)$; $(2F-3T)(x,y) = (2y, -x)$; $(F \circ T)(x,y) = (x, 0)$

5. $T(x,y,z) = (z,x,y)$

6. (a) Seja $v \in V$. Então

$$\begin{aligned}(T+F)^2(v) &= [(T+F)\circ(T+F)](v) = (T+F)[(T+F)(v)] = \\ &= (T+F)[T(v)+F(v)] = \\ &= T[T(v)+F(v)] + F[T(v)+F(v)] = \\ &= T(T(v)) + T(F(v)) + F(T(v)) + F(F(v)) = \\ &= (T\circ T)(v) + (T\circ F)(v) + (F\circ T)(v) + (F\circ F)(v).\end{aligned}$$

   Como $T \circ F = F \circ T$, temos:

$(T+F)^2(v) = (T\circ T)(v) + 2(T\circ F)(v) + (F\circ F)(v) = T^2(v) + 2(T\circ F)(v) + F^2(v)$.

Como essa igualdade se verifica para qualquer $v \in V$, temos que $(T+F)^2 = T^2 + 2(T\circ F) + F^2$.

(b) Seja $v \in V$.

$$\begin{aligned}[(T+F)\circ(T-F)](v) &= (T+F)[(T-F)(v)] = \\ &= (T+F)[T(v)-F(v)] = \\ &= T(T(v)-F(v)) + F(T(v)-F(v)) = \\ &= T(T(v)) - T(F(v)) + F(T(v)) - F(F(v))\end{aligned}$$

Como $T\circ F = F\circ T$, temos:

$[(T+F)\circ(T-F)](v) = T(T(v)) - F(F(v)) = T^2(v) - F^2(v)$.

Como essa igualdade se verifica para qualquer $v \in V$, temos que $(T+F)\circ(T-F) = T^2 - F^2$.

7. (a) nilpotente ($T^2 = 0$)
   (b) nilpotente (A derivada de ordem $n+1$ de um polinômio de grau menor ou igual a n é o polinômio nulo.)
   (c) idempotente
   (d) idempotente
   (e) nenhuma das duas coisas

8. (a) Vamos supor que existem u e v em V tais que $(S\circ T)(u) = (S\circ T)(v)$. Então $S(T(u)) = S(T(v))$. Como S é injetora, $T(u) = T(v)$. Como T é injetora, $u = v$. Logo, se $(S\circ T)(u) = (S\circ T)(v)$, então $u = v$, o que prova que $S\circ T$ é injetora.
   (b) Seja $w \in W$. Como S é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $S(u) = w$. Como T é sobrejetora, existe v em V para o qual $T(v) = u$. Assim, $(S\circ T)(v) = S(T(v)) = S(u) = w$. Logo, $S\circ T$ é sobrejetora.
   (c) Suponhamos T não injetora. Então, existem vetores distintos, v_1, v_2, em V, para os quais $T(v_1) = T(v_2)$. Assim, $(S\circ T)(v_1) = S(T(v_1)) = S(T(v_2)) = (S\circ T)(v_2)$; logo, $S\circ T$ não é injetora, o que contraria a nossa hipótese. Portanto, T é injetora.
   (d) Se $v \in V$, então $(S\circ T)(v) = S(T(v)) \in Im\, S$. Isto é, $Im(S\circ T) \subset Im\, S$. Vamos supor que S não é sobrejetora. Então $Im\, S$ está propriamente contida em W.

   Logo, $Im(S\circ T)$ está propriamente contida em W. Assim, $S\circ T$ não é sobrejetora, o que nega a nossa hipótese. Logo, S é sobrejetora.

Lembrando: Uma função $f : A \to B$ é sobrejetora quando $Im(f) = B$. Logo, quando f não é sobrejetora, sua imagem é um subconjunto próprio do contradomínio B.

Aula 24 – Transformações especiais no $\mathbb{R}^2$

Objetivos

Estudar alguns tipos de transformações do $\mathbb{R}^2$: rotação, reflexão, escala e cisalhamento.

Nesta aula estudaremos algumas transformações especiais no $\mathbb{R}^2$. Vamos começar pela transformação de escala.

Transformação de escala

Dado um escalar k, a transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x) = kx$$

é chamada *transformação de escala*. Também chamamos esta transformação de *contração* quando $0 \leq k < 1$ e de *dilatação* quando $k > 1$.

Este tipo de transformação mantém a direção e sentido de cada vetor de $\mathbb{R}^2$, multiplicando o módulo do vetor pelo escalar k, como mostra a figura a seguir.

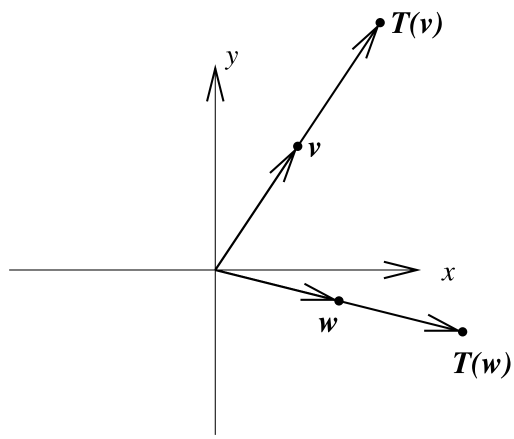


Figura 1: Transformação de escala

Quando estudamos uma transformação linear, muitas vezes é interessante observar sua ação sobre uma certa região do plano. Por exemplo, observar como ela transforma o quadrado unitário

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$$

ou o círculo unitário

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}\ .$$

Vejamos a ação da dilatação $T(x) = 1,5x$ nestes dois casos:

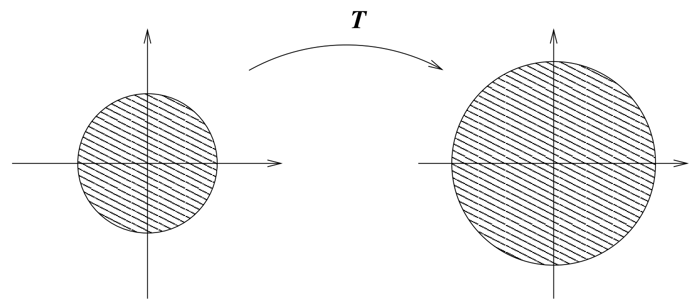


Figura 2: Ação de $T(x) = 1,5x$ em um círculo

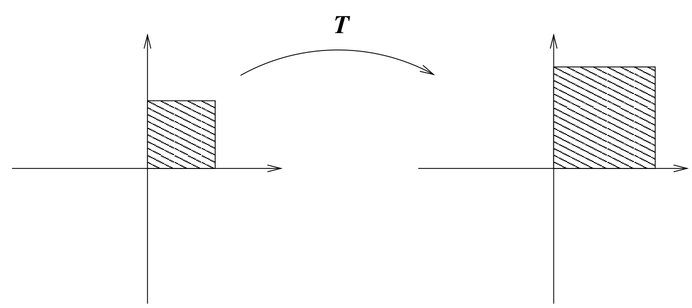


Figura 3: Ação de $T(x) = 1,5x$ em um quadrado

Cisalhamento

Uma transformação de cisalhamento é uma transformação $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ou pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, onde k é um número real não-nulo.

A transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, isto é

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + ky \\ y \end{bmatrix}$$

é chamada *cisalhamento horizontal*. Observe, na figura a seguir, o efeito desta transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre o quadrado unitário.

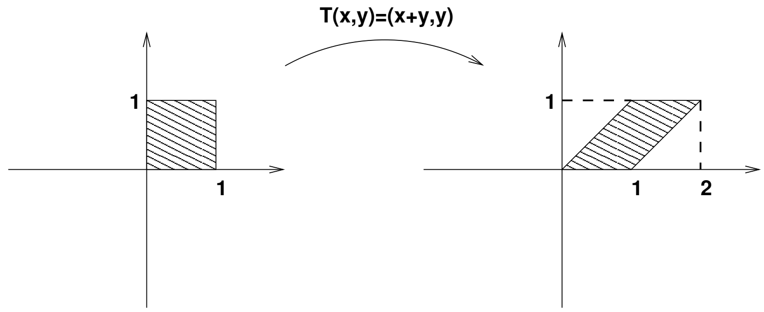


Figura 4: Cisalhamento horizontal

A transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$, ou seja

$$T(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx+y \end{bmatrix}$$

é chamada *cisalhamento vertical*. Observe, na figura a seguir, o efeito desta transformação dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ sobre o quadrado unitário.

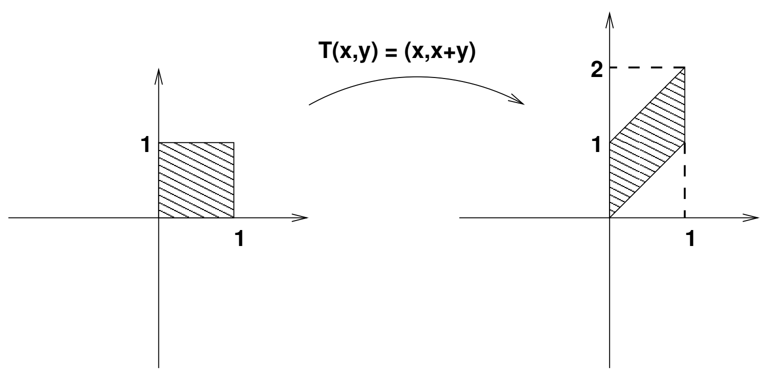


Figura 5: Cisalhamento horizontal

Para mostrar que uma transformação de cisalhamento leva o quadrado unitário em um paralelogramo, basta notar que uma transformação deste tipo leva segmentos de reta em segmentos de reta. A reta $ax + by = c$ é levada pela transformação $T(x,y) = (x + ky, y)$, por exemplo, na reta

$$a(x + ky) + by = c \;\Rightarrow\; ax + (ak + b)y = c\ .$$

Além disso, retas paralelas $ax + by = c$ e $ax + by = c'$ são claramente levadas em retas paralelas. Portanto, os vértices do quadrado unitário são levados em vértices de um paralelogramo.

Rotação no plano

Seja $v = (x, y)$ um vetor no plano. Suponha que este vetor faça um ângulo θ com o eixo-x. Seja $v' = (x', y')$ o vetor obtido rodando v de um ângulo ϕ, no sentido anti-horário, como mostra a figura abaixo.

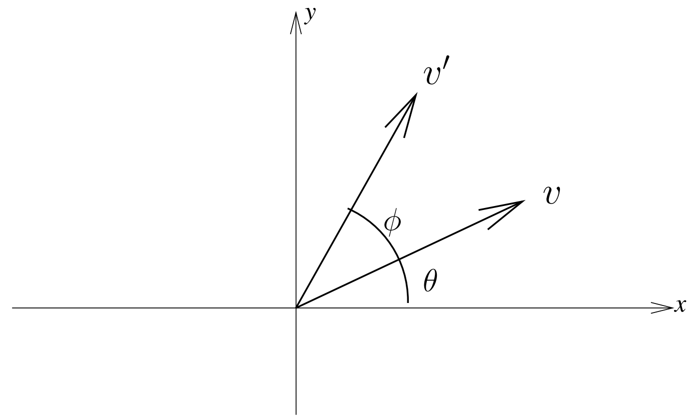


Figura 6: Rotação no plano

Vamos determinar a transformação linear que realiza a rotação de um determinado ângulo. Se um vetor v faz um ângulo θ com o eixo-x, as coordenadas deste vetor são $(||v|| \cos\theta, ||v|| \sin\theta)$, como mostra a figura abaixo.

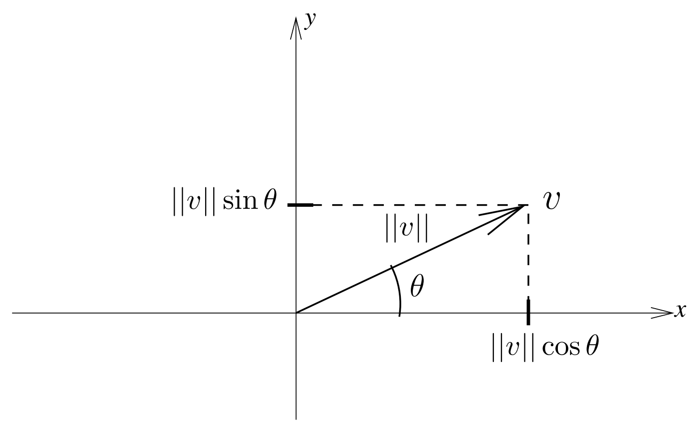


Figura 7: Coordenadas do vetor v

Portanto, podemos escrever

$$v = (x, y) = (||v|| \cos\theta, ||v|| \sin\theta).$$

Observando que $||v'|| = ||v||$ e que v' faz um ângulo $\theta + \phi$ com o eixo-x, podemos escrever

$$v' = (x', y') = (||v|| \cos(\theta + \phi), ||v|| \sin(\theta + \phi)) .$$

Logo,

$$\begin{aligned} x' = ||v||\cos(\theta+\phi) &= ||v||(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi) \\ &= (||v||\cos\theta)\cos\phi - (||v||\sin\theta)\sin\phi \\ &= x\cos\phi - y\sin\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' = ||v||\sin(\theta+\phi) &= ||v||(\sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi) \\ &= (||v||\sin\theta)\cos\phi + (||v||\cos\theta)\sin\phi \\ &= x\sin\phi + y\cos\phi \end{aligned}$$

As fórmulas para o cosseno e o seno da soma de dois ângulo são $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$ e $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a$

Isto é

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\phi - y\sin\phi \\ x\sin\phi + y\cos\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Assim, a transformação linear dada pela matriz $\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$ tem, em termos geométricos, o efeito de fazer uma rotação, no sentido anti-horário, de um ângulo ϕ.

Aplicando a transformação de rotação de um ângulo ϕ aos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$, obtemos (observe a figura 8).

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \end{bmatrix} \text{e} \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \end{bmatrix}$$

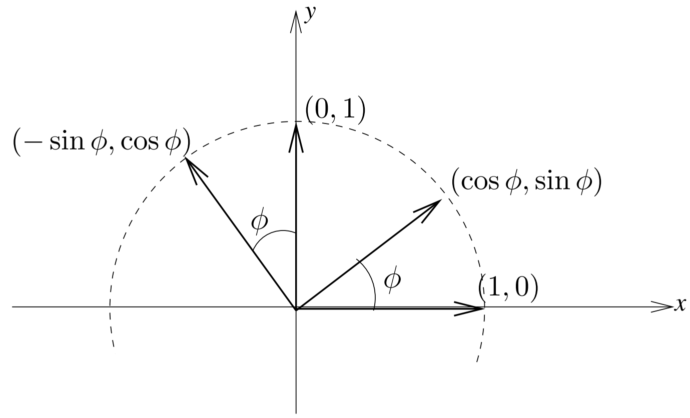


Figura 8: Rotação de um ângulo ϕ aplicada aos vetores $(1,0)$ e $(0,1)$

Exemplo 1

A matriz da transformação linear que tem o efeito geométrico de uma rotação de 45^0, no sentido anti-horário é a matriz

$$\begin{bmatrix} \cos 45^0 & -\sin 45^0 \\ \sin 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Reflexões

A transformação $T(x,y) = (-x,-y)$ é chamada reflexão na origem. Este nome é devido ao fato de que os pontos (x,y) e $(-x,-y)$ são simétricos em relação à origem, isto é, a origem é ponto médio do segmento de reta ligando estes dois pontos. Veja, na figura a seguir, a ação desta transformação no quadrado unitário.

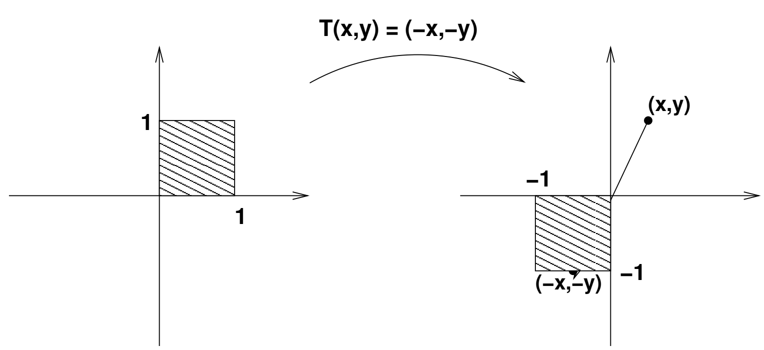


Figura 9: Reflexão na origem

A *mediatriz* a um segmento AB é a reta que é perpendicular ao segmento AB e o corta no ponto médio.

Dois pontos são ditos simétricos em relação a uma reta quando esta reta é a mediatriz do segmento que liga estes pontos.

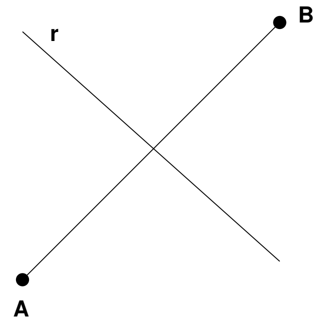


Figura 10: Os pontos A e B são simétricos em relação à reta r

Uma transformação T é uma *reflexão na reta* r, quando o ponto $T(x, y)$ é o simétrico, em relação a r, do ponto (x, y). Alguns exemplos de reflexões em relação a retas são os seguintes.

1. A reflexão no eixo x e dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x, y) = (x, -y)$.

2. A reflexão no eixo y e dada pela matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x, y) = (-x, y)$.

3. A reflexão na reta $y = -x$ é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x, y) = (-y, -x)$.

As figuras a seguir ilustram estas três reflexões.

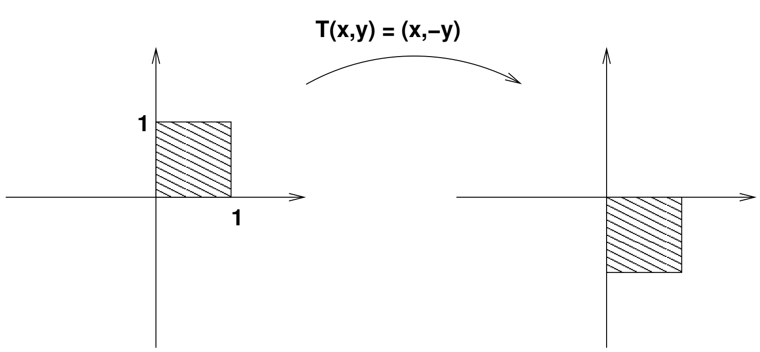


Figura 11: Reflexão no eixo x

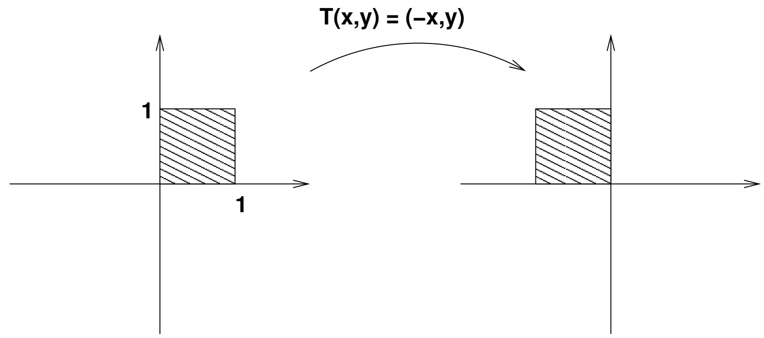


Figura 12: Reflexão no eixo y

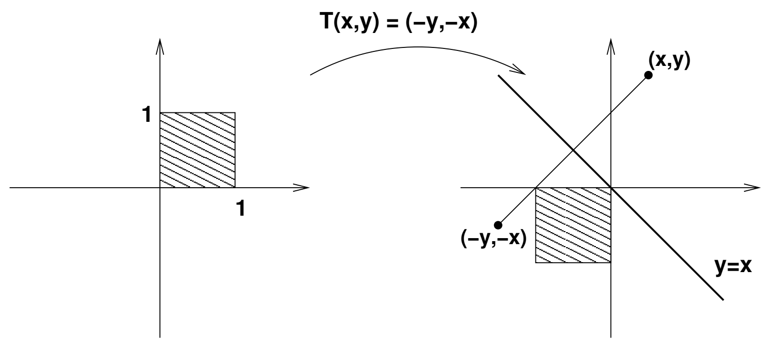


Figura 13: Reflexão na reta $y = x$

Projeção

A *projeção* de um ponto A sobre uma reta r é um ponto $P \in r$ tal que AP é perpendicular à reta.

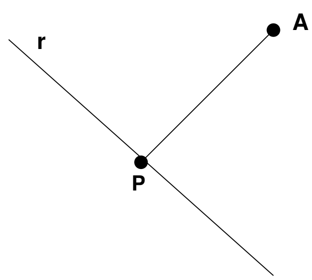


Figura 14: Projeção do ponto A sobre a reta r

A transformação de projeção na reta r leva cada ponto em sua projeção na reta r, isto é, o ponto $T(x,y)$ é a projeção do ponto (x,y) na reta r.

São exemplos de projeção:

1. A projeção sobre o eixo x é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x, y) = (x, 0)$.

2. A projeção sobre o eixo y é dada pela matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, é dada por $T(x, y) = (0, y)$.

As figuras a seguir ilustram estas duas projeções.

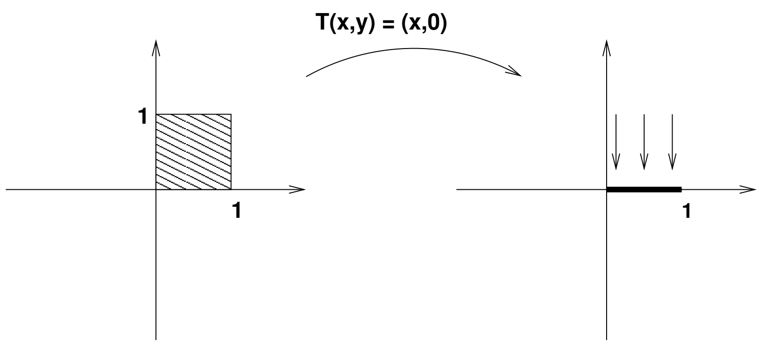


Figura 15: Projeção no eixo x

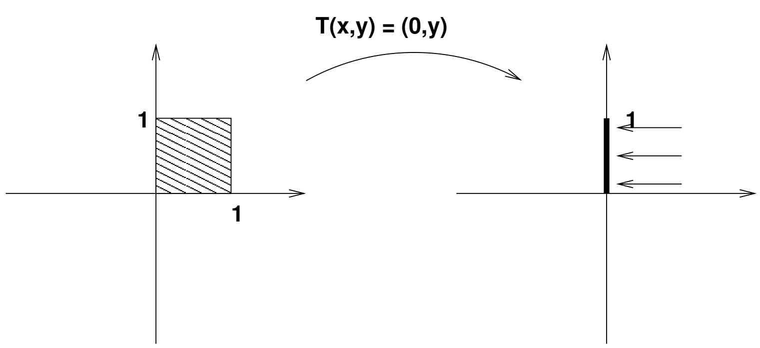


Figura 16: Projeção no eixo y

Resumo

Nesta aula estudamos algumas transformações lineares $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de especial importância.

Outras transformações lineares podem ser construídas por composicão de duas ou mais das transformações apresentadas nesta aula. Observe que a composição de transformações lineares é uma transformação linear.

Exercícios

1. Indique o efeito sobre o quadrado unitário das transformações dadas pelas seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2. Determine a matriz da transformação de rotação de um ângulo de 45^0.

3. Determine a matriz da transformação linear que leva a uma reflexão na origem seguida de uma rotação de 30^0.

4. Determine a núcleo da projeção sobre o eixo x.

5. Determine a núcleo da transformação de rotação de 60^0, seguida de projeção sobre o eixo y.

Aula 25 – Transformações especiais no $\mathbb{R}^3$

Objetivos

Ver alguns exemplos de transformações lineares no $\mathbb{R}^3$.

Há muito mais transformações lineares básicas no $\mathbb{R}^3$ do que no $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, no $\mathbb{R}^2$ vimos as projeções nos eixos x e y. Já no $\mathbb{R}^3$ temos as projeções nos 3 eixos coordenados (eixos x, y e z), mais as projeções nos 3 planos coordenados (planos xy, xz e yz). Em vez de fazer um estudo completo de todas essas transformações lineares que poderiam ser consideradas básicas, veremos, nesta aula, uma série de exemplos de transformações lineares no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 1

Transformações de escala.

As transformações $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dadas por $T(x, y, z) = \lambda(x, y, z)$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ e $\lambda \neq 1$, são chamadas transformações de escala. Elas têm o efeito de dilatar (se $\lambda > 1$) ou contrair (se $0 \leq \lambda < 1$) um objeto no $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2

Projeções nos eixos coordenados.

A transformação $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, dada por $T(x, y, z) = (x, 0, 0)$ é chamada projeção sobre o eixo x. As transformações dadas por $T(x, y, z) = (0, y, 0)$ e $T(x, y, z) = (0, 0, z)$ são as projeções sobre os eixos y e z, respectivamente.

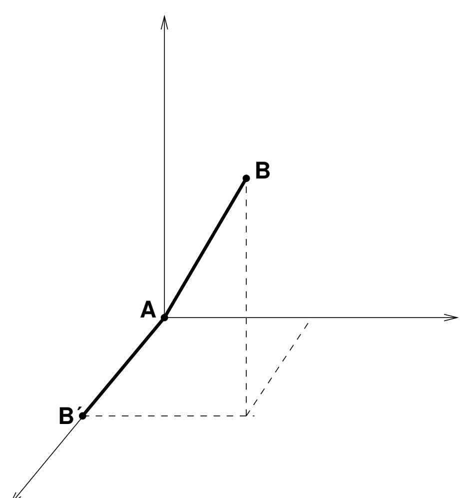


Figura 1: O segmento AB' é a projeção no eixo x do segmento AB

Vamos estudar agora alguns exemplos que envolvem rotações.

Exemplo 3

Determine a matriz da transformação linear que tem o efeito geométrico de uma rotação de 30^0 em torno do eixo z.

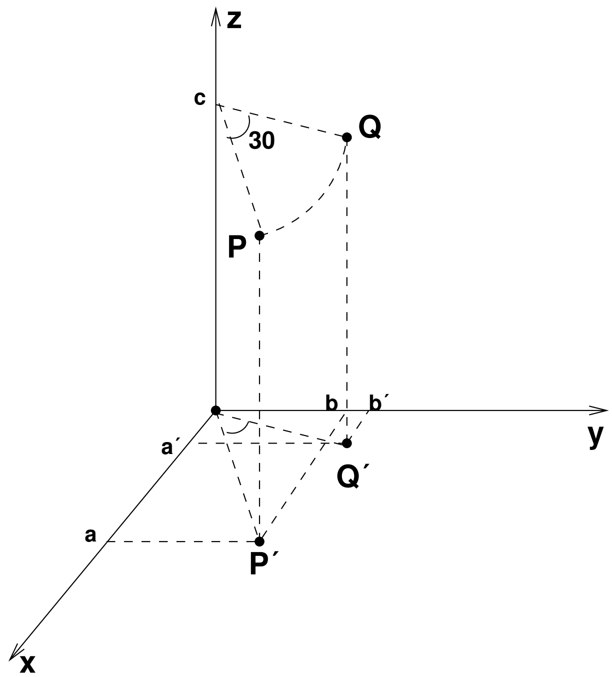


Figura 2: O ponto Q é obtido do ponto P por rotação de 30^0 em torno do eixo z

Seja $P = (a, b, c)$ e seja Q o ponto obtido por rotação de 30^0 em torno do eixo z. Então Q possui a mesma coordenada em z que o ponto P. Podemos escrever $Q = (a', b', c)$.

Seja P' e Q' as projeções dos pontos P e Q sobre o plano cartesiano xy. Então

$$P' = (a, b, 0) \quad \text{e} \quad Q' = (a', b', 0)$$

e temos que Q' é obtido de P' por uma rotação de 30^0.

Lembrando que a rotação de um ângulo θ no plano é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

temos que

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 30^0 & -\operatorname{sen} 30^0 \\ \operatorname{sen} 30^0 & \cos 30^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$Q = \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} .$$

Assim, a matriz $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz da transformação linear rotação de 30^0 em torno do eixo z.

Note que a rotação em torno de uma reta qualquer passando pela origem é uma transformação linear, mas a rotação em torno de uma reta que **não** passa pela origem **não** é uma transformação linear. Basta notar que, neste último caso, a origem seria levada para outro ponto que não a própria origem.

A figura abaixo representa uma rotação em torno do eixo y.

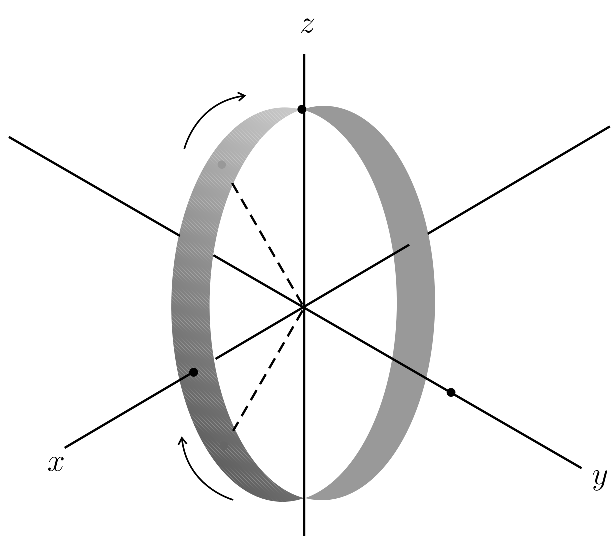


Figura 3: Rotação em torno do eixo y

Exemplo 4

Calcule a matriz da transformação linear obtida por uma rotação de 30^0 em torno do eixo z, seguido de uma rotação de 45^0 em torno do eixo y e de uma dilatação de um fator $\sqrt{2}$.

Neste exemplo, temos uma transformação composta, que é a composição de 3 transformações.

A primeira delas, rotação de 30^0 em torno do eixo z, foi estudada no exemplo anterior. Vimos que tem matriz $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Vamos agora calcular a matriz da segunda transformação.

Uma rotação em torno do eixo y preserva a coordenada y e faz uma rotação nas coordenadas x e z. A matriz de uma rotação no plano de 45^0 é

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 45^0 & -\operatorname{sen} 45^0 \\ \operatorname{sen} 45^0 & \cos 45^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Assim, a matriz da transformação rotação de 45^0 em torno do eixo y é

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Com relação à terceira transformação, a matriz de dilatação de um fator de $\sqrt{2}$ é

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Finalmente, a transformação linear que é a composta destas três transformações é dada pelo produto das três matrizes (observe a ordem):

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicações em computação gráfica

A computação gráfica é uma área da Matemática que estuda a representação em um computador de imagens e movimentos. É um campo que tem inúmeras aplicações, que vão desde as simulações de carros e aviões em túneis de vento aos efeitos especiais nos filmes de cinema e à modelagem molecular e realidade virtual.

Basicamente, uma imagem consiste em uma certa quantidade de pontos e retas ou curvas ligando estes pontos e, muitas vezes, em informações de como preencher a área limitada por estas retas e curvas.

Quando o objeto é representado por segmentos de reta, algumas transformações usuais em computação gráfica levam segmentos de retas em outros segmentos de reta. Várias destas transformações podem ser representadas por transformações lineares. Assim, a matemática envolvida na computação gráfica muitas vezes consiste na multiplicação de matrizes representando transformações lineares por matrizes que representam objetos.

A molécula ao lado é de uma proteína chamada crambin, encontrada em algumas sementes. Ela possui 327 átomos.

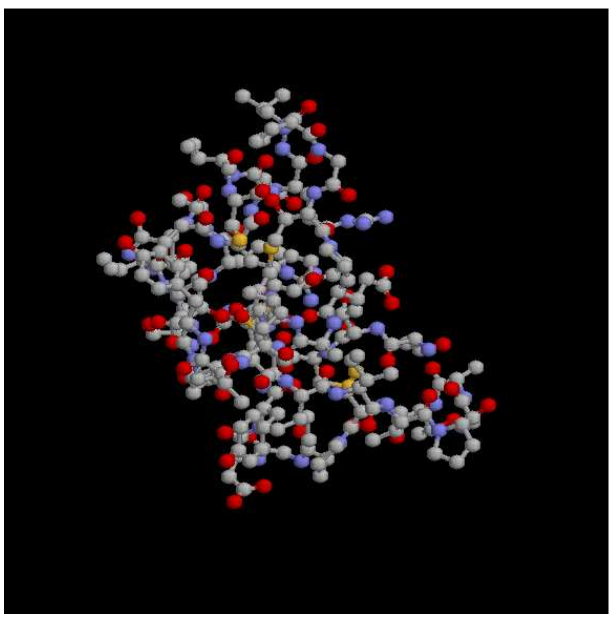


Figura 4: Modelagem da molécula de uma proteína

Coordenadas homogêneas

Vimos anteriormente que a translação não é uma transformação linear. Isto cria uma dificuldade pois, por exemplo, o movimento de arrastar um objeto, que seria naturalmente uma translação, não pode ser representado matematicamente por um produto de matrizes.

Uma maneira de evitar este problema é utilizar coordenadas homogêneas, que definiremos a seguir. Cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é identificado com o ponto $(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3$. Dizemos que $(x, y, 1)$ são as coordenadas homogêneas do ponto (x, y). Desta forma, identificamos o plano $\mathbb{R}^2$ com o plano $z = 1$.

Não podemos somar coordenadas homogêneas ou multiplicá-las por escalar, pois, por exemplo, $2 * (x, y, 1) = (2x, 2y, 2)$. Como este último ponto não tem $z-$coordenada 1, foge a identificação que fizemos $((x, y) \leftrightarrow (x, y, 1))$.

De qualquer forma, a multiplicação de um ponto $(x, y, 1)$ por uma matriz do tipo $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde A é uma matriz 2×2, leva a um ponto da forma $(x', y', 1)$, que pode ser identificado com $(x', y') \in \mathbb{R}^2$.

Uma translação da forma $(x, y) \to (x + a, y + b)$ não é linear, logo não pode ser escrita como produto por uma matriz 2×2. No entanto, em coordenadas homogêneas, esta mesma translação é descrita como

$$(x, y, 1) \to (x + a, y + b, 1) .$$

Esta transformação pode ser calculada como produto de matrizes na forma a seguir:

$$\begin{bmatrix} x+a \\ y+b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} .$$

Desta forma, descrevemos a translação como produto de matrizes.

Há uma área da Matemática chamada Geometria Algébrica, onde as coordenadas homogêneas têm um papel fundamental, mas não exatamente pela razão exposta acima. Nela, as coordenadas homogêneas são representadas pelo símbolo $(x\colon y\colon z)$, onde x, y e z não podem ser todos nulos, e fazemos a identificação

$$(x\colon y\colon z) = (x'\colon y'\colon z')$$

se existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$x = \lambda x', y = \lambda y', \text{ e } z = \lambda z' .$$

O conjunto dos pontos dados por coordenadas homogêneos é chamado Espaço Projetivo, que é, por assim dizer, o espaço onde atua a geometria algébrica.

Resumo

Nesta aula vimos alguns exemplos de transformações lineares no $\mathbb{R}^3$, em especial a rotação em torno de um dos eixos coordenados.

Tocamos, de uma forma muito inicial, o imenso campo das aplicações da Álgebra Linear, examinando um pouco da representação de objetos e seus movimentos.

Por fim, falamos um pouco das coordenadas homogêneas, que têm uma aplicação interessante na computação gráfica e um papel fundamental na Geometria Algébrica.

Exercícios

1. Determine as seguintes transformações lineares:

   (a) Projeção sobre o eixo z;

   (b) Projeção sobre o plano yz;

2. Encontre a matriz da transformação de rotação de um ângulo de 45^0, em torno do eixo x.

3. Encontre a tranformação linear que tem o efeito de uma rotação de 30^0 em torno do eixo y, seguido de uma projeção sobre o plano yz.

4. Determine a tranformação que leva a uma rotação de 30^0 em torno do eixo z, seguida de uma rotação de 30^0 em torno do eixo y.

Aula 26 – Operadores lineares inversíveis

Pré-requisito: Aulas 4, 18 a 25.

Objetivos

Identificar operadores lineares inversíveis;
Obter o inverso de operadores lineares inversíveis.

Nesta aula iremos identificar operadores lineares inversíveis. O conceito é o mesmo de função inversa, vista em Matemática elementar, e já estudada em pré-cálculo: uma função é inversível quando existe uma outra que, composta com ela, resulta na função identidade. Você também já estudou que uma função é inversível se, e somente se, é injetora e bijetora. Por outro lado, na aula 4, Módulo 1, vimos o método de escalonamento para inverter matrizes. Nesta aula, uniremos as duas idéias e aprenderemos a decidir se um operador linear é ou não inversível e, quando o for, obter a expressão e a matriz associada do operador linear inverso.

É claro que as matrizes associadas a operadores lineares são quadradas.

Definição

Um operador linear $T \in L(V)$ é *inversível* se existe $T^{-1} \in L(V)$ tal que $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$ (operador identidade definido em V).

Na aula 21, vimos o Teorema do núcleo e da imagem, válido em espaços vetoriais de dimensões finitas. Recordando:

Dada uma transformação linear $T : V \to W$, tem-se $dim\, V = dim\, N(T) + dim\, Im(T)$.

Como conseqüências desse teorema, vimos, também, que:

(i) T é injetora se, e somente se, $N(T) = \{o_V\}$.

(ii) T é sobrejetora se, e somente, se $dim\, Im(T) = dim\, W$.

(iii) Se $dim\, V = dim\, W$ então T é injetora se, e somente se, é sobrejetora.

Podemos concluir, então, que para que um operador linear $T \in L(V)$ seja inversível, é suficiente que seja injetor (ou sobrejetor). Em outras palavras: ou um operador é inversível (injetor **e** sobrejetor) ou não é nem injetor, nem sobrejetor. Isto é, as duas condições são satisfeitas ou nenhuma da duas é satisfeita.

Pela observação (i), acima, para decidir se um operador linear é ou não inversível, basta determinar o seu núcleo, pois:

$$T \text{ é inversível } \Leftrightarrow N(T) = \{o_V\}.$$

Observação. Um operador linear inversível, definido no espaço vetorial V, é chamado um *automorfismo* de V.

Exemplo 1

Consideremos o operador linear definido em $\mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (x - y, 2x, y + z)$. O núcleo de T é $\{(0, 0, 0)\}$. Logo, T é injetor e, pelo que foi dito anteriormente, inversível. Vamos encontrar uma fórmula para T^{-1}. Suponhamos que $T(x, y, z) = (a, b, c)$. Então $T^{-1}(a, b, c) = (x, y, z)$. Isto é: $T(x, y, z) = (x - y, 2x, y + z) = (a, b, c)$. Precisamos expressar x, y e z em função de a, b e c:

$$\begin{cases} x - y = a \\ 2x = b \\ y + z = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = b/2 \\ y = -a + b/2 \\ z = a - b/2 + c \end{cases}$$

Logo, $T^{-1}(a, b, c) = (b/2, -a + b/2, a - b/2 + c)$.

Matriz associada ao operador inverso

Suponhamos que o operador $T : V \to V$ seja inversível. Então existe $T^{-1} \in L(V)$ tal que

$$T \circ T^{-1} = I. \qquad (1)$$

Sejam $[T]$ e $[T^{-1}]$ as matrizes canônicas de T e de seu operador inverso, respectivamente. Na aula 23, vimos que a matriz associada à composta de duas transformações lineares é o produto das matrizes associadas às transformações. Então, podemos escrever

$$[T \circ T^{-1}] = [T].[T^{-1}]. \qquad (2)$$

Como a matriz canônica do operador identidade é a identidade, em (1), temos:

A letra I indica tanto o operador quanto a matriz identidade.

$$[T \circ T^{-1}] = I. \qquad (3)$$

De (2) e (3), temos:

$$[T].[T^{-1}] = I. \qquad (4)$$

A expressão (4) nos diz que:

- Se o operador T é inversível, então sua matriz associada também é inversível.
- A matriz associada ao operador inverso de T é a inversa da matriz associada a T.

A partir disso, para verificar se um operador linear é inversível, podemos verificar se sua matriz associada é inversível, pelo método do escalonamento: se o procedimento for bem-sucedido, além de concluir que o operador é inversível, já teremos a matriz do seu inverso. Caso contrário (a matriz não ser inversível), o operador em questão não será inversível.

Além disso, se estivermos interessados apenas em saber se o operador é ou não inversível, sem a preocupação de obter uma fórmula para o seu inverso, podemos calcular o determinante de sua matriz associada, pois:

O operador linear T é inversível se, e somente se, $det\,[T] \neq 0$.

Observação. Como dito acima, estamos nos referindo, aqui, à matriz canônica do operador T. Veremos, na próxima aula, que o determinante da matriz associada a um operador linear é uma constante, isto é, independe da base escolhida para a representação do operador. Poderemos, inclusive, nos referir ao *determinante do operador*. Logo, os mesmos resultados vistos nesta aula se aplicam às matrizes de T relativas a outras bases, que não a canônica.

Exemplo 2

Seja $T \in L(I\!R^3)$ dado por $T(x,y,z) = (3x - y + 4z, x + 2z, 2x + 3y - 5z)$. Vamos escrever sua matriz canônica e aplicar o método de inversão por escalonamento: $[T] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow$

Esta matriz já foi analisada no exemplo 3 da aula 4.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_2 \leftarrow -L_2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|rrr} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{15} L_3 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 11L_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6/15 & -9/15 & -3/15 \\ 0 & 1 & 0 & -7/15 & 23/15 & 11/15 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 \end{array}\right].$$

Logo, a matriz $[T]$ é inversível e $[T]^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -7 & 23 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Concluímos, então, que o operador T é inversível e

$$T^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{6x - 7y + 2z}{15}, \frac{-9x + 23y + 2z}{15}, \frac{-3x + 11y - z}{15} \right).$$

Exemplo 3

Vamos verificar se o operador $T \in L(\mathbb{R}^4)$ dado por $T(x,y,z,t) = (x+2y, y-2z-t, x+y+z, x+3z+t)$ é inversível e, caso seja, encontrar seu inverso.

Vamos aplicar à matriz $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ o método de inversão por escalonamento:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow -L_3 \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 4 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Como a quarta linha se anulou, concluímos que a matriz não é inversível. Logo, o operador T não é inversível.

Uma outra propriedade importante dos operadores inversíveis afirma que

Um operador $T \in L(V)$, inversível, transforma base em base, isto é: se B é uma base de V, então $T(B)$ também é base de V.

Exemplo 4

Seja T o operador linear definido em $I\!R^3$ tal que $T(1,1,1) = (1,0,0)), T(-2,1,0) = (0,-1,0)$ e $T(1,3,2) = (0,-1,1)$. Vamos verificar se T é inversível e, caso seja, determinar $T^{-1}(x,y,z)$.

Notemos, primeiramente, que o conjunto $B = \{(1,1,1),(-2,1,0),(1,3,2)\}$ é uma base de $I\!R^3$. Assim, T está bem definido. Se aplicarmos o método do escalonamento à matriz $[T]_B$, obteremos, caso T seja inversível, a matriz $[T^{-1}]_B$, mas queremos a expressão de T^{-1} em relação à base canônica de $I\!R^3$ e ainda não sabemos como migrar de uma base para outra (veremos como fazer isso, na próxima aula). Neste caso, então, vamos usar a definição e a condição de linearidade do operador inverso. Como vimos acima, $T(B) = \{(1,0,0),(0,-1,0),(0,-1,1)\}$ também é base de $I\!R^3$. Vamos expressar um vetor (x, y, z), genérico, de $\mathbb{R}^3$, em relação à base $T(B)$:

$$(x,y,z) = a(1,0,0) + b(0,-1,0)) + c(0,-1,1) \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ -b-c = y \\ c = z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = x \\ b = -y-z \\ c = z \end{cases} .$$

Assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} T^{-1}(x,y,z) &= T^{-1}\left(x(1,0,0) + (-y-z)(0,-1,0)) + z(0,-1,1)\right) = \\ &= xT^{-1}(1,0,0) + (-y-z)T^{-1}(0,-1,0) + zT^{-1}(0,-1,1) = \\ &= x(1,1,1) + (-y-z)(-2,1,0) + z(1,3,2) = \\ &= (x+2y+3z, x-y+2z, x+2z). \end{aligned}$$

Resumo

Nesta aula destacamos os operadores lineares que admitem um inverso. Relacionamos diretamente a condição de inversibilidade dos operadores com a inversibilidade das matrizes associadas a eles. Dado um operador linear, aprendemos a descobrir se é ou não inversível – seja pela determinação de seu núcleo, seja pelo cálculo do determinante de uma sua matriz associada, ou ainda pela busca de seu operador inverso, pela definição ou pela tentativa de inversão de sua matriz associada.

Exercícios

1. Verifique, em cada caso, se o operador $T \in L(V)$ é inversível. Caso seja, encontre uma fórmula para o seu inverso.

   (a) $V = \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (3x+5y, 2x+3y)$.

   (b) $V = \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (x, 2x-y+3z, 4x+y+8z)$.

   (c) $V = \mathbb{R}^3$; $T(x,y,z) = (6x+3y-4z, -4x+y-6z, x+2y-5z)$.

2. A transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

   $T(1,0,0) = (1,1,0)$,

   $T(0,1,0) = (0,0,1)$ e

   $T(0,0,1) = (1,-1,2)$

   é um automorfismo?

3. Considere as seguintes transformações lineares planas:

   T_1: reflexão em torno da reta $y = x$;

   T_2: um cisalhamento horizontal de fator 2;

   T_3: uma rotação de 90^0 no sentido anti-horário.

   (a) Determine a expressão e a matriz da transformação linear $T = T_3 \circ T_2 \circ T_1$.

   (b) Determine a expressão e a matriz da transformação linear inversa de T.

4. Mostre que, se os operadores lineares T e S são inversíveis, então o operador linear $T \circ S$ também é inversível e $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$.

5. Mostre que a rotação anti-horária de um ângulo θ é um operador inversível em $\mathbb{R}^2$ e que seu inverso é a rotação horária do mesmo ângulo.

Auto-avaliação

Esta aula analisou as condições para que um operador linear seja inversível e como obter, caso exista, o operador inverso. Caso você tenha sentido alguma dificuldade na resolução dos exercícios ou na compreensão dos exemplos, faça contato com o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. (a) $T^{-1}(x, y) = (-3x + 5y, 2x - 3y)$

   (b) $T^{-1}(x, y, z) = (-11x + 2y + 2z, -4x + z, 6x - y - z)$

   (c) T não é inversível

2. Sim. Pode-se verificar isso determinando o núcleo de T ou escalonando sua matriz associada e mostrando que é inversível.

3. (a) $[T] = [T_3].[T_2].[T_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $T(x, y) = (-x, 2x + y)$.

   (b) $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $T^{-1}(x, y) = (-x, 2x + y)$. (Note que $T^{-1} = T$.)

Aula 27 – Mudança de base

Pré-requisito: Aulas 18 a 26.

Objetivos

Determinar a matriz de mudança de uma base para outra;
Relacionar as matrizes associadas a uma transformação linear, relativas a diferentes bases.

Nesta aula vamos nos utilizar de um operador linear especial – o operador identidade, para obter uma matriz que irá funcionar como uma "tradutora" de uma base para outra, num espaço vetorial. A idéia é poder migrar de uma para outra base, relacionando as coordenadas de um mesmo vetor ou as matrizes associadas a um mesmo operador linear.

Dado um espaço vetorial V, o operador identidade, I, definido em V, é trivialmente linear. Assim, dadas duas bases, A e B, de V, e $v \in V$, a matriz de I, em relação às bases A e B (representada por $[I]_{A,B}$), é tal que

$$[I]_{A,B}.[v]_A = [v]_B \ .$$

Como vimos na aula 22, essa matriz é construída de tal forma que a i-ésima coluna é formada pelas coordenadas do i-ésimo vetor de A, em relação à base B.

Como o operador identidade não altera o vetor, a única ação da multiplicação da matriz $[I]_{A,B}$ pelo vetor-coordenadas $[v]_A$ é reescrevê-lo em relação à base B.

Definição

A matriz $[I]_{A,B}$ é chamada *matriz mudança* (ou *matriz de transição*) da base A para a base B.

O papel da matriz $[I]_{A,B}$ é transformar as coordenadas de um vetor v na base A em coordenadas do mesmo vetor v na base B.

Exemplo 1

Em $I\!R^2$, sejam as base $A = \{(1,1),(0,2)\}$ e $B = \{(1,-1),(1,0)\}$. Vamos construir a matriz $[I]_{A,B}$.

A matriz $[I]_{A,B}$ é 2×2; sua primeira coluna é o vetor-coordenadas de $I(1,1) = (1,1)$ em relação à base B; sua segunda coluna é o vetor-coordenadas de $I(0,2) = (0,2)$ em relação à base B. Vamos, então, descobrir como a base B gera $I\!R^2$, isto é, qual o vetor-coordenadas de um vetor genérico (x,y), em relação à base B:

$$(x,y) = a(1,-1) + b(1,0) \Rightarrow \begin{cases} a+b=x \\ -a=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-y \\ b=x+y \end{cases}.$$

Logo, $[(x,y)]_B = \begin{bmatrix} -y \\ x+y \end{bmatrix}$.

Usando essa fórmula, temos:

$[(1,1)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $[(0,2)]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Logo, $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

O operador identidade é inversível; logo, a matriz mudança de base (que nada mais é do que uma matriz associada ao operador identidade) é inversível: a inversa da matriz de transição da base A para a base B é a matriz de transição da base B para a base A, isto é:

$$[I]_{A,B}.[I]_{B,A} = I.$$

Exemplo 2

Vamos obter a matriz mudança da base B para a base A, do exemplo 1. Suas colunas são os vetores-coordenadas dos vetores da base B, em relação à base A. Vamos, então, determinar como um vetor genérico de $I\!R^2$ se escreve na base A:

$$(x,y) = a(1,1) + b(0,2) \Rightarrow \begin{cases} a=x \\ b=\frac{y-x}{2} \end{cases} \Rightarrow [(x,y)]_A = \begin{bmatrix} x \\ \frac{y-x}{2} \end{bmatrix}.$$

Aplicando essa fórmula aos vetores da base B, temos:

$[(1,-1)]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $\quad [(1,0)]_A = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$. Logo, $[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Então, vemos que:

$$[I]_{A,B}.[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Exemplo 3

Consideremos as bases A e B do exemplo 1. Seja $v = (3,4) \in I\!R^2$. Usando as fórmulas dos vetores-coordenadas em relação às bases A e B, já obtidas, temos:

$[v]_A = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e $[v]_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Notemos que

$$[I]_{A,B}.[v]_A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = [v]_B.$$

Exemplo 4

Consideremos, em $I\!R^2$, as bases $A = \{(2,-1),(-1,1)\}$ e $B = \{(1,0),(2,1)\}$. Seja $v \in I\!R^2$ tal que $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$. Vamos obter $[v]_A$, usando a matriz de transição de A para B, de dois modos.

Primeiramente, aplicando o procedimento de construção da matriz mudança de base, obtemos $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1^o modo:

Sabemos que $[v]_B = [I]_{A,B}.[v]_A$. Seja $[v]_A = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$. Então:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x_A - 3y_A = 2 \\ -x_A + y_A = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = -10 \\ y_A = -14 \end{cases}.$$

Então $[v]_A = \begin{bmatrix} -10 \\ -14 \end{bmatrix}$.

2^o modo:

Vamos inverter a matriz $[I]_{A,B}$, por escalonamento, obtendo $[I]_{B,A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Agora, temos:

$$[v]_A = [I]_{B,A}.[v]_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -14 \end{bmatrix}.$$

Já vimos:

- Todo operador linear pode ser representado por uma matriz, uma vez fixada uma base.
- Podemos "traduzir" o vetor-coordenadas de um vetor, de uma base para outra.

A questão, agora, é: como mudar a representação do operador, se escolhemos outra base, ou:

Como traduzir a matriz de representação de um operador, de uma base para outra?

A resposta é dada pelo seguinte teorema:

Teorema 1. Sejam $T \in L(V)$, A e B bases de V. Então

$$[I]_{A,B}.[T]_A.[I]_{B,A} = [T]_B.$$

Prova

Seja $v \in V$. Temos:

$$\begin{aligned}
([I]_{A,B}.[T]_A.[I]_{B,A})\,[v]_B &= ([I]_{A,B}.[T]_A)\,([I]_{B,A}[v]_B) = \\
&= ([I]_{A,B}[T]_A)\,[v]_A = \\
&= [I]_{A,B}\,([T]_A[v]_A) = \\
&= [I]_{A,B}\,([T(v)]_A) = \\
&= [T(v)]_B.
\end{aligned}$$

Logo, $[I]_{A,B}.[T]_A.[I]_{B,A} = [T]_B$.

A expressão envolvendo as matrizes de T referentes a duas bases distintas é uma importante relação definida no conjunto das matrizes quadradas de uma determinada ordem. A seguir, definimos, formalmente, essa relação.

Semelhança de matrizes

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que B *é semelhante a* A quando existe uma matriz P, em $M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que

$$B = P^{-1}.A.P$$

Teorema 2. A relação de semelhança, definida em $M_n(\mathbb{R})$, é uma relação de equivalência em $M_n(\mathbb{R})$.

Prova

(i) A matriz $I \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, com $I^{-1} = I$. Como $A = I^{-1}AI$, temos que A é semelhante a A e a relação de semelhança é reflexiva.

(ii) Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, com B semelhante a A. Então existe $Q \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que $B = Q^{-1}AQ$. Multiplicando ambos os lados, à esquerda, por Q, temos $QB = AQ$. Multiplicando, agora, os dois lados por Q^{-1}, à direita, obtemos $QBQ^{-1} = A$. Sendo $P = Q^{-1}$, podemos escrever $A = P^{-1}BP$, ou seja, A é semelhante a B e a relação de semelhança é simétrica.

(iii) Sejam $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$, com B semelhante a A e C semelhante a B. Então existem matrizes Q e P, em $M_n(\mathbb{R})$, inversíveis, tais que $B = Q^{-1}AQ$ e $C = P^{-1}BP$. Substituindo a expressão de B na segunda igualdade, temos $C = P^{-1}(Q^{-1}AQ)P = (P^{-1}Q^{-1})A(QP) = (QP)^{-1}A(QP)$. Como a matriz QP está em $M_n(\mathbb{R})$ e é inversível, concluímos que C é semelhante a A e a relação de semelhança é transitiva.

De (i), (ii) e (iii) concluímos que a relação de semelhança é uma relação de equivalência.

Observações

1. Devido ao teorema 2, se B é semelhante a A, também podemos dizer que A é semelhante a B ou, simplesmente, que as matrizes A e B são semelhantes.

2. Sendo $T \in L(V)$, A e B bases de V, as matrizes $[T]_A$ e $[T]_B$ são semelhantes.

3. Todas as representações matriciais do operador linear T formam uma classe de equivalência de matrizes semelhantes.

A relação de semelhança ainda implica uma igualdade de determinantes, como prova o teorema a seguir.

Teorema 3. Matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante.

Prova

Sejam $B, A \in M_n(I\!R)$ semelhantes. Então $B = P^{-1}AP$, para alguma matriz $P \in M_n(I\!R)$, inversível. Usando a propriedade do determinante da matriz inversa, vista na aula 5, podemos escrever:

$$\begin{aligned} det\,B &= det\,(P^{-1}AP) = \\ &= det\,P^{-1}.det\,A.det\,P = \\ &= (det\,P)^{-1}.det\,A.det\,P = \\ &= [(det\,P)^{-1}.det\,P].det\,A = \\ &= 1.det\,A = \\ &= det\,A. \end{aligned}$$

Do teorema 3, podemos concluir que todas as matrizes que representam um mesmo operador linear T têm o mesmo determinante. Podemos, assim, definir o *determinante de um operador linear* T, como sendo o determinante de qualquer matriz associada a T. Além disso, a condição de T ser inversível pode, agora, ser dada na forma:

$$T \text{ é inversível} \Leftrightarrow det\,T \neq 0.$$

Observação Há uma outra maneira de obtermos a matriz de mudança de base. Sendo A, B, C bases do espaço vetorial V, vale a igualdade:

$$[I]_{A,B} = [I]_{C,B}.[I]_{A,C}.$$

Note que, na igualdade acima, a base C funciona como uma "intermediária"entre a base inicial A e a final, B. Podemos adotar esse processo, supondo que a base intermediária é a canônica. O exemplo a seguir ilustra como isso se dá.

Exemplo 5

Vamos retomar as bases do exemplo 1 e escrever as matrizes de mudança da base A para a canônica e da base canônica para a base B. Temos:

Note que para construir a matriz de transição de A para a canônica basta escrever as coordenadas dos vetores da base A como as colunas da matriz.

$$[I]_{A,C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad [I]_{C,B} = ([I]_{B,C})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$[I]_{A,B} = [I]_{C,B}.[I]_{A,C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resumo

Nesta aula estudamos uma matriz muito importante, que é a que possibilita mudar a base de representação, tanto de um vetor quanto de um operador linear. Com o conteúdo desta aula, encerramos nosso curso de Álgebra Linear 1. A aula 28 – a última – constará de exercícios relativos a todo o segundo módulo, com resolução ao final.

Exercícios

1. Em $\mathbb{R}^3$, considere as bases $A = \{(-3, 0, -3), (-3, 2, -1), (1, -6, -1)\}$ e $B = \{(-6, -6, 0), (-2, -6, 4), (-2, -3, 7)\}$.

   (a) Determine a matriz de transição da base A para a base B.

   (b) Calcule $[v]_A$, dado $v = (-5, 8, -5)$.

   (c) Escreva $[v]_B$, usando a matriz obtida no item (a).

2. Em $\mathbb{R}^2$, sejam as base $A = \{(1, 1), (1, -1)\}$, $B = \{(2, 1), (1, 0)\}$ e C, a canônica. Obtenha as matrizes $[I]_{C,A}$, $[I]_{B,C}$ e $[I]_{B,A}$.

3. Dada a matriz de transição $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, determine a base B, sabendo que $A = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

4. Dada a matriz de transição $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, determine a base A, sabendo que $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$.

5. A matriz de mudança da base $A = \{1 + t, 1 - t^2\}$ para uma base B, ambas de $P_2(\mathbb{R})$, é $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Determine B.

6. Sendo $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $B' = \{(1, 1), (2, 1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$, determine:

   (a) a matriz de mudança da base B' para a base B;

   (b) $[v]_{B'}$, sabendo que $[v]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Auto-avaliação

Com esta aula, concluimos o conteúdo desta disciplina. Você deverá estar familiarizado com a técnica de obtenção de matrizes de transição e com as alicações dela em exercícios. A matriz de mudança de base será importante em aulas futuras. Certifique-se de que apreendeu bem o conteúdo desta aula. Caso tenha qualquer dúvida, contate o tutor da disciplina. A próxima aula fecha o módulo e apresenta uma lista de exercícios gerais sobre a teoria apresentada no segundo módulo. Bom término de curso, boas férias e até as aulas de Álgebra Linear 2!!!!

Respostas/resolução dos exercícios

1. (a) $\begin{bmatrix} 3/4 & 3/4 & -5/12 \\ -3/4 & -17/12 & 25/12 \\ 0 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 19/12 \\ -43/12 \\ 4/3 \end{bmatrix}$

2. $[I]_{C,A} = ([I]_{A,C})^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$; $[I]_{B,C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

   $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

3. Solução: Seja $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Pela definição da matriz de transição, os elementos da i-ésima coluna são os coeficientes da combinação linear que representa o i-ésimo vetor da base A em relação à base B, isto é:
$$\begin{cases} (1,0,0) = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 \\ (0,1,0) = 0v_1 + 1v_2 + 1v_3 \\ (0,1,1)) = 1v_1 + 0v_2 + 1v_3 \end{cases} \Rightarrow B = \{(0,0,1), (-1,1,1), (1,0,-1)\}.$$

4. Solução: Sendo $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, temos:

   $v_1 = 2(1,1,0) + 1(1,1,1) + 1(0,1,1) = (3,4,2)$

   $v_2 = 0(1,1,0) + 1(1,1,1) + 3(0,1,1) = (1,4,4)$

   $v_3 = -1(1,1,0) + 2(1,1,1) + 0(0,1,1) = (1,1,2)$

5. $B = \{(2/3 + t/3 - t^2/3, 1/3 + 2t/3 + t^2/3\}$

6. (a) $[I]_{B',B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$

Aula 28 – Exercícios de revisão do Módulo 2

Objetivo

Aplicar a teoria estudada no Módulo 2 em exercícios gerais.

Tente resolver os exercícios propostos nesta aula, antes de consultar a resolução, ao final da lista. Caso sinta alguma dificuldade, recorra à aula relativa ao assunto, releia com atenção e... tente de novo!

Exercícios

1. Provão - MEC - 1998
Seja P a transformação de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$, definida por $P(x, y, z) = (x, y, 0)$. Se a imagem de uma reta r, por P, é um ponto, então:

(a) esta reta r é paralela a OX

(b) esta reta r é paralela a OY

(c) esta reta r é paralela a OZ

(d) esta reta r necessariamente contém a origem

(e) não existe tal reta r

2. Provão - MEC - 1998
Chama-se núcleo de uma transformação linear T o conjunto dos pontos cuja imagem por T é nula. O núcleo da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$, é o subespaço do $\mathbb{R}^3$ gerado por:

(a) $\{(0, 0, 0)\}$

(b) $\{(0, 1, 0)\}$

(c) $\{(1, 0, -1)\}$

(d) $\{(1, 1, 0)\}$

(e) $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$

3. A seguir são dados operadores lineares em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$. Verifique quais são inversíveis e, nos casos afirmativos, determine uma fórmula para T^{-1}.

(a) $T \in L(\mathbb{R}^2)$; $\quad T(x,y) = (3x - 4y, x + 3y)$

(b) $T \in L(\mathbb{R}^2)$; $\quad T(x,y) = (x + y, x - y)$

(c) $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $\quad T(x,y,z) = (x + z, x + y, 2x + y + z)$

(d) $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $\quad T(x,y,z) = (x, x - z, x - y - z)$

4. Seja o operador $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido pela matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Um isomorfismo é uma transformação linear bijetora e, portanto, inversível.

(a) Mostre que T é um isomorfismo.

(b) Determine a lei que define o operador T^{-1}.

(c) Encontre o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-1, -5, -3)$

5. Mostre que o operador linear, no $\mathbb{R}^3$, com matriz canônica $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ não é inversível. Determine $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (2, 3, 5)$.

6. Dadas $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $A = \{(1,2), (1,-1)\}$, determine a base B.

7. Dadas $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \{(1,2), (1,-1)\}$, determine a base A.

8. Se $[I]_{A,B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}$, determine $[v]_A$, sabendo que $[v]_B = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

9. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y) = (x + y, x - y)$.

(a) Determine $[T]_B$, onde $B = \{(1,2), (0,1)\}$.

(b) Use a matriz encontrada em (a) para calcular $[T(v)]_B$, dado $v = (5, 3)$.

10. Determine a matriz da transformação linear plana que equivale à seguinte seqüência de transformações:

(1) uma rotação anti-horária de $\pi/2$ rd, seguida de

(2) uma contração de fator 1/4, seguida de

(3) uma reflexão em torno da reta $y = x$, seguida de

(4) um cisalhamento na direção y, de um fator 3.

11. Seja a transformação linear $T : I\!R^4 \to I\!R^3$ tal que $T(e_1) = (0, 0, 1), T(e_2) = (1, 2, 1), T(e_3) = (-2, 1, -1)$ e $T(e_4) = (1, 1, 1)$, onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $I\!R^4$. Determine:

(a) $T(x, y, z, t)$, para $(x, y, z, t) \in I\!R^4$.

(b) Determine o núcleo de T.

(c) Determine a imagem de T.

(d) Determine $u \in I\!R^4$ tal que $T(u) = (1, 0, 1)$

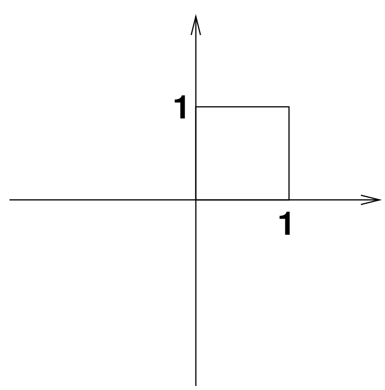
12. Sejam as transformações $T : I\!R^4 \to I\!R^3$ e $F : I\!R^3 \to I\!R^2$ dadas por $T(x, y, z, t) = (x, t + z, y)$ e $F(x, y, z) = (x - z, 2y)$, determine, em relação à transformação $F \circ T$:

(a) O núcleo.

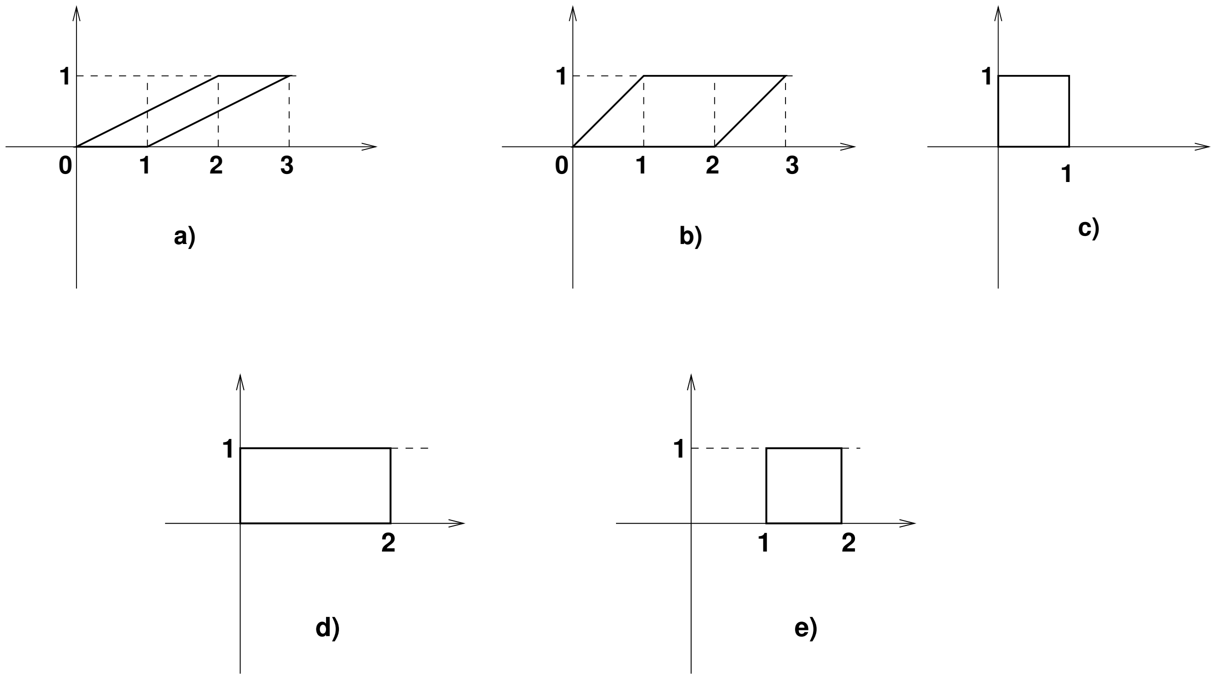
(b) A imagem.

(c) A matriz de representação.

13. Provão - MEC - 1998



A transformação $T : I\!R^2 \to I\!R^2$ é definida por $T(x, y) = (x + 2y, y)$. A imagem, por T, do quadrado representado na figura acima é:



14. Determine $T \in L(I\!R^2$ tal que $T(1,1) = (1,5)$ e $T(1,2) = (0,1)$.

15. Sejam $T : I\!R^3 \to I\!R^2$ e $F : I\!R^2 \to I\!R$ as transformações lineares definidas por $T(x,y,z) = (z, x+y)$ e $F(x,y) = 3x - y$. Determine uma fórmula para a transformação $F \circ T$.

16. Seja $v = (x,y,z,t) \in I\!R^4$. Quais das aplicações abaixo são operadores lineares do $I\!R^4$?

(a) $T(x,y,z,t) = (0,0,0,0)$

(b) $T(x,y,z,t) = (1,1,1,1)$

(c) $T(x,y,z,t) = (x,y,z,t) + (1,2,3,4)$

(d) $T(x,y,z,t) = (x+y, y-z, x+t, z-t)$

17. Representar graficamente a reta $r : y = x$ e a imagem de r pela transformação linear do $I\!R^2$ dada por $T(x,y) = (-x+y, x+y)$.

18. Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ a base canônica de $I\!R^3$ e $T \in I\!R^3$ tal que $T(e_1) = e_2$; $T(e_2) = e_1 + e_3$; $T(e_3) = e_2 + e_3$. Determine:

(a) $T(e_1 + e_2 + e_3)$

(b) $T(2e_1 - 3e_2 + e_3)$

19. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ representa um operador linear $T \in I\!R^3$. Determine:

(a) $T(1, 1, 1)$

(b) $T(x, y, z)$

20. Dada a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ de uma transformação linear T, do $I\!R^2$, representar num gráfico o vetor $v = (2, 3)$ e sua imagem por T.

Resolução dos exercícios

1. A transformação de $I\!R^3$ em $I\!R^3$, definida por $P(x,y,z) = (x,y,0)$ é a projeção sobre o plano xy, paralela ao eixo Oz. Se a imagem de uma reta r, por P, é um ponto, então é porque essa reta é paralela ao eixo Oz. A alternativa correta é a letra (c).

2. O núcleo da transformação linear $T : I\!R^3 \to I\!R^3$ definida por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$, é o conjunto $N(T) = \{(x,y,z) \in I\!R^3; T(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in I\!R^3; (z, x-y, -z) = (0,0,0)\}$. Isso nos leva ao sistema linear homogêneo $\begin{cases} z = 0 \\ x - y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$, cuja solução é $\{(x,x,0); x \in I\!R\} = \{x(1,1,0); x \in I\!R\} = [(1,1,0)]$. Logo, a alternativa correta é (d).

3. Neste exercício também poderíamos verificar se o núcleo de T é ou não o subespaço nulo.

(a) $[T] = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = 9 + 4 = 13 \neq 0 \Rightarrow [T]$ é inversível. Logo, o operador T é inversível e $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/13 & 4/13 \\ -1/13 & 3/13 \end{bmatrix}$. Então $T^{-1}(x,y) = (3x/13 + 4y/13, -x/13 + 3y/13)$.

(b) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = -1 - 1 = -2 \neq 0 \Rightarrow [T]$ é inversível. Logo, o operador T é inversível e $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$. Então $T^{-1}(x,y) = (x/2 + y/2, x/2 - y/2)$.

(c) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = 0 \Rightarrow [T]$ não é inversível. Logo, o operador T não é inversível.

(d) $[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\,[T] = -1 \neq 0 \Rightarrow [T]$ é inversível. Logo, o operador T é inversível e $[T^{-1}] = [T]^{-1}$. Invertendo a matriz $[T]$, por escalonamento, obtemos $[T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Então $T^{-1}(x, y, z) = (x, y - z, x - y)$.

4.

(a) $det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow T$ é um isoformismo.

(b) $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$
$T^{-1}(x, y, z) = (-x/2 + 3z/2, x/2 - z/2, -x - y - z/2)$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + z = -1 \\ 3x - 2y + z = -5 \\ -y = -3 \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 1; y = 3; z = -2$. Logo, $v = (1, 3, -2)$.

5. $det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} = 0$. Logo, T não é inversível.

Seja $v = (x, y, z)$ tal que $T(v) = (2, 3, 5)$.
Então $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 3x + 5y + 7z = 5 \end{cases} \Rightarrow v$ pode ser qualquer vetor da forma $(k, 1 - 2k, k)$, com $k \in \mathbb{R}$.

6. Seja $B = \{v_1, v_2\}$. Então
$\begin{cases} (1, 2) = -1v_1 + 2v_2 \\ (1, -1) = 3v_1 + 7v_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = (-5/13, -16/13) \\ v_2 = (4/13, 5/13) \end{cases}$
Logo, $B = \{(-5/13, -16/13), (4/13, 5/13)\}$.

7. Seja $A = \{v_1, v_2\}$. Então:
$v_1 = -1(1, 2) + 2(1, -1) = (1, -4)$
$v_2 = 3(1, 2) + 7(1, -1) = (10, -1)$
Logo, $A = \{(1, -4), (10, -1)\}$.

8. $[v]_A = [I]_{B,A}[v]_B = \left([I]_{A,B}\right)^{-1}[v]_B =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \\ 3 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -4 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

9.

(a) $T(1,2) = (3,-1); \quad T(0,1) = (1,-1)$

$(x,y) = a(1,2) + b(0,1) \Rightarrow a = x$ e $b = y - 2x \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} x \\ y-2x \end{bmatrix} \Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$. Logo, $[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) Primeiramente, vamos obter as coordenadas de $v = (5,3)$ em relação à base B, usando a fórmula já obtida no item anterior: $[v]_B = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix}$. Então

$[T(v)]_B = [T]_B[v]_B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix}$.

10.

rotação anti-horária de $\pi/2$ rd: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

contração de fator $1/4$: $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$;

reflexão em torno da reta $y = x$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

cisalhamento na direção y, de um fator 3: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

A matriz procurada é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix}.$$

11. Seja a transformação linear $T : I\!R^4 \to I\!R^3$ tal que $T(e_1) = (0,0,1), T(e_2) = (1,2,1), T(e_3) = (-2,1,-1)$ e $T(e_4) = (1,1,1)$, onde $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é a base canônica de $I\!R^4$. Determine:

(a) $T(x,y,z,t) = (y - 2z + t, 2y + z + t, x + y - z + t)$

(b) $N(T) = \{(x,y,z,t) \in I\!R^4; T(x,y,z,t) = (0,0,0)\} \Rightarrow \begin{cases} y - 2z + t = 0 \\ 2y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 0 \end{cases}$.

O conjunto-solução desse sistema é $\{(x,y,z,t) \in I\!R^4; x = -z, y = -3z, t = 5z\}$. Daí, uma possível maneira de caracterizar o núcleo de T é escrevendo

$N(T) = \{(-k, -3k, k, 5k); k \in I\!R\} = [(-1, -3, 1, 5)]$.

Obs.: O vetor $(-1, -3, 1, 5)$ é um gerador do núcleo de T, mas qualquer outro múltiplo desse vetor, não nulo, também é gerador.

(c) Pelo teorema do núcleo e da imagem, $dim\, I\!R^4 = dim\, N(T) + dim\, Im(T)$. No item (b), vimos que o núcleo de T é gerado por apenas 1 vetor. Logo, $dim\, N(T) = 1$. Daí, $4 = 1 + dim\, Im(T) \Rightarrow dim\, Im(T) = 3$. Como T está definida de $I\!R^4$ em $I\!R^3$, concluimos que $Im(T) = I\!R^3$. (Isto é, T é sobrejetora.)

(d) Seja $u = (x, y, z, t)$. Então

$T(u) = T(x, y, z, t) = (y - 2z + t, 2y + z + t, x + y - z + t) = (1, 0, 1) \Rightarrow$

$\begin{cases} y - 2z + t = 1 \\ 2y + z + t = 0 \\ x + y - z + t = 1 \end{cases} \Rightarrow u$ é qualquer vetor de $I\!R^4$ da forma

$(-k, -1 - 3k, k, 2 + 5k, k \in I\!R$.

12. Vamos obter a fórmula da composta $F \circ T$:

$(F \circ T) : I\!R^4 \to I\!R^2$ é dada por

$(F \circ T)(x, y, z, t) = F(T(x, y, z, t) = F(x, t + z, y) = (x - y, 2t + 2z)$.

(a) $N(F \circ T) = \{(x, y, z, t) \in I\!R^4; (x - y, 2t + 2z) = (0, 0)\} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 2t + 2z = 0 \end{cases}$

Então

$N(F \circ T) = \{(x, y, z, t) \in I\!R^4; x = y \text{ e } z = -t\} = \{(x, x, -t, t); x, t \in I\!R\} = \{x(1, 1, 0, 0) + t(0, 0, -1, 1)\} = [(1, 1, 0, 0), [0, 0, -1, 1)]$.

(b) Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos: $dim\, I\!R^4 = dim\, N(F \circ T) + dim\, Im(F \circ T)$. Pelo item (b), $dim\, N(F \circ T) = 2$. Logo, $dim\, Im(F \circ T) = 2$, que é a dimensão do contradomínio ($I\!R^2$). Logo, $Im\,(F \circ T) = I\!R^2$ (isto é, $F \circ T$ é sobrejetora.)

(c) Como

$(F \circ T)(1, 0, 0, 0) = (1, 0)$

$(F \circ T)(0, 1, 0, 0) = (-1, 0)$

$(F \circ T)(0, 0, 1, 0) = (0, 2)$

$(F \circ T)(0, 0, 0, 1) = (0, 2)$,

temos que $[F \circ T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

13. A transformação dada é um cisalhamento, na direção do eixo x, de um fator 2. O gráfico que espelha a imagem do quadrado dado é o da letra (a).

14. Os vetores $(1,1)$ e $(1,2)$ formam um base de $\mathbb{R}^2$. Vamos expressar (x,y) nessa base:

$$(x,y) = a(1,1) + b(1,2) \Rightarrow \begin{cases} a+b=x \\ a+2b=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2x-y \\ b=y-x \end{cases}$$

Então

$T(x,y) = T\left((2x-y)(1,1)+(y-x)(1,2)\right) = (2x-y)T(1,1)+(y-x)T(1,2) = (2x-y)(1,5)+(y-x)(0,1) \Rightarrow T(x,y) = (2x-y, 9x-4y)$.

15. $(F \circ T)(x,y,z) = F(T(x,y,z)) = F(z, x+y) = 3z-(x+y) = -x-y+3z$.

16. Resposta: (a), (d)

18.

(a) $T(e_1+e_2+e_3) = T(e_1)+T(e_2)+T(e_3) = e_2+e_1+e_3+e_2+e_3 = e_1+2e_2+2e_3$.

(b) $T(2e_1-3e_2+e_3) = 2T(e_1)-3T(e_2)+T(e_3 = 2e_2-3e_1-3e_3+e_2+e_3 = -3e_1+3e_2-2e_3$.

19.

(a) $[T(1,1,1)] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow T(1,1,1) = (-1,4,-3)$.

(b) $[T(x,y,z)] == \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y \\ 3x-y+2z \\ -x-2z \end{bmatrix} \Rightarrow T(x,y,z) = (x-2y, 3x-y+2z, -x-2z)$.