Álgebra Linear I

Exercícios Programados 6 – EP6

Resolução

1. Determine a dimensão e uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:

   (a) H = {(x, y) $\in \Re^2$/ x + y = 0}

   (b) H = {(x, y, z) $\in \Re^3$/ z = 0}

   (c) H = {(x, y, z) $\in \Re^3$/ x = 3y e z = -y}

Solução.

(a) Se (x, y) $\in$ H $\Rightarrow$ (x, y) = (x, -x) = x(1, -1). Então, todo vetor de H é combinação linear do vetor (1, -1) Como este vetor é LI(todo vetor não nulo é LI), o conjunto {(1, -1)} é uma base de H e dim H = 1.

(b) Se (x, y, z) $\in$ H $\Rightarrow$ (x, y, z) = (x, y, 0) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0). Então, todo vetor de H é combinação linear dos vetores (1, 0, 0) e (0, 1, 0) Como estes vetores são LI, o conjunto {(1, 0, 0), (0, 1, 0)} é uma base de H e dim H = 2.

(c) Se (x, y, z) $\in$ H $\Rightarrow$ (x, y, z) = (3y, y, -y) = y(3, 1, -1). Então, todo vetor de H é combinação linear do vetor (3, 1, -1). Como estes vetores são LI, o conjunto {(3, 1, -1)} é uma base de H e dim H = 1.

2. Encontre a dimensão e o espaço gerado por:

   (a) (1, -2, 3, -1) e (1, 1, -2, 3)

   (b) 3 e -3

   (c) $t^3 -2t^2 + 5$ e $t^2 + 3t -4$

   Solução.

   Dois vetores não nulos geram um espaço de dimensão 2 se eles são independentes e de dimensão 1 se são dependentes. Lembre que dois vetores são dependentes se, e somente se, um é múltiplo do outro. Portanto,

   (a) 2

   (b) 1

   (c) 2

3. Considere no $\Re^3$ os seguintes subespaços vetoriais *U* = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)] e *V* = [(0,1,0), (0,0,1)]. Determine

   (a) $U+V$ e sua dimensão.

   (b) $U \cap V$ e sua dimensão.

   (c) $U+V$ é soma direta?

Solução.

(a) Como $U+V$ = [(1, 0, 0), (1, 1, 1), (0,1,0), (0,0,1)] = [(1, 0, 0), (0,1,0), (0,0,1)] = $\Re^3$. Logo dim $(U+V)$ = 3.

(b) Se (x, y, z) $\in$ U, (x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 1) ou x = a + b, y = b, z = b. Daí, U = {(x, y, y)/ x, y $\in \Re$}.

Se (x, y, z) $\in$ V, (x, y, z) = a(0, 1, 0) + b(0, 0, 1) ou x = 0, y = a, z = b. Daí, V = {(0, y, z)/ y, z $\in \Re$}. Então, $U \cap V$ = {(0,y, y)/ y$\in \Re$} = [(0, 1, 1)]. Logo dim $U \cap V$ = 1.

(c) Não, pois $U \cap V \neq \{0\}$.

4. Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso verdadeira, prove. Caso contrário, dê um contra exemplo.

(a) {(x, y, z) $\in \Re^3$/ x $\leq$ y $\leq$ z} é um subespaço vetorial de $\Re^3$.

(b) [(1, 2), (-1, 2), (-1, -2)] = $\Re^2$

(c) {(1, 0, 0), (-1, 1, 2), (3, -3, -6)} é uma base do $\Re^3$.

(d) Se W_1 = [(2, 2, 2), (1, -1, 1)] e W_2 = [(1, 0, 1), (0, $-\pi$, 0)], então W_1 = W_2.

Solução.

(a) Falso. Por exemplo, (3, 4, 5) $\in$ W e α = -1, temos -1(3, 4, 5) $\notin$ W.

(b) Verdadeiro. [(1, 2), (-1, 2), (-1, -2)] = [(1, 2), (-1, 2)], já que o vetor (-1, -2) = -1(1, 2). Além disso, o conjunto {(1, 2), (-1, 2)} é LI.

(c) Falso. Este conjunto é LD, o vetor (3,-3, -6) = -3(-1, 1, 2).

(d) Verdadeiro. W_1 = [(2, 2, 2), (1, -1, 1)] = [(1, 0, 1), (0, $-\pi$, 0)] = {(x, y, x)/x, y$\in \Re$}.