

Observações: Caro aluno, aqui está o EP7, referente as aulas 14—16 do Módulo 1.

Este EP7 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
 - alguns comentários sobre os textos das aulas;
 - alguns comentários sobre os exercícios propostos;
 - alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.
-

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aulas 14—16 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- A noção de experimento aleatório;
 - O conceito de espaço amostral. Em particular, dado um experimento aleatório, você deve ser capaz de descrever o seu espaço amostral tanto por meio de uma propriedade quanto pela listagem de seus elementos (quando isto for viável).
 - O conceito de evento. Em particular, dado um espaço amostral, você deve ser capaz de descrever seus eventos de três maneiras: (1) por meio de propriedades; (2) pela listagem de seus elementos (quando isto for viável); e (3) por meio das operações \cup , \cap e c (complementação) aplicadas a outros eventos.
-

Sobre a Aula 14:

A noção de experimento aleatório é um conceito central no estudo das probabilidades. Você deve ler e reler esta Aula 14, várias vezes, até se familiarizar com a nomenclatura e as idéias apresentadas.

- **Página 10 e em tudo o que segue:** Em todos os exemplos e exercícios em que aparecem palavras como *medir*, *observar*, *escolher*, *verificar*, etc., você deve levar em conta que esta palavra está sendo utilizada no sentido de *registrar* o evento ocorrido e não no de, simplesmente, observá-lo passivamente. Perguntar, para cada experimento, qual é o tipo de informação que deve ser registrada é um primeiro passo na solução de um exercício de Probabilidades.

Sobre a Aula 15:

A sua capacidade de identificar e descrever matematicamente os espaços amostrais será da maior importância para que você consiga resolver corretamente os exercícios que serão propostos nas Aulas 18—25.

Sobre a Aula 16:

A sua capacidade de descrever eventos a partir de outros através das operações conjuntistas também será vital para que você consiga resolver corretamente alguns exercícios que serão propostos nas Aulas 18—25.

- **Página 29, linha 8:** Aonde está escrito $C = \phi$ deve ser escrito $C = \emptyset$.
- **Página 31, linha 2:** Aonde está escrito *estudar a composição* deve ser escrito *estudar a composição segundo o sexo*.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 14: todos os exercícios.
- Aula 15: todos os exercícios.
No item (j) do Exercício 1 está implícito que a pergunta é feita a um freguês de cada vez.
No Exercício 7, está implícito que a agulha nunca para de girar exatamente sobre uma das linhas que divide o anel circular.
- Aula 16: todos os exercícios.

Alguns exercícios para fixação:

Observações: Neste EP —e em tudo o que segue— adotaremos as seguintes convenções:

- *Explicitar um evento:* Significa definir o evento, listando os seus elementos entre chaves e separados por vírgulas. Por exemplo, no experimento lançar um dado e anotar a face superior, o conjunto $\{2, 4, 6\}$ explicita um evento.
- *Descrever um evento:* Significa definir o evento usando uma expressão coloquial que descreve o resultado esperado para aquele experimento. Por exemplo, o evento acima pode ser descrito como “obter um número par”.
- *Representar um evento:* Significa definir o evento a partir de outros eventos, utilizando as operações de união, interseção, diferença e complementação de conjuntos. Por exemplo, o evento acima pode ser definido por A^c , onde A é o evento explicitado como $\{1, 3, 5\}$ e descrito como “obter um número ímpar”.

1. Considere o experimento descrito pela seguinte situação: *Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 bolas brancas, indistinguíveis pelo tato. Queremos tirar uma bola dessa urna, ao acaso, e anotar a sua cor.*
 - (a) Quais são os resultados possíveis para esse experimento?
 - (b) Esse experimento é determinístico ou aleatório? Justifique.
 - (c) Qual é a cor que tem mais chance de ser anotada? Justifique.
2. Classificar cada evento em *certo*, *aleatório* ou *impossível*:
 - (a) A água é aquecida a $100^\circ C$ e transforma-se em vapor.
 - (b) Um dado é lançado e observa-se um 7 na face superior.
 - (c) Uma moeda é lançada e observa-se uma cara na face superior.
 - (d) A água, sob a pressão de uma atmosfera, é aquecida a $100^\circ C$ e transforma-se em vapor.
 - (e) Um número natural entre 1 e 100 é sorteado e ele é a solução da equação $x \times 0 = 1$.
3. Dê o espaço amostral de cada experimento a seguir:
 - (a) Anotar se um freguês de um supermercado compra ou não um certo produto.
 - (b) Anotar se dois fregueses de um supermercado compram ou não um certo produto.
 - (c) Anotar se quatro fregueses de um supermercado compram ou não um certo produto.
 - (d) Quantos elementos possui o espaço amostral quando as respostas de seis fregueses são anotadas?
4. Considere o experimento que consiste no lançamento de três moedas e anotar as faces superiores.

- (a) Explicitar o espaço amostral.
 - (b) Explicitar o evento A descrito por: ocorre, pelo menos, uma cara.
 - (c) Explicitar o evento B descrito por: ocorre no máximo uma cara.
 - (d) Explicitar os eventos representados por $A \cap B$, \overline{A} e \overline{B} .
 - (e) Descrever os eventos $A \cap B$, \overline{A} e \overline{B} .
5. Considere um experimento cujo espaço amostral é Ω e A, B, C três de seus eventos. Representar os seguintes eventos em função de A, B e C :
- (a) Somente o evento A ocorre.
 - (b) Os três eventos ocorrem.
 - (c) Pelo menos dois dos eventos ocorrem.
 - (d) Exatamente dois dos eventos ocorrem.
 - (e) A e B ocorrem, porém C não ocorre.
 - (f) Somente um dos eventos ocorre.
 - (g) Nenhum dos eventos ocorre.

Soluções comentadas:

1. (a) S (sim) e N (não).
- (b) Aleatório. A repetição do experimento sob as mesmas condições pode levar a resultados diferentes.
- (c) Vermelha. O número de bolas vermelhas na urna é maior.
2. (a) Aleatório (depende da pressão atmosférica).
- (b) Impossível.
- (c) Aleatório.
- (d) Determinístico.
- (e) Impossível.
3. (a) $\Omega = \{S, N\}$.
- (b) $\Omega = \{(S, S), (S, N), (N, S), (N, N)\}$.
- (c) Os elementos de Ω são:

(S, S, S, S)	(S, S, S, N)	(S, S, N, S)	(S, S, N, N)
(S, N, S, S)	(S, N, S, N)	(S, N, N, S)	(S, N, N, N)
(N, S, S, S)	(N, S, S, N)	(N, S, N, S)	(N, S, N, N)
(N, N, S, S)	(N, N, S, N)	(N, N, N, S)	(N, N, N, N)

(d) $\#\Omega = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$.

4. (a) Denotando “cara” por K e coroa por “C”, os 8 elementos de Ω são:

(K, K, K)	(K, K, C)	(K, C, K)	(C, K, K)
(K, C, C)	(C, K, C)	(C, C, K)	(C, C, C)

(b) Ocorre pelo menos uma cara quando ocorrem 1, 2 ou 3 caras. Assim, o evento é explicitado por:

$$A = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K), (K, C, C), (C, K, C), (C, C, K)\}.$$

(c) Ocorre no máximo uma cara quando não ocorre cara ou quando ocorre exatamente 1 cara. Assim, o evento é explicitado por:

$$B = \{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K), (C, C, C)\}.$$

(d) Temos que $A \cap B = \{(K, C, C), (C, K, C), (C, C, K)\}$, que $\overline{A} = \{((C, C, C))\}$ e, finalmente, que $\overline{B} = \{(K, K, K), (K, K, C), (K, C, K), (C, K, K)\}$.

(e) O evento $A \cap B$ é descrito por: ocorre exatamente uma cara. O evento \overline{A} é descrito por: não ocorre cara. O evento \overline{B} é descrito por: ocorre no mínimo duas caras.

5. (a) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
(b) $A \cap B \cap C$.
(c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
(d) $(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$.
(e) $A \cap B \cap \overline{C}$.
(f) $(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.
(g) $\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}$.

Qualquer sugestão ou observação que você queira fazer, por favor, entre em contato pelo email petrucio@cos.ufrj.br.

Jorge Petrucio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF