Aula 25 – Funções Integráveis à Riemann

Metas da aula: Provar o Critério de Cauchy para Integrabilidade e dar algumas de suas aplicações na determinação da integrabilidade de funções. Demonstrar a integrabilidade do resultado de certas operações não-lineares com funções integráveis. Demonstrar a propriedade da aditividade da integral de uma função em relação à união de intervalos concatenados.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do Critério de Cauchy para Integrabilidade e como aplicá-lo na investigação sobre a integrabilidade de funções e na demonstração de certas propriedades das funções integráveis;

- Saber a propriedade da aditividade da integral de uma função em relação à união de intervalos concatenados e seu uso no cálculo de integrais.

Introdução

Nesta aula vamos apresentar o Critério de Cauchy para Integrabilidade que será utilizado na determinação da integrabilidade de certas funções e na demonstração de diversas propriedades. A primeira aplicação do Critério de Cauchy que daremos será a demonstração do fato de que toda função contínua é integrável à Riemann.

Entre outras aplicações veremos o Teorema do Sanduíche para Integrais e a integrabilidade do resultado de certas operações não-lineares com funções integráveis como produto, quociente, valor absoluto e composição com funções Lipschitz.

Também vamos estabelecer a propriedade da aditividade da integral em relação à união de intervalos concatenados, isto é, dois intervalos cuja interseção se reduz a um ponto, o qual é um extremo de ambos.

Critério de Cauchy para Integrabilidade

Se $\mathcal{P} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ é uma partição de $[a, b]$, denotemos por $\{\mathcal{P}\}$ o conjunto $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$.

Dadas duas partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ de $[a, b]$, dizemos que $\mathcal{P}_2$ **refina** ou **é**

um refinamento para $\mathcal{P}_1$ e denotamos $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$ se $\{\mathcal{P}_2\} \subset \{\mathcal{P}_1\}$. Também usaremos a notação alternativa $\mathcal{P}_1 \succ \mathcal{P}_2$ como tendo o mesmo significado que $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$

Um fato imediato a partir das definições que acabamos de dar é que dadas duas partições quaisquer de $[a,b]$, $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, a partição $\mathcal{P}$ tal que $\{\mathcal{P}\} = \{\mathcal{P}_1\} \cup \{\mathcal{P}_2\}$ satisfaz $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P} \prec \mathcal{P}_2$. Denotaremos a partição $\mathcal{P}$ assim definida a partir das partições $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$ por $\mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$.

Lema 25.1
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sejam $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ partições de $[a,b]$ com $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$. Então $S_*(f;\mathcal{P}_1) \le S_*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_1)$.

Prova: Seja $\mathcal{P}_1 := \{I_i\}_{i=1}^{n_1}$ e $\mathcal{P}_2 := \{J_k\}_{k=1}^{n_2}$. Sejam

$$m_{i,1} := \inf\{f(x) : x \in I_i\}, \quad m_{k,2} := \inf\{f(x) : x \in J_k\}$$

e definamos $M_{i,1}$ e $M_{k,2}$ de modo semelhante apenas trocando inf por sup, respectivamente.

Como $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$, então dado qualquer intervalo J_k em $\mathcal{P}_2$, existe I_i em $\mathcal{P}_1$ tal que $J_k \subset I_i$. Por outro lado, se $J_k \subset I_i$, então $m_{i,1} \le m_{k,2}$ e $M_{k,2} \le M_{i,1}$ (por quê?). Além disso, se $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$ então, pela definição da relação $\prec$, cada intervalo I_i de $\mathcal{P}_1$ satisfaz $I_i = J_{k_i} \cup J_{k_i+1} \cdots \cup J_{k_i+\nu_i}$ com $J_{k_i+l} \in \mathcal{P}_2$, $l = 0, 1, \dots, \nu_i$. Logo,

$$\begin{aligned} S_*(f;\mathcal{P}_1) &= \sum_{i=1}^{n_1} m_{i,1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{l=1}^{\nu_i} m_{i,1}(x_{k_i+l} - x_{k_i+l-1}) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{\nu_i} m_{k_i+l,2}(x_{k_i+l} - x_{k_i+l-1}) \qquad \text{(por quê?)} \\ &= \sum_{k=1}^{n_2} m_{k,2}(x_k - x_{k-1}) = S_*(f;\mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

Analogamente provamos que $S^*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_1)$, o qual deixamos para você como exercício.

Concluímos a prova do lema usando a desigualdade trivial $S_*(f;\mathcal{P}_2) \le S^*(f;\mathcal{P}_2)$.

$\square$

Os dois próximos resultados constituem duas versões para o que chamaremos de Critério de Cauchy para Integrabilidade. A primeira versão que damos a seguir se baseia em somas superiores e inferiores.

Teorema 25.1 (Critério de Cauchy para Integrabilidade I)
As duas afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \varepsilon. \tag{25.1}$$

Prova: ((i)$\Rightarrow$(ii)) Suponhamos $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Então, pelo Teorema 24.4, dado $\varepsilon > 0$, podemos obter $\delta' = \delta'(\varepsilon/2)$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição com $\|\mathcal{P}\| < \delta'$, então $|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon/2$ e $|S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon/2$. Assim, tomando $\delta = \delta(\varepsilon) := \delta'(\varepsilon/2)$, se $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então, pela desigualdade triangular,

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) \le |S^*(f;\mathcal{P}) - L| + |S_*(f;\mathcal{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que demonstra a implicação.

((ii)$\Rightarrow$(i)) Suponhamos que dado $\varepsilon > 0$ podemos obter $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para toda partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, temos (25.2). Para $\varepsilon = 1/k$, seja $\delta_k = \delta(1/k)$, $k \in \mathbb{N}$. Podemos supor que $\delta_1 \ge \delta_2 \ge \delta_3 \ge \cdots$, pois se isso não valer podemos trocar por $\delta_k' := \min\{\delta_1, \dots, \delta_i\}$. Agora, tomamos partições $\mathcal{P}_k$ com $\|\mathcal{P}_k\| < \delta_k$ tais que $\mathcal{P}_1 \succ \mathcal{P}_2 \succ \mathcal{P}_3 \succ \cdots$. Para tanto, primeiro tomamos uma partição $\mathcal{P}_1$ qualquer com $\|\mathcal{P}_1\| < \delta_1$, dividimos cada subintervalo de $\mathcal{P}_1$ em subintervalos de comprimento menor do que δ_2 para obter $\mathcal{P}_2 \prec \mathcal{P}_1$; em seguida dividimos cada subintervalo de $\mathcal{P}_2$ em subintervalos de comprimento menor do que δ_3 para definir $\mathcal{P}_3$, e assim por diante.

Temos, $S_*(f;\mathcal{P}_1) \le S_*(f;\mathcal{P}_2) \le S_*(f;\mathcal{P}_3) \le \cdots \le M(b-a)$, onde $M := \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ (por quê?). Assim, $(S_*(f;\mathcal{P}_k))$ é uma sequência não-decrescente e limitada superiormente. Logo, existe $L_* := \lim_{k\to\infty} S_*(f;\mathcal{P}_k)$ (por quê?). Analogamente, temos $S^*(f;\mathcal{P}_1) \ge S^*(f;\mathcal{P}_2) \ge S^*(f;\mathcal{P}_3) \ge \cdots \ge m(b-a)$, onde $m := \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ e, portanto, $(S^*(f;\mathcal{P}_k))$ é uma seqüência não-crescente e limitada inferiormente. Segue que existe $L^* := \lim_{k\to\infty} S^*(f;\mathcal{P}_k)$. Por hipótese temos, $0 \le S^*(f;\mathcal{P}_k) - S_*(f;\mathcal{P}_k) < 1/k$. Passando ao limite quando $k \to \infty$, obtemos $L^* = L_*$. Ponhamos, $L := L^* = L_*$.

Seja $\varepsilon > 0$ e $\delta := \delta(\varepsilon/3)$ tal que (25.2) vale com $\varepsilon/3$ em lugar de ε, se $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $|S_*(f;\mathcal{P}_k) - L| < \varepsilon/3$, $|S^*(f;\mathcal{P}_k) - L| < \varepsilon/3$ e

$S^*(f;\mathcal{P}_k) - S_*(f;\mathcal{P}_k) < \varepsilon/3$. Dada uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, definamos $\mathcal{Q}_k := \mathcal{P} \cup \mathcal{P}_k$. Temos

$$S_*(f;\mathcal{P}) \leq S_*(f;\mathcal{Q}_k) \leq S^*(f;\mathcal{Q}_k) \leq S^*(f;\mathcal{P})$$

e

$$S_*(f;\mathcal{P}_k) \leq S_*(f;\mathcal{Q}_k) \leq S^*(f;\mathcal{Q}_k) \leq S^*(f;\mathcal{P}_k).$$

Segue daí e da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned}|S_*(f;\mathcal{P}) - L| &\leq |S_*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{Q}_k)| + |S_*(f;\mathcal{Q}_k) - L| \\ &\leq |S_*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{Q}_k)| + |S_*(f;\mathcal{Q}_k) - S_*(f;\mathcal{P}_k)| + |S(f;\mathcal{P}_k) - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos $|S^*(f;\mathcal{P}) - L| < \varepsilon$. Então, pelo Teorema 24.4, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

O critério que acabamos de estabelecer admite a formulação alternativa seguinte, aparentemente distinta porém equivalente.

Teorema 25.2 (Critério de Cauchy para Integrabilidade I')
As duas afirmações seguintes são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii') Qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são partições quaisquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ $\|\mathcal{Q}\| < \delta$, então

$$S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{Q}) < \varepsilon. \tag{25.2}$$

Prova: ((i)⇒(ii')) Inteiramente semelhante à prova da implicação correspondente no Teorema 25.1. Deixamos os detalhes para você como exercício.

((ii')⇐(i)) A condição (ii') claramente implica a condição (ii) do Teorema 25.1, que por sua vez implica a condição (i), pelo mesmo Teorema 25.1.

□

Como anunciado, daremos a seguir a segunda versão Critério de Cauchy para Integrabilidade, a qual é baseada em somas de Riemann.

Teorema 25.3 (Critério de Cauchy para Integrabilidade II)
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a, b]$;

(ii) Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que dada qualquer partição $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e dois conjuntos quaisquer de aferições $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ para $\mathcal{P}$ definindo partições aferidas $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], s_i)\}_{i=1}^n$, temos

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \ddot{\mathcal{P}})| < \varepsilon. \qquad (25.3)$$

Prova: ((i)$\Rightarrow$(ii)) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a, b]$. Pelo Teorema 25.1, existe $\delta > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então $0 \le S^*(f; \mathcal{P}) - S_*(f; \mathcal{P}) < \varepsilon$. Agora, dadas duas partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ com base em $\mathcal{P}$ como na afirmação (ii), temos

$$S_*(f; \mathcal{P}) \le S(f; \dot{\mathcal{P}}) \le S^*(f; \mathcal{P}) \quad \text{e} \quad S_*(f; \mathcal{P}) \le S(f; \ddot{\mathcal{P}}) \le S^*(f; \mathcal{P}) \quad \text{(por quê?)}$$

e, portanto,

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \ddot{\mathcal{P}})| \le S^*(f; \mathcal{P}) - S_*(f; \mathcal{P}) < \varepsilon \qquad \text{(por quê?)}.$$

((ii)$\Rightarrow$(i)) Suponhamos que valha (ii). Seja $\varepsilon > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon/2) > 0$ como em (ii) com $\varepsilon/2$ em lugar de ε. Seja $\mathcal{P} := \{[x_{i-1}, x_i]\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Como anteriormente, denotemos $m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ e $M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$. Tomemos aferições $t_i, s_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$|f(t_i) - m_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{e} \quad |f(s_i) - M_i| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

o que é sempre possível pelas propriedades do supremo e do ínfimo (por quê?). Façamos, $\dot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} := \{([x_{i-1}, x_i], s_i)\}_{i=1}^n$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} 0 \le S^*(f; \mathcal{P}) - S_*(f; \mathcal{P}) &\le |S(f; \ddot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{P}})| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (|M_i - f(s_i)| + |m_i - f(t_i)|)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon \qquad \text{(por quê?)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 25.1, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ como desejado.

□

Como no caso do Teorema 25.1, o Teorema 25.3 também admite uma formulação alternativa aparentemente distinta porém equivalente.

Teorema 25.4 (Critério de Cauchy para Integrabilidade II')
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $f \in \mathcal{R}[a, b]$;

(ii') Dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que dadas quaisquer partições partições aferidas $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e $\dot{\mathcal{Q}} := \{(J_l, s_l)\}_{l=1}^m$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$, então

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \dot{\mathcal{Q}})| < \varepsilon. \tag{25.4}$$

Prova: ((i)⇒(ii')) Totalmente semelhante à prova da implicação correspondente no Teorema 25.3. Deixamos os detalhes para você como exercício.

((ii')⇒(i)) A condição (ii') claramente implica a condição (ii) do Teorema 25.3, que por sua vez implica a condição (i), pelo próprio Teorema 25.3.

□

Como primeiro exemplo de aplicação do Critério de Cauchy vamos provar a seguir a integrabilidade à Riemann das funções contínuas num intervalo fechado $[a, b]$.

Teorema 25.5 (Integrabilidade das Funções Contínuas)
Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$, então $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Prova: Segue do Teorema 17.2 que f é uniformemente contínua em $[a, b]$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $t, s \in [a, b]$ e $|t - s| < \delta$, então $|f(t) - f(s)| < \varepsilon/(b - a)$.

Seja $\mathcal{P} = \{I_i\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a, b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$. Sejam $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} := \{(I_i, s_i)\}_{i=1}^n$ duas partições aferidas com os mesmos subintervalos de $\mathcal{P}$. Temos

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \ddot{\mathcal{P}})| \le \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \le \frac{\varepsilon}{(b-a)}(b - a) = \varepsilon. \quad \text{(por quê?)}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, pelo Teorema 25.3 concluímos que $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

□

Em seguida utilizamos o Critério de Cauchy para estabelecer um resultado freqüentemente útil na verificação da integrabilidade à Riemann de funções num intervalo $[a, b]$.

Teorema 25.6 (Teorema do Sanduíche para Integrais)
Seja $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existem funções α_ε e ω_ε em $\mathcal{R}[a,b]$ com

$$\alpha_\varepsilon(x) \le f(x) \le \omega_\varepsilon(x) \qquad \text{para todo } x \in [a,b], \tag{25.5}$$

e tais que

$$\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \varepsilon. \tag{25.6}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Esta implicação é trivial pois basta tomar $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ para todo $\varepsilon > 0$.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. Sejam α_ε e ω_ε funções em $\mathcal{R}[a,b]$ satisfazendo (25.5) e (25.6) com $\varepsilon/3$ em lugar de ε. Como α_ε e ω_ε pertencem a $\mathcal{R}[a,b]$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição aferida qualquer de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$, então

$$\left| S(\alpha_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \left| S(\omega_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b \omega_\varepsilon \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{25.7}$$

Seja $\mathcal{P}$ uma partição qualquer de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e $\dot{\mathcal{P}}, \ddot{\mathcal{P}}$ duas partições aferidas com os mesmos subintervalos de $\mathcal{P}$. Segue das desigualdades em (25.7) que

$$-\frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \alpha_\varepsilon < S(\alpha_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) \quad \text{e} \quad S(\omega_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) < \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \omega_\varepsilon,$$

o mesmo também valendo em para $S(\alpha_\varepsilon; \ddot{\mathcal{P}})$ e $S(\omega_\varepsilon; \ddot{\mathcal{P}})$.

Devido a (25.5), temos $S(\alpha_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}}) \le S(f; \dot{\mathcal{P}}) \le S(\omega_\varepsilon; \dot{\mathcal{P}})$, bem como $S(\alpha_\varepsilon; \ddot{\mathcal{P}}) \le S(f; \ddot{\mathcal{P}}) \le S(\omega_\varepsilon; \ddot{\mathcal{P}})$. Assim, vale que

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}),\, S(f; \ddot{\mathcal{P}}) \in \left(-\frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \alpha_\varepsilon \,,\, \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^b \omega_\varepsilon \right).$$

Portanto,

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f; \ddot{\mathcal{P}})| < \frac{2\varepsilon}{3} + \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Segue então do Critério de Cauchy 25.3 que $f \in \mathcal{R}[a,b]$.

□

Exemplos 25.1

(a) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seqüências satisfazendo $a_0 := 1 > a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > 0$, $\lim a_n = 0$ e $|b_n| < M$ para um certo $M > 0$. Seja

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) := 0$ e $f(x) := b_n$ para $x \in (a_n, a_{n-1}]$, para $n \in \mathbb{N}$ com $a_0 = 1$. Então $f \in \mathcal{R}[0,1]$ e $\int_0^1 f = \sum b_n(a_{n-1} - a_n)$. Observe que a série $\sum b_n(a_{n-1} - a_n)$ é convergente devido às hipóteses sobre a_n e b_n (por quê?).

De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $\lim a_n = 0$, existe $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tal que $0 < a_n < \varepsilon/(2M)$ para $n \geq N_0$. Definimos

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} b_n, & x \in (a_n, a_{n-1}],\ n = 1, \dots, N_0 \\ -M, & x \in [0, a_{N_0}] \end{cases}, \tag{25.8}$$

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} b_n, & x \in (a_n, a_{n-1}],\ n = 1, \dots, N_0 \\ M, & x \in [0, a_{N_0}] \end{cases}. \tag{25.9}$$

Do Teorema 24.3(iv) temos que α_ε e ω_ε, assim definidas, pertencem a $\mathcal{R}[0,1]$ e valem (25.5) e (25.6). Logo, pelo Teorema 25.6, segue que $f \in \mathcal{R}[0,1]$. Além disso, do Teorema 24.3(i) e da desigualdade (25.5) segue que

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon \leq \int_a^b f \leq \int_a^b \omega_\varepsilon.$$

Como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \alpha_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b \omega_\varepsilon = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} b_n(a_{n-1} - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(a_{n-1} - a_n),$$

segue que $\int_a^b f = \sum b_n(a_{n-1} - a_n)$.

(b) O Critério de Cauchy para Integrabilidade 25.3 pode ser usado para mostrar que uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *não* é integrável à Riemann. Para isso basta mostrarmos que: *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ existem partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P}$ de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e tais que $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\ddot{\mathcal{P}})| \geq \varepsilon_0$.*

Aplicaremos essa observação à função de Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := 1$ se $x \in [0,1]$ é racional e $f(x) := 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional.

De fato, podemos tomar $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$. Se $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ são partições aferidas correspondentes a uma mesma partição $\mathcal{P}$ qualquer de $[a,b]$, tais que as aferições de $\dot{\mathcal{P}}$ são racionais, enquanto as aferições de $\ddot{\mathcal{P}}$ são irracionais, teremos sempre $S(f;\dot{\mathcal{P}}) = 1$, ao passo que $S(f;\ddot{\mathcal{P}}) := 0$ (por quê?). Devido à densidade dos racionais e dos irracionais em $[0,1]$, podemos tomar partições $\mathcal{P}$ com normas arbitrariamente pequenas e formar partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ como mencionado. Concluímos então que a função de Dirichlet não é integrável à Riemann.

Operações Não-Lineares com Funções Integráveis

No resultado a seguir vamos estabelecer o bom comportamento de $\mathcal{R}[a,b]$ em relação às operações de produto, quociente, tomada do módulo ou valor absoluto e composição com funções Lipschitz.

Teorema 25.7
Seja $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$. Então:

(i) $fg \in \mathcal{R}[a,b]$;

(ii) Se $|g(x)| > \eta > 0$ para $x \in [a,b]$, então $f/g \in \mathcal{R}[a,b]$;

(iii) $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$ e $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

(iv) Se $f([a,b]) \subset [c,d]$ e $H : [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitz, então $H \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$.

Prova: (i) Como $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$, pelo Teorema 24.2 existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ e $|g(x)| \leq M$ para $x \in [a,b]$. Além disso, pelo Teorema 25.1, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathcal{P}$ é uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então

$$0 \leq S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{e} \quad 0 \leq S^*(g;\mathcal{P}) - S_*(g;\mathcal{P}) < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Tomemos um tal $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ como mencionado. Seja $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$ uma partição de $[a,b]$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, e sejam $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$, $\ddot{\mathcal{P}} := \{(I_i, s_i)\}_{i=1}^n$ duas partições aferidas associadas possuindo os mesmos subintervalos de $\mathcal{P}$, $I_i := [x_{i-1}, x_i]$. Sejam

$$M_i^f := \sup\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad m_i^f := \inf\{f(t) : t \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

e M_i^g, m_i^g definidos analogamente com g em lugar de f. Temos

$$
\begin{aligned}
|S(fg;\dot{\mathcal{P}}) - S(fg;\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(f(t_i)g(t_i) - f(s_i)g(s_i))(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|f(t_i)g(t_i) - f(s_i)g(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}|(f(t_i)g(t_i) - f(t_i)g(s_i)) + (f(t_i)g(s_i) - f(s_i)g(s_i))|(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\big(|f(t_i)||g(t_i) - g(s_i)| + |g(s_i)||f(t_i) - f(s_i)|\big)(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq M\sum_{i=1}^{n}(M_i^g - m_i^g)(x_i - x_{i-1}) + M\sum_{i=1}^{n}(M_i^f - m_i^f)(x_i - x_{i-1}) \\
&= M(S^*(g;\mathcal{P}) - S_*(g;\mathcal{P})) + M(S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P})) \\
&< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue do Teorema 25.3 que $fg \in \mathcal{R}[a,b]$.

(ii) Basta provar que $1/g \in \mathcal{R}[a,b]$ e então aplicar o ítem (i) a f e $1/g$. Provemos então que $1/g \in \mathcal{R}[a,b]$. Dadas duas partições aferidas de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} = \{(I_i,s_i)\}_{i=1}^n$, possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$, $I_i := [x_{i-1},x_i]$, temos

$$
\begin{aligned}
|S(1/g;\dot{\mathcal{P}}) - S(1/g;\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{g(t_i)} - \frac{1}{g(s_i)})(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\frac{|g(s_i) - g(t_i)|}{|g(t_i)||g(s_i)|}(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \frac{1}{\eta^2}\left(S^*(g;\mathcal{P}) - S_*(g;\mathcal{P})\right). \qquad \text{(por quê?)}
\end{aligned}
$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como g é integrável, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|\mathcal{P}\| < \delta$, então $0 \leq S^*(g;\mathcal{P}) - S_*(g;\mathcal{P}) < \eta^2\varepsilon$. Assim, se $\dot{\mathcal{P}}$ e $\ddot{\mathcal{P}}$ são partições aferidas com os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P}$ com $\|\mathcal{P}\| < \delta$, pela estimativa que acabamos de fazer teremos

$$|S(1/g;\dot{\mathcal{P}}) - S(1/g;\ddot{\mathcal{P}})| < \frac{1}{\eta^2}\eta^2\varepsilon = \varepsilon.$$

Segue então do Teorema 25.3 que $1/g \in \mathcal{R}[a,b]$, o que conclui a prova de (ii).

(iii) De novo, dadas duas partições aferidas de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} = \{(I_i,s_i)\}_{i=1}^n$, possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P} :=$

$\{I_i\}_{i=1}^n$, $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, temos

$$\begin{aligned}
|S(|f|;\dot{\mathcal{P}}) - S(|f|;\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n (|f(t_i)| - |f(s_i)|)(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \big||f(t_i)| - |f(s_i)|\big|(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq \sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P}). \qquad \text{(por quê?)}
\end{aligned}$$

Como nos ítens anteriores, usamos o Teorema 25.1 para obter que existe $\delta > 0$ tal que o último membro da desigualdade anterior é menor que ε se $\|\mathcal{P}\| < \delta$ e então usamos o Teorema 25.3 para concluir que $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$.

O fato de que $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ segue de $f \leq |f|$, $-f \leq |f|$ e do Teorema 24.3(i). Deixamos os detalhes da demonstração para você como exercício.

(iv) Por definição, dizer que $H : [c,d] \to \mathbb{R}$ é Lipschitz significa que existe $C > 0$ tal que $|H(y) - H(z)| \leq C|y - z|$, para $y, z \in [c,d]$. Mais uma vez, dadas duas partições aferidas de $[a,b]$, $\dot{\mathcal{P}} := \{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ e $\ddot{\mathcal{P}} = \{(I_i,s_i)\}_{i=1}^n$, possuindo os mesmos subintervalos de uma partição $\mathcal{P} := \{I_i\}_{i=1}^n$, $I_i := [x_{i-1}, x_i]$, temos

$$\begin{aligned}
|S(H(f);\dot{\mathcal{P}}) - S(H(f);\ddot{\mathcal{P}})| &= \left|\sum_{i=1}^n (H(f(t_i)) - H(f(s_i)))(x_i - x_{i-1})\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \big|H(f(t_i)) - H(f(s_i))\big|(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq C\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(s_i)|(x_i - x_{i-1}) \\
&\leq C\big(S^*(f;\mathcal{P}) - S_*(f;\mathcal{P})\big).
\end{aligned}$$

Da mesma forma que no ítem anterior, usamos os Teoremas 25.1 e 25.3 para concluir que $H \circ f \in \mathcal{R}[a,b]$. Deixamos os detalhes para você como exercício.

$\square$

O Teorema da Aditividade

A seguir estabeleceremos o fato de que a integral é uma "função aditiva" do intervalo sobre o qual a função é integrada. O significado preciso dessa propriedade ficará claro no enunciado do resultado.

Teorema 25.8
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $c \in (a,b)$. Então $f \in \mathcal{R}[a,b]$ se, e somente se, suas restrições a $[a,c]$ e $[c,b]$ são ambas integráveis à Riemann. Nesse caso vale

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{25.10}$$

Prova: ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f \in \mathcal{R}[a,b]$. Seja $\varepsilon > 0$ e tomemos $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ como no enunciado do Teorema 25.4. Seja $f_1 := f|[a,c]$ e sejam $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ partições aferidas de $[a,c]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}_1\| < \delta$. Combinando-se $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ com uma mesma partição aferida qualquer de $[c,b]$ com norma $< \delta$ podemos estender $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ a partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ de $[a,b]$ satisfazendo $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$. Além disso, teremos

$$S(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1;\dot{\mathcal{Q}}_1) = S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}}),$$

já que usamos a mesma partição aferida de $[c,d]$ para estender $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ a $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$, respectivamente.

Como $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}\| < \delta$, então $|S(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1;\dot{\mathcal{Q}}_1)| < \varepsilon$. Segue então do Teorema 25.4 que $f_1 \in \mathcal{R}[a,c]$.

De forma quase idêntica se demonstra que $f_2 := f|[c,b]$ está em $\mathcal{R}[c,b]$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que $f_1 = f|[a,c]$ e $f_2 = f|[c,d]$ estão em $\mathcal{R}[a,c]$ e $\mathcal{R}[c,b]$, respectivamente, e sejam $L_1 := \int_a^c f_1$ e $L_2 := \int_c^b f_2$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}_1$ é uma partição aferida de $[a,c]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta_1$, vale $|S(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3$. Do mesmo modo, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}_2$ é uma partição aferida de $[c,d]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta_2$, então $|S(f_2;\dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3$.

Como f_1 é limitada em $[a,c]$ e f_2 é limitada em $[c,b]$ (por quê?), segue que f é limitada em $[a,b]$. Seja $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para $x \in [a,b]$. Definamos $\delta = \delta(\varepsilon) := \min\{\delta_1,\, \delta_2,\, \varepsilon/6M\}$ e seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição aferida de $[a,b]$ com $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta$. Vamos provar que

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - (L_1 + L_2)| < \varepsilon. \tag{25.11}$$

Se c é um dos pontos da partição $\mathcal{P}$ cujos subintervalos são os mesmos de $\dot{\mathcal{P}}$, repartimos $\dot{\mathcal{P}}$ numa partição aferida $\dot{\mathcal{P}}_1$ de $[a,c]$ e uma partição aferida $\dot{\mathcal{P}}_2$ de $[c,b]$. Como $S(f;\dot{\mathcal{P}}) = S(f_1;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(f_2;\dot{\mathcal{P}}_2)$, e como $\dot{\mathcal{P}}_1$ tem norma menor que δ_1 e $\dot{\mathcal{P}}_2$ tem norma menor que δ_2, a desigualdade (25.11) segue imediatamente da desigualdade triangular.

Se c não é um ponto de $\mathcal{P} := (a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b)$, então existe $k \leq n$ tal que $c \in (x_{k-1}, x_k)$. Sejam $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$, $\dot{\mathcal{P}}_1$ a partição aferida de $[a, c]$ definida por

$$\dot{\mathcal{P}}_1 := \{(I_1, t_1), \ldots, (I_{k-1}, t_{k-1}), ([x_{k-1}, c], c]\},$$

e $\dot{\mathcal{P}}_2$ a partição aferida de $[c, b]$ definida por

$$\dot{\mathcal{P}}_2 := \{([c, x_k], c), (I_{k+1}, t_{k+1}), \ldots, (I_n, t_n)\},$$

com $I_i := [x_{i-1}, x_i]$. Um cálculo simples mostra que

$$\begin{aligned} S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) &= f(t_k)(x_k - x_{k-1}) - f(c)(x_k - x_{k-1}) \\ &= (f(t_k) - f(c))(x_k - x_{k-1}). \end{aligned}$$

Segue daí que

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2)| \leq 2M(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon/3. \tag{25.12}$$

Mas como $\|\dot{\mathcal{P}}_1\| < \delta \leq \delta_1$ e $\|\dot{\mathcal{P}}_2\| < \delta \leq \delta_2$, temos que

$$|S(f_1; \dot{\mathcal{P}}_1) - L_1| < \varepsilon/3 \quad \text{e} \quad |S(f_2; \dot{\mathcal{P}}_2) - L_2| < \varepsilon/3,$$

o qual juntamente com (25.12) nos dá (25.11). Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e que (25.10) vale.

□

Definição 25.1
Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e se $\alpha, \beta \in [a, b]$ com $\alpha < \beta$, definimos

$$\int_\beta^\alpha f := -\int_\alpha^\beta f \quad \text{e} \quad \int_\alpha^\alpha f := 0. \tag{25.13}$$

O Teorema da Aditividade juntamente com a definição que acabamos de dar facilmente implicam o seguinte resultado cuja demonstração se resume à verificação de todos os possíveis casos dependendo do ordenamento entre α, β, γ, e será deixada para você como exercício (veja o exercício 12).

Teorema 25.9
Se $f \in \mathcal{R}[a, b]$ e α, β, γ são quaisquer números em $[a, b]$, então

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f. \tag{25.14}$$

Exercícios 25.1

1. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Mostre que $f \notin \mathcal{R}[a,b]$ se, e somente se, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existem partições aferidas $\dot{\mathcal{P}}_n$ e $\dot{\mathcal{Q}}_n$ com $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| < 1/n$ e $\|\dot{\mathcal{Q}}_n\| < 1/n$ tais que $|S(f;\dot{\mathcal{P}}_n) - S(f;\dot{\mathcal{Q}}_n)| \geq \varepsilon_0$.

2. Considere a função f definida por $f(x) := x+1$ para $x \in [0,1]$ racional, e $f(x) := 0$ para $x \in [0,1]$ irracional. Mostre que f não é integrável à Riemann.

3. Se $S(f;\dot{\mathcal{P}})$ é uma soma de Riemann qualquer de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, mostre que existe uma função degrau (veja exercício 13) $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b \varphi = S(f;\dot{\mathcal{P}})$.

4. Suponha que f é contínua em $[a,b]$, que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e que $\int_a^b f = 0$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

5. Mostre que a hipótese de que f é contínua no exercício anterior não pode ser retirada.

6. Se f e g são contínuas em $[a,b]$ e se $\int_a^b f = \int_a^b g$, prove que existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

7. Se f é limitada por M em $[a,b]$ e se a restrição de f a todo intervalo $[c,b]$ com $c \in (a,b)$ é integrável à Riemann, mostre que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e que $\int_c^b f \to \int_a^b f$ quando $c \to a+$. [Dica: Seja $\alpha_c(x) := -M$ e $\omega_c(x) := M$ para $x \in [a,c)$ e $\alpha_c(x) = \omega_c(x) := f(x)$ para $x \in [c,b]$. Aplique o Teorema do Sanduíche para Integrais 25.6.]

8. Use o exercício anterior para mostrar que a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \in (0,1]$ e $f(0) := 0$ pertence a $\mathcal{R}[0,1]$.

9. Se f é contínua em $[a,b]$, mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$. Esse resultado é às vezes chamado de Teorema do Valor Médio para Integrais.

10. Suponhamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$ e que a restrição de f a $[c_{i-1}, c_i]$ pertence a $\mathcal{R}[c_{i-1}, c_i]$ para $i = 1, \ldots, m$. Prove que $f \in \mathcal{R}[a,b]$ e

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^m \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

[Dica: Use o Teorema 25.8 e Indução Matemática.]

11. Suponha que $a > 0$ e que $f \in \mathcal{R}[-a, a]$.

    (a) Se f é *par* (isto é, se $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [-a, a]$), então $\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.

    (b) Se f é *ímpar* (isto é, se $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [-a, a]$), então $\int_{-a}^{a} f = 0$.

12. Prove o Teorema 25.9.