Álgebra Linear I

Resolução dos Exercícios Programados 3 – EP3

1. Resolva e classifique os sistemas.

(a) $\begin{cases} x - y = 0 \\ 2y + 4z = 6 \\ x + y + 4z = 6 \end{cases}$

Solução. Este sistema pode ser escrito

$$\begin{cases} 1x - 1y + 0z = 0 \\ 0x + 2y + 4z = 6 \\ 1x + 1y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

O sistema equivalente é

$$\begin{cases} 1x + 0y + 2z = 3 \\ 0x + 1y + 2z = 3 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

A última equação não estabelece nenhuma condição para x e y; por isso, a solução do sistema é dada pelas duas primeiras equações:
x=3-2z e y=3-2z. Os valores de x e y (que são iguais) são obtidos atribuindo valores arbitrários a z.
Logo, o sistema é compatível e indeterminado e seu conjunto solução é $S = \{(3-2z, 3-2z, z) / z \in \Re\}$.

(b) $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 6x - 9y = 15 \end{cases}$

Solução.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -3 & 4 \\ 6 & -9 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 2 \\ 6 & -9 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

O sistema equivalente é $\begin{cases} x - \frac{3}{2}y = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$. Logo, o sistema é incompatível.

(c) $\begin{cases} x + 2y - 3z = -1 \\ 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + 3y - 4z = 2 \end{cases}$

Solução.

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 7\\ 5 & 3 & -4 & 2\end{bmatrix} L_2 \leftarrow -3L_1 + L_2 \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -7 & 11 & 10\\ 5 & 3 & -4 & 2\end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow -5L_1 + L_3} \begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & -1\\ 0 & -7 & 11 & 10\\ 0 & -7 & 11 & 7\end{bmatrix}$$

Assim, obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1\\ \quad - 7y + 11z = 10\\ \quad - 7y + 11z = 7\end{cases}$$

As segunda e terceira equações mostram que o sistema é incompatível, porque, se subtrairmos, obtemos 0x+0y+0z = 3 ou 0 = 3.

2. Determine k, para que o sistema admita solução,

$$\begin{cases} -4x + 3y = 2\\ 5x - 4y = 0\\ 2x - y = k\end{cases}$$

Solução.

Temos: $\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2\\ 5 & -4 & 0\\ 2 & -1 & k\end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{cc|c} -4 & 3 & 2\\ 0 & -1/4 & 5/2\\ 0 & 1/2 & k+1\end{array}\right]$. Assim, o sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} -4x + 3y = 2\\ -\frac{1}{4}y = \frac{5}{2}\\ \frac{1}{2}y = k+1\end{cases}$. Logo, k = - 6.

3. Considere o sistema $\begin{cases} x + 6y - 8z = 1\\ 2x + 6y - 4z = 0\end{cases}$

(a) Verifique que a matriz $X_1 = \begin{bmatrix} -1\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$ é uma solução para o sistema.

Solução.

Note que podemos escrever o sistema na forma matricial $\begin{bmatrix}1 & 6 & -8\\ 2 & 6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$. Como $\begin{bmatrix}1 & 6 & -8\\ 2 & 6 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$, a matriz X_1 é solução do sistema dado.

(b) Resolva o sistema e verifique que toda “matriz-solução” é da forma

$X = \lambda\begin{bmatrix}-4\\ 2\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix}$ onde $\lambda \in \Re$.

Solução.

$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 & \vert & 1 \\ 2 & 6 & -4 & \vert & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 & \vert & 1 \\ 0 & -6 & 12 & \vert & -2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 6 & -8 & \vert & 1 \\ 0 & 1 & -2 & \vert & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. Daí, x = - 4z - 1 e

y = 2z + 1/3. Logo, a solução do sistema é dada por $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$, onde $z \in \Re$.

© Verifique $\lambda\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$ é a solução do sistema homogêneo associado ao sistema dado.

Solução.O sistema homogêneo associado é $\begin{cases} x + 6y - 8z = 0 \\ 2x + 6y - 4z = 0 \end{cases}$. Daí, x = - 4z e y = 2z. Logo, X = $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = z\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ é a solução do sistema homogêneo associado.

(d) Conclua, dos itens (a), (b) e (c) que o conjunto-solução do sistema inicial é o conjunto-solução do sistema homogêneo associado somado a uma de suas soluções particulares.

Solução.

Se $X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ é uma solução particular do sistema dado, $\begin{cases} x_0 + 6y_0 - 8z_0 = 1 \\ 2x_0 + 6y_0 - 4z_0 = 0 \end{cases}$. Então, qualquer outro solução deste sistema satisfaz estas equações e daí $\begin{cases} x + 6y - 8z = x_0 + 6y_0 - 8z_0 \\ 2x + 6y - 4z = 2x_0 + 6y_0 - 4z_0 \end{cases}$. Logo,

$\begin{cases} (x - x_0) + 6(y - y_0) - 8(z - z_0) = 0 \\ 2(x - x_0) + 6(y - y_0) - 4(z - z_0) = 0 \end{cases}$, ou seja, $X_1 = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$ é solução do sistema homogêneo associado.

4. Ache todas as soluções do sistema $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \end{cases}$.

Solução.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & -3/5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x - \frac{1}{5}z = 0 \\ y - \frac{3}{5}z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Logo, o sistema dado só admite a solução trivial x = y = z =0.

2. Determine os valores de a, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$ tenha

(a) nenhuma solução

(b) mais de uma solução

(c) uma única solução

Solução.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow -L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow -(a-1)L_2 + L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 6 & -a + 2 \end{bmatrix}$$

Obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (3+a)(2-a)z = 2-a \end{cases}$$

que tem solução única se o coeficiente de z na terceira equação não é zero, isto é, se $a \neq 2$ e $a \neq -3$. No caso de a = 2, a terceira equação é 0=0 e o sistema tem mais de uma solução. No caso de a=-3, a terceira equação é 0=5 e o sistema não tem solução.

Logo, o sistema não possui solução se a = -3, possui mais de uma solução para a=2 e uma única solução se $a \neq 2$ e $a \neq -3$.