Aula 16 – Funções Contínuas em Intervalos

Metas da aula: Estabelecer o Teorema do Máximo-Mínimo para funções contínuas em intervalos fechados limitados. Estabelecer o Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas em intervalos.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do Teorema do Máximo-Mínimo para funções contínuas em intervalos fechados limitados.

- Saber o significado do Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas em intervalos.

Introdução

Nesta aula vamos apresentar os principais resultados sobre funções contínuas em intervalos. Primeiramente vamos ver o Teorema do Máximo-Mínimo para funções contínuas em intervalos fechados limitados. Esse resultado estabelece que funções contínuas em intervalos fechados limitados assumem os seus valores máximo e mínimo nesses intervalos. Em seguida vamos ver o também muito importante Teorema do Valor Intermediário que estabelece que, dada uma função contínua definida num intervalo e dois valores dessa função assumidos em dois pontos desse intervalo, então qualquer valor entre esses dois valores é assumido num ponto do intervalo entre os dois pontos onde são assumidos os valores dados.

O Teorema do Máximo-Mínimo

Iniciaremos mostrando que a imagem por uma função contínua de um intevalo limitado e fechado é um conjunto limitado.

Definição 16.1
Diz-se que uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é *limitada em* X se existe uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in X$.

Teorema 16.1
Seja $I := [a, b]$ um intervalo fechado limitado e seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então f é limitada em I.

Prova: Suponhamos que f não é limitada em I. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in I$ tal que $|f(x_n)| > n$. Como $I = [a, b]$, a seqüência $\mathbf{x} := (x_n)$ satisfaz $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, o Teorema de Bolzano-Weierstrass 8.5 implica que existe uma subseqüência $\mathbf{x}' := (x_{n_k})$ de $\mathbf{x}$ que converge a um número $\bar{x}$ e pelo Teorema 7.5 temos $a \leq \bar{x} \leq b$, ou seja, $\bar{x} \in I$. Então f é contínua em $\bar{x}$, de modo que $(f(x_n))$ converge a $f(\bar{x})$. Do Teorema 7.1 segue que a subseqüência convergente $(f(x_{n_k}))$ tem que ser limitada. Mas isso nos dá uma contradição já que

$$|f(x_{n_k})| > n_k \geq k \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, a hipótese de que a função contínua f não é limitada no intervalo fechado limitado I nos leva a uma contradição, o que prova que f é limitada em I. □

Definição 16.2

Seja $X \subset \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Dizemos que f *tem um máximo absoluto em* X se existe um ponto $x^* \in X$ tal que

$$f(x^*) \geq f(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Dizemos que f *tem um mínimo absoluto em* X se existe um ponto $x_* \in X$ tal que

$$f(x_*) \leq f(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Dizemos que x^* é um *ponto de máximo absoluto* para f em X, e que x_* é um *ponto de mínimo absoluto* para f em X, caso eles existam.

Teorema 16.2 (Teorema do Máximo-Mínimo)

Seja $I := [a, b]$ um intervalo fechado limitado e seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então f tem um máximo absoluto e um mínimo absoluto em I.

Prova: Considere o conjunto não-vazio $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ de valores de f sobre I. O Teorema 16.1 estabelece que $f(I)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$. Seja $y^* := \sup f(I)$ e $y_* := \inf f(I)$. Afirmamos que existem pontos x^* e x_* em I tais que $y^* = f(x^*)$ e $y_* = f(x_*)$. Vamos provar a existência do ponto x^*, sendo a prova da existência de x_* inteiramente semelhante e deixada para você como exercício.

Como $y^* = \sup f(I)$, dado $n \in \mathbb{N}$, o número $y^* - 1/n$ não é uma cota superior de $f(I)$. Sendo assim, existe $x_n \in I$ tal que

$$y^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq y^* \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como I é limitado, a seqüência $\mathbf{x} := (x_n)$ é limitada. Portanto, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 8.5, existe uma subseqüência $\mathbf{x}' := (x_{n_k})$ de $\mathbf{x}$ que converge para um $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e pelo Teorema 7.5 temos $\bar{x} \in I$. Logo, f é contínua em $\bar{x}$ de modo que $\lim f(x_{n_k}) = f(x^*)$. Como

$$y^* - \frac{1}{k} \leq y^* - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) \leq y^* \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos pelo Teorema do Sanduíche 7.6 que $\lim f(x_{n_k}) = y^*$. Portanto, temos que

$$f(x^*) = \lim f(x_{n_k}) = y^* = \sup f(I),$$

e então concluímos que x^* é um ponto de máximo absoluto de f em I. $\square$

A Figura **16.1** ilustra o fato estabelecido no Teorema 16.2.

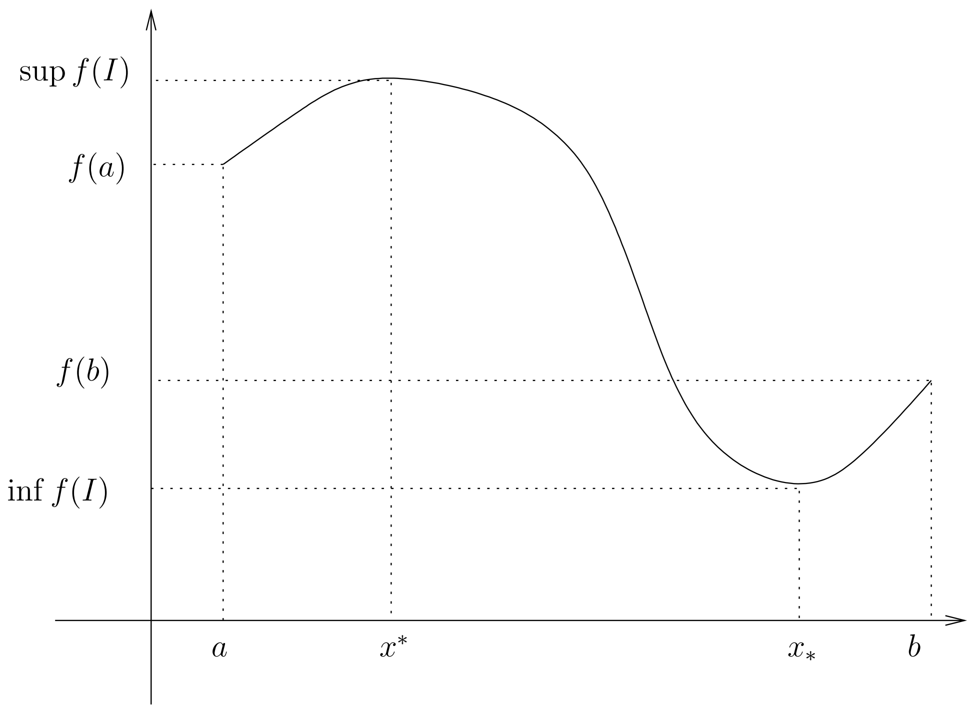

Figura 16.1: $f(I) = [f(x_*) = \inf f(I), f(x^*) = \sup f(I)]$.

A seguir damos alguns exemplos mostrando que as hipóteses dos Teoremas 16.1 e 16.2 não podem ser relaxadas.

Exemplos 16.1

(a) Nos Teoremas 16.1 e 16.2 a hipótese de que o intervalo é limitado não pode ser relaxada.

De fato, a função $f(x) := x$ para x no intervalo fechado ilimitado $I := [0, \infty)$ é contínua mas não é limitada. Em particular, ela não possui um máximo absoluto em I.

(b) Nos Teoremas 16.1 e 16.2 a hipótese de que o intervalo é fechado não pode ser dispensada.

De fato, a função $g(x) := 1/x$ para x no intervalo semi-aberto $I := (0, 1]$ é contínua mas não é limitada. Em particular, essa função também não possui um máximo absoluto no intervalo I em questão.

(c) Nos Teoremas 16.1 e 16.2 a hipótese de que a função é contínua não pode ser descartada.

De fato, a função f definida no intervalo fechado limitado $I := [0, 1]$ por $f(x) := 1/x$ para $x \in (0, 1]$ e $f(0) := 0$ é descontínua em $x = 0$ e é ilimitada em I. De novo, a função f assim definida não possui um máximo absoluto no intervalo fechado limitado I.

(d) A função $f(x) := 1/x$ não possui nem um máximo absoluto, nem um mínimo absoluto no intervalo $I := (0, \infty)$.

Essa função é ilimitada superiormente em I e assim não pode ter um máximo absoluto. Por outro lado, não existe nenhum ponto em I onde f assuma o valor $0 = \inf\{f(x) : x \in I\}$.

(e) Os pontos de máximo e de mínimo absolutos cuja existência é garantida pelo Teorema 16.2 não são necessariamente únicos.

De fato, um exemplo extremo é o de uma função constante $f(x) := c$ num intervalo fechado limitado $I := [a, b]$. Nesse caso, todo ponto de I é ao mesmo tempo um ponto de máximo absoluto e um ponto de mínimo absoluto para f.

Um outro exemplo menos drástico é fornecido pela função $f(x) := x^2$ em $[-1, 1]$ onde $x = -1$ e $x = 1$ são ambos pontos de máximo absoluto para f, ao passo que $x = 0$ é o único ponto de mínimo absoluto para f.

O Teorema do Valor Intermediário

O próximo resultado, devido a Bolzano, mostra uma propriedade fundamental das funções contínuas definidas em intervalos.

Teorema 16.3 (Teorema do Valor Intermediário)
Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Se $a, b \in I$ e se $k \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(a) < k < f(b)$, então existe um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = k$.

Prova: Se $a < b$, a função $g(x) := f(x) - k$ satisfaz $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$. Se $b < a$, a função $g := k - f(x)$ satisfaz $g(b) < 0$ e $g(a) > 0$. Em qualquer um dos dois casos, se acharmos um ponto c pertencente ao intervalo aberto de extremos a e b tal que $g(c) = 0$, então teremos $f(c) = k$ como afirmado.

Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $k = 0$, $a < b$, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. O teorema ficará provado se mostrarmos que existe c satisfazendo $a < c < b$ e $f(c) = 0$.

Com efeito, seja $X := \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$. Então X é não vazio e limitado. Logo, existe $c := \sup X$. Afirmamos que $a < c < b$ e $f(c) = 0$. De fato, $f(a) < 0$ e $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$. Assim, pelo Teorema 13.5, temos que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in [a, a + \delta)$. Logo a não é cota superior de X e portanto $c > a$. Por outro lado, $f(b) > 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = f(b)$ e, de novo, o Teorema 13.5 implica que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $x \in (b - \delta, b]$. Logo, b não é a menor cota superior de X e portanto $c < b$.

Agora, se $f(c) < 0$, então o Teorema 13.5 implica que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos $a < c - \delta < c < c + \delta < b$ e $f(x) < 0$ se $x \in (c - \delta, c + \delta)$, contradizendo o fato de c ser cota superior de X. Similarmente, se $f(c) > 0$, então do Teorema 13.5 segue que para $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos $a < c - \delta < c < c + \delta < b$ e $f(x) > 0$ se $x \in (c - \delta, c + \delta)$, contradizendo o fato de c ser a menor cota superior de X.

Portanto, necessariamente devemos ter $f(c) = 0$, o que conclui a prova.
□

O próximo teorema resume num só enunciado os resultados fornecidos pelo Teorema do Máximo-Mínimo 16.2 e pelo Teorema do Valor Intermediário 16.3.

Teorema 16.4
Seja I um intervalo fechado limitado e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua em I. Então o conjunto $f(I) := \{f(x) : x \in I\}$ é um intervalo fechado limitado.

Prova: Se $m := \inf f(I)$ e $M := \sup f(I)$, então sabemos pelo Teorema do Máximo-Mínimo 16.2 que existem $x_*, x^* \in I$ tais que $m = f(x_*)$, $M = f(x^*)$. Portanto, m e M pertencem a $f(I)$. Além disso, temos $f(I) \subset$

$[m, M]$. Agora, se k é qualquer elemento de $[m, M]$, então o Teorema do Valor Intermediário 16.3 implica que existe $c \in [x_*, x^*] \subset I$ tal que $k = f(c)$. Portanto, $k \in f(I)$ e concluímos então que $[m, M] \subset f(I)$. Logo, $f(I)$ é o intervalo fechado limitado $[m, M]$. $\square$

O último resultado que apresentaremos a seguir estabelece a propriedade das funções contínuas de levar intervalos em intervalos. Vimos no resultado anterior que intervalos fechados limitados são levados por funções contínuas em intervalos fechados limitados. Em geral, porém, quando um intervalo não é fechado e limitado, sua imagem poderá ser de um tipo diferente do dele. Por exemplo, a imagem do intervalo aberto $(-1, 1)$ pela função contínua $f(x) := 1/(1 + x^2)$ é o intervalo semi-aberto $(1/2, 1]$. Já o intervalo fechado $[0, \infty)$ é levado por essa mesma função no intervalo semi-aberto $(0, 1]$. (Veja Figura **16.2**.)

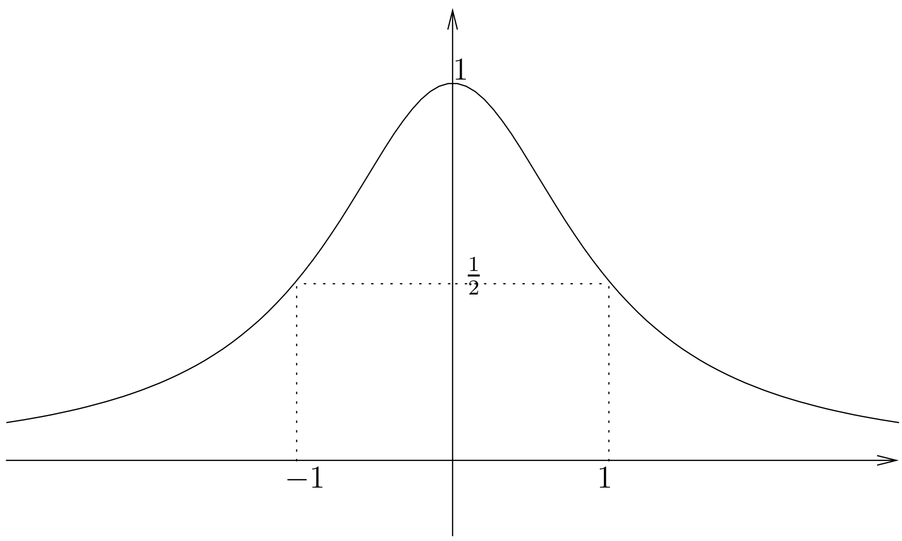

Figura 16.2: Gráfico da função $f(x) := 1/(1 + x^2)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Teorema 16.5
Seja I um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I. Então o conjunto $f(I)$ é um intervalo.

Prova: Vimos no Teorema 5.10 que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é um intervalo se, e somente se, dados $\alpha, \beta \in X$ com $\alpha < \beta$, então $[\alpha, \beta] \subset X$. Assim, sejam $\alpha, \beta \in f(I)$ com $\alpha < \beta$. Pela definição de $f(I)$, existem $a, b \in I$ tais que $\alpha = f(a)$ e $\beta = f(b)$. O Teorema do Valor Intermediário 16.3 implica que se

$k \in (\alpha, \beta)$ então existe $c \in I$ tal que $k = f(c) \in f(I)$. Logo, $[\alpha, \beta] \subset f(I)$, o que mostra que $f(I)$ é um intervalo. □

Exercícios 16.1

1. Seja $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$ para cada $x \in I$. Prove que existe um número $k > 0$ tal que $f(x) \geq k$ para todo $x \in I$.

2. Seja $I := [a, b]$ e sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções contínuas em I. Mostre que o conjunto $E := \{x \in I : f(x) = g(x)\}$ tem a propriedade de que se $(x_n) \subset E$ e $x_n \to \bar{x}$, então $\bar{x} \in E$.

3. Sejam $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x \in I$ existe $y \in I$ satisfazendo $|f(y)| \leq \frac{1}{2}|f(x)|$. Prove que existe um ponto $c \in I$ tal que $f(c) = 0$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$. Mostre que se $x_0 \in \mathbb{R}$ é tal que $f(x_0) < \beta$, então existe uma δ-vizinhança $U := V_\delta(x_0)$ de x_0 tal que $f(x) < \beta$ para todo $x \in U$.

5. Considere o polinômio $p(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, com $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ e $a_3 > 0$. Mostre que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \in \mathbb{N}$ e $n > N_0$, então $p(n) > 0$ e $p(-n) < 0$. Use esse fato para mostrar que p possui ao menos uma raiz em $\mathbb{R}$. Generalize esse resultado para qualquer polinômio de grau ímpar.

6. Mostre que o polinômio $p(x) := x^4 + 5x^3 - 7$ possui ao menos duas raízes reais.

7. Seja f contínua no intervalo $[0, 1]$ e tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe um ponto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$. [Dica: Considere $g(x) := f(x) - f(x + \frac{1}{2})$ no intervalo $[0, 1/2]$.]

8. (**Método da Bissecção para Localizar Raízes**) Sejam $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em I tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Vamos gerar por bissecção uma sequência de intervalos encaixados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$, com $I_k := [a_k, b_k]$ e $a_k, b_k \in I$ a serem definidos. Seja $I_1 := [a_1, b_1]$, onde $a_1 := a$, $b_1 := b$, e seja p_1 o ponto médio $p_1 := \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$. Se $f(p_1) = 0$ teremos encontrado uma raiz de $f(x) = 0$ e o processo termina. Se $f(p_1) \neq 0$, então ou $f(p_1) > 0$ ou $f(p_1) < 0$. Se $f(p_1) > 0$, então pomos $a_2 := a_1$ e $b_2 := p_1$, enquanto se $f(p_1) < 0$, então fazemos $a_2 := p_1$,

$b_2 := b_1$. Em qualquer dos casos, definimos $I_2 := [a_2, b_2]$: temos $I_2 \subset I_1$, $(b_2 - a_2) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ e $f(a_2) < 0 < f(b_2)$.

(a) Mostre por indução como definir os intervalos $I_n := [a_n, b_n]$ para $n \geq 2$, de modo que se $f(a_{n-1}) < 0 < f(b_{n-1})$, então $I_n \subset I_{n-1}$, $(b_n - a_n) = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$ e $f(a_n) < 0 < f(b_n)$; e se $f(a_{n-1})f(b_{n-1}) = 0$, então $I_n := I_{n-1}$.

(b) Caso não exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $p_{n_0} := \frac{1}{2}(a_{n_0} + b_{n_0})$ satisfaz $f(p_{n_0}) = 0$, então prove que existe $c \in I$ tal que $\lim a_n = \lim b_n = c$ e $f(c) = 0$.

(c) Defina as sequências (a_n) e (b_n) com a_n, b_n obtidos pelo método da bissecção, fazendo $a_n = b_n = p_{n_0}$ para $n > n_0$, caso exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(p_{n_0}) = 0$, onde p_{n_0} é definido como no item anterior. Mostre que dado $\varepsilon > 0$ existem a_n e b_n tais que $a_n \leq c$, $f(a_n) \leq 0$ e $c - a_n < \varepsilon$, e $b_n \geq c$, $f(b_n) \geq 0$ e $b_n - c < \varepsilon$. Conclua que o método da bissecção fornece um modo de encontrar aproximações para uma raiz da equação $f(x) = 0$ com erro arbitrariamente pequeno.

(d) Verifique que valem resultados totalmente análogos no caso em que $f(a) > 0 > f(b)$.

9. (a) A função $f(x) := (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$ tem cinco raízes no intervalo $[0, 7]$. Se o método da bissecção for aplicado nesse intervalo que raiz será localizada?

   (b) A mesma questão para $g(x) := (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ no intervalo $[0, 7]$.

10. Mostre que se $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua e tem apenas valores racionais, então f é constante.