Aula 23 – O Teorema de Taylor

Metas da aula: Estabelecer o Teorema de Taylor e apresentar suas aplicações em aproximações de funções, na investigação de extremos locais e no estudo de funções convexas, entre outras.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer o significado do Teorema de Taylor e suas aplicações em aproximações de funções, na investigação de extremos locais e no estudo de funções convexas, entre outras.

Introdução

Se I é um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em todos os pontos de I, então temos definida em I a função $f' : I \to \mathbb{R}$, derivada (primeira) de f. Se a função f' for diferenciável em um ponto $\bar{x} \in I$, então teremos definida a derivada de f' em $\bar{x}$, $(f')'(\bar{x})$, que denotamos simplesmente por $f''(\bar{x})$ e chamamos a **derivada segunda de f em $\bar{x}$**. Se f' também for diferenciável em todos os pontos de I, então teremos definida a função $f'' : I \to \mathbb{R}$, **derivada segunda de** f. Se f'' é diferenciável num ponto $\bar{x} \in I$, então existe $(f'')'(\bar{x})$ que denotamos por $f'''(\bar{x})$ ou $f^{(3)}(\bar{x})$, chamada **derivada terceira de f em $\bar{x}$**, e se f'' é diferenciável em todo ponto de I então teremos definida a função $f''' : I \to \mathbb{R}$, também denotada por $f^{(3)}$ e chamada **derivada terceira de** f. Desse modo podemos definir **a derivada n-ésima da função f em** $\bar{x} \in I$, $f^{(n)}(\bar{x})$, desde que tenhamos definida em todo ponto de I a derivada $(n-1)$-ésima de f, $f^{(n-1)}$, e que esta seja diferenciável em $\bar{x}$. Observe que admitimos que $\bar{x}$ seja um ponto extremo do intervalo I. Observe também que para que possamos definir $f^{(n)}(\bar{x})$ basta que tenhamos $f^{(n-1)}$ definida em $(\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \cap I$ para algum $\delta > 0$. A derivada n-ésima em $\bar{x}$, $f^{(n)}(\bar{x})$, também é chamada **derivada de ordem n de f em $\bar{x}$**.

Se a função f tem uma derivada n-ésima num ponto x_0, não é difícil obter um polinômio P_n de grau n tal que $P_n(x_0) = f(x_0)$ e $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 1, 2, \dots, n$. De fato, o polinômio

$$P_n(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \qquad (23.1)$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (23.2)$$

tem a propriedade de que ele e suas derivadas até a ordem n no ponto x_0 coincidem com a função f e suas derivadas até a ordem n quando avaliadas nesse mesmo ponto.

Esse polinômio P_n é chamado o **polinômio de Taylor de grau n para f em x_0** e seu estudo remonta ao matemático inglês Brook Taylor (1683–1731), embora a fórmula para o resto $R_n := f - P_n$ só tenha sido obtida muito mais tarde por Joseph-Louis Lagrange (1736–1813). A fórmula ou Teorema de Taylor (com resto de Lagrange) e suas aplicações constituem o tema desta aula que passamos a estudar em detalhes a seguir.

A fórmula de Taylor

Seja $I := [a, b]$, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b). Fixemos um ponto $x_0 \in I$. Dado um ponto qualquer $x \in I$, o Teorema do Valor Médio afirma que existe um ponto $\bar{x} = \bar{x}(x)$ no intervalo entre x_0 e x, i.e. $\bar{x} \in (\min\{x_0, x\}, \max\{x_0, x\})$, para o qual vale a equação

$$f(x) = f(x_0) + f'(\bar{x})(x - x_0). \tag{23.3}$$

Essa equação nos diz que o valor $f(x)$ pode ser aproximado pelo valor $f(x_0)$ e que ao fazermos essa aproximação estaremos cometendo um erro dado por $R_0(x) := f(x) - f(x_0) = f'(\bar{x})(x - x_0)$.

Para podermos estimar o erro $R_0(x)$ é preciso ter alguma informação sobre o comportamento da derivada $f'(\bar{x})$ para x num intervalo $I_\delta := (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I$, para algum $\delta > 0$. Por exemplo, se para algum $C > 0$ tivermos $|f'(\bar{x})| \leq C$ para $x \in I_\delta$, então teremos $|R_0(x)| \leq C|x - x_0|$ para $x \in I_\delta$.

Em particular, se existe $f'(x_0)$, então temos que $|f'(\bar{x})|$ é limitado para $x \in I_\delta$, para $\delta > 0$ suficientemente pequeno, já que de (23.3) obtemos

$$\lim_{x \to x_0} f'(\bar{x}(x)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{23.4}$$

Mais ainda, nesse caso é possível escrever (23.3) na forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x) \qquad \text{para } x \in I, \tag{23.5}$$

onde $r_1(x)$ satisfaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_1(x)}{x - x_0} = 0, \tag{23.6}$$

bastando para isso tomar

$$r_1(x) := (f'(\bar{x}(x)) - f(x_0))(x - x_0).$$

Observe também que a equação (23.5) nos dá

$$r_1(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Segue daí que $r_1(x)$ é diferenciável em x_0 e

$$r_1(x_0) = r_1'(x_0) = 0. \tag{23.7}$$

O seguinte resultado mostra, em particular, que (23.6) e (23.7) são na verdade equivalentes, uma vez que $r_1(x)$ é diferenciável em x_0, e estende esse fato a derivadas de ordens mais altas.

Lema 23.1

Seja $r : I := [a, b] \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciável em $x_0 \in I$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i)
$$r(x_0) = r'(x_0) = \cdot = r^{(n)}(x_0) = 0. \tag{23.8}$$

(ii)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \tag{23.9}$$

Prova: (i)⇒(ii) Vamos usar Indução Matemática. Mostremos primeiro que a implicação vale para $n = 1$. Suponhamos então que $r(x_0) = r'(x_0) = 0$. Usando essas hipóteses e a definição de derivada obtemos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = r'(x_0) = 0,$$

o que prova que a implicação vale para $n = 1$. Suponhamos que a implicação valha para $n = k$. Temos que mostrar que nesse caso ela vale também para $n = k + 1$ e, para isso, assumimos agora que $r(x_0) = \cdots = r^{(k)}(x_0) = r^{(k+1)}(x_0)$. A função $\phi := r'$ satisfaz $\phi(x_0) = \phi'(x_0) = \cdots = \phi^{(k)}(x_0) = 0$. Pela hipótese de indução temos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \frac{\phi(x)}{(x - x_0)^k} = 0.$$

Agora, pelo Teorema do Valor Médio, dado $x \in I$, existe $\bar{x} = \bar{x}(x)$ no intervalo aberto I_x entre x_0 e x tal que $r(x) = r'(\bar{x})(x - x_0)$. Observe que $\lim_{x \to x_0} \bar{x}(x) = x_0$ já que $|\bar{x} - x_0| \le |x - x_0|$. Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{k+1}} &= \lim_{x \to x_0} \frac{r'(\bar{x})(x - x_0)}{(x - x_0)^{k+1}} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{r'(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)^k} \frac{(\bar{x} - x_0)^k}{(x - x_0)^k} = 0, \end{aligned}$$

já que $\left|(\bar{x} - x_0)^k/(x - x_0)^k\right| \leq 1$ e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r'(\bar{x})}{(\bar{x} - x_0)^k} = 0 \qquad \text{(por quê?)},$$

o que conclui a prova por indução.

(ii)⇒(i) Provaremos também essa implicação usando Indução Matemática. Vejamos incialmente o caso $n = 1$, para o qual supomos que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0.$$

Como $r(x)$ é contínua em x_0, já que é diferenciável nesse ponto, então

$$r(x_0) = \lim_{x \to x_0} r(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0}(x - x_0) = 0.$$

Por outro lado,

$$r'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0,$$

o que prova que a implicação vale para $n = 1$. Suponhamos agora que a implicação seja válida para $n = k$; vamos provar que então ela também vale para $n = k + 1$. Para isso assumimos que $r(x)$ é $(k + 1)$ vezes diferenciável em x_0 e

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = 0.$$

Como $r(x)$ satisfaz

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^k} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{k+1}}(x - x_0) = 0,$$

segue da hipótese de indução que $r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(k)}(x_0) = 0$.

Consideremos a função $\varphi(x) := r(x) - \dfrac{1}{(k+1)!} r^{(k+1)}(x_0)(x - x_0)^{k+1}$ para $x \in I$. Verificamos facilmente que

$$\varphi(x_0) = \varphi'(x_0) = \cdots = \varphi^{(k+1)}(x_0) = 0.$$

Como já provamos que (i) implica (ii), deduzimos que

$$0 = \lim_{x \to x_0} \frac{\varphi(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{r(x)}{(x - x_0)^{k+1}} \right) - r^{(k+1)}(x_0),$$

ou seja,

$$r^{(k+1)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^{k+1}} = 0,$$

o que conclui a prova da implicação (ii)$\Rightarrow$(i).

$\square$

O Teorema de Taylor que veremos a seguir é um refinamento do Teorema do Valor Médio para o caso em que existam derivadas de ordens maiores do que 1; daí se pode perceber sua fundamental importância. Recordemos a definição de $P_n(x)$ em (23.1). Adotamos a convenção de que $f^{(0)} := f$.

Teorema 23.1 (Teorema de Taylor)
Seja $n \in \mathbb{N}$, $I := [a, b]$, e $f : I \to \mathbb{R}$ tal que f, f',..., $f^{(n-1)}$ são contínuas em I e $f^{(n)}$ existe em (a, b). Fixemos $x_0 \in I$. Então:

(A) Para todo $x \in I$ existe $\bar{x}$ entre x_0 e x tal que

$$f(x) = P_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_0)^n. \qquad (23.10)$$

(B) Se existe $f^{(n)}(x_0)$, podemos escrever

$$f(x) = P_n(x) + r_n(x), \qquad (23.11)$$

onde $r_n(x)$ satisfaz

$$\lim_{x\to x_0} \frac{r_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \qquad (23.12)$$

Em particular,

$$\lim_{x\to x_0} f^{(n)}(\bar{x}) = f^{(n)}(x_0). \qquad (23.13)$$

Além disso, o polinômio $P_n(x)$ é o único polinômio $p(x)$ de grau $\leq n$ tal que $f(x) = p(x) + r(x)$, onde $r(x)$ satisfaz $\lim_{x\to x_0} \dfrac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0$.

Prova: (A) Fixemos x e definamos o número M por

$$f(x) = P_{n-1}(x) + M(x - x_0)^n. \qquad (23.14)$$

Temos que mostrar que $n!M = f^{(n)}(\bar{x})$ para algum $\bar{x}$ entre x_0 e x. Consideremos a função

$$g(t) := f(t) - P_{n-1}(t) - M(t - x_0) \qquad a \leq t \leq b. \qquad (23.15)$$

Por (23.1) e (23.5) temos

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M \qquad a < t < b. \qquad (23.16)$$

Portanto, a prova estará completa se pudermos mostrar que $g^{(n)}(\bar{x}) = 0$ para algum $\bar{x}$ entre x_0 e x.

Como $P_{n-1}^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ para $k = 0, \ldots, n-1$, temos

$$g(x_0) = g'(x_0) = \cdots = g^{(n-1)}(x_0) = 0. \tag{23.17}$$

A definição de M mostra que $g(x) = 0$, de modo que pelo Teorema de Rolle $g'(\bar{x}_1) = 0$ para algum $\bar{x}_1$ entre x_0 e x. Como $g'(x_0) = 0$, concluímos da mesma forma que $g''(\bar{x}_2) = 0$ para algum $\bar{x}_2$ entre x_0 e $\bar{x}_1$. Após iterarmos esse procedimento n vezes, chegamos à conclusão que $g^{(n)}(\bar{x}_n) = 0$ para algum $\bar{x}_n$ entre x_0 e $\bar{x}_{n-1}$. Tomando $\bar{x} = \bar{x}_n$ temos o desejado ponto entre x_0 e x.

(B) Definamos $r_n(x)$ pela equação (23.11). Então $r_n(x)$ é n vezes diferenciável em x_0 e

$$r_n(x_0) = r_n'(x_0) = \cdots = r_n^{(n)}(x_0) = 0.$$

Logo, pelo Lema 23.1 temos (23.12). De (A) podemos escrever

$$r_n(x) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(\bar{x}) - f^{(n)}(x_0))(x - x_0)^n.$$

Dividindo essa equação, passando ao limite quando $x \to x_0$ e aplicando (23.12), obtemos (23.13).

Suponhamos agora que $p(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$ e $f(x) = p(x) + r(x)$, onde $r(x)$ satisfaz $\lim_{x \to x_0} \dfrac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0$. Observe que sempre é possível escrever um tal polinômio na forma $p(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_0$. O Lema 23.1 implica que $r(x_0) = r'(x_0) = \cdots = r^{(n)}(x_0) = 0$. Logo, $f^{(k)}(x_0) = p^{(k)}(x_0)$ o que implica que $a_k = \dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)$. Portanto, $p(x) = P_n(x)$.

□

Exemplos 23.1

(a) (Regra de L'Hôpital para derivadas de ordem n) Sejam $I := [a, b]$ e $f, g : I \to \mathbb{R}$ n vezes diferenciáveis no ponto $x_0 \in I$ com derivadas até ordem $n - 1$ nulas em x_0. Se $g^{(n)}(x_0) \neq 0$ então

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}. \tag{23.18}$$

De fato, pelo Teorema de Taylor 23.1(B), temos

$$f(x) = (x - x_0)^n \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n^f(x)}{(x - x_0)^n} \right)$$

e

$$g(x) = (x-x_0)^n \left(\frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{r_n^g(x)}{(x-x_0)^n} \right)$$

com

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r_n^f(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{r_n^g(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \dfrac{r_n^f(x)}{(x-x_0)^n}}{\dfrac{g^{(n)}(x_0)}{n!} + \dfrac{r_n^g(x)}{(x-x_0)^n}} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

(b) A função definida por $f(x) := e^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$ e $f(0) := 0$ satisfaz $f^{(k)}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, o n-ésimo polinômio de Taylor para f em 0 é $P_n(x) \equiv 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, pelo Teorema do Valor Médio aplicado repetidamente a f e às suas derivadas, basta mostrar que existem os limites $\lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x)$ e que esses são iguais a 0. Com efeito, pelo Teorema do Valor Médio temos $f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0) = f^{(k)}(\bar{x})x$, para algum $\bar{x}$ entre 0 e x. Como $\bar{x} \to 0$ quando $x \to 0$, vemos que

$$\lim_{x \to 0} f^{(k)}(x) = \lim_{x \to 0} f^{(k)}(\bar{x}) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(0)}{x} = f^{(k)}(0),$$

onde também usamos a definição de derivada. Agora, usando seus conhecimentos de Cálculo, você poderá verificar que para $x \neq 0$ temos

$$f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x})e^{-1/x^2},$$

onde $p_k(y)$ é um polinômio de grau $2k$. Portanto, a afirmação estará provada se mostrarmos que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^m} = 0. \qquad (23.19)$$

Claramente, nesse caso particular basta mostrar (por quê?)

$$\lim_{x \to 0+} \frac{e^{-1/x^2}}{x^m} = 0 \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Como $1/x \to \infty$ quando $x \to 0+$ e $1/y \to 0$ quando $y \to \infty$, isso é equivalente a mostrar que

$$\lim_{y \to \infty} y^m e^{-y^2} = 0 \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{N}. \qquad (23.20)$$

Agora, das desigualdades $y < 1 + y \leq e^y$, obtemos $y^m < e^{my}$. Assim, para $y > 0$ temos

$$y^m e^{-y^2} < e^{-y^2+my} = e^{-(y-m/2)^2-m^2} = e^{-m^2}e^{-(y-m/2)^2} \to 0 \quad \text{quando } y \to \infty,$$

o que prova (23.20) e por conseguinte (23.19).

(c) Vamos aproximar o número e com erro menor que 10^{-5}.

Consideremos a função $f(x) := e^x$ e tomemos $x_0 = 0$ e $x = 1$ na fórmula de Taylor (23.10). Precisamos determinar n tal que $|R_n(1)| < 10^{-5}$ onde

$$R_n(x) := f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^n,$$

por (23.10). Para isso usaremos o fato de que $f'(x) = e^x$ e a limitação inicial $e^x \leq 3$ para $0 \leq x \leq 1$.

Claramente, de $f'(x) = f(x) = e^x$ segue que $f^{(k)}(x) = e^x$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, $f^{(k)}(0) = 1$ para 'todo $k \in \mathbb{N}$. Conseqüentemente o n-ésimo polinômio de Taylor é dado por

$$P_n(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

e o resto para $x = 1$ é $R_n(1) = e^{\bar{x}}/(n+1)!$ para algum $\bar{x}$ satisfazendo $0 < \bar{x} < 1$. Como $e^{\bar{x}} < 3$, devemos buscar um valor de n tal que $3/(n+1)! < 10^{-5}$. Um cálculo revela que $9! = 362880 > 3 \times 10^5$ de modo que o valor $n = 8$ nos proverá a desejada acuracidade. Mais ainda, como $8! = 40320$ nenhum valor menor de n será satisfatório. Assim, obtemos

$$e \approx P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2 \cdot 71828$$

com erro menor do que 10^{-5}.

O Teorema de Taylor pode ser usado para se obter desigualdades como mostram os dois exemplos a seguir.

Exemplos 23.2

(a) $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}|x|^3$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}. \tag{23.21}$$

Apliquemos o Teorema de Taylor 23.1(A) à função $f(x) := \cos x$ em $x_0 = 0$ e $n = 3$ para obter

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x),$$

com

$$R_2(x) = \frac{f'''(\bar{x})}{3!}x^3 = \frac{\operatorname{sen}\bar{x}}{6}x^3,$$

para algum $\bar{x}$ entre 0 e x. A desigualdade $\cos x \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}|x|^3$ segue imediatamente da fórmula para $R_2(x)$ e do fato que $|\operatorname{sen} y| \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Quanto à desigualdade $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ argumentamos do seguinte modo. Se $0 \leq x \leq \pi$, então $0 \leq \bar{x} \leq \pi$. Como $\bar{x}$ e x^3 são positivos, temos $R_2(x) \geq 0$. Também, se $-\pi \leq x \leq 0$, então $-\pi \leq \bar{x} \leq 0$. Como $\operatorname{sen}\bar{x}$ e x^3 são ambos negativos, de novo temos $R_2(x) \geq 0$. Portanto, temos $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ para $|x| \leq \pi$. Se $|x| \geq \pi$, então $1 - \frac{1}{2}x^2 < -3 \leq \cos x$ e a desigualdade vale trivialmente.

Da desigualdade demonstrada segue que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{6}|x|.$$

Como o limite do último membro da desigualdade é igual ao primeiro membro, isto é, $\frac{1}{2}$, (23.21) segue do Teorema 13.4. O limite em (23.21) também pode ser obtido diretamente da Regra de L'Hôpital no Exemplo 23.1(a).

(b) Para todo $k \in \mathbb{N}$ e todo $x > 0$ temos

$$x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots - \frac{1}{2k}x^{2k} < \log(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}. \quad (23.22)$$

Usando o fato de que a derivada de $\log(1+x)$ é $1/(1+x)$ para $x > 0$, vemos que o n-ésimo polinômio de Taylor para $\log(1+x)$ com $x_0 = 0$ é

$$P_n(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n$$

e o resto é dado por

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n/(n+1)}{(1+\bar{x})^{n+1}}x^{n+1}$$

para algum $\bar{x}$ satisfazendo $0 < \bar{x} < x$. Assim, para $x > 0$, se n é par, isto é $n = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então temos $R_{2k}(x) > 0$; se n é ímpar, $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$, então $R_{2k+1}(x) < 0$. A desigualdade (23.22) segue imediatamente dessas considerações.

Extremos Locais

Como foi visto, o Teste da Primeira Derivada 22.7 ajuda a determinar se um ponto onde a derivada de f se anula é um máximo local ou um mínimo local, ou simplesmente não é um extremo local. Se existem derivadas de ordens mais altas, essas também podem ser usadas para essa determinação.

Teorema 23.2
Seja I um intervalo, x_0 um ponto interior de I e seja $n \geq 2$. Suponhamos que as derivadas $f', f'', \dots, f^{(n)}$ existam e sejam contínuas numa vizinhança de x_0 e $f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, mas $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

(i) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então f tem um mínimo local em x_0.

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então f tem um máximo local em x_0.

(iii) Se n é ímpar, então f não tem um extremo local em x_0.

Prova: Pelo Teorema de Taylor 23.1(A) temos para $x \in I$

$$f(x) = P_{n-1}(x) + R_{n-1}(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!}(x - x_0)^n,$$

onde $\bar{x}$ é um ponto entre x_0 e x. Como $f^{(n)}$ é contínua, se $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, então existe um intervalo aberto U contendo x_0 tal que $f^{(n)}(x)$ tem o mesmo sinal que $f^{(n)}(x_0)$ para $x \in U$. Se $x \in U$, então o ponto $\bar{x}$ também pertence a U e conseqüentemente $f^{(n)}(\bar{x})$ e $f^{(n)}(x_0)$ têm o mesmo sinal.

(i) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) > 0$, então para $x \in U$ temos $f^{(n)}(\bar{x}) > 0$ e $(x - x_0)^n \leq 0$ de modo que $R_{n-1}(x) \geq 0$. Logo, $f(x) \geq f(x_0)$ para $x \in U$, e portanto f tem um mínimo local em x_0.

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(x_0) < 0$, então segue que $R_{n-1}(x) \leq 0$ para $x \in U$, de modo que $f(x) \leq f(x_0)$ para $x \in U$. Portanto, f tem um máximo local em x_0.

(iii) Se n é ímpar, então $(x - x_0)^n$ é positivo se $x > x_0$ e negativo se $x < x_0$. Conseqüentemente, se $x \in U$, então $R_{n-1}(x)$ terá sinais opostos à esquerda e à direita de x_0. Logo, f não pode ter extremo local em x_0.

$\square$

Funções Convexas

A noção de convexidade desempenha um papel fundamental na Matemática assim como em outras ciências. Em particular, em problemas de otimização que surgem em áreas diversas como nas várias modalidades de engenharia, economia, etc.

Definição 23.1
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é **convexa** em I se para quaisquer pontos $z, w \in I$ e todo θ satisfazendo $0 \le \theta \le 1$, temos

$$f((1-\theta)z + \theta w) \le (1-\theta)f(z) + \theta f(w). \tag{23.23}$$

Observe que se $z < w$, então quando θ varia de 0 a 1, o ponto $(1-\theta)z + \theta w$ percorre o intervalo de z a w. Assim, se f é convexa em I e se $z, w \in I$, então o segmento de reta unindo os pontos $(z, f(z))$ e $(w, f(w))$, pertencentes ao gráfico de f, se situa acima do gráfico de f (veja Figura **23.1**).

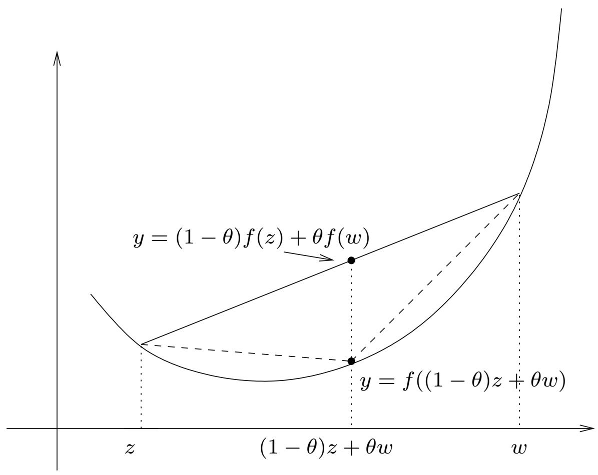

Figura **23.1**: Uma função convexa.

Sejam $A := (z, f(z))$, $B := (w, f(w))$, $C = \big((1-\theta)z + \theta w, f((1-\theta)z + \theta w)\big)$, AB o segmento de reta ligando A a B, AC e CB os segmentos de reta ligando A a C e C a B, respectivamente, e m_{AB}, m_{AC} e m_{CB} as inclinações das retas contendo AB, AC e CB, respectivamente. Observe que

$$m_{AB} = \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, \quad m_{AC} = \frac{f((1-\theta)z + \theta w) - f(z)}{\theta(w - z)},$$
$$m_{CB} = \frac{f((1-\theta)z + \theta w) - f(w)}{(1-\theta)(z - w)}.$$

Assim, somando $-f(z)$ a cada membro de (23.23) e em seguida dividindo ambos os membros por $\theta(w - z)$ obtemos

$$m_{AC} \le m_{AB}.$$

De modo semelhante, obtemos $m_{AB} \leq m_{CB}$, donde resultam as desigualdades

$$m_{AC} \leq m_{AB} \leq m_{CB}. \tag{23.24}$$

Teorema 23.3
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é convexa no intervalo I, então existem as derivadas laterais $f'^{+}(x_0)$ e $f'^{-}(x_0)$ para todo $x_0 \in I$. Em particular, f é contínua em todo ponto interior de I.

Prova: Sejam $x_1, x_2 \in I$ satisfazendo: (i) $x_1 < x_2 < x_0$ ou (ii) $x_0 < x_2 < x_1$. Observemos que a reta contendo o segmento ligando os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_0, f(x_0))$ pode ser descrita pela equação

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \tag{23.25}$$

Em ambos os casos (i) $x_1 < x_2 < x_0$ e (ii) $x_0 < x_2 < x_1$, o ponto x_2 satisfaz $x_2 = (1-\theta)x_0 + \theta x_1$ para algum θ com $0 \leq \theta \leq 1$. Logo, o ponto $(x_2, f(x_2))$, pertencente ao gráfico de f, fica acima do ponto (x_2, y_2) pertencente à reta ligando $(x_0, f(x_0))$ a $(x_1, f(x_1))$. Usando (23.25), isso nos dá

$$f(x_2) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0). \tag{23.26}$$

Portanto, no caso (i), por (23.26) temos

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \geq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \tag{23.27}$$

ao passo que no caso (ii) temos

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}. \tag{23.28}$$

Então a função $g(x) = (f(x) - f(x_0))/(x - x_0)$ para $x \in I$ com $x \neq x_0$ é crescente em ambos os intervalos $I_- := (-\infty, x_0) \cap I$ e $I_+ := (x_0, \infty) \cap I$. Além disso, usando (23.24) deduzimos que g é limitada superiormente em I_- e inferiormente em I_+ (por quê?). Concluímos então que existem os limites laterais $\lim_{x \to x_0-} g(x)$ e $\lim_{x \to x_0+} g(x)$ que, por definição, são as derivadas laterais $f'^{-}(x_0)$ e $f'^{+}(x_0)$.

O fato de que f é contínua em todo ponto interior de I decorre do Teorema 20.3.

□

Quando f é duas vezes diferenciável a convexidade pode ser caracterizada de modo bastante simples como mostra o resultado seguinte.

Teorema 23.4
Seja I um intervalo aberto e suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável em todo ponto de I. Então f é convexa em I se, e somente se, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.

Prova: ($\Rightarrow$) Pelo Teorema de Taylor 23.1(B), dado $a \in I$ e $h \in \mathbb{R}$ tal que $a \pm h \in I$, temos

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r(h),$$
$$f(a-h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r(-h),$$

onde $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0$. Somando essas equações e dividindo por h^2, obtemos

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \frac{r(h)}{h^2} + \frac{r(-h)}{h^2},$$

donde segue que

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}. \tag{23.29}$$

Se f é convexa, como $a = \frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)$, temos

$$f(a) = f(\frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)) \leq \frac{1}{2}f(a+h) + \frac{1}{2}f(a-h).$$

Portanto, $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \geq 0$. Como $h^2 > 0$ para todo $h \neq 0$, vemos que o limite em (23.29) deve ser não-negativo. Logo, $f''(a) \geq 0$ para todo $a \in I$.

($\Leftarrow$) Sejam $z, w \in I$, $0 < \theta < 1$ e ponhamos $x_0 := (1-\theta)z + \theta w$. Pelo Teorema de Taylor 23.1(A), temos

$$f(z) = f(x_0) + f'(x_0)(z - x_0) + \frac{1}{2}f''(\bar{x}_1)(z - x_0)^2, \tag{23.30}$$
$$f(w) = f(x_0) + f''(x_0)(w - x_0) + \frac{1}{2}f''(\bar{x}_2)(w - x_0)^2, \tag{23.31}$$

para algum $\bar{x}_1$ entre x_0 e z, e algum $\bar{x}_2$ entre x_0 e w. Multiplicando (23.30) por $(1-\theta)$ e (23.31) por θ, e em seguida somando as duas equações, obtemos

$$\begin{aligned}(1-\theta)f(z) + \theta f(w) &= f(x_0) + \frac{(1-\theta)}{2}f''(\bar{x}_1)(z - x_0)^2 + \frac{\theta}{2}f''(\bar{x}_2)(w - x_0)^2 \\ &\geq f(x_0) = f((1-\theta)z + \theta w),\end{aligned}$$

já que

$$\frac{(1-\theta)}{2}f''(\bar{x}_1)(z - x_0)^2 + \frac{\theta}{2}f''(\bar{x}_2)(w - x_0)^2 \geq 0$$

pelo fato de que f'' é não-negativa. Logo, f é convexa em I.

$\square$

Exercícios 23.1

1. Seja $f(x) := \operatorname{sen} ax$ para $x \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Encontre $f^{(n)}(x)$ para $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Seja $g(x) := x^2|x|$ para $x \in \mathbb{R}$. Encontre $g'(x)$ e $g''(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, e $g'''(x)$ para $x \neq 0$. Mostre que não existe $g'''(0)$.

3. Use Indução para provar a regra de Leibniz para a n-ésima derivada do produto
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$$

4. Mostre que se $x > 0$, então $1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \leq \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{1}{2}x$.

5. Se $x > 0$ mostre que $|(1+x)^{1/3} - (1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2)| \leq (5/81)x^3$. Use essa desigualdade para aproximar $\sqrt{1.2}$ e $\sqrt{2}$.

6. Se $f(x) := e^x$ mostre que o termo que dá o resto no Teorema de Taylor 23.1(A) converge a 0 quando $n \to \infty$ para cada x e x_0 fixados.

7. Calcule e com sete casas decimais corretas.

8. Determine se $x = 0$ é ou não um extremo local das seguintes funções:

   (a) $f(x) := x^3 + 2$;

   (b) $f(x) := x^4 + 1$;

   (c) $f(x) := \operatorname{sen} x - x$;

   (d) $f(x) := \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$.

9. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e f duas vezes diferenciável e convexa em I. Se $x_0 \in I$, mostre que nenhum ponto do gráfico de f está abaixo da reta tangente ao gráfico em $(x_0, f(x_0))$.