Matemática Discreta – EP12 – 2007/2

Observações: Caro aluno, este é o primeiro EP de uma série especial. Ele contém uma seleção de questões de *Combinatória de Contagem* que foram cobradas nas APs de 2005 e 2006. Meu objetivo, ao formular este tipo de EP, é dar a você uma amostra do grau de dificuldade que você enfretará ao resolver as questões da(s) próxima(s) AP(s). Ele contém:

- uma dica de como estudar para as avaliações, usando este EP;
- uma seleção das questões que foram cobradas nas AP1 e AP2 de 2005 e 2006;
- um gabarito com as soluções utilizadas como parâmetro para a correção.

Como estudar:

1. Leia o enunciado da questão cuidadosamente, separando, de um lado, os dados e, do outro, aquilo que foi perguntado;
2. Faça uma lista dos conceitos que, na sua opinião podem ser utilizados na solução da questão (se necessário, revise estes conceitos);
3. Elabore uma solução para a questão e escreva-a, tentando atingir o máximo de clareza;
4. Confira a sua *resposta* com a do gabarito;
5. *Se estiver correta*, leia atentamente a solução do gabarito e confronte-a com a solução que você apresentou (melhore sua redação, se achar necessário);

   Se não, não leia a solução do gabarito mas pense novamente na questão e tente elaborar uma solução que leve ao resultado que, agora, você já conhece;
6. Procure os tutores e colegas da disciplina para trocar informações, se familiarizar com outras idíeas e superar suas dificuldades.

Questões selecionadas:

1. **(2005/1)** Determine quantos números de quatro algarismos:
   (a) (0,5) existem, no total?
   (b) (0,5) têm todos os algarismos diferentes?
   (c) (0,5) não têm algarismos iguais a $3, 5$ ou 6?
   (d) (0,5) têm todos os algarismos diferentes e não têm algarismos iguais a $3, 5$ ou 6.

2. **(2005/1)** (2,5) Um químico possui 10 tipos diferentes de substâncias. De quantos modos possíveis ele poderá formar misturas juntando exatamente 6 dessas substâncias se, entre as dez, duas somente não podem ser misturadas porque produzem substância explosiva?

3. **(2005/1)** (2,0) Um propagandista tem 9 amostras distintas para distribuir para 3 comerciantes, A, B e C. De quantos modos poderá fazer a distribuição, dando 4 amostras para A, 3 amostras para B e 2 amostras para C?

---

4. **(2005/2)** (1,5) Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3600\}$. Quantos elementos de A não são múltiplos nem de 3 e nem de 5?

---

5. **(2005/2)** (2,0) Quantos anagramas com letras diferentes podem ser formados por 2 vogais e 3 consoantes, escolhidas dentre 18 consoantes e 5 vogais?

---

6. **(2005/2)** Considere o experimento que consiste em lançar uma moeda 10 vezes e anotar o resultado do lançamento.
   (a) (1,0) Determine o número de elementos do espaço amostral.
   (b) (1,0) Determine o número de elementos do evento: *o número de caras é igual ao número de coroas.*

---

7. **(2006/1)** (2,5) Uma agência matrimonial tem em seu catálogo 12 mulheres e 10 homens. Destes, 3 mulheres e 2 homens são irmãos, todos filhos do mesmo pai e da mesma mãe. Os restantes não possuem qualquer laço de parentesco. Quantos encontros que podem resultar em casamento podem ser marcados pela agência?

---

8. **(2006/1)** (2,5) Quantos números pertencentes ao conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 \leq x \leq 3.600\}$ são divisíveis por 3 ou 5 ou 7?

---

9. **(2006/1)** (2,5) Quantos anagramas da palavra COMBINAÇÕES começam por consoante e terminam por vogal? *Considere que* C *e* Ç *são consoantes distintas e que* O *e* Õ *são vogais distintas.*

---

10. **(2006/1)** (2,5) Sabe-se que um time de futebol, dentre 5 times relacionados, jogou 13 partidas em um campeonato, obtendo 6 vitórias, 5 empates e 2 derrotas. Num concurso, será premiada a pessoa que adivinhar qual foi o time e em que ordem os resultados foram obtidos. Quantos são os possíveis "chutes" que um competidor pode fazer?

---

11. **(2006/2)** (2,5) Um torneio de vôlei de praia é disputado por 11 duplas, em dois turnos. Em cada turno, cada dupla jogou 1 partida contra cada uma das outras duplas. No final, 2 duplas ficaram empatadas e mais uma partida teve que ser jogada. Quantas partidas foram disputadas, no total?

---

12. **(2006/2)** Quantos anagramas podemos formar com a palavra $PROBLEMA$:
    (a) (1,0) que têm as letras P, R e O sempre juntas?
    (b) (1,0) que têm as consoantes P, R, B, L, M sempre juntas bem como as vogais O, E, A sempre juntas?

---

13. **(2006/2)** De quantas maneiras trinta moedas de mesmo valor (e indistinguíveis) podem ser colocadas consecutivamente em uma linha reta:
   (a) (1,0) De modo que 10 caras e 20 coroas fiquem para cima.
   (b) (1,0) De modo que 15 caras e 15 coroas fiquem para cima mas as 15 caras ocorram juntas.

---

14. **(2006/2)** (2,0) Dado um conjunto de sete pontos de uma circunferência, quantos polígonos existem cujos vértices pertencem ao conjunto?

Solucões das questões selecionadas:

---

1. Cada número de 4 algarismos é uma configuração do tipo $a_1a_2a_3a_4$, onde cada a_i, $1 \leq i \leq 4$ é um dos dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ e a_1 é um dígito distinto do dígito 0.
   (a) Para formar uma tal configuração devemos tomar quatro decisões:

   d_1 : escolher um dígito distinto de 0 para a primeira posição,
   d_2 : escolher um dígito qualquer para a segunda posição,
   d_3 : escolher um dígito qualquer para a terceira posição,
   d_4 : escolher um dígito qualquer para a quarta posição.

   Assim, pelo PM, temos um total de $9 \times 10 \times 10 \times 10$ números.
   (b) Para formar uma tal configuração devemos tomar quatro decisões:

   d_1 : escolher um dígito distinto de 0 para a primeira posição,
   d_2 : escolher um dígito distinto do anterior para a segunda posição,
   d_3 : escolher um dígito distinto dos anteriores para a terceira posição,
   d_4 : escolher um dígito distinto dos anteriores para a quarta posição.

   Como na segunda decisão podemos escolher o dígito 0, que não foi escolhido na primeira decisão, pelo PM, temos um total de $9 \times 9 \times 8 \times 7$ números. Ou seja, o primeiro algarismo não pode ser 0, o segundo algarismo pode ser um qualquer mas diferente do primeiro, o terceiro algarismo pode ser um qualquer mas diferente dos outros dois e, finalmente, o quarto algarismo pode ser um qualquer mas diferente dos outros três.
   (c) Para formar uma tal configuração devemos tomar quatro decisões:

   d_1 : escolher um dígito distinto de $0, 3, 5, 6$ para a primeira posição,
   d_2 : escolher um dígito distinto de $3, 5, 6$ para a segunda posição,
   d_3 : escolher um dígito distinto de $3, 5, 6$ para a terceira posição,
   d_4 : escolher um dígito distinto de $3, 5, 6$ para a quarta posição.

   Assim, pelo PM, temos um total de $6 \times 7 \times 7 \times 7$ números.
   (d) Para formar uma tal configuração devemos tomar quatro decisões:

   d_1 : escolher um dígito distinto de $0, 3, 5, 6$ para a primeira posição,
   d_2 : escolher um dígito distinto de $3, 5, 6$ e do anterior para a segunda posição,
   d_3 : escolher um dígito distinto de $3, 5, 6$ e dos anteriores para a terceira posição,
   d_4 : escolher um dígito distinto de $3, 5, 6$ e dos anteriores para a quarta posição.

   Os algarismos disponíveis são $0, 1, 2, 4, 7, 8$ e 9, num total de sete possibilidades. Como na segunda decisão podemos escolher o dígito 0, que não foi escolhido na primeira decisão, pelo PM, temos um total de $6 \times 6 \times 5 \times 4$ números. Ou seja, o primeiro algarismo não pode ser 0, o segundo algarismo pode ser um qualquer diferente do primeiro, o terceiro algarismo pode ser um qualquer diferente dos outros dois e, finalmente, o quarto algarismo pode ser um qualquer diferente dos outros três.

2. **Solução 1**: Escolhendo 6 substâncias num total de 10, temos $C(10,6)$ possíveis misturas, incluindo as explosivas. As misturas explosivas são da forma

$$A, B, -, -, -, -,$$

onde A e B são as substâncias explosivas e as lacunas devem ser preenchidas com quaisquer das outras 8 substâncias. Assim, o total de misturas explosivas é dado por $C(8,4)$. Logo, temos um total de $C(10,6) - C(8,4)$ misturas seguras.

Solução 2: Temos dez substâncias $A, B, C, \ldots, J$, sendo A e B as que não podem ser misturadas. Assim, podemos formar $C(8,6)$ misturas sem A nem B, $C(8,5)$ misturas que não tem A e $C(8,5)$ que não tem B. Isso fornece um total de $C(8,6) + 2C(8,5)$ misturas seguras.

---

3. Para formar uma distribuição devemos tomar três decisões:

$$\begin{array}{lcl} d_1 & : & \text{escolher 4 amostras, dentre as 9 existentes, para } A, \\ d_2 & : & \text{escolher 3 amostras, dentre as 5 restantes, para } B, \\ d_3 & : & \text{escolher 2 amostras dentre as 2 restantes para } C. \end{array}$$

Como, em cada decisão, a ordem de escolha das amostras não é relevante, pelo PM, o número total de distribuições é dado por: $C(9,4) \times C(5,3) \times C(2,2) = \dfrac{9!}{4!5!} \times \dfrac{5!}{3!2!} \dfrac{2!}{2!0!} = 126 \times 10 \times 1 = 1260$.

---

4. Considere o conjunto A dado acima, bem como os seguintes conjuntos:

$$B = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 3\},$$

e

$$C = \{x \in A : x \text{ é múltiplo de } 5\}.$$

Queremos determinar o número de elementos do conjunto $B^c \cap C^c$. Observe que este é dado por:

$$n(B^c \cap C^c) = n((B \cup C)^c) = n(A) - n(B \cup C).$$

Observe também que, pelo PIE, temos:

$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C).$$

Assim, resolvemos o problema determinando $n(A), n(B), n(C)$ e $n(B \cap C)$.

O conjunto A tem 3600 elementos. Destes, $3600 \div 3 = 1200$ são múltiplos de 3 e $3600 \div 5 = 720$ são múltiplos de 5. Um número é múltiplo de 3 e de 5 se, e somente se, ele é múltiplo de 15. Assim, o conjunto $B \cap C$ tem $3600 \div 15 = 240$ elementos.

Substituindo os valores obtidos acima, temos:

$$\begin{array}{rcl} n(B^c \cap C^c) & = & n(A) - n(B) - n(C) + n(B \cap C) \\ & = & 3600 - 1200 - 720 + 240 \\ & = & 1920. \end{array}$$

---

5. Para formar um anagrama satisfazendo as condições requeridas, devemos tomar três decisões:

$$\begin{array}{lcl} d_1 & : & \text{escolher 2 vogais dentre as 5 disponíveis,} \\ d_2 & : & \text{escolher 3 consoantes dentre as 18 disponíveis,} \\ d_3 & : & \text{formar um anagrama com as 5 letras (vogais e consoantes) escolhidas.} \end{array}$$

A primeira decisão pode ser tomada de $C(5,2)$ maneiras diferentes. A segunda, de $C(18,3)$ maneiras diferentes. E, finalmente, a terceira de 5! maneira diferentes. Assim, temos um total de $C(5,2) \times C(18,3) \times 5! = 979200$ maneiras de formar anagramas satisfazendo as condições requeridas.

---

6. (a) Cada resultado do experimento em questão é uma seqüência de dez elementos escolhidos no conjunto $\{K, C\}$, onde K representa *cara* e C representa *coroa*. Como para cada escolha temos duas possibilidades, independentes, pelo PM, temos um total de 2^{10} elementos no espaço amostral.

(b) Cada elemento do evento em questão é uma seqüência de dez elementos escolhidos no conjunto $\{K, C\}$, sendo 5 K's e 5 C's. Dito de outra forma, cada tal elemento é uma permutação (com repetições) da palavra $KKKKKCCCCC$. Assim, temos um total de $\dfrac{10!}{5! \times 5!} = C(10,5) = 252$ elementos.

---

7. O universo dos encontros que podem resultar em casamentos pode ser particionado em dois grupos:

   – Os encontros com mulheres que têm irmãos cadastrados;

   – Os encontros com mulheres que não têm irmãos cadastrados.

Pelo PA, basta determinar o número de encontros em cada caso.

Para formar um encontro com mulheres que têm irmãos cadastrados, podemos tomar 2 decisões:

$$\begin{array}{lcl} d_1 & : & \text{escolher uma mulher dentre as que têm irmãos cadastrados;} \\ \\ d_2 & : & \text{escolher um homem que não tem irmã cadastrada,} \\ & & \text{para formar um par com a mulher escolhida.} \end{array}$$

A decisão d_1 pode ser tomada de 3 maneiras. A decisão d_2 pode ser tomada de 8 maneiras. Logo, pelo PM, existem $3 \times 8 = 24$ encontros com mulheres que têm irmãos cadastrados.

Para formar um encontro com mulheres que não têm irmãos cadastrados, podemos tomar 2 decisões:

$$\begin{array}{lcl} d_1 & : & \text{escolher uma mulher dentre as que não têm irmãos cadastrados;} \\ \\ d_2 & : & \text{escolher um homem qualquer para formar um par com a mulher escolhida.} \end{array}$$

A decisão d_1 pode ser tomada de 9 maneiras. A decisão d_2 pode ser tomada de 10 maneiras. Logo, pelo PM, existem $9 \times 10 = 90$ encontros com mulheres que não têm irmãos cadastrados.

Com os dados acima, pelo PA, existem $24 + 90 = 114$ encontros que podem resultar em casamento.

Uma solução análoga pode ser obtida particionando-se o universo dos encontros em dois grupos:

   – Os encontros com homens que têm irmãs cadastradas;

– Os encontros com homens que não têm irmãs cadastradas.

Neste caso, teremos um total de $2 \times 9 + 8 \times 12 = 114$ encontros que podem resultar em casamento.

---

8. Sejam $B = \{x \in A \mid x$ é divisível por $3\}$, $C = \{x \in A \mid x$ é divisível por $5\}$ e $D = \{x \in A \mid x$ é divisível por $7\}$. Queremos determinar $n(B \cup C \cup D)$.

   Pelo PIE, sabemos que $n(B \cup C \cup D) = n(B) + n(C) + n(D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(B \cap C \cap D)$. Logo, para resolver problema, vamos determinar $n(B)$, $n(C)$, $n(D)$, $n(B \cap C)$, $n(B \cap D)$, $n(C \cap D)$ e $n(B \cap C \cap D)$.

   - Para determinar $n(B)$, observe que *de cada* 3 *números naturais consecutivos, exatamente* 1 *é múltiplo de* 3. Assim, $n(B) = \dfrac{n(A)}{3} = \dfrac{3.600}{3} = 1.200$.
   - Para determinar $n(C)$, observe que *de cada* 5 *números naturais consecutivos, exatamente* 1 *é múltiplo de* 5. Assim, $n(C) = \dfrac{n(A)}{5} = \dfrac{3.600}{5} = 720$.
   - Para determinar $n(D)$, observe que *de cada* 7 *números naturais consecutivos, exatamente* 1 *é múltiplo de* 7. Assim, $n(D) \cong \dfrac{n(A)}{7} = \dfrac{3.600}{7} \cong 514,29$. Assim, temos $n(D) = 514$.
   - Para determinar $n(B \cap C)$, observe que os elementos de $B \cap C$ são simultaneamente múltiplos de 3 e de 5 e que *um número natural é divisível por* 3 *e por* 5 *se, e somente se, ele é divisível por* 15. Assim, analogamente aos casos anteriores, temos que $n(B \cap C) = \dfrac{n(A)}{15} = \dfrac{3.600}{15} = 240$.
   - Para determinar $n(B \cap D)$, observe que os elementos de $B \cap D$ são simultaneamente múltiplos de 3 e de 7 e que *um número natural é divisível por* 3 *e por* 7 *se, e somente se, ele é divisível por* 21. Assim, analogamente aos casos anteriores, temos que $n(B \cap C) \cong \dfrac{n(A)}{21} = \dfrac{3.600}{21} \cong 171,43$. Logo, $n(B \cap C) = 171$.
   - Para determinar $n(C \cap D)$, observe que os elementos de $C \cap D$ são simultaneamente múltiplos de 5 e de 7 e que *um número natural é divisível por* 5 *e por* 7 *se, e somente se, ele é divisível por* 35. Assim, analogamente aos casos anteriores, temos que $n(C \cap D) \cong \dfrac{n(A)}{35} = \dfrac{3.600}{35} \cong 102,85$. Logo, $n(B \cap C) = 102$.
   - Para determinar $n(B \cap C \cap D)$, observe que os elementos de $B \cap C \cap D$ são simultaneamente múltiplos de $3, 5$ e 7 e que *um número natural é divisível simultaneamente por* $3, 5$ *e* 7 *se, e somente se, ele é divisível por* 105. Assim, analogamente aos casos anteriores, temos que $n(B \cap C \cap D) \cong \dfrac{n(A)}{105} = \dfrac{3.600}{105} \cong 34,28$. Logo, $n(B \cap C \cap D) = 34$.

   Finalmente, com os dados acima, temos que $n(B \cup C \cup D) = 1.200 + 720 + 514 - 240 - 171 - 102 + 34 = 1.955$.

---

9. Para formar um anagrama satisfazendo as condições do problema, podemos tomar 3 decisões:

   d_1 : escolher uma consoante para iniciar o anagrama;

   d_2 : escolher uma vogal para terminar o anagrama;

   d_3 : escolher uma permutação das 9 letras ainda não escolhidas
   para compor o anagrama.

A decisão d_1 pode ser tomada de 6 maneiras. A decisão d_2 pode ser tomada de 5 maneiras. Finalmente, a decisão d_3 pode ser tomada de $P(9) = 362.880$ maneiras. Logo, pelo PM, existem $6 \times 5 \times 362.880 = 10.886.400$ tais números.

---

10. Para formar um "chute" satisfazendo as condições do problema, podemos tomar 2 decisões:

d_1 : escolher um time;

d_2 : escolher uma seqüência de 13 palavras, contendo
6 ocorrências da palavra "vitória",
5 ocorrências da palavra "empate" e
2 ocorrências da palavra "derrota".

A decisão d_1 pode ser tomada de 5 maneiras. A decisão d_2 pode ser tomada de $\dfrac{13!}{6! \times 5! \times 2!}$ maneiras. Logo, pelo PM, existem $5 \times \dfrac{13!}{6! \times 5! \times 2!} = 180.180$ "chutes" possíveis.

---

11. O conjunto P das partidas pode ser particionado em três conjuntos (1,0):

A : o conjunto das partidas no primeiro turno,

B : o conjunto das partidas no segundo turno,

C : o conjunto da partida final.

Temos que $n(A) = n(B) = C(11, 2)$ e $n(C) = 1$ (1,0).
Logo, $n(P) = 2 \times 55 + 1 = 110$ (0,5).

---

12. (a) Cada anagrama onde as letras P, R e O ocorrem juntas pode ser formado se realizamos duas tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para escrever as letras P, R, O
e considerar esta seqüência como uma única letra X
T_2 : formar um anagrama com as letras X, B, L, E, M, A.

Assim, pelo PFC, o número total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ que têm as letras P, R e O sempre juntas é $3! \times 6! = 4.320$.

(b) Cada anagrama onde as consoantes P, R, B, L, M ocorrem juntas e onde as vogais O, E, A ocorrem juntas pode ser formado se realizamos três tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para escrever as consoantes P, R, B, L, M
e considerar esta seqüência como uma única letra X
T_2 : escolher uma ordem para escrever as vogais O, E, A
e considerar esta seqüência como uma única letra Y
T_3 : formar um anagrama com as letras X, Y.

Assim, pelo PFC, o número total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ que têm as consoantes P, R, B, L, M sempre juntas bem como as vogais O, E, A sempre juntas é $5! \times 3! \times 2! = 1.140$.

---

13. (a) Cada ordenação das 30 moedas em linha reta de modo que 10 caras e 20 coroas fiquem para cima corresponde a uma permutação de 10 ocorrências da letra K e 20 ocorrências da letra C. Assim, temos um total de $\frac{30!}{10!20!} = 2.731.365$ maneiras de seis moedas serem colocadas consecutivamente em uma linha reta de modo que 10 caras e 20 coroas fiquem para cima.

    (b) Cada ordenação das 30 moedas em linha reta de modo que 15 caras e 15 coroas fiquem para cima mas as 15 caras ocorram juntas corresponde a uma permutação das letras:

$$K, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, C.$$

    Assim, temos um total de $\frac{16!}{1!15!} = 16$ maneiras de trinta moedas serem colocadas consecutivamente em uma linha reta de modo que modo que 15 caras e 15 coroas fiquem para cima mas as 15 caras ocorram juntas.

---

14. O conjunto dos polígonos cujos vértices pertencem a circunferência pode ser particionado em 5 conjuntos:

    1. O conjunto dos triângulos que têm vértices na circunferência;
    2. O conjunto dos quadriláteros que têm vértices na circunferência;
    3. O conjunto dos pentágonos que têm vértices na circunferência;
    4. O conjunto dos hexágonos que têm vértices na circunferência
    5. O conjunto dos heptágonos que têm vértices na circunferência

    No primeiro conjunto temos $C(7,3) = 35$ elementos; no segundo conjunto temos $C(7,4) = 35$ elementos; no terceiro conjunto temos $C(7,5) = 21$ elementos; no quarto conjunto temos $C(7,6) = 7$ elementos; e no quinto conjunto temos $C(7,7) = 1$ elemento. Assim, pelo PA, existem $35 + 35 + 21 + 7 + 1 = 99$ polígonos cujos vértices pertencem ao conjunto de pontos dados.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF