Matemática Discreta – AP1 – 2007/2

Soluções:

1. (2,5) Uma pesquisa perguntou a um total de 130 pessoas se elas já haviam votado ao menos uma vez nos partidos A, B, C ou D. Os seguintes dados foram coletados:

   - 60 pessoas já votaram no partido A;
   - 50 pessoas já votaram no partido B;
   - 70 pessoas já votaram no partido C;
   - 22 pessoas já votaram nos partidos A e B;
   - 30 pessoas já votaram nos partidos A e C;
   - 25 pessoas já votaram nos partidos B e C;
   - 17 pessoas já votaram no partido D e em nenhum outro partido;
   - as pessoas que votaram em (ao menos) um dos partidos A, B ou C não votaram no partido D;
   - cada pessoa já votou em ao menos um dos partidos.

   (a) Quantas pessoas votaram apenas nos partidos A e C e em nenhum outro partido?

   (b) Quantas pessoas votaram apenas no partido B e em nenhum outro partido, ou apenas nos partidos A e C e em nenhum outro partido?

Solução:

Considere o diagrama de Venn para três conjuntos com os círculos rotulados A, B e C e a região externa aos círculos rotulada por D. *Observe que a informação de que as pessoas que votaram no Partido D nunca votaram em nenhum outro partido nos pemite usar um diagrama desta forma.*

Os dados do problema fornecem os seguintes valores para o número de elementos de cada uma das regiões definidas pelo diagrama: $n(A \cap B \cap C) = x$, $n(A \cap B \cap C^c) = 22 - x$, $n(A \cap B^c \cap C) = 30 - x$, $n(A^c \cap B \cap C) = 25 - x$, $n(A \cap B^c \cap C^c) = 8 + x$, $n(A^c \cap B \cap C^c) = 3 + x$, $n(A^c \cap B^c \cap C) = 15 + x$ e $n(A^c \cap B^c \cap C^c) = n(D) = 17$. Como o universo contém 130 elementos, temos que $x + 22 - x + 30 - x + 25 - x + 8 + x + 3 + x + 15 + x + 17 = 130$, o que fornece $x = 10$.

(a) O problema pergunta pelo número de elementos do conjunto $A \cap B^c \cap C$. *Novamente, observe que, segundo os dados do problema, não precisamos nos preocupar com os elementos de D.* De acrodo com os valores obtidos acima, temos $n(A \cap B^c \cap C) = 30 - x = 30 - 10 = 20$.

(b) O problema pergunta pelo número de elementos do conjunto $(A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)$. *Novamente, observe que, segundo os dados do problema, não precisamos nos preocupar com os elementos de D.*

Como os conjuntos $A^c \cap B \cap C^c$ e $A \cap B^c \cap C$ são disjuntos, pelo PA, $n[(A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)] = n(A^c \cap B \cap C^c) + n(A \cap B^c \cap C) = (3+x)+20 = 13+20 = 33$. Assim, o número de pessoas que votaram apenas no partido B e em nenhum outro partido, ou apenas nos partidos A e C e em nenhum outro partido é 33.

---

2. (2,5) Existem 10 estradas de mão dupla ligando uma cidade A a uma cidade B e 5 estradas de mão dupla ligando a cidade B a uma outra cidade C. Uma pessoa deseja fazer uma viajem de 4 dias, utilizando estas estradas, do seguinte modo: ela vai de A para B, no primeiro dia; de B para C, no segundo; de volta para B, no terceiro; e, finalmente, de volta para A, no quarto dia. Quantas possibilidades esta pessoa tem de realizar os quatro percursos, sem utilizar estradas que já utilizou previamente?

Solução:

Para realizar os percursos requeridos, satisfazendo as condições do problema, a pessoa deve realizar quatro tarefas:

T_1 : escolher uma estrada do RJ para SP,
T_2 : escolher uma estrada de SP para BR,
T_3 : escolher uma estrada de BR para SP, diferente da estrada já escolhida em t_2,
T_4 : escolher uma estrada de SP para RJ, diferente da estrada já escolhida em t_1.

Observe que a tarefa T_1 pode ser realizada de 10 maneiras, a tarefa T_2 de 5 maneiras, a tarefa T_3 de 4 maneiras e a tarefa T_4 de 9 maneiras.

Assim, pelo PM, existem $10 \times 5 \times 4 \times 9 = 1.800$ maneiras da pessoa realizar os os percursos requeridos, sem utilizar estradas que já utilizou previamente.

---

3. (2,5) Uma prova de natação é disputada por seis nadadores. Determine o número de resultados possíveis, na prova, dado que ocorre um empate de dois nadadores que chegam na primeira posição e que não ocorre empate em nenhuma outra posição.

Solução:

Para formar um tal resultado, devemos realizar duas tarefas:

T_1 : escolher os dois nadadores que vão chegar empatados na primeira posição,
T_2 : permutar os 4 nadadores restantes.

Observe que a tarefa T_1 pode ser realizada de $C(6,2)$ maneiras e que a tarefa T_2 de 4! maneiras. Assim, pelo PM, existem $15 \times 24 = 360$ resultados possíveis, na prova, dado que ocorre um empate de dois nadadores que chegam na primeira posição e que não ocorre empate em nenhuma outra posição.

---

4. (2,5) A soma dos coeficientes de $(a+b)^m$ é 1024.

   (a) Determine o valor de m;

   (b) Calcule o número de permutações de $\dfrac{m}{2}$ elementos.

Solução:

(a) Sabemos que a soma dos coeficientes de $(a+b)^m$ é obtida quando fazemos $a = b = 1$. Assim, temos que $2^m = 1024 = 2^{10}$ e, daí, $m = 10$.

(b) O valor procurado é $P(\frac{10}{2}) = P(5) = 5! = 120$.
