Aula 20 – A Derivada

Metas da aula: Definir a derivada de uma função num ponto. Apresentar as propriedades básicas da derivada em relação às operações de soma, multiplicação e quociente de funções, dar exemplos e aplicações.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer a definição rigorosa de derivada de uma função num ponto e saber utilizá-la na demonstração de resultados elementares envolvendo esse conceito.

Introdução

Nesta aula iniciaremos nosso estudo sobre a derivada de uma função. Ao longo dessa discussão assumiremos que você já está familiarizado com as interpretações geométricas e físicas da derivada como usualmente descritas em cursos introdutórios de Cálculo. Conseqüentemente, nos concentraremos aqui nos aspectos matemáticos da derivada e não abordaremos suas aplicações em geometria, física, economia, etc. Porém, não será demais enfatizar a enorme importância desse conceito, a qual pode ser medida pela freqüência com que o mesmo, talvez mais que qualquer outro na Matemática, aparece, nas mais variadas formas, como elemento básico em aplicações dessa ciência às demais áreas do conhecimento humano.

Retringiremos nossa discussão ao caso de funções definidas em intervalos. No entanto, como veremos a seguir, para que o conceito de derivada de uma função num determinado ponto faça sentido, basta que a mesma esteja definida nesse ponto e em pontos arbitrariamente próximos dele, diferentes do mesmo. Sendo assim, a definição pode ser estabelecida, de modo mais geral, para pontos de acumulação pertencentes ao domínio de uma certa função, mesmo quando este é um subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$, não necessariamente um intervalo.

A definição de derivada

Iniciamos nosso estudo sobre a derivada de uma função com a definição a seguir.

Definição 20.1
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in I$. Dizemos que f **tem derivada em** $\bar{x}$, se existe o limite

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Neste caso, chamamos tal limite a **derivada de** f **em** $\bar{x}$ e denotamos

$$f'(\bar{x}) := \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Este limite deve ser entendido como limite da função $(f(x) - f(\bar{x}))/(x - \bar{x})$, que está definida em $I \setminus \{\bar{x}\}$, quando $x \to \bar{x}$.

Quando f tem derivada em $\bar{x}$, costuma-se também dizer que f **é diferenciável em** $\bar{x}$ ou que f **é derivável em** $\bar{x}$. Outras notações para a derivada de f no ponto $\bar{x}$ são:

$$Df(\bar{x}) \quad \text{e} \quad \frac{df}{dx}(\bar{x}).$$

Usaremos os verbos **diferenciar** e **derivar** indistintamente com o sentido de tomar a derivada (de uma função num determinado ponto).

Se $\bar{x} \in I$, denotemos $I_{\bar{x}} := I - \bar{x} = \{h \in \mathbb{R} : \bar{x} + h \in I\}$. Freqüentemente é conveniente escrever o limite anterior como

$$f'(\bar{x}) := \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}.$$

Neste caso, o limite deve ser entendido como limite da função $(f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}))/h$, que está definida em $I_{\bar{x}} \setminus \{0\}$, quando $h \to 0$.

Teorema 20.1
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in I$. Então f é diferenciável em $\bar{x}$ se, e somente se, existe $L \in \mathbb{R}$ e $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + L \cdot h + r_{\bar{x}}(h) \tag{20.1}$$

com

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = 0. \tag{20.2}$$

Neste caso, temos $L = f'(\bar{x})$.

Prova: Suponhamos que f seja diferenciável em $\bar{x}$. Então, tomamos $L := f'(\bar{x})$ e definimos $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ por meio da equação (20.1). Da Definição 20.1 segue imediatamente que vale (20.2).

Reciprocamente, suponhamos que existam $L \in \mathbb{R}$ e $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$ satisfazendo (20.1) e (20.2). Neste caso, como $(f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}))/h = L + r_{\bar{x}}(h)/h$, existe o limite de $(f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}))/h$ quando $h \to 0$ e temos

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \right) - L.$$

Segue da Definição 20.1 que f é derivável em $\bar{x}$ e $L = f'(\bar{x})$.

□

Claramente, dado qualquer $L \in \mathbb{R}$, a equação (20.1) será válida desde que ela própria seja usada para definir $r_{\bar{x}} : I_{\bar{x}} \to \mathbb{R}$. O significado do Teorema 20.1 está em estabelecer que quando, e somente quando(!), f for diferenciável em $\bar{x}$ e $L = f'(\bar{x})$, valerá também (20.2).

Teorema 20.2
Se $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\bar{x} \in I$, então f é contínua em $\bar{x}$.

Prova: Se f é diferenciável em $\bar{x}$, então valem (20.1) e (20.2) com $L = f'(\bar{x})$. Logo,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \lim_{h\to 0} f(\bar{x}+h) &= \lim_{h\to 0} \left(f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + r_{\bar{x}}(h)\right) \\ &= f(\bar{x}) + f'(\bar{x}) \cdot 0 + \lim_{h\to 0} \frac{r_{\bar{x}}(h)}{h} h = f(\bar{x}),\end{aligned}$$

o que mostra que f é contínua em $\bar{x}$.

□

Exemplos 20.1

(a) Uma função constante, $f(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com $c \in \mathbb{R}$, é evidentemente diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) \equiv 0$. A função $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, também é claramente diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) \equiv 1$.

(b) Usando o binômio de Newton vemos que

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{nx^{n-1}h + h^2 p(x,h)}{h} = nx^{n-1} + hp(x,h),$$

onde $p(x,h)$ é um polinômio em x e h. Logo, temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1},$$

o que mostra que $f(x) = x^n$ é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $f'(x) = nx^{n-1}$.

(c) Seja $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$, para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e $f(0) = 0$. Mostraremos que f não é diferenciável em $\bar{x} = 0$, mas $g(x) = xf(x)$ é diferenciável em $\bar{x} = 0$ e $g'(0) = 0$.

De fato, $f(h)/h = \mathrm{sen}(1/h)$ e sabemos de aulas anteriores que não existe limite de $\mathrm{sen}(1/h)$ quando $h \to 0$. Concluímos pela Definição 20.1 que f não é diferenciável em $\bar{x} = 0$. Por outro lado, $g(h)/h = h\,\mathrm{sen}(1/h)$ e sabemos de aulas anteriores que $\lim\limits_{h\to 0} h\,\mathrm{sen}(1/h) = 0$. Logo, g é diferenciável em $\bar{x} = 0$ e $g'(0) = 0$.

(d) A recíproca do Teorema 20.2 é claramente falsa. Por exemplo, a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) := |x|$ é contínua em $\bar{x} = 0$, porém não é diferenciável em 0. De fato, temos

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x}{x} = -1, \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x\to 0-} \frac{x}{x} = 1.$$

Assim, embora existam os limites laterais, eles são distintos. Portanto, não existe $\lim_{x\to 0}(|x| - |0|)/(x - 0)$, o que significa que $f(x) = |x|$ não é diferenciável em 0.

(e) Tomando-se combinações lineares de funções da forma $x \mapsto |x - \bar{x}|$, com $\bar{x} \in \mathbb{R}$, podemos facilmente construir funções contínuas em $\mathbb{R}$ que deixam de ser diferenciáveis num conjunto finito qualquer $\{\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_N\}$ de pontos de $\mathbb{R}$.

(f) Em 1872, para espanto geral da comunidade matemática de então, Karl Weierstrass exibiu um exemplo de uma função contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{R}$. Pode-se mostrar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida pela série

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cos(3^n x) \tag{20.3}$$

tem essa propriedade. A demonstração da continuidade de f faz uso de um resultado bastante conhecido sobre séries de funções, o Teste-M de Weierstrass. A prova da não-diferenciabilidade de f em qualquer ponto de $\mathbb{R}$ segue um argumento semelhante ao esboçado na seção Prossiga ao final desta aula, para provar o mesmo fato para um exemplo ligeiramente diferente.

Definição 20.2

Dizemos que $f : I \to \mathbb{R}$ possui **derivada lateral à direita** em $\bar{x} \in I$ se existe o limite lateral

$$\lim_{x\to \bar{x}+} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}.$$

Neste caso, denotamos tal limite $f'^{+}(\bar{x})$. Definimos de modo inteiramente análogo a **derivada lateral à esquerda** de f em $\bar{x} \in I$ que denotamos por $f'^{-}(\bar{x})$.

Claramente, f será diferenciável em $\bar{x}$ se, e somente se, existirem ambas as derivadas laterais, à esquerda e à direita, e essas coincidirem, i.e, $f'^{-}(\bar{x}) = f'^{+}(\bar{x})$.

No exemplo que demos há pouco, da função $f(x) = |x|$ em $\bar{x} = 0$, segue do que foi visto que existem as derivadas laterais à esquerda e à direita em $\bar{x} = 0$, com $f'^{-}(0) = -1$ e $f'^{+}(0) = 1$. Portanto, $f'^{-}(0) \neq f'^{+}(0)$ e, como havíamos dito, f não é diferenciável em 0.

O seguinte resultado é uma extensão do Teorema 20.2 cuja demonstração se faz de modo inteiramente similar ao que foi feito para demonstrar aquele resultado, com a diferença que desta feita deve-se usar ambos os limites laterais, em lugar do limite usual, para concluir que $\lim_{x\to\bar{x}-} f(x) = f(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}+} f(x)$. Deixamos os detalhes para você como exercício.

Teorema 20.3
Se $f : I \to \mathbb{R}$ possui derivadas laterais, à esquerda e à direita, em $\bar{x} \in I$, então f é contínua em $\bar{x}$.

Derivadas e operações com funções

A seguir vamos justificar algumas propriedades básicas das derivadas que são muito úteis nos cálculos de derivadas de combinações de funções. Você certamente já terá se familiarizado com essas propriedades ao longo de cursos anteriores de Cálculo.

Teorema 20.4
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, e sejam $f : I \to \mathbb{R}$ e $g : I \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em $\bar{x}$. Então:

(i) Se $c \in \mathbb{R}$, então a função cf é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(cf)'(\bar{x}) = cf'(x). \tag{20.4}$$

(ii) A função $f + g$ é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(f + g)'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) + g'(\bar{x}). \tag{20.5}$$

(iii) (Regra do Produto) A função fg é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(fg)'(\bar{x}) = f'(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g'(\bar{x}). \tag{20.6}$$

(iv) (Regra do Quociente) Se $g(\bar{x}) \neq 0$, então a função f/g é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(\bar{x}) = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}. \tag{20.7}$$

Prova: Vamos demonstrar (iii) e (iv), deixando as demonstrações de (i) e (ii) para você como exercício.

(iii) Seja $h := fg$. Então para $x \in I$, $x \neq \bar{x}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x-\bar{x}}\\ &= \frac{f(x)g(x) - f(\bar{x})g(x) + f(\bar{x})g(x) - f(\bar{x})g(\bar{x})}{x-\bar{x}}\\ &= \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} \cdot g(x) + f(\bar{x})\frac{g(x)-g(\bar{x})}{x-\bar{x}}.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 20.2, g é contínua em $\bar{x}$; então $\lim_{x\to\bar{x}} g(x) = g(\bar{x})$. Como f e g são diferenciáveis em $\bar{x}$, deduzimos do Teorema 13.2 sobre propriedades de limites que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{h(x)-h(\bar{x})}{x-\bar{x}} = f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x}).$$

Portanto, $h := fg$ é diferenciável em $\bar{x}$ e vale (20.6).

(iv) Seja $h := f/g$. Como g é diferenciável em $\bar{x}$, ela é contínua nesse ponto, pelo Teorema 20.2. Assim, como $g(\bar{x}) \neq 0$, sabemos do Teorema 13.5 que existe um intervalo $J := (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \cap I \subset I$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in J$. Para $x \in J$, $x \neq \bar{x}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{h(x)-h(\bar{x})}{x-\bar{x}} &= \frac{f(x)/g(x) - f(\bar{x})/g(\bar{x})}{x-\bar{x}} = \frac{f(x)g(\bar{x}) - f(\bar{x})g(x)}{g(x)g(\bar{x})(x-\bar{x})}\\ &= \frac{f(x)g(\bar{x}) - f(\bar{x})g(\bar{x}) + f(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g(x)}{g(x)g(\bar{x})(x-\bar{x})}\\ &= \frac{1}{g(x)g(\bar{x})}\left[\frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} \cdot g(\bar{x}) - f(\bar{x}) \cdot \frac{g(x)-g(\bar{x})}{x-\bar{x}}\right].\end{aligned}$$

Usando a continuidade de g em $\bar{x}$ e a diferenciabilidade de f e g em $\bar{x}$, obtemos

$$h'(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{h(x)-h(\bar{x})}{x-\bar{x}} = \frac{f'(\bar{x})g(\bar{x}) - f(\bar{x})g'(\bar{x})}{g(\bar{x})^2}.$$

Assim, $h = f/g$ é diferenciável em $\bar{x}$ e vale (20.7).

□

Usando Indução Matemática podemos obter facilmente as seguintes extensões das regras de diferenciação.

Corolário 20.1
Se $f_1, f_3, \cdots, f_n$ são funções definidas num intervalo I com valores em $\mathbb{R}$ que são diferenciáveis em $\bar{x} \in I$, então:

(i) A função $f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) + f_2'(\bar{x}) + \cdots + f_n'(\bar{x}). \tag{20.8}$$

(ii) A função $f_1 f_2 \cdots f_n$ é diferenciável em $\bar{x}$, e

$$\begin{aligned}(f_1 f_2 \cdots f_n)'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) f_2(\bar{x}) \cdots f_n(\bar{x}) + f_1(\bar{x}) f_2'(\bar{x}) \cdots f_n(\bar{x}) \\ + \cdots + f_1(\bar{x}) f_2(\bar{x}) \cdots f_n'(\bar{x}).\end{aligned} \tag{20.9}$$

Exemplos 20.2
(a) Um caso especial importante da regra do produto estendida (20.9) ocorre quando $f_1 = f_2 = \cdots = f_n = f$. Neste caso, (20.9) se torna

$$(f^n)'(\bar{x}) = n(f(\bar{x}))^{n-1} f'(\bar{x}). \tag{20.10}$$

Em particular, se tomarmos $f(x) := x$, então obtemos mais uma vez que a derivada de $g(x) := x^n$ é dada por $g'(x) = nx^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. A derivada de $h(x) := x^{-n} = 1/g(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, é obtida usando a regra do quociente, i.e.,

$$(x^{-n})' = \frac{-g'(x)}{g(x)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

Portanto, vale $(x^m)' = mx^{m-1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, com $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $m < 0$ e $x \in \mathbb{R}$ se $m \geq 0$.

(b) Se $p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, então p é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$ e $p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1$. Se $q(x) := b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ e $q(\bar{x}) \neq 0$, então $r(x) := p(x)/q(x)$, pela Regra do Quociente, $r(x)$ é diferenciável em $\bar{x}$ e $r'(\bar{x}) = (p'(\bar{x}) q(\bar{x}) - p(\bar{x}) q'(\bar{x}))/q(\bar{x})^2$, e já sabemos como calcular $p'(\bar{x}), q'(\bar{x})$.

(c) (Regra de L'Hôpital) Vamos provar aqui uma versão bastante simples da popular regra de L'Hôpital para o cálculo de derivadas de formas indeterminadas do tipo 0/0.

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ diferenciáveis em $\bar{x}$, com $g'(\bar{x}) \neq 0$. Suponhamos que $f(\bar{x}) = 0 = g(\bar{x})$. Então

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})}.$$

De fato, temos

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{\frac{f(x)}{x-\bar{x}}}{\frac{g(x)}{x-\bar{x}}} = \frac{\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}}{\lim_{x \to \bar{x}} \frac{g(x)-g(\bar{x})}{x-\bar{x}}} = \frac{f'(\bar{x})}{g'(\bar{x})},$$

onde usamos a Definição 20.1 e a hipótese $f(\bar{x}) = 0 = g(\bar{x})$.

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 2x + 1}{x^7 - 3x + 2} = \frac{3}{4}$.

De fato, ponhamos $f(x) := x^5 - 2x + 2$ e $g(x) := x^7 - 3x + 2$. Então f e g são diferenciáveis em $x = 1$, $f(1) = 0 = g(1)$ e $g'(1) = 4 \neq 0$. Podemos então aplicar a Regra de L'Hôpital para afirmar que o referido limite é igual a $f'(1)/g'(1) = 3/4$.

Exercícios 20.1

1. Use a definição para encontrar a derivada de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) := x^3$ para $x \in \mathbb{R}$,

   (b) $f(x) := 1/x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$,

   (c) $f(x) := \sqrt{x}$ para $x > 0$.

   (d) $f(x) := \dfrac{x^5 + 3x^2 + 4}{x^4 + x^2 + 1}$ para $x \in \mathbb{R}$.

2. Mostre que $f(x) := x^{1/3}$, $x \in \mathbb{R}$, não é diferenciável em $x = 0$.

3. Prove o Teorema 20.4 (i) e (ii).

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2$ para x racional, e $f(x) := 0$ para x irracional. Mostre que f é diferenciável em $x = 0$, e encontre $f'(0)$.

5. Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^n$ para $x \geq 0$ e $f(x) := 0$ para $x < 0$. Mostre que f é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$, em particular, em $x = 0$.

6. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $\bar{x}$ e que $f(\bar{x}) = 0$. Mostre que $g(x) := |f(x)|$ é diferenciável em em $\bar{x}$ se, e somente se, $f'(\bar{x}) = 0$.

7. Calcule os limites:

   (a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^4 - x + 14}{x^5 - 12x + 8}$

   (b) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^5 + 2x^2 - 1}{x^6 - x - 2}$

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável em $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Prove que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x} - h)}{2h} = f'(\bar{x}).$$

   Mostre que $f(x) = |x|$ em $\bar{x} = 0$ fornece um exemplo em que esse limite existe mas f não é diferenciável em $\bar{x}$.

Prossiga: Função contínua não-diferenciável em todo ponto

Aqui apresentaremos um exemplo, devido a B.L. van der Waerden, de função contínua em $\mathbb{R}$ que não é diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$. Como no caso de (20.3), esse exemplo também é descrito por meio de uma série de funções

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{20.11}$$

onde as funções $\varphi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, são todas obtidas a partir de uma função $\varphi_0(x)$ na forma

$$\varphi_n(x) := k^{-n}\varphi(k^n x).$$

Mais especificamente, o exemplo que agora apresentamos é dado por (20.11) com

$$\varphi_0(x) := \operatorname{dist}(x; \mathbb{Z}) = \begin{cases} x - k & \text{para } k \le x < k + \frac{1}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ k + 1 - x & \text{para } k + \frac{1}{2} \le x < k + 1,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

e

$$\varphi_n(x) := 10^{-n}\varphi_0(10^n x).$$

A continuidade de f definida por (20.11) segue do Teste M de Weierstrass que será visto em aula futura e garante a convergência uniforme de uma série de funções se os valores absolutos dos termos da série $|\varphi_n(x)|$ são

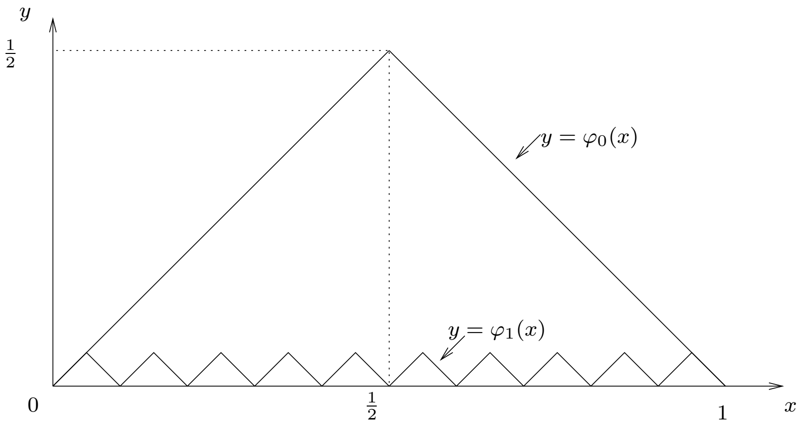

Figura **20.1**: Construção de função contínua não-diferenciável em todo ponto.

majorados por números positivos M_n tais que a série numérica $\sum M_n$ é convergente. No caso da série (20.11), $M_n = 10^{-n}$.

Vamos agora provar que f não é diferenciável em nenhum ponto $x \in \mathbb{R}$. Como f é periódica de período 1, bastará considerar o caso em que $0 \le x < 1$. Nesse caso, podemos escrever x na forma

$$x = 0 \cdot a_1 a_2 \dots a_n \dots .$$

A idéia será mostrar que existe uma seqüência (h_m) com $h_m \to 0$ tal que a seqüência $((f(x+h_m) - f(x))/h_m)$ não é convergente.

Distinguimos dois casos: (i) $0 \le x \le 1/2$; (ii) $1/2 < x < 1$. No primeiro caso, temos

$$\varphi_0(10^n x) = 0.a_{n+1}a_{n+2}\dots,$$

enquanto no segundo caso temos

$$\varphi_0(10^n x) = 1 - 0 \cdot a_{n+1}a_{n+2}\dots .$$

Ponhamos $h_m = -10^{-m}$ se a_m é igual a 4 ou 9 e $h_m = 10^{-m}$ se $a_m \in \{0,1,2,3,5,6,7,8\}$. Observe que desse modo, para cada $n \in \{0,1,2,\dots,m-1\}$, os números $10^n(x+h_m)$ e $10^n x$ estão ambos num mesmo intervalo de comprimento 1/2 da forma $[k, k+1/2]$ ou $(k+1/2, k)$.

Considere o quociente

$$\frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m}. \tag{20.12}$$

Pela fórmula (20.11) esse quociente pode ser expresso por uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi_0(10^n(x+10^{-m})) - \varphi_0(10^n x)}{10^{n-m}},$$

ou da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} -\frac{\varphi_0(10^n(x-10^{-m})) - \varphi_0(10^n x)}{10^{n-m}},$$

dependendo se $h_m = 10^{-m}$ ou $h_m = -10^{-m}$.

Em qualquer um dos dois casos, é claro que os numeradores são nulos a partir de $n = m$ em diante. Por outro lado, para $n < m$ eles se reduzem a 10^{n-m} no primeiro caso e -10^{n-m} no segundo; portanto, o termo correspondente da série será igual a 1 no primeiro caso e -1 no segundo. Conseqüentemente, o valor do quociente (20.12) é um inteiro positivo ou negativo, mas em todo caso par se $m-1$ for par, e ímpar se $m-1$ for ímpar. Logo a seqüência dos quocientes (20.12) não pode convergir, já que é formada por inteiros de paridade alternante.