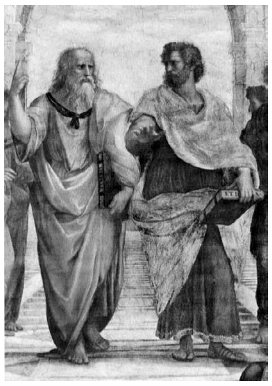
Aula 26 – Proposições e Conectivos

O todo é maior do que a soma de suas partes.
Aristóteles

Objetivos

- Depois de estudar o conteúdo apresentado nas próximas aulas você estará bem preparado para compreender e usar o discurso matemático.
- Deverá ser capaz de compreender os enunciados dos teoremas e conhecerá as principais estratégias usadas em suas demonstrações. Mais ainda, isto permitirá que você raciocine com algum rigor lógico e passe a escrever melhor os seus próprios textos matemáticos.

Neste módulo você ganhará familiaridade com a terminologia usada na Matemática. Parece pouco, mas é um grande passo.



Aristóteles (384 - 322a.C.), natural de Estagira, aparece aqui à esquerda de Platão, outro grande filósofo que teve grande influência na Matemática. Aristóteles formulou o chamado *método dedutivo*. Este foi adotado por Euclides, ao escrever os seus *Elementos*, por volta de 300 a.C. Desde então, tem sido uma ferramenta essencial na Matemática. Para obter um pouco mais de informação sobre eles, veja a coleção *Os Pensadores* [1]. Você pode ver, também, o capítulo sobre Aristóteles do livro de Will Durant [2].

Introdução

Algumas das principais características da Matemática são: a abstração, a precisão, o rigor lógico e a diversidade de suas aplicações.

A lógica é o assunto que será abordado nesta unidade. É importante conhecer os conceitos básicos da lógica, não só para estudar, compreender e produzir Matemática, mas também, para utilizá-los em muitas outras situações.

Os fundamentos da lógica foram introduzidos na antiga Grécia por Aristóteles, um dos filósofos mais importantes da antigüidade.

As obras de Aristóteles, que versam sobre lógica, foram reunidas em um livro que recebeu o nome de *Organon*, que significa instrumento.

Proposições

A língua portuguesa, assim como as outras línguas, é formada por palavras, sentenças, numa teia sutil e complexa. Expressar-se com clareza e precisão não é tarefa fácil. De maneira geral, podemos classificar as sentenças de uma língua da seguinte forma:

As sentenças declarativas podem ser afirmativas ou negativas.

Declarativas: Hoje é domingo.
Eu não saí de casa o dia todo.

Interrogativas:	Quem vem lá?
	Qual é o seu nome?
Exclamativas:	Lógico!
	Viva!
Imperativas:	Não matarás!
	Feche a porta!

Sentenças Matemáticas

A Matemática também é expressada por sentenças. Por exemplo,

$$\pi > 3 \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

são sentenças matemáticas.

> Sob o ponto de vista da lógica devemos lidar com as sentenças declarativas, às quais podemos atribuir um *valor-verdade*, isto é, cada sentença será *verdadeira* ou *falsa*.

As duas sentenças matemáticas, "$\pi > 3$" e "$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$", são verdadeiras.

Exemplo 1

Leia as seguintes sentenças. Algumas são verdadeiras e outras são falsas:

1. A grama é verde.
2. Dezembro tem 31 dias.
3. Uma semana tem 8 dias.
4. O Sol é uma estrela.
5. O verão é a estação mais fria do ano.

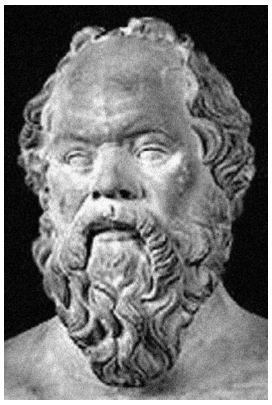
Alguns exemplos de sentenças às quais não podemos atribuir valor-verdade:

1. Vá mais devagar!
2. Quanto custa este livro ?
3. Fulana é carioca.

A primeira delas é uma ordem (ou um pedido) e a segunda é uma pergunta. A terceira é um caso interessante. Quando usamos a palavra "fulano" ou "fulana", em geral não estamos considerando uma pessoa específica. Para decidirmos se a sentença é verdadeira ou falsa, precisamos personalizar a fulana. Dependendo de quem for "fulana", a sentença terá seu valor-verdade definido. Uma situação parecida pode surgir no contexto matemático. A frase

$$x + 3 = 11$$

pode ser verdadeira (caso o valor de x seja 8) ou pode ser falsa (caso x seja diferente de 8).



Sócrates foi professor de Platão. Mesmo sem deixar nenhum texto, é uma das figuras mais conhecidas da Filosofia. Suas idéias chegaram até nós pelas obras de seus discípulos. Autor de pensamentos como: "só sei que nada sei" e "conhece-te a ti mesmo", marcou as gerações futuras pela sua modéstia e amor pelo conhecimento.

Funções Proposicionais

Expressões que contêm uma ou mais *variáveis*, são chamadas de *funções proposicionais*. Quando as variáveis são substituídas por constantes, a expressão torna-se uma proposição (verdadeira ou falsa, conforme as constantes atribuídas).

Por exemplo, "x é homem". Essa função proposicional torna-se uma proposição verdadeira se $x =$ Sócrates e falsa se $x =$ Argos. Estas expressões também podem ser chamadas de *sentenças abertas*.

Homero foi o autor da *Odisséia*, que narra o retorno de Ulisses (ou Odisseu) da Guerra de Tróia. Argos é o cão de Ulisses e é um modelo de fidelidade pois é primeiro a reconhecê-lo após uma ausência de 20 anos.

Axiomas e teoremas

Distinguir o falso do verdadeiro é o objetivo fundamental na Matemática. A lógica aqui tem um papel central. Dito de outro modo, usando as regras da lógica, *provamos* quando uma determinada sentença é verdadeira ou falsa. Neste esquema, partimos de um conjunto inicial de sentenças básicas, que consideramos verdadeiras (as quais chamamos *axiomas*) e, usando as regras definidas pela lógica (que são as regras do jogo), provamos a veracidade de novas sentenças. Estas novas sentenças verdadeiras são chamadas *teoremas* e podem também ser usadas na demonstração de novos teoremas. É desta maneira que engendramos a teia que forma a Matemática.

Em lógica consideramos apenas as sentenças que podem ser qualificadas como falsas ou verdadeiras. Tais sentenças serão chamadas de *proposições*. Usamos letras minúsculas, como p ou q, para representar proposições.

A palavra *proposição* também é usada em Matemática, fora do contexto estrito da lógica, como sinônimo de *teorema*.

Resumindo:

Proposições são sentenças declarativas. Cada uma delas possui *valor-verdade* bem estabelecido, qualificando-a como verdadeira ou falsa. Cada proposição determina, de maneira única, uma outra proposição que é a sua negação e que tem o valor-verdade oposto ao seu.

Lembre-se de que atribuir um valor-verdade a uma sentença, ou ainda, determinar a veracidade de uma proposição, pode ser uma questão delicada e difícil.

Conectivos e proposições compostas

Algumas palavras e certas expressões são usadas insistentemente nos textos matemáticos. Você já encontrou algumas delas nas unidades anteriores. Bons exemplos são os conectivos *e* e *ou*. Usando estes dois conectivos e fazendo também a negação, podemos construir novas proposições a partir de outras proposições dadas inicialmente. Estas novas proposições são chamadas de *proposições compostas*.

"lê-se p **e** q"

Usando duas proposições p e q podemos construir uma nova proposição, p e q, chamada de *conjunção de p e q*. Usamos o símbolo

$$p \wedge q$$

para denotá-la. A sentença $p \wedge q$ é verdadeira caso ambas, p e q, sejam verdadeiras. Em qualquer outra situação ela será falsa.

Exemplo 2

Apenas uma das sentenças abaixo é falsa. Qual é ...

- A noite é escura e o dia é claro.
- A rosa é vermelha e o cravo é branco.
- $\sqrt{16}$ é igual a 4 e 187 é um número primo.

Uma vez que $187 = 11 \times 17$, a proposição "187 é um número primo" é falsa e, apesar de "$\sqrt{16}$ é igual a 4" ser verdadeira, a proposição composta "$\sqrt{16}$ é igual a 4 *e* 187 é um número primo" é falsa.

A partir de duas proposições p e q também podemos construir a proposição composta p *ou* q, chamada de *disjunção de* p *e* q. Usamos o símbolo

$$p \vee q$$

"lê-se p **ou** q"

para representá-la. A proposição $p \vee q$ é verdadeira caso *alguma* das proposições p ou q seja verdadeira. Ela será falsa *apenas* quando *ambas* proposições p e q forem falsas.

Exemplo 3

A proposição composta "$\sqrt{16}$ é igual a 4 *ou* 187 é um número primo" é verdadeira.

Outro exemplo: podemos afirmar que a proposição:

π é um número irracional ou $\frac{1}{3} > \frac{1}{2}$

é verdadeira, baseando-se apenas no fato de que π é um número irracional.

Atenção! Lembre-se de que, como já foi dito na unidade de Teoria de Conjuntos, o "ou" em Matemática não é exclusivo.

Finalmente, podemos gerar uma nova proposição a partir de uma inicial, simplesmente negando-a.

Usamos a notação

$$\sim p\ ,$$

"lê-se **não** p"

para indicar a *negação da proposição* p. As proposições p e $\sim p$ têm valores-verdade opostos.

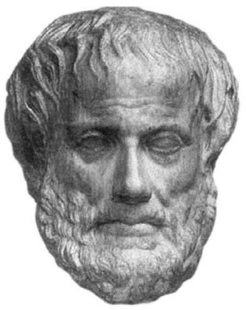
Este fato é conhecido como o Princípio da Contradição.

Quando Aristóteles criou a lógica, ele estabeleceu uma série de princípios, isto é, as regras básicas sobre as quais toda a lógica seria desenvolvida. Estes princípios são:

- **Princípio da Identidade:** Todo objeto é idêntico a si mesmo.
- **Princípio da Contradição:** O contrário do verdadeiro é falso.
- **Princípio do Terceiro Excluído:** De duas proposições contraditórias uma é verdadeira e a outra é falsa.

Duas proposições são contraditórias quando uma é a negação da outra.

A palavra **princípio** provém do grego $\alpha\rho\chi\eta$ (arqué, como em arquétipo) e do latim *principium* e quer dizer ponto de partida e fundamento de um processo qualquer. Ela é muito usada na filosofia e na linguagem científica. Em Matemática, pode ser usada como sinônimo de axioma e, neste caso, é uma proposição cuja veracidade não requer demonstração, como no Princípio da Identidade, da Contradição e do Terceiro Excluído, enunciados anteriormente.



Aristóteles (384 - 322 a.C.) Os princípios de identidade, da contradição e do terceiro excluído, apesar de sua simplicidade, são fundamentais. Aristóteles formulou o Princípio da Contradição de, pelo menos, duas maneiras: "Nada pode ser e não ser simultaneamente" e "É necessário que toda asserção seja afirmativa ou negativa". O Princípio do Terceiro Excluído foi derivado do Princípio da Contradição muito mais tarde, no século XVIII. Eles se completam para determinar que as proposições simples são, ou verdadeiras, ou falsas. Por esta razão, diz-se que a lógica clássica é *bivalente*.

Nota

A Física também usa esta palavra neste sentido, como em "Princípio da Indeterminação de Heisenberg", proposto em 1927 por Werner Heisenberg e faz parte da teoria quântica. Esta teoria é bastante complicada, mas ela explica o comportamento dos átomos. O Princípio da Indeterminação diz que a posição e a velocidade das partículas atômicas não podem ser conhecidas ao mesmo tempo e com precisão.

A palavra princípio também pode ser usada como sinônimo de teorema, como no Princípio da Inclusão-Exclusão, enunciado no módulo 1, aula 4. Neste caso, trata-se de uma afirmação que deve ser demonstrada.

Werner Karl Heisenberg (1901 - 1976), físico alemão, formulou a *nova teoria da Mecânica Quântica* juntamente com Ernest Jordan, Erwin Schrödinger, Niels Bohr e Paul Dirac. Esta teoria depende muito de Matemática e valeu o Prêmio Nobel de Física de 1932.

Quantificadores

Vamos aprender agora mais um pouco do jargão matemático. Falaremos sobre *quantificadores*. Os quantificadores são expressões que aparecem, em geral, no início das frases matemáticas, cuja função é indicar o universo sobre o qual será feita a afirmação. Exemplos: "para todo", "cada", "existe um", "existe uma", "não existe algum", "não existe alguma", "nenhum", "nenhuma", "qualquer um", "qualquer uma" ...

Exemplo 4

As seguintes proposições têm o mesmo significado:

- Todo mundo é racional.
- Todas as pessoas são racionais.
- Cada pessoa é racional.
- Qualquer pessoa é racional.

O quantificador usado nestes exemplos é chamado de *quantificador universal*. Nós o representamos pelo símbolo $\forall$.

Exemplo 5

$\forall \alpha \in \mathbb{R},\ sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1.$

Esta proposição é verdadeira.

O seguinte exemplo apresenta o *quantificador existencial*. Mais uma vez, todas as proposições abaixo têm o mesmo significado.

Exemplo 6

- Alguma pessoa é bonita.
- Existe pessoa bonita.
- Pelo menos uma pessoa é bonita

Nós representamos este quantificador pelo símbolo $\exists$.

Exemplo 7

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \mid sen\ \alpha = 1.$$

Esta afirmação é verdadeira?

A resposta é sim. O seno do ângulo reto, por exemplo, é 1. Isto pode ser expresso da seguinte maneira: sen $\frac{\pi}{2} = 1$.

Os quantificadores universal e existencial são trocados um pelo outro quando fazemos a negação de uma proposição iniciada por um deles. Veja como funciona num exemplo:

Exemplo 8

A negação da proposição

p: *Todo* aluno é estudioso.

é

$\sim p$: *Existe* aluno não estudioso.

Uma outra maneira de enunciar a proposição $\sim p$ seria: há aluno que não é estudioso. Numa maneira tipicamente matemática seria: existe pelo menos um aluno não estudioso.

Atenção! A proposição q: "Nenhum aluno é estudioso" *não* é a negação de p.

Note a importância do quantificador usado na formação da proposição. As proposições:

$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 2$	e	$\exists\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 2$
(Para todo x em $\mathbb{R}$, $x^2 = 2$)		(Existe x em $\mathbb{R}$, tal que $x^2 = 2$)

são diferentes.

Resumindo:

Quantificadores: O *quantificador universal* é representado pelo símbolo $\forall$, que lê-se: "Para todo ..."; o *quantificador existencial* é representado pelo símbolo $\exists$, que lê-se: "Existe ..." Estes quantificadores são trocados um pelo outro quando fazemos a negação de uma proposição.

Atenção! Estamos chegando ao fim da aula. Bem, você está começando a perceber como a linguagem é **importante**. Matemática é muito sutil, pois um pequeno detalhe pode mudar completamente o sentido da proposição. Por exemplo, uma proposição do tipo $p \vee q$ pode ser verdadeira ao mesmo tempo que $p \wedge q$ é falsa. Isto significa uma simples troca de um "ou" por um "e". Precisamos estar atentos ao que dizemos, ao que o texto diz e, principalmente, a como devemos nos expressar.

Agora é hora de relaxar um pouco antes de seguir para a lista de exercícios. Você conhece *aquela* do engenheiro, do físico e do matemático? Os três amigos, um engenheiro, um físico e um matemático, estavam viajando de trem para o interior de São Paulo. Depois que o trem passou por Rio Claro, eles avistaram uma colina verdejante com uma linda vaca preta pastando. O engenheiro, que estava um pouco aborrecido com o papo um tanto abstrato de seus dois amigos, aproveitou para fazer o seguinte comentário: vejam, as vacas aqui são pretas! O físico olhou pela janela e retrucou: calma, aí! As vacas *deste* morro são pretas... O matemático lançou um olhar de censura sobre seus dois amigos e disse, balançando a cabeça, para enfatizar: nada disso, caríssimos! O que realmente podemos afirmar é que neste morro há uma vaca com o lado direito preto...

Exercícios

1. Determine quais das frases abaixo são proposições:
   - Cenouras são saudáveis.
   - O Brasil é um país tropical.
   - Todos os homens são astutos.
   - Faça as malas.
   - A paciência é uma virtude.
   - Debussy compôs duas sinfonias.
   - A paciência é um jogo.
   - Para todo mal há cura.
   - Todo mundo tem um segredo.
   - Não fume!
   - Todo amor é forte.
   - Quantos anos você tem?
   - O quadrado de cada número é não negativo.
   - Que calor!
   - Antonio Carlos Jobim, o Tom Jobim, é um compositor brasileiro.
   - Quanto custa esta mesa?
2. Construa a negação de cada uma das seguintes proposições:
   - A pera é uma fruta.
   - Algumas óperas são longas.
   - Todos gostam de dançar.
   - Algumas pessoas não têm carro.
   - Todos têm televisores e aparelhos de vídeo.
   - O dinheiro não traz a felicidade.
   - Todo desfile de escola de samba tem mestre-sala e porta-bandeira.
   - Dom Quixote é um personagem criado por Miguel de Cervantes.
   - Todo amor é forte.
   - Nenhum amor é fraco.

3. Escreva literalmente as seguintes proposições matemáticas:

   - $\forall\ x\ \in\ \mathbb{Z},\ x^2 \leq 0$

     Solução: Qualquer que seja o número inteiro x, $x^2 \leq 0$.

     Esta proposição é falsa.
   - $\forall\ \alpha \in\ \mathbb{R},\ tg^2\ \alpha = sec^2\ \alpha - 1$
   - $\exists\ x\ \in\ \mathbb{R}\ |\ \sqrt{x} = 4$
   - $\exists\ x\ \in\ \mathbb{N}\ \ |\ 2|x\ \vee\ 3|x$

     Solução: Existe um número natural x tal que 2 divide x ou 3 divide x. Solução alternativa: Existe um número natural x divisível por 2 ou divisível por 3.
   - $\exists\ x \in \mathbb{R}\ |\ \text{sen}\ \ x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   - $\forall\ x \in \mathbb{Q},\ \exists\ p, q \in \mathbb{Z}\ |\ x = \frac{p}{q}$.
   - $\exists\ x \in \mathbb{Q}\ |\ x^2 = \frac{9}{25}$.
   - $\forall\ r \in \mathbb{R},\ r > 0, \exists\ K \in \mathbb{N}\ |\ n > K \Longrightarrow \frac{1}{n} < r$.

A notação $a|b$ é lida da seguinte maneira: a divide b, isto é, b é um múltiplo de a.

Resumo da Ópera

Nesta aula você aprendeu que:

1. em lógica, lidamos com *proposições* que são sentenças declarativas, cada uma delas possuindo um valor-verdade, verdadeiro ou falso. A representação das proposições se faz por letras minúsculas como p, q etc.;

2. para cada proposição p corresponde a sua negação: $\sim p$. As proposições p e $\sim p$ têm valores-verdade opostos;

3. dadas duas proposições p e q, podemos construir duas outras proposições:

   $p \wedge q$ (conjunção, p e q)
   $p \vee q$ (disjunção, p ou q)

4. em Matemática usamos dois quantificadores:

   $\forall$ (universal, qualquer que seja ...)
   $\exists$ (existencial, existe um ...)

   Estes quantificadores trocam de papéis quando fazemos a negação de uma proposição.

Auto-avaliação

É muito bom que você tenha chegado até aqui. Esta primeira aula sobre lógica contém informações novas e é natural que você tenha dúvidas. Lembre-se, só não tem dúvidas quem não estuda! Uma boa maneira de avaliar o trabalho é medir relativamente os progressos e as dificuldades. Você pode começar a sua avaliação da seguinte maneira:

Releia os objetivos desta aula. Foram alcançados? Comente-os.

Releia especialmente os exemplos e tente relacioná-los com os exercícios propostos.

Na próxima aula você aprenderá mais sobre as regras da lógica e como podemos estabelecer se uma proposição é verdadeira ou não, construindo as tabelas-verdade.

Até lá!

Aula 27 – Tabelas-verdade e leis da lógica

Objetivos

- Nesta aula você aprenderá a construir as **tabelas-verdade** para proposições compostas.
- Aprenderá também as **principais leis da lógica** e as **implicações ou proposições condicionais**.

Tabelas-verdade

Na aula anterior você deve ter percebido a importância da familiaridade com a terminologia matemática. Dando continuidade a este processo, descubra agora **o que é** e **como é construída** uma **tabela-verdade**.

O valor-verdade de cada proposição é sempre, ou verdadeiro (V), ou falso (F). O valor-verdade de uma proposição composta é determinado pelos valores-verdade de cada uma das proposições que a compõem. Na tabela-verdade apresentamos todas as possibilidades. Por exemplo, considere a conjunção das proposições p e q, que denotamos por $p \wedge q$. Lembre-se de que $p \wedge q$ é verdadeira apenas quando ambas proposições, p e q, são verdadeiras. Há quatro possibilidades:

- p é verdadeira e q é verdadeira.
- p é verdadeira e q é falsa.
- p é falsa e q é verdadeira.
- p é falsa e q é falsa.

A tabela-verdade correspondente é:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

As tabelas-verdade correspondentes às proposições $\sim p$ (não p) e $p \vee q$ (p ou q) são:

p	$\sim p$
V	F
F	V

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Equivalência lógica e leis da lógica

É possível expressar uma proposição de diferentes maneiras. Por exemplo, podemos negar a proposição – "Marcos é pintor e gosta de pescar" dizendo "Não é verdade que Marcos é pintor e gosta de pescar". Uma outra maneira é "Marcos não é pintor ou não gosta de pescar". Estas duas últimas afirmações são ditas *logicamente equivalentes*.

A importância prática deste conceito é a seguinte – duas proposições logicamente equivalentes são, sob o ponto de vista da lógica, a mesma coisa. No entanto, podem apresentar pontos de vista diferentes, facilitando a nossa compreensão, aprofundando o nosso entendimento do conteúdo que ela reveste.

Logicamente equivalentes: Duas proposições são ditas *logicamente equivalentes* quando têm os mesmos valores-verdade em todos os casos possíveis. Quando duas proposições, p e q, são equivalentes, usamos a seguinte notação:

$$p \equiv q.$$

As tabelas-verdade são úteis para detectar quando duas proposições são logicamente equivalentes. O exemplo – "Não é verdade que Marcos é pintor e gosta de pescar" é um caso particular da situação $\sim (p \wedge q)$ equivalente a $\sim p \vee \sim q$, em que p é "Marcos é pintor" e q é "Marcos gosta de pescar".

Exemplo 9

Vamos mostrar, usando uma tabela-verdade, que as proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são logicamente equivalentes. Aqui, veja como é fácil preencher as tabelas, contanto que o trabalho seja feito por etapas. Antes de mais nada, iniciamos construindo uma tabela que tenha cinco linhas: na primeira delas alinharemos as diferentes etapas e nas outras quatro consideraremos todas as possibilidades, já que contamos com duas proposições básicas, p e q.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Agora, para se chegar ao valor-verdade de $\sim (p \wedge q)$ é simples. Primeiro, obtenha o valor-verdade de $p \wedge q$ e depois, num segundo passo, obtenha o valor-verdade de sua negação.

Comece preenchendo, na tabela, os valores-verdade das proposições $p \wedge q$, $\sim p$ e $\sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V		F	F	
V	F	F		F	V	
F	V	F		V	F	
F	F	F		V	V	

Agora, num segundo passo, complete a tabela preenchendo as colunas correspondentes às proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$.

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Veja que na tabela completa podemos comparar as duas colunas correspondentes às proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$. Como as duas colunas são iguais, as proposições são logicamente equivalentes.

Resumindo, $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$.

Antes de prosseguirmos, tente você construir a tabela-verdade de

$$p \wedge (q \vee r).$$

A proposição $p \wedge (q \vee r)$ é composta por três proposições: p, q e r. Sua tabela terá, além da primeira linha, mais $8 = 2^3$ linhas. Preencha primeiro a quarta coluna, usando as colunas dois e três. Depois, usando a primeira e a quarta, preencha a última coluna. Por exemplo, na terceira linha em branco, q é falso e r é verdadeiro. Portanto, o valor-verdade de $q \vee r$ é verdadeiro e marcamos um V na quarta coluna. Agora, na primeira coluna vemos que p é verdadeiro e, na quarta coluna, $q \vee r$ verdadeiro. Portanto, $p \wedge (q \vee r)$ é verdadeiro, e marcamos outro V na última coluna.

Lembre-se do Princípio Fundamental de Contagem apresentado no módulo 1, aula 6. Quantas linhas seriam necessárias para 4 proposições conectadas? Quantas para n proposições conectadas?

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V	V	V
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

Lembre-se das tabelas-verdade das proposições $p \vee q$ e $p \wedge q$:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Leis da Lógica

Usaremos, agora, **o conceito de equivalência lógica para expressar algumas das leis da lógica**. Elas são usadas para reescrevermos algumas proposições de maneiras diferentes, porém equivalentes, do ponto de vista lógico.

A mais simples é a lei de idempotência.

Expressando as Leis da Lógica...

Lei de Idempotência: Para qualquer proposição p,

$$p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p.$$

Além disso, os conectivos $\wedge$ e $\vee$ são comutativos e associativos.

Leis de Comutatividade: Dadas duas proposições quaisquer, p e q,

$$p \wedge q \equiv q \wedge p; \qquad p \vee q \equiv q \vee p.$$

Leis de Associatividade: Dadas três proposições quaisquer, p, q e r,

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r); \qquad (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r).$$

As leis de associatividade permitem que escrevamos simplesmente $p \vee q \vee r$ em vez de $(p \vee q) \vee r$ ou $p \vee (q \vee r)$.

As leis que veremos a seguir relacionam os dois conectivos $\vee$ e $\wedge$. Vejamos como elas são aplicadas, num exemplo, antes de enunciá-las.

Exemplo 10

Consideremos as seguintes proposições:

p: 2 é um número inteiro;

q: 2 é maior do que 3;

r: 2 é um número primo.

Conectando-as podemos montar as seguintes proposições:

a: 2 é um número inteiro, ou 2 é maior do que 3 e primo.

b: 2 é um número inteiro ou maior do que 3, e 2 é um número inteiro ou primo.

As proposições $a \equiv p \vee (q \wedge r)$ e $b \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ são logicamente equivalentes. Este é um caso particular da lei de distributividade. Para completar o exemplo, vamos determinar o valor-verdade das proposições. A proposição a é a proposição $p \vee (q \wedge r)$. É claro que p é verdadeira, q é falsa e r é verdadeira. Como q é falsa, $q \wedge r$ é falsa. Mas, sendo p verdadeira, a proposição final $p \vee (q \wedge r)$ é verdadeira. Por sua vez, a proposição b é a proposição $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Então, $p \vee q$ e $p \vee r$ são ambas verdadeiras. Portanto, b é uma proposição verdadeira.

Leis de Distributividade: Dadas três proposições quaisquer, p, q e r,

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{e}$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Volte alguma páginas e faça uma nova leitura e análise do exemplo 9.

A lei que você conhecerá agora já foi considerada nesse exemplo. Ela é uma das leis de De Morgan. Lembre-se também que este tema já foi abordado no módulo 1, aula 3.

Na última aula você aprendeu que a palavra "princípio" pode ser usada como sinônimo de axioma ou de teorema. A mesma coisa acontece com a palavra "lei".

Nesta aula a palavra "lei" está sendo usada como sinônimo de teorema. Isto é, ela está sendo usada para indicar quando determinadas proposições são logicamente equivalentes e, para que estas leis possam "valer", devemos constatar a equivalência usando tabelas-verdade.

Leis de De Morgan: Para quaisquer proposições, p e q,

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q; \qquad \sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

Lembre-se que no exemplo 9 a construção da tabela-verdade mostrou que as proposições $\sim (p \wedge q)$ e $\sim p \vee \sim q$ são equivalentes. A tabela-verdade abaixo mostrará que as proposições $\sim (p \vee q)$ e $\sim p \wedge \sim q$ também são equivalentes:

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Vejamos agora o enunciado das leis de De Morgan na versão da Teoria de Conjuntos:

Sejam A e B conjuntos. Então:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Vamos mostrar que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Neste caso, o conjunto $A \cup B$ é caracterizado pela afirmação $x \in A$ ou $x \in B$. O seu complementar é caracterizado pela negação desta afirmação: $\sim (x \in A \ \vee \ x \in B)$. Pela lei de De Morgan (que acabamos de mostrar) esta afirmação é equivalente a $x \notin A \ \wedge x \notin B$, que caracteriza o conjunto $A^c \cap B^c$. Logo, os conjuntos são iguais.

Agora, a demonstração do segundo caso. Para provar que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ vamos usar a igualdade $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, que acabamos de provar, mais o fato de que o complementar do complementar de qualquer conjunto, é o próprio conjunto: $\big(X^c\big)^c = X$.

Realmente,

$$A^c \cup B^c = \Big(\big(A^c \cup B^c\big)^c\Big)^c = \Big(\big(A^c\big)^c \cap \big(B^c\big)^c\Big)^c = (A \cap B)^c.$$

Isto completa a prova das Leis de De Morgan da Teoria de Conjuntos.

Exemplo 11

As leis de De Morgan são usadas para reescrevermos as negações de proposições. Considere a seguinte proposição:

"Todo número par é divisível por 2 *e* existe um número inteiro n tal que $2n = 3$".

Sua negação é:

"Existe um número par que não é divisível por 2 *ou* todo número inteiro n é tal que $2n \neq 3$".

Finalmente veremos como, em certas situações, podemos *compactar* uma proposição.

Leis de Absorção: Para quaisquer duas proposições, p e q,

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p; \qquad p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Vamos construir a tabela de $p \vee (p \wedge q)$. Começamos com a tabela de $p \wedge q$ e, depois, usamos as colunas correspondentes às proposições p e $p \wedge q$ para completar a última coluna, que é a correspondente a $p \vee (p \wedge q)$.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	F
F	F	F	F

As colunas de p e de $p \vee (p \wedge q)$ são iguais, provando que as proposições são logicamente equivalentes: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

Quadro-Resumo

Para finalizarmos esta parte, vamos montar um quadro com o resumo das principais leis da lógica.

Leis de Distributividade	
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Leis de De Morgan	
$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Leis de Absorção	
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Exercícios

1. Construa a tabela-verdade para cada uma das seguintes proposições compostas:

   (a) $p \vee \sim q$

   (b) $(\sim p) \vee (\sim q)$

   (c) $\sim p \wedge \sim q$

   (d) $\sim (\sim p \wedge q)$

   (e) $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

   (f) $p \wedge (q \vee \sim q)$

   (g) $(p \wedge \sim q) \vee r$

   (h) $(\sim p \vee q) \wedge \sim r$

2. Use a tabela-verdade para provar a seguinte lei de distributividade: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$. Para isto, preencha a tabela abaixo por etapas.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee q$	$p \vee r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

3. Faça o mesmo para as leis de Absorção:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

e

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p.$$

Implicações ou Proposições Condicionais

Há frases que se compõem de uma **condição** e uma **conseqüência**, como se dá no seguinte exemplo:

Se não chover irei à sua festa.

Frases deste tipo interessam particularmente aos matemáticos. Aqui estão alguns exemplos:

Se n é um inteiro ímpar, então n^2 é ímpar.

Se r é um número real tal que $r^2 = 2$, então r é irracional.

Se ABC é um triângulo tal que A está no centro de um círculo e B e C pertencem à circunferência do círculo, então o triângulo ABC é isósceles.

Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados de medidas iguais, ou dois ângulos internos de medidas iguais.

Sejam p e q duas proposições. Chamamos a proposição

$$\text{Se } p, \text{ então } q$$

de uma *implicação*. O conectivo *Se ..., então ...* caracteriza uma condição. A notação desta proposição é

$$p \Longrightarrow q$$

A proposição p é chamada de *hipótese* e a proposição q de *conclusão* ou *tese*. O valor-verdade da proposição $p \Longrightarrow q$ depende dos valores-verdade da hipótese e da conclusão. Ela é falsa apenas quando p é verdade e q é falsa.

Na verdade, a proposição $p \Longrightarrow q$ é logicamente equivalente à proposição $\sim p \vee q$. Aqui está a tabela-verdade de $\sim p \vee q$.

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \Longrightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Observemos, num exemplo, as diferentes possibilidades de valor-verdade de uma proposição do tipo $p \Longrightarrow q$.

Exemplo 12

Vamos considerar o seguinte:

Se eu ganhar na loteria, então nós viajaremos para Fortaleza.

Lembre-se da tabela-verdade da proposição $p \Rightarrow q$:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A primeira possibilidade corresponde à situação (ideal) p e q verdadeiras. Eu ganho na loteria, viajamos para Fortaleza, a promessa é cumprida e $p \Longrightarrow q$ é verdadeira.

No caso de ganhar na loteria, e não viajarmos para Fortaleza, a promessa estará quebrada. Isto corresponde ao caso p verdadeira e q falsa. Portanto, $p \Longrightarrow q$ é falsa.

Agora, apesar de eu não ter ganho na loteria, viajamos para Fortaleza. Ótimo! A afirmação $p \Longrightarrow q$ não pode ser contestada. Isto corresponde ao caso p falsa, q verdadeira e $p \Longrightarrow q$ verdadeira.

A última possibilidade – nada de loteria, nada de viagem a Fortaleza, nada de promessa quebrada – corresponde ao caso p e q falsas e $p \Longrightarrow q$ verdadeira.

Note que, quando a hipótese p é falsa, independente do valor-verdade da conseqüência q, a implicação $p \Longrightarrow q$ é verdadeira.

Portanto, a única chance de $p \Longrightarrow q$ ser falsa é quando temos uma situação em que a hipótese é verdadeira e a conseqüência é falsa.

Faça uma análise semelhante considerando a proposição

Se o tempo estiver bom, irei à praia.

Observe que, no discurso mais coloquial, a palavra "então" pode ser dispensada.

Há maneiras ligeiramente diferentes de enunciar a proposição $p \Longrightarrow q$. Algumas são:

- Se p, então q.
- p implica q.
- Para que p seja verdadeira, é necessário que q seja verdadeira.
- Para que q seja verdadeira, é suficiente que p seja verdadeira.

Reescreva a proposição abaixo de diferente maneiras.

Se recebermos uma boa oferta, venderemos o terreno.

Quando trocamos a hipótese pela conseqüência de uma proposição $p \Longrightarrow q$, estamos criando uma nova proposição:

$$q \Longrightarrow p$$

chamada de *conversão* de $p \Longrightarrow q$.

Atenção! Não cometa o erro de pensar que $p \Longrightarrow q$ e sua conversão $q \Longrightarrow p$ são logicamente equivalentes. Veja numa tabela-verdade a comparação das duas proposições:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Vamos a um exemplo.

Exemplo 13

Tomemos a proposição do tipo $p \Longrightarrow q$:

Se Linda é brasileira, então ela gosta de samba.

A conversão desta proposição é outra proposição:

Se Linda gosta de samba, então ela é brasileira.

Considere as diferentes possibilidades. Especialmente a situação em que Linda, caindo numa roda de samba, fazendo inveja às melhores passistas do lugar, acaba confessando ser uma americana de Miami. Isto é, p é falsa mas q é verdadeira. A proposição “Se Linda é brasileira, então ela gosta de samba” é verdadeira (pois não é falsa, coisa de lógica aristotélica), mas a sua conversão “Se Linda gosta de samba, então ela é brasileira” é falsa pois, exatamente como no caso acima, gostar de samba não é coisa apenas de brasileiros ou brasileiras.

Vamos continuar com este exemplo um pouco mais. Tomemos a seguinte proposição:

Se Linda não gosta de samba, então ela não é brasileira.

Esta proposição é da forma $\sim q \Longrightarrow \sim p$. Vamos calcular a sua tabela-verdade e compará-la com $p \Longrightarrow q$.

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

As proposições $p \Longrightarrow q$ e $\sim q \Longrightarrow \sim p$ são logicamente equivalentes.

Dada a proposição $p \Longrightarrow q$, chamamos de *contrapositiva* a proposição $\sim q \Longrightarrow \sim p$. Elas são logicamente equivalentes.

É útil olhar para a contrapositiva pois permite um diferente ponto de vista da mesma proposição, uma vez que elas são logicamente equivalentes.

Há um tipo de proposição composta por duas proposições iniciais p e q que ocorre com certa freqüência: $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. Isto é, p implica q e q implica p. Damos um nome especial a esta proposição.

O conectivo *se, e somente se* é dito conectivo *bicondicional* e é denotado pelo símbolo $\Longleftrightarrow$. A proposição

$$p \Longleftrightarrow q$$

é equivalente à proposição $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$. A proposição $p \Leftrightarrow q$ também pode ser lida como "p é necessário e suficiente para q" e é verdadeira, quando ambas proposições têm o mesmo valor-verdade.

Usando a versão $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ de $p \Longleftrightarrow q$, vamos montar a sua tabela-verdade.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Tautologias

Uma tautologia é uma proposição composta que é verdadeira qualquer que seja o valor-verdade das proposições que a compõem. Para averiguarmos se uma proposição composta é uma tautologia, é necessário fazer sua tabela-verdade. Um exemplo bem simples é a proposição

$$p \vee \sim p$$

Sua tabela-verdade é

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
V	F	V
F	V	V

Um outro exemplo de tautologia envolve o conectivo condicional:

$$(p \wedge q) \Longrightarrow p$$

cuja tabela-verdade é:

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Exercícios

1. Construa as respectivas tabelas-verdade para constatar que as seguintes proposições são tautologias:

   (a) $\sim (p \wedge \sim p)$

   (b) $((p \Rightarrow q) \ \wedge \ p) \Rightarrow q$

   (c) $p \Rightarrow (p \ \wedge \ q)$

   (d) $\sim (p \ \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Auto-avaliação

Esta aula contém bastante informação e para que você possa familiarizar-se com estas novidades é muito importante que você resolva os exercícios. Ao fazê-lo, anote os que achou mais difíceis. Escolha também aqueles de que você gostou mais.

Bom trabalho!

Aula 28 – Argumentos e Provas

Objetivo

- Nessa aula você aprenderá as estratégias básicas de argumentação e demonstração.

Definindo Argumentação

Uma argumentação constitui-se de uma coleção de proposições (*premissas*) e uma proposição final (*conclusão*). Do ponto de vista da lógica, para que uma argumentação seja *válida*, é necessário que a conclusão seja uma conseqüência das premissas. Isto é, no caso de as premissas serem verdadeiras, sabemos que a conclusão é verdadeira.

Premissas: Todo homem é mortal.
Sócrates é homem.

Conclusão: Sócrates é mortal.

Este exemplo tem uma importância histórica e aparece em quase todo texto sobre lógica. Ele é um *silogismo*, que se constitui de duas premissas e uma conclusão, foi formulado por Aristóteles, em seu tratado *Primeiros Analíticos*, sobre lógica.

Consideremos também um exemplo mais prosaico:

Premissas: Todos os brasileiros gostam de feijoada.
Todos os cariocas são brasileiros.

Conclusão: Todos os cariocas gostam de feijoada.

Vamos à definição do que é um *argumento válido*.

Um *argumento* consiste de uma série de proposições chamadas *premissas* e uma proposição chamada *conclusão*. Dizemos que o argumento é *válido* se, sempre que todas as premissas forem verdadeiras, isto é, se a *conjunção* delas for verdadeira, então, a conclusão será verdadeira. Em outras palavras, um argumento com premissas $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e conclusão c é valido se:
sempre que $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$ for verdadeira, então a implicação

$$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow c$$

será verdadeira
Um argumento é *inválido* se a conclusão não é conseqüência das premissas. Isto é, mesmo no caso em que as premissas sejam verdadeiras, a conclusão pode ser falsa. Um argumento inválido também é chamado de *falácia*.

Exemplo 14

Vamos considerar o seguinte argumento:

Premissas:

p_1: Se você estudar, você passará no teste.

p_2: Você estuda.

Conclusão:

c: Você passará no teste.

Suponhamos que uma condição suficiente para passar no teste é estudar. Isto é, vamos considerar que caso você estude, então você passará no teste. Você estuda! A conclusão é: você passará no teste.

Vamos analisar mais detalhadamente a situação. Temos apenas duas proposições básicas:

p: Você estuda.

q: Você passa no teste.

Devemos verificar que, quando $p \Rightarrow q$ e q são verdadeiras, a implicação

$$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$$

será verdadeira.

Vamos usar uma tabela-verdade.

Esta tabela apresenta uma situação interessante. Note que, independente de qual seja o valor-verdade das proposições p e q, a proposição $((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$ será verdadeira. Ela é um exemplo de uma *tautologia*.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$((p \Rightarrow q) \wedge p) \Rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

A primeira linha da tabela mostra que, quando $p_1 = (p \Rightarrow q)$ e $p_2 = p$ são ambas verdadeiras, temos que a conclusão $c = q$ é verdadeira. Isto significa que os argumentos da forma

Premissas: $p \Rightarrow q$

p

Conclusão: q

são válidos.

O argumento que acabamos de exemplificar é chamado de *método direto* ou *modus ponens*.

Exemplo 15

Este exemplo ilustrará um outro tipo de argumento muito usado.

Premissas:

p_1: Se não chover, Mateus irá ao parque.

p_2: Se Mateus for ao parque, ele brincará com seus amigos.

Conclusão:

c: Se não chover, Mateus brincará com seus amigos.

Para analisá-lo, vamos considerar as seguintes proposições básicas:

p: Não chover.

q: Mateus vai ao parque.

r: Mateus brinca com seus amigos.

A estrutura deste argumento é

Premissas: $p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$

Conclusão: $p \Rightarrow r$

Este argumento é válido. Veja a tabela-verdade:

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow r$	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

As linhas 1, 5, 7 e 8 indicam que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão é verdadeira.

A **Lei do Silogismo** afirma que os argumentos do tipo

Premissas: $p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow r$

Conclusão: $p \Rightarrow r$

são válidos.

Exemplo 16

Vamos agora considerar a seguinte situação:

Premissas:

p_1: Se eu ganhar o prêmio de fim de ano da companhia, nós passaremos um fim de semana em Búzios.

p_2: Passamos um (ótimo) fim de semana em Búzios.

Conclusão:

c: Ganhei o (cobiçado) prêmio da companhia.

Este argumento é formado por apenas duas proposições simples:

p: "Eu ganho o prêmio da companhia"

e

q: "Nós passamos um fim de semana em Búzios".

A estrutura deste argumento é

Premissas: $p \Rightarrow q$
q

Conclusão: p

Você já deve estar desconfiado de alguma coisa errada nesta história... Realmente, este argumento **não é válido!**

Vejamos a tabela-verdade de $((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$	$((p \Rightarrow q) \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

A terceira linha mostra uma situação onde $p_1 = (p \Rightarrow q)$ e $p_2 = q$ são verdadeiras mas $c = p$ é falsa. Compare este exemplo com o exemplo 14, o chamado método direto. Estes argumentos são parecidos. Cuidado para não os confundir.

Para finalizar, vamos resumir os argumentos válidos que exemplificamos nesta aula:

- Método direto: Se você estudar então você passará no teste. Você estuda. Então você passará no teste.

  Premissas: $p \Rightarrow q$
  p
  Conclusão: q

- Lei do silogismo: Se não chover, Mateus irá ao parque e, indo ao parque, ele brincará com seus amigos. Portanto, se não chover, Mateus brincará com seus amigos.

  Premissas: $p \Rightarrow q$
  $q \Rightarrow r$
  Conclusão: $p \Rightarrow r$

Exercícios

Em cada um dos argumentos abaixo, destaque as proposições simples que compõem as premissas e as conclusões. Construa uma tabela-verdade com base nas proposições simples e nas premissas, concluindo com a coluna $(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \Rightarrow c$. Determine, então, a validade ou não do argumento. Os três primeiros exercícios da lista estão com a solução. Dê a sua própria solução e então compare com a solução dada. Vá em frente!

1. Se o cachorro escapar, ele pegará o gato. Se o gato for pego, eu estarei em apuros. Portanto, se o cachorro escapar, eu estarei em apuros.

   Solução: Este argumento têm as proposições básicas

   p: O cachorro escapa.
   q: O cachorro pega o gato.
   r: Eu estou em apuros.

   O argumento está estruturado da seguinte forma:

   $p_1 = p \Rightarrow q$: Se o cachorro escapa, ele pegará o gato.
   $p_2 = q \Rightarrow r$: Se o gato for pego (pelo cachorro), eu estarei em apuros.

   $c = p \Rightarrow r$: Se o cachorro escapar, eu estarei em apuros.

   Este tipo de argumento é válido. A construção da tabela-verdade está feita no exemplo 15. Este é um argumento validado pela Lei dos Silogismos.

2. Todas as pessoas inteligentes gostam de Matemática. Romeu é uma pessoa. Romeu não gosta de Matemática. Portanto, Romeu não é inteligente.

Solução: Note que podemos reescrever o argumento da seguinte maneira: Se uma pessoa é inteligente, então esta pessoa gosta de Matemática. Romeu é uma pessoa e não gosta de Matemática. Portanto, Romeu não é inteligente.

Dessa forma, podemos usar as seguintes proposições básicas para analisar o argumento:

p: Uma pessoa é inteligente.
q: Uma pessoa gosta de Matemática.
r: Romeu é uma pessoa.

O argumento está estruturado da seguinte maneira:

Premissas:
$p_1 = p \Rightarrow q$: Se uma pessoa é inteligente, então esta pessoa gosta de Matemática.
$p_2 =\sim q \wedge r$: Uma pessoa não gosta de Matemática e esta pessoa é Romeu.
Conclusão:
$p_3 =\sim p \wedge r$: Uma pessoa não é inteligente e esta pessoa é Romeu.

Para analisarmos a validade do argumento temos que saber se, sempre que as premissas forem verdadeiras, a conclusão será verdadeira ou, equivalentemente, se a implicação $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3$ é verdadeira. Ou seja, vamos fazer a tabela-verdade da proposição $((p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \wedge r)) \Rightarrow (\sim p \wedge r)$. Vamos chamar de p_1 a proposição $p \Rightarrow q$ e de p_2 a proposiçao $\sim q \wedge r$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$\sim q \wedge r$	$p_1 \wedge p_2$	$\sim p \wedge r$	$(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3$
V	V	V	V	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	F	V

A linha sete é a única onde as premissas, $p_1 = p \Rightarrow q$ e $p_2 =\sim q \wedge r$, são ambas verdadeiras. A conclusão p_3, bem como a proposição $(p_1 \wedge p_2) \Rightarrow p_3$, são verdadeiras. Isto quer dizer que o argumento é válido.

3. Se Alfredo comer lagosta, ele ficará feliz. Alfredo come lagosta. Podemos concluir que ele está feliz.

4. Se eu trabalhar com afinco, terminarei de pintar minha cerca. Se eu não ficar batendo papo com os amigos, eu trabalharei com afinco. Eu não terminei de pintar minha cerca. Podemos concluir que fiquei batendo papo com meus amigos.

5. Se eu comer agrião todos os dias, eu viverei mais do que 80 anos. Eu não como agrião todos os dias. Lamentavelmente eu não chegarei à veneranda idade de 80 anos.

6. Se, ao dirigir meu carro, eu não ultrapassar os 80 km por hora, eu não provocarei acidentes. Eu dirijo meu carro a 100 km por hora. Portanto, eu provocarei acidentes.

7. Se fizer bom tempo, dará praia. Se eu levar minha bola de vôlei, Mariana ficará super feliz. Deu praia, mas Mariana não ficou super feliz. Podemos concluir que, eu, cabeça de bagre, esqueci minha bola de vôlei.

8. Se Maria vier, Joana virá. Se Carla não vier, Joana não virá. Podemos concluir que, se Maria vier, Carla virá.

9. Se Luiz souber poupar seu dinheiro, ele ficará rico. Se Luiz ficar rico, ele comprará um carro novo. Luiz comprou um carro novo. Podemos, então, concluir que ele soube poupar seu dinheiro.

Auto-avaliação

Você deve ter notado que esta aula foi diferente da aula anterior. Ela contém menos informações, mas estas requerem um tipo diferente de atenção. É necessário um tempo maior de reflexão. Leia os exemplos vagarosamente. Dedique atenção aos exercícios propostos.

Aproveite!

Aula 29 – Estratégias básicas para demonstrações em Matemática

Objetivo

- Esta será uma aula prática. Nela você poderá verificar, pelo menos em algumas situações simples, como o matemático faz uso da lógica.

A maioria das proposições (ou das funções proposicionais) com que lidamos em Matemática são da forma $p \Rightarrow q$ ou $p \Leftrightarrow q$. Isto é, implicações e bicondicionais. Como a bicondicional $p \Leftrightarrow q$ é equivalente à $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$, consideraremos apenas o caso de implicações.

Aqui está um exemplo:

Afirmar que n é um número ímpar significa dizer que n é um número inteiro da forma $2k+1$ para algum inteiro k. Em particular, -201 é ímpar bem como 2001.

Teorema 1
Se n é ímpar então n^2 é ímpar.

Este teorema tem a forma $p \Rightarrow q$ com (p: n é ímpar) e (q: n^2 é ímpar).

A proposição p é a hipótese e q é a conclusão ou tese.

Há três situações onde a proposição $p \Rightarrow q$ é verdadeira:

Apresentando teoremas...

1. Quando p e q são ambas verdadeiras;
2. Quando p é falsa e q é verdadeira;
3. Quando p e q são ambas falsas.

Note que se p é falsa, independentemente do valor-verdade de q, a proposição $p \Rightarrow q$ será verdadeira. Conseqüentemente devemos nos preocupar apenas com a situação em que p é verdadeira. Neste caso, $p \Rightarrow q$ será verdadeira apenas quando q for verdadeira.

Resumindo, para provar que $p \Rightarrow q$ é verdadeira, isto é, para provar que p implica q, basta assumir que p é verdadeira e, sob esta condição, mostrar que q é verdadeira. Esta estratégia é chamada de *método direto*.

Vamos usá-la para demonstrar o teorema 1.

Começamos assumindo que p, a hipótese, é verdadeira. Isto é, supomos que n é ímpar. Portanto, podemos afirmar que existe um inteiro k tal que $n = 2k+1$. Mas, então, $n^2 = (2k+1)^2 = (2k+1)(2k+1) = 4k^2+4k+1$. É claro que podemos, fazendo $l = 2k^2+2k$, escrever $n^2 = 2(2k^2+2k)+1 = 2l+1$.

Isto quer dizer que a tese, $q : n^2$ é ímpar, é verdadeira e o teorema 1 está provado.

Os argumentos anteriores nos levam mais além do que esperávamos. Na verdade, pode-se provar o seguinte teorema:

Teorema 2

Se n é ímpar, então n^2 é da forma $8m + 1$, para algum inteiro m.

Realmente, consideremos alguns exemplos:

$$\begin{array}{ccccc} 5^2 & = & 25 & = & 8 \times 3 + 1 \\ 9^2 & = & 81 & = & 8 \times 10 + 1 \\ 11^2 & = & 121 & = & 8 \times 15 + 1 \\ 1307^2 & = & 1708248 & = & 8 \times 213531 + 1. \end{array}$$

Note que, por mais convincentes que estas "evidências" possam ser, elas não são suficientes para "provar" o teorema.

Tente você, usando o método direto, provar o teorema 2.

Lembre-se agora que a proposição $p \Rightarrow q$ é equivalente à proposição $\sim q \Rightarrow \sim p$, chamada contrapositiva. Isto nos dá uma segunda estratégia para demonstrar teoremas com enunciados da forma p implica q. Usamos o método direto na sua contrapositiva. Em outras palavras, assumimos que $\sim q$ é verdadeira e provamos que $\sim p$ é verdadeira.

Vamos a um exemplo. Queremos provar o seguinte teorema.

Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *injetora* se para todos elementos a e $b \in A$, com $a \neq b$, tivermos $f(a) \neq f(b)$. Isto é, a função transforma elementos diferentes de A em elementos diferentes em B. As funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais, são chamadas de *funções afins*.

Teorema 3

A função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - 5$, é injetora.

Devemos provar que $x \neq y$ implica $3x - 5 \neq 3y - 5$. Usando o *método da contrapositiva*, vamos mostrar que $3x - 5 = 3y - 5$ implica $x = y$. Ora, se a $3x - 5 = 3y - 5$, somarmos 5 a ambos os lados da igualdade, obteremos $3x = 3y$. Agora podemos multiplicar esta igualdade por $\frac{1}{3}$ para obtermos $x = y$. Isto conclui a prova.

Experimente escrever o seguinte teorema na forma contrapositiva.

Teorema 4

Se $x + 2y \neq 0$ ou $x + 3y \neq 0$, então $x^2 + y^2 \neq 0$.

Lembre-se de que $\sim (p_1 \vee p_2) \equiv (\sim p_1) \wedge (\sim p_2)$.

A estratégia, que exemplificaremos agora, chama-se *método da contradição* ou *redução ao absurdo* (em latim, *reductio ad absurdum*) e se baseia no seguinte: a implicação $p \Rightarrow q$ é falsa *apenas* no caso em que p é verdadeira e q é falsa.

Começamos a prova assumindo que isto acontece e tentamos chegar a uma contradição. Ao chegar a uma contradição, concluímos que a possibilidade suposta não ocorre e, portanto, a implicação $p \Rightarrow q$ fica demonstrada. Este método é poderoso, extremamente útil. A dificuldade que ele apresenta, comparado com os métodos vistos anteriormente, é que nos outros casos sabíamos exatamente onde começar e onde terminar. Já no caso do método da contradição, não sabemos, antecipadamente, qual será a contradição. Mas, chega de conversa e vamos a um exemplo.

Teorema 5

Se $r \in \mathbb{R}$ é um número real tal que $r^2 = 2$, então r não é racional.

Lembre-se de que um número real $r \in \mathbb{R}$ é dito racional se puder ser escrito da forma $r = \frac{m}{n}$, onde m e n são números inteiros. A hipótese p é que $r^2 = 2$ e a conclusão q é que r não é racional. Então consideremos $p \wedge (\sim q)$. Isto é, vamos assumir que $r^2 = 2$ e que existem inteiros m e n tais que $r = \frac{m}{n}$. Vamos agora mexer nosso caldo para ver se conseguimos um bom pirão. Ou seja, vamos "navegar" com estas informações, acrescentando fatos conhecidos, para ver se chegamos à tal contradição. Quando lidamos com uma fração, a primeira coisa a fazer é escrevê-la da maneira mais simples possível. Ninguém vai usar $\frac{30}{25}$ mas, sim, $\frac{6}{5}$. Isto é, sempre que lidarmos com uma fração, é conveniente usar como numerador e denominador, números que não tenham divisores comuns. Vamos, portanto, supor que os divisores comuns de m e n foram "simplificados". Em termos científicos podemos dizer que m e n são primos entre si. Agora, $r^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2$ nos dá que $m^2 = 2n^2$ e concluímos que m^2 é par, logo, m é par. Isto é, $m = 2l$ para algum inteiro l. Mexendo mais um pouco na nossa panela, temos $m^2 = (2l)^2 = 4l^2 = 2n^2$ e, portanto, $n^2 = 2l^2$. Novamente, n^2 par implica n é par. Bom, podemos parar de mexer, pois o pirão já está no ponto. Lembre-se de que começamos com m e n primos entre si. Isto é, m e n não têm divisores comuns. Mas agora descobrimos que m e n são ambos pares e, portanto, ambos divisíveis por 2. Isto é uma sólida contradição e o teorema está demonstrado.

Note que a contrapositiva do teorema 1 é: "Se n^2 não é ímpar, então n não é ímpar" que pode ser escrita como "Se n^2 é par, então n é par".

A demonstração que acabamos de apresentar foi registrada em *Primeiros Analíticos*, uma das obras do *Organum*, de Aristóteles. Este resultado é historicamente muito importante. Na antiga Grécia, houve um grupo de matemáticos chamados pitagóricos que, sob a liderança de Pitágoras, produziram uma quantidade considerável de Matemática. Eles acreditavam que quaisquer dois segmentos de reta eram *comensuráveis*. Isto corresponde, de alguma maneira, a acreditar que todos os números reais são racionais. O erro cometido por eles não é grosseiro. Há muitas sutilezas envolvidas nestes raciocínios. Veja que a maioria da população lida, apenas, com os números racionais e nem se dá conta disto. Acontece que os Pitagóricos acabaram percebendo que o lado de um quadrado e sua diagonal não são comensuráveis. Veja que se tomamos um quadrado de lado 1, sua diagonal mede $\sqrt{2}$. Tal descoberta teve um impacto muito profundo entre os pitagóricos. A razão disso é que um grande número de teoremas de Geometria havia sido provado usando como verdadeiro o fato de que quaisquer dois segmentos são comensuráveis. Todas estas provas estavam erradas. Veja que os teoremas continuaram sendo verdadeiros, mas era necessário produzir novas provas. A história conta que Hippasus acabou sendo jogado no mar com um bom número de pedras amarradas em seus pés, bem ao estilo mafioso dos poderosos chefões. A verdade é que a comunidade precisou de um bom tempo para se recuperar deste episódio e aceitar este fato. Mais tarde, o grande matemático Eudoxos, contemporâneo de Platão e Aristóteles, produziu um método capaz de prover as demonstrações que ficaram faltando.

Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se existe uma unidade de comprimento $\overline{u}$ tal que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ podem ser ambos divididos justamente por $\overline{u}$. Isto é, existem inteiros m e n tais que $\overline{AB} = m \times \overline{u}$ e $\overline{CD} = n \times \overline{u}$.

Pitágoras de Samos

Uma das obras mais importantes na literatura matemática, devido a sua profunda influência, e que se tornou modelo para muitas outras, são os "Elementos de Euclides". Quando mencionamos Euclides e seus Elementos, pensamos logo na Geometria. No entanto, Euclides também ocupou-se da Teoria de Números. Uma importante revelação da Teoria de Números foi a seguinte: o conjunto dos números primos é infinito. É claro que a noção de conjunto não existia naquela época, mas a demonstração é a mesma, e é muito bonita. Vamos denotar por $\mathcal{P}$ o conjunto dos números primos:

$$\mathcal{P} = \{\ p \in \mathbb{N} \mid p \text{ é primo } \}.$$

Eudoxus de Cnido (408? - 335? a.C.) foi aluno de Platão em sua Academia e chegou a dirigi-la na ausência do mestre. Foi neste período que lá chegou, vindo da Macedônia, o jovem Aristóteles. Eudoxus era de origem humilde e, enquanto foi estudante, morava num bairro do subúrbio de Atenas. O que hoje chamamos de Axioma de Arquimedes, é, na verdade, devido a Eudoxus. Um de seus resultados diz que se a e A são as áreas de dois círculos c e C, de diâmetros d e D, respectivamente, então, $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$. Este fato, se considerarmos que a área do cículo c é dada pela fórmula $a = \pi(\frac{d}{2})^2$, é fácil de ser demonstrado. O caso é que esta informação não era disponível no tempo de Eudoxus. Podemos dizer que o resultado de Eudoxus foi o primeiro passo importante na direção do entendimento da fórmula para a área do círculo.

Teorema 6

Se $A \subset \mathcal{P}$ é finito, então A é um subconjunto próprio de $\mathcal{P}$.

Vamos provar este teorema usando o método da contradição. Devemos lembrar o seguinte: para provar que p implica q, consideramos $p \wedge (\sim q)$ e isto deve gerar uma contradição. No nosso caso, p é "$A \subset \mathcal{P}$ é finito" e q é "A é diferente de $\mathcal{P}$". Note que $p \wedge (\sim q)$ é equivalente a dizer que $\mathcal{P}$ é finito, pois supomos A finito e $A = \mathcal{P}$.

Como A é finito, podemos listar seus elementos:

$$A = \{ \ p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n \ \}.$$

A contradição ocorrerá quando produzirmos um número primo que não está listado, isto é, um elemento de $\mathcal{P}$ que não pertence a A. Aqui é onde reside toda a genialidade e beleza da demonstração. Consideremos o número

$$p = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$$

que é maior do que qualquer um dos p_i. Agora, ou p é primo, e teremos o nosso extra primo, ou ele tem fatores primos que são distintos dos p_i, e, de novo, temos novos primos que não estão listados.

Vamos analisar a segunda possibilidade mais atentamente. Suponhamos então que p não seja primo. Euclides havia demonstrado antes que, neste caso, p tem algum fator primo. Vamos chamá-lo de q. Veremos que q é diferente de todos os p_i. Realmente, vamos supor que $q = p_1$. Então q divide $p = p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1$ e divide $p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n$. Se um número divide dois outros números, então ele também divide a diferença entre eles. Ora, isto significa que q divide a diferença

$$(p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n + 1) - (p_1 \times p_2 \times p_3 \times \cdots \times p_n) = 1$$

Como q é maior ou igual que 2, esta afirmação é um absurdo e, portanto, q não é igual a p_1. Analogamente, $q \neq p_i$ para todos os outros valores de i. Então, q é um número primo que não estava na lista. Vamos exemplificar.

Caso a nossa lista inicial fosse

$$A = \{ \ 2, 3, 5 \ \},$$

teríamos $p = 2 \times 3 \times 5 + 1 = 31$, que é um número primo.

Caso a nossa lista fosse

$$A = \{ \ 3, 5, 7 \ \},$$

o valor de p seria $3 \times 5 \times 7 + 1 = 106$, que não é primo. No entanto, $106 = 2 \times 53$ e, ambos fatores, 2 e 53 servem para fazer o papel de q.

A próxima estratégia de demonstração que consideraremos é chamada de *Método de Indução Finita*. Este método baseia-se no chamado *Princípio da Boa Ordem*.

Esta demonstração é uma pérola da Matemática. Estas idéias podem ser melhor expressas usando o Teorema da Fatoração Única para inteiros ou Teorema Fundamental da Aritmética. Ele afirma que todo número inteiro, maior do que 1, pode ser representado de maneira única como um produto de fatores primos (a menos de mudança na ordem, como $6 = 2 \times 3 = 3 \times 2$). Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra pode ser encontrada no livro de José Plínio [3]. Este assunto será abordado, propriamente, ao longo da sua graduação. Isto não impede que você queira dar uma espiadinha no que vem por aí...

Princípio da Boa Ordem. Todo subconjunto não-vazio dos inteiros positivos possui um elemento que é o menor de todos eles.

O método da indução finita é útil, quando queremos provar que uma função proposicional $p(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$.

Para tanto, basta mostrar o seguinte:

- PIF-1. $p(1)$ é verdadeira.
- PIF-2. $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.

Para justificarmos este método usaremos o Princípio da Boa Ordem e o método da contradição. As nossas hipóteses são PIF-1 e PIF-2 e a tese é $p(n)$ é verdadeira para todo inteiro $n \geq 1$. Vamos ver que PIF-1, PIF-2 mais a negação da conclusão geram uma contradição. A maneira pela qual faremos isto é a seguinte: consideremos B o conjunto dos números inteiros k tais que $p(k)$ é falsa. A conclusão é equivalente a dizer que $B = \varnothing$. Vamos, então, supor que:

- PIF-1 e PIF-2 são verdadeiras;
- $B \neq \varnothing$.

Pelo Princípio da Boa Ordem, existe um número k_0 tal que $p(k_0)$ é falsa e k_0 é o menor elemento de B com esta propriedade. De PIF-1, $1 \notin B$ e, portanto, $k_0 \geq 2$. Daí, subtraindo 1 de ambos os lados da desigualdade, temos $k_0 - 1 \geq 1$. Como $k_0 - 1 < k_0$ e k_0 é o menor elemento de B, podemos concluir que $k_0 - 1 \notin B$ e, portanto, $p(k_0 - 1)$ é verdadeira. Agora, PIF-2 verdadeira nos diz que, como $p(k_0 - 1)$ é verdadeira, então $p(k_0)$ também é verdadeira. Contradição! Isto quer dizer que $k_0 \notin B$!

Vamos agora usar o método da indução finita para demonstrar o seguinte:

Teorema 7

Para todo inteiro $n \geq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Note que este teorema é um caso particular do cálculo da soma dos termos de uma progressão aritmética. Por exemplo, se $n = 3$, então $1+2+3 = \frac{3\times4}{2} = 6$, o que é verdadeiro.

Para demonstrar teoremas deste tipo, o método de indução finita é a ferramenta adequada.

Começamos com PIF-1. Fazendo $n = 1$ nos dá $1 = \frac{1\times2}{2}$, que é verdadeiro. Vamos agora demonstrar que $p(k) \Rightarrow p(k+1)$. Usaremos o método direto, assumindo que $1 + 2 + 3 + \cdots + k$ é igual a $\frac{k(k+1)}{2}$. Queremos mostrar que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Realmente,

$$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = [1 + 2 + \cdots + k] + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1).$$

Agora,

$$\frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{[k(k+1) + 2(k+1)]}{2} = \frac{(k+2)(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Isto completa a demonstração.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855) foi um dos maiores matemáticos de que se tem notícia. Suas contribuições cobrem quase todas as áreas da Matemática, como Geometria, Teoria de Números, Análise Complexa. Foi também físico e astrônomo. O primeiro problema importante que ele resolveu foi o seguinte: desde o período clássico da Matemática na Grécia antiga, os únicos polígonos regulares (todos os lados de medidas iguais), com um número primo de lados, que se sabia construir com régua e compasso, eram o triângulo e o pentágono. Gauss, com menos de 19 anos, descobriu como construir, com régua e compasso, um polígono regular de 17 lados. Ao completar esta façanha, estava avançando num problema que permanecera parado por mais de 2000 anos!

Há uma história a respeito desta fórmula, envolvendo um dos maiores matemáticos que já houve, chamado Carl Friedrich Gauss. No tempo em que Gauss ia à escola, os alunos usavam uma pequena lousa e giz. Numa particular manhã, os pequenos estavam mais agitados do que o normal e o mestre resolveu dar uma tarefa maior para mantê-los ocupados por mais tempo. Ele mandou que somassem todos os números inteiros, de 1 até 100. Quando sentou-se em sua cadeira, esperando passar alguns minutos em paz, o pequeno Carl estendeu sua lousa com a resposta correta, 5050, dizendo: Aqui está! O mestre, muito surpreso, quis saber como ele chegara tão rapidamente àquela resposta. O pequeno gênio de dez anos explicou: tome duas vezes estes números e arranje-os, uns debaixo dos outros, propriamente:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 99 & + & 100 \\
+ & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

Assim, temos 100 parcelas de 101 cada uma, que somam 10100. Agora, só temos que dividir este número por dois, pois iniciamos a conta dobrando o que queríamos originalmente somar!

Exercícios

1. Usando o Método da Indução Finita, prove que as seguintes igualdades são verdfadeiras para todos os inteiros $n > 1$:

   (a) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

   Solução: (PIF-1.) Se $n = 1$, a afirmação é verdadeira: $1 + 2^1 = 2^2 - 1$.

   (PIF-2.) Devemos supor que a igualdade $1+2+4+\cdots+2^n = 2^{n+1} - 1$ seja verdadeira e provar que $1+2+4+\cdots+2^n+2^{n+1} = 2^{n+2}-1$.

   Realmente,

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n+1} &= (1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n) + 2^{n+1} \\ &= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \\ &= 2 \times 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1. \end{aligned}$$

   (b) $1 + 2 \times 2! + 3 \times 3! + \cdots + n \times n! = (n + 1)!1$.

   (c) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{n\times(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

2. Mostre que para todo inteiro $n > 4$, $2^n \leq n!$.

3. Prove que se n é um número inteiro, então

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   é um número inteiro.

Novamente podemos dizer que esta aula foi diferente das anteriores. Você gostou? Matemática deve ser uma fonte de satisfação. Você poderá rever esta aula de quando em quando, à medida que for avançando no curso.

Aula 30 – Circuitos Lógicos

Objetivo

- Na aula anterior vimos como a lógica é usada na Matemática. Nesta aula veremos como ela desempenha um papel importante em outra área de atividade.

Uma das características mais marcantes de nossos dias é o termo *digital*. O universo está tomado por computadores, telefonia digital, transmissão de dados via satélite, além de uma variedade de aparatos como agendas eletrônicas, calculadoras, relógios digitais, aparelhos que tocam CDs, DVDs etc. Campos dos mais diversos como o da medicina, o da mídia, o da comunidade econômica têm como imprescindível o uso destas máquinas maravilhosas. No coração de qualquer um destes equipamentos eletrônicos, onde sinais devem ser selecionados ou combinados de maneira controlada, encontram-se os circuitos que são denominados *circuitos lógicos* ou *circuitos digitais*.

George Boole (1815 - 1864), matemático inglês.

Para nós, humanos, é natural operar com dez dígitos. No entanto, isto não ocorre com os computadores. Para uma máquina usar dez dígitos é necessário que ela opere com dez níveis diferentes de voltagem - um para cada dígito - o que acarretaria em uma grande complexidade em projetar e construir os computadores. Para operar com apenas com dois dígitos é necessário reconhecer apenas dois tipos de sinais: presença ou ausência de tensão elétrica (alta ou baixa voltagem). Este aspecto prático da construção dos computadores encontrou sua "alma-gêmea" teórica no trabalho de Boole.

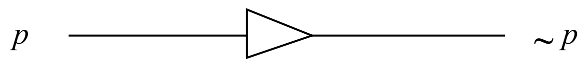
O que são e para que servem os circuitos lógicos?

Eles são usados para produzir decisões do tipo verdadeiro ou falso, baseados nas múltiplas entradas de sinais do tipo verdadeiro ou falso.

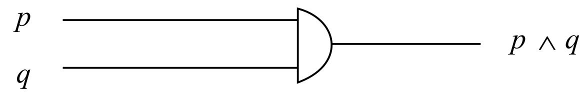
Os sinais num circuito lógico são de dois tipos: tensão elétrica alta (ligado) ou tensão elétrica baixa (desligado). Eles são formados por linhas condutoras, chamadas de *entradas*, que receberão os sinais iniciais e que estão ligadas umas às outras por conectores diversos, chamados de *portas*, e terminam em uma *saída* que emitirá o sinal resultante. Na verdade, as portas são os tipos mais básicos, mais elementares, de circuitos lógicos. O nível de voltagem na saída de cada um deles depende dos sinais dados nas entradas, de acordo com as leis da lógica. A voltagem (tensão elétrica) alta corresponde ao valor-verdade verdadeiro, enquanto que a voltagem baixa corresponde ao valor-verdade falso.

As três portas básicas estão listadas, abaixo, com os seus respectivos diagramas:

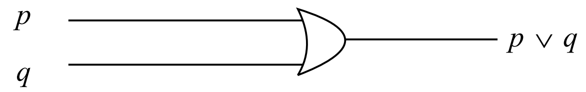
1. Porta de inversão ou porta "NÃO"



2. Porta "E"



3. Porta "OU"

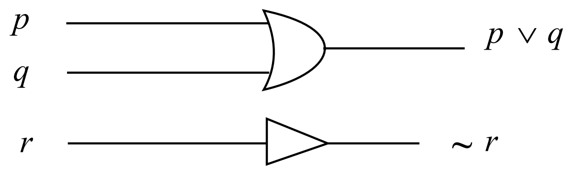


Eles são chamados de circuitos lógicos, pois a cada um deles corresponde uma função proposicional e vice-versa. A cada entrada corresponde uma variável proposicional. Estas entradas estão ligadas pelas portas, que correspondem aos conectores. Vamos a um exemplo.

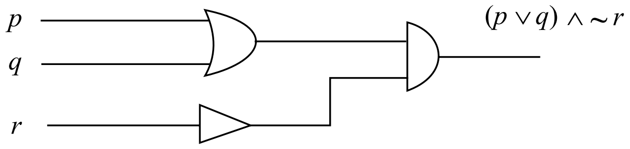
Exemplo 17

Vamos construir o circuito lógico correspondente à função proposicional $(p \vee q) \wedge \sim r$.

Note que esta função proposicional tem três proposições básicas, as variáveis proposicionais p, q e r. Isto significa que nosso circuito contará com três entradas, correspondentes a cada uma delas. Note também que $p \vee q$ e $\sim r$ fazem parte da nossa função proposicional. Começaremos a construção do circuito "montando" estas partes:



Agora, para completar o circuito, fazemos a conexão destas duas partes com uma porta "E":



A tabela-verdade desta proposição nos dá informação sobre o funcionamento do circuito. Por exemplo, suponhamos que queremos saber sob que circunstâncias teremos como saída um sinal de alta voltagem. Isto é equivalente a querer saber quando $(p \vee q) \wedge \sim r$ é verdadeira.

A tabela-verdade é:

p	q	r	$p \vee q$	$\sim r$	$(p \vee q) \wedge \sim r$
V	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	F

A tabela indica que a saída estará ligada, isto é, teremos um sinal de alta voltagem, quando a entrada r estiver desligada e pelo menos uma das fontes p ou q estiver ligada.

É muito usado construir uma tabela usando apenas os dígitos 0 e 1 no lugar das letras F e V. A vantagem disto é que podemos "operar" com os números, usando a seguinte regra: $\vee$ (ou) funciona como soma enquanto que $\wedge$ (e) funciona como produto. Temos apenas que considerar uma pequena 'excentricidade'. Como estamos operando apenas com os dígitos 0 e 1, a 'soma ' de 1 com 1 resulta 1 $(1 \vee 1 = 1)$.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

O comutador $\sim$ apenas reverte de um dígito para o outro.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Exemplo 18

A tabela do circuito lógico equivalente à função proposicional $(p \vee q) \wedge \sim r$ pode ser escrita usando o sistema binário:

p	q	r	$p \vee q$	$\sim r$	$(p \vee q) \wedge \sim r$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

A saída emitirá sinal de alta voltagem (ligada) nos casos onde o número 1 aparece. Isto ocorrerá em três situações: sempre que a entrada r estiver ligada aparecerá o dígito 0 na coluna r e, pelo menos, uma das entradas p ou q estiver ligada.

Situações Práticas

Vamos agora considerar duas situações 'práticas' que requerem construção de circuitos lógicos.

Exemplo 19

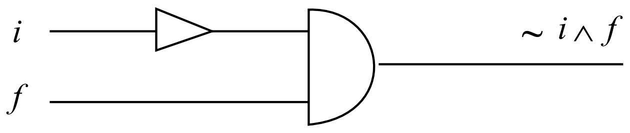
Queremos instalar uma campainha num carro (saída) que soará caso o motorista desligue a chave de ignição (entrada) com os faróis acesos (entrada). Vamos construir a tabela-verdade associada a esta situação. Note que a campainha deve soar apenas quando os faróis estiverem acesos e a ignição estiver desligada.

Ignição	Faróis	Campainha
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

Esta é a tabela-verdade da função proposicional $\sim i \wedge f$:

i	f	$\sim i$	$\sim i \wedge f$
1	1	0	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	0	1	0

Este circuito é formado de uma porta de inversão no sinal, que vem da chave de ignição, e uma porta "E" unindo os dois sinais resultantes: $\sim i$ e f:



Exemplo 20

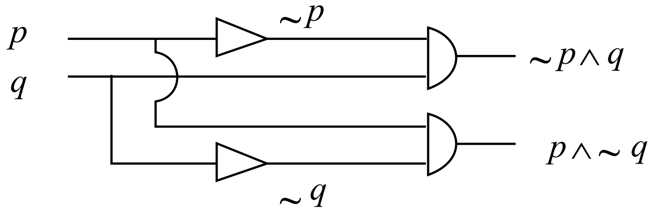
Mostre que o circuito de um sistema de alarme contra incêndio com dois sensores de fumaça (entradas) e uma campainha (saída) corresponde ao circuito da porta "OU".

No nosso próximo exemplo, veremos como construir o circuito e fazer a tabela-verdade correspondente a uma dada função proposicional. Além disso, veremos como é possível usar as leis da lógica bem como suas equivalências para redesenhar certos circuitos, tornando-os mais compactos. Isto é, sob o ponto de vista teórico, eles são equivalentes, mas do ponto de vista prático os circuitos mais compactos evitam desperdício de material e energia. Isto é uma porta para uma área muito importante da teoria de circuitos, chamada de *otimização*. Mas isto é assunto para outra ocasião. Vamos ao exemplo.

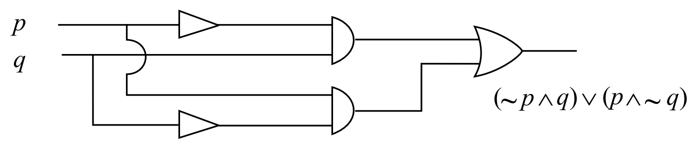
Exemplo 21

Vamos desenhar o circuito correspondente à função proposicional $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$.

Numa primeira etapa desenhamos os trechos correspondentes a $\sim p \wedge q$ e $p \wedge \sim q$.



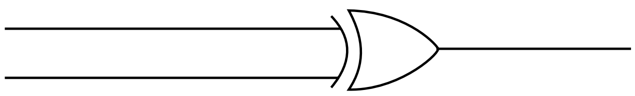
Agora fazemos a conexão final: $(\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)$.



Agora vamos construir a tabela-verdade. Teremos duas entradas e várias combinações delas:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge q$	$p \wedge \sim q$	$(\sim p \ \wedge q) \vee (\ p \wedge \ \sim q)$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

Concluímos que este circuito produzirá sinal ligado, quando uma e somente uma das duas entradas p e q estiver ligada. Este circuito pode ser substituído por uma única porta, chamada de "OU Exclusivo", que é representada da seguinte maneira:

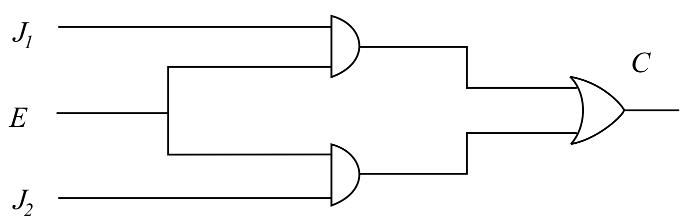


Atenção! Vejamos mais um exemplo em que as leis da lógica ajudam a "otimizar" um dado circuito lógico.

Exemplo 22

O dono de uma casa quer instalar um sistema de alarme que deverá ser acionado (uma campainha C soará), caso qualquer uma de duas janelas, J_1 ou J_2, seja forçada, e caso a energia elétrica E esteja ligada.

Uma primeira companhia apresentou o seguinte projeto:



Este circuito corresponde à seguinte função proposicional:

$$(E \ \wedge \ J_1) \ \vee \ (E \ \wedge J_2)$$

que tem a seguinte tabela-verdade:

E	J_1	J_2	$E \wedge J_1$	$E \wedge J_2$	$(E \wedge J_1) \vee (E \wedge J_2)$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

A tabela deixa claro que o fornecimento de energia é fundamental para o funcionamento do sistema. O dono da casa achou que o projeto estava "super faturado" e solicitou a outra companhia um sistema mais econômico. A pessoa encarregada do caso, na segunda companhia, analisou a proposição

$$(E \ \wedge \ J_1) \ \vee \ (E \ \wedge \ J_2)$$

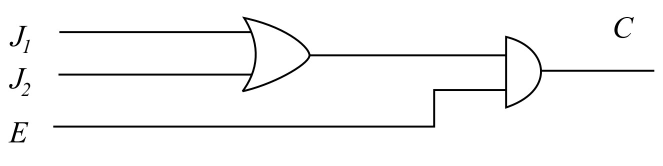
e lembrou-se das suas aulas de lógica: "Leis de Distribuição"!

$$p \ \wedge \ (q \ \vee \ r) \ \equiv \ (p \ \wedge \ q) \ \vee \ (p \ \wedge \ r).$$

Ele escreveu então a proposição

$$E \ \wedge (J_1 \ \vee \ J_2)$$

que corrresponde ao circuito



que tem a seguinte tabela-verdade:

E	J_1	J_2	$J_1 \vee J_2$	$E \wedge (J_1 \vee J_2)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	0	1	0
0	0	1	1	0
0	0	0	0	0

As duas tabelas-verdade mostram que os sistemas são equivalentes, sendo que o segundo sistema utiliza uma porta a menos. Neste sentido ele é "melhor" que o primeiro.

Exercícios

1. Desenhe o circuito lógico correspondente à proposição

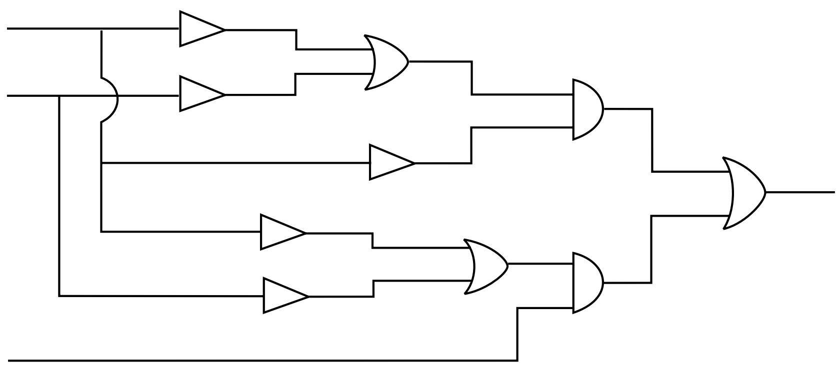
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge (\sim r)).$$

   Construa sua tabela-verdade e mostre que ele é equivalente ao circuito correspondente à proposição

$$(p \wedge r) \vee (q \wedge (\sim r)).$$

   Desenhe o circuito lógico correspondente a esta última proposição.

2. Desenhe um circuito lógico com apenas quatro portas e que seja equivalente ao circuito lógico abaixo. Para isto, escreva a proposição correspondente e use as leis da lógica para simplificá-la.



Auto-avaliação

Parabéns! Você chegou ao fim do módulo. Nesta última aula você viu que podemos usar idéias matemáticas para diversos fins. Em particular, deve ter notado que em vez das letras V e F, é possível preencher as tabelas-verdade com os números 1 e 0, respectivamente. A vantagem disto é que podemos usar a álgebra descrita logo após o exemplo 17.

Sugestões para leitura complementar:

[1] Aristóteles de Estagira - *Aristóteles*, Volume 3 da Coleção *Os Pensadores*, Editora Nova Cultural, 2000

[2] Durant, W. - *A História da Filosofia*, Editora Nova Cultural, 2000

[3] Santos, José Plínio de Oliveira - *Introdução à Teoria de Números*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998

Aula 31 – O nascimento de uma teoria: o Problema das Pontes de Königsberg

Objetivos

- Nesta aula você será levado a conhecer e analisar o Problema das Sete Pontes de Königsberg, que foi resolvido por Euler marcando o início da Teoria de Grafos.

- Aprenderá conceitos básicos desta teoria, incluindo as noções de ordem de um grafo e de grau de um vértice.

- Conhecerá o Problema da Coloração de Mapas: qual é o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa?

- Conhecerá também o Lema do Aperto de Mãos: em uma reunião qualquer, o número de pessoas que cumprimentam um número ímpar de pessoas é par.

Leonhard Euler (1707 - 1783), matemático suíço que viveu parte de sua vida em Berlim e morreu em São Petersburgo, na Rússia. Suas obras completas ocupam 75 volumes e a parte de Matemática, além de prolífica, foi profunda, inovadora e diversificada. Suas contribuições cobrem várias áreas: Teoria dos Números, Geometria, Cálculo e muitas outras.

Introdução

Querido aluno ou aluna!

Estamos iniciando o último módulo da nossa disciplina, a Matemática Discreta. Nesta última etapa da nossa viagem estudaremos os grafos. Você aprenderá um conteúdo que tem um apelo estético enorme e muitas aplicações. Veremos como a Matemática pode unir a tradição à modernidade, o concreto ao abstrato, o teórico ao aplicado. Tais características são fonte de energia para o contínuo desenvolvimento da Matemática.

Atenção!
Para saber um pouco mais sobre estes temas, reveja a nossa primeira aula.

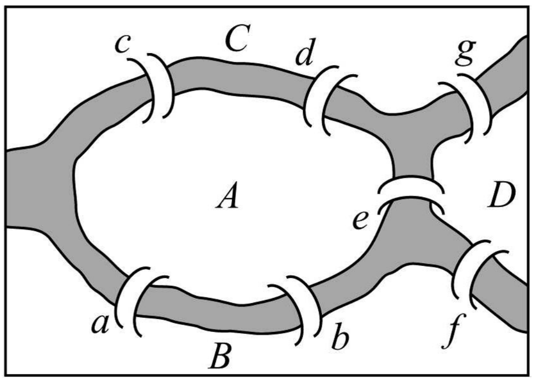
Nada fascina mais um matemático do que um problema. Nas origens de qualquer teoria matemática se encontram bons problemas que despertaram a curiosidade e o interesse de seus criadores.

No caso da Teoria dos Grafos, um destes problemas é o Problema das Pontes de Königsberg (há também o Problema da Coloração de Mapas e outros). Quem solucionou o Problema das Pontes de Königsberg foi Leonhard Euler, provavelmente o maior matemático do século XVIII.

As Sete Pontes de Königsberg

Nossa história se passou na cidade de Königsberg que, no início do século XVIII, ficava na Prússia. O rio Pregel atravessa essa cidade e, após contornar uma ilha, divide-se numa bifurcação. Nessa época havia sete pontes ligando as margens do rio e a ilha. O mapa abaixo mostra a disposição das pontes.

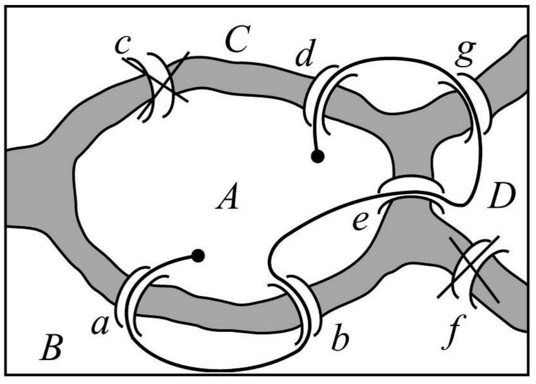
Esta gravura mostra como era Königsberg no início do século XVIII. Hoje ela fica na Rússia e é chamada de Kaliningrado. Königsberg é a cidade onde Immanuel Kant (1724 - 1804) nasceu, viveu e morreu. Kant foi um filósofo importantíssimo, que escreveu a *Crítica da Razão Pura*. O grande momento de desenvolvimento que a Matemática e a Física passavam naqueles dias, com as contribuições de Descartes, Newton, Leibniz e Euler, entre outros, teve um importante papel na formação da obra de Kant.



Os moradores de Königsberg queriam saber se seria possível passear por toda a cidade cruzando cada uma das sete pontes *uma única vez*.

Pare e pense um pouco. Analise o problema com cuidado. Por exemplo, ao cruzar a ponte c, digamos, indo da margem C para a ilha A, esta não poderá mais ser usada. Use lápis e papel e faça algumas tentativas.

Veja, caso houvesse um número menor de pontes, isso seria possível. Por exemplo, se as pontes c e f estivessem interditadas para reforma, bastaria seguir o percurso no mapa representado a seguir:

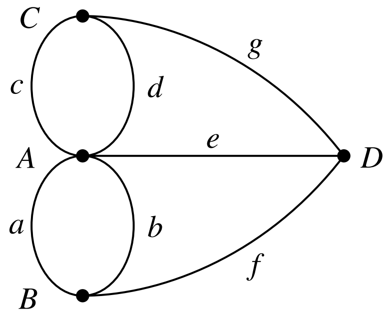


Todos acreditavam, devido às muitas tentativas, não ser possível fazer isso. Contudo, a questão não parecia estar resolvida. Talvez houvesse um percurso passado despercebido de todos. O que você acha?

A estratégia de Euler para atacar o Problema das Pontes

Veja como Euler abordou o problema de maneira brilhante. Ele concentrou-se no que era essencial para a questão, deixando de lado tudo o que era irrelevante. Note que as pontes ligam quatro regiões distintas: as duas margens do rio, representadas no mapa pelas regiões B e C; a ilha, representada por A; a região entre as ramificações, representada por D.

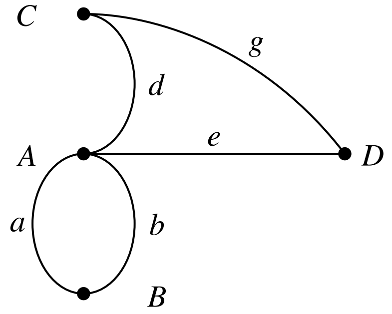
Euler notou que para resolver o problema, a forma e o tamanho de cada região eram irrelevantes. O que realmente importava era a maneira como essas regiões estavam conectadas pelas pontes. Ele, então, substituiu cada uma das regiões por um ponto e usou arcos conectando estes pontos para representar as ligações feitas pelas pontes, criando o seguinte diagrama:



Por exemplo, há duas pontes ligando a margem B com a ilha, representadas por a e b, e uma ponte ligando a mesma margem com a região D, delimitada pela bifurcação, que é a ponte representada por f.

Nesta forma o problema ficou assim: é possível percorrer o diagrama anterior com um lápis, sem levantá-lo do papel, de forma que cada um dos arcos seja percorrido *uma única vez*?

Trace um percurso cruzando todo o diagarama correspondente à situação em que as pontes c e f estejam interditadas percorrendo cada uma das linhas uma só vez:



Que tal explorar mais esta grande idéia de representar diagramaticamente um certo problema? Vamos aplicá-la num outro problema famoso.

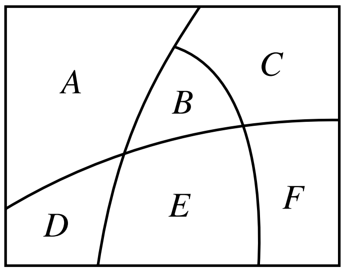
Um dos resultados pelo qual Leonhard Euler é famoso é a sua fórmula para poliedros convexos: se V é o número de vértices, A o número de arestas e F o de faces de um poliedro convexo, então

$$V - A + F = 2.$$

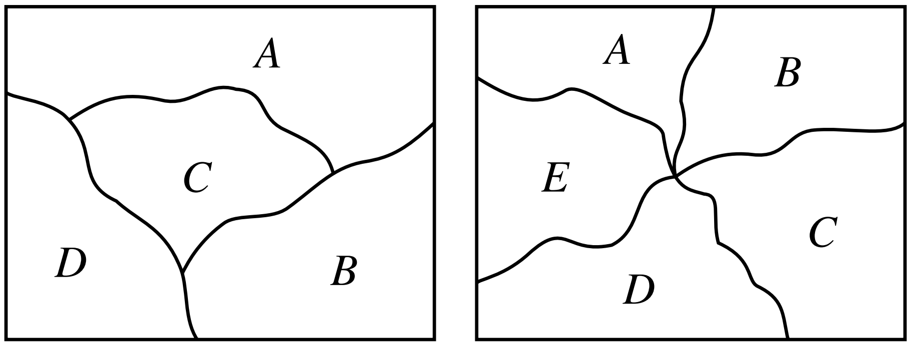
Por exemplo, um cubo tem 8 vértices, 12 arestas e 6 faces, fazendo $8 - 12 + 6 = 2$. Esta fórmula desempenha um papel importante também na teoria que estamos estudando, como você verá na aula 34. Ela é uma pérola matemática que passou despercebida de gênios como Arquimedes e Descartes. Com essas idéias e as usadas para resolver o Problema das Pontes, Euler lançou as bases para uma nova área da Matemática: a Topologia.

O Problema da Coloração de Mapas

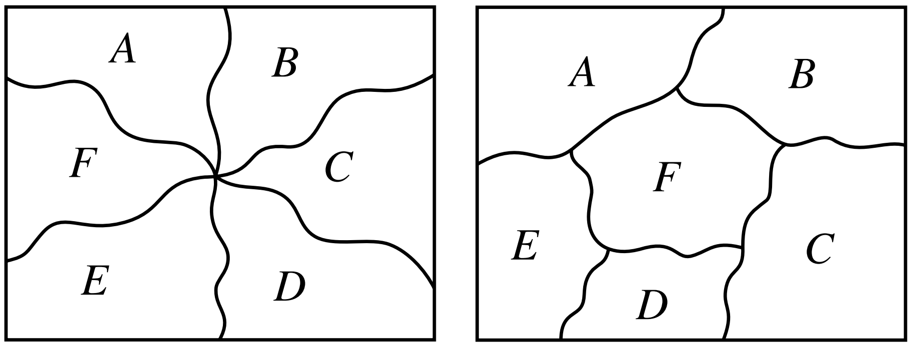
O problema consiste em saber quantas cores são necessárias para colorir um mapa, usando cores distintas sempre que duas regiões tenham uma fronteira comum. Se as regiões se encontram em um único ponto, como as regiões A e E ou B e F na figura a seguir, então elas podem ser coloridas com a mesma cor.



Se o cartógrafo dispuser de muitas cores, não há problema. Ele poderia, por exemplo, usar uma cor diferente para cada região. Nosso caprichoso cartógrafo, no entanto, quer usar *o menor número de cores.* Isto torna a situação bem mais interessante. Pegue a sua caixa de lápis de cores e tente colorir os mapas abaixo com um mínimo de cores distintas. A solução se encontra no fim da aula, mas não vá estragar a diversão antes de ter a certeza que você fez o melhor que pôde!



Mapas 2 e 3

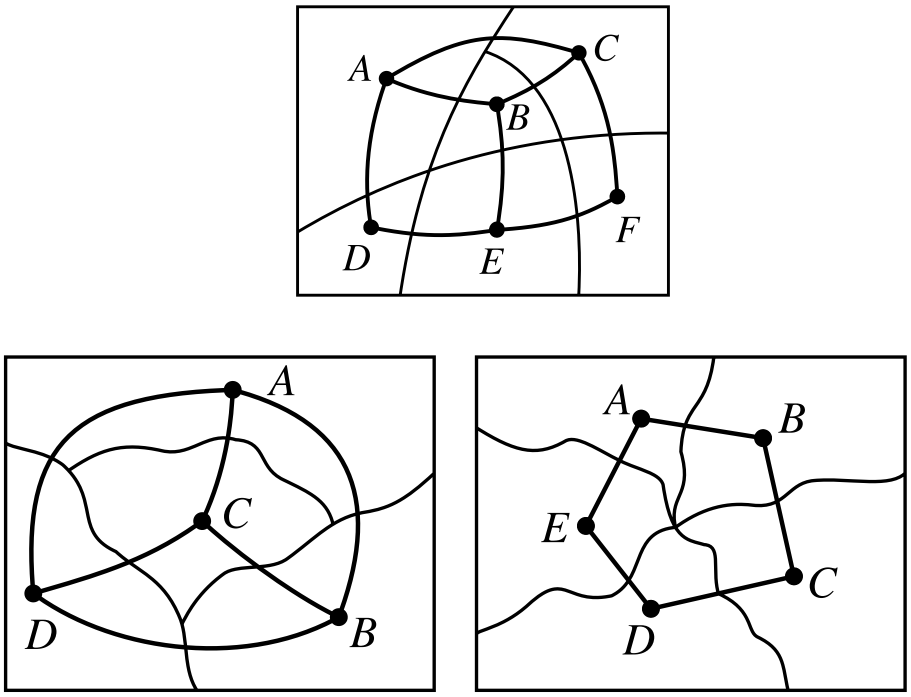


Mapas 4 e 5

O que os dois problemas têm em comum?

A mesma idéia usada por Euler no caso do Problema das Pontes de Königsberg pode ser usada para abordar o Problema da Coloração de Mapas, com a seguinte adaptação: substituímos as regiões por pontos e ligamos com arcos aqueles pontos cujas regiões correspondentes têm uma fronteria em comum. Os diagramas correspondentes aos três primeiros exemplos são:

A Teoria dos Grafos ficou conhecida originalmente por Teoria das Ligações. O termo grafo só passou a ser usado no fim do século XIX após a publicação dos trabalhos do químico Friedrich August Kekule von Stradonitz (1829 - 1896). Ele usava a denominação *graphical molecular representation* para os diagramas com que representava as moléculas atômicas. Kekule havia estudado Arquitetura antes de se dedicar à Química e isto pode ter sido essencial para suas contribuições. Particularmente famosa é a história da descoberta da estrutura do benzeno. Ele teria sonhado com uma cobra que engolia a sua própria cauda e isto teria sugerido a idéia da forma em anel da tal estrutura.



O Problema de Coloração de Mapas nesses exemplos, passa a ser o de atribuir a cada ponto uma cor, de forma que, quando dois pontos estão ligados por um arco, eles têm cores distintas. Além disso, queremos realizar esta tarefa usando o menor número de cores.

Tente desenhar diagramas correspondentes aos dois outros mapas restantes. Novamente, a resposta se encontra no fim da aula.

Muito bem, avançamos um bocado até agora. Os diagramas que desenhamos representam objetos matemáticos que chamamos de *grafos*.

A Teoria dos Grafos tem sido usada nas mais diversas atividades humanas. Em ciência de computadores, nas redes de telefonia, de comunicações, em engenharia de trânsito, só para citar algumas. É um tópico que desperta o interesse dos pesquisadores devido à dificuldade de seus problemas, que muitas vêzes têm enunciados simples, e também por causa de suas aplicações.

Vértices e Arestas

Nesta seção apresentaremos o conceito de grafo assim como outros conceitos necessários para desenvolver a teoria. Outra importante função desta seção é a de estabelecer a nomenclatura e as notações.

Um *grafo* é um par de conjuntos disjuntos $G = (V, A)$ onde A é um subconjunto das partes de V tal que cada um de seus elementos é um conjunto com exatamente dois elementos.

Denotamos $V = V(G)$ e chamamos seus elementos $v \in V(G)$ de *vértices* de G. Os elementos de $A = A(G)$ são da forma $\{v_1, v_2\}$, com v_1 e v_2 elementos de $V(G)$, e são chamados de *arestas*. Por praticidade denotamos a aresta $\{v_1, v_2\}$ por v_1v_2 ou por v_2v_1 uma vez que a ordem não é importante.

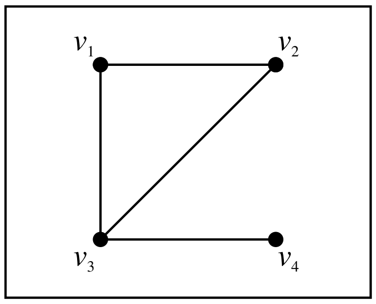
Geralmente, pensamos num grafo G como uma coleção de vértices, alguns dos quais ligados por arestas.

Além disso nós representamos os grafos por diagramas, desenhando uma bolinha para cada vértice e indicando as arestas por linhas que ligam os vértices, como nós estávamos fazendo nos exemplos iniciais.

Exemplo 23

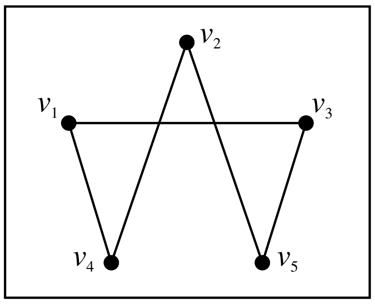
Seja $G = (V, A)$ o grafo definido pelos conjuntos $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $A(G) = \{v_1v_2, v_3v_2, v_3v_1, v_4v_3\}$.

Uma representação gráfica de G é a seguinte:



Exemplo 24

Dada uma representação gráfica podemos obter os conjuntos que definem o grafo G. Por exemplo, o diagrama

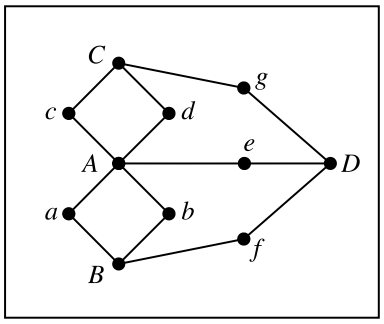


representa o grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $A(G) = \{v_1v_3, v_1v_4, v_4v_2, v_2v_5, v_3v_5\}$.

Segundo esta definição, o diagrama representando as Pontes de Königsberg não representa um grafo, pois seria impossível distinguir, por exemplo, as duas arestas que conectam C com A. Isto por que, segundo a definição, dois vértices podem ser ligados por, no máximo, uma aresta. Isto é um pouco técnico, mas renderá benefícios futuros. Podemos contornar esta dificuldade facilmente. Basta introduzir sete novos vértices, nomeados segundo as pontes. Desta forma podemos distinguir a passagem de A para C pela ponte c ou pela ponte d.

Exemplo 25

O grafo G com vértices $V(G) = \{A, B, C, D, a, b, c, d, e, f, g\}$ e arestas $A(G) = \{Ac, Ad, Aa, Ab, Cc, Cd, Cg, Ba, Bb, Bf, fD, eD, gD\}$ pode ser representado da seguinte maneira:



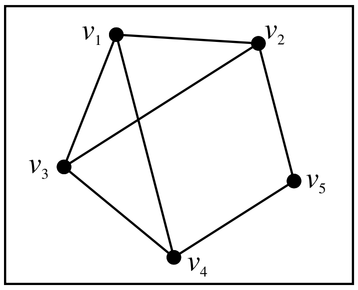
Ordem de um grafo e suas representações

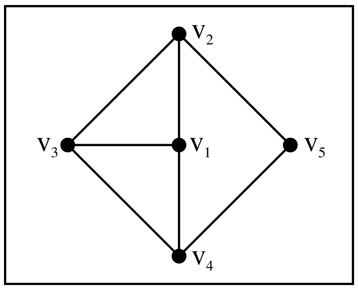
O número de vértices de um grafo G é chamado de *ordem do grafo* G. Note que o conjunto $V(G)$ pode ser infinito. No entanto, nesta disciplina estaremos considerando sempre grafos de ordem finita.

Um mesmo grafo pode ter diferentes representações gráficas, dependendo da posição que dispomos os vértices ou mesmo como desenhamos as arestas.

Exemplo 26

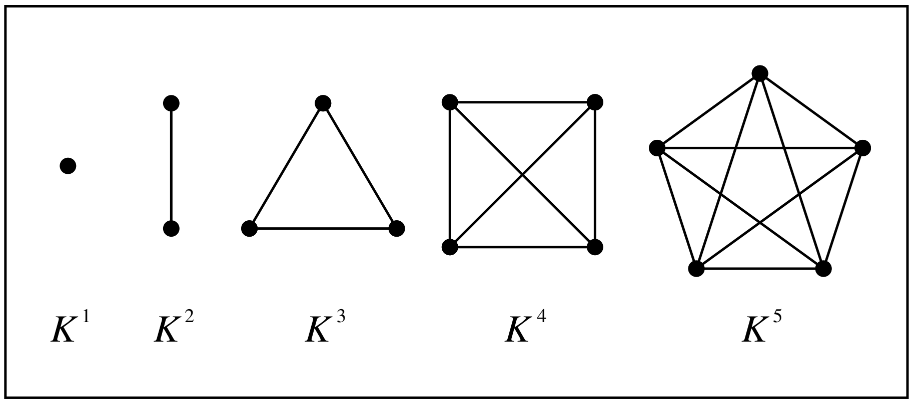
Os dois diagramas a seguir representam o mesmo grafo G com ordem 5.





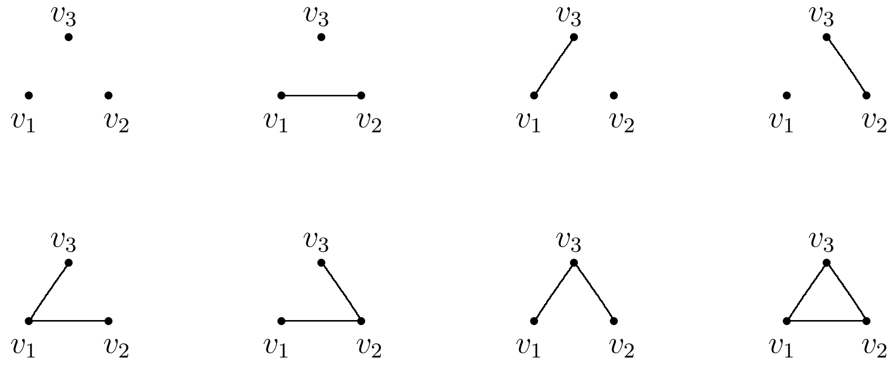
A diferença básica de um diagrama para o outro é o posicionamento do vértice v_4.

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois de seus vértices são adjacentes. Denotamos por K^n o grafo completo de ordem n. A seguir representamos K^n para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5.



Exemplo 27

Dado um conjunto de três elementos $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, quantos grafos simples poderíamos construir tais que $V(G) = V$? Na figura a seguir, representamos todos os grafos simples com três vértices.



Isomorfismos

Vamos agora estabelecer uma noção que você encontrará em outros contextos matemáticos. É a noção de *isomorfismo*. A idéia é bem simples e o próprio nome a explica. O radical *iso* provém do grego e significa *igual*. O elemento de composição grego *morfo* significa *forma*. Lembre-se, por exemplo, de metamorfose. Portanto, quando dois objetos têm a mesma forma nós os chamamos de *isomorfos*.

Mais especificamente, diremos que dois grafos G e G' são isomorfos se houver uma correspondência biunívoca entre os conjuntos dos seus vértices que preserva suas adjacências. Isto é, se dois vértices de G são adjacentes, então os seus correspondentes vértices de G' também são adjacentes e vice-versa.

Aqui vai um exemplo.

Exemplo 28

A correspondência

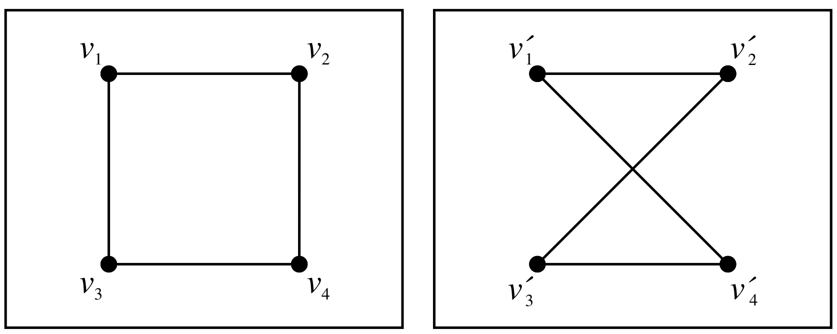
$$\begin{array}{ccc} v_1 & - & v_2' \\ v_2 & - & v_1' \\ v_3 & - & v_3' \end{array}$$

estabelece um isomorfismo entre os grafos G e G' da figuras a seguir.

Podemos então dizer que, a menos de isomorfismos, há quatro grafos simples de ordem 3. Isto é, qualquer grafo de ordem 3 é isomorfo a algum dos seguintes grafos:

Exemplo 29

Mostre que os grafos G e G' são isomorfos.



Para saber mais...
O radical *iso* é usado por matemáticos e não-matemáticos. Basta dar uma olhada em algum dicionário para ver como. Um bom exemplo é a palavra *isonomia*, muito comum em negociações salariais. Isonomia é o nome de um princípio fundamental que afirma que todas as pessoas são iguais perante a lei. Veja que *nomia* é um elemento de composição do grego -*nomia* (de *nomos*, que significa lei). Para mais um exemplo, lembre-se que em geometria chamamos de *isósceles* o triângulo que tem dois lados ou dois ângulos internos de medidas iguais.

Solução: A correspondência

$$\begin{array}{ccc} v_1 & - & v_1' \\ v_2 & - & v_2' \\ v_3 & - & v_4' \\ v_4 & - & v_3' \end{array}$$

estabelece o isomorfismo. Basta observar com algum cuidado que a correspondência entre os vértices *preserva* as ligações feitas pelas arestas. Intuitivamente, podemos obter o grafo G' do grafo G 'torcendo' os vértices v_3 e v_4 e mantendo fixos os vértices v_1 e v_2.

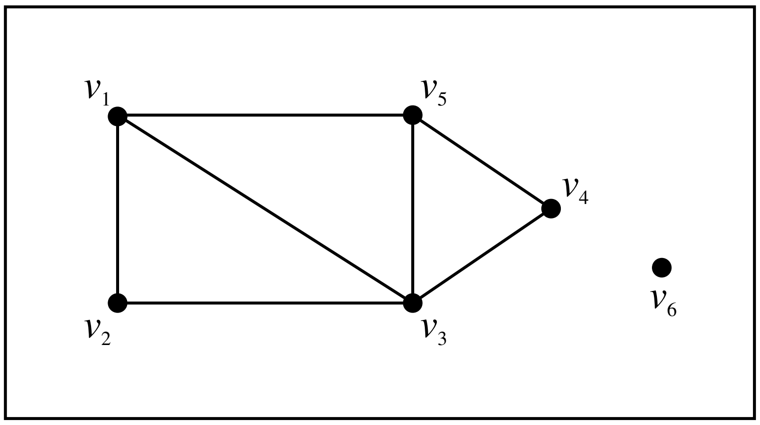
Grau de um vértice

Vamos agora introduzir um novo conceito que associa vértices e arestas de um grafo. Tal conceito é bastante importante na Teoria dos Grafos. Veremos um teorema que, apesar de simples, ilustra essa importância. Este conceito é o de grau de um vértice.

Seja G um grafo e seja $v \in V(G)$ um vértice de G. Chamamos de *grau de* v o número de arestas ligadas a v e denotamos esse número por grau(v). Se v é um vértice isolado então grau(v) $= 0$.

Exemplo 30

Calcularemos o grau de cada vértice do grafo representado pela figura a seguir.



O vértice v_1 é adjacente aos vértice v_2, v_3 e v_5 e portanto, grau(v_1) $= 3$. O vértice v_4 é adjacente aos vértice v_3 e v_5 e, então, grau(4_4) é 2. O vértice V_6 é isolado e, consequentemente, grau(V_6) $= 0$.

Podemos montar uma tabela:

v_n	grau(v_n)
v_1	3
v_2	2
v_3	4
v_4	2
v_5	3
v_6	0

Note que

grau(v_1) + grau(v_2)+ $\cdots$ + grau(v_6) $= 3 + 2 + 4 + 2 + 3 + 0 = 14 = 2 \times 7$.

Veja neste exemplo que a soma dos graus dos vértices é 2×7, igual a duas vêzes o número de arestas.

Realmente, usando o conceito de grau, podemos expressar corretamente esta relação existente entre os vértices e as arestas, formulando o seguinte teorema:

Teorema: *Seja G uma grafo com vértices $v_1,\ v_2, \ldots, v_n$. Se m é o número de arestas de G, então*

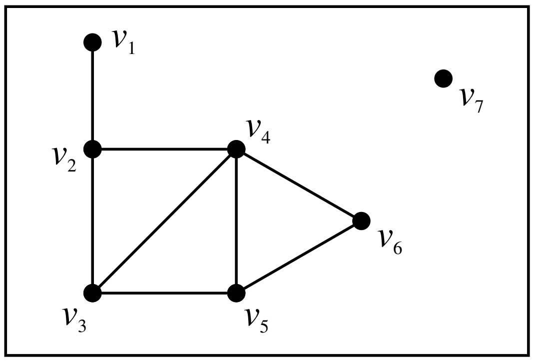
$$\sum_{i=1}^{n} \text{grau}(v_i) = 2m.$$

Prova: Se o grafo G não tem arestas, todos os vértices têm grau zero e a afirmação é verdadeira.

Se o grafo G tem arestas, cada uma delas contribuirá com duas unidades na soma total dos graus dos vértices, pois cada aresta conecta dois vértices distintos. □

Exemplo 31

Veja como o teorema se aplica no seguinte grafo:



Repare que o grafo tem 7 vértices e 8 arestas. Aqui está a tabela com os graus dos vértices:

v_n	grau(v_n)
v_1	1
v_2	3
v_3	3
v_4	4
v_5	3
v_6	2
v_7	0

Reparou? Pois bem, realmente, grau(v_1) + grau(v_2) $+\cdots+$ grau(v_7) $= 1+3+3+4+3+2+0 = 16 = 2 \times 8$. Observe que há quatro vértices com grau ímpar: v_1, v_2, v_3 e v_5.

Em particular, o teorema garante que em qualquer grafo há um número par de vértices de grau ímpar, uma vez que a soma dos graus é um número par.

Por exemplo, não existe um grafo com três vértices tendo graus 1, 2 e 2, respectivamente, pois a soma dos graus seria $1+2+2=5$, um número ímpar.

O Lema dos Apertos de Mãos

Bem, falando nisso, você sabia da festa do professor de Matemática? Um professor de Matemática deu uma festa e convidou seus alunos. Contando com a mulher do professor, que também era professora, os alunos e mais alguns amigos, estavam na festa 23 pessoas. Sortilégios de números primos?

Num determinado momento, o professor afirmou categoricamente, na animada rodinha em que conversava, que o número de pessoas que havia cumprimentado um número ímpar de pessoas era par. Tal afirmação foi acompanhada de um certo clima de ceticismo. Alguns já balançavam a cabeça, acostumados aos hábitos do anfitrião.

Dúvida cabia, pois seria pouco provável que tal afirmação fosse verificada naquela altura da festa. Além disso, por conta de alguns desafetos, algumas pessoas que estavam na festa não se cumprimentavam de forma alguma.

Pressionado por alguns para dar conta de sua afirmação, o professor disse:

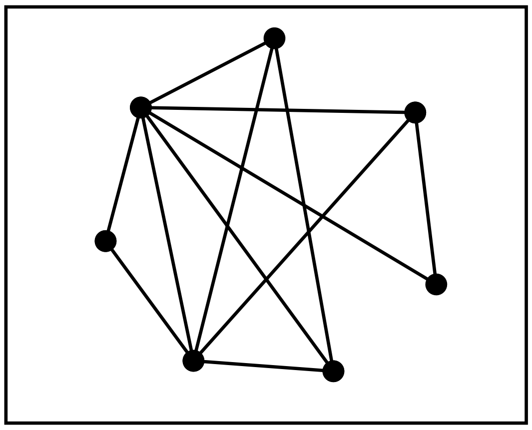
– Ora, isto decorre do chamado "Lema dos Apertos de Mãos". Ele diz o seguinte:

Lema: *Numa reunião qualquer, o número de pessoas que cumprimentam um número ímpar de pessoas é par.*

– Como vêem – ele disse, assumindo um certo ar professoral – isto independe da festa ou do número de participantes da mesma.

– Para provar o lema, basta usar o teorema sobre grafos que mencionei em minha última aula. Ou seja, para cada festa construímos um grafo, da seguinte maneira: cada pessoa da festa é representada no grafo por um vértice. Cada cumprimento entre duas pessoas é representado por uma aresta ligando os dois vértices correspondentes.

Foi então que o professor, que adorava exemplificar suas afirmações, pegou um guardanapo e, sacando do bolso uma de suas muitas canetas, desenhou o seguinte:



– Este grafo representa uma festinha com sete pessoas, uma delas muito popular. Ela cumprimentou as outras seis. Outras duas pessoas cumprimentaram apenas duas outras pessoas. Três pessoas cumprimentaram três pessoas e a última cumprimentou outras cinco. Neste exemplo, quatro pessoas cumprimentaram um número ímpar de pessoas. Para completarmos a prova do lema basta notar que o grau de cada vértice diz, exatamente, o número de cumprimentos feitos pela pessoa correspondente àquele vértice...

Basta dizer que houve uma animada discussão sobre os grafos e a festa foi um sucesso!

Bem, chegamos ao fim da aula.

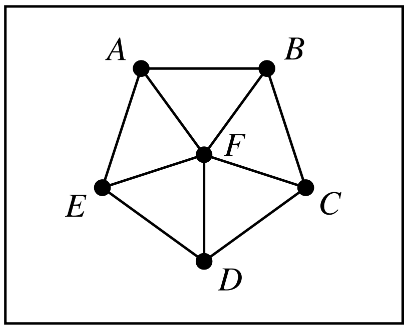
Vale lembrar que o Problema da Coloração de Mapas é mais conhecido como o Problema da Coloração de Grafos. Você deve ter concluído que ele é bem mais difícil do que o Problema das Pontes de Königsberg. Mas não se preocupe, nós voltaremos a falar nessa questão na aula 34.

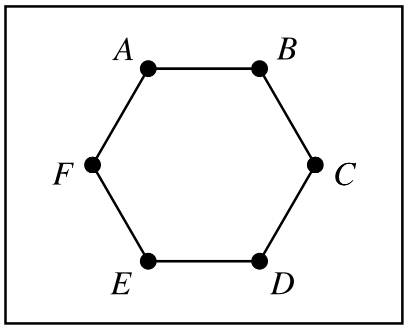
Vamos cuidar de algumas pendências: as respostas dos problemas deixados ao longo da aula.

A resposta para os problemas de coloração de mapas, deixados ao longo da aula, são:

Os mapas 2 e 4 usam pelo menos 4 cores. Veremos que este é o maior número necessário para pintar qualquer mapa. Os mapas 1 e 3 usam pelo menos 3 cores, enquanto que bastam 2 cores para colorir o mapa 5.

Finalmente, aqui estão grafos correspondentes aos mapas das figuras 8 e 9.





Na próxima aula você verá a solução dada por Euler para o Problema das Pontes de Königsberg.

Nesta aula você aprendeu várias coisas novas! Você poderá praticá-las nos exercícios sugeridos. Divirta-se!

Exercícios

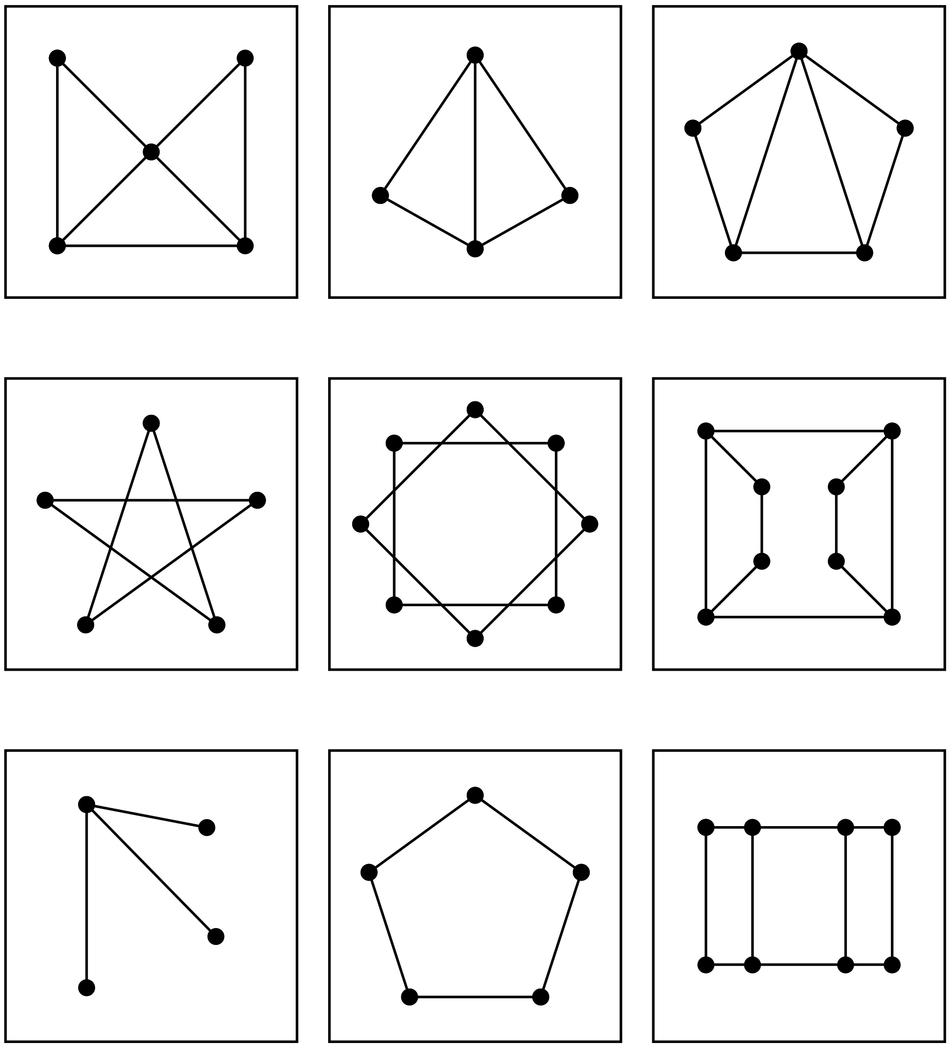
1. Seja G um grafo com vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6. Sabendo que os correspondentes graus são 0, 2, 2, 3, 2 e 1, calcule o número de suas arestas. Podemos afirmar que este grafo tem vértices isolados? Quantos? Por que?

2. Podemos construir grafos de ordem 4 com os seguintes graus:
   a) 2, 1, 3 e 2 ?
   b) 1, 2, 1 e 3 ?
   c) 0, 0, 3 e 2 ?
   d) 3, 1, 5 e 1 ?

3. Represente graficamente o grafo $G = (V(G), A(G))$ onde:

a) $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e
$A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_2v_4, v_4v_3\}$.
b) $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e
$A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$.
c) $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e
$A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_1, v_2v_4, v_3v_5, v_5v_4\}$.
d) $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e
$A(G) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5, v_1v_5\}$.

4. Determine o grau de cada vértice dos grafos representados a seguir. Em cada caso verifique a validade do teorema da soma dos graus e do número de arestas.



5. Determine quais grafos do exercício 4 são isomorfos uns aos outros.

6. Construa K^6. Qual é o grau de cada vértice de K^n? Se você fosse construir K^{10}, quantas arestas desenharia? Em geral, quantas arestas tem K^n? Verifique a validade do Lema do Aperto de Mãos.

Auto-avaliação

Esta é a primeira aula de um novo tema: grafos. É preciso familiarizar-se com as definições. Os exemplos desempenham um papel importante neste processo.

Caso você tenha dificuldades com a definição de grafo concentre-se em sua representação diagramática. Ela contém toda a informação sobre ele.

Você já percebeu que um grafo consiste de vértices que representamos por pontos ou bolinhas, e por arestas que representamos por arcos ou segmentos de retas. Cada aresta conecta um vértice a outro e quando dois vértices são adjacentes eles são conectados por apenas uma aresta.

Os exercícios 4 e 5 enfocam o tema das diferentes representações do mesmo grafo.

Use lápis e papel para criar, você mesmo, outros exemplos de grafos. Além disso, envolva-se com o aspecto divertido deste tema. Os problemas de coloração de mapas podem ser um bom começo.

Divirta-se.

Aula 32 – Grafos eulerianos

Objetivos

- Nesta aula você verá novos conceitos da Teoria de Grafos, tais como: caminho, circuito e multigrafo.
- Aprenderá o que é um grafo conexo.
- Conhecerá o que é um circuito euleriano e o Teorema de Euler, que soluciona o Problema das Pontes de Königsberg.

Recordando...

Você viu na aula anterior que o Problema das Pontes de Königsberg é equivalente a ser possível, ou não, redesenhar um certo grafo, sem levantar o lápis do papel e traçando cada aresta uma única vez.

Para responder esta questão precisaremos de mais um conceito da teoria de grafos. Este conceito, chamado de conexidade, é relativamente fácil. É a Matemática imitando a vida. Vamos lá!

Caminhos

Um *caminho ligando o vértice v até o vértice w* é uma seqüência de vértices adjacentes $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$ (ou de arestas $a_1 = v_0v_1, a_2 = v_1v_2, \ldots,$ $a_k = v_{k-1}v_k$ adjacentes), tais que

a) $v_0 = v$;

b) $v_k = w$;

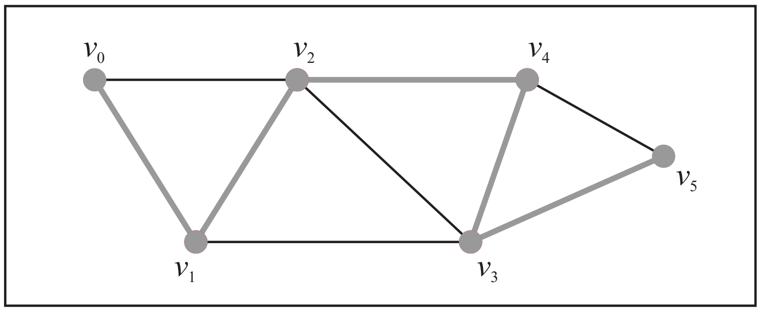
Denotamos este caminho simplesmente escrevendo a seqüência de vértices

$$v_0v_1v_2v_3 \ldots v_{k-1}v_k.$$

Um exemplo, agora, vale por mil palavras! Aqui vai.

Exemplo 32

Seja G o grafo representado na figura abaixo.



Em Matemática é comum chamar de 'palavra' qualquer seqüência de letras, como esta, mesmo com subscritos.

O traço reforçado indica um caminho ligando o vértice V_0 até o vértice v_5. Denotamos este caminho pela palavra

$$v_0v_1v_2v_4v_3v_5.$$

Outro caminho entre estes dois vértices é representado por

$$v_0v_2v_4v_5.$$

Pegue lápis e papel e trace os seguintes caminhos:

$$v_1v_2v_0v_1v_3v_5, \quad v_2v_4v_3v_2 \ \text{ e } \ v_0v_1v_2v_1v_3v_4v_5.$$

Lembre-se, para que uma palavra represente um caminho é necessário que dois vértices seguidos sejam adjacentes.

Conexidade de Grafos

Bom, estamos prontos para estabelecer a noção de conexidade de grafos.

Para começar, podemos afirmar que um grafo G é *conexo* se quaisquer dois de seus vértices podem ser ligados por algum caminho.

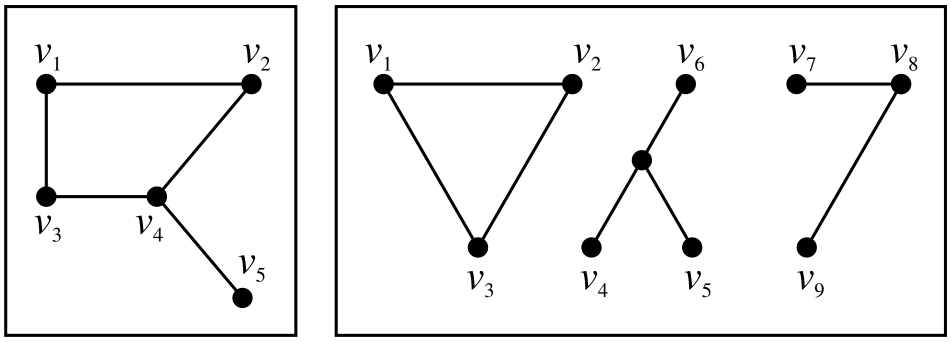
Veja que num grafo conexo, dados quaisquer dois vértices, podemos "passar" de um para o outro através de arestas. Em particular, se um grafo G é conexo e tem mais do que um vértice, ele não pode ter vértices isolados.

Um grafo *não* é conexo quando pelo menos dois de seus vértices não podem ser conectados por algum caminho. Neste caso, o grafo será composto de uma união disjunta de grafos conexos.

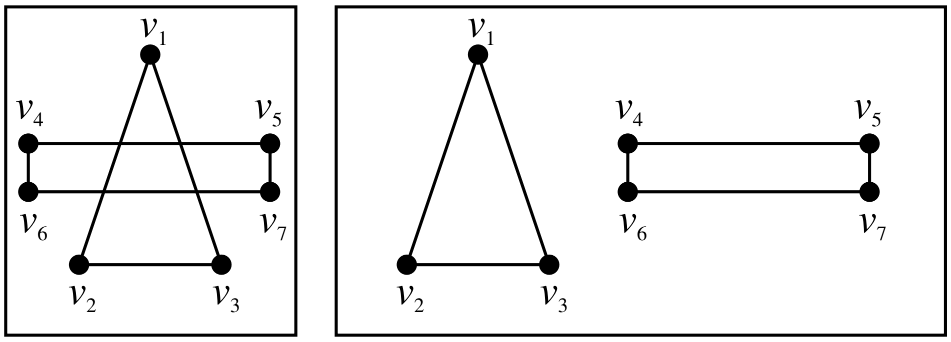
Cada um destes grafos conexos é chamado de uma *componente conexa* do grafo.

Exemplo 33

Aqui estão dois grafos, um conexo e o outro composto por três componentes conexas:

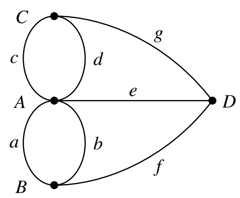


Fique atento! Há exemplos onde as aparências enganam. A representação do grafo pode ser formada de um só pedaço mas o grafo não ser conexo, como é o caso no exemplo seguinte:



Circuitos e Circuitos Eulerianos

Dizemos que um caminho entre v e w é um *caminho simples* se cada uma das arestas que o compõem é usada uma só vez. Quando v é igual a w, temos um caminho simples e fechado, que chamamos de *circuito*. Finalmente, dizemos que um dado circuito é *euleriano* se ele contém todos os vértices do grafo.



Voltando ao Problema das Pontes de Königsberg, você descobrirá que ele pode ser formulado da seguinte maneira: O grafo da figura ao lado admite um circuito euleriano? Isto é, existe um caminho simples (sem arestas repetidas) e fechado (começando e terminando num mesmo vértice) que percorra todos os vértices?

O Teorema de Euler

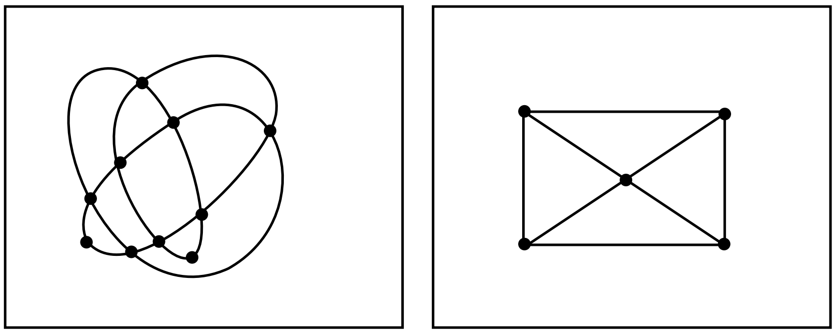
Leonhard Euler publicou nos anais da Academia de Ciência da Russia, em 1736, o artigo *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis (Uma solução de um problema da geometria da posição)* onde ele respondia esta questão. Aqui está o teorema que estabelece critérios precisos para a existência de um circuito euleriano.

Teorema: *Um grafo G admite um circuito euleriano se, e somente se, G é conexo e todos os vértices de G têm grau par.*

Note que todos os vértices do grafo do Problema das Pontes, rotulados por letras maísculas, têm grau ímpar e, portanto, não admite um circuito euleriano. Com este teorema Euler decidia definitivamente a questão da existência de um passeio por Königsberg que cruzasse todas as pontes uma única vez dando uma resposta negativa.

Exemplo 34

Use o teorema de Euler para decidir qual dos grafos abaixo admite um circuito euleriano.



Veja que no grafo da direita, todos os vértices têm grau par e, portanto, ele admite um circuito euleriano. Já o grafo da esquerda tem quatro vértices de grau três e, devido a isto, não admite um circuito euleriano. Isto é, se partirmos de qualquer um vértice, não será possível percorrer todas as arestas retornando a este mesmo vértice passando por cada delas uma só vez.

Usando lápis e papel estude estes dois exemplos e tente desenhar sobre eles circuitos eulerianos. Construa você mesmo alguns exemplos de grafos e decida se eles admitem ou não circuitos eulerianos.

Prova do Teorema de Euler

Neste momento da aula, é importante que você perceba que podemos usar um teorema para resolver problemas sem mesmo conhecer sua demonstração. Isto é válido e, na verdade, ocorre com freqüência. Quantas pessoas conhecem o enunciado do Teorema de Pitágoras e o aplicam na resolução de problemas sem jamais ter visto uma só de suas demonstrações?

Educação é o que permanece quando tudo o que foi aprendido na escola é esquecido.
Einstein

No entanto, as demonstrações nos levam mais longe, para o mundo das idéias. **Veja que o esforço para compreender uma prova em Matemática é sempre recompensado. Mesmo depois de esquecida a demonstração, teremos absorvido algo da idéia que a realizou.**

O teorema afirma que as condições necessárias e suficientes para que um grafo G admita um circuito euleriano são:

a) G é conexo;

b) todos os vértices de G têm grau par.

O enunciado deste Teorema é do tipo $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$, onde p, q e r são as seguintes proposições:

p: o grafo G é conexo;

q: cada vértice do grafo G tem grau par;

r: o grafo G admite um circuito euleriano.

Início da prova do teorema.

Prova. Primeiro vamos mostrar que as condições são necessárias. Isto é, $r \Rightarrow p \wedge q$.

Estamos supondo que G admite um circuito euleriano. Vamos denotá-lo por

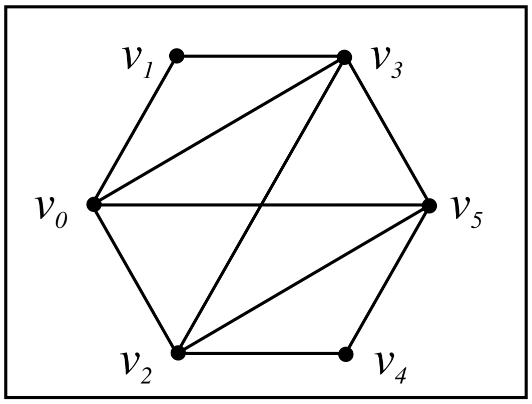
$$v_0 v_1 v_2 v_3 \ldots v_{k-2} v_{k-1} (v_k = v_0).$$

Queremos provar que o grafo G é conexo e que cada vértice tem grau par. Estas duas afirmações são conseqüências da existência do circuito euleriano representado acima.

Realmente, usando trechos seqüenciais deste circuito, podemos construir caminhos (simples) ligando quaisquer dois vértices do grafo, pois todos os vértices aparecem no circuito. Portanto, o grafo G é conexo.

Para observar que cada vértice tem grau par, basta lembrar que cada aresta da lista acima aparece uma única vez e para calcular o grau de um certo vértice v_i, basta contar quantas vezes ele aparece na lista e multiplicar por dois, tomando cuidado com o vértice v_0, pois ele inicia e termina a lista. Ele é o único vértice listado duas vezes.

Repare como isto funciona no seguinte exemplo:



O grafo representado anteriormente admite o seguinte circuito euleriano:

$$v_0v_1v_3v_0v_2v_4v_5v_2v_3v_5v_0.$$

Note que os vértices v_3, v_2 e v_5 aparecem, cada um, duas vezes na lista e eles têm grau quatro. Os vértices v_1 e v_4 aparecem uma vez. Eles têm grau dois. O vértice v_0 aparece uma vez no interior da lista, o que contribui com duas unidades para seu grau. Como ele inicia e termina a lista, temos que contar uma aresta de cada lado. Portanto, o grau de v_0 é quatro.

Bem, esta foi a parte fácil da demonstração. Reforce a sua atenção para compreender o que vem a seguir.

A contrapositiva da proposição $a \Rightarrow b$ é a proposição $\sim b \Rightarrow \sim a$. Elas são proposições equivalentes. Lembre-se também que uma das Leis de De Morgan afirma que $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$. Veja aula 27.

A proposição $r \Rightarrow (p \wedge q)$ é equivalente à sua contrapositiva, a proposição $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim r$. Portanto, para dar uma resposta negativa à existência de um circuito euleriano basta constatar que alguma das condições não seja satisfeita. Isto é, para concluirmos que um grafo não admite um circuito euleriano basta que ele não seja conexo ou que tenha vértices de grau ímpar.

Prova de $(p \wedge q) \Rightarrow r$:

Como os grafos têm um número finito de vértices e um número finito de arestas, podemos listar *todos* os caminhos simples (cada aresta aparece uma só vez) do grafo G. A cada caminho podemos associar um *comprimento*. Basta contar o número de arestas do caminho.

Olhando em nossa lista de caminhos simples podemos escolher um cujo comprimento seja o *maior comprimento*. Vamos denotar este caminho por:

$$v_0v_1v_2v_3 \ldots v_{k-2}v_{k-1}v_k.$$

Este caminho é o nosso candidato a circuito euleriano. Precisamos fazer duas coisas: mostrar que ele é um circuito e que contém *todos* os vértices. Para isto usaremos nossas duas condições: graus pares e conexidade.

A hipótese de que todos os vértices são de grau par garantirá que o caminho escolhido é, na verdade, um circuito ($v_k = v_0$).

Como estamos lidando com um caminho simples, quaisquer dois vértices seguidos na lista acima são distintos. Isto é, $v_j \neq v_{j+1}$.

Além disto, *todos os vértices adjacentes a v_k também estão na lista.* Ou seja, todas as arestas que estão conectadas a v_k já fazem parte do caminho pois, caso contrário, nós poderíamos aumentar o comprimento do caminho acrescentando-a na lista. Ora, isto contrariaria a suposição de que escolhemos um caminho de comprimento máximo.

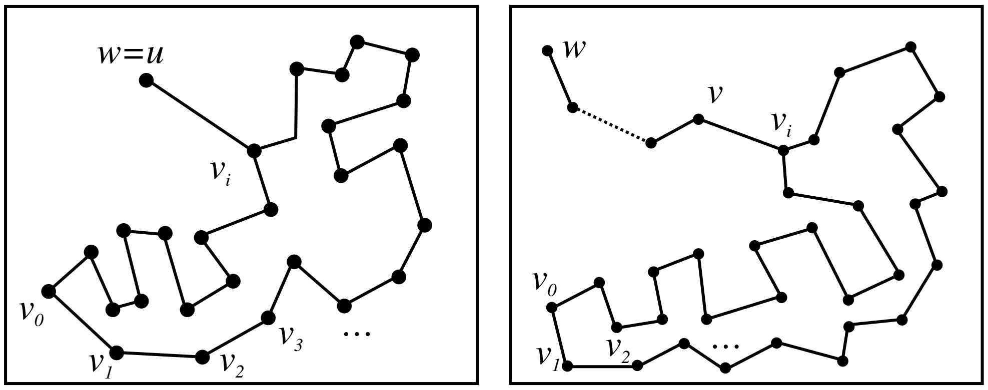
Agora, o grau de v_k é par, pois todos os vértices têm grau par, por hipótese. Então $v_k = v_0$.

Realmente, se $v_k \neq v_0$, então grau$(v_k) = 2 \times$ (número de vêzes que v_k aparece no interior da lista) $+ 1$, que é um número ímpar.

Você deve estar concluindo que o caminho escolhido é um circuito. Para terminar a prova devemos verificar que contém todos os vértices. Para isto usaremos a conexidade do grafo, a hipótese que ainda não foi usada.

Suponhamos que o caminho $v_0v_1v_2v_3 \ldots v_{k-2}v_{k-1}v_k$ não contenha algum vértice do grafo G. Este vértice, que chamaremos de w, está ligado ao circuito $v_0v_1v_2v_3 \ldots v_{k-2}v_{k-1}v_k$. Caso contrário o grafo não seria conexo. Isto significa que existe uma aresta $a = uv_i$ que não consta na lista das arestas do caminho $v_0v_1v_2v_3 \ldots v_{k-2}v_{k-1}v_k$ e adjacente a um de seus vértices, digamos v_i.

Veja o que acontece nos dois exemplos a seguir:



O caminho

$$uv_iv_{i+1} \ldots v_{k-1}(v_k = v_0)v_1v_2 \ldots v_{i-1}v_i$$

é uma aresta mais longo do que o caminho escolhido inicialmente. Isto é uma contradição.

Fim da prova do teorema.

Outra conclusão importante e que não deve escapar de sua atenção, é de que não há nenhum outro vértice fora da lista do caminho escolhido e, portanto, o circuito é euleriano. □

Outras considerações importantes que você não deve esquecer

Toda a argumentação está fundamentada na existência de uma lista de caminhos simples, ou seja, caminhos onde cada aresta que é usada, é usada uma só vez. Aqui é essencial que lidemos com um número finito de vértices e de arestas. Além disso, como esta lista é finita, temos a certeza de que há um caminho com o maior comprimento de todos os outros. O resto é história...

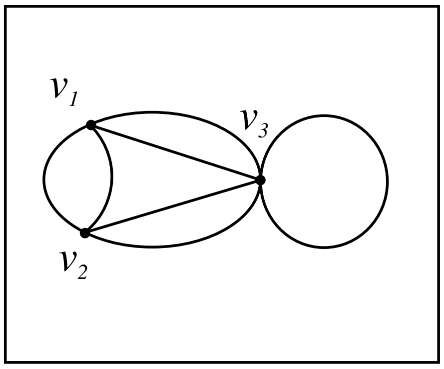
O diagrama original desenhado por Euler não é um grafo por ter mais do que uma aresta conectando os mesmos dois vértices. O conceito original de grafos incluía tais exemplos, mas a definição atual, usando a linguagem de conjuntos, os exclui. No entanto, há um conceito que os inclui, é a noção de *multigrafo*. Num multigrafo admite-se mais do que uma aresta ligando os mesmos dois vértices. Elas são chamadas de *arestas paralelas*. Além disso, admite-se que uma aresta conecte um vértice a ele mesmo. Tais arestas são chamadas de *laços*.

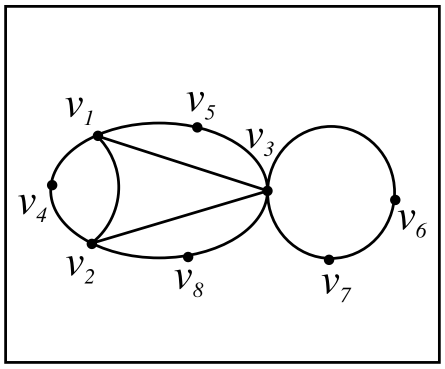
As noções de caminho, caminho simples, circuito e conexidade aplicam-se de maneira natural para os multigrafos. Especialmente, vale a noção de grau de um vértice, contanto que os eventuais laços sejam contados com multiplicidade dois.

O Teorema de Euler continua verdadeiro se trocarmos, em seu enunciado, grafo por multigrafo. Isto é, um multigrafo admite um circuito euleriano se, e somente se, é conexo e cada um de seus vértices tem grau par.

Para provar isto temos que considerar que os multigrafos têm eventuais laços ou arestas paralelas. O problema é resolvido da seguinte maneira: introduzindo novos vértices, um para cada laço e um para cada aresta paralela. Desta maneira tornamos o multigrafo um grafo com mais vértices e arestas do que originalmente mas, um grafo. Este processo não desconecta o grafo, pois cada um destes novos vértices tem grau dois e o grau dos vértices originais não é alterado.

Aqui está um exemplo de como podemos fazer isto:



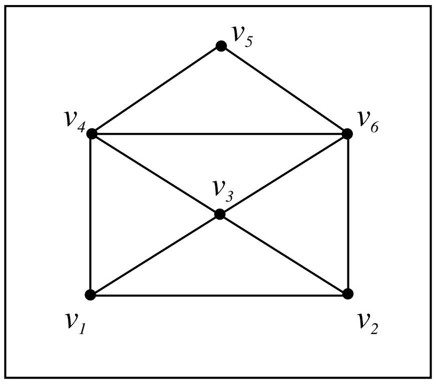


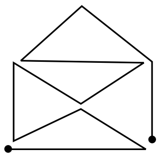
Desta forma, o grafo obtido admite um circuito euleriano, devido ao teorema que acabamos de demonstrar. A partir deste circuito euleriano, suprimindo os vértices acrescentados, obtemos o circuito euleriano para o multigrafo.

O teorema que acabamos de demonstrar faz parte de uma classe muito especial de teoremas. São os teoremas que, sob certas condições, garantem a existência de algo. No nosso caso é a existência de um circuito euleriano.

Grafos Eulerianos

Você já sabe que vértices de grau ímpar são obstruções à existência de circuitos eulerianos. No entanto, consideremos o seguinte grafo G:





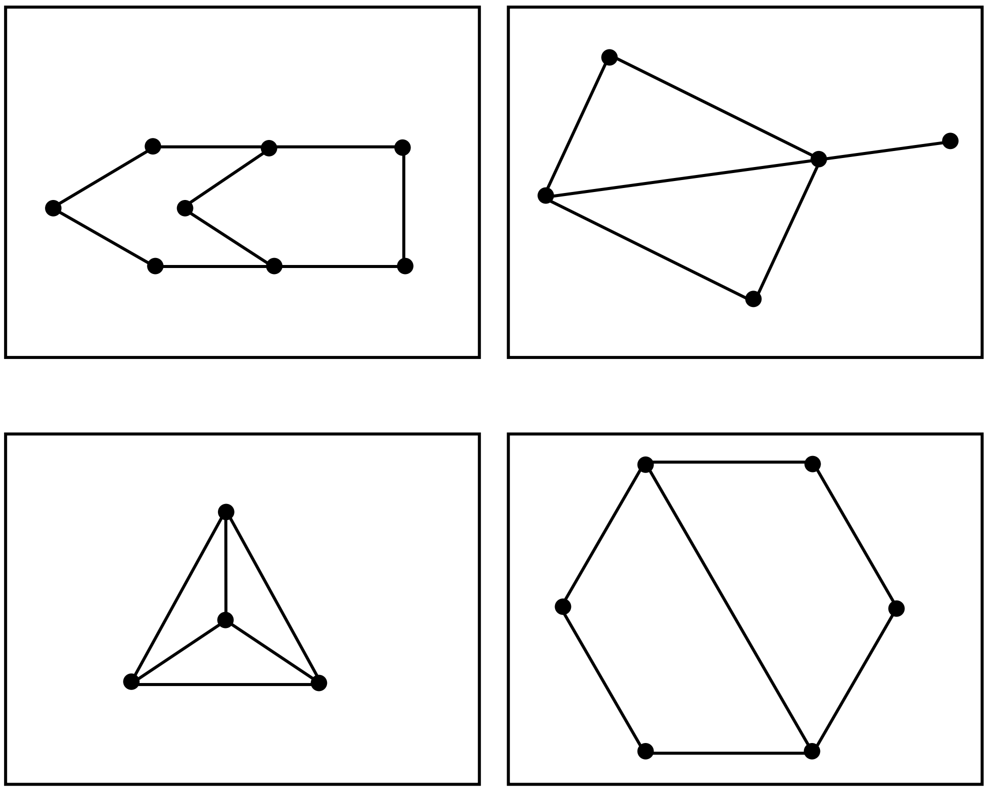
O grafo G tem dois vértices de grau ímpar: v_1 e v_2. Conseqüentemente, G não admite um circuito euleriano. No entanto, um pouco de incredulidade faz bem a quem estuda Matemática! Se você passar algum tempo pensando neste particular exemplo, e pensar em Matemática com lápis e papel na mão é sempre divertido, poderá ter uma surpresa: se abrirmos mão da condição de retornar ao vértice de partida, é possível percorrer *todo* o grafo G passando por cada aresta uma *única vez*:

$$v_1v_2v_3v_1v_4v_3v_6v_4v_5v_6v_2.$$

O grafo G não admite um *circuito* euleriano, mas admite um caminho simples que contém *todas as suas arestas*. Quando isto ocorrer diremos que o grafo G é um *grafo euleriano*.

Exemplo 35

É claro que qualquer grafo que admite um circuito euleriano é ele mesmo um grafo euleriano. Pegue agora lápis e papel e, com um pouco de atenção, tente descobrir quais dos grafos representados a seguir são eulerianos.



Todos estes grafos são eulerianos, com exceção de K^4. O problema é que ele tem mais do que dois vértices de grau ímpar.

Teorema: *Um grafo G admite um caminho euleriano se, e somente se, é conexo e tem, no máximo, dois vértices de grau ímpar.*

Prova do Teorema: Suponhamos que o grafo admita um caminho que percorre todas as arestas passando por cada uma delas uma única vez.

Se este caminho é fechado, ele é um circuito euleriano e, portanto, o grafo é conexo e todos os seus vértices têm grau par.

Se o caminho não é um circuito, ele tem a forma

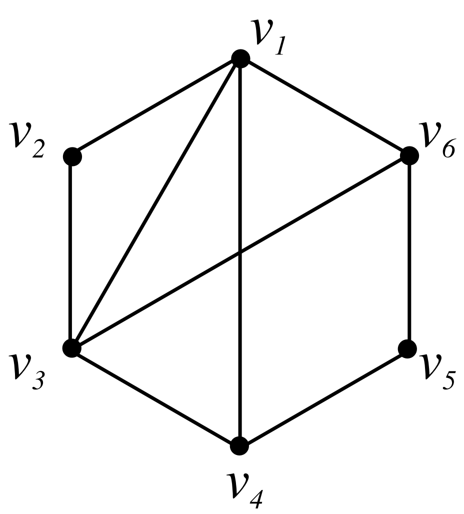
$$v_0 v_1 v_2 \ldots v_{k-1} v_k$$

com $v_0 \neq v_k$. Todos os vértices e arestas estão presentes nesta lista. v_0 e v_k são os únicos vértices de grau ímpar.

Vamos agora considerar a possibilidade do grafo ser conexo e ter dois vértices de grau ímpar. Vamos denotá-los por v_0 e v_k. Acrescentando uma extra aresta a que conecte v_0 a v_k obtemos um grafo que ainda é conexo, mas que tem todos os vértices de grau par. Este grafo admite um circuito euleriano. Subtraindo a aresta a deste circuito obtemos um caminho que conecta v_0 a v_k e percorre todas as arestas, cada uma delas uma única vez. $\square$

Exercícios

1. Considere o grafo G a seguir e identifique quais dos caminhos indicados são simples, quais são circuitos e quais são circuitos eulerianos.



a) $v_4 v_1 v_3 v_0$

b) $v_5 v_0 v_3 v_1 v_2$

c) $v_3 v_4 v_5 v_0 v_1 v_2 v_3$

d) $v_0 v_1 v_2 v_3 v_1 v_4 v_5 v_0 v_3 v_4$

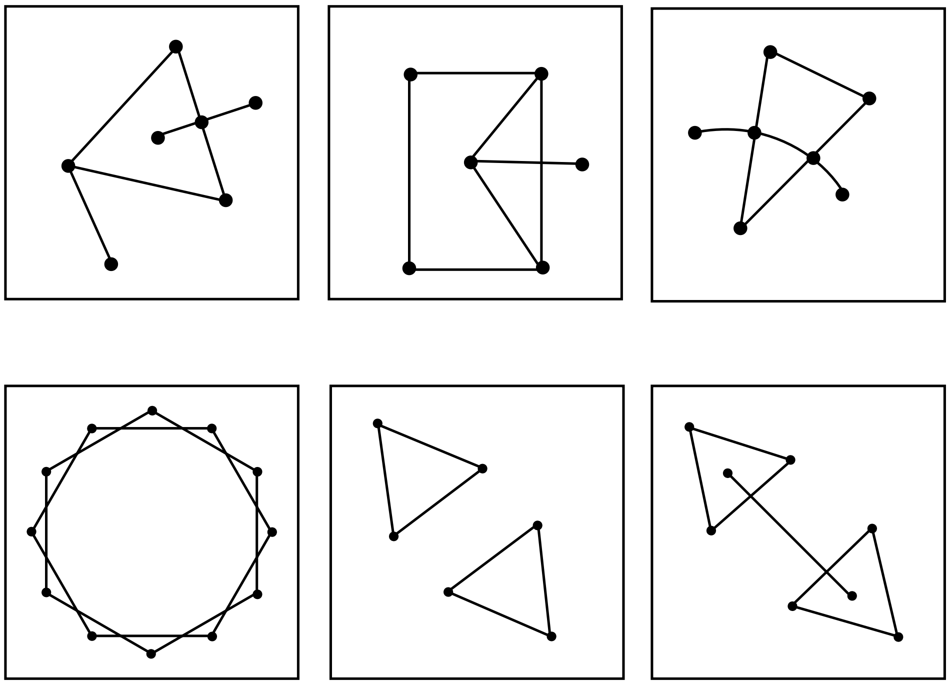
e) $v_3 v_4 v_1 v_0 v_3 v_2 v_1$

f) $v_1 v_4 v_5 v_0 v_1$

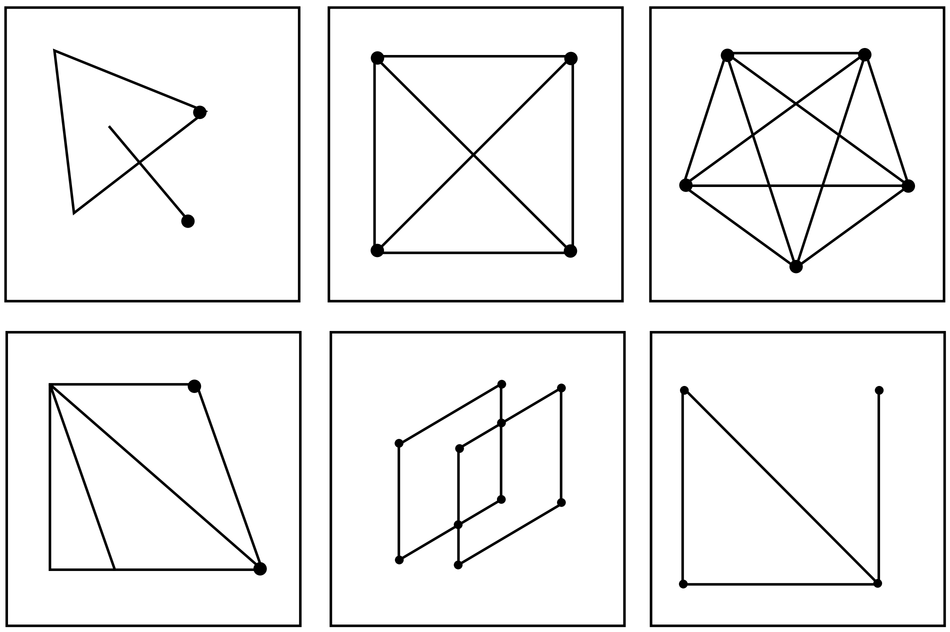
g) $v_3 v_1 v_2 v_3 v_0 v_1 v_3 v_4$

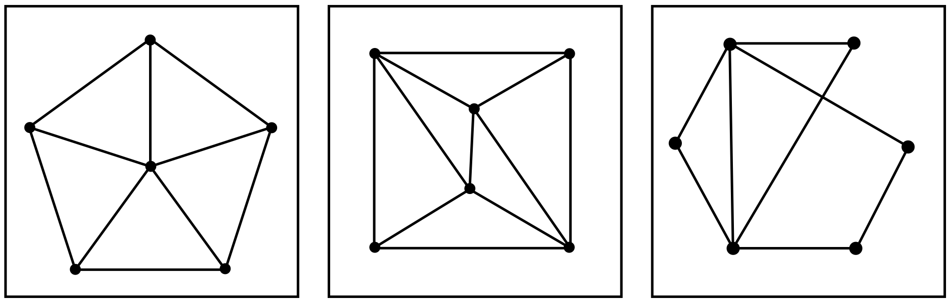
h) $v_1 v_3 v_0 v_5 v_4 v_1 v_3 v_2 v_1$

2. Quais dos grafos a seguir são conexos? Indique quais são as componentes conexas daqueles grafos que não são conexos.



3. Considere os grafos representados a seguir. Determine quais admitem um circuito euleriano e quais são grafos eulerianos. Nos casos afirmativos, encontre um circuito euleriano ou atravesse o grafo, caso ele seja um grafo euleriano.



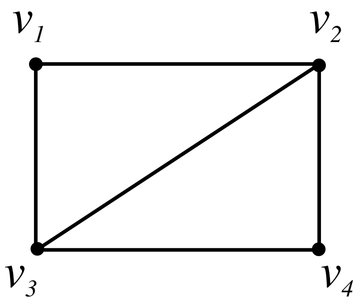


4. Para que valores de n o grafo K^n admite um circuito euleriano?

5. As informações necessárias para construir um determinado grafo podem ser armazenadas numa tabela, da seguinte forma: Se o grafo for de ordem n a tabela será quadrada com uma linha e uma coluna reservada para cada vértice, respectivamente.

   Na interseção de uma coluna com uma linha marcamos com o número 1 ou com o número 0, caso os vértices correspondentes sejam adjacentes ou não, respectivamente. Observe que a diagonal que vai do canto superior esquerdo do quadrado para o canto inferior direito será preenchida com zeros, pois num grafo não há laços. Um exemplo deixará claro que isto é bem simples:

   O grafo G a seguir tem ordem 4 e sua tabela está disposta ao seu lado.



	v_1	v_2	v_3	v_4
v_1	0	1	1	0
v_2	1	0	1	1
v_3	1	1	0	1
v_4	0	1	1	0

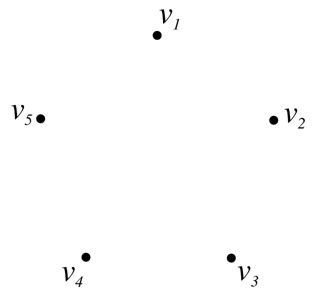
   Note que a tabela é simétrica em relação à diagonal pois, se o vértice v_i é adjacente ao vértice v_j, então v_j também é adjacente a v_i.

   No exemplo dado, a quarta coluna tem um zero na primeira posição indicando que v_4 não é adjacente a v_1 e, como a terceira coluna tem três números 1 e um número 0, sabemos que o grau de v_3 é 3.

   A idéia é a mesma que é usada nos guias turísticos para dispor as distâncias entre as diferentes cidades.

Esta tabela é chamada de *matriz de adjacência do grafo*. Para ter certeza que você entendeu este conceito, represente o gráfico G de ordem 5 correspondente à seguinte matriz de adjacência:

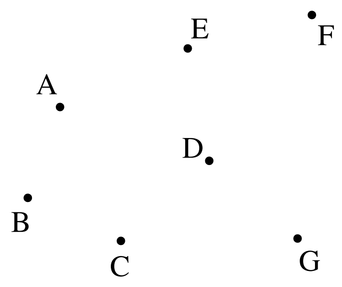
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	1	0	1
v_2	1	0	1	0	1
v_3	1	1	0	1	1
v_4	0	0	1	0	0
v_5	1	1	1	0	0



Você agora está preparado para desvendar o seguinte caso:

Um jovem casal morava no interior de um certo estado, na cidade de Altamira. As cidades mais próximas de Altamira são Bicas, Candeias, Diamantina, Estrela do Sul, Figueiras e Galo Branco. Elas são conectadas por uma rede de estradas um tanto mal cuidadas. O rapaz prometeu casar-se com a moça assim que terminasse o trabalho de recuperação destas estradas, pois havia acabado de firmar um contrato com as prefeituras das cidades para fazer isto. Ele prometeu à jovem que iniciaria os trabalhos em Altamira e prosseguiria sobre cada trecho de estrada retornando, no fim do trabalho, à Altamira. Será que o jovem é sincero? Poderá a moça confiar em seu noivo? Para responder a esta emocionante questão, dispomos de uma tabela onde está marcado com 1 as cidades que estão ligadas por uma estrada, e por 0 quando não há estrada conectando as duas cidades.

	A	B	C	D	E	F	G
A	0	1	1	1	1	0	0
B	1	0	1	0	0	0	0
C	1	1	0	1	0	0	1
D	1	0	1	0	1	0	1
E	1	0	0	1	0	1	1
F	0	0	0	0	1	0	1
G	0	0	1	1	1	1	0



Auto-avaliação

Esta aula tem uma bonita demonstração. Por isto, você precisará trabalhá-la de maneira bem especial.

Primeiro tenha certeza de que entendeu os conceitos novos, apresentados inicialmente. Você sabe se um grafo é conexo ou não? Sabe distinguir um caminho simples de um caminho que não é simples? Qual é a diferença entre um caminho fechado qualquer e um circuito? Lembre-se que um circuito é um caminho fechado onde as arestas não se repetem.

O principal tema da aula é o Teorema de Euler que aqui apresentamos junto com sua demonstração. Saber quando as hipóteses do teorema são satisfeitas por um dado grafo é fundamental. Assim você saberá se o grafo admite, ou não, um circuito euleriano.

Você é capaz de desenhar dois grafos conexos, um que admite um circuito euleriano e um que não admite?

Você pode propor estas questões para seus amigos. Elas dão bons quebra-cabeças.

Não deixe a demonstração intimidá-lo. Uma vez que você tenha uma visão global, passe a examinar os detalhes. A demonstração está escrita em várias páginas, pois os argumentos foram detalhados e exemplificados. Aproveite esta oportunidade!

Aula 33 – Grafos Hamiltonianos

Objetivos

- Nesta aula você conhecerá o Problema do Caixeiro-Viajante e aprenderá como, sob certas condições, resolvê-lo.

- Conhecerá o conceito de ciclo hamiltoniano e verá como ele difere de circuito euleriano, que você viu na aula anterior.

- Vai conhecer uma idéia matemática muito útil, chamada de 'Princípio das Gavetas'.

Recordando

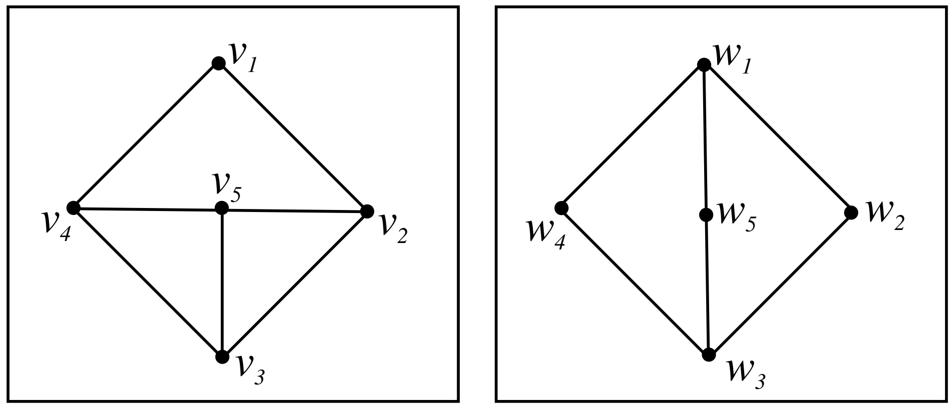
Na aula anterior você pôde perceber a beleza e a força das idéias em Matemática. A demonstração feita por Euler em 1736 é como um diamante: durará para sempre.

Nesta aula você verá a abordagem de um problema parecido com aquele resolvido por Euler, mas agora a ênfase estará nos vértices em lugar de nas arestas.

O Problema do Caixeiro-Viajante

Vamos acompanhar nosso amigo caixeiro-viajante numa nova etapa de sua vida. Ele está para iniciar uma nova rota de vendas e deverá visitar um conjunto de cidades que estão ligadas por diversas estradas. Nosso caixeiro-viajante é, nos momentos em que espera a condução, um matemático amador muito interessado na Teoria dos Grafos. Ele quer estabelecer uma rota de visitas às cidades de forma que ele passe por cada cidade uma só vez, retornando, no fim de sua jornada, à cidade da qual partiu. Ele discutiu o problema com o gerente do hotel onde costuma hospedar-se, outro grande interessado na Teoria dos Grafos. Eles concluíram que a melhor abordagem seria traçar um grafo para representar a situação. Os vértices representariam as cidades e as arestas representariam as estradas que ligam as cidades. Desta forma, o problema consiste em achar um circuito onde cada vértice aparece uma única vez.

Para que o gerente do hotel entendesse bem a abordagem, o caixeiro-viajante usou de um conhecido expediente: exemplos. Ele tirou de sua pasta de amostras um bloco de papel e uma linda lapiseira. Traçou dois exemplos sobre os quais ele e o hoteleiro se debruçaram. Vejamos com eles.



Nos dois exemplos há cinco cidades ligadas pelas estradas, porém, de maneiras diferentes. O caixeiro-viajante disse: Olhe, o grafo da esquerda admite um circuito que contém todas as cidades, cada uma representada uma só vez. E, com sua reluzente lapiseira, traçou sobre o grafo o seguinte circuito:

$$v_1 v_2 v_3 v_5 v_4 v_1.$$

Disse ainda: Caro hoteleiro, você encontraria um outro circuito como este?

Mas o hoteleiro estava absorto olhando o outro exemplo e disse: Veja, o grafo da direita não pode ter seus vértices todos percorridos desta forma. E assim, prosseguiu: Vamos supor que você inicie sua jornada em w_1. Há três possíveis escolhas para prosseguir: w_4, w_5 ou w_2. Note que seguir para w_4, resultará no mesmo que seguir para w_2, pois o grafo é simétrico. Vamos supor então que você siga para w_2. Daí só é possível prosseguir para w_3. Agora você enfrenta uma escolha: w_5 ou w_4. Em qualquer um dos casos, você precisará retornar a alguma cidade para completar o circuito. Resta agora supor que você parta de w_1 para w_5. Neste caso, deverá prosseguir necessariamente para w_3 e aí enfrenta uma escolha: w_2 ou w_4. Novamente, qualquer escolha inviabilizará a solução.

O caixeiro-viajante estava realmente surpreso com a análise do segundo exemplo feita pelo hoteleiro.

Você já percebeu que, como no caso do Problema das Pontes de Königsberg, o Problema do Caixeiro-Viajante é interessante. Reveja os dois exemplos estudados pelos dois amigos. Tente encontrar um outro circuito, como sugeriu o caixeiro-viajante. Reveja a análise do segundo exemplo feita pelo hoteleiro usando lápis e papel. Isto é, convença-se de que realmente não há um circuito que percorra todos os vértices incluindo cada um deles uma única vez.

Antes de prosseguir, tenha a certeza de que entendeu a diferença entre o problema da aula anterior e o que estamos abordando agora. Antes queríamos percorrer todas as *arestas*, passando cada uma delas uma só vez e, para conseguir isto, permitíamo-nos passar por alguns vértices mais do que uma vez (o problema do fiscal-de-estradas). Agora queremos percorrer todos os *vértices*, passando por cada um deles uma única vez. Para fazer isto não importa que, eventualmente, algumas arestas não sejam incluídas no circuito.

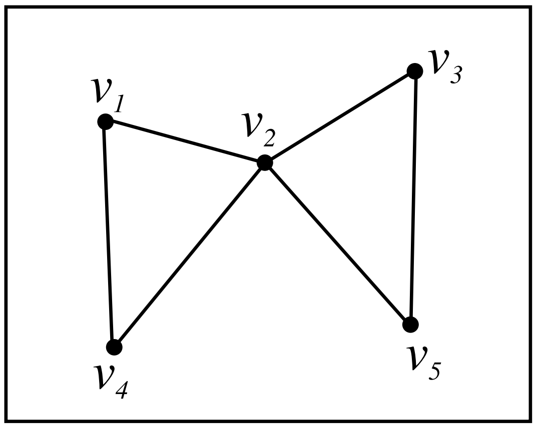
Ciclos

Para reforçar a diferença das duas abordagens vamos introduzir uma nova terminologia: chamaremos de *ciclo* todo circuito que, além de não repetir as arestas, não repete vértices.

O exemplo seguinte poderá auxiliar a sua compreensão. Observe com atenção!

Exemplo 36

Seja G o grafo de ordem 5 representado a seguir:



O grafo G admite o circuito (euleriano) $v_1v_2v_3v_5v_2v_4v_1$. Este circuito não é um ciclo pois o vértice v_2 é usado duas vezes.

Note que G admite dois ciclos: $v_1v_2v_4v_1$ e $v_2v_3v_5v_2$. Veja também que as palavras $v_1v_4v_2v_1$, $v_1v_2v_4v_1$ e $v_2v_1v_4v_2$ representam o mesmo ciclo.

Ciclos Hamiltonianos

Se há um ciclo que contenha todos os vértices do grafo G dizemos que ele admite um *ciclo hamiltoniano* . Neste caso diremos que G é *hamiltoniano*.

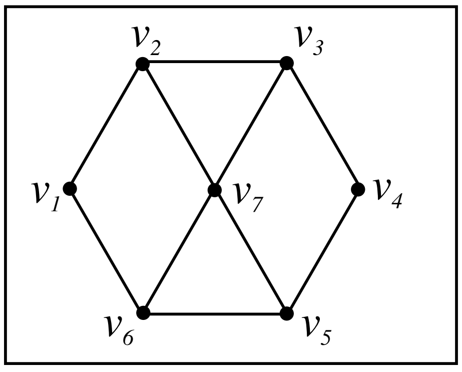
Sir William Rowan Hamilton (1805 - 1865), matemático irlandês que descobriu o primeiro exemplo de um tipo de multiplicação não comutativa. Isto é o que chamamos de *quatérnios*. São números da forma $a + bi + cj + dk$ onde a, b, c e d são números reais e as 'unidade' i, j e k são multiplicadas segundo as leis:

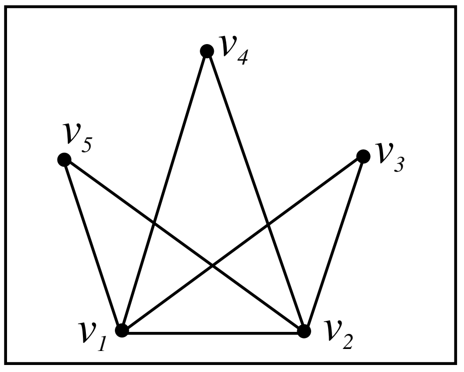
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

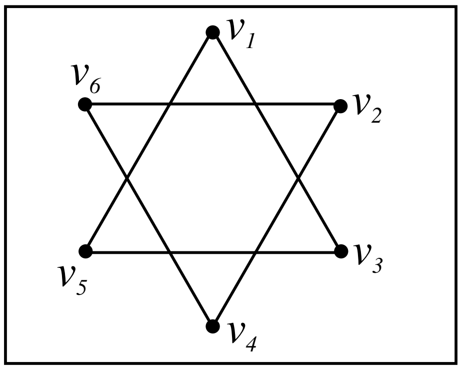
Por exemplo, se c e d são iguais a zero tudo funciona como se os quatérnios fossem números complexos. A história conta que a fórmula acima ocorreu a Hamilton, após muito tempo de trabalho no assunto, enquanto ele passeava com sua mulher pela cidade de Dublin. Eles estavam cruzando uma ponte chamada Ponte Brougham e, o impulso criativo foi tão forte que Sir William sacou de seu canivete e gravou a fórmula na tal ponte...

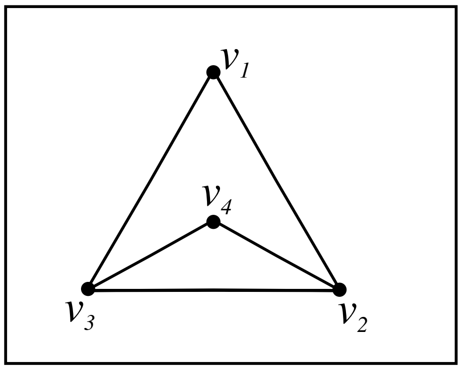
Exemplo 37

Quais dos seguintes grafos admite um ciclo hamiltoniano? Como você já sabe, aí vem diversão! Pegue lápis e papel e mãos à obra. A resposta de cada caso está no fim da aula, mas você não vai querer ajuda, vai?





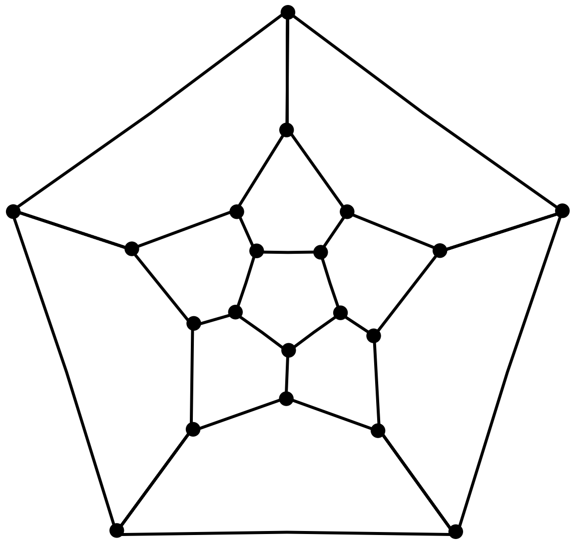




Nota sobre a Terminologia

O nome, ciclo hamiltoniano, é uma homenagem a Sir William Rowan Hamilton. Em 1859 Sir William propôs um quebra-cabeça baseado num dodecaedro. O dodecaedro é um dos cinco poliedros platônicos e é formado por doze pentágonos regulares, daí o nome. Este sólido tem vinte vértices e trinta arestas. Sir Hamilton deu a cada vértice o nome de uma cidade famosa e o jogo consistia em tentar 'viajar' ao redor do mundo passando por cada uma das cidades uma única vez. Só se poderia viajar de uma cidade para a outra através de alguma aresta do dodecaedro.

Para visualizar o problema não é necessário usar um modelo de dodecaedro. É possível ‘planificar’ o problema da seguinte forma: imagine que seu dodecaedro é feito de um material elástico, altamente flexível e maleável. Usando uma tesoura imaginária, recorte um dos pentágonos, retirando uma face de seu dodecaedro. Agora, por esta abertura, estique os demais pentágonos sobre uma superfície plana. Você verá a seguinte configuração:



O quebra-cabeça proposto por Sir Hamilton consiste em encontrar um ciclo hamiltoniano para o grafo obtido do dodecaedro pelo processo exposto acima e representado na figura anterior.

Uma condição suficiente para a existência de um ciclo hamiltoniano

A questão da existência ou não de um ciclo hamiltoniano para um determinado grafo é mais difícil do que sua contrapartida euleriana. Não há um teorema que decida definitivamente a questão, assim como é o caso dos circuitos eulerianos. A experiência que você adquiriu com os exemplos vistos até agora sugere que quanto mais arestas melhor. No entanto, a distribuição destas arestas entre os vértices também é importante.

O teorema que aprenderemos nesta seção dá condições suficientes para a existência de um ciclo hamiltoniano. Isto é, se as condições do enunciado forem satisfeitas por um certo grafo G, então ele admitirá um ciclo hamiltoniano. No entanto, veremos também que estas condições não são necessárias.

Ou seja, há grafos que não satisfazem as hipóteses do teorema e, no entanto, admitem ciclos hamiltonianos.

Este teorema foi demonstrado em 1952 por Gabriel Andrew Dirac, enteado do famoso físico e prêmio nobel Paul Dirac. Este teorema tem uma certa importância histórica na Teoria dos Grafos, pois ele é o ponto de partida de outros resultados que se aprofundam na questão.

Teorema: *Seja G um grafo de ordem n ($n \geq 3$). Se grau(V) $\geq n/2$ para cada vértice V de G, então G admite um ciclo hamiltoniano*

A hipótese do teorema é restritiva, mas a dificuldade da questão permite apreciar a sua força. Veja que, se o grafo tem 4 vértices, para podermos usar o teorema, cada vértice deverá ter pelo menos grau 2 mas, atenção, caso ele seja de ordem 5, cada um dos vértices deverá ter pelo menos grau 3.

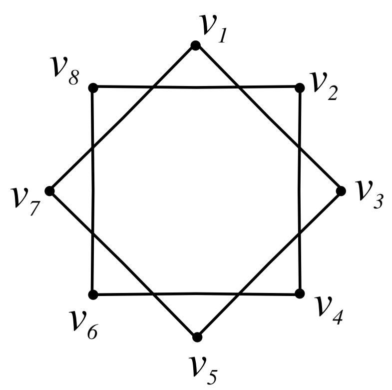
Hora de exercitar!

Usando lápis e papel, construa alguns exemplos de grafos com 5, 6 e 7 vértices, cada um deles com todos os vértices de grau maior ou igual a 3, 3 e 4, respectivamente.

Você verá agora, depois dos exemplos, que o converso do teorema é falso. Isto é, há grafos com muitos vértices mas com graus pequenos e que admitem ciclos hamiltonianos. Por exemplo, um polígono com 17 lados admite um ciclo hamiltoniano (basta percorrer o polígono uma vez) mas o grau de cada um de seus vértices é 2.

Prova do Teorema: Antes de proceder nos detalhes da prova, vamos ver como ela se divide em etapas.

A primeira etapa consiste em constatar que o grafo G é conexo. Note que ser conexo é uma condição necessária para que o grafo admita um ciclo hamiltoniano. Realmente, se o grafo não for conexo, qualquer ciclo que começar em alguma das componentes conexas não percorrerá os vértices das outras componentes. Considere o seguinte exemplo:



É impossível chegar a qualquer vértice de índice par começando em algum vértice de índice ímpar e vice-versa. A razão disto é que este grafo não é conexo. Ele é formado por duas componentes conexas, cada uma delas sendo um ciclo: uma só com os vértices com índices ímpares e uma só de vértices com índices pares.

A segunda etapa será a de conseguir um caminho K com as seguintes propriedades:

a) K é um caminho simples (as arestas não se repetem) sem vértices repetidos;

b) Qualquer caminho que tenha estas duas características é, no máximo, tão longo quanto K.

A partir deste caminho especial conseguiremos o desejado ciclo hamiltoniano.

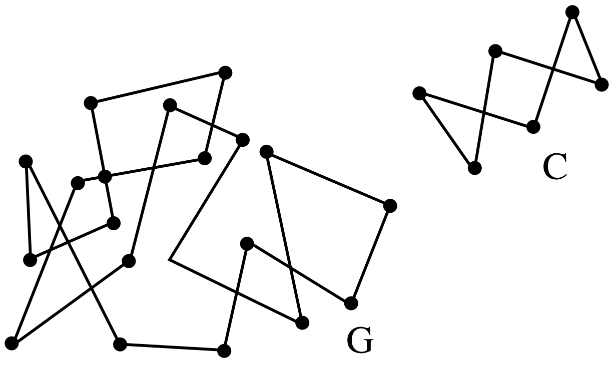
Prova de que o grafo G é conexo

Vamos fazer a primeira etapa da prova. Vamos provar que:

Lema: *Se G é um grafo de ordem $n(\geq 3)$ e grau$(V) \geq n/2$ para todo vértice V de G, então o grafo G é conexo*

A argumentação será por redução ao absurdo. Para isto, vamos supor que G satisfaça a hipótese do lema, mas não seja conexo. Então G é composto por mais de uma componente conexa.

Vamos chamar de C a componente conexa que tem o menor número de vértices. A ordem de C é menor ou igual que $n/2$. Note que, em grafos conexos, o grau de cada vértice é, no máximo, igual à ordem do grafo menos um.

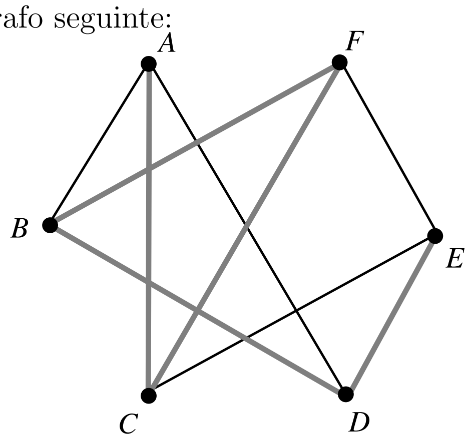


Mas cada vértice de C tem grau maior ou igual que $n/2$, por hipótese. Isto é uma contradição. Concluímos, então, que G é conexo. □

Segunda etapa da prova - O Ciclo Hamiltoniano

Para entender a argumentação que usaremos, vamos começar com um exemplo.

Seja G o grafo seguinte:



A ordem de G é 6 e cada um de seus vértices tem grau 3. Como G é um grafo conexo, as hipóteses do teorema são satisfeitas. Considere K o seguinte caminho simples, onde todos os vértices de G comparecem:

$$A\ C\ F\ B\ D\ E$$

Este caminho satisfaz as duas características que mencionamos antes:

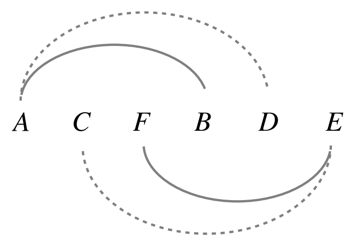
As arestas AC, CF, FB, BD e DE comparecem uma única vez, e como todos os vértices estão presentes, não há caminho mais longo sem que haja repetição de vértices.

Vamos nos concentrar nos vértices que estão nos extremos do caminho: A e E.

O vértice A está ligado ao vértice C pela aresta que já faz parte do caminho K, além de ser, também, adjacente a B e D.

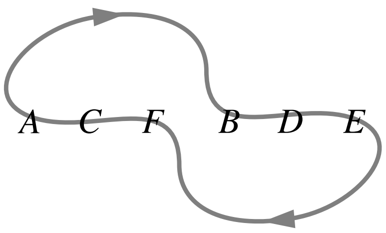
O vértice E, por sua vez, está ligado aos vértices C e F, além de ser adjacente a D pela aresta que faz parte do caminho K.

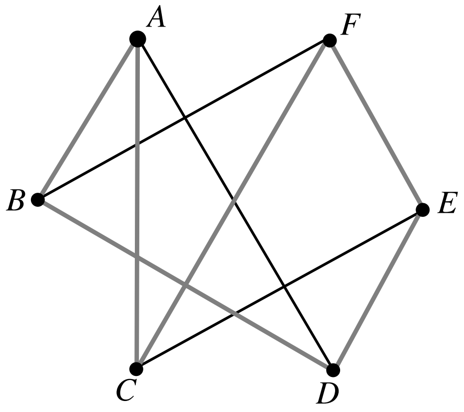
Vamos acrescentar estas informações ao nosso caminho obtendo o seguinte esquema:



Note que os vértices B e F, adjacentes a A e E, respectivamente, estão dispostos um após o outro, no caminho K. Vamos usar este fato para obter o ciclo hamiltoniano desejado.

Partindo de A vamos para B usando a aresta indicada no esquema $(*)$ pelo arco superior. Agora prosseguimos de B para E usando o caminho K: B para$D$ e depois para E. Para passarmos de E para F usamos a aresta indicada no esquema pelo arco inferior. Finalmente, retornamos para A, usando o trecho do caminho K original: de F para C e daí de volta para A, fechando o ciclo: $ABDEFCA$



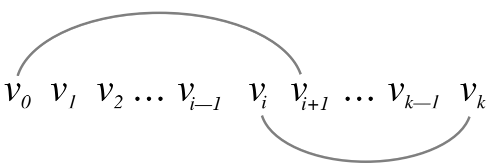


Nesta construção do ciclo hamiltoniano foi crucial o fato de os extremos do caminho K, os vértices A e E, estarem ligados aos vértices adjacentes F e B do interior do caminho, permitindo a construção do ciclo hamiltoniano.

Esta é a chave da demonstração. Ou seja, vamos mostrar que, nas circunstâncias da hipótese do teorema,

a) existe um caminho simples $K = v_0v_1v_2 \ldots v_{i-1}v_iv_{i+1} \ldots v_k$ com $v_i \neq v_j$ sempre que $i \neq j$, tal que K tem o maior comprimento entre todos os caminhos simples com esta propriedade;

b) existem dois vértices v_i e v_{i+1} no caminho K tais que v_i é adjacente a v_k e v_{i+1} é adjacente a v_0:



Concluíremos então que

$$v_0\ v_{i+1}\ v_{i+2}\ \ldots\ v_{k-1}\ v_k\ v_{i-1}\ v_{i-2}\ \ldots\ v_2\ v_1\ v_0$$

é um ciclo hamiltoniano.

O item (a) é verdadeiro devido à finitude do grafo G. Ou seja, pelo menos teoricamente, podemos listar todos os caminhos simples do grafo G onde não há repetição de vértices e, desta lista, escolhemos um que seja o mais longo de todos. Você deve ter reparado que a argumentação é semelhante à que foi usada na demonstração do Teorema de Euler.

Agora vamos ao item (b). Graças ao item (a) podemos contar com o caminho $K = v_0v_1\ldots v_k$. Note que todos os vértices que são adjacentes a v_0 e a v_k fazem parte do caminho K, exatamente porque ele tem comprimento máximo.

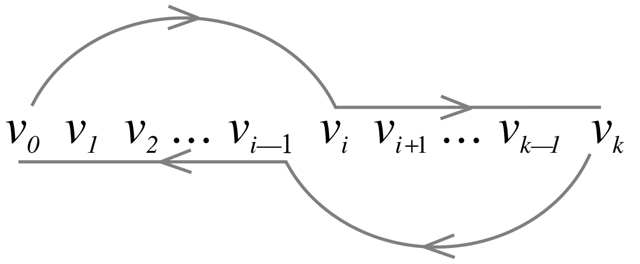
Podemos então afirmar que, pelo menos $n/2$ dos vértices v_0, v_1, $\ldots$, v_{k-1} são adjacentes a v_k.

Podemos afirmar também que, pelo menos $n/2$ destes mesmos v_i vértices são tais que v_0 e v_{i+1} são adjacentes.

Estas duas últimas afirmações são verdadeiras, pois o grau de v_0 e de v_k, bem como o de qualquer outro vértice de G é, pelo menos, $n/2$.

Agora, o 'pulo do gato': Como $k < n$, temos uma lista de elementos tal que, mais do que a metade deles satisfaz uma certa propriedade, e mais do que a metade deles satisfaz a uma outra propriedade. Desse modo, podemos concluir que pelo menos um elemento da lista satisfaz a ambas as propriedades.

Outra conclusão importante é a de que existe um vértice v_i que é // adjacente a v_k e v_0 é adjacente a v_{i+1}. Assim montamos o esquema



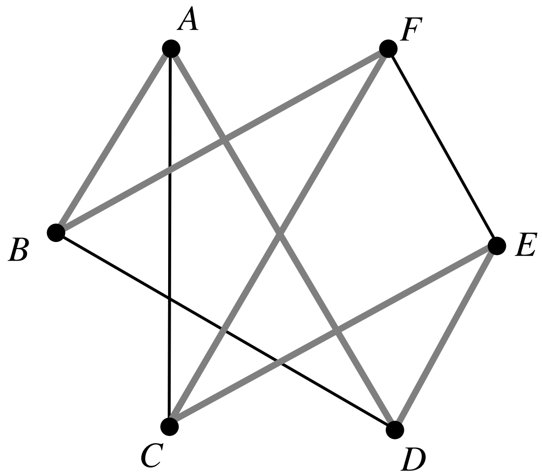
e, a partir dele, construimos o ciclo

$$v_0\ v_{i+1}\ v_{i+2}\ \ldots\ v_{k-1}\ v_k\ v_{i-1}\ v_{i-2}\ \ldots\ v_2\ v_1\ v_0.$$

Agora usamos o fato de o grafo ser conexo e de o caminho K ser máximo para concluir que o ciclo acima é hamiltoniano.

Isto completa a demonstração do Teorema de Dirac.

Mais uma observação importante! O vértice v_i pode ser o próprio v_0. Isto ocorre caso os vértices extremos v_0 e v_k sejam adjacentes e o ciclo hamiltoniano seja obtido simplesmente 'fechando' o caminho K, tornando-o, dessa forma, um ciclo. Veja, nós poderíamos ter usado o caminho simples $ABFCED$ no grafo do exemplo, pois ele também é máximo. Você concorda? Como A e D são adjacentes, obteríamos outro ciclo hamiltoniano: $ABFCEDA$.



O Princípio das Gavetas

Na portaria de um prédio de 17 apartamentos há um conjunto de caixas de correspondência, uma para cada apartamento, chamadas de escaninhos. O porteiro encarregado de distribuir a correspondência recebeu 9 panfletos azuis com propaganda de uma pizzaria, e recebeu também, 9 panfletos amarelos com propaganda de uma vídeo-locadora para distribuir entre os moradores do prédio. Ele experimentou colocar os panfletos nos escaninhos, de maneira que, cada apartamento recebesse pelo menos um deles. Após a distribuição ele observou que:

a) Um apartamento ficou sem receber panfleto.

b) Todos os apartamentos receberam panfletos amarelos e azuis.

c) Um apartamento recebeu um panfleto amarelo e um panfleto azul.

d) As pizzas eram azuis e os vídeos amarelos.

E a resposta correta é a letra (c) (Você está certo disto?)

O intrigado porteiro retirou todos os panfletos dos escaninhos e procedeu a uma nova distribuição. Ele observou que novamente um apartamento recebeu um panfleto de cada cor.

Este princípio também é conhecido por "Princípio da Casa do Pombo". Isto é devido a uma tradução quase literal do título em inglês: The Pigeonhole Principle". Uma tradução mais precisa seria "Princípio do Escaninho".

O porteiro desta história estava experimentando aquilo que na demonstração anterior chamamos de 'pulo do gato'. É o que em Matemática é conhecido por *Princípio das Gavetas.* Aqui está o enunciado:

Princípio das Gavetas: *Se $n+1$ ou mais objetos são dispostos em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.*

Basta lembrar da famosa brincadeira da dança das cadeiras, muito comum nas festas de crianças.

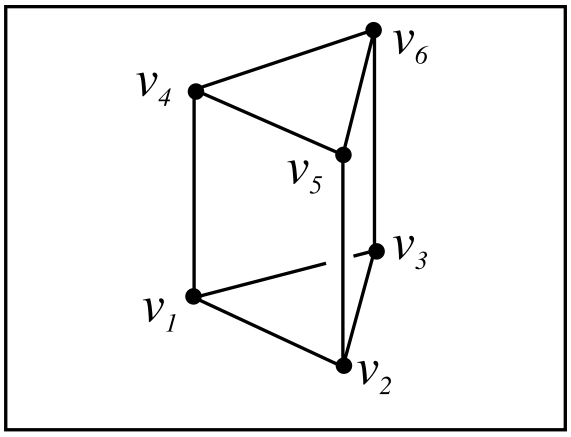
Mais um exemplo

Vamos ilustrar a busca de um ciclo hamiltoniano num grafo, satisfazendo as hipóteses do Teorema de Dirac com mais um exemplo.

Observe com atenção!

Exemplo 38

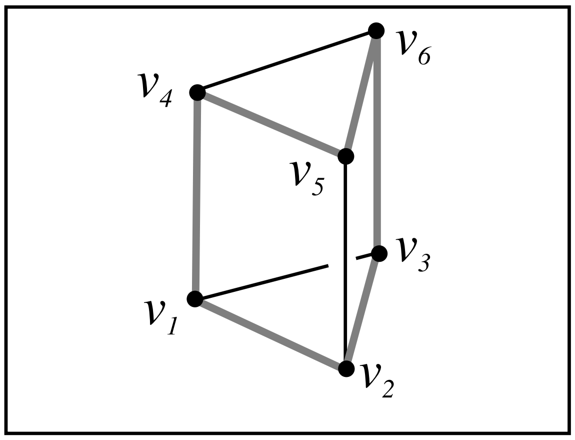
Seja G o seguinte grafo de ordem 6:



Note que cada vértice tem grau 3 e, portanto, o Teroema de Dirac nos diz que há um ciclo hamiltoniano. Vamos começar nossa busca procurando um caminho simples que contenha todos os vértices, por exemplo: $v_1\ v_4\ v_5\ v_2\ v_3\ v_6$. Se os vértices v_1 e v_6 fossem adjacentes nossa busca haveria terminado. Este não é o caso. Repetindo o que foi feito na demonstração do teorema obtemos o seguinte esquema:

$$v_1 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_6$$

O ciclo hamiltoniano será v_1 v_2 v_3 v_6 v_5 v_4 v_1.



O Problema do Cavalo

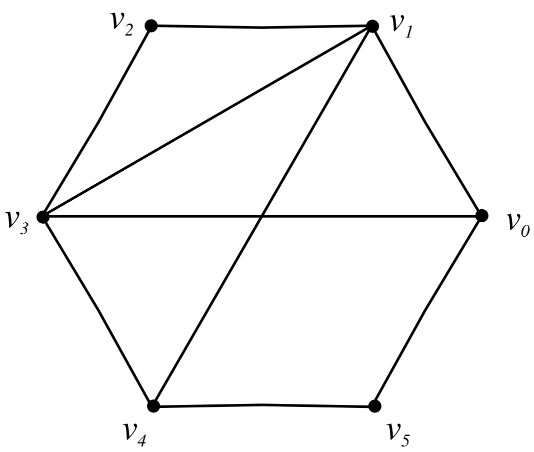
Ciclos hamiltonianos eram objetos de estudo bem antes de Sir Hamilton ter proposto seu jogo. Em particular era conhecido o problema do passeio do cavalo pelo tabuleiro de xadrez e que foi completamente analisado por Euler em 1759. O problema é o seguinte: Seguindo as regras de movimento do cavalo, é possível que um cavalo parta de uma casa qualquer e percorra todo o tabuleiro, visitando cada uma das 64 casas, passando por cada uma delas uma única vez e retornando à casa inicial?

Os cavalos movem-se em "L", passando sempre por três casas.

Este problema pode ser traduzido como a busca de um ciclo hamiltoniano num grafo com 64 vértices, dispostos em um quadrado 8 por 8, onde dois vértices são adjacentes se, e somente se, for possível passar de um para o outro por um movimento de cavalo.

Exercícios

1. Seja G o grafo representado a seguir:



Quais dos seguintes caminhos são fechados, simples? Quais são circuitos? Quais são ciclos?

a) $v_0v_3v_1v_4v_5$

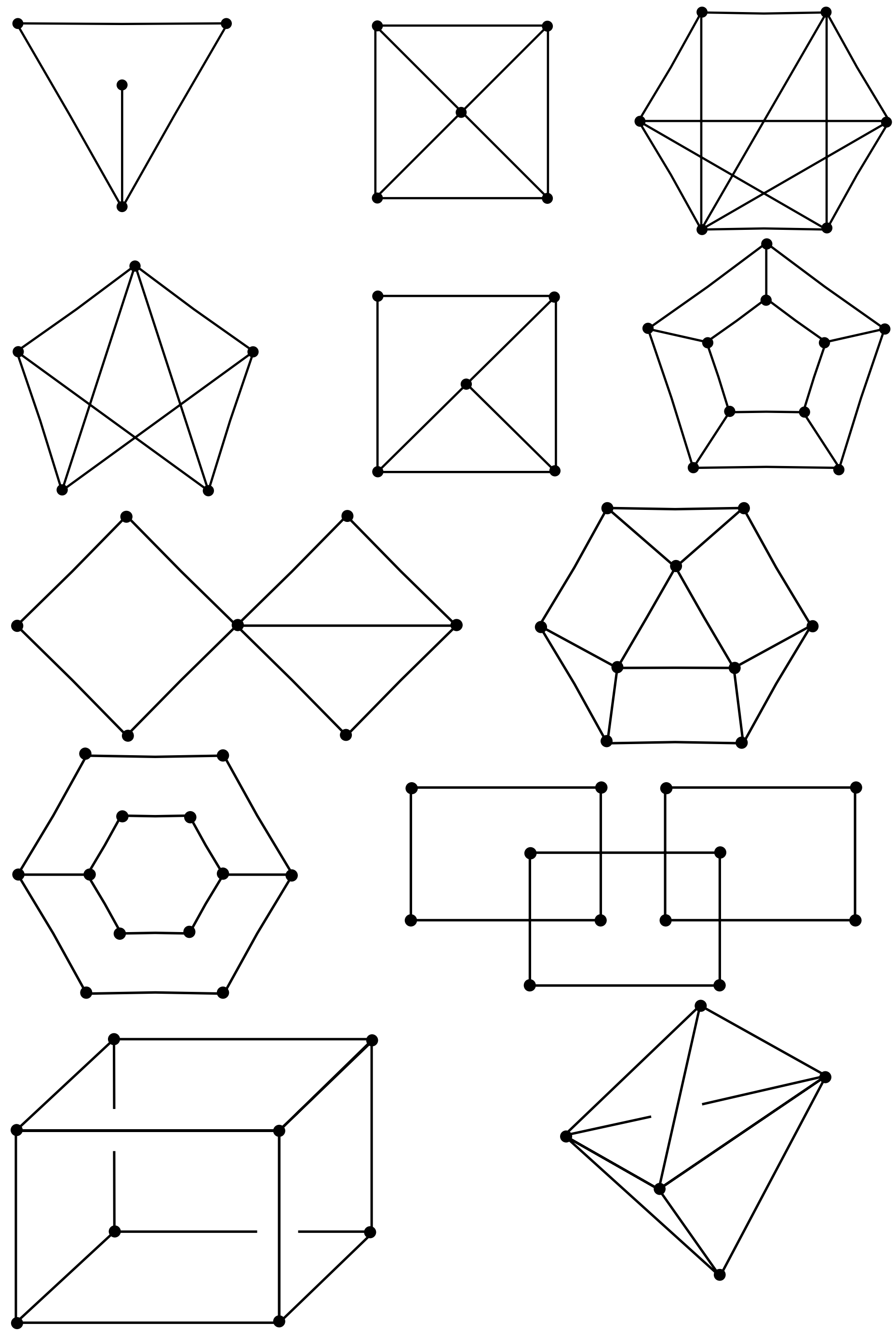
b) $v_5v_4v_3v_0v_1v_4v_5$

c) $v_2v_1v_4v_3v_0$

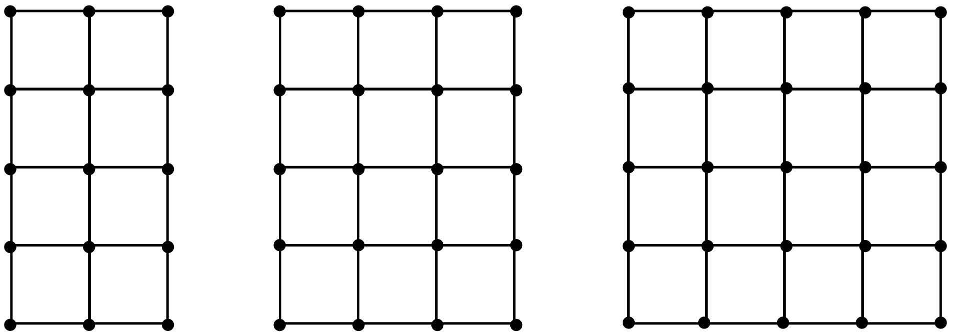
d) $v_1v_4v_3v_1v_2v_3v_4$

e) $v_4v_1v_3v_0v_5v_4$

2. Quais dos seguintes grafos admitem um ciclo hamiltoniano? Caso sua resposta seja afirmativa, encontre um.



3. Divida um retângulo de tamanho m por n em quadrados iguais de tamanho 1 por 1 e considere isto como uma representação de um grafo que tem cada cruzamento por vértice. As figuras abaixo representam os casos 2×4, 3×4 e 4×4. Estes grafos admitem ciclos hamiltonianos?



Auto-avaliação

Nesta aula você aprendeu que o problema do caixeiro-viajante é um pouco mais difícil do que o problema de encontrar um circuito euleriano.

Você deve ter certeza que entendeu a diferença, como por exemplo, você deve saber quando um circuito é um ciclo.

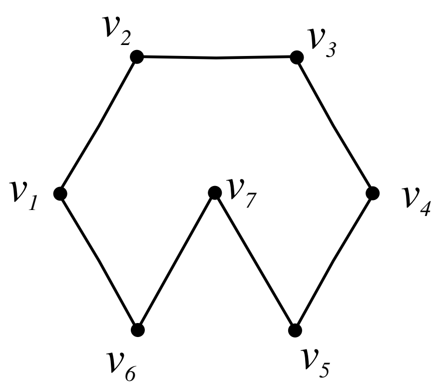
Tente usar a idéia da demonstração do Teorema de Dirac. Comece buscando um caminho simples que contenha todos os vértices e tente, a partir daí, encontrar o ciclo.

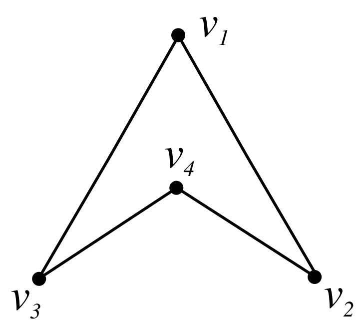
O último problema da lista é muito bonito. Tente alguns exemplos numéricos, como os sugeridos. Faça você mesmo mais alguns exemplos como 2×2, 3×2, 5×3. Isto é, faça suas próprias "experiências" matemáticas. E não esqueça de se divertir!

Respostas Comentadas

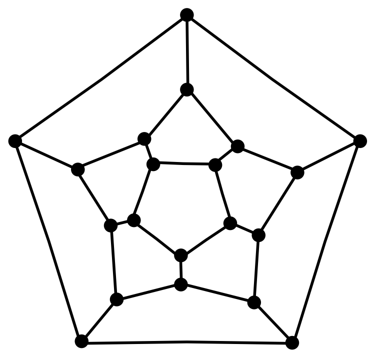
Agora as respostas dos problemas deixados ao longo da aula.

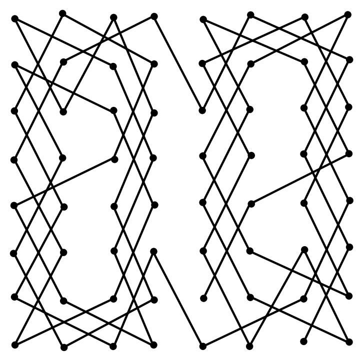
Dos grafos apresentados bem no começo da aula para você descobrir quais são hamiltonianos, apenas dois admitem ciclos hamiltonianos. Você deve ter notado que um não é conexo.





O Problema proposto por Sir Hamilton e o problema do Cavalo são bem mais trabalhosos. Veja que um tem 20 vértices e o outro 64. Aqui estão possíveis soluções para o problema de Sir Hamilton e para o Problema do Cavalo. Elas não são as únicas.





Aula 34 – Árvores

Um tolo não vê a mesma árvore que um sábio vê.
William Blake

Objetivos

- Nesta aula você conhecerá um tipo especial de grafos: as árvores. Estes grafos são importantes em Ciência da Computação.
- Aprenderá vários critérios que identificam se um dado grafo é uma árvore.
- Compreenderá que todo grafo conexo admite uma árvore como subgrafo máximo.
- Aprenderá a unir e intersectar grafos.

Recordando...

O principal assunto desta aula são as árvores, um tipo especial de grafos. No entanto, iniciaremos com uma noção que já mencionamos anteriormente: subgrafos.

Subgrafos

Certamente, você está acostumado a pensar nos grafos em termos de suas representações gráficas. Isto é muito útil, mas vamos lembrar que um grafo é um par de conjuntos: vértices e arestas.

Observe:

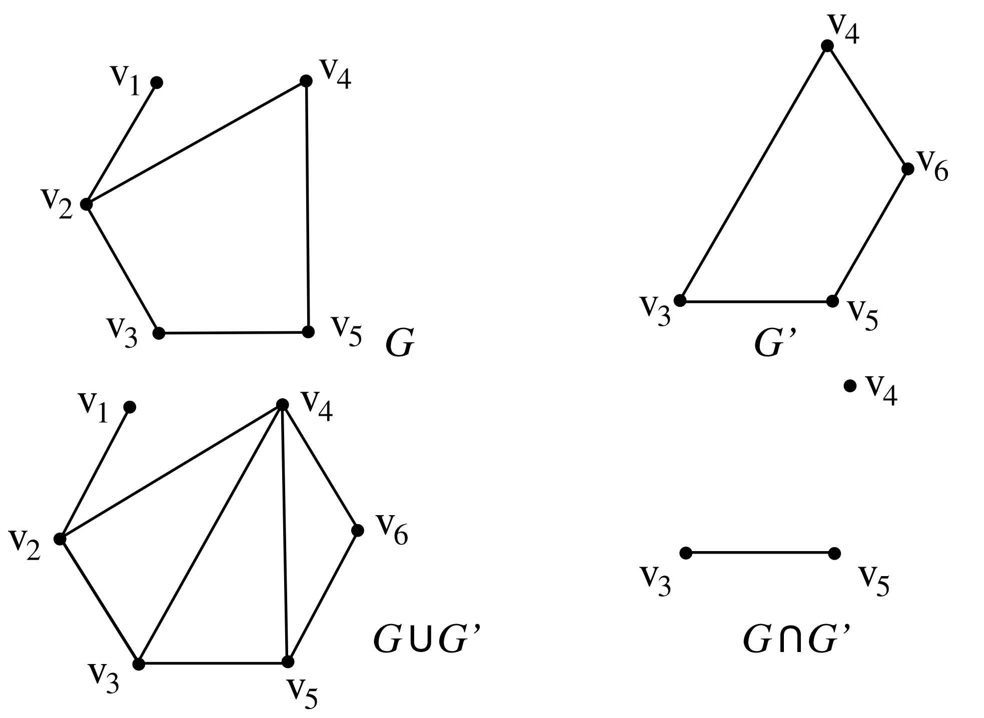
Sejam $G = (V, A)$ e $G' = (V', A')$ dois grafos. Podemos usar as operações de conjuntos para criar novos grafos:

$$G \cup G' = (V \cup V', A \cup V'), \qquad G \cap G' = (V \cap V', A \cap V').$$

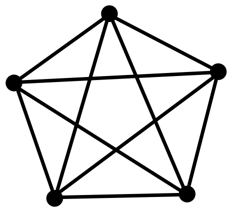
Se $V' \subset V$ e $A' \subset A$ dizemos que G' é um subgrafo de G e denotamos, simplesmente, $G' \subset G$.

Alguns exemplos para você entender melhor...

Sejam G e G' grafos de ordem 5 e 4, respectivamente, com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $V(G') = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$. A seguir temos suas representações gráficas, bem como as representações gráficas de $G \cup G'$ e $G \cap G'$.

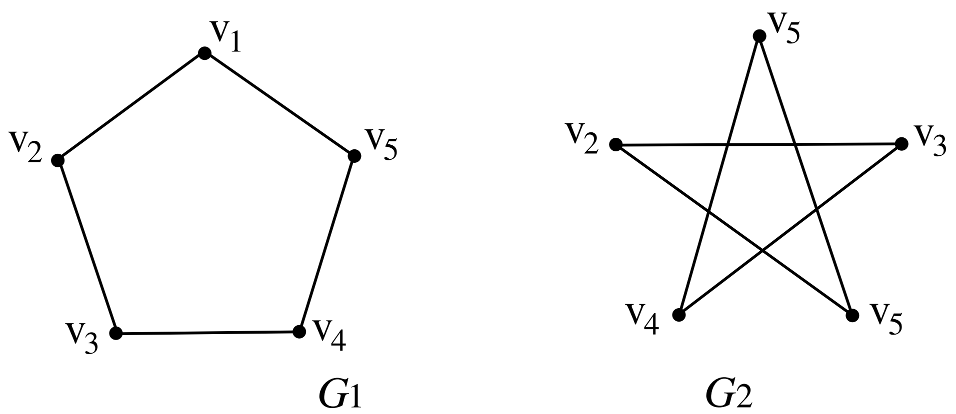


Lembre-se que K^5 denota o grafo completo de 5 vértices.



Exemplo 39

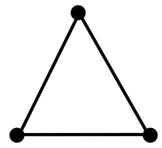
Os grafos G_1 e G_2 representados a seguir são tais que $G_1 \cup G_2 = K^5$.



Neste exemplo os dois grafos têm exatamente os mesmos vértices, mas qualquer aresta de um deles não é aresta do outro. Desta forma, $G_1 \cap G_2$ é o grafo de ordem 5, com todos os vértices isolados.

Árvores

Lembre-se que na aula anterior chamamos de ciclos os circuitos onde não há repetição de vértices. O grafo K^3 é o menor grafo que contém um ciclo (e que é ele mesmo). No exemplo anterior vimos que K^5 pode ser escrito como a união de dois subgrafos. Usando-os podemos ver que K^5 admite dois ciclos (hamiltonianos) de 5 vértices:



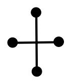
K^3

$$v_1v_2v_3v_4v_5v_1, \quad \text{e} \quad v_1v_3v_5v_2v_4v_1.$$

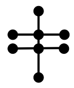
Muito bem, uma *árvore* é um grafo conexo e que não tem ciclos. As árvores genealógicas nos fornecem exemplos de *árvores*.

Quando um grafo G não tem ciclos nós o chamamos de *acíclico*. Com esta notação uma árvore é um grafo conexo e acíclico.

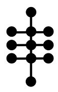
As árvores são usadas, por exemplo, para representar a enumeração de hidrocarbonos saturados e para estudar circuitos elétricos.



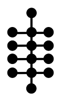
CH_4
Metano



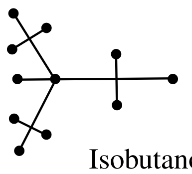
CH_3CH_3
Etano



$CH_3CH_2CH_3$
Propano



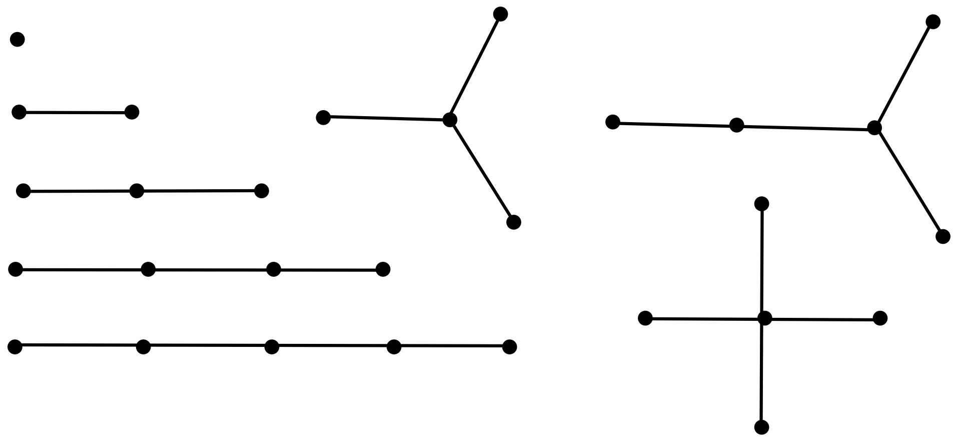
Butano
C_4H_{10}



Isobutano
$(CH_3)_3CH$

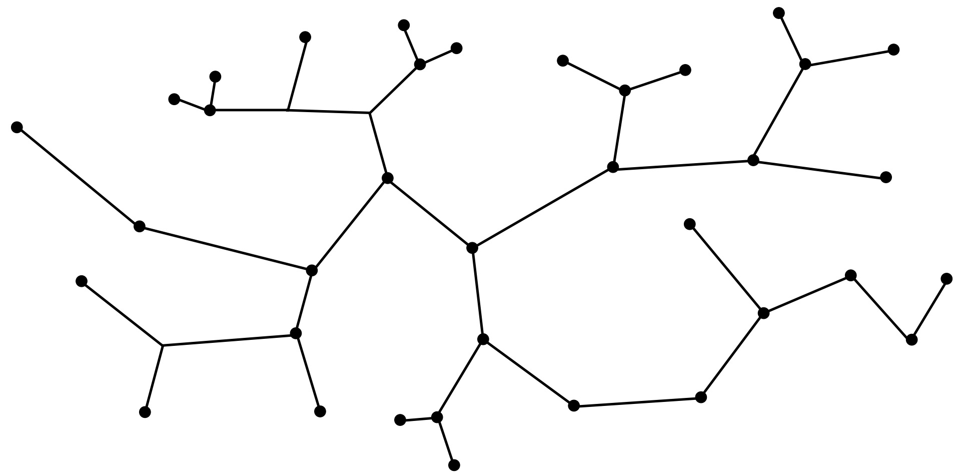
Exemplo 40

Aqui estão representações de todas as árvores com até 5 vértices.



Os vértices de grau 1 de uma árvore são chamados de *folhas*. Veja que se retirarmos uma folha de uma árvore (conseqüentemente tiramos também a única aresta que a conecta ao próximo vértice), o grafo restante ainda será uma árvore. Isto porque o grafo continuará conexo e acíclico.

Árvores são grafos relativamente simples e você já viu várias ao longo das aulas de probabilidade. As árvores também são usadas em Ciência da Computação, para, por exemplo, representar expressões algébricas e ordenar e armazenar informações.



Uma árvore.

Critérios para determinar se um grafo é uma árvore

O seguinte teorema nos dá uma série de afirmações, todas equivalentes a dizer que um determinado grafo é uma árvore.

Teorema: *Seja G um grafo conexo de ordem ≥ 3. As seguintes afirmações sobre G são equivalentes:*

a) G é uma árvore;

b) quaisquer dois vértices de G são ligados de maneira única por um caminho (em G);

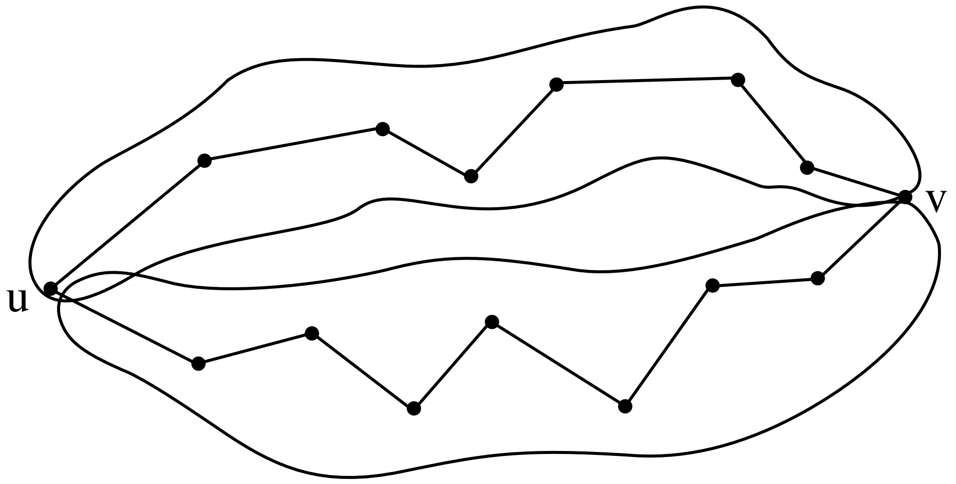
c) G é minimamente conexo, isto é, se subtrairmos uma só aresta de $A(G)$, o grafo resultante não é conexo;

d) G é maximamente acíclico, isto é, se acrescentarmos uma só aresta ao grafo G, que conecte dois vértices não adjacentes, digamos u e v, o grafo obtido $G_+ = (V(G), A(G) \cup \{uv\})$ tem um ciclo.

O teorema diz que (a) $\Longleftrightarrow$ (b)$\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d). Para demonstrar tais teoremas podemos usar a seguinte estratégia: mostramos que (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (d) $\Longrightarrow$ (a), fechando o círculo de implicações. Hoje faremos algo ligeiramente diferente, por conveniência nossa. Mostraremos (a) $\Longrightarrow$ (b) $\Longrightarrow$ (c) $\Longrightarrow$ (a) e (a)$\Longleftrightarrow$ (d).

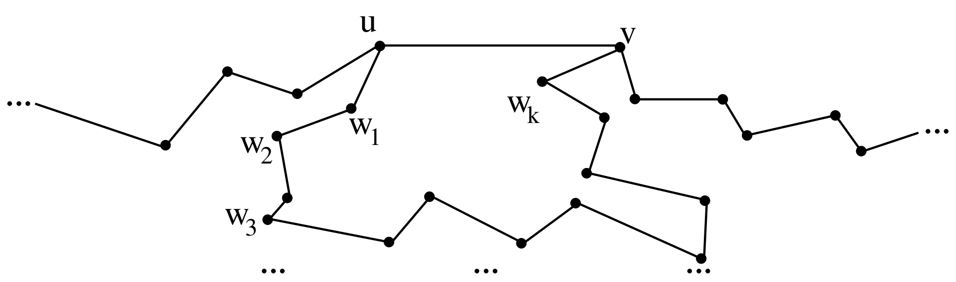
Prova do teorema: Usaremos, em cada item da prova, o argumento de redução ao absurdo ou o fato que $(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\sim\ q \Rightarrow \sim\ q)$.

(a) $\Longrightarrow$ (b) Suponha que haja dois vértices u e v de $V(G)$ conectados por dois caminhos (distintos). Então podemos unir estes dois caminhos e obter um ciclo em G, o que é um absurdo, pois G é uma árvore.



(b) $\Longrightarrow$ (c) Suponha que exista uma aresta $a = uv$ em $A(G)$ tal que o grafo obtido de G subtraindo a, $G_- = (V(G), A(G) - \{uv\})$, seja conexo. A aresta a pertence a algum caminho ligando dois vértices de G, digamos v_1 e v_2. Como G_- é conexo, existe outro caminho ligando v_1 a v_2 (que não usa a aresta uv). Mas isto nega a afirmação (b).

(c) $\Longrightarrow$ (a) Suponhamos que G seja minimamente conexo, mas admita um ciclo $uw_1w_2 \dots w_{k-1}w_kvu$. Então, podemos extrair a aresta uv e G continuará conexo, pois podemos substituí-la, em qualquer caminho que a utilize, pelo trecho $uw_1w_2 \dots w_{k-1}w_kv$ do ciclo. Isto contradiz a afirmação (c).



(d) $\Longrightarrow$ (a) Suponhamos que G seja maximamente acíclico. Para provar que G é uma árvore falta provar que G é conexo. Suponhamos que isto não aconteça. Podemos então supor que existem vértices u e v de G, cada um em uma diferente componente conexa. Isto é, não há caminho em G ligando u até v. Em particular, eles não são adjacentes. Acrescentamos uma aresta ao grafo G ligando u a v.

De acordo com a afirmação (d), ao fazer isto estaremos criando um ciclo, digamos $uw_1w_2\dots w_{k-1}w_kvu$. Mas isto é uma contradição, pois $uw_1w_2\dots w_{k-1}w_kv$ é um caminho que liga u até v.

(a) $\Longrightarrow$ (d) Suponhamos que G não contenha ciclos e que haja dois vértices u e v, não adjacentes, tais que ao acrescentarmos a aresta uv o grafo continuará acíclico. Isto só é possível caso u e v estejam em componentes conexas distintas de G que, portanto, não é conexo.

Aqui termina a prova de que todas as afirmações são equivalentes.

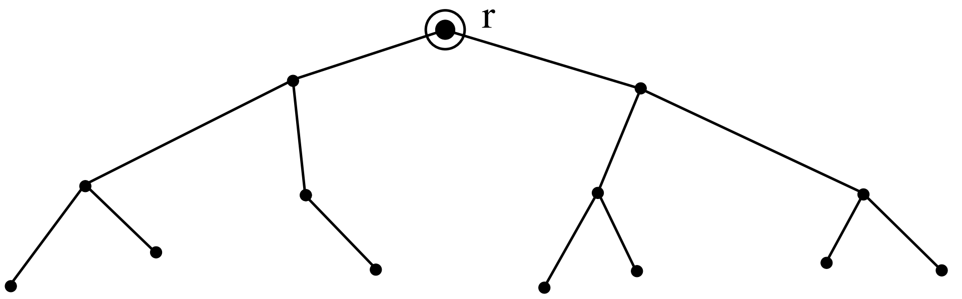
Raízes e Árvores Binárias

Em Ciência da Computação usa-se um tipo especial de árvores, chamadas de *árvores enraizadas*. Uma árvore é enraizada quando escolhemos um de seus vértices como especial. Este vértice é chamado de *raiz*.

Seja G uma árvore enraizada cuja raiz é denotada por r. Dados dois vértices v e w de G, suponha que v pertença ao caminho (único) que liga r a w. Então v é um *ancestral* de w e w é um *descendente* de v. Se vw é uma aresta de G, então v é dito *pai* de w e w e chamado de *filho* de v. A raiz não possui pai. Se todos os pais têm, no máximo, dois filhos, a árvore é dita *binária*. A terminologia lembra a das árvores genealógicas.

Exemplo 41

Aqui está um exemplo de uma árvore binária enraizada em r e com 7 folhas.

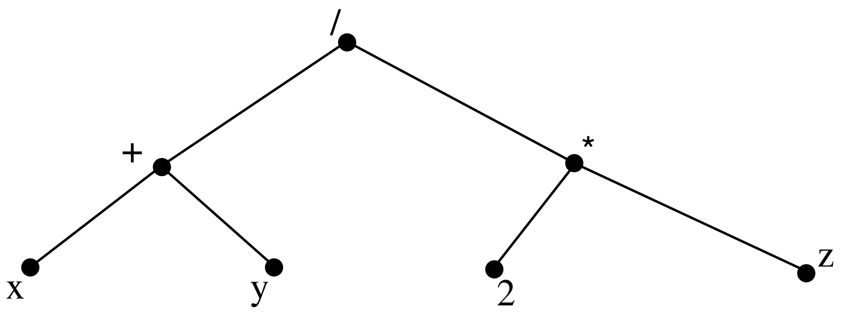


Árvores e Expressões Algébricas

Mostraremos em dois exemplos como se usa árvores binárias para representar expressões algébricas. Os elementos que compôem a expressão: números, constantes, variáveis e as operações que os relacionam serão todos representados por vértices. As arestas indicarão de que maneira a expressão é composta.

Exemplo 42

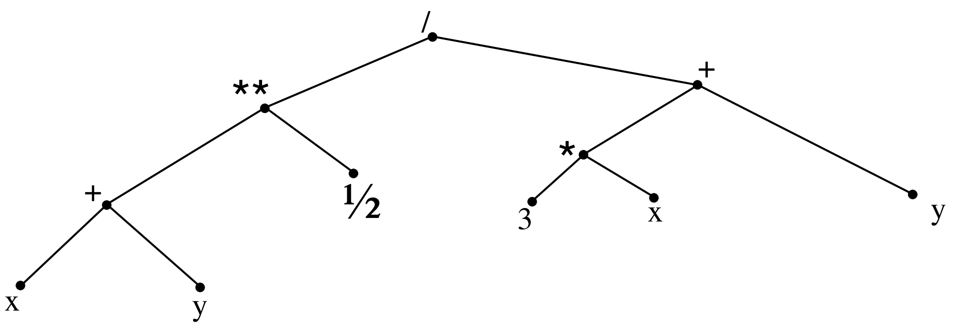
A árvore a seguir representa a expressão $(x+y)/2z$:



A árvore deve ser 'lida' da esquerda para a direita: primeiro $x+y$, depois $((x+y)$ dividido por 2 vezes z. Esta árvore tem / como raiz.

Exemplo 43

A árvore da expressão $\frac{\sqrt{x+y}}{3x+y}$ é a seguinte:



O símbolo $**$ indica que a operação é exponencial. Apesar da notação ser inadequada é conveniente denotar duas folhas por y.

Árvore Máxima

O teorema que apresentaremos agora é bonito e é usado em muitas aplicações de grafos. Especialmente em problemas do tipo de otimização, como buscar a maneira mais econômica de construir uma rede de ligações elétricas ou de tubulações para água em uma certa área.

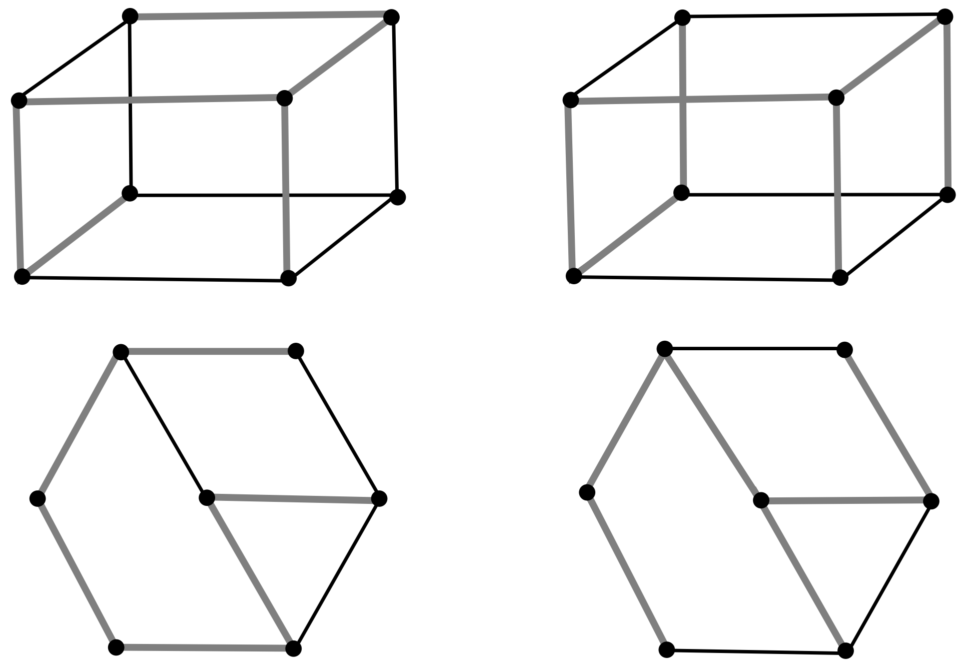
Teorema: *Todo grafo G conexo admite um subgrafo H tal que $V(G) = V(H)$ e H é uma árvore.*

A prova indica uma maneira de obter tal subgrafo.

Prova do teorema: Se G for minimamente conexo, é uma árvore e $G = H$. Caso contrário, é possível subtrair uma aresta de G, obtendo um subgrafo de G que tem os mesmos vértices que G. Agora repita a pergunta: este grafo é minimamente conexo? Procedendo assim, como o grafo é finito, chegaremos à situção de minimalidade e obteremos o grafo H desejado. $\square$

Exemplo 44

Aqui estão dois grafos com árvores máximas representadas pelos traços mais escuros.



Para terminar, vamos enunciar um teorema que estabelece uma relação entre a ordem e o número de arestas de uma árvore.

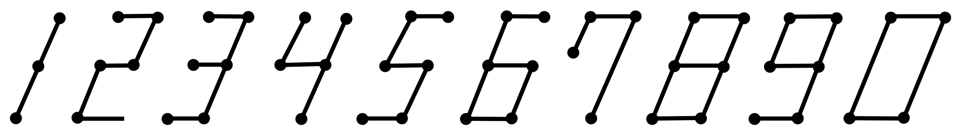
Teorema: *Todo grafo G conexo, de ordem n, é uma árvore se, e somente se, tem $n-1$ arestas.*

Prova do teorema: Exercício de indução sobre o número de vértices.

Exercícios

1. Sejam G e G' os grafos definidos por: $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_3v_4\}$, $V(G') = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ e $A(G') = \{v_1v_5, v_1v_2, v_2v_5, v_2v_3, v_3v_5\}$. Represente G e G' graficamente. Determine e represente os seguintes grafos: $G \cup G'$, $G \cap G'$, $G - G'$ e $G' - G$.

2. Considere os algarismos 1, 2, ... 8, 9 e 0, representados pelo padrão digital:



Suponha que cada um deles represente um grafo onde os traços são as arestas e as esquinas são os vértices. O número 1, por exemplo, é uma árvore com três vértices e duas arestas.

Quais algarismos representam árvores? Quais não representam árvores? Justifique sua resposta.

3. Desenhe todas as árvores com seis vértices. (Dica: há 6 delas.)

4. Em cada caso a seguir, desenhe um grafo satisfazendo a propriedade dada ou explique por que não há um tal grafo.

a) Um grafo conexo com 5 vértices e 5 arestas.

b) Uma árvore com 5 vértices e 5 arestas.

c) Uma árvore com 7 arestas cuja soma dos graus é 12.

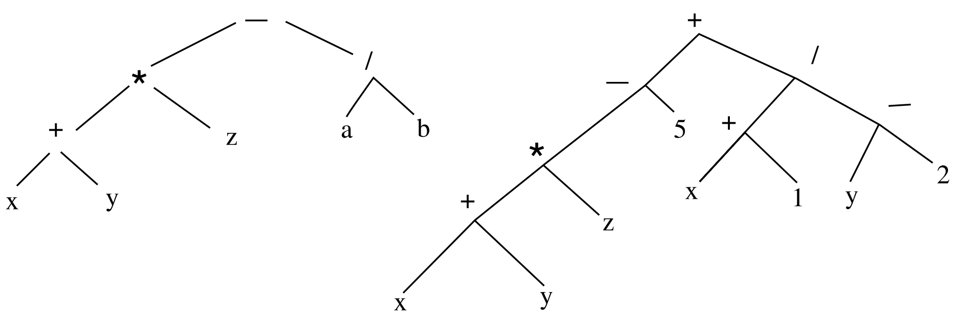
d) Uma árvore com 9 vértices, com graus 3, 3, 3, 2, 1, 1, 1, 1 e 1.

e) Um grafo com 7 vértices, duas componentes conexas e 10 arestas.

f) Uma árvore com 171 vértices e 170 arestas.

g) Uma árvore com todos os vértices pares.

5. Cada uma das árvores binárias a seguir representa uma expressão algébrica. Encontre as tais expressões.



6. Use árvores binárias para representar as seguintes expressões:

a)

$$\frac{2+x}{3} - \frac{1}{y}$$

b)

$$\frac{2}{\sqrt{x-y}} + (x+3y)^2$$

7. Encontre duas árvores máximas que sejam subgrafos de K^5 tais que:

a) Todos os vértices tenham grau ≤ 2.

b) Há um vértice de grau 4.

8. Escreva K^7 como a união de três grafos cíclicos disjuntos.

Auto-avaliação

Você deve ter achado esta aula mais leve, apesar das muitas demonstrações.

Nela você conheceu o conceito e identificou critérios que determinam quando um grafo é uma árvore, bem como, aprendeu a unir e intersectar estes grafos.

Nunca deixe de fazer seus próprios testes, estudandos exemplos que você mesmo propõe para entender bem os argumentos. Isto está sendo exercitado nos vários itens do exercício 4.

Bom trabalho!

Aula 35 – Grafos Planares e o Problema da Coloração de Grafos

Objetivos

- Nesta aula você aprenderá o que é um grafo planar.

- Compreenderá como a fórmula de Euler para poliedros desempenha um papel importante também na teoria de grafos.

- Aprenderá o que diz o Teorema da Coloração de Grafos Planares.

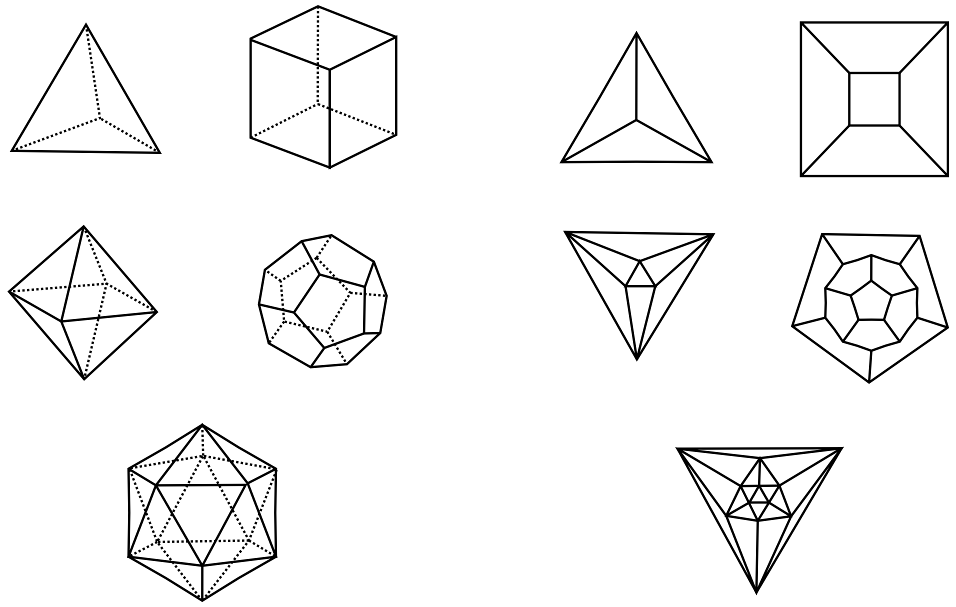
Recordando...

A aula anterior apresentou um tipo especial de grafos: as árvores. Você viu como a nomenclatura é adequada (apesar de desenharmos, em muitos casos, as árvores de cabeça para baixo).

Um fato que não mencionamos é que toda árvore (grafo) pode ser representada numa folha de papel. Você pode dizer: qual é a vantagem? Todos os nossos outros grafos são desenhados em folhas de papel! Muito bem, o detalhe é que podemos fazer isto sem que arestas cruzem umas sobre as outras.

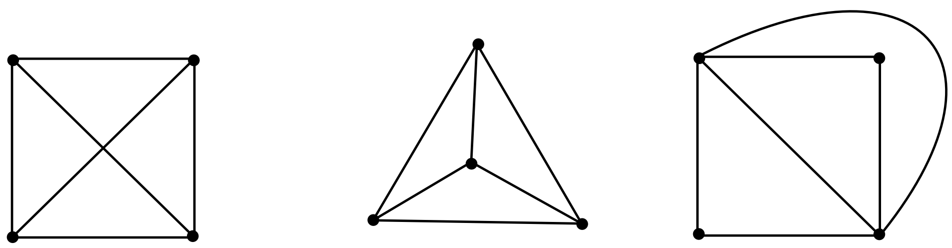
Você se lembra da aula sobre ciclos hamiltonianos? Pois é, ao apresentar o jogo inventado por Sir Hamilton, foi feita uma 'planificação' do grafo associado ao dodecaedro. Este processo pode ser aplicado, na verdade, em qualquer poliedro convexo. Uma variante do processo é a seguinte: imagine uma estrutura de varetas conectadas em vértices formando um poliedro convexo como um cubo ou um tetraedro. Já que estamos a imaginar, façamos de conta que as varetas possam funcionar com um 'efeito telescópico'. Isto é, que as possamos esticar ou encolher, mas sem suprimi-las de todo. Se, além disso, tivermos os vértices articulados, poderemos achatar o poliedro sobre uma superfície plana e, se tomarmos algum cuidado, conseguiremos fazer isto sem que qualquer aresta recubra alguma outra.

Aqui estão os cinco sólidos regulares ou sólidos platônicos com seus respectivos grafos planificados.



Grafos Planares

Diremos que um grafo é planar se pudermos dispor seus vértices em um plano de modo que nenhum par de suas arestas se cruzem. O grafo correspondente ao tetraedro é o K^4, o grafo simples completo de 4 vértices. Aqui estão três maneiras de representar o K^4.



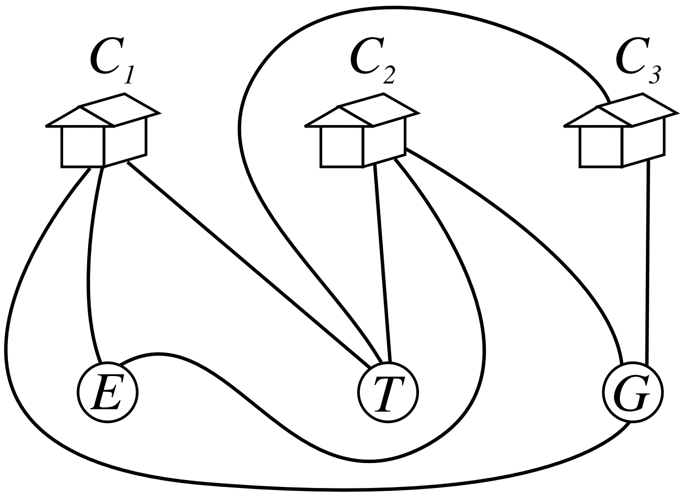
Apesar de na primeira representação haver um par de arestas que se cruzam, como isto não ocorre com os outros, dizemos que K^4 é planar.

Exemplo 45

Os grafos obtidos dos mapas, como fizemos na aula 31, são todos exemplos de grafos planares.

Exemplo 46

Vamos considerar a seguinte situação: Um engenheiro civil foi chamado para ajudar com a legalização de uma construção que havia sido feita sem supervisão profissional qualificada. Três casas, representadas de agora em diante por C_1, C_2 e C_3, estavam conectadas a uma central elétrica E, a uma central telefônica T e a uma central fornecedora de gás G. Para fazer seu trabalho o engenheiro fez um esquema que representava estas ligações. Após algumas tentativas, ele se rendeu ao fato de que era impossível desenhar tal esquema sem que alguma das ligações se cruzassem.



Com lápis e papel você poderá tentar um pouco e experimentar a dificuldade encontrada pelo engenheiro. Veja que no nosso desenho ainda estão faltando algumas ligações. Por exemplo, casa C_3 tem gás e telefone, mas não tem energia elétrica.

O grafo que representa esta situação: (as casas e as centrais são indicadas por vértices e as ligações são as arestas) é chamado de $K_{3,3}$.

O grafo completo K^5 é um segundo exemplo de grafo que não é planar.

Na próxima seção provaremos que estes dois grafos não são planares. Por enquanto, contentemo-nos com a prática.

Lembre-se que K^5 denota o grafo completo de 5 vértices.

A Fórmula de Euler para grafos planares conexos

É bem provável que você tenha observado, no início da aula, através dos exemplos de grafos planares provenientes dos poliedros regulares e de mapas, que além de vértices e arestas, podemos estabelecer a noção de face.

A cada face do poliedro original corresponde uma 'face' no grafo. Cada uma destas faces é delimitada por um ciclo. No caso do tetraedro, do octaedro e do icosaedro, os ciclos são isomorfos a K^3, no caso do hexaedro, vulgo cubo, são ciclos de quatro vértices, enquanto que no nosso conhecido dodecaedro elas são ciclos de 5 vértices.

Através desses mesmos exemplos, você deve ter observado que há um ciclo que delimita todo o grafo. Este ciclo separa a parte limitada do desenho da região não limitada que o circunda. É conveniente chamar esta região também de face. Em um momento veremos o porquê.

Se contarmos o número de vértices, de arestas e de 'faces', veremos que a fórmula de Euler para poliedros convexos,

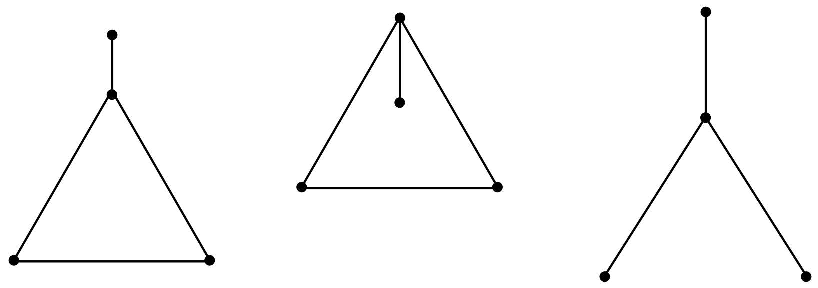
$$V - A + F = 2,$$

continua verdadeira. Aqui indicamos por V o número de vértices, A o número de arestas e F o número de faces.

Após estas considerações, podemos enunciar o seguinte:

Teorema: *A fórmula de Euler para poliedros vale para grafos planares conexos.*

A única coisa que precisamos olhar com um pouco mais de atenção é a noção de face. O problema é o seguinte. Dado um grafo planar conexo, obtenha uma representação num plano onde não haja arestas cruzadas. Para aplicar a fórmula de Euler contaremos os vértices e as arestas do grafo. Quem serão as faces? Nos exemplos provenientes dos poliedros é fácil. Vejamos alguns outros exemplos.



Os dois primeiros grafos são isomorfos. Ambos têm quatro vértices e quatro arestas. Para que a fórmula de Euler seja verdadeira neste caso, é necessário que haja duas faces: $4 - 4 + 2 = 2$. Estas faces são: uma interna e a face definida pela região que circunda o grafo.

Consideremos agora o terceiro grafo. Este grafo é uma árvore, portanto acíclico. Logo ele terá apenas uma face, aquela definida pela região não limitada que o circunda. Como ele tem quatro vértices, tem três arestas, pois é uma árvore e a fórmula se aplica também neste caso: $4 - 3 + 1 = 2$.

A maneira adequada de estabelecer a noção de face de grafos planares é a seguinte: desenhe o grafo no plano e considere o conjunto formado pelas arestas e vértices. Agora considere o complementar deste conjunto: o plano menos o desenho do grafo. Este conjunto divide-se em subconjuntos disjuntos, chamados de *componentes conexas*. Diremos que dois pontos estão numa mesma componente se pudermos ligá-los por algum traço contínuo sem cruzar qualquer vértice ou aresta do grafo G.

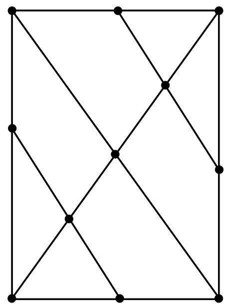
Uma maneira de ver se você está entendendo realmente, é a seguinte: Desenhe o grafo em uma folha de cartolina. Se grafo for grande pegue uma folha maior. Agora, com um estilete, faça um corte sobre cada uma das arestas que você desenhou. A cartolina dividir-se-á, eventualmente, em 'pedaços'. O pedaço maior corresponde à face não limitada. Os outro pedaços serão as outras faces. Note que no caso de árvores, apesar de recortarmos a cartolina, ela permanecerá sempre um só pedaço, correspondendo a um exemplo onde o grafo tem uma única face. Isto está coerente, pois sabemos que uma árvore tem n vértices e $n-1$ arestas: $n - (n-1) + 1 = 2$.

Uma última palavra sobre o número de faces. Não provamos isto, mas este número não depende da representação do grafo planar.

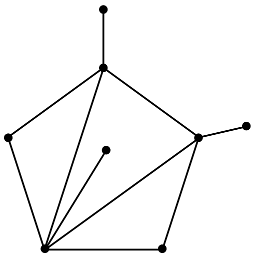
Agora que sabemos contar as faces de grafos conexos podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema: *Seja G um grafo planar conexo de ordem n, com m arestas e F faces. Então $n - m + F = 2$.*

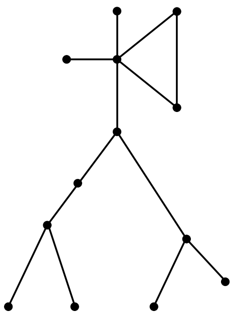
Aqui estão três grafos planares conexos. Para ter certeza que você entendeu a noção de face, veja que o teorema se aplica em cada caso. No final da aula você pode conferir o seu rendimento.



11 - 18 + 9 = 2



8 - 10 + 4



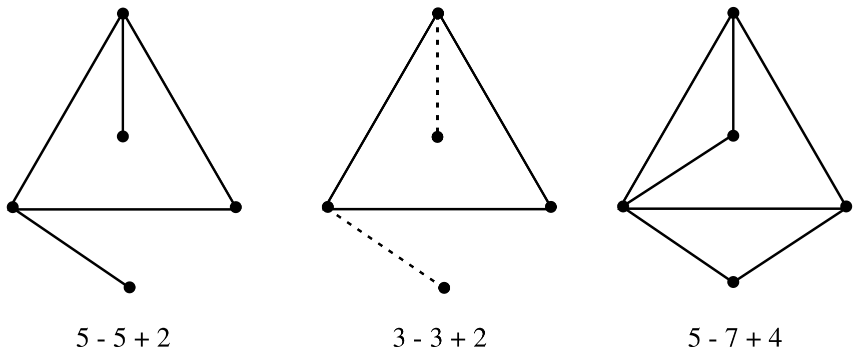
13 - 13 + 2

Algumas palavras sobre a prova do teorema

A prova deste teorema é baseada, essencialmente, na prova da fórmula de Euler para poliedros convexos. Podemos dividir os grafos em dois tipos. No primeiro, o grafo planar e conexo é formado por ciclos, cada um deles delimitando um polígono, em particular o grafo todo também limitado por um ciclo, assim como os exemplos provenientes dos poliedros regulares.

Neste caso podemos usar um processo reverso à 'planificação' e obter um poliedro convexo correspondente ao grafo. Isto é, os vértices e as arestas do grafo corresponderão a vértices e arestas do poliedro. Cada ciclo do grafo corresponderá a um polígono, face do poliedro, sendo que a face ilimitada corresponderá à face que fechará o poliedro. Como a fórmula de Euler é válida para o poliedro, será válida para o grafo.

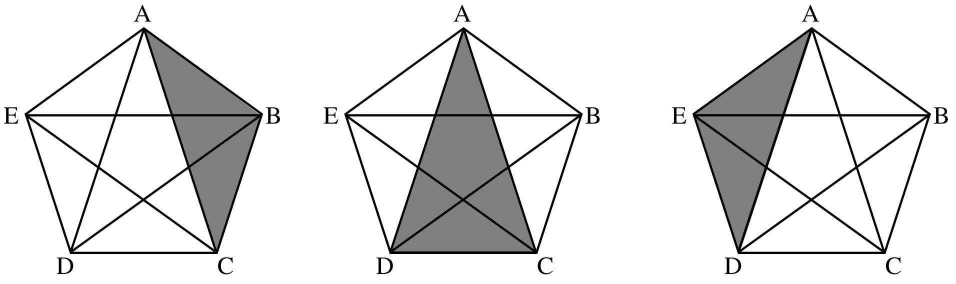
E agora, os outros casos. Eles podem ser reduzidos ao caso anterior. A idéia é a seguinte: Com algum cuidado podemos suprimir ou acrescentar arestas, sem alterar o balanço final da fórmula de Euler, mas de forma a eliminar os casos excêntricos. Vejamos um exemplo:



Se suprimirmos a aresta e o vértice que aparecem no interior do triângulo, no cômputo final, a fórmula não será alterada pois, ao suprimimos um vértice e uma aresta não introduziremos nenhuma nova face. Por outro lado, se acrescentarmos uma aresta extra, conectando o vértice do interior do triângulo a qualquer um de seus três vértices, novamente a fórmula não será alterada, pois o número de vértices não muda, uma aresta é acrescentada, mas uma nova face é criada.

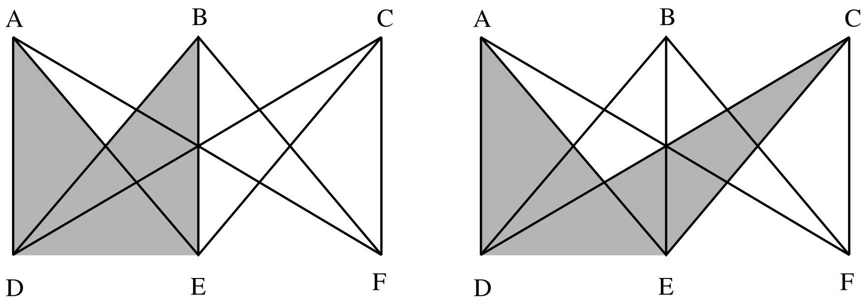
Uma aplicação do teorema: os grafos K^5 e $K_{3,3}$ não são planares

Aqui está uma boa aplicação do teorema. A validade da Fórmula de Euler para grafos planares e conexos impõem a estes grafos alguma limitação. Vejamos no caso K^5.



O fato é que K^5 tem muitos ciclos de 3 vértices: ABC, ACD, ADE e assim por diante. Use análise combinatória para calcular quantos. Ora, se pudéssemos representar K^5 sem nenhum cruzamento de arestas, cada um destes ciclos correspoderia a uma face interna. Mas neste caso a fórmula não seria satisfeita (muitas faces para poucas arestas).

O mesmo ocorre com $K_{3,3}$, com a diferença que aqui os ciclos menores possíveis têm quatro vértices:



ADBEA ADCEA

Exemplos são: $ADBEA$, $ADCEA$, $AEBFA$, $AECFA$, $BDCEB$, $BEC\ FB$. Novamente a fórmula de Euler não é satisfeita e o grafo não é planar.

Teorema de Kuratowski

O teorema que veremos nesta seção diz, essencialmente, que os grafos K^5 e $K_{3,3}$ são as únicas obstruções à planaridade de grafos. Eles são, por assim dizer, os grafos não planares mais simples que há e qualquer grafo não planar contém um ou outro, de alguma forma. Simples, não?

Kazimier Kuratowski (1896 - 1980). Nascido na Polônia, começou a estudar engenharia na Escócia, mas devido ao início da Primeira Guerra Mundial, em 1914, retornou à Polônia. Quando a Universidade de Varsóvia reabriu, em novembro de 1915, ele se tornou um de seus primeiros alunos de Matemática.
Em 1927 tornou-se professor em Lvov. Os matemáticos de Lvov faziam matemática nos cafés da cidade. Os mais famosos eram O Café Escocês e a Confeitaria Zalewski, freqüentada por Kuratowski. É famoso o Livro Escocês, um caderno de problemas propostos pelos freqüentadores do Café Escocês.
Os temas das pesquisas de Kuratowski foram em Topologia Geral e ele provou o teorema que apresentamos aqui em 1930.

Este teorema não será demonstrado aqui. A prova não é particularmente difícil, mas longa. Nosso trabalho será entender o sentido da frase 'contém um ou outro, de alguma forma'.

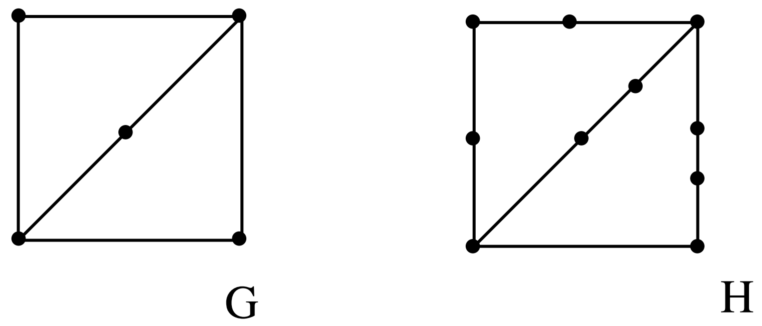
Subdivisão de um grafo

Esta idéia já foi usada na aula 32 para mostrar que um multigrafo pode ser transformado em um grafo pelo expediente de introduzir novos vértices no 'interior' de algumas arestas. Este processo, aplicado em grafos, é chamado de *subdivisão*.

Um grafo H é uma subdivisão do grafo G se pode ser obtido de G pela subdivisão de algumas de suas arestas, acrescentadas de novos vértices. Dizemos também que G é uma subdivisão de si mesmo.

Exemplo 47

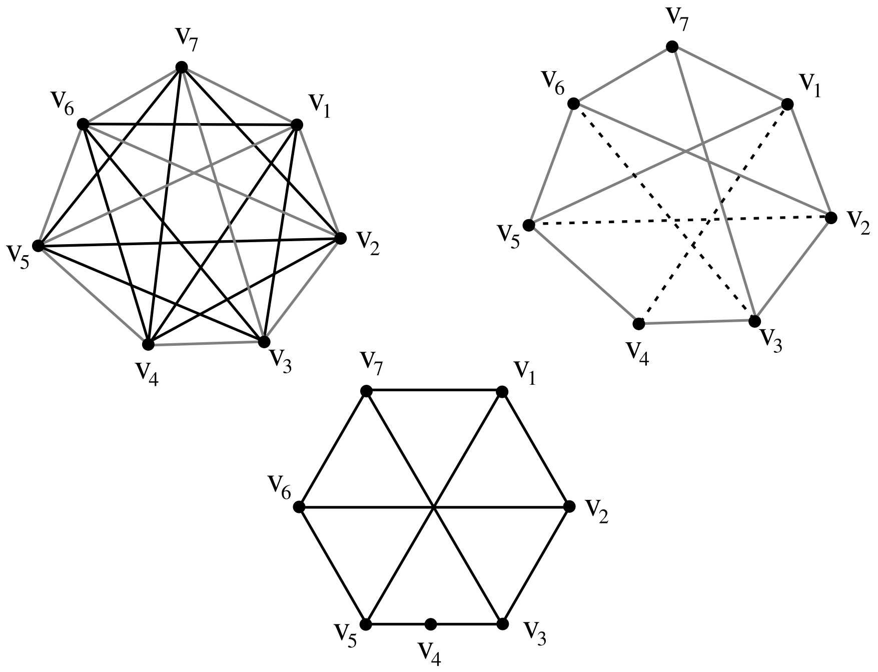
Um grafo G e uma subdivisão H de G:



Teorema: *Um grafo G é grafo planar se, e somente se, não contém uma subdivisão de K^5 ou de $K_{3,3}$.*

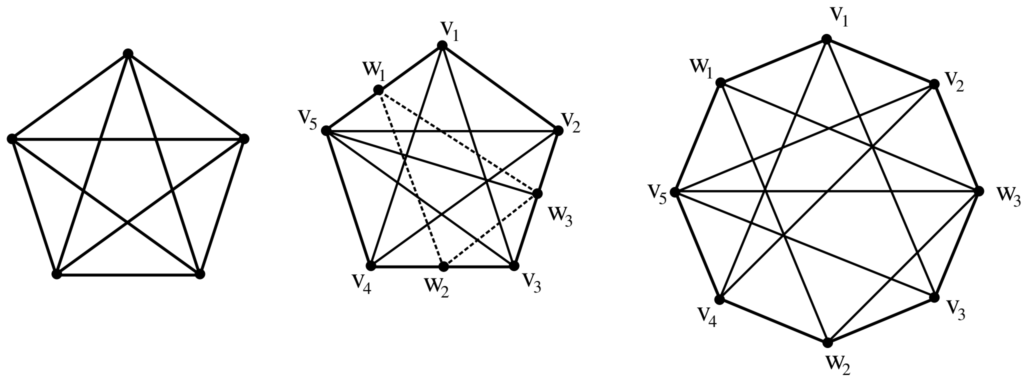
Aqui está um teorema!

Vamos usá-lo para concluir que K^7 não é planar. Basta olhar os seguintes diagramas, que mostram que K^7 contém uma subdivisão de $K_{3,3}$, acrescentado de um vértice. Veja, também, o exercício 1.



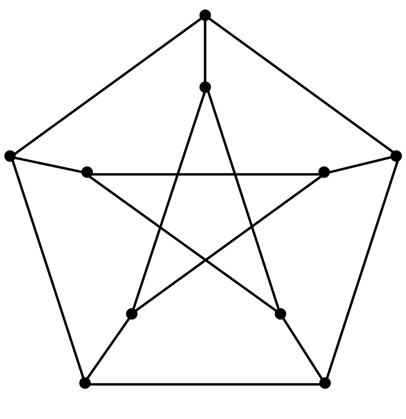
Exemplo 48

Vamos usar K^5 para obter um grafo que não é planar.



Exemplo 49

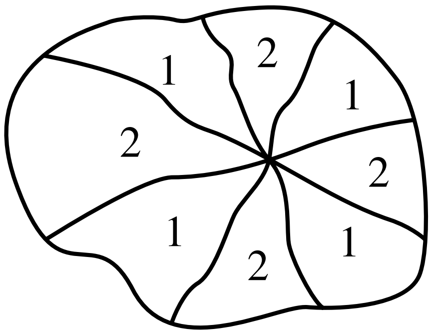
O grafo que apresentamos neste exemplo é chamado de grafo de Peterson e ele não é planar. Mostre isto usando o Teorema de Kuratowski. A resposta está lá no fim da aula.

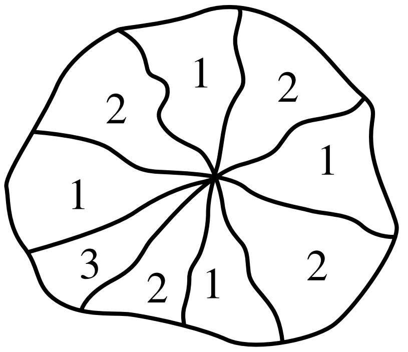


Teorema das Quatro Cores

Na aula 31 apresentamos o problema do número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de modo que regiões com fronteira comum tenham cores diferentes.

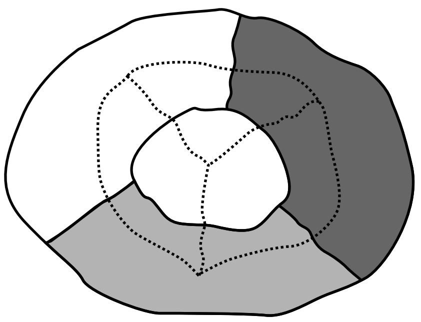
Note que um único ponto não é uma fronteira. Isto pois, neste caso, o problema não teria solução, pois num mapa na forma de uma pizza fatiada, todas as regiões tem o ponto central comum e então seriam necessárias tantas cores quantas fatias tivéssemos.

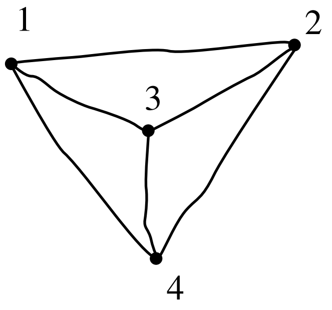




Note que neste mapa usaremos duas ou três cores, dependendo da paridade do número de fatias. O grafo correspondente é um ciclo com um vértice para cada fatia.

Desde que o problema fora proposto por Francis Guthrie, em 1852, o Problema das Quatro Cores intrigava matemáticos e cartógrafos de todos os tipos. A afirmação é que para colorir *qualquer* mapa bastam quatro cores. Um anel, dividido em três regiões, circundando uma quarta, corresponde ao K^4 e demanda as quatro diferentes cores.





Colorir as regiões do mapa é eqüivalente a colorir os vértices de modo que vértices adjacentes usem cores diferentes.

Podemos então perguntar: quantas cores são necessárias para colorir qualquer grafo planar?

A resposta a esta questão só surgiu quando o Teorema das Quatro Cores foi demonstrado, em 1976, por dois professores da Universidade de Illinois: Kenneth Appel e Wolgang Haken. A prova que eles apresentaram, no entanto, está longe de ser simples. Ela ocupa centenas de páginas com muitos diagramas. Além disso, uma parte da prova usa computadores. Esta é a parte um pouco controversa. A análise matemática feita por Haken e Appel mostrou que a prova resumia-se a analisar uma coleção de casos. Esta coleção, no entanto, é enorme. O computador fez esta parte. O problema é a enormidade de casos. A tarefa ocupou um computador rápido (da época) por 1200 horas. Isto tomaria uma eternidade para ser feito sem o computador. Este parece ser um dos teoremas do tipo junção de um pergunta simples, de um problema sucinto com uma prova terrivelmente complicada.

Terminamos esta aula enenciando o teorema da coloração de grafos planares:

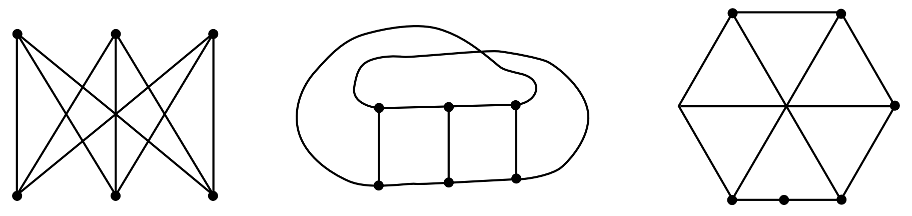
Teorema: *Todo grafo planar pode ser colorido com até quatro cores.*

Exemplo 50

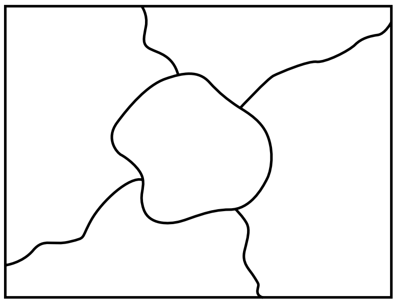
Use um diagrama para ver que são necessárias cinco cores para colorir os vértices de K^5 de modo a não usar a mesma cor para vértices adjacentes. Conclua que K^5 não é planar. Por que este argumento não funciona no caso de $K_{3,3}$? Não perca, na próxima aula!

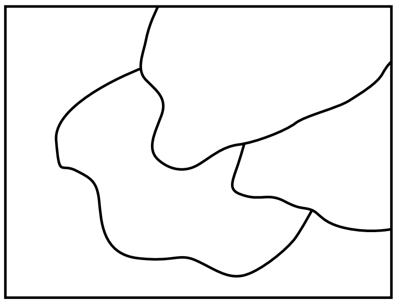
Exercícios

1. Mostre que os diagramas a seguir representam $K_{3,3}$. Isto é, mostre que estes grafos são isomorfos.

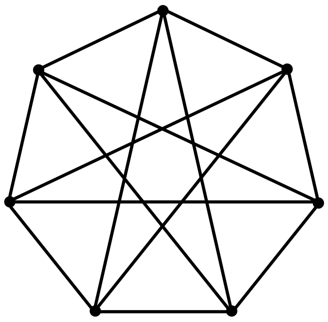


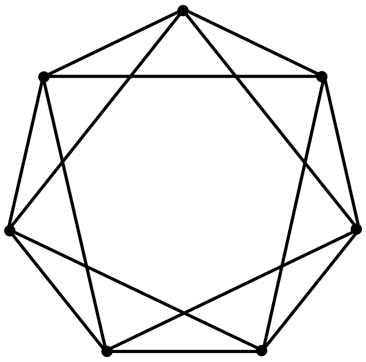
2. Calcule o menor número de cores necessárias para colorir os seguintes mapas:



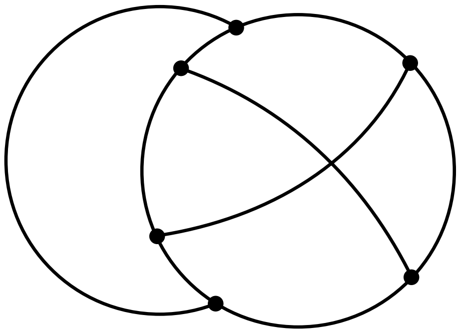


3. Mostre que os grafos representados pelos seguintes diagramas são isomorfos e que eles não são planares.



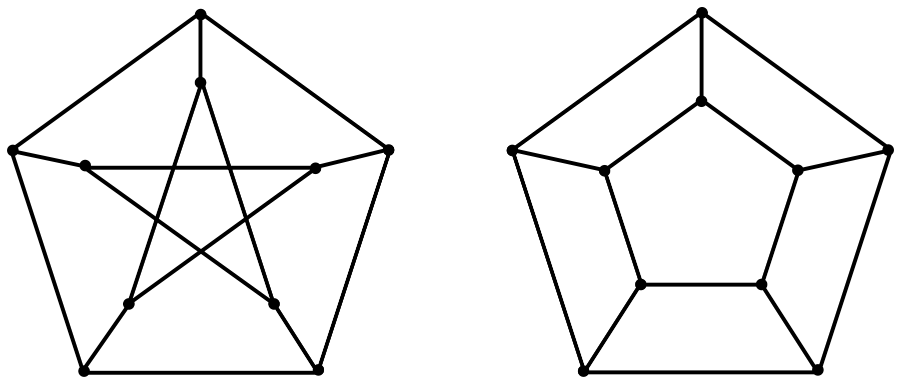


4. Mostre que o seguinte grafo não é planar. (Dica: Tente $K_{3,3}$)



5. Mostre que K^6 não é planar. (Dica: encontre um K^5.)

6. Os grafos representados abaixo são isomorfos? Justifique sua resposta.

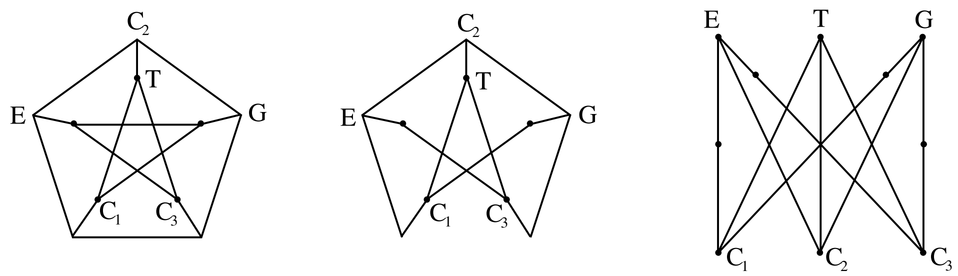


Soluções de problemas deixados ao longo da aula

Primeiro a aplicação da Fórmula de Euler nos três grafos planares. O primeiro tem 11 vértices, 18 arestas e 8 ciclos internos. Contando com a face externa, ele tem, portanto, 9 faces: $11 - 18 + 9 = 2$.

O grafo do meio tem 8 vértices e 10 arestas. Como tem 3 faces internas, somando com a face externa, obtemos 4 faces: $8-10+4 = 2$. O último grafo só não é uma árvore devido a um ciclo de 3 arestas: 13 vértices, 13 arestas e 2 faces, $13 - 13 + 2 = 2$.

O grafo de Peterson é um grafo não planar. O diagrama a seguir mostra que ele contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.



Aula 36 – Grafos Bipartidos

Objetivos

- Nesta aula você aprenderá o que é um grafo bipartido.
- Aprenderá a distinguir os grafos bipartidos dos que não são bipartidos.
- Conhecerá o Teorema de Hall, que dá uma resposta para o Problema dos Casamentos.

Esta será uma aula bem curta pois você deve estar se preparando para as provas finais. Aproveite bem o seu tempo!

O Problema dos Casamentos

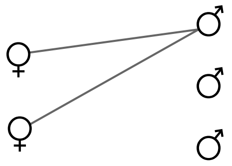
Não, esta não é uma seção de aconselhamento conjugal. O problema é o seguinte: há um grupo de moças e um grupo rapazes, cada uma das moças conhece alguns dos rapazes. Sob quais condições as moças podem casar-se com os rapazes (poligamia não vale!) de modo que cada moça case-se com um dos rapazes que ela conheça?

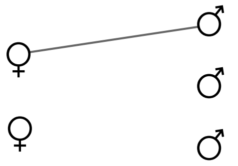
Veja que se o número de rapazes for menor que o número de moças, o problema não tem solução. Lembre-se do Princípio das Gavetas!

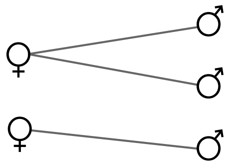
Mesmo que o número de moças seja menor, ou igual, ao número de rapazes, o problema pode não ter solução, devido à imposição de que cada moça case-se *com um dos rapazes que ela conheça*. Vamos ilustrar a situação por um diagrama. As moças e os rapazes serão representados por pontos e caso a moça m_i conheça o rapaz r_j uniremos os pontos m_i e r_j por um segmento reta ou de arco. O problema consiste em encontrar uma função injetora do conjunto das moças no conjunto dos rapazes com a propriedade de que cada m_i seja adjacente à sua imagem.

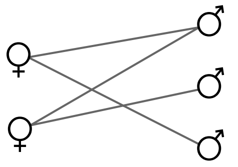
Exemplo 51

Aqui estão quatro possibilidades:


A


B


C


D

No caso A as duas moças conhecem apenas um dos rapazes. Neste caso o problema não tem solução. O mesmo ocorre no caso B, pois uma das moças não conhece nenhum rapaz. No caso C há duas possíveis soluções: como uma das moças conhece apenas um dos rapazes, ela casa-se com ele e a outra jovem pode escolher entre dois candidatos. Esperamos que ela escolha o melhor. O caso D também tem mais do que uma solução. Você sabe quantas?

O problema genérico que acabamos de ilustrar é conhecido como o Problema dos Casamentos e pode ser expresso em termos puramente matemáticos. Hoje, no entanto, esta versão nos basta. Sua resposta encontra-se no seguinte teorema, provado em 1935, por Philip Hall:

Teorema: *Suponha que um conjunto de k moças e l rapazes pretendam casar-se; cada uma das moças conhece alguns dos rapazes; cada moça quer casar-se com um dos rapazes que ela conheça. Para que isto seja possível é necessário e suficiente que cada subconjunto de i moças conheça, coletivamente, pelo menos i rapazes, $1 \leq i \leq k$.*

Prova do Teorema:

A condição é necessária, é claro, pois se não é possível casar um número menor de garotas, não será possível casar o conjunto todo.

A prova de que a condição é suficiente será por indução sobre o número de garotas.

É claro que o teorema é verdadeiro caso haja uma só garota. Vamos supor que o teorema seja verdadeiro para qualquer conjunto com $k-1$ garotas.

Dividiremos os possíveis casos em dois tipos.

a) Suponha que cada conjunto de k moças ($1 \leq k < m$) conhece coletivamente pelo menos $k+1$ rapazes. Isto é, a condição é verdadeira com um rapaz de sobra. Uma das garotas escolhe e casa-se com um dos rapazes que ela conhece. Neste caso, a condição original permanece verdadeira para as outras $m-1$ garotas. Devido à hipótese de indução, as outras $m-1$ garotas também podem casar-se!

b) Suponha agora que não haja rapazes sobrando. Isto é, suponha que haja um certo conjunto de k garotas que conhece, coletivamente, k dos rapazes. Estas k garotas podem casar-se com os k rapazes, ficando por casar $m-k$ garotas. Mas, qualquer subconjunto com h moças entre estas $m-k$ restantes,

$1 \leq h \leq m-k$, conhece h dos rapazes ainda não casados. Isto é verdade pois senão, estas h moças mais aquelas já casadas formariam um conjunto de $h+k$ moças que conheceria coletivamente menos do que $h+k$ rapazes. Isto contraria nossa hipótese. Portanto, as condições originais também valem para estas $m-k$ moças e, por indução, elas também podem casar-se.

Desta forma, o teorema está provado e eles foram felizes para sempre!

Este problema é um problema típico de Análise Combinatória que se relaciona com grafos. Mas nosso assunto é grafos!!

Voltemos ao tema de nossa aula: a família de grafos na qual podemos considerar as questões como a que acabamos de ver: os grafos bipartidos.

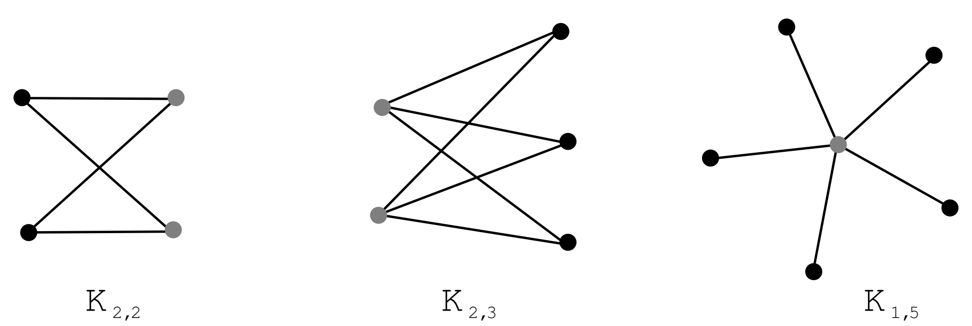
Grafos Bipartidos

Dizemos que G é um *grafo bipartido* se $V(G) = V_1 \cup V_2$ com $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ e cada aresta de G tem um de seus vértices em um dos conjuntos V_i e o outro vértice no outro conjunto V_j.

Em outras palavras, um grafo é bipartido se pudermos colorir seus vértices com exatamente duas cores e de modo que cada aresta tenha um vértice de cada cor.

Exemplo 52

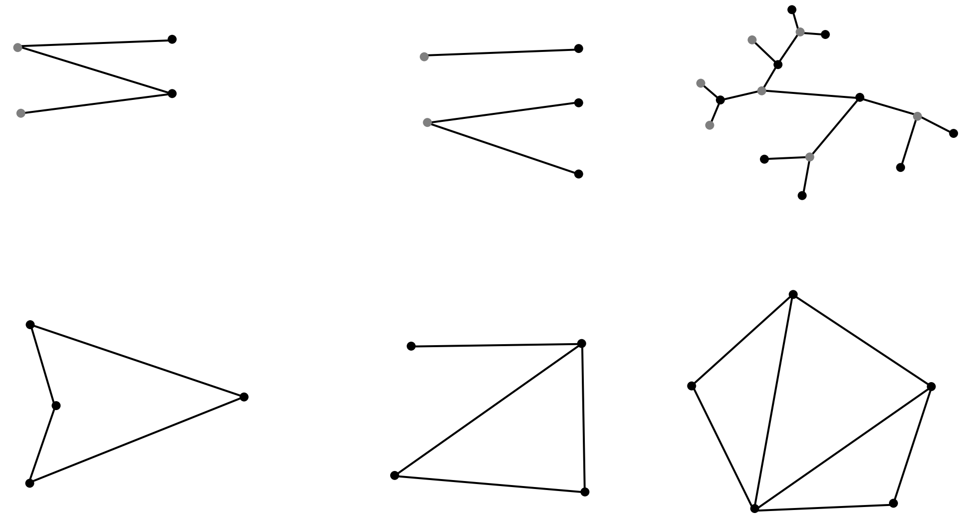
Denotamos por $K_{r,s}$ o grafo bipartido completo onde V_1 tem r elementos e V_2 tem s elementos. Completo significa que cada elemento de V_1 é adjacente a todos os elementos de V_2. Você já está bem familiarizado com o $K_{3,3}$, um grafo que temos usado em outras aulas. Observe:



Os vértices que pertencem a V_1 estão circundados por círculos, enquanto que os vértices que pertencem a V_2 estão indicados por cruzes.

Exemplo 53

Aqui estão três grafos bipartidos e três grafos que não são bipartidos.



O principal teorema desta aula caracteriza os grafos bipartidos.

Teorema: *Um grafo G é bipartido se, e somente se, cada um de seus ciclos é de ordem par.*

Você pode observar como o teorema se aplica nos exemplos apresentados antes do teorema.

Uma conseqüência imediata do teorema é o seguinte corolário, sobre árvores.

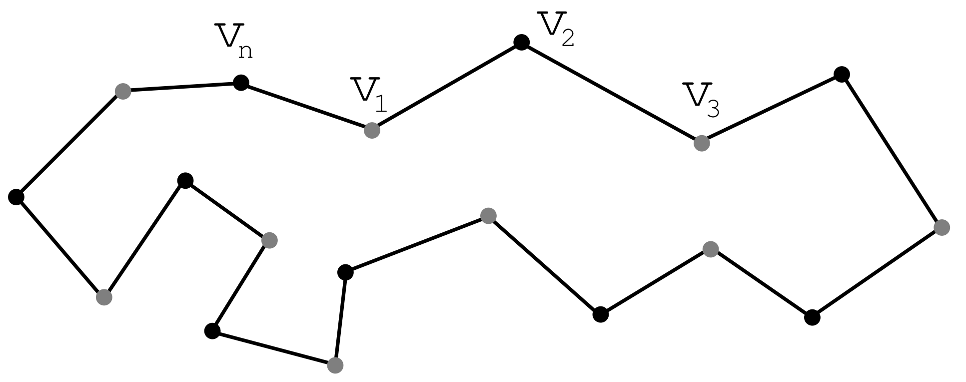
Corolário: *Se grafo G é uma árvore, então G é bipartido.*

Prova do Corolário:

A condição é satisfeita por vacuidade, isto é, como as árvores não têm ciclos, a afirmação 'todos os seus ciclos são de ordem par' é verdadeira.

Prova do Teorema:

(Prova de $\Longrightarrow$) Suponhamos que G seja um grafo bipartido. Seja $V(G) = V_1 \cup V_2$ uma partição do conjunto de vértices tal que cada aresta tem um de seus vértices em V_1 e o outro em V_2. Temos que verificar que todos os ciclos têm um número par de vértices (e de arestas). Seja C_n um ciclo de G e seja v_1 um elemento de $C_n \cap V_1$. Seja v_2 um vértice de C_n adjacente a v_1. Então $v_2 \in C_n \cap V_2$. Seja $v_3 \in C_n$ o outro vértice adjacente a v_2 (diferente de v_1). Então $v_3 \in V_1$. Prosseguindo assim temos que elementos alternados de C_n pertencem ao mesmo V_i. Logo, n é par. Imagine um colar de pérolas brancas e rosas, com as pérolas adjacentes de cores diferentes. Mesmo sem contá-las, podemos afirmar que há um número par de pérolas.

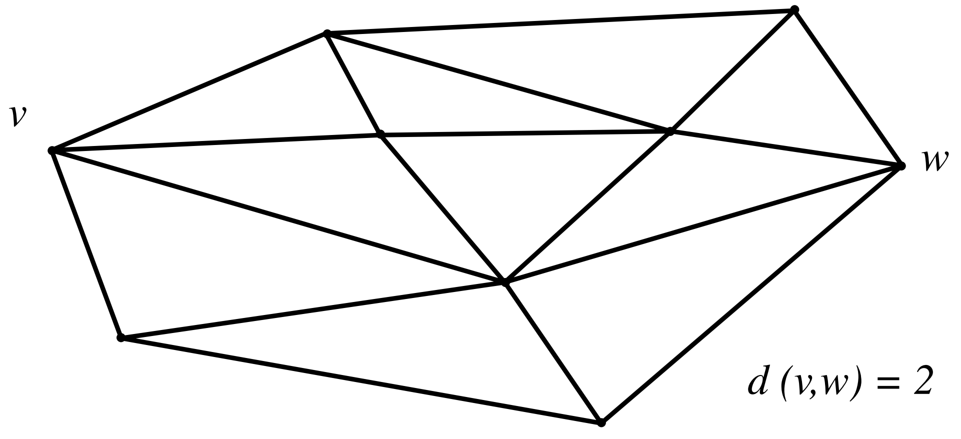


(Prova de $\Longleftarrow$) Um grafo é bipartido se, e somente se, cada uma de suas componentes conexas é um grafo bipartido. Isto significa que basta provarmos a afirmação para grafos conexos.

Suponhamos que G é um grafo conexo onde todos os seus ciclos têm ordem par. Para provar que G é bipartido temos que dividir os conjuntos dos seus vértices em dois subconjuntos disjuntos, tais que cada aresta tem um extremo em cada conjunto. Para fazer isto vamos considerar o conceito de distância entre dois vértices de um grafo conexo.

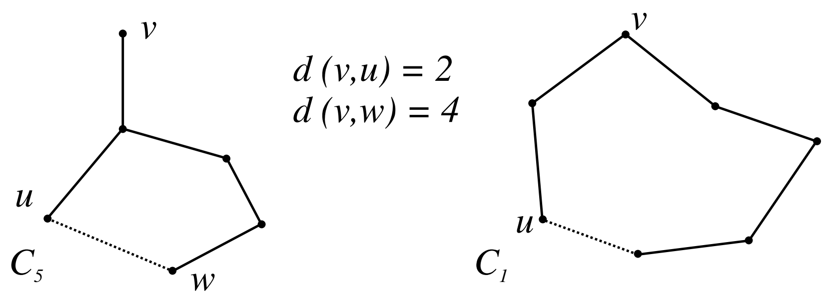
distância entre dois vértices

Sejam v e w dois vértices de G, um grafo conexo. Definimos a distância entre v e w como sendo o comprimento (i.e., o número de arestas) do caminho mais curto ligando v até w. Denotamos este número por $d(v, w)$.



Agora estamos prontos para terminar a demonstração. Escolha um vértice v de G. Vamos dividir $V(G)$ em dois subconjuntos: o subconjunto dos vértices que estão a uma distância ímpar de v, denotado por V_1 e o subconjunto dos vértices que estão a uma distância par de v, denotado por V_2. Note que $v \in V_2$, pois $d(v, v) = 0$.

Esta partição pode ser feita em qualquer grafo. O que temos que mostrar é: se todo ciclo de G é de ordem par, então o grafo é bipartido. Devemos mostrar que qualquer aresta conecta um vértice de V_1 a um vértice de V_2. Vamos, mais uma vez, argumentar pelo método de redução ao absurdo. Suponhamos que haja uma aresta ligando os vértices u e w de V_2. Como as distâncias de u e w até v são pares, há dois caminhos, um ligando v até u e o outro ligando v até w. Se acrescentarmos a estes dois caminhos a aresta da qual estamos supondo a existência, produziremos um ciclo de grau ímpar, o que é um absurdo, pois tal ciclo não existe, por hipótese. Logo, não existe tal aresta. Aqui estão duas possíveis situações com o ciclo de ordem ímpar.



O mesmo argumento mostra que não há arestas conectando dois vértices em V_1.

O grafo é bipartido.

Exercícios

1. Mostre que $K_{1,n}$ é uma árvore.

2. Mostre que o Problema do Casamento tem solução no caso em que o grafo que representa quais das m moças conhece os l rapazes é do tipo $K_{m,l}$ $(m \leq l)$.

3. Para quais valores de n o grafo K^n é bipartido?

4. O diretor de um Pólo do CEDERJ precisa contratar alguns tutores para as disciplinas Geometria, Matemática Discreta, Pré-Cálculo e Introdução à Informática. Após uma série de provas e entrevistas, ele obtém as seguintes informações: um dos pretendentes à tutoria está capacitado para Geometria, um para Matemática Discreta, um para Geometria e Pré-Calculo e dois para Pré-Cálculo e Introdução à Informática. Será que o diretor conseguirá tutores para cada uma das disciplinas? Faça uma análise da situação sob o ponto de vista do Teorema de Hall.

5. Mostre que um grafo G é bipartido se, e somente se, para um vértice fixado v_0 não há aresta vw tal que

$$d(v_0, v) = d(v_0, w).$$

Despedida e até breve!

Esta é a última aula da disciplina. Parabéns! Você fez uma boa jornada. Ao longo destas aulas você viu como a Matemática é rica e diversa. Como suas idéias têm grande força e beleza. Um mundo cheio de novidades e supresas aguarda por você nas próximas disciplinas. Você agora está melhor preparado para enfrentar as dificuldades, apreciar as coisas belas, enfim, fazer bom uso deste mundo maravilhoso de idéias! Com dedicação e afinco você poderá progredir imensamente. Lembre-se, as únicas limitações são definidas por você mesmo! Pense grande e irradie, com generosidade, os conhecimentos que você adquiriu aqui. Eles são patrimônio de todos e cabe a você zelar por eles, de agora em diante.

A Matemática é poderosa; feita com arte, irresistível.
d'après Eurípedes

Soluções de exercícios selecionados

Tabelas-verdade e leis da lógica

Exercício 1.

p	q	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \vee \sim q) \wedge \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	F	F	F
F	F	V	V	V

Argumentos e Provas

Exercício 3. Válido.

Exercício 4. Válido.

Exercício 5. Inválido.

Exercício 6. Inválido.

Exercício 7. Válido.

Exercício 8. Válido.

Exercício 9. Inválido.

O nascimento de uma teoria: o Problema das Pontes de Königsberg

Exercício 1. Sabemos que a soma dos graus dos vértices é o dobro do número das arestas. Portanto, este grafo tem 5 arestas.

Este grafo tem um vértice isolado pois há um vértice de grau 0.

Exercício 2. a) Sim. b) Não. c) Não. d) Não, pois um dos vértices teria grau 5 e há, no total, apenas 4 vértices.

Exercício 5. Os grafos 1 e 3 da primeira linha são isomorfos. O grafo 1 da segunda linha é isomorfo ao grafo 2 da terceira linha. (Bonito, não?) Há mais dois grafos isomorfos um ao outro.

Grafos eulerianos

Exercício 2. Os grafos da primeira linha são todos conexos. Os grafos da segunda linha não são conexos.

Exercício 3. Primeira linha: O primeiro não é conexo. O segundo é o K^4 e não admite circuito euleriano nem é atravessável. O terceiro é o K^5 e é euleriano.

Segunda linha: O primeiro não admite circuito euleriano mas é atravessável. O segundo é euleriano e o terceiro é apenas atravessável.

Terceira linha: O primeiro não admite circuito euleriano e não é atravessável. O segundo não admite circuito euleriano mas é atravessável. O terceiro é euleriano.

Grafos hamiltonianos

Primeira linha: o primeiro não admite circuito hamiltoniano. Os outros dois admitem.

Segunda linha: Os três grafos admitem circuitos hamiltonianos.

Terceira linha: O primeiro não admite, o outro, admite.

Quarta linha: Nenhum dos dois grafos admitem circuitos hamiltonianos.

Quinta linha: Ambos admitem circuitos hamiltonianos.

Exercício 3. Se n ou m é ímpar, o grafo admite um ciclo hamiltoniano.

Se n e m são pares o grafo não admite ciclo hamiltoniano, apesar de admitir um caminho hamiltoniano. (Este é um exercício bonito.)

Árvores

Exercício 2. Há 6 árvores. Se considerarmos 2 e 5 como uma só árvore, a resposta é 5.

Exercício 4. Não existe um tal grafo nos itens b, c, e, g.

Exercício 5. $(x+y)z-\frac{a}{b}$ e $(x+y)z-5+\frac{x+1}{y-2}$.