Aula 7 – Operações e Desigualdades com Limites de Sequências

Metas da aula: Apresentar os principais resultados sobre limites de sequências de números reais envolvendo desigualdades e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Usar os resultados sobre operações com limites para estabelecer limites de sequências cujos termos gerais envolvem expressões racionais bem como outras expressões algébricas mais complexas.
- Usar os resultados sobre limites e desigualdades para estabelecer limites de expressões complexas por meio de redução a casos mais simples.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer resultados que simplificarão bastante a verificação da convergência ou não de uma dada sequência, bem como a demonstração do limite correspondente. Esses resultados versam sobre a relação entre limites, desigualdades e as quatro operações entre números reais.

Operações com Limites

Começaremos estabelecendo uma propriedade básica das sequências convergentes que será muito útil em discussões subsequentes.

Definição 7.1
Diz-se que uma sequência de números reais (x_n) é *limitada* se o conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, ou seja, se existe $M > 0$ tal que $|x_n| \le M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 7.1
Toda sequência de números reais convergente é limitada.

Prova: Suponhamos que $\lim x_n = \bar{x}$ e tomemos $\varepsilon = 1$. Então existe um número natural N_0 tal que $|x_n - \bar{x}| < 1$ para todo $n > N_0$. Aplicando a desigualdade triangular com $n > N_0$ obtemos

$$|x_n| = |x_n - \bar{x} + \bar{x}| \le |x_n - \bar{x}| + |\bar{x}| < 1 + |\bar{x}|.$$

Pondo

$$M := \sup\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{N_0}|, 1 + |\bar{x}|\},$$

concluímos que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Examinaremos a seguir como o processo de tomar o limite interage com as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de sequências.

Se $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ são sequências de números reais, definimos sua soma, diferença, produto e quociente como é feito para funções em geral. Assim, temos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_n + y_n),\\
&\mathbf{x} - \mathbf{y} := (x_n - y_n),\\
&\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := (x_n y_n),\\
&\mathbf{x}/\mathbf{y} := (x_n/y_n), \qquad \text{desde que } y_n \neq 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Observe que o quociente $\mathbf{x}/\mathbf{y}$ só está definido se os elementos de $\mathbf{y}$ forem todos não-nulos.

Dada $c \in \mathbb{R}$ a multiplicação da sequência $\mathbf{x} = (x_n)$ por c é trivialmente definida por $c\mathbf{x} := (cx_n)$.

Mostraremos agora que sequências obtidas aplicando-se essas operações a sequências convergentes são também convergentes e seus limites são obtidos aplicando-se as mesmas operações aos limites das sequências envolvidas.

Teorema 7.2
Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências de números reais que convergem a $\bar{x}$ e $\bar{y}$, respectivamente, e $c \in \mathbb{R}$. Então as sequências $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$, e $c\mathbf{x}$ convergem a $\bar{x} + \bar{y}$, $\bar{x} - \bar{y}$, $\bar{x}\bar{y}$ e $c\bar{x}$, respectivamente. Além disso, se $\bar{y} \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\mathbf{x}/\mathbf{y}$ converge para $\bar{x}/\bar{y}$.

Prova: Mostremos inicialmente que $\lim(x_n + y_n) = \bar{x} + \bar{y}$. Pela desigualdade triangular temos

$$|(x_n + y_n) - (\bar{x} + \bar{y})| = |(x_n - \bar{x}) + (y_n - \bar{y})| \leq |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}|.$$

Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$, podemos encontrar $N_1 \in \mathbb{N}$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tais que, para todo $n > N_1$, $|x_n - \bar{x}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ e, para todo $n > N_2$, $|y_n - \bar{y}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Seja $N_0 := \sup\{N_1, N_2\}$. Então, para todo $n > N_0$, temos

$$|(x_n + y_n) - (\bar{x} + \bar{y})| \leq |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que prova que $(x_n + y_n)$ converge para $\bar{x} + \bar{y}$.

A prova de que $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ converge para $\bar{x}-\bar{y}$ segue dos mesmos argumentos.

Mostremos agora que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ converge para $\bar{x}\bar{y}$. Usando de novo a desigualdade triangular, obtemos

$$\begin{aligned}
|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| &\leq |(x_n y_n - \bar{x} y_n) + (\bar{x} y_n - \bar{x}\bar{y})| \\
&\leq |y_n(x_n - \bar{x})| + |\bar{x}(y_n - \bar{y})| \\
&\leq |y_n||x_n - \bar{x}| + |\bar{x}||y_n - \bar{y}|.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 7.1, existe $M_1 > 0$ tal que $|y_n| \leq M_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $M := \sup\{M_1, |\bar{x}|\}$. Assim, a desigualdade anterior implica

$$|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| \leq M(|x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}|).$$

Como $|x_n - \bar{x}| \to 0$ e $|y_n - \bar{y}| \to 0$, segue do que acabamos de mostrar para o limite da soma que

$$a_n := |x_n - \bar{x}| + |y_n - \bar{y}| \to 0.$$

Como $|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| \leq M a_n$, segue do exemplo 6.1(e) que $|x_n y_n - \bar{x}\bar{y}| \to 0$. Pelo Teorema 6.2 concluímos que $x_n y_n \to \bar{x}\bar{y}$.

A prova de que $cx_n \to c\bar{x}$, para $c \in \mathbb{R}$ qualquer, segue diretamente do que acabamos de demonstrar para o limite do produto, tomando-se por $\bar{y} = (y_n)$ a sequência constante $(c, c, c, \dots)$. Observe, em particular, que $c = -1$ nos dá que $-x_n \to -\bar{x}$.

Finalmente, para provar que $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{\bar{x}}{\bar{y}}$, vamos primeiro mostrar que $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{\bar{y}}$, desde que $\bar{y} \neq 0$ e $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para simplificar, suponhamos inicialmente que $\bar{y} > 0$. Como $y_n \to \bar{y}$, para n suficientemente grande temos que $y_n \in V_{\bar{y}/2}(\bar{y}) = (\bar{y}/2, 3\bar{y}/2)$. Em particular, para n suficientemente grande, ou seja, $n > N_1$, para um certo $N_1 \in \mathbb{N}$, temos $y_n > \bar{y}/2$. Assim, para todo $n > N_1$, temos

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\bar{y}}\right| = \left|\frac{\bar{y} - y_n}{\bar{y} y_n}\right| = \frac{1}{|y_n \bar{y}|}|y_n - \bar{y}| \leq \frac{2}{\bar{y}^2}|y_n - \bar{y}|.$$

Seja, então, dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|y_n - \bar{y}| < \dfrac{1}{2}\bar{y}^2\varepsilon$. Façamos $N_0 := \sup\{N_1, N_2\}$. Assim, para todo $n > N_0$, temos

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{\bar{y}}\right| \leq \frac{2}{\bar{y}^2}|y_n - \bar{y}| < \frac{2}{\bar{y}^2}\left(\frac{1}{2}\bar{y}^2\varepsilon\right) = \varepsilon,$$

o que conclui a prova de que $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{\bar{y}}$, quando $\bar{y} > 0$. No caso em que $\bar{y} < 0$, pelo que já foi provado temos $-y_n \to -\bar{y}$ e, como $-\bar{y} > 0$, $-1/y_n \to -1/\bar{y}$. Segue daí que $\dfrac{1}{y_n} \to \dfrac{1}{\bar{y}}$ também no caso em que $\bar{y} < 0$.

A prova de que $x_n/y_n \to \bar{x}/\bar{y}$ segue, agora, do fato que $\mathbf{x}/\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (1/\mathbf{y})$ e então, pelo que já foi demonstrado,

$$\lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \lim (x_n) \left(\frac{1}{y_n}\right) = \lim x_n \lim \left(\frac{1}{y_n}\right) = \bar{x} \left(\frac{1}{\bar{y}}\right) = \frac{\bar{x}}{\bar{y}},$$

o que conclui a demonstração. □

Observação 7.1

As afirmações do Teorema 7.2 sobre o limite da soma e do produto de duas sequências convergentes podem ser facilmente estendidas para um número finito qualquer de sequências convergentes por Indução Matemática. Assim, se $\mathbf{a} = (a_n)$, $\mathbf{b} = (b_n)$, $\mathbf{c} = (c_n)$,...,$\mathbf{z} = (z_n)$ são sequências convergentes, então sua soma $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\cdots+\mathbf{z} := (a_n + b_n + c_n + \cdots + z_n)$ é uma sequência convergente e

$$\lim(a_n + b_n + c_n + \cdots + z_n) = \lim a_n + \lim b_n + \lim c_n + \cdots + \lim z_n. \tag{7.1}$$

Da mesma forma, seu produto $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\cdots\mathbf{z} := (a_n b_n c_n \cdots z_n)$ é uma sequência convergente e

$$\lim(a_n b_n c_n \cdots z_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)(\lim c_n)\cdots(\lim z_n). \tag{7.2}$$

Em particular, se $k \in \mathbb{N}$ e $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência convergente, então

$$\lim x_n^k = (\lim x_n)^k. \tag{7.3}$$

Esperamos que você mesmo seja capaz de provar sem dificuldades as fórmulas (7.1), (7.2) e (7.3) usando o Teorema 7.2 e Indução Matemática.

Exemplos 7.1

(a) A sequência (n) é divergente.

De fato, pelo Teorema 7.1, se (n) fosse convergente, então seria limitada, isto é, existiria um número real $M > 0$ tal que $n = |n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas isso estaria em contradição com a Propriedade Arquimediana.

(b) Se $b > 1$ então a sequência (b^n) é divergente.

Como $b > 1$ temos $b = 1 + r$, com $r = b - 1 > 0$. A desigualdade de Bernoulli implica $b^n = (1 + r)^n \geq 1 + nr$. Se (b^n) fosse convergente, então teríamos $b^n = |b^n| < M$, para algum $M > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $1+nr \leq b^n < M$, ou seja, $n < (M-1)/r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso contradiz a Propriedade Arquimediana e, portanto, temos que (b^n) é divergente.

(c) A recíproca do Teorema 7.1 é falsa.

De fato, a sequência $(1 + (-1)^n)$ é limitada e, como vimos no exemplo 6.1 (m), não é convergente.

(d) Seja (x_n) uma sequência de números reais que converge a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Seja p um polinômio, isto é,

$$p(t) := a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

onde $k \in \mathbb{N}$ e $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Então a sequência $(p(x_n))$ converge a $p(\bar{x})$.

Segue do Teorema 7.2 e da Observação 7.1. Deixamos os detalhes para você como exercício.

(e) Seja (x_n) uma sequência convergente a $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Seja r uma função racional, isto é, $r(t) := p(t)/q(t)$, onde p e q são polinômios. Suponhamos que $q(x_n) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $q(\bar{x}) \neq 0$. Então a sequência $(r(x_n))$ converge a $r(\bar{x})$.

Segue também do Teorema 7.2 e da Observação 7.1. Os detalhes ficam como exercício para você.

(f)

$$\lim \frac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + 3n^2 + 1} = \frac{5}{2}.$$

Fazendo $a_n := \dfrac{5n^3 - 2n + 3}{2n^3 + 3n^2 + 1}$, para poder aplicar o Teorema 7.2 (em sua versão estendida pela Observação 7.1) é necessário escrever a sequência a_n de modo mais conveniente, para torná-la uma expressão racional envolvendo apenas sequências convergentes. Obtemos essa forma dividindo por n^3 o numerador e o denominador da fração que define a_n. Assim, encontramos

$$a_n = \frac{5 - (2/n^2) + (3/n^3)}{2 + (3/n) + (1/n^3)}.$$

Agora podemos aplicar o Teorema 7.2, obtendo

$$\lim a_n = \lim\left(\frac{5-(2/n^2)+(3/n^3)}{2+(3/n)+(1/n^3)}\right) = \frac{5-2\lim(1/n^2)+3\lim(1/n^3)}{2+3\lim(1/n)+\lim(1/n^3)}$$

$$= \frac{5-2(\lim(1/n))^2+3(\lim(1/n))^3}{2+3\lim(1/n)+(\lim(1/n))^3} = \frac{5}{2}.$$

(g)

$$\lim\frac{5^n-3^n+1}{5^n+2^n+2} = 1.$$

Façamos

$$x_n := \frac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n+2}.$$

Dividindo numerador e denominador por 5^n, obtemos

$$x_n = \frac{1-(3/5)^n+5^{-n}}{1+(2/5)^n+2\cdot 5^{-n}}.$$

Portanto,

$$\lim x_n = \lim\frac{1-(3/5)^n+5^{-n}}{1+(2/5)^n+2\cdot 5^{-n}}$$
$$= \frac{1-\lim(3/5)^n+\lim 5^{-n}}{1+\lim(2/5)^n+2\lim 5^{-n}} = \frac{1-0+0}{1+0+0} = 1.$$

Limites e Desigualdades

A seguir vamos apresentar alguns resultados muito úteis envolvendo limites e desigualdades.

Teorema 7.3
Se (x_n) é uma sequência convergente de números reais e se $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\bar{x} = \lim x_n \geq 0$.

Prova: Suponhamos que a conclusão é falsa, isto é, que $\bar{x} < 0$. Então $\varepsilon = -\bar{x} > 0$. Como (x_n) converge a $\bar{x}$, existe um número natural N_0 tal que

$$2\bar{x} = \bar{x} - \varepsilon < x_n < \bar{x} + \varepsilon = 0 \qquad \text{para todo } n > N_0.$$

Em particular, $x_{N_0+1} < 0$, o que contradiz a hipótese de que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. $\square$

O próximo resultado, embora seja aparentemente mais forte que o anterior, é, na verdade, um simples corolário deste.

Teorema 7.4
Se (x_n) e (y_n) são sequências convergentes de números reais e se $x_n \leq y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \leq \lim y_n$.

Prova: Seja $z_n := y_n - x_n$. Então $z_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Segue dos Teoremas 7.3 e 7.2 que

$$0 \leq \lim z_n = \lim y_n - \lim x_n,$$

de modo que $\lim x_n \leq \lim y_n$. □

O resultado que acabamos de ver implica, em particular, que uma desigualdade da forma $a \leq x_n \leq b$, válida para todos os termos de uma dada sequência convergente, é também satisfeita pelo seu limite, como estabelecido no enunciado seguinte.

Teorema 7.5
Se (x_n) é uma sequência convergente e se $a \leq x_n \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $a \leq \lim x_n \leq b$.

Prova: Se (a_n) é a sequência constante com $a_n = a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então temos $a_n \leq x_n$ e, pelo Teorema 7.4, $a = \lim a_n \leq \lim x_n$. Da mesma forma, tomando $b_n = b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de $x_n \leq b_n$ concluímos que $\lim x_n \leq b$. □

Observação 7.2
Como, para todo $m \in \mathbb{N}$, a m-cauda de uma sequência convergente converge para o mesmo limite, as hipóteses $x_n \geq 0$, $x_n \leq y_n$ e $a \leq x_n \leq b$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, nos Teoremas 7.3, 7.4 e 7.5, respectivamente, podem ser enfraquecidas substituindo-se em cada um dos enunciados a expressão "para todo $n \in \mathbb{N}$" pela expressão "para n suficientemente grande", que significa precisamente "para todo $n \geq m$, para algum $m \in \mathbb{N}$".

O próximo resultado é um dos mais úteis para a demonstração da convergência de sequências, indicando, sempre que for possível, a estratégia de limitá-las por baixo e por cima por sequências convergentes que possuem o mesmo limite.

Teorema 7.6 (Teorema do Sanduíche)
Suponhamos que (x_n), (y_n) e (z_n) são sequências tais que

$$x_n \leq y_n \leq z_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

e que $\lim x_n = \lim z_n$. Então (y_n) é convergente e

$$\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n.$$

Prova: Seja $\bar{c} := \lim x_n = \lim z_n$. Se $\varepsilon > 0$ é dado, então segue da convergência de (x_n) e (z_n) que existe um número natural N_0 tal que se $n \geq N_0$ então

$$|x_n - \bar{c}| < \varepsilon \quad \text{e} \quad |z_n - \bar{c}| < \varepsilon.$$

Como

$$x_n - \bar{c} \leq y_n - \bar{c} \leq z_n - \bar{c} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

concluímos (por quê?) que

$$-\varepsilon < y_n - \bar{c} < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_0.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\lim y_n = \bar{c}$. □

O seguinte resultado fornece um "teste da razão" para a convergência de sequências de fácil verificação.

Teorema 7.7
Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\bar{r} := \lim(x_{n+1}/x_n)$ existe. Se $\bar{r} < 1$, então (x_n) converge e $\lim x_n = 0$. Por outro lado, se $\bar{r} > 1$, então (x_n) é divergente.

Prova: Suponhamos $\bar{r} < 1$. Pelo Teorema 7.1 segue que $\bar{r} \geq 0$. Seja $s \in \mathbb{R}$ satisfazendo $\bar{r} < s < 1$, e seja $\varepsilon := s - \bar{r} > 0$. Existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n} - \bar{r}\right| < \varepsilon.$$

Decorre daí que se $n > N_0$, então

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} < \bar{r} + \varepsilon = \bar{r} + (s - \bar{r}) = s.$$

Portanto, se $n > N_0$, obtemos

$$0 < x_{n+1} < x_n s < x_{n-1}s^2 < \cdots < x_{N_0+1}s^{n-N_0}.$$

Fazendo $C := x_{N_0+1}/s^{N_0+1}$, vemos que $0 < x_{n+1} < Cs^{n+1}$, para todo $n > N_0$, ou seja, $0 < x_n < Cs^n$ para todo $n > N_0 + 1$. Como $0 < s < 1$, o Exemplo 6.1 (g) nos diz que $\lim s^n = 0$. Assim, podemos aplicar o resultado no Exemplo 6.1 (e) para concluir que $\lim x_n = 0$.

Vejamos agora o caso $\bar{r} > 1$. Tomando $b \in \mathbb{R}$ satisfazendo $1 < b < \bar{r}$ e $\varepsilon := \bar{r} - b$, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \bar{r} - \varepsilon = \bar{r} - (\bar{r} - b) = b.$$

Logo, se $n > N_0$, então

$$x_{n+1} > x_n b > x_{n-1}b^2 > \cdots > x_{N_0+1}b^{n-N_0} = \left(\frac{x_{N_0+1}}{b^{N_0+1}}\right) b^{n+1}.$$

Ponhamos $C' = x_{N_0+1}/b^{N_0+1}$. Vimos no item (b) que b^n não é limitada superiormente. Assim, dado $M > 0$ qualquer, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $b^n > M/C'$ para todo $n > N_1$. Portanto, $x_n > M$, para todo $n > \sup\{N_0+1, N_1+1\}$. Como $M > 0$ é arbitrário, segue que (x_n) não é limitada e, portanto, é divergente. $\square$

Exemplos 7.2

(a)

$$\lim\left(\frac{\operatorname{sen} n}{n}\right) = 0.$$

Lembremos que $-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1$. Então temos

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen} n}{n} \leq \frac{1}{n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 7.6 (do Sanduíche) para concluir a verificação da afirmação.

(b) Seja (x_n) uma sequência de números reais convergente a $\bar{x}$ e suponhamos que $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então a sequência $(\sqrt{x_n})$ converge a $\sqrt{\bar{x}}$.

Segue do Teorema 7.3 que $\bar{x} \geq 0$. Consideremos os dois casos: (i) $\bar{x} = 0$; (ii) $\bar{x} > 0$.

(i) Se $\bar{x} > 0$, seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$ então

$$0 \leq x_n = x_n - 0 < \varepsilon^2.$$

Daí segue que $0 \leq \sqrt{x_n} < \varepsilon$ para $n > N_0$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\sqrt{x_n} \to 0$.

(ii) Se $\bar{x} > 0$, então $\sqrt{\bar{x}} > 0$ e temos

$$\sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}})(\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}}} = \frac{x_n - \bar{x}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}}}.$$

Como $\sqrt{x_n} + \sqrt{\bar{x}} \geq \sqrt{\bar{x}} > 0$, segue que

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{\bar{x}}| \leq \frac{1}{\sqrt{\bar{x}}}|x_n - \bar{x}|.$$

Portanto, a convergência de $\sqrt{x_n}$ a $\sqrt{\bar{x}}$ segue do fato que $x_n \to \bar{x}$.

(c) Mostraremos que se r é um número racional positivo qualquer, então

$$\lim \frac{1}{n^r} = 0.$$

Primeiro consideramos o caso em que $r = 1/q$, $q \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, pela Propriedade Arquimediana existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > (1/\varepsilon)^q$. Então

$$n > N_0 \Rightarrow n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^q \Rightarrow n^{1/q} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{1}{n^{1/q}} - 0| = \frac{1}{n^{1/q}} < \varepsilon.$$

Segue que

$$\lim \frac{1}{n^{1/q}} = 0.$$

Consideremos agora o caso geral em que $r = p/q$, onde p e q são números naturais. Procedemos por indução em p. Acabamos de ver que a afirmação é válida para $p = 1$. Suponhamos, então, que vale

$$\lim \frac{1}{n^{k/q}} = 0.$$

Segue que

$$\lim \frac{1}{n^{(k+1)/q}} = \lim \frac{1}{n^{k/q}} \frac{1}{n^{1/q}} = (\lim \frac{1}{n^{k/q}})(\lim \frac{1}{n^{1/q}}) = 0 \cdot 0 = 0,$$

o que conclui a prova por indução.

(d) $\lim \dfrac{10^n}{n!} = 0.$

De fato, pondo $x_n := 10^n/n!$, temos

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{10^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{10^n} = \frac{10}{n+1}.$$

Logo $\lim(x_{n+1}/x_n) = 0$. Podemos então aplicar o Teorema 7.7 para concluir que $\lim x_n = 0$.

Exercícios 7.1

1. Para x_n dado pelas fórmulas seguintes, estabeleça se a sequência (x_n) é convergente ou divergente.

   (a) $x_n : \dfrac{n}{n+1}$,

   (b) $x_n := \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$,

   (c) $x_n := \dfrac{n^2}{n+1}$,

(d) $x_n := \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$.

(e) $x_n := 2^n$.

(f) $x_n := (-1)^n n^2$.

2. Encontre os limites das seguintes sequências:

(a) $\lim \left(\dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}\right)$,

(b) $\lim \left(\dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}\right)$.

(c) $\lim\big(\sqrt{n+3}\,(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\big)$,

(d) $\lim(3\sqrt{n})^{1/2n}$,

3. Encontre cada um dos seguintes limites e justifique plenamente suas respostas com base nos teoremas e exemplos dados no texto.

(a) $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^2-5n+2}$

(b) $\lim \dfrac{n^3-1}{3n^3+n-4}$

(c) $\lim \dfrac{n\cos n}{n^2+24}$

(d) $\lim \dfrac{2^n+1}{2^n-n}$

(e) $\lim((n+1)^{1/3}-n^{1/3})$

(f) $\lim \dfrac{n^{1/3}\operatorname{sen} n!}{n+2}$

(g) $\lim \left(\dfrac{n^3}{2n^2-1}-\dfrac{n^2}{2n+1}\right)$

(h) $\lim(a^n+a^{-n})^{1/n}$, com $a>0$.

4. Se $0<a<b$, determine

$$\lim \left(\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}\right).$$

5. Se $a>0$, $b>0$, mostre que

$$\lim \left(\sqrt{(n+a)(n+b)}-n\right)=\frac{a+b}{2}.$$

6. Mostre que se $z_n := (a^n+b^n)^{1/n}$ onde $0<a<b$, então $\lim z_n = b$.

7. Use o Teorema 7.6 (do Sanduíche) para determinar os seguintes limites:

   (a) $\lim n^{1/n^2}$,

   (b) $\lim(n!)^{1/n^2}$.

8. Aplique o Teorema 7.7 às seguintes sequências, onde a, b satisfazem $0 < a < 1$, $b > 1$.

   (a) (nb^{-n}),

   (b) $(2^{3n}/3^{2n})$,

   (c) (n^2a^n),

   (d) (b^n/n^2),

   (e) $(b^n/n!)$,

   (f) $(n!/n^n)$.

9. Seja (x_n) uma sequência de números reais positivos tal que $\bar{s} := \lim x_n^{1/n} < 1$. Mostre que existe um $r \in \mathbb{R}$ com $0 < r < 1$ tal que $0 < x_n < r^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Use isso para mostrar que $\lim x_n = 0$.

10. Mostre que se (x_n) e (y_n) são sequências convergentes, então (u_n) e (v_n) definidas por $u_n := \max\{x_n, y_n\}$ e $v_n := \min\{x_n, y_n\}$ também são convergentes.