Matemática Discreta – EP4 – Versão aluno de 2009/1

Observações: Caro aluno, aqui está o EP4, referente as aulas 8 e 9 do Módulo 1. Nestas aulas você continuará o seu aprendizado das *técnicas básicas de contagem.* Como já enfatizamos, o conteúdo apresentado nestas aulas é muito importante, tanto por ser *básico* quanto por ser *útil*, isto é:

> **estes conteúdos fazem parte do conhecimento básico que todo estudante de matemática deve possuir**.

Por isso, se esforce ao máximo para entender as explicações e exemplos e resolva o máximo de exercícios que você puder.

Conteúdo:

Este EP4 contém:

- Uma solução alternativa para o Exemplo 42 da Aula 7 (página 69);
- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre os textos das aulas;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Solução alternativa para o Exemplo 42 da Aula 7 (página 69).

Em geral, os alunos encontram muita dificuldade em entender as explicações dadas pelos autores na solução da parte inicial do Exemplo 42, da Aula 7, do Módulo 1. Assim, elaboramos esta solução alternativa, baseada diretamente numa análise da configuração a ser contada e no Princípio Multiplicativo.

Parte inicial do enunciado do Exemplo 42: Quando uma Copa do Mundo de futebol chega às semifinais, quantos resultados são possíveis?

Solução alternativa: Uma semi-final de copa do mundo consiste de 4 times disputando duas etapas, cada uma consistindo de dois jogos. Os dois vencedores da primeira etapa disputam a final, enquanto que os perdedores disputam o terceiro lugar. No final, temos uma ordenação (classificação) de 4 elementos (os times), estipulando o primeiro lugar (campeão!), o segundo lugar (vice-campeão), o terceiro, e o quarto lugares. Não há empate em nenhum dos dois jogos das duas etapas. No pior caso, os jogos têm uma prorrogação e, caso o empate persista, os times disputam uma decisão por pênaltis. Assim, cada jogo tem um *vencedor* e um *perdedor*.

Para formar uma ordenação dos times, respeitando as regras acima, podemos executar as seguintes tarefas:

t_1 : escolher o time campeão
(*que pode ser qualquer um dos 4*);
t_2 : escolher o time vice-campeão
(*que não pode ser o time que jogou contra o campeão na primeira etapa, pois ele sendo perdedor disputa o terceiro lugar*);
t_3 : escolher o time que ocupa o terceiro lugar
(*que pode ser qualquer um dos dois perdedores da primeira etapa, mas que é vencedor na disputa do terceiro lugar*);
t_4 : escolher o time que ocupa o quarto lugar
(*que é perdedor em um dos jogos da primeira etapa e que também é perdedor na disputa do terceiro lugar*).

A primeira tarefa pode ser executada de 4 maneiras. A segunda, de 2 maneiras (não é o campeão e nem o que jogou contra o campeao na primeira etapa). A terceira tarefa, de 2 maneiras (qualquer um dos dois times ainda não considerados), e a quarta, de somente uma maneira (pois após a execução das tarefas anteriores só sobra um time).

Assim, pelo PM, existem $4 \times 2 \times 2 \times 1 = 16$ classificações possiveis.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aulas 8 e 9 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O conceito de arranjo de n elementos tomados r a r;
- Como calcular o número total de arranjos de n elementos tomados r a r, **usando o Princípio Fundamental da Contagem**;
- O conceito de permutação com elementos repetidos;
- Como calcular o número total de permutações de n elementos, sendo n_1 do tipo 1, n_2 do tipo 2, ..., n_r do tipo r;
- O conceito de permutação circular de n elementos;
- Como calcular o número total de permutações circulares de n elementos.

Sobre a Aula 8:

Arranjos são configurações básicas que ocorrem na resolução de muitos problemas de contagem. Para compreender bem o conceito de arranjo e aprender a contá-los, vamos enfatizar como a noção de ordem está relacionada com a de arranjo e que o número total de arranjos pode ser determinado diretamente a partir do PFC.

- **Página 73:** Para formar um arranjo, os objetos não necessitam ser *selecionados* em ordem mas sim *dispostos* em ordem. Por exemplo, o arranjo ab (a seguido de b) pode ser formado de duas maneiras:

  - escreve-se o a e depois o b, à direita do a;
  - escreve-se o b e depois o a, à esquerda do b.

  No primeiro caso, *seleciona-se* primeiro o a e depois o b e, no segundo caso, *seleciona-se* primeiro o b e depois o a. Em ambos os casos os objetos a e b são dispostos na mesma ordem: a seguido de b.

- **Página 73:** Tambám, na formação de um arranjo os elementos selecionados devem ser *distintos, dois a dois.*

- **Página 73:** Esta observação é muito importante. Para compreendê-la você deverá efetuar meticulosamente os vários passos abaixo. A cada passo, reflita o máximo possível sobre o que está sendo dito.

  1. Compare o enunciado do Exemplo 45 com o enunciado do Exercício 5, na página 63.
  2. Note que, num sentido bem preciso, ambos são um único problema formulado de duas maneiras diferentes.
  3. Observe que este problema é resolvido por aplicação direta do PFC (se não, você nem teria conseguido resolvê-lo, usando os conhecimentos aprendidos na Aula 6).
  4. Leia os enunciados dos Exemplos 46 e 47, nas páginas 74 e 75, respectivamente.
  5. Resolva os Exemplos 46 e 47 por aplicação direta do PFC.

6. Leia o parágrafo após o final do Exemplo 45, na página 74, e note que o cálculo geral do número total de arranjos de r elementos, selecionados em um total de n, é obtido por aplicação direta do PFC.
7. Conclua que a fórmula apresentada no retângulo em destaque não tem nenhuma utilidade no cálculo do número total de arranjos de r elementos, selecionados em um total de n.
8. Observe que, na verdade, nos exemplos em que os autores utilizam a fórmula em destaque, eles estão escrevendo mais do que deviam pois, no final das contas, há uma simplificação que leva ao cálculo feito por aplicação direta do PFC.

- **Página 77:** No Exemplo 49, observe que a figura faz parte do enunciado do problema e não da sua solução. Observe, tambám, que a determinação do número de rotas pode ser feito diretamente da figura, sem a aplicação de nenhum tipo especial de técnica de contagem.

Sobre a Aula 9:

- **Página 81:** Conjuntos *sempre* possuem objetos dois a dois distintos. A noção de "conjunto com (possivelmente) objetos repetidos" é por si só inconsistente. Neste caso, falamos em *multiconjunto*. Esta nomenclatura, apesar de amplamente adotada, não é muito adequada pois a palavra *multiconjunto* parece especificar um *tipo especial de conjunto* quando, na verdade, conjuntos é que são tipos especiais de multiconjuntos. De fato, um conjunto é um multiconjunto sem objetos repetidos!
- **Página 87:** No Exemplo 55, os autores estão utilizando uma noção relaxada de círculo, uma vez que a mesa em questão pode não ser circular.
- **Página 87:** Tente resolver o Exemplo 56 usando somente a noção de permutação circular.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios mal formulados:

- **Aula 8, Exercício 3:** Observe que os autores estão supondo que as pessoas serão dispostas em uma ordenação.
- **Aula 8, Exercício 5:** No item (a) os autores estão assumindo que não há empate nas duas primeiras posições de chegada. No item (b) os autores estão assumindo que as condições da corrida são idênticas as do item (a).

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 8: todos os exercícios.
- Aula 9: exercícios 6—10.

Se encontrar dificuldades, não desanime: procure os Tutores presenciais e a distância, e converse com outros alunos de MD.

Alguns exercícios para fixação:

1. De quantas maneiras 10 pessoas:

   (a) podem sentar-se em uma mesa redonda?

   (b) podem sentar-se em uma mesa redonda que já tem uma (décima primeira) pessoa sentada?

2. De quantas maneiras 4 homens e 4 mulheres:

   (a) podem sentar-se em uma mesa redonda?

   (b) podem sentar-se em uma mesa redonda, de modo que não haja dois homens sentados lado a lado?

3. (a) De quantas maneiras 8 crianças podem formar uma *roda*?

   (b) Se 3 destas 8 crianças (a saber, Kátia, Marília e Eliane) ficam sempre juntas, lado a lado, quantas rodas podem ser formadas?

Soluções comentadas:

1. (a) Cada uma das maneiras de 10 pessoas sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 10 elementos. Assim, o total de maneiras é igual a $9! = 362.880$.

   (b) Cada uma das maneiras de 10 pessoas sentarem em uma mesa redonda que já possui uma (décima primeira) pessoa sentada é uma permutação simples de 10 elementos. Assim, o total de maneiras é igual a $10! = 3.628.800$.

2. (a) Cada uma das maneiras de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 8 objetos. Assim, o total de maneiras é igual a $7! = 5.040$.

   (b) Cada uma das maneiras de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda de modo que não haja dois homens sentados lado a lado pode ser obtida executando-se duas tarefas:

   t_1 : sentar os 4 homens em torno da mesa,
   t_2 : sentar as 4 mulheres intercaladas com os homens.

   Cada maneira de 4 homens sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 4 objetos. Logo, a tarefa t_1 pode ser realizada de $3! = 6$ maneiras.

   Cada maneira de 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda intercaladas com os homens é uma permutação simples de 4 objetos. Logo, a tarefa t_2 pode ser realizada de $4! = 24$ maneiras.

   Logo, pelo PM, o total de maneiras de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda de modo que não haja dois homens sentados lado a lado é igual a $6 \times 24 = 144$.

3. (a) Cada roda formada por 8 crianças é uma permutação circular de 8 elementos. Assim, o número total de tais rodas é $7! = 5.040$.

   (b) Para formar uma roda na qual Kátia, Marília e Eliane estão juntas, podemos executar duas tarefas:

   t_1 : escolher uma permutação (linear) das três crianças;
   t_2 : escolher uma permutação circular cujos elementos são:
   a permutação escolhida e as outras 5 crianças.

   A tarefa t_1 pode ser executada de $3! = 6$ maneiras. A tarefa t_2 pode ser executada de $5! = 120$ maneiras. Logo, pelo PM, temos um total de $6 \times 120 = 720$ rodas nas quais Kátia, Marília e Eliane ficam juntas, lado a lado.

Márcia Rosana Cerioli e Jorge Petrúcio Viana