Fundação CECIERJ
Consórcio cederj

Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Matemática Básica 2009/1 – EP4 - Gabarito

Olá a todos! Esperamos que você não tenha abandonado o EP para tentar fazer toda a AD1. Não se esqueça que fazê-la direitinho é uma consequência do aprendizado bem feito! Assim, mantenha seu ritmo de estudos e acrescente um tempinho para tentar resolver a AD. Vá fazendo aos poucos. Quanto aos EP's, esperamos que vocês estejam conseguindo fazê-los sem precisarem recorrer aos gabaritos. Mas não se acanhem se tiverem que recorrer! Só não tem dúvida quem não tenta!

Coordenadores da disciplina
Maria Helena
Ion Moutinho

Questão 1: Considere a equação $-\frac{x}{5}-y=5.$ Determine:

a) o valor de x para $y = 4x - 11$.

b) o valor de y para o valor de x calculado no item a.

Solução:

a) devemos substituir o valor de y na equação dada. Assim,

$$-\frac{x}{5}-y=5\Rightarrow -\frac{x}{5}-(4x-11)=5\Rightarrow$$

$$-\frac{x}{5}-4x+11=5\Rightarrow -\frac{x}{5}-4x=5-11\Rightarrow -\frac{x+20x}{5}=-6\Rightarrow -21x=-30\Rightarrow x=\frac{30}{21}=\frac{10}{7}$$

b) Sendo $x = \frac{10}{7}$, devemos substituir este valor em $y = 4x - 11$. Assim,

$$y = 4x - 11 \Rightarrow y = 4.\frac{10}{7} - 11 = \frac{40 - 77}{7} = -\frac{37}{7}$$

Questão 2: Sendo o par $(9,y)$ solução da equação $10x + 4y = 78$, determine o valor de y.

Solução:

Se $(9,y)$ é solução, ao substituirmos os valores $x = 9$ e $y = y$ a equação deve tornar-se uma sentença verdadeira. Logo, o valor de y deve ser:

$$10x + 4y = 78 \Rightarrow 10.9 + 4y = 78 \Rightarrow 4y = 78 - 90 \Rightarrow 4y = -12 \Rightarrow y = -3$$

Questão 3: Resolva os seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 6y = -58 \end{cases}$; b) $\begin{cases} 3x + y = -15 \\ 2y = 3x \end{cases}$; c) $\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 2x - 6y = 14 \end{cases}$

Solução:

a) Para resolvermos, podemos multiplicar a segunda equação por (-1) e somar as duas, assim, $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 6y = -58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \\ -x + 6y = 58 \end{cases} \Rightarrow 8y = 64 \Rightarrow y = 8.$ Com este valor de y, podemos substituir em qualquer das equações e calcular o valor de x. Substituindo na primeira, teremos:

$$x + 2y = 6 \Rightarrow x + 2.8 = 6 \Rightarrow x = 6 - 16 \Rightarrow x = -10.$$

b) Para resolvermos, podemos substituir o valor de $3x$ da segunda equação, na primeira. Assim,

$\begin{cases} 3x + y = -15 \\ 2y = 3x \end{cases} \Rightarrow 2y + y = -15 \Rightarrow 3y = -15 \Rightarrow y = -5.$ Como $3x = 2y$, teremos

$$3x = 2.(-5) = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{3}.$$

c) Para resolvermos, podemos multiplicar a primeira equação por (-2) e somar as duas equações. Assim,

$\begin{cases} x - 4y = 10 \\ 2x - 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 8y = -20 \\ 2x - 6y = 14 \end{cases} \Rightarrow 2y = -6 \Rightarrow y = -3.$ Com esse valor de y podemos substituir em qualquer das equações e calcular o valor de x correspondente. Substituindo na primeira, teremos: $x - 4y = 10 \Rightarrow x - 4.(-3) = 10 \Rightarrow x + 12 = 10 \Rightarrow x = 10 - 12 \Rightarrow x = -2$.

Questão 4: A soma de dois números é 147. A diferença entre eles é 17. Calcule esses números.

Solução:

Sejam x e y esses números. Se sua soma é 147, temos a equação: $x + y = 147$. Como sua diferença é 17, temos a equação: $x - y = 17$. Formamos, portanto, um sistema, com duas equações e duas incógnitas: $\begin{cases} x + y = 147 \\ x - y = 17 \end{cases}$. Somando as duas equações, teremos: $2x = 164$. Portanto, $x = 82$. Da primeira equação, substituindo esse valor de x, teremos $82 + y = 147$. Ou seja, $y = 147 - 82 = 65$. Portanto, os números são 82 e 65 (confira!)

Questão 5: Numa prova de Matemática, com 20 questões, os alunos ganham 5 pontos por questão certa e perdem 3 pontos por questão errada. Quantas questões acertou um aluno que obteve 36 pontos?

Solução:

Seja ***e*** o número de questões erradas e ***c*** o número de questões certas. Considerando que o aluno só pode errar ou acertar uma questão, o total de 20 questões será a soma das erradas com as certas. Assim, temos a equação: ***e*** + ***c*** = 20. Por outro lado, para cada questão correta, o aluno ganha 5 pontos e para cada errada, ele perde 3 pontos. Então, a pontuação do aluno (36 pontos) será obtida fazendo: 5. ***c*** - 3. ***e***, ou seja, 5. ***c*** - 3. ***e*** = 36.

Assim, ficamos com o sistema: $\begin{cases} e + c = 20 \\ 5c - 3e = 36 \end{cases}$. Podemos resolvê-lo, multiplicando a primeira equação por 3 e somando com a segunda, obtendo a equação: $8c = 96$. Logo, $c = 12$, que é o número de questões que o aluno acertou.

Questão 6: Mauro possui 58 moedas em seu cofrinho. Algumas de R$ 0,10 e outras de R$ 0,50. Ao todo, Mauro tem R$ 16,20. Quantas moedas de cada valor Mauro possui?

Solução:

Seja D o número de moedas de R$0,10 e C o número de moedas de R$0,50 que Mauro possui. Considerando que ele só possui essas moedas, o total será $C + D = 58$. O total em dinheiro será $0{,}1.D + 0{,}5.\ C = 16{,}20$. Com estas duas equações,

obtemos o sistema: $\begin{cases} C + D = 58 \\ 0{,}1D + 0{,}5C = 16{,}20 \end{cases}$ ou, multiplicando a segunda equação

por 10: $\begin{cases} C + D = 58 \\ 5C + D = 162 \end{cases}$. Multiplicando a primeira equação por (-1) e somando com a segunda, ficamos com a equação: $4C = 104$. Portanto, $C = 26$. Substituindo na primeira, concluímos que $D = 32$. Logo, Mauro possui 26 moedas de R$ 0,50 e 32 moedas de R$ 0,10. (confira!)

Questão 7: O triplo de um número menos o quadrado desse número é igual a 2. Qual é esse número?

Solução:

Seja x o número procurado. Assim, $3x - x^2 = 2$. Temos que resolver esta equação do segundo grau. Podemos escrevê-la da forma tradicional, ou seja, $-x^2 + 3x - 2 = 0$ ou,

$x^2 - 3x + 2 = 0$. Para resolver, podemos usar as relações de Girard ou a fórmula de Báskhara. Pelo primeiro caso, temos que a soma das raízes é 3 e o produto é 2. Logo, as raízes só podem ser 1 e 2 (verifique!). Se quisermos usar a fórmula de Báskhara, teremos que a = 1, b = -3 e c = 2. Assim, as raízes serão dadas por

$x_{1,2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$. Logo, as raízes serão

$x_1 = \dfrac{3+1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ e $x_2 = \dfrac{3-1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$, como já tínhamos obtido pelo outro método. Assim, nosso problema admite duas soluções e todas as duas estão corretas. O número pode ser 1 ou o número pode ser 2. Podemos apresentar a solução na forma de um *Conjunto Solução* S = {1,2} ou simplesmente responder que o número pode ser o 1 ou o 2.

Questão 8: Resolva o sistema de equações $\begin{cases} 2x+2y-z=10 \\ x=2y \\ y-z=0 \end{cases}$.

Solução:

Podemos tirar o valor de x da segunda equação e o de y da terceira, e substituir na primeira. Assim, teremos que $x = 2\ y$ e $y = z$ ou seja, $x = 2\ z$ e $y = z$. Substituindo, ficamos com $2.(2z) + 2.z - z = 10$. Ou seja, $5z = 10$, logo, $z = 2$. Assim, $y = 2$ e $x = 4$.

Questão 9: Verifique que a fórmula de Baskhara determina as raízes de uma equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Ou seja, verifique que tanto $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ quanto $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ satisfazem a equação dada.

Solução:

Podemos resolver este problema de duas maneiras diferentes. Uma delas é recompor a equação dada, com as raízes obtidas pela fórmula. A outra, é substituir as raízes na equação dada e encontrar uma identidade. Vamos iniciar pela primeira:

Uma equação do segundo grau pode ser escrita como $k(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Substituindo, teremos:

$$k\left(x-\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\right)=$$
$$=\frac{k}{4a^2}\left((2ax+b)+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left((2ax+b)-\sqrt{b^2-4ac}\right)=0$$

Observe o produto notável do tipo $(A+B).(A-B)$. Assim, ficamos com:

$$\frac{k}{4a^2}\left((2ax+b)+\sqrt{b^2-4ac}\right).\left((2ax+b)-\sqrt{b^2-4ac}\right)=\frac{k}{4a^2}\left((2ax+b)^2-(\sqrt{b^2-4ac})^2\right)=$$
$$=\frac{k}{4a^2}\left(4a^2x^2+4abx+b^2-(b^2-4ac)\right)=\frac{k}{4a^2}\left(4a^2x^2+4abx+4ac\right)=\frac{4ak}{4a^2}\left(ax^2+bx+c\right)=0.$$

Logo, $ax^2+bx+c = 0$, conforme queríamos verificar.

A segunda forma de resolver é substituindo cada um dos valores x_1 e x_2 na equação dada. Apresentamos somente uma delas e a segunda será feita de forma totalmente análoga. Substituindo:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) + c =$$

$$= \frac{a}{4a^2}(-b+\sqrt{b^2-4ac})^2 + \frac{b}{2a}(-b+\sqrt{b^2-4ac}) + c =$$

$$= \frac{1}{4a}\left(b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2\right) + \frac{2b}{4a}\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right) + \frac{4ac}{4a} =$$

$$= \frac{1}{4a}\left(b^2-4ac-2b\sqrt{b^2-4ac}+b^2-2b^2+2b\sqrt{b^2-4ac}+4ac\right) =$$

$$= \frac{1}{4a}.0 = 0$$

Como esperávamos que acontecesse. Para a outra raiz é perfeitamente análogo. Faça e irá encontrar o resultado.

Questão 10: Verifique que sempre vale a relação $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, onde x_1 e x_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ (use as expressões de x_1 e x_2 dadas por Baskara).

Solução:

Para resolver este problema é só fazer como fizemos no exercício anterior. Com as raízes x_1 e x_2 obtidas por Báskhara, substitua e, certamente irá encontrar ax^2+bx+c.

Questão 11: Calcule a soma e o produto das raízes de $x^2 - 34x + 11 = 0$.

Solução:

Pelas relações de Girard, a soma das raízes é 34 e o produto é 11. Caso deseje testar, resolva a equação usando Baskhara e some e multiplique as raízes.

$$x_{1,2} = \frac{34 \pm \sqrt{1156-44}}{2} = \frac{34 \pm \sqrt{1112}}{2} = \frac{34 \pm 2\sqrt{278}}{2} = 17 \pm \sqrt{278}$$

A soma será $x_1 + x_2 = 17 + \sqrt{278} + 17 - \sqrt{278} = 34.$ O produto será

$$x_1x_2 = (17+\sqrt{278})(17-\sqrt{278}) = 17^2 - 278 = 289 - 278 = 11.$$

Questão 12: Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $x^2 + 4x + 1 = 0$, sem resolvê-la.

Solução:
Veja bem, pelas relações de Girard, temos que a soma das raízes é -4 e o produto delas é 1 (uma equação do segundo grau pode ser escrita como $x^2 - Sx + P = 0$ sendo S e P, respectivamente, a soma e o produto das raízes). Sendo x_1 e x_2 as raízes, o problema pede $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Ora, efetuando esta soma, temos que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-4}{1} = -4$.

Questão 13: Encontre dois números cuja soma seja 4 e produto seja 1.

Solução:

Podemos resolver este problema pensando nas raízes de uma equação do segundo grau. Se a soma é 4 e o produto é 1, os números são as raízes da equação $x^2 - 4x + 1 = 0$. Assim, $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$. Logo, os números são $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$