Aula 5 – Os Números Reais II

Metas da aula: Enunciar o fundamental Teorema do Supremo para os números reais. Definir as operações de adição, subtração, produto e divisão no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. Mostrar que $\mathbb{R}$ com essas operações satisfaz as propriedades de um corpo ordenado. Estabelecer a caracterização dos reais como um corpo ordenado completo. Fazer uma breve discussão sobre a propriedade dos intervalos encaixados.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o enunciado do Teorema do Supremo e seu uso na demonstração de proposições simples sobre os números reais.

- Em particular, saber demonstrar as propriedades elementares das operações com os números reais.

- Saber o significado e o uso da propriedade dos intervalos encaixados.

O Teorema do Supremo e as Operações nos Reais

Começaremos nossa aula enunciando um resultado que estabelece uma propriedade fundamental de $\mathbb{R}$, exatamente aquela que dá a $\mathbb{R}$ uma estrutura superior à dos números racionais e que possibilita todo o desenvolvimento posterior da Análise Real.

Há dois métodos clássicos consagrados de demonstrar esse resultado, ambos exigindo uma grande dose de abstração. Um deles, que é através da introdução dos chamados *cortes*, é devido a R. DEDEKIND (1831-1916), motivo pelo qual o processo ficou conhecido como "cortes de Dedekind". O outro, que é através de classes de equivalência de seqüências de Cauchy, conceito este que será estudado em aulas futuras, é devido a G. Cantor, nome que já encontramos diversas vezes nas aulas anteriores. Deixaremos sua demonstração para a seção Prossiga ao fim desta aula, onde faremos uma exposição resumida do processo devido a Dedekind.

Vejamos, agora, o enunciado do importantíssimo Teorema do Supremo.

Teorema 5.1 (Teorema do Supremo)
O conjunto ordenado $\mathbb{R}$ tem a propriedade do supremo.

De posse do Teorema do Supremo, agora nos é possível definir as operações de adição, subtração, produto e divisão nos reais.

Definição 5.1
Dados $a, b \in \mathbb{R}$, sejam

$$A := (-\infty, a) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < a\},$$
$$B := (-\infty, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x < b\}.$$

Ponhamos

$$A + B := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = r + s,\ r \in A,\ s \in B\}.$$

Definimos

$$a + b := \sup(A + B). \tag{5.1}$$

Para $a, b \in (0, +\infty)$, sejam

$$A_+ := (0, a) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, 0 < x < a\},$$
$$B_+ := (0, b) \cap \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, 0 < x < b\}.$$

Ponhamos

$$A_+ \cdot B_+ := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = rs,\ r \in A_+,\ s \in B_+\},$$
$$1/A_+ := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = 1/r,\ r \in A_+\}.$$

Definimos

$$a \cdot b := \sup(A_+ \cdot B_+) \tag{5.2}$$
$$1/a := \inf 1/A_+ \tag{5.3}$$

Para $a, b \in \mathbb{R}$, definimos

$$a - b := a + (-b), \tag{5.4}$$
$$0 \cdot a = a \cdot 0 := 0, \tag{5.5}$$

e, para $a, b \in (0, +\infty)$,

$$a \cdot (-b) = (-a) \cdot b := -(a \cdot b), \tag{5.6}$$
$$(-a) \cdot (-b) := a \cdot b, \tag{5.7}$$
$$1/(-a) := -(1/a). \tag{5.8}$$

Se $b \neq 0$, definimos

$$a/b := a \cdot (1/b). \tag{5.9}$$

Na definição anterior, observe que os conjuntos $A+B$ e $A_+ \cdot B_+$ são não-vazios e limitados superiormente, portanto, pelo Teorema 5.1, os supremos nas definições de $a+b$ e $a \cdot b$ existem. Observe também que o conjunto $1/A_+ := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = 1/r,\ r \in A_+\}$ não é limitado superiormente, mas é limitado inferiormente (por quê?): a existência do ínfimo é garantida pelo Teorema 5.1.

Os quatro resultados seguintes se destinam, em particular, a mostrar que a Definição 5.1 é coerente com (a), (b), (c) e (d) da Definição 4.3.

Teorema 5.2
As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, dadas pela Definição 5.1, coincidem com as operações correspondentes em $\mathbb{Q}$ quando $a, b \in \mathbb{Q}$. Isso confirma (a) da Definição 4.3.

Prova: A afirmação segue imediatamente da densidade de $\mathbb{Q}$ e das definições para $a+b$ e $a \cdot b$ na Definição 5.1, já que, nesse caso, $A+B = (-\infty, a+b) \cap \mathbb{Q}$ e $A_+ \cdot B_+ = (-\infty, ab) \cap \mathbb{Q}$, como é fácil constatar.

□

Teorema 5.3
Se $r \in \mathbb{Q}$ e $B \subset \mathbb{Q}$, B não-vazio e limitado superiormente, então

$$r + \sup B = (\sup B) + r = \sup(B + r). \tag{5.10}$$

Prova: Observe inicialmente que tanto $r + \sup B$ como $(\sup B) + r$ são cotas superiores de $B + r$. Além disso, se $\beta < r + \sup B$, então existe $s \in \mathbb{Q}$ com $\beta < s < r + \sup B$, pela densidade de $\mathbb{Q}$. Como, $s - r < \sup B$ existe $t \in B$ tal que $s - r < t$. Logo, $\beta < s < r + t$ e $r + t \in r + B$, donde β não é cota superior de $r + B$, se $\beta < r + \sup B$. Da mesma forma, β não é cota superior de $r + B$ se $\beta < (\sup B) + r$. Concluímos que vale (5.10).

□

Teorema 5.4
Se $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, $B \subset \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$, B não é vazio e é limitado superiormente, então

$$r \cdot \sup B = (\sup B) \cdot r = \sup(r \cdot B), \tag{5.11}$$

onde

$$r \cdot B := \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = rs, \text{ para algum } s \in B\}.$$

Decorre daí, em particular, a confirmação de (b) da Definição 4.3.

Prova: A primeira igualdade em (5.11) decorre da própria Definição 5.1, já que se $\tilde{A}_+ := (0, r) \cap \mathbb{Q}$ e $\tilde{B}_+ := (0, \sup B) \cap \mathbb{Q}$, então, claramente,

$$\tilde{A}_+ \cdot \tilde{B}_+ = \tilde{B}_+ \cdot \tilde{A}_+ = \{x \in \mathbb{Q} \,:\, x = rs,\ r \in \tilde{A}_+,\ s \in \tilde{B}_+\},$$

e $r \cdot \sup B = \sup(\tilde{A}_+ \cdot \tilde{B}_+)$ ao passo que $(\sup B) \cdot r = \sup(\tilde{B}_+ \cdot \tilde{A}_+)$.

Provemos a segunda igualdade em (5.11). Primeiro, notemos que $r \cdot \sup B$ é cota superior de $r \cdot B$. De fato, se $x \in r \cdot B$, então $x = rs$ para algum $s \in B$. Como $B \subset \tilde{B}_+$ e $r = \sup \tilde{A}_+$, segue que $x \leq r \cdot \sup B$.

Façamos $\alpha := r \cdot \sup B$. Dado qualquer $\beta < \alpha$ com $\beta > 0$, temos que existe $\xi \in \mathbb{Q}$ com $\beta < \xi < \alpha$. Mas então existe $\xi' \in \tilde{A}_+ \cdot \tilde{B}_+$ tal que $\xi < \xi' < \alpha$. Em particular, $\xi' = r's'$ onde $r' < r$ e $s' < \sup B$. Logo, $\xi' < rs$, para algum $s \in B$. Como $\beta < \xi' < rs$, com $rs \in r \cdot B$, segue que β não é cota superior de $r \cdot B$. Portanto, $\alpha = \sup(r \cdot B)$, o que prova (5.11).

Se $r = 10^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e $B = (0, x) \cap \mathbb{Q}$ para um dado número real $x > 0$, a relação (5.11) nos dá

$$10^k \cdot x = \sup(10^k \cdot B).$$

Seja $x = a_0 \bullet a_1 a_2 a_3 \ldots$. Se $r \in B$, então existe $m \in \mathbb{N}$, com $m > k$, tal que $r < a_0 \bullet a_1 a_2 \ldots a_m < x$. Logo, $10^k r \in 10^k \cdot B$ e

$$10^k r < a_0 a_1 \ldots a_k \bullet a_{k+1} \ldots a_m < a_0 a_1 \ldots a_k \bullet a_{k+1} \ldots a_m a_{m+1} \ldots,$$

onde $a_0 a_1 \ldots a_k$ representa o inteiro $N = a_0 \cdot 10^k + a_1 \cdot 10^{k-1} + \cdots + a_k$. Logo, $a_0 a_1 \ldots a_k \bullet a_{k+1} a_{k+2} \ldots$ é uma cota superior de $10^k \cdot B$.

Por outro lado, é fácil ver que se $\beta < \alpha := a_0 a_1 \ldots a_k \bullet a_{k+1} a_{k+2} \ldots$, então $\beta < a_0 a_1 \ldots a_k \bullet a_{k+1} \ldots a_m = 10^k a_0 \bullet a_1 a_2 \ldots a_m$ para algum $m \in \mathbb{N}$. Como $10^k a_0 \bullet a_1 a_2 \ldots a_m \in 10^k \cdot B$, então β não é cota superior de $10^k \cdot B$. Logo, $\alpha = \sup(10^k \cdot B) = 10^k \cdot x$, o que confirma (b) da Definição 4.3.

□

Teorema 5.5

A Definição 5.1 também é coerente com (d) da Definição 4.3.

Prova: Suponhamos a e b ambos positivos com representações decimais coincidindo a partir de um certo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sem perda de generalidade, apenas para simplificar notação, tomemos $k = 1$ e suponhamos também que $a > b$:

$$a = a_0 \bullet a_1 a_2 \ldots a_k \ldots, b = b_0 \bullet a_1 a_2 \ldots a_k \ldots,$$

e, portanto, $a_0 > b_0$. Devemos provar que $a - b = a_0 - b_0$. Seja $A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $\mathcal{B} = (b, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ e $A - \mathcal{B} = A + (-\mathcal{B})$, isto é,

$$A - \mathcal{B} = \{x \in \mathbb{Q} : x = r + s,\ r < a,\ s < -b\}.$$

Temos

$$a - b = a + (-b) = \sup(A - \mathcal{B}).$$

Consideremos as sucessões de elementos de $\mathbb{Q}$, $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots < a$ e $s_1 < s_2 < \cdots < s_n < \cdots < -b$, dadas por

$$\begin{array}{ll}
r_1 := a_0 \bullet a_1, & s_1 := -b_0 \bullet (a_1 + 1), \\
r_2 := a_0 \bullet a_1 a_2, & s_2 := -b_0 \bullet a_1 (a_2 + 1), \\
r_3 := a_0 \bullet a_1 a_2 a_3, & s_3 := -b_0 \bullet a_1 a_2 (a_3 + 1), \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
r_n := a_0 \bullet a_1 a_2 \dots a_n, & s_n = -b_0 \bullet a_1 a_2 \dots (a_n + 1) \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\ \dots,
\end{array}$$

onde adotamos a convenção que, quando $a_k = 9$, a representação decimal de s_k terminando com $a_k + 1$ deve ser substituída pela representação decimal correta. Essa, como sabemos, é obtida pela regra que manda pôr 0 na k-ésima casa decimal e somar 1 à casa decimal imediatamente anterior, procedendo dessa forma até a primeira casa decimal anterior à k-ésima cujo algarismo correspondente seja menor que 9 ou, se não existir tal casa, concluir o processo subtraindo-se 1 ao inteiro negativo $-b_0$.

Dado $r \in A$ qualquer, é possível encontrar $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $r < r_n < a$ para todo $n > n_1$ (por quê?). Da mesma forma, dado qualquer $s \in -\mathcal{B}$, é possível encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $s < s_n < -b$ para todo $n > n_2$. Assim, dado qualquer $x \in A - \mathcal{B}$, $x = r + s$, com $r \in A$, $s \in -\mathcal{B}$, e, portanto, é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ (tome $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$) tal que $x < r_n + s_n < a - b$ para todo $n > n_0$. Assim, $a - b = \sup(R + S)$, onde $R + S := \{r_1 + s_1, r_2 + s_2, r_3 + s_3, \dots\}$. Agora, verificamos facilmente que

$$r_n + s_n = (a_0 - b_0 - 1) \bullet 999 \dots 9000 \dots,$$

onde todas as casas decimais à direita do ponto decimal, até a n-ésima, são iguais a 9 e todas as seguintes são iguais a 0. Daí segue que

$$a - b = a_0 - b_0.$$

De fato, $a_0 - b_0$ é uma cota superior de $R + S$. Além disso, se $y < a_0 - b_0$, então, pela densidade de $\mathbb{Q}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ com $y < q < a_0 - b_0$, e, usando a representação decimal de q, deduzimos facilmente que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $q < r_n + s_n$ para todo $n > n_0$. Logo, se $y < a_0 - b_0$, y não é cota superior de $R + S$, e, portanto,

$$a_0 - b_0 = \sup(R + S) = a - b,$$

como queríamos mostrar.

$\square$

Antes de passarmos à verificação das propriedades das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, introduzidas na Definição 5.1, vamos enunciar um resultado que estabelece um fato conhecido como Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$, cuja demonstração decorre diretamente do Teorema 5.4.

Teorema 5.6 (Propriedade Arquimediana)
Se $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, e $x > 0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$nx > y.$$

Prova: Claramente, podemos supor $y > 0$. Seja $y = b_0{\bullet} b_1 b_2 b_3 \dots$ e $x = a_0{\bullet} a_1 a_2 a_3 \dots$. Como, pelo Teorema 5.4, $10^k x = a_0 a_1 a_2 \dots a_k{\bullet} a_{k+1} a_{k+2} \dots$, basta tomar $n = 10^k$, com k grande o suficiente, de modo que $a_0 a_1 a_2 \dots a_k \geq b_0 + 1 > y$, o que sempre é possível.

$\square$

Propriedades Algébricas e Caracterização dos Reais

O resultado seguinte estabelece as propriedades fundamentais das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{R}$, definidas anteriormente.

Teorema 5.7
As operações de adição $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e multiplicação $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ definidas conforme a Definição 5.1 satisfazem as seguintes propriedades:

(A) Propriedades da Adição

(A1) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, então $a + b \in \mathbb{R}$.

(A2) Comutatividade da adição: $a + b = b + a$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(A3) Associatividade da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(A4) $\mathbb{R}$ contém um elemento 0 tal que $0 + a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(A5) Para todo $a \in \mathbb{R}$ existe um elemento $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a+(-a) = 0$.

(M) Propriedades da Multiplicação

(M1) Se $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, então o produto $a \cdot b \in \mathbb{R}$.

(M2) Comutatividade da multiplicação: $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

(M3) Associatividade da multiplicação: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (a \cdot c)$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(M4) $\mathbb{R}$ contém um elemento $1 \neq 0$ tal que $1 \cdot a = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

(M5) Para todo $a \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, existe um elemento $1/a \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot (1/a) = 1$.

(D) A Lei Distributiva

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Um conjunto C dotado de operações $+$ e $\cdot$ satisfazendo **(A)**, **(M)** e **(D)** é uma estrutura algébrica chamada **corpo**. Em particular, $\mathbb{R}$ é um corpo.

Prova: As propriedades (A1) e (M1) seguem imediatamente do Teorema do Supremo. Vamos provar (A3) e (M3); as demais serão deixadas como exercício.

(A3) Devemos mostrar que $a + (b + c) = (a + b) + c$ para todos $a, b, c \in \mathbb{R}$. Consideremos os conjuntos A e B dados na Definição 5.1 e definimos $C = (-\infty, a + b) \cap \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que

$$(a + b) + c = \sup(A + B + C) = a + (b + c) \text{ para todos } a, b, c \in \mathbb{R}. \quad (5.12)$$

Observe que os conjuntos A, B e C são subconjuntos de $\mathbb{Q}$ e, como a adição em $\mathbb{Q}$ é associativa, podemos escrever $(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C$. Mostremos, então, a primeira igualdade em (5.12). Temos de provar que

$$\sup(\sup(A + B) + C) = \sup(A + B + C).$$

Denotemos $\alpha := \sup(\sup(A + B) + C)$. Para todo $x \in A + B + C$, temos $x = r + s + t$, com $r \in A$, $s \in B$ e $t \in C$. Em particular, $x = (r + s) + t \leq \sup(A + B) + t \leq \alpha$; portanto, α é uma cota superior de $A + B + C$.

Suponhamos que $\beta \in \mathbb{R}$ e $\beta < \alpha$. Vamos mostrar que β não é cota superior de $A + B + C$. Com efeito, pelo Teorema 4.5, existe um $p \in \mathbb{Q}$ satisfazendo $\beta < p < \alpha$. Como $\alpha = \sup(\sup(A+B)+C)$, pelas propriedades do supremo, existe um $t \in C$ tal que $p < \sup(A+B)+t = \sup(A+B+t)$, onde usamos o Teorema5.3 na última igualdade. Pelas propriedades do supremo, existem $r \in A$, $s \in B$ tais que $p < r+s+t$, e $r+s+t \in A+B+C$. Como, $\beta < p < r+s+t$, concluímos que β não é cota superior de $A+B+C$, se $\beta < \sup(\sup(A+B)+C)$. Portanto, fica provado que $\sup(\sup(A+B)+C) = \sup(A+B+C)$.

Da mesma forma, verificamos que $\sup(A+\sup(B+C))$ é cota superior de $A+B+C$ e, se $\beta < \sup(A+\sup(B+C))$, então β não é cota superior de $A+B+C$. Segue desses fatos que vale $\sup(A+\sup(B+C)) = \sup(A+B+C)$, o que conclui a prova de (5.12). Em particular, vale (A3).

(M3) O caso em que $0 \in \{a, b, c\}$ é imediato. Assim, basta analisar o caso $0 \notin \{a, b, c\}$. Mais ainda, basta considerar o caso em que a, b e c são positivos, em vista de (5.6) e (5.7). Neste caso, a demonstração é totalmente análoga à de (A3).

$\square$

Definição 5.2

1. Um **corpo ordenado** é um corpo C, com relação a operações $+$ e $\cdot$ nele definidas, o qual também é um conjunto ordenado, segundo uma relação de ordem $<$ nele definida, tal que:

   (i) se $x, y, z \in C$ e $y < z$ então $x + y < x + z$,

   (ii) se $x, y \in C$, $x > 0$ e $y > 0$, então $xy > 0$.

   Se $x > 0$, chamamos x **positivo**, e se $x < 0$, chamamos x **negativo**.

2. Um corpo C que satisfaz a propriedade do supremo é dito um corpo **completo**.

Teorema 5.8
$\mathbb{R}$ é um corpo ordenado completo.

Prova: Basta provar que as operações $+$, $\cdot$, e a ordem $<$ de $\mathbb{R}$ satisfazem (i) e (ii) na Definição 5.2.

(i) Se $y < z$, então $A := (-\infty, y) \cap \mathbb{Q} \subsetneq B := (-\infty, z) \cap \mathbb{Q}$. Seja $C := (-\infty, x) \cap \mathbb{Q}$. Claramente, temos $A + C \subsetneq B + C$. Mais ainda, vamos mostrar que a densidade de $\mathbb{Q}$ implica que existe $r \in B + C$ tal que $r > x + y$. Basta tomar $r \in \mathbb{Q}$ tal que $x + y < r < x + z$. Como $r < x + z$, r não é cota superior de $B + C$ e, portanto, existem $p \in B$ e $q \in C$ tal que $r < p + q$. Logo, $r - p < q < x$, donde $r - p \in C$ e, então, $r = p + (r - p) \in B + C$. Segue daí que

$$x + y = \sup(A + C) < \sup(B + C) = x + z.$$

(ii) Segue imediatamente da definição.

$\square$

Notação: No que segue, em vez de $x \cdot y$ vamos simplesmente escrever xy. Também vamos denotar $x^2 := xx$, $x^3 := xxx$. De modo geral, podemos definir, por indução, $x^1 = x$ e $x^{n+1} = xx^n$.

Uma vez estabelecida a caracterização de $\mathbb{R}$ como corpo ordenado completo, é perfeitamente possível desenvolver toda a Análise Real sem jamais precisar fazer qualquer referência à nossa definição de números reais como decimais; esse será, naturalmente, nosso procedimento daqui para diante. De fato, embora não venhamos a fazê-lo, pode-se provar que, dados dois corpos ordenados quaisquer C_1 e C_2, então eles são isomorfos. Com isso, queremos dizer que existe uma bijeção ϕ de C_1 sobre C_2, tal que $\phi(x+y) = \phi(x)+\phi(x)$ e $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Em particular, pode-se mostrar facilmente que para um tal isomorfismo vale $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, $\phi(-x) = -\phi(x)$, $\phi(1/x) = 1/\phi(x)$, se $x \neq 0$, e $\phi(x) > 0$ se $x > 0$.

Mais ainda, decorre também dessas observações que todo corpo ordenado completo contém $\mathbb{Q}$ como um subcorpo; isto é, contém um subcorpo isomorfo a $\mathbb{Q}$, que, para todos os efeitos, podemos perfeitamente considerar como sendo o próprio $\mathbb{Q}$.

Logo, o que importa não é a forma que os elementos de $\mathbb{R}$ têm individualmente, mas o modo como esses elementos se comportam em face das operações $+$ e $\cdot$, da relação de ordem $<$ e dos processos aproximativos garantidos pela propriedade do supremo!

Existência de $\sqrt{2}$

Mostramos, na aula passada, que a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$. Vamos mostrar, a seguir, que a mesma equação possui solução em $\mathbb{R}$.

Teorema 5.9
Existe um número real positivo x tal que $x^2 = 2$.

Prova: Lembremos que $[0, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Seja $A := \{y \in [0, +\infty) : y^2 < 2\}$. Como $1 \in A$, ele não é vazio. Outrossim, A é limitado superiormente, pois se $z > 2$, então $z^2 > 4$, de modo que $z \notin A$. Portanto, a propriedade do supremo implica A ter um supremo em $\mathbb{R}$. Seja $x := \sup A$. Observe que $x > 1$. Mostraremos que $x^2 = 2$, descartando as duas outras possibilidades: $x < 2$ e $x > 2$.

Primeiramente, suponhamos $x < 2$. Mostraremos que essa hipótese nos permite achar $n \in \mathbb{N}$ tal que $x + 1/n \in A$, contradizendo o fato de que, sendo $x = \sup A$, x é cota superior de A. Para saber como escolher tal n, observemos que $1/n^2 \leq 1/n$, de modo que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 = x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \leq x^2 + \frac{1}{n}(2x+1). \tag{5.13}$$

Portanto, se pudermos escolher n, de modo que

$$\frac{1}{n}(2x+1) < 2 - x^2, \tag{5.14}$$

então teremos $(x+1/n)^2 < x^2 + (2-x^2) = 2$. Por hipótese, temos $2 - x^2 > 0$, de modo que $(2-x^2)/(2x+1) > 0$. Logo, a Propriedade Aquimediana nos permite encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}. \tag{5.15}$$

Podemos agora inverter a ordem dos passos e, começando por (5.15), obtemos (5.14), que utilizamos em (5.13), para concluir que $(x+1/n)^2 < 2$, isto é, $x + 1/n \in A$, o que nos dá a contradição desejada. Portanto, não é possível termos $x^2 < 2$.

Agora suponhamos $x^2 > 2$. Vamos procurar encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $(x - 1/m)^2 > 2$, o que implica $(x-1/m)^2 > y^2$ para todo $y \in A$. Usaremos o fato de que, se a, b são números reais positivos, e $a^2 < b^2$ então $a < b$ (veja o Exercício 13). Assim, concluímos que $x - 1/m$ é cota superior de A e é menor que x, contradizendo o fato de que $x = \sup A$.

Assim, observemos que

$$\left(x - \frac{1}{m}\right)^2 = x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{1}{m^2} > x^2 - \frac{2x}{m}. \tag{5.16}$$

Logo, se pudermos escolher m, de modo que

$$\frac{2x}{m} < x^2 - 2, \tag{5.17}$$

então teremos $(x-1/m)^2 > x^2-(x^2-2) = 2$. Agora, por hipótese, temos $x^2-2 > 0$, de modo que $(x^2-2)/2x > 0$. Logo, pela Propriedade Arquimediana, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m} < \frac{x^2-2}{2x}. \tag{5.18}$$

De novo, podemos inverter a ordem dos passos acima, começando com (5.18), obtendo (5.17) e usando este último em (5.16). Logo, a hipótese $x^2 > 2$ também nos leva a uma contradição.

Como as possibilidades $x^2 > 2$ e $x^2 < 2$ estão excluídas, necessariamente vale $x^2 = 2$.

□

A Propriedade dos Intervalos Encaixados

Começamos essa seção conclusiva de nossa quinta aula com um resultado simples que caracteriza os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que são intervalos.

Teorema 5.10 (Caracterização dos Intervalos)
Seja S um subconjunto de $\mathbb{R}$ que contém, ao menos, dois pontos. Então, S é um intervalo se, e somente se, tem a propriedade

$$\text{se } x, y \in S \text{ e } x < y, \text{ então } [x, y] \subset S. \tag{5.19}$$

Prova: O fato de que todo intervalo de $\mathbb{R}$ possui tal propriedade segue da própria descrição dos 8 possíveis tipos de intervalo além do próprio $\mathbb{R}$, que descrevemos na aula passada.

Vamos provar que se S satisfaz (5.19) então S é um intervalo. Existem quatro casos possíveis: (i) S é limitado; (ii) S é limitado superiormente mas não inferiormente; (iii) S é limitado inferiormente mas não superiormente; (iv) S não é limitado nem superiormente, nem inferiormente.

Caso (i): Seja $a := \inf S$ e $b := \sup S$. Então, $S \subset [a, b]$ e mostraremos que $(a, b) \subset S$. Se $a < z < b$, então z não é uma cota inferior de S, portanto, deve existir $x \in S$ com $x < z$. Também é verdade que z não é uma cota superior de S; portanto, deve existir $y \in S$ com $z < y$. Conseqüentemente, $z \in [x, y]$ e (5.19) implica $z \in S$. Como z é abitrário, concluímos que $(a, b) \subset S$. Agora, se $a \in S$ e $b \in S$ então $S = [a, b]$. Se $a \notin S$ e $b \notin S$, então $S = (a, b)$. As outras possibilidades nos dão $S = [a, b)$ e $S = (a, b]$.

Caso (ii): Se $b := \sup S$. Então, $S \subset (-\infty, b]$, e mostraremos que $(-\infty, b) \subset S$. De fato, se $z < b$, então existem $x, y \in S$ tais que $z \in [x, y] \subset S$

(por quê?). Portanto, $(-\infty, b) \subset S$. Se $b \in S$, então $S = (-\infty, b]$; se $b \notin S$, então $S = (-\infty, b)$.

Os casos (iii) e (iv) são semelhantes e serão deixados como exercício.

□

Dizemos que uma seqüência de intervalos I_n, $n \in \mathbb{N}$, é **encaixada** se

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \cdots .$$

Teorema 5.11 (Propriedade dos Intervalos Encaixados)
Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência encaixada de intervalos fechados e limitados. Então, existe um número $\xi \in \mathbb{R}$ tal que $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: Como os intervalos são encaixados, temos $I_n \subset I_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo $a_n \leq b_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, o conjunto não vazio $A := \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ é limitado superiormente e, pela propriedade do supremo, existe $\xi = \sup A$. Por definição de supremo, temos $a_n \leq \xi$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que $\xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, b_n é uma cota superior de A. Fixemos $n \in \mathbb{N}$. Temos dois casos a considerar: (i) $k \geq n$; (ii) $k < n$. Se $k \geq n$, então $I_n \supset I_k$ e, portanto, temos $a_k \leq b_k \leq b_n$. Se $k < n$, então, como $I_k \supset I_n$, temos $a_k \leq a_n \leq b_n$. Portanto, concluímos que $a_k \leq b_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de modo que b_n é uma cota superior de A, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, temos $a_n \leq \xi \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $\xi \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 5.12
Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência encaixada de intervalos fechados e limitados, tais que os comprimentos $b_n - a_n$ de I_n satisfazem

$$\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0.$$

Então, o número ξ contido em I_n para todo $n \in \mathbb{N}$ é único.

Prova: Se $\eta := \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, então um argumento semelhante ao da prova do Teorema 5.11 mostra que $a_n \leq \eta$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, portanto, que $\xi \leq \eta$. De fato, não é difícil mostrar que $x \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se, e somente se, $\xi \leq x \leq \eta$ (veja Exercício 17). Se tivermos $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, então, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq \eta - \xi \leq b_m - a_m < \varepsilon$. Como isso vale para todo $\varepsilon > 0$, segue que $\eta - \xi = 0$ (por quê? veja o

Exercício 16). Portanto, concluímos que $\xi = \eta$ é o único ponto que pertence a I_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exercícios 5.1

1. Use o Teorema 5.3 para provar que se x é número real positivo, com $x = a_0 \bullet a_1 a_2 \dots$, e $y = b_0 \bullet 000 \dots$, então $x + y = (a_0 + b_0) \bullet a_1 a_2 \dots$. Aqui, como no texto da aula, $a_0, b_0 \in \mathbb{N}$ e $a_1, a_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$; em particular, $y = b_0 \in \mathbb{N}$.

2. Prove (A2) e (M2) do Teorema 5.7.

   (Dica: Para (A2), defina $A = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$, $B = (-\infty, b) \cap \mathbb{Q}$ e $C = (\infty, a + b) \cap \mathbb{Q}$. Mostre que $C = A + B$. Para (M2), basta fazer o caso em que a e b são positivos. Defina $A_+ = (0, a) \cap \mathbb{Q}$, $B_+ = (0, b) \cap \mathbb{Q}$ e $C_+ = (0, ab) \cap \mathbb{Q}$. Mostre que $C_+ = A_+ \cdot B_+$.)

3. Prove (M3) do Teorema 5.7.

4. Prove (A4) do Teorema 5.7.

5. Prove (M4) do Teorema 5.7.

6. Prove (A5) do Teorema 5.7.

7. Prove (M5) do Teorema 5.7.

8. Prove **(D)** do Teorema 5.7. Faça primeiro o caso mais simples, em que a, b e c são positivos.

9. Prove que as propriedades (A1)-(A5) da adição num corpo qualquer C implicam as seguintes proposições:

   (a) Se $x + y = x + z$, então $y = z$;

   (b) Se $x + y = x$, então $y = 0$;

   (c) Se $x + y = 0$, então $y = -x$;

   (d) $-(-x) = x$.

A proposição (a) é a lei do cancelamento. Observe que (b) estabelece a unicidade do elemento neutro da adição, cuja existência é dada por (A4), e (c), a unicidade do simétrico aditivo que existe por (A5).

(Dica: Para provar (a), por exemplo, os axiomas **(A)** nos dão

$$\begin{aligned} y = 0 + y &= (-x + x) + y = -x + (x + y) \\ &= -x + (x + z) = (-x + x) + z = 0 + z = z.) \end{aligned}$$

10. Prove que as propriedades (M1)-(M5) da multiplicação num corpo qualquer C implicam as seguintes proposições:

    (a) Se $x \neq 0$ e $xy = xz$, então $y = z$;

    (b) Se $x \neq 0$ e $xy = x$, então $y = 1$;

    (c) Se $x \neq 0$ e $xy = 1$, então $y = 1/x$;

    (d) Se $x \neq 0$ então $1/(1/x) = x$.

11. Prove que os axiomas de corpo (**(A)**, **(M)** e **(D)**) implicam as seguintes afirmações, para $x, y, z \in C$:

    (a) $0x = 0$;

    (b) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$, então $xy \neq 0$;

    (c) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$;

    (d) $(-x)(-y) = xy$.

    (Dica: (a) é conseqüência de $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. Prove (b) por contradição usando os inversos $1/x$ e $1/y$. Use a lei distributiva para provar (c) fazendo $(-x)y + xy = \dots$. (d) é conseqüência de (c).)

12. Mostre que num corpo ordenado qualquer vale $xy > 0$ se, e somente se, $x > 0$ e $y > 0$ ou $x < 0$ e $y < 0$.

13. Mostre que se a, b são números reais positivos e $a^2 < b^2$, então $a < b$.

    (Dica: Use $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.)

14. Use a Propriedade Arquimediana para mostrar que $\inf\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

15. Complete a prova do Teorema 5.10, fazendo os casos (iii) e (iv).

16. Mostre que se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 \leq a < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, então $a = 0$.

17. Com a notação das provas dos Teoremas 5.11 e 5.12, mostre que $\eta \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Mostre também que $[\xi, \eta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Prossiga: Cortes de Dedekind

Nesta seção, vamos provar o Teorema 5.1 através do método de Dedekind que recorre ao auxílio dos chamados cortes, cuja definição damos a seguir. Na discussão seguinte sobre cortes, reproduziremos com leves modificações os três primeiros passos do resumo contido no livro de W. Rudin, "Princípios de Análise Matemática", Ao Livro Tecnico, Rio de Janeiro, 1971.

Definição 5.3
Chamamos **corte** qualquer conjunto $\alpha \subset \mathbb{Q}$ com as seguintes propriedades:

(i) α não é vazio e $\alpha \neq \mathbb{Q}$;

(ii) Se $p \in \alpha$, $q \in \mathbb{Q}$, e $q < p$, então $q \in \alpha$;

(iii) Se $p \in \alpha$, então $p < r$ para algum $r \in \alpha$.

Usaremos as letras p, q, r, ... para denotar números racionais, e α, β, γ, ... para denotar cortes.

Observemos que (iii) simplesmente diz que α não tem maior elemento (ou máximo); (ii) implica dois fatos:

- Se $p \in \alpha$ e $q \notin \alpha$, então $p < q$.
- Se $r \notin \alpha$ e $r < s$, então $s \notin \alpha$.

Definição 5.4
Denotamos por $\mathcal{R}$ o conjunto dos cortes. Em $\mathcal{R}$, definimos a relação "$\alpha < \beta$" como significando: α é um subconjunto próprio de β.

Lema 5.1
A relação $<$ em $\mathcal{R}$ é uma ordem. Em particular, $\mathcal{R}$ é um conjunto ordenado.

Prova: Verifiquemos os requisitos da Definição 4.5. Se $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, é claro que $\alpha < \gamma$, já que um subconjunto próprio de um subconjunto próprio é um subconjunto próprio. Também é claro que, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, vale, no máximo, uma das três alternativas: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$. Para mostrar que pelo menos uma vale, suponhamos que as duas primeiras sejam falsas. Então, α não é subconjunto de β. Logo, existe um $p \in \alpha$ com $p \notin \beta$. Se $q \in \beta$, segue que $q < p$ (já que $p \notin \beta$), e, então, $q \in \alpha$, por (ii). Logo, $\beta \subset \alpha$. Como $\beta \neq \alpha$, concluímos: $b < \alpha$.

□

Lema 5.2
O conjunto ordenado $\mathcal{R}$ tem a propriedade do supremo.

Prova: Seja A um subconjunto não-vazio de $\mathcal{R}$, e suponhamos que $\beta \in \mathcal{R}$ é uma cota superior de A. Definimos γ como a união de todos os $\alpha \in A$. Provaremos que $\gamma \in \mathcal{R}$ e que $\gamma = \sup A$.

Inicialmente, provemos que γ é um corte. Como A não é vazio, existe um $\alpha_0 \in A$. Esse α_0 não é vazio. Como $\alpha_0 \subset \gamma$, γ não é vazio. Em seguida, temos $\gamma \subset \beta$, já que $\alpha \subset \beta$ para todo $\alpha \in A$, e, portanto, $\gamma \neq \mathbb{Q}$. Logo, γ satisfaz a condição (i) da Definição 5.3. Para provar (ii) e (iii), tomemos $p \in \gamma$. Então, $p \in \alpha_1$ para algum $\alpha_1 \in A$. Se $q < p$, então $q \in \alpha_1$; logo, $q \in \gamma$; isto prova (ii). Se $r \in \alpha_1$ é escolhido de modo que $r > p$, vemos que $r \in \gamma$, já que $\alpha_1 \subset \gamma$, e, portanto, γ satisfaz (iii). Assim, $\gamma \in \mathcal{R}$.

Provemos agora que $\gamma = \sup A$. Claramente, $\alpha \leq \gamma$ para todo $\alpha \in A$. Suponhamos $\delta < \gamma$. Então, existe um $s \in \gamma$ tal que $s \notin \delta$. Como $s \in \gamma$, $s \in \alpha$ para algum $\alpha \in A$. Logo $\delta < \alpha$, e δ não é uma cota superior de A. Isso nos dá o resultado desejado: $\gamma = \sup A$.

□

Nosso objetivo agora será mostrar que existe uma identificação natural entre o conjunto ordenado $\mathcal{R}$, que, pelo Lema 5.2, tem a propriedade do supremo, e o conjunto ordenado dos números reais $\mathbb{R}$ (i.e., decimais dotados da ordem dada na Definição 4.7).

Definição 5.5
Dados dois conjuntos ordenados C_1 e C_2, dizemos que uma função $\phi : C_1 \to C_2$ preserva a ordem se, para quaisquer $x, y \in C_1$ vale: $x < y$ implica $\phi(x) < \phi(y)$.

Lema 5.3
Sejam C_1 e C_2 dois conjuntos ordenados e $\phi : C_1 \to C_2$ uma bijeção de C_1 sobre C_2 preservando ordem. Então, C_1 tem a propriedade do supremo se, e somente se, C_2 tem a propriedade do supremo.

Prova: Primeiramente, notemos que a inversa $\phi^{-1} : C_2 \to C_1$ também preserva ordem. Isto é claro, uma vez que, denotando também por ϕ o gráfico de ϕ, para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \phi$, temos $x_1 < x_2$ implica $y_1 < y_2$. Logo, se $(y_1, x_1), (y_2, x_2) \in \phi^{-1}$ e $y_1 < y_2$, então, devemos ter $x_1 < x_2$, pois, do contrário, teríamos $x_1 \geq x_2$, o que implicaria $y_1 \geq y_2$, em contradição com a hipótese $y_1 < y_2$.

Portanto, basta provarmos que, se C_1 tem a propriedade do supremo, então C_2 também a tem. Suponhamos então que C_1 tem a propriedade do supremo e seja $A \subset C_2$ um conjunto não-vazio e β uma cota superior de A. Então, $\phi^{-1}(A) \subset C_1$ não é vazio e, como ϕ^{-1} preserva ordem, $\phi^{-1}(\beta)$ é cota superior de $\phi^{-1}(A)$. Logo, como C_1 tem a propriedade do supremo, existe $\alpha = \sup \phi^{-1}(A)$. Afirmamos que $\phi(\alpha) = \sup A$. De fato, $\phi(\alpha)$ é claramente uma cota superior de A, já que ϕ preserva ordem. Além disso, se $\gamma < \phi(\alpha)$, então, $\phi^{-1}(\gamma) < \alpha$; logo, $\phi^{-1}(\gamma)$ não é cota superior de $\phi^{-1}(A)$ e, portanto, $\gamma = \phi(\phi^{-1}(\gamma))$ não é cota superior de A. Logo, $\phi(a) = \sup A$.

□

Lema 5.4
Dada $a \in \mathbb{R}$, $a^* = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$ é um corte. Mais ainda, a aplicação $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$, com $\phi(a) = a^*$ é injetiva e preserva ordem.

Prova: Devemos verificar (i), (ii) e (iii) da Definição 5.3. Que a^* não é vazio segue do fato que, se a_0 é a parte inteira do decimal a, então, $a > 0$ implica $a_0 \in a^*$ e $a \leq 0$, $a_0 - 1 \in a^*$. Que $a^* \neq \mathbb{Q}$ segue do fato que $a_0 + 1 \notin a^*$. Logo, vale (i). A condição (ii) é imediata. A condição (iii) é conseqüência direta da densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$. O fato de que $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$ preserva ordem é claro, pois, se $a_1 < a_1$, $a_1^* \subset a_2^*$, o que também prova que ϕ é injetiva.

□

Através da injeção preservando ordem $a \mapsto a^*$, podemos considerar $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$. A prova do Teorema 5.1 estará concluída se mostrarmos que a aplicação $\phi : a \mapsto a^*$ é bijetiva. No que segue, vamos considerar $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}$ e, para todo $a \in \mathbb{R}$, vamos denotar também por a, em vez de a^*, o corte associado $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$.

Lema 5.5
$\mathcal{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[m, m+1]$.

Prova: Primeiramente, provemos que $\mathbb{N}$ não é limitado superiormente em $\mathcal{R}$. De fato, se $\mathbb{N}$ fosse limitado superiormente em $\mathcal{R}$, pela propriedade do supremo, existiria $\alpha = \sup\mathbb{N}$ em $\mathcal{R}$. Agora defina o conjunto $\alpha - 1 = \{q \in \mathbb{Q} : q = r - 1,\ r \in \alpha\}$. Não é difícil verificar que $\alpha - 1 \in \mathcal{R}$, tarefa que deixamos como exercício. Claramente, $\alpha - 1 < \alpha$ e, pelas propriedades do supremo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - 1 < m$. Verifica-se, facilmente, que daí segue que $\alpha < m + 1$, o que nos dá uma contradição.

Assim, dado qualquer $\alpha \in \mathcal{R}$, com $\alpha \geq 0$, o conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : n > \alpha\}$ não é vazio e, Pelo Princípio da Boa Ordenação, contém um mínimo m_α. Verificamos, então, facilmente, que $\alpha \in [m_\alpha - 1, m_\alpha]$.

Se $\alpha \in \mathcal{R} < 0$, defina $-\alpha = \{q \in \mathbb{Q} : \text{existe } r \notin \alpha,\ q < -r\}$. Verifica-se facilmente que $-\alpha$ é um corte e que, se $\alpha < 0$, $-a > 0$, tarefa que deixamos como exercício. Pelo que já foi provado, $-\alpha \in [m, m+1]$, para algum $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Então, verifica-se facilmente que $\alpha \in [-m-1, -m]$, o que conclui a demonstação.

□

Prova do Teorema 5.1: Vamos provar que $\phi : \mathbb{R} \to \mathcal{R}$, $\phi(a) = a^*$ é sobrejetiva. Dado $\alpha \in \mathcal{R}$, pelo Lema 5.5, existe $a_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $a_0 \leq \alpha < a_0 + 1$. Para simplificar vamos supor que $a_0 \geq 0$. Por indução, podemos facilmente definir $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, tais que

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} \leq \alpha < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n + 1}{10^n}. \qquad (5.20)$$

Seja $a \in \mathbb{R}$, $a = a_0{\bullet}a_1a_2\dots a_n\dots$. Afirmamos que $\alpha = a^* = (-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$.

Provemos primeiro que $\alpha \subset a^*$. Seja $q \in \alpha$. Como $q \notin q^*$ e, por (ii) da Definição 5.3, $q^* \subset \alpha$, vemos que q^* é subconjunto próprio de α, isto é, $q^* < \alpha$. Logo, q^* é um subconjunto próprio de α, isto é $q^* < \alpha$. Por (iii) da Definição 5.3, existe $r \in \alpha$ tal que $q < r$. Claramente, existe n tal que $10^n(r - q) > 1$, isto é, $r - q > 1/10^n$. Logo, ou $r \leq a_0$ e, neste caso, $q < a_0$, ou existe n tal que

$$q < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n} \leq r,$$

com $b_n < a_n$. Portanto, $q \in \alpha^*$. Concluímos que $\alpha \subset a^*$.

Provemos agora que $a^* \subset \alpha$. Seja $q \in a^*$. Então, $q < a^*$ e, pela definição da ordem para os decimais dada pela Definição 4.7, ou $q < a_0$, ou existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$q < a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n},$$

com $b_n \leq a_n$. Assim, de (5.20) vemos que existe $r \in \mathbb{Q}$, com $r > q$ e $r^* \subset \alpha$. Daí decorre que $q \in \alpha$, donde concluímos que $a^* \subset \alpha$. Portanto, $\alpha = a^*$, como queríamos demonstrar.

$\square$