GABARITO DA AULA 12 DE MATEMÁTICA DISCRETA

1ª QUESTÃO:

1										
1	1									
1	2	1								
1	3	3	1							
1	4	6	4	1						
1	5	10	10	5	1					
1	6	15	20	15	6	1				
1	7	21	35	35	21	7	1			
1	8	28	56	70	56	28	8	1		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2ª QUESTÃO:

(a) $x = 7$ ou $x = 5$
(b) $x = 5$
(c) $x = 7/4$ ou $x = 13/4$

3ª QUESTÃO:

Utilizando a 3ª propriedade, sabemos que a soma dos elementos da linha 6 no triângulo de Pascal é $2^6 = 64$.
Porém, deste número temos que subtrair o valor de $C(6,0) = 1$.Daí , segue que:

$$C(n,1) + C(n,2) + C(n,3) + C(n,4) + C(n,5) + C(n,6) = 64 - C(n,0) =$$
$$= 64 - 1 = 63$$

4ª QUESTÃO:

A resposta desse problema é a soma dos elementos da 13ª diagonal: 233

5ª Questão

EXERCÍCIOS DE MD - MÓDULO 1 - Aula 12

2ª Questão:

a) $x = 7$ ou $x = 5$
b) $x = 5$
c) $x = \dfrac{7}{4}$ ou $x = \dfrac{13}{4}$

3ª Questão:

$n = 6$

4ª Questão:

233

5ª Questão

21

GABARITO DA AULA 13 DE MATEMÁTICA DISCRETA

1ª QUESTÃO:

(a) $(x+y)^6 = C(6,0)x^6 + C(6,1)x^5y + C(6,2)x^4y^2 + C(6,3)x^3y^3 + C(6,4)x^2y^4 +$
$+C(6,5)xy^5 + C(6,6)y^6 \Rightarrow$

$(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

(b) $(x+y)^{10} = C(10,0)x^{10} + C(10,1)x^9y + C(10,2)x^8y^2 + C(10,3)x^7y^3 +$
$+C(10,4)x^6y^4 + C(10,5)x^5y^5 + C(10,6)x^4y^6 + C(10,7)x^3y^7 + C(10,8)x^2y^8 +$
$+C(10,9)xy^9 + C(10,10)y^{10} \Rightarrow$

$(x+y)^{10} = x^{10} + 10x^9y + 45x^8y^2 + 120x^7y^3 + 210x^6y^4 + 252x^5y^5 + 210x^4y^6 +$
$+120x^3y^7 + 45x^2y^8 + 10xy^9 + y^{10}$

(c) $(y+3)^4 = C(4,0)y^4 + C(4,1)y^3 3 + C(4,2)y^2 3^2 + C(4,3)y3^3 + C(4,4)3^4 \Rightarrow$

$(y+3)^4 = y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81$

2ª QUESTÂO:

$(x-1)^6 = C(6,0)x^6 + C(6,1)x^5(-1) + C(6,2)x^4(-1)^2 + C(6,3)x^3(-1)^3 +$
$C(6,4)x^2(-1)^4 + +C(6,5)x(-1)^5 + C(6,6)(-1)^6 \Rightarrow$

$(x-1)^6 = C(6,0)x^6 - C(6,1)x^5 + C(6,2)x^4 - C(6,3)x^3 + C(6,4)x^2 - C(6,5)x +$
$+C(6,6) \Rightarrow$

$(x-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

3ª QUESTÃO:

Com base na 1ª questão,se substituirmos x por 1,obtemos:

$C(6,0)(-1)^6 + C(6,1)(-1)^5 + C(6,2)(-1)^4 + C(6,3)(-1)^3 + C(6,4)(-1)^2 +$
$+C(6,5)(-1) + C(6,6) =$
$= C(6,0) - C(6,1) + C(6,2) - C(6,3) + C(6,4) - C(6,5) + C(6,6) =$
$= 1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 =$
$= 0$

5ª QUESTÃO:

Na 1ª questão item (b),temos:

$(x+y)^{10} = C(10,0)x^{10}+C(10,1)x^9y+C(10,2)x^8y^2+C(10,3)x^7y^3+C(10,4)x^6y^4+$
$+C(10,5)x^5y^5 + C(10,6)x^4y^6 + C(10,7)x^3y^7 + C(10,8)x^2y^8 + C(10,9)xy^9 +$
$+C(10,10)y^{10}$

Cada parcela acima pode ser escrita como:

$C(10,r)x^{10-r}y^r = \frac{10!}{r!(10-r)!}x^{10-r}y^r, \quad 0 \leq r \leq 10$

Tomando $r = b$ e $10 - r = a$ temos que:

$\frac{10!}{a!b!}x^a y^b$ e além disso, $a + b = r + (10 - r) = 10$

6ª QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
2^n &= (1+1)^n \\
&= C(n,0)1^n + C(n,1)1^{n-1} + ... + C(n,n)1 \\
&= C(n,0) + C(n,1) + ... + C(n,n)
\end{aligned}
$$

7ª QUESTÃO:

(a) Basta tomarmos $x = y = 1$ para obter a soma dos coeficientes

$$(2+1)^5 = 3^5 = 243$$

(b) $\left(\frac{1}{2} - 3\right)^4 = \left(\frac{-5}{2}\right)^4 = \frac{625}{16}$

(c) $(3-5)^7 = (-2)^7 = -128$

(d) 0

8ª QUESTÃO:

Fazendo $x = y = 1$, segue que $(5)^m = 625 \Rightarrow m = 4$

9ª QUESTÃO:

(a) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 = x^5 + 5x^3 + 10x + 10\frac{1}{x} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^5}$

(b) $(\frac{x}{2} - \frac{4}{x^2})^5 = (\frac{x}{2})^5 + 5(\frac{x}{2})^4(\frac{-4}{x^2}) + 10(\frac{x}{2})^3(\frac{-4}{x^2})^2 + 10(\frac{x}{2})^2(\frac{-4}{x^2})^3 +$
$+5(\frac{x}{2})(\frac{-4}{x^2})^4 + (\frac{-4}{x^2})^5 = \frac{x^5}{32} + \frac{-5}{4}x^2 + \frac{20}{x} - \frac{160}{x^4} + \cancel{640}\frac{1024}{x^{10}}$

10ª QUESTÃO:

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{2})^4 &= (2)^4 + 4(2)^3(\sqrt{2}) + 6(2)^2(\sqrt{2})^2 + 4.2.(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^4 = \\
&= 16 + 32\sqrt{2} + 48 + 16\sqrt{2} + 4 = \\
&\cancel{= 84 + 32\sqrt{2}} \\
&= 68 + 48\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

11ª QUESTÃO:

7 termos; o termo em x^6 é $15x^6$

APÊNDICE DA AULA 13 DE MATEMÁTICA DISCRETA

1ª QUESTÃO:

(a) $\sum_{s=1}^{4}(i-1)^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

(b) $\sum_{s=1}^{3}\frac{1}{s} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

2ª QUESTÃO:

$C(8,4) = \frac{8!}{4!4!} = 70 \cdot 2^4 = 1120$

3ª QUESTÃO:

(a)Faça $\left(\frac{1}{x^2}\right)^{18-j}.(-\sqrt[4]{x})^j \Rightarrow \frac{1}{x^{2(18-j)}.(-x)^{\frac{j}{4}}} \Rightarrow \frac{j}{4} = 2(18-j) \Rightarrow j = 144-8j$

$\Rightarrow j = 144 - 8j \Rightarrow 9j = 144 \Rightarrow j = 16$

Daí , resulta que o termo independente é dado por : C(18,16)

(b) $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^6$

Note que o termo independente é:

$C(6,j).(3x)^{6-j}.\left(\frac{2}{x}\right)^j \Leftrightarrow C(6,j).3^{16-j}.2^j.\frac{x^{6-j}}{x^j} \Leftrightarrow 6-j=j \Leftrightarrow 2j=6 \Leftrightarrow j=3$

Daí , resulta no seguite termo independente: $C(6,3).3^3.2^3$

(c) $\left(\frac{x^2}{4} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

Note que o termo independente é:

$C(10,j).\left(\frac{x^2}{4}\right)^{10-j}.\left(\frac{-2}{\sqrt{x}}\right)^j \Leftrightarrow C(10,j).\frac{x^{20-2j}}{4^{10-j}}.\frac{-2^j}{x^{8/2}} \Leftrightarrow C(10,j)\frac{-2^j}{4^{10-j}}.\frac{x^{20-2j}}{x^{j/2}}$

$20 - 2j = j/2 \Leftrightarrow 2j + j/2 = 20 \Leftrightarrow 5j = 40 \Leftrightarrow j = 8$

Daí ,resulta no seguinte termo independente : $C(10,8).\frac{(-2)^8}{4^{10-8}} = 720$

4ª QUESTÃO:

Como $\sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}3^{10-k}2^k = (3+2)^{10}$, segue que o somatório acima é igual a 5^{10}

5ª QUESTÃO:

Como $\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}2^p = \sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}1^{m-p}2^p = (1+2)^p = 729$

Portanto $3^p = 3^6$, isto é, p=6