Aula 14 – Funções Contínuas

Metas da aula: Introduzir o fundamental conceito de funções contínuas. Apresentar os critérios básicos para o estabelecimento da continuidade e da descontinuidade de funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado do conceito de função contínua e seu uso na verificação da continuidade de funções. Conhecer os critérios básicos de continuidade e descontinuidade e suas aplicações para a verificação dessas propriedades.

Nesta aula vamos definir o que significa uma função ser contínua num ponto ou sobre um conjunto. Essa noção é um dos conceitos centrais da análise matemática e será usada em quase todo o material seguinte deste curso. Será, portanto, decisivo que você domine esse conceito.

Definição 14.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in X$. Dizemos que f é **contínua em** $\bar{x}$ se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ satisfaz $|x - \bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

Se f não é contínua em $\bar{x}$, dizemos que f é **descontínua em** $\bar{x}$.

Como no caso da definição de limite, a definição de continuidade num ponto também pode ser formulada de modo muito interessante em termos de vizinhanças. Isso é feito no próximo resultado, cuja verificação bastante simples deixamos como um importante exercício para você. Veja Figura **14.1**.

Teorema 14.1
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $\bar{x} \in X$ se, e somente se, dada qualquer ε-vizinhança $V_\varepsilon(f(\bar{x}))$ de $f(\bar{x})$ existe uma δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que se x é um ponto qualquer em $X \cap V_\delta(\bar{x})$, então $f(x)$ pertence a $V_\varepsilon(f(\bar{x}))$, isto é,

$$f(X \cap V_\delta(\bar{x})) \subset V_\varepsilon(f(\bar{x})).$$

Observação 14.1

(i) Se $\bar{x} \in X$ é um ponto de acumulação de X, então uma comparação da Definição 12.2 com a Definição 14.1 mostra que f é contínua se, e somente se,

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}). \tag{14.1}$$

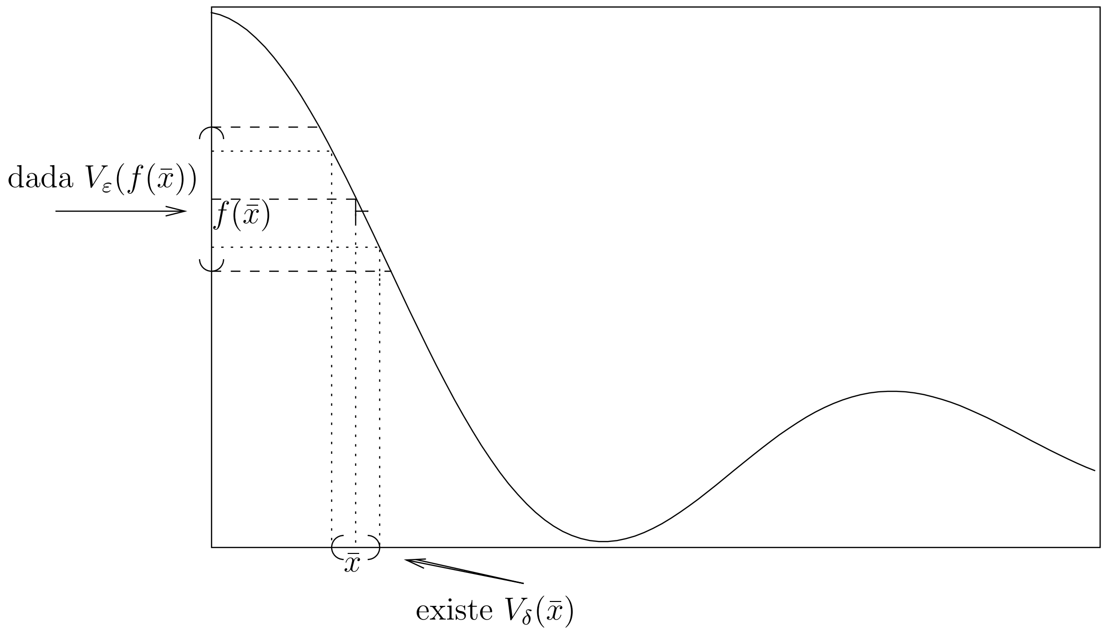

Figura **14.1**: A função f é contínua em $\bar{x}$.

Logo, se $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X, então três condições devem valer para f ser contínua em $\bar{x}$:

(i.1) f deve estar definida em $\bar{x}$ (de modo que $f(\bar{x})$ faça sentido),

(i.2) o limite de f em $\bar{x}$ deve existir (de modo que $\lim_{x \to \bar{x}} f(x)$ faça sentido), e

(i.3) a equação (14.1) deve ser válida.

(ii) Se $x \in X$ não é um ponto de acumulação de X, então existe uma vinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $X \cap V_\delta(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Assim, concluímos que a função f é automaticamente contínua num ponto $\bar{x} \in X$ que não é ponto de acumulação de X. Tais pontos são freqüentemente chamados "pontos isolados". Eles são de pouco interesse para nós já que não têm relação com qualquer processo limite. Como a continuidade é automática para tais pontos, em geral verificamos a continuidade apenas em pontos de acumulação. Por isso encaramos a condição (14.1) como sendo característica para a continuidade em $\bar{x}$.

Uma leve adaptação na prova do Teorema 12.4 para limites nos leva à seguinte versão seqüencial para a continuidade num ponto.

Teorema 14.2 (Critério Seqüencial para Continuidade)
Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $\bar{x} \in X$ se, e somente se, para toda seqüência (x_n) em X que converge a $\bar{x}$, a seqüência $(f(\bar{x}))$ converge para $f(\bar{x})$.

O seguinte Critério de Descontinuidade é uma conseqüência imediata do teorema anterior. Você deve prover sua demonstração detalhada.

Teorema 14.3 (Critério de Descontinuidade)
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in X$. Então f é descontínua em $\bar{x}$ se, e somente se, existe uma seqüência (x_n) em X tal que (x_n) converge para $\bar{x}$, mas a seqüência $(f(x_n))$ não converge para $f(\bar{x})$.

A seguinte definição estende de forma natural a noção de continuidade num ponto para a de continuidade num subconjunto qualquer de $\mathbb{R}$.

Definição 14.2
Seja $X \subset \mathbb{R}$ e seja $f : X \to \mathbb{R}$. Se Y é um subconjunto de X, dizemos que f é **contínua no conjunto** Y se f é contínua em todo ponto de Y.

Exemplos 14.1

(a) Dado $c \in \mathbb{R}$, a função constante $f(x) := c$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (a) que se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = c$. Como $f(\bar{x}) = c$, temos que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$, e portanto f é contínua em todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) A função $f(x) := x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (b) que se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \bar{x}$. Como $f(\bar{x}) = \bar{x}$, segue que f é contínua para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(c) A função $f(x) := x^2$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (c) que se $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \bar{x}^2$. Como $f(\bar{x}) = \bar{x}^2$, segue que f é contínua em todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(d) A função $f(x) := 1/x$ é contínua em $X := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.

Vimos no Exemplo 12.2 (d) que se $\bar{x} \in X$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = 1/\bar{x}$. Como $f(\bar{x}) = 1/\bar{x}$, temos que f é contínua em todo ponto $\bar{x} \in X$. Logo, f é contínua em X.

(e) Dado qualquer $c \in \mathbb{R}$ a função $f : X := [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \begin{cases} c, & \text{se } x = 0, \\ 1/x, & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

é descontínua em $x = 0$.

De fato, a seqüência $(1/n)$ converge para 0, mas $f(1/n) = n$ não converge em $\mathbb{R}$. Pelo Teorema 14.3 concluímos que f é descontínua em $x = 0$.

(f) A função $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ é descontínua em $x = 0$. Veja Figura **12.2**.

Vimos no Exemplo 12.3 (b) que se $x_n = (-1)^n/n$ então $x_n \to 0$ mas a seqüência $(f(x_n))$ não converge. Então, pelo Teorema 14.3 concluímos que f é descontínua em $x = 0$.

Será um bom exercício para você mostrar que $\operatorname{sgn}(x)$ é contínua em todo ponto $\bar{x} \neq 0$.

(g) Seja $X := \mathbb{R}$ e seja f a "função descontínua" de Dirichlet definida por

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Afirmamos que f é descontínua em todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Essa função foi introduzida por P. G. L. Dirichlet (1805–1859).

De fato, seja $\bar{x}$ um número racional. Pelo Teorema da Densidade 4.5, existe um número irracional ξ_n satisfazendo $\bar{x} < \xi_n < \bar{x} + 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, a seqüência (ξ_n) converge a $\bar{x}$ e $\xi_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $f(\xi_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\lim f(\xi_n) = 0$, enquanto $f(\bar{x}) = 1$. Portanto, f não é contínua em $\bar{x}$ se $\bar{x}$ é um número racional.

Por outro lado, se $\bar{x}$ é um número irracional, pelo Teorema da Densidade 4.5, similarmente, podemos obter uma seqüência (r_n) tal que $r_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r_n \to \bar{x}$. Como $f(r_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim f(r_n) = 1$, enquanto $f(\bar{x}) = 0$. Portanto, f não é contínua em $\bar{x}$ se $\bar{x}$ é um número irracional.

Como todo número real ou é racional ou é irracional, concluímos que f é descontínua em todo ponto em $\mathbb{R}$.

(h) Seja $X := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Para todo número irracional $x > 0$ definimos $f(x) = 0$. Dado um número racional em X da forma p/q, com $p, q \in \mathbb{N}$ primos entre si (i.e., sem divisores comuns exceto 1), definimos $f(p/q) = 1/q$. Afirmamos que f é contínua em todo número irracional em X, e descontínua em todo número racional em X. Essa função foi introduzida em 1875 por K. J. Thomae.

De fato, se $\bar{x} > 0$ é racional, tomemos uma seqüência (x_n) de números irracionais em X que converge para $\bar{x}$. Então $\lim f(x_n) = 0$, mas $f(\bar{x}) > 0$. Logo, f é descontínua em $\bar{x}$.

Por outro lado, se $\bar{x}$ é um número irracional e $\varepsilon > 0$, então (pela Propriedade Arquimediana) existe um número natural N_0 tal que $1/N_0 < \varepsilon$. Note também que existe apenas um número finito de racionais com denominador menor que N_0 no intervalo $(\bar{x}-1, \bar{x}+1)$, já que para cada $q \in \{1, \dots, N_0 - 1\}$ existem no máximo $2q$ racionais com denominador igual a q nesse intervalo. Portanto, podemos escolher $\delta > 0$ pequeno o bastante de modo que a vizinhança $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ não contenha nenhum racional com denominador menor que N_0. Segue então que para $|x - \bar{x}| < \delta$, com $x \in X$, temos $|f(x) - f(\bar{x})| = |f(x)| \leq 1/N_0 < \varepsilon$. Portanto, f é contínua no número irracional $\bar{x}$.

Conseqüentemente, deduzimos que a função de Thomae f é contínua exatamente nos pontos irracionais de X.

(i) Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X tal que $\bar{x} \notin X$. Se f tem um limite L no ponto $\bar{x}$ e se definimos $\bar{f} : X \cup \{\bar{x}\} \to \mathbb{R}$ por

$$\bar{f} := \begin{cases} L & \text{para } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{para } x \in X, \end{cases}$$

então $\bar{f}$ é contínua em $\bar{x}$.

De fato, precisamos apenas verificar que $\lim_{x\to\bar{x}} \bar{f} = L$ mas isso é imediato já que $\lim_{x\to\bar{x}} f = L$.

Por exemplo, se $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$, $\bar{f}(x) = f(x)$ para $x \neq 0$ e $\bar{f}(0) = 0$, então $\bar{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$. Veja Figura **13.1**.

(j) Se a função $f : X \to \mathbb{R}$ não possui limite em $\bar{x}$, então não existe nenhuma forma de obter uma função $\bar{f} : X \cup \{\bar{x}\} \to \mathbb{R}$ contínua em $\bar{x}$ definindo

$$\bar{f} := \begin{cases} c & \text{para } x = \bar{x}, \\ f(x) & \text{para } x \in X, \end{cases}$$

qualquer que seja $c \in \mathbb{R}$.

De fato, se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \bar{f}$ existisse, então também existiria $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ e valeria a igualdade $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \bar{f} = \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$.

Por exemplo, a função $f(x) := \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ (veja Figura **12.3**) não possui limite em $x = 0$. Assim, não há nenhum valor que possamos atribuir à ela em $x = 0$ de modo a obter uma extensão de f contínua em $x = 0$.

Exercícios 14.1

1. Prove o Teorema 14.2 (Critério Seqüencial).

2. Prove o Teorema 14.3 (Critério de Descontinuidade).

3. Seja $a < b < c$. Suponhamos que f é contínua em $[a, b]$, que g é contínua em $[b, c]$ e que $f(b) = g(b)$. Defina h sobre $[a, c]$ pondo $h(x) := f(x)$ para $x \in [a, b]$ e $h(x) := g(x)$ para $x \in [b, c]$. Prove que h é contínua em $[a, c]$.

4. Se $x \in \mathbb{R}$, definimos $[\![x]\!]$ como o maior inteiro $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq x$. Por exemplo, $[\![5.7]\!] = 5$, $[\![\pi]\!] = 3$, $[\![-\pi]\!] = -4$. A função $x \mapsto [\![x]\!]$ é chamada a **função parte inteira**. Determine os pontos de continuidade das seguintes funções:

   (a) $f(x) := [\![x]\!]$,

   (b) $f(x) := x + [\![x]\!]$,

   (c) $f(x) := \operatorname{sen}([\![x]\!])$,

   (d) $f(x) := [\![1/x]\!]$ $(x \neq 0)$.

5. Seja $f(x) = (x^2 - 2x - 3)/(x - 3)$ para $x \neq 3$. É possível definir f em $x = 3$ de modo que f seja contínua nesse ponto?

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\bar{x}$ e $f(\bar{x}) > 0$. Mostre que existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que se $x \in V_\delta(\bar{x})$, então $f(x) > 0$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $\mathbb{R}$ e seja $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$ o "conjunto zero" de f. Se (x_n) é uma seqüência tal que $x_n \in Z$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\bar{x} = \lim x_n$, mostre que $\bar{x} \in Z$.

8. Sejam $X \subset Y \subset \mathbb{R}$, $f : Y \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ a restrição de f a X, i.e., $g := f|X$.

(a) Se f é contínua em $\bar{x} \in X$, mostre que g é contínua em $\bar{x}$.

(b) Dê um exemplo em que a restrição g é contínua num ponto $\bar{x}$, mas sua extensão f não é contínua em $\bar{x}$.

9. Seja $K > 0$ e suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em todo ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$.

10. Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $\mathbb{R}$ e que $f(r) = 0$ para todo $r \in \mathbb{Q}$. Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

11. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $\mathbb{R}$, e seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) := f(x)$ para $x \in \mathbb{Q}$ e $h(x) := g(x)$ para $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Prove que h é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, $f(\bar{x}) = g(\bar{x})$.