Aula 18 – Limites Laterais, Limites Infinitos e no Infinito

Metas da aula: Apresentar algumas extensões ao conceito de limite de funções. Especificamente, serão definidos os conceitos de limite lateral à esquerda, limite lateral à direita, convergência de uma função a $\pm\infty$ quando x converge (à direita, ou à esquerda) para um ponto de acumulação do domínio, e de limite de funções quando x tende a $\pm\infty$.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as definições de limite lateral à esquerda e limite lateral à direita de uma função num ponto de acumulação do seu domínio.
- Saber o que significa uma função tender a $\pm\infty$ quando $x \to \bar{x}$, $x \to \bar{x}+$ e $x \to \bar{x}-$.
- Saber o conceito de limite de uma função quando x tende a $\pm\infty$.

Introdução

Nesta aula apresentaremos algumas extensões úteis do conceito de limite de uma função. A primeira dessas extensões é o conceito de limite lateral de uma função f à direita e à esquerda de um ponto de acumulação $\bar{x}$ de seu domínio $X \subset \mathbb{R}$. Essa noção se reduz à noção usual de limite quando, em lugar de considerarmos a função f definida em X, a consideramos como definida em $X \cap (\bar{x}, \infty)$, no caso do limite à direita, e $X \cap (-\infty, \bar{x})$, no caso do limite à esquerda.

A segunda extensão será a introdução de limites $+\infty$ e $-\infty$ de uma função num ponto de acumulação do seu domínio, que, por sua vez, também se estende naturalmente a limites laterais. Apesar de $+\infty$ e $-\infty$ não serem números reais e, portanto, essa noção de limite não corresponder a uma idéia de convergência aproximativa dos valores da função para um determinado valor, no sentido da distância na reta, trata-se de um conceito que exprime uma visão bastante intuitiva. Mais especificamente, essa definição exprime a idéia natural de tendência de crescimento (decrescimento) indefinitivo dos valores de uma função $f(x)$ de modo regular, embora não necessariamente monótono, quando x se aproxima de um ponto de acumulação $\bar{x}$ do domínio de f.

A terceira extensão será a noção de limite de uma função $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$, no caso em que o domínio de f contém um intervalo ilimitado do tipo (a,∞) ou $(-\infty,b)$, respectivamente. Essa noção exprime a idéia intuitiva de que os valores $f(x)$ se aproximam mais e mais de um determinado valor L à medida que x cresce sem parar ou decresce sem parar. Finalmente, essa última extensão do conceito de limite também admite, por seu turno, uma extensão a valores $L=\pm\infty$, assim como a noção original de limite e aquela de limites laterais.

Todas essas noções são úteis porque exprimem um comportamento especial de uma função quando x se aproxima unilateralmente ou bilateralmente de um determinado ponto de acumulação de seu domínio, ou quando x cresce ou decresce indefinitivamente. Em particular, elas são úteis quando queremos fazer um esboço do gráfico de uma dada função. Do ponto de vista matemático elas não acrescentam nenhuma dificuldade particular à analise de questões, em relação à noção de limite de função já estudada. Por isso mesmo, a discussão que faremos aqui pode parecer um pouco tediosa por ser em muitos aspectos repetitiva. Por outro lado, temos certeza de que você não terá qualquer dificuldade em assimilar rapidamente todas essas novas noções.

Limites Laterais

A seguir damos a definição de limite de uma função à direita e à esquerda de um ponto de acumulação de seu domínio.

Definição 18.1
Seja $X\subset\mathbb{R}$ e seja $f:X\to\mathbb{R}$.

(i) Se $\bar{x}\in\mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $X\cap(\bar{x},\infty)=\{x\in X : x>\bar{x}\}$, então dizemos que $L\in\mathbb{R}$ é **limite à direita de f em $\bar{x}$** e escrevemos

$$\lim_{x\to\bar{x}+} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\bar{x}+} f(x) = L$$

se dado $\varepsilon>0$ existe um $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que para todo $x\in X$ com $0<x-\bar{x}<\delta$, então $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$.

(ii) Se $\bar{x}\in\mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto $X\cap(-\infty,\bar{x})=\{x\in X : x<\bar{x}\}$, então dizemos que $L\in\mathbb{R}$ é **limite à esquerda de f em $\bar{x}$** e escrevemos

$$\lim_{x\to\bar{x}-} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x\to\bar{x}-} f(x) = L$$

se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < \bar{x} - x < \delta$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Os limites $\lim_{x \to \bar{x}+} f$ e $\lim_{x \to \bar{x}-} f$ são denominados conjuntamente **limites unilaterais** ou simplesmente **limites laterais de f em $\bar{x}$**.

Como o limite lateral de uma função f num ponto de acumulação $\bar{x}$ de seu domínio X (à direita e/ou à esquerda) nada mais é que o limite da função $f|X \cap (\bar{x}, \infty)$ em $\bar{x}$, segue que *todas as propriedades e proposições válidas para o limite usual de uma função valem também para os limites laterais* com as devidas adaptações. Em particular, os limites laterais são únicos e valem os resultados sobre operações com limites, desigualdades, o critério seqüencial, etc.

Por exemplo, o critério seqüencial no caso de limites laterais tem o enunciado seguinte, cuja demonstração inteiramente análoga àquela para o limite usual deixamos para você como exercício.

Teorema 18.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $X \cap (\bar{x}, \infty)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\lim_{x \to \bar{x}+} f = L$.

(ii) Para toda seqüência (x_n) que converge a $\bar{x}$ tal que $x_n \in X$ e $x_n > \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a seqüência $(f(x_n))$ converge a L.

Deixamos para você como exercício a formulação e prova do resultado análogo ao anterior para limites à esquerda.

O seguinte resultado relaciona a noção de limite de uma função aos limites laterais. Sua prova é imediata levando em conta a redução do conceito de limites laterais ao de limite das funções $f|X \cap (\bar{x}, \infty)$ e $f|X \cap (-\infty, \bar{x})$. Deixamos os detalhes da prova para você como exercício.

Teorema 18.2
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de ambos os conjuntos $X \cap (\bar{x}, \infty)$ e $X \cap (-\infty, \bar{x})$. Então $\lim_{x \to \bar{x}} f = L$ se, e somente se, $\lim_{x \to \bar{x}+} f = L = \lim_{x \to \bar{x}-} f$.

Exemplos 18.1

(a) A função $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ (veja Exemplo 12.3(b)) no ponto $\bar{x} := 0$ constitui um dos mais simples exemplos de função que possui ambos os limites laterais em $\bar{x}$, cujos valores, porém, são distintos. Em particular, como já visto no Exemplo 12.3 (b), não existe o limite de f em $\bar{x}$.

Como $f|(0,\infty) \equiv 1$ e $f|(-\infty,0) \equiv -1$ temos, claramente, $\lim\limits_{x\to 0+} f = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0-} f = -1$.

(b) Considere a função $f(x) := e^{1/x}$ para $x \neq 0$ (veja Figura **18.1**).

Provemos, inicialmente, que f não tem um limite finito à direita em $\bar{x} = 0$, já que não é limitada em nenhum intervalo do tipo $(0,\delta)$ com $\delta > 0$. Faremos uso da desigualdade

$$0 < t < e^t \qquad \text{para } t > 0, \tag{18.1}$$

que será provada quando fizermos o estudo analítico da função exponencial em aula futura. Apenas para saciar a curiosidade, mencionamos que (18.1) é conseqüência da identidade

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots\,,$$

que pode ser usada para definir e^t, como veremos na referida ocasião. Segue de (18.1) que se $x > 0$, então $0 < 1/x < e^{1/x}$. Logo, se tomarmos $x_n = 1/n$, então $f(x_n) > n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lim\limits_{x\to 0+} e^{1/x}$ não existe em $\mathbb{R}$.

No entanto, mostraremos que $\lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$. De fato, se $x < 0$ e tomarmos $t = -1/x$ em (18.1) obtemos $0 < -1/x < e^{-1/x}$. Como $x < 0$, segue que $0 < e^{1/x} < -x$ para todo $x < 0$. Daí concluímos que $\lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$.

(c) Seja $f(x) := 1/(e^{1/x} + 1)$ para $x \neq 0$ (veja Figura **18.2**).

Vimos em (b) que $0 < 1/x < e^{1/x}$ para $x > 0$, donde

$$0 < \frac{1}{e^{1/x} + 1} < \frac{1}{e^{1/x}} < x,$$

o que implica que $\lim\limits_{x\to 0+} f = 0$.

Por outro lado, vimos em (b) que $\lim\limits_{x\to 0-} e^{1/x} = 0$. Segue então do análogo do Teorema 13.2 para limites laterais que

$$\lim_{x\to 0-} \left(\frac{1}{e^{1/x} + 1} \right) = \frac{1}{\lim_{x\to 0-} e^{1/x} + 1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

Isso nos dá outro exemplo em que existem ambos os limites laterais mas esses são distintos.

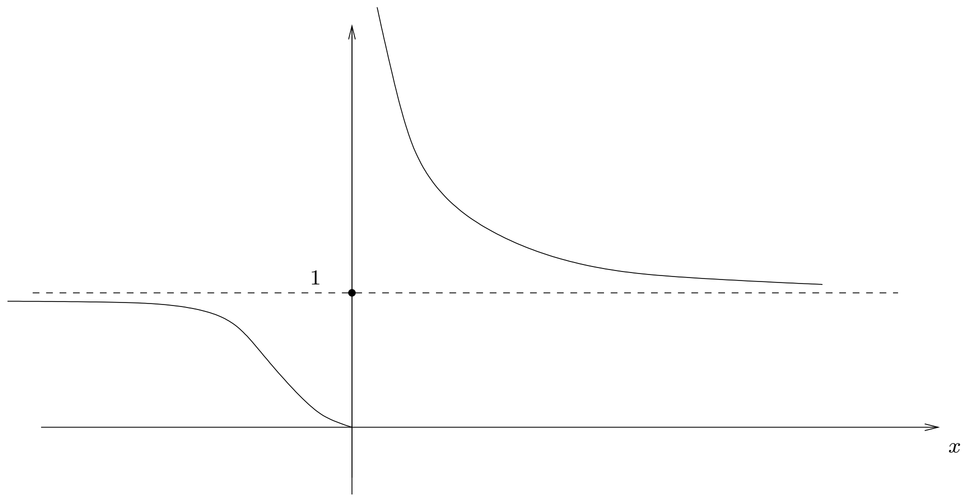


Figura **18.1**: Gráfico de $f(x) = e^{1/x}$, $x \neq 0$.

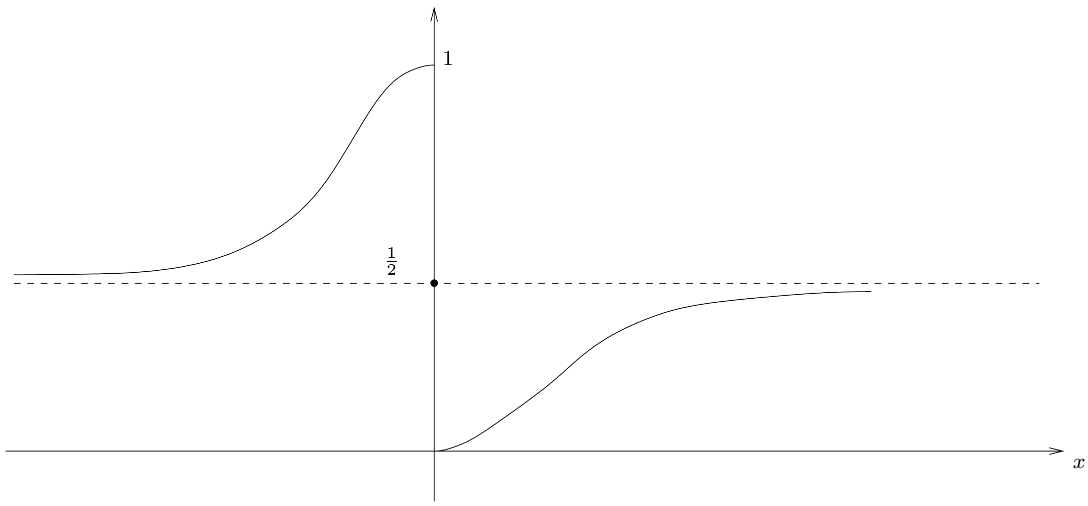


Figura **18.2**: Gráfico de $f(x) = 1/(e^{1/x} + 1)$, $x \neq 0$.

Limites Infinitos

A seguir, como mencionamos no início da aula, vamos definir limites infinitos.

Definição 18.2
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

(i) Dizemos que f **tende a** ∞ **quando** $x \to \bar{x}$ e denotamos

$$\lim_{x\to\bar{x}} f = \infty,$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que para todo $x \in X$ se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $f(x) > M$.

(ii) Dizemos que f **tende para** $-\infty$ **quando** $x \to \bar{x}$, e escrevemos

$$\lim_{x\to\bar{x}} f = -\infty,$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M)$ tal que para todo $x \in X$ se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$, então $f(x) < -M$.

Exemplos 18.2

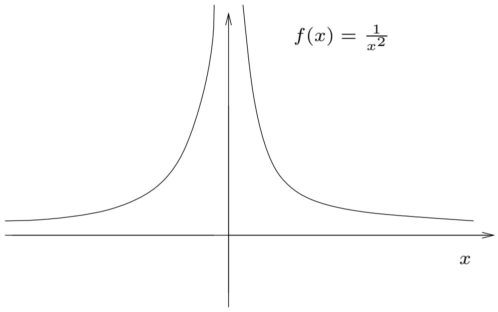
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ (veja Figura **18.3**).

Com efeito, dado $M > 0$, seja $\delta := 1/\sqrt{M}$. Segue que se $0 < |x| < \delta$, então $x^2 < 1/M$ e assim $1/x^2 > M$, o que prova a afirmação.

(b) Seja $f(x) := 1/x$ para $x \neq 0$ (veja Figura **18.3**). Então se $f_1 := f|(0,\infty)$ e $f_2 := f|(-\infty, 0)$, temos $\lim_{x\to 0} f_1 = \infty$ e $\lim_{x\to 0} f_2 = -\infty$. Em particular, f não tende nem a ∞, nem a $-\infty$, e nem possui limite, quando $x \to 0$.

O fato de que $\lim_{x\to 0} f_1 = \infty$ e $\lim_{x\to 0} f_2 = -\infty$ decorre do seguinte. Dado $M > 0$, se $\delta := 1/M$, então $0 < x < \delta$ implica $f_1(x) > M$ e $-\delta < x < 0$ implica $f_2(x) < -M$, o que prova que $\lim_{x\to 0} f_1 = \infty$ e $\lim_{x\to 0} f_2 = -\infty$, respectivamente.

O fato de ∞ e $-\infty$ não serem números reais faz com que a noção de limites infinitos não possa ser tratada da mesma forma como a noção usual de limite de uma função. Em particular, os resultados sobre operações com limites e desigualdades, não se estendem em geral aos limites infinitos. De modo informal é possível saber em que situações aqueles resultados podem



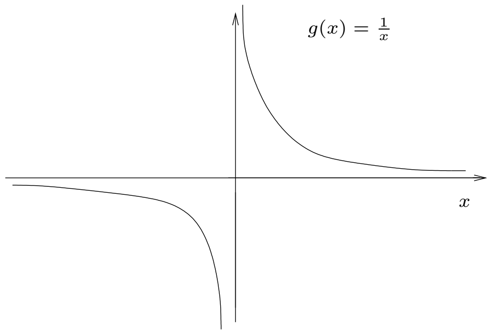


Figura **18.3**: Gráficos de $f(x) = 1/x^2$, $x \neq 0$, e $g(x) = 1/x$, $x \neq 0$.

deixar de ser válidos para limites infinitos. Nomeadamente, sempre que ocorrerem expressões indefinidas envolvendo os símbolos $\pm\infty$, como $\infty - \infty$ ou ∞/∞, os resultados válidos para limites usuais podem não mais valer para limites infinitos.

A seguir estabelecemos um resultado análogo ao Teorema do Sanduíche para limites infinitos.

Teorema 18.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq \bar{x}$.

(i) Se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \infty$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g = \infty$.

(ii) Se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g = -\infty$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = -\infty$.

Prova: (i) Se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \infty$ e $M > 0$ é dado, então existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, segue que $f(x) > M$. Mas como $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$, $x \neq \bar{x}$, temos que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, então $g(x) > M$. Logo, $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g = \infty$.

(ii) Segue de modo inteiramente similar a (i).

$\square$

Vimos no Exemplo 18.2 (b) que a função $f(x) := 1/x$ não tende nem a ∞ nem a $-\infty$ quando $x \to 0$, porém as restrições de f a $(0, \infty)$ e $(-\infty, 0)$ tendem a ∞ e $-\infty$, respectivamente, quando $x \to 0$. Isso é exatamente o análogo da existência dos limites laterais finitos para o caso de limites infinitos. Formalizamos essa noção a seguir.

Definição 18.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $X \cap (\bar{x}, \infty)$, então dizemos que f **tende a** ∞ (respectivamente, $-\infty$) **quando** $x \to \bar{x}+$, e denotamos

$$\lim_{x \to \bar{x}+} f = \infty \quad \text{(respectivamente, } \lim_{x \to \bar{x}+} f = -\infty\text{)},$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < x - \bar{x} < \delta$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Analogamente, se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação de $X \cap (-\infty, \bar{x})$, dizemos que f **tende a** ∞ (respectivamente, $-\infty$) **quando** $x \to \bar{x}-$, e denotamos

$$\lim_{x \to \bar{x}-} f = \infty \quad \text{(respectivamente, } \lim_{x \to \bar{x}-} f = -\infty\text{)},$$

se para todo $M > 0$ existe $\delta = \delta(M) > 0$ tal que para todo $x \in X$ com $0 < \bar{x} - x < \delta$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Exemplos 18.3

(a) Seja $f(x) := 1/x$, para $x \neq 0$. Como já visto no Exemplo 18.2 (b), $f|(0, \infty)$ tende a ∞ quando $x \to 0$ e $f|(-\infty, 0)$ tende a $-\infty$ quando $x \to 0$. Isso, claramente, é equivalente a

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

(b) Vimos no Exemplo 18.1 (b) que a função $f(x) := e^{1/x}$ para $x \neq 0$ não é limitada em nenhum intervalo da forma $(0, \delta)$, $\delta > 0$. Em particular o limite à direita de $e^{1/x}$ quando $x \to 0+$, no sentido da Definição 18.1, não existe. Contudo, como

$$\frac{1}{x} < e^{1/x} \qquad \text{for } x > 0,$$

vemos facilmente que $\lim_{x \to 0+} e^{1/x} = \infty$ no sentido da Definição 18.3.

Limites no Infinito

A seguir definimos a noção de limite de uma função quando $x \to \pm\infty$.

Definição 18.4
Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $(a, \infty) \subset \mathbb{R}$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é **limite de** f **quando** $x \to \infty$, e denotamos

$$\lim_{x \to \infty} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon) > a$ tal que se $x > K$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Analogamente, se $(-\infty, b) \subset \mathbb{R}$ para algum $b \in \mathbb{R}$, dizemos que $L \in \mathbb{R}$ é **limite de f quando** $x \to -\infty$, e denotamos

$$\lim_{x \to -\infty} f = L \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = L,$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe $K = K(\varepsilon) < b$ tal que se $x < K$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$.

O limite de uma função quando $x \to \infty$ $(x \to -\infty)$ possui todas as propriedades do limite de uma função quando x tende a um ponto de acumulação do seu domínio. Assim, valem a unicidade dos limites $\lim_{x\to\infty} f$, $\lim_{x\to-\infty} f$, os resultados sobre as operações com limites, desigualdades, etc.

Em particular, o critério seqüencial possui uma versão para limites no infinito que enunciamos a seguir.

Teorema 18.4
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$, e suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $L = \lim_{x \to \infty} f$.

(ii) Para toda seqüência (x_n) em (a, ∞) tal que $\lim x_n = \infty$, a seqüência $(f(x_n))$ converge a L.

Deixamos para você como exercício a prova desse teorema (inteiramente semelhante àquela para o limite de uma função num ponto de acumulação do domínio) bem como o enunciado e a prova do resultado análogo para o limite quando $x \to -\infty$.

Exemplos 18.4

(a) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, se $x > 1/\varepsilon$, então $|1/x| = 1/x < \varepsilon$, o que prova que $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$. Por outro lado, se $x < -1/\varepsilon$, então $|1/x| = -1/x < \varepsilon$, o que prova que $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

(b) $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2}$.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, se $x > 1/\sqrt{\varepsilon}$ ou $x < -1/\sqrt{\varepsilon}$, então $|1/x^2| = 1/x^2 < \varepsilon$, o que estabelece ambos os limites.

Também para o caso de limites em $\pm\infty$ temos a seguinte definição de limites infinitos, análoga à Definição 18.2.

Definição 18.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$. Suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Dizemos que f **tende a** ∞ (respectivamente, $-\infty$) **quando** $x \to \infty$, e escrevemos

$$\lim_{x\to\infty} f = \infty \qquad \text{(respectivamente, } \lim_{x\to\infty} f = -\infty\text{)}$$

se dado $M > 0$ existe $K = K(M) > a$ tal que se $x > K$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Analogamente, se $(-\infty, b) \subset X$ para algum $b \in \mathbb{R}$, dizemos que f **tende a** ∞ (respectivamente, $-\infty$) **quando** $x \to -\infty$, e escrevemos

$$\lim_{x\to-\infty} f = \infty \qquad \text{(respectivamente, } \lim_{x\to-\infty} f = -\infty\text{)}$$

se dado $M > 0$ existe $K = K(M) < b$ tal que se $x < K$, então $f(x) > M$ (respectivamente, $f(x) < -M$).

Propomos a você como exercício estabelecer o análogo do Teorema 18.4 para o caso em que f tende a ∞ ou $-\infty$ quando $x \to \infty$ ou $x \to -\infty$.

O resultado a seguir é um análogo do Teorema 9.5.

Teorema 18.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$, e suponhamos que $(a, \infty) \subset X$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Suponhamos ainda que $g(x) > 0$ para todo $x > a$ e que para algum $L \in \mathbb{R}$, $L \neq 0$, temos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

(i) Se $L > 0$, então $\lim_{x\to\infty} f = \infty$ se, e somente se, $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

(ii) Se $L < 0$, então $\lim_{x\to\infty} f = -\infty$ se, e somente se, $\lim_{x\to\infty} g = \infty$.

Prova: (i) Como $L > 0$, a hipótese implica que existe $a' > a$ tal que

$$0 < \frac{1}{2}L \leq \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}L \qquad \text{para } x > a'.$$

Portanto, temos $(\frac{1}{2}L)g(x) < f(x) < (\frac{3}{2}L)g(x)$ para todo $x > a'$, do qual segue imediatamente a conclusão.

A prova de (ii) é semelhante.

□

Deixamos para você como exercício o estabelecimento de resultados análogos quando $x \to -\infty$ ou quando $x \to \bar{x}$ e $\bar{x}$ é um ponto de acumulação de X, bem como dos resultados correspondentes para limites laterais.

Exemplos 18.5

(a) $\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

De fato, dado qualquer $M > 0$, se $x > K := \max\{1, M\}$, então $x^n > x > M$, o que prova a afirmação.

(b) $\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ se $n \in \mathbb{N}$ e n é par, e $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, se $n \in \mathbb{N}$ e n é ímpar.

Consideraremos o caso em que n é ímpar, no qual podemos escrever $n = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Dado $M > 0$, seja $K := \min\{-M, -1\}$. Se $x < K$, então como $(x^2)^k > 1$, temos que $x^n = (x^2)^k x < x < -M$. Como $M > 0$ é arbitrário, segue que $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$, quando $n \in \mathbb{N}$ é ímpar.

O caso em que n é par é mais simples e fica para você como exercício.

(c) Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função polinomial

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Então $\lim_{x\to\infty} p = \infty$ se $a_n > 0$ e $\lim_{x\to\infty} p = -\infty$ se $a_n < 0$.

De fato, seja $g(x) = x^n$ e apliquemos o Teorema 18.5. Como, para $x > 0$,

$$\frac{p(x)}{g(x)} = a_n + a_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right) + \cdots + a_1\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right) + a_0\left(\frac{1}{x^n}\right),$$

segue que $\lim_{x\to\infty}(p(x)/g(x)) = a_n$. A afirmação segue então do fato de que $\lim_{x\to\infty} g = \infty$ combinado com o Teorema 18.5.

Deixamos a você como exercício mostrar que $\lim_{x\to-\infty} p = \infty$ se n é par e $a_n > 0$ e $\lim_{x\to-\infty} p = -\infty$ se n é ímpar e $a_n > 0$.

Exercícios 18.1

1. Prove que se $f, g : X \to \mathbb{R}$, f é contínua em $\bar{x}$ e $\bar{x}$ é ponto de acumulação de $(\bar{x}, \infty)$ e $(-\infty, \bar{x})$, então $\lim_{x\to\bar{x}+} fg$ e $\lim_{x\to\bar{x}-} fg$ existem se, e somente se, $\lim_{x\to\bar{x}+} g$ e $\lim_{x\to\bar{x}-} g$ existem e, nesse caso,

$$\lim_{x\to\bar{x}\pm} fg = f(\bar{x}) \lim_{x\to\bar{x}\pm} g.$$

2. Prove que se n é par, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = \infty$, $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^n} = \infty$, e se n é ímpar, $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^n} = \infty$ e $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

3. Prove que $\lim_{x\to 0} |x|^{-1/n} = \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Diga se existem ou não os limites abaixo e, em caso positivo, determine seu valor:

   (a) $\lim_{x\to 1+} \frac{x}{x-1} \qquad (x \neq 0)$.

   (b) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} \qquad (x \neq 0)$.

   (c) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{x+1})/x \qquad (x > -1)$.

   (d) $\lim_{x\to 0+}(\sqrt{x+1})/x \qquad (x > -1)$.

   (e) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}/\sqrt{x+2} \qquad (x > -2)$.

   (f) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x}-x)/(\sqrt{x}+x) \qquad (x > 0)$.

   (g) $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{|x|}-x)/(\sqrt{|x|}+x) \qquad (x < 0)$.

5. Mostre que $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$ e $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x^2-1} = +\infty$.

6. Suponhamos que f e g têm limites em $\mathbb{R}$ quando $t \to \infty$ e que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (a, \infty)$, para algum $a \in \mathbb{R}$. Prove que $\lim_{x\to\infty} f \leq \lim_{x\to\infty} g$.

7. Mostre que se $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}$ é tal que $\lim_{x\to\infty} xf(x) = L$, com $L \in \mathbb{R}$, então $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

8. Sejam f e g definidas em (a, ∞) e suponhamos que $\lim_{x\to\infty} f = L$ e $\lim_{x\to\infty} g = \infty$. Prove que $\lim_{x\to\infty} f \circ g = L$.