Álgebra Linear I

Resolução dos Exercícios Programados 8 – EP8

1. Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular MM^T e concluir que M é ortogonal.

Solução.

$M^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $MM^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta + 0 & \cos\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta + 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\theta + 0 & \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta + 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz M é ortogonal.

2. Determine os valores de a, de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

tenha (a) nenhuma solução
(b) mais de uma solução
(c) uma única solução

Solução

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow -2L_1 + L_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow -L_1 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{bmatrix}_{L_3 \leftarrow -(a-1)L_2 + L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+a & 1 \\ 0 & 0 & -a^2 - a + 6 & -a + 2 \end{bmatrix}$$

Obtemos o seguinte sistema equivalente

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + (a+2)z = 1 \\ (3+a)(2-a)z = 2-a \end{cases}$$

que tem solução única se o coeficiente de z na terceira equação não é zero, isto é, se $a \neq 2$ e $a \neq -3$. No caso de a = 2, a terceira equação é 0=0 e o sistema tem mais de uma solução. No caso de a=-3, a terceira equação é 0=5 e o sistema não tem solução.

Logo, o sistema não possui solução se a = -3, possui mais de uma solução para a=2 e uma única solução se $a \neq 2$ e $a \neq -3$.

3. Determine uma base para cada um dos seguinte espaços vetoriais:

(a) S= {(x, y, z)$\in \Re^3$/ y = 2x}

(b) S= {(x, y)$\in \Re^3$/ x + y = 0}

Solução

(a) Se (x, y, z) $\in$ S $\Rightarrow$ (x, y, z) = (x, 2x, z) = x(1, 2, 0) + z (0, 0, 1). Então, todo vetor de S é combinação linear dos vetores (1, 2, 0) e (0, 0, 1). Como estes vetores são LI, o conjunto {(1, 2, 0) e (0, 0, 1)} é uma base de S.

(b) Se (x, y) $\in$ S $\Rightarrow$ (x, y) = (x, -x) = x(1, -1). Então, todo vetor de S é combinação linear do vetor (1, -1). Como este vetor é LI, o conjunto {(1, -1)} é uma base de S.

4. Projete o vetor u = (1, -1, 1) ortogonalmente na direção do vetor v = (2, 1, 1).

Solução. A norma do vetor v é $\|(2,1,1)\| = \sqrt{2^2+1^2+1^2} = \sqrt{6}$. Logo este vetor não é unitário. O seu versor é o vetor $v' = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

O vetor projeção é $proj_V u = proj_{V'} u = \left\langle u, v' \right\rangle v' =$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

5. Encontre T(x,y), onde $T: \Re^2 \to \Re^3$ é definida por T(1,0)=(1,-1,0) e T(1,1)=(2,0,1).

Solução.

(x,y)=(x-y)(1,0)+y(1,1)$\Rightarrow$ T(x,y)=(x-y)T(1,0)+yT(1,1)=

= T(x,y)=(x-y)(1,-1,0)+y(2,0,1)= (x+y,y-x,y)

6. Encontre uma transformação linear $T:\Re^3 \rightarrow \Re^2$, cujo núcleo é gerado pelo vetor (1,0,-1).

Solução. Considere a base canônica do $\Re^3$ e faça T(1,0,-1)=(0,0), T(0,1,0)=(0,1) e T(0,0,1)=(1,0). A imagem de T é gerada pelas imagens dos vetores desta base.Daí,

$$T(x,y,z) = T(x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)) = xT(1,0,0) + yT0,1,0) + zT(0,0,1) =$$
$$= x(1,2,0,-4) + y(2,0,-1,-3) + z(0,0,0) = (x+2y,2x,-y,-4x-3y).$$

7. Seja $T:\Re^3 \rightarrow \Re^3$ a transformação linear definida por

$T(x,y,z) = (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$. Encontre uma base e a dimensão de seu núcleo e de sua imagem.

Solução.Para $(x,y,z) \in N(T), T(x,y,z) = (0,0,0)$. Daí,

$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$. Conjunto-solução é o conjunto $\{(3k,-k,k); k \in \Re\}$. Logo, o núcleo é gerado pelo conjunto $\{(3,-1,1)\}$. Assim, dim N(T)=1 e $\{(3,-1,1)\}$ é uma base do N(T).

Para $(a,b,c) \in \mathrm{Im}(T),$ deve existir (x,y,z) tal que $T(x,y,z) = (a,b,c)$. Daí,

$\begin{cases} x+2y-z=a \\ y+z=b \\ x+y-2z=c \end{cases}$. Conjunto-solução é o conjunto $\{(b+c,b,c); b,c \in \Re\}$. Logo, o núcleo é gerado pelo conjunto $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$. Assim, dim Im(T)=2 e $\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ é uma base da Im(T).