Aula 13 – Teoremas de Limites de Funções

Metas da aula: Estabelecer as propriedades fundamentais dos limites de funções face às operações de soma, subtração, produto e quociente de funções, bem como em relação às desigualdades envolvendo funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as propriedades dos limites de funções no que diz respeito às operações de soma, subtração, produto e quociente de funções, assim como em relação às desigualdades envolvendo funções, e suas aplicações no estabelecimento de limites de funções.

Introdução

Nesta aula vamos estabelecer as principais propriedades dos limites de funções relativas às operações e às desigualdades envolvendo funções. Os resultados aqui obtidos serão extremamente úteis no cálculo de limites de funções. Esses resultados são análogos aos teoremas de limites de sequências vistos na Aula 7. De fato, na maioria dos casos eles podem ser provados usando-se o Critério Sequencial (Teorema 12.4) juntamente com os resultados da Aula 7. Claramente, eles também podem ser provados por meio de argumentos do tipo ε, δ que são muito semelhantes aos utilizados na Aula 7.

Operações com Limites de Funções

Inicialmente vamos estabelecer um resultado sobre a limitação de funções na vizinhança de pontos nos quais elas possuam limites. Antes porém vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 13.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X. Dizemos que f é *limitada numa vizinhança de* $\bar{x}$ se existe uma δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ e uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$.

Teorema 13.1
Se $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x}$ é ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ possui um limite em $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então f é limitada em alguma vizinhança de $\bar{x}$.

Prova: Seja $L := \lim_{x\to\bar{x}} f$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-\bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - L| < 1$ e, portanto,

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \leq |f(x) - L| + |L| < |L| + 1.$$

Logo, se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$ e $x \neq \bar{x}$, então $|f(x)| \leq |L|+1$. Façamos $M := |L|+1$, caso $\bar{x} \notin X$, ou então $M := \max\{|f(\bar{x})|, |L| + 1\}$, caso $\bar{x} \in X$. Segue que se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$, então $|f(x)| \leq M$, o que mostra que f é limitada numa vizinhança de $\bar{x}$. $\square$

Dadas duas funções $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos sua *soma* $f + g$, *diferença* $f - g$ e *produto* fg de modo natural pondo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f - g)(x) := f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

respectivamente, para todo $x \in X$. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, definimos o quociente f/g também de modo natural pondo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Finalmente, se $c \in \mathbb{R}$, definimos a função cf de maneira óbvia pondo

$$(cf)(x) := cf(x) \qquad\qquad \text{para todo } x \in X.$$

A seguir estabelecemos o principal resultado sobre operações com limites de funções.

Teorema 13.2

Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que existam $L_f := \lim_{x\to\bar{x}} f$ e $L_g := \lim_{x\to\bar{x}} g$. Então existem

$$L_{f+g} := \lim_{x\to\bar{x}}(f + g), \qquad L_{f-g} := \lim_{x\to\bar{x}}(f - g),$$
$$L_{fg} := \lim_{x\to\bar{x}}(fg), \qquad L_{cf} := \lim_{x\to\bar{x}}(cf),$$

e valem as seguintes igualdades

$$L_{f+g} = L_f + L_g, \qquad L_{f-g} = L_f - L_g,$$
$$L_{fg} = L_f L_g, \qquad L_{cf} = cL_f.$$

Além disso, se $L_g \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então existe

$$L_{\frac{f}{g}} := \lim_{x\to\bar{x}} \left(\frac{f}{g}\right)$$

e vale
$$L_{\frac{f}{g}} = \frac{L_f}{L_g}.$$

Prova: A prova desse teorema pode ser feita com argumentos do tipo ε, δ inteiramente análogos àqueles usados na prova do Teorema 7.2. De modo alternativo, podemos usar o Teorema 7.2 e o Teorema 12.4 (Critério Sequencial). De fato, seja (x_n) uma sequência qualquer em X com $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $x_n \to \bar{x}$. Segue do Teorema 12.4 que

$$\lim f(x_n) = L_f, \qquad \lim g(x_n) = L_g.$$

Assim, pelo Teorema 7.2 temos que

$$\begin{aligned}
\lim(f+g)(x_n) &= \lim(f(x_n)+g(x_n)) = L_f + L_g,\\
\lim(f-g)(x_n) &= \lim(f(x_n)-g(x_n)) = L_f - L_g,\\
\lim(fg)(x_n) &= \lim(f(x_n)g(x_n)) = L_f L_g,\\
\lim(cf)(x_n) &= \lim cf(x_n) = cL_f.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, se $L_g \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, temos pelo Teorema 7.2 que
$$\lim\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{L_f}{L_g},$$
o que conclui a demonstração. □

Observação 13.1

(i) Observemos que a hipótese $L_g \neq 0$ é essencial para que valha a regra para o limite do quociente f/g no Teorema 13.2. Se essa hipótese não é satisfeita, o limite pode existir ou não. Porém, mesmo no caso em que ele existe, não podemos usar o Teorema 13.2 para calculá-lo.

(ii) Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam $f_1, f_2, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$L_k := \lim_{x\to\bar{x}} f_k \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, n,$$

então segue do Teorema 13.2 por Indução Matemática que

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n,$$

e

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f_1 f_2 \cdots f_n) = L_1 L_2 \cdots L_n.$$

Em particular, deduzimos que se $L := \lim_{x\to\bar{x}} f$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f(x))^n = L^n.$$

Exemplos 13.1

(a) $\lim_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, como $\lim_{x\to\bar{x}} x = \bar{x}$, então pela Observação 13.1 (ii) segue que $\lim_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ como afirmado.

(b) $\lim_{x\to 1}(x^2+3)(2x^3-5) = -12$.

Segue do Teorema 13.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3)(2x^3-5) &= \Big(\lim_{x\to 1}(x^2+3)\Big)\Big(\lim_{x\to 1}(2x^3-5)\Big)\\ &= 4\cdot(-3) = -12.\end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^3-2}{x^2+3}\right) = 2$.

Como $\lim(x^3+3) = 7 \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 13.2 obtendo

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-2}{x^2+3} = \frac{\lim_{x\to 2}(2x^3-2)}{\lim_{x\to 2}(x^2+3)} = \frac{14}{7} = 2.$$

(d) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}\right) = -12$.

Observe que não é possível aplicar diretamente o Teorema 13.2 já que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6) = \lim_{x\to 2} x^2 - 5\lim_{x\to 2} x + 6 = 4 - 5\cdot 2 + 6 = 0.$$

No entanto, para calcular o limite proposto basta considerar $x \in X := (1,3)$ com $x \neq 2$. Para $x \in X\setminus\{2\}$, temos que $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \neq 0$ e, como $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x-3}\\ &\frac{\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)}{\lim_{x\to 2}(x-3)} = \frac{12}{-1} = -12.\end{aligned}$$

(e) Se p é uma função polinomial, então $\lim_{x\to\bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$.

Seja p uma função polinomial em $\mathbb{R}$ de modo que $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teorema 13.2 e do fato que $\lim_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\bar{x}} p(x) &= \lim_{x\to\bar{x}}(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0)\\ &= a_n\lim_{x\to\bar{x}} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to\bar{x}} x^{n-1} + \cdots + a_1\lim_{x\to\bar{x}} x + \lim_{x\to\bar{x}} a_0\\ &= a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0\\ &= p(\bar{x}).\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x\to\bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$ para qualquer função polinomial p.

(f) Se p e q são funções polinomiais em $\mathbb{R}$ e se $q(\bar{x}) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})}.$$

Como q é uma função polinomial, segue de um teorema bastante conhecido em Álgebra que existem no máximo um número finito de valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tais que $q(\alpha_j) = 0$ e tais que $q(x) \neq 0$ se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Portanto, se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, podemos definir

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Pelo item (e) temos que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} q(x) = q(\bar{x}) \neq 0$. Logo, podemos aplicar o Teorema 13.2 para concluir que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\bar{x}} p(x)}{\lim\limits_{x\to\bar{x}} q(x)} = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})},$$

como afirmado.

Desigualdades e Limites de Funções

O próximo resultado é o análogo do Teorema 7.5.

Teorema 13.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$a \leq f(x) \leq b \qquad \text{para todo } x \in X,\ x \neq \bar{x},$$

e se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe, então $a \leq \lim\limits_{x\to\bar{x}} f \leq b$.

Prova: De fato, se $L := \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$, então segue do Teorema 12.4 que se (x_n) é qualquer sequência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e se $x_n \to \bar{x}$, então a sequência $(f(x_n))$ converge a L. Como $a \leq f(x_n) \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 7.5 que $a \leq L \leq b$. $\square$

A seguir estabelecemos o análogo do Teorema do Sanduíche 7.6. A prova é uma aplicação imediata do Teorema 12.4 combinado com o Teorema 7.6. Deixamos os detalhes da prova para você como exercício.

Teorema 13.4
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{para todo } x \in X,\ x \neq \bar{x},$$

e se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f = \lim\limits_{x\to\bar{x}} h =: L$, então $\lim\limits_{x\to\bar{x}} g = L$.

O próximo resultado é às vezes chamado de Princípio da Preservação do Sinal pois ele afirma que se o limite de uma função num certo ponto é positivo (negativo), então a função é positiva (negativa) em toda uma vizinhança do ponto com exceção possivelmente do seu valor no próprio ponto.

Teorema 13.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$\lim_{x\to\bar{x}} f > 0 \qquad (\text{respectivamente, } \lim_{x\to\bar{x}} f < 0),$$

então existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) > 0$ (respectivamente, $f(x) < 0$) para todo $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$.

Prova: Seja $L := \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ e suponhamos que $L > 0$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}L$ na Definição 12.2 para obter $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$. Segue daí que $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$ (por quê?) se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$ e $x \neq \bar{x}$.

Argumento inteiramente semelhante se aplica no caso em que $L < 0$.□

Exemplos 13.2

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{5/4}}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} = 0$ $(x > 0)$.

Se $0 < x \leq 1$, então $1 < x^{3/2} + x^{1/2} + 1 \leq 3$ e $x^2 \leq x^{5/4} \leq x$ (por quê?). Portanto, temos

$$\frac{1}{3}x^2 \leq \frac{x^{5/4}}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} \leq x.$$

Como $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, a afirmação segue do Teorema 13.4.

(b) $\lim\limits_{x\to 0} (x \operatorname{sen}(1/x)) = 0$.

Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. Como $-1 \leq \operatorname{sen} u \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, temos a desigualdade $|f(x)| \leq |x|$, ou seja,

$$-|x| \leq f(x) = x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Como $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, segue do Teorema 13.4 que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Veja o gráfico de f na Figura **13.1**.

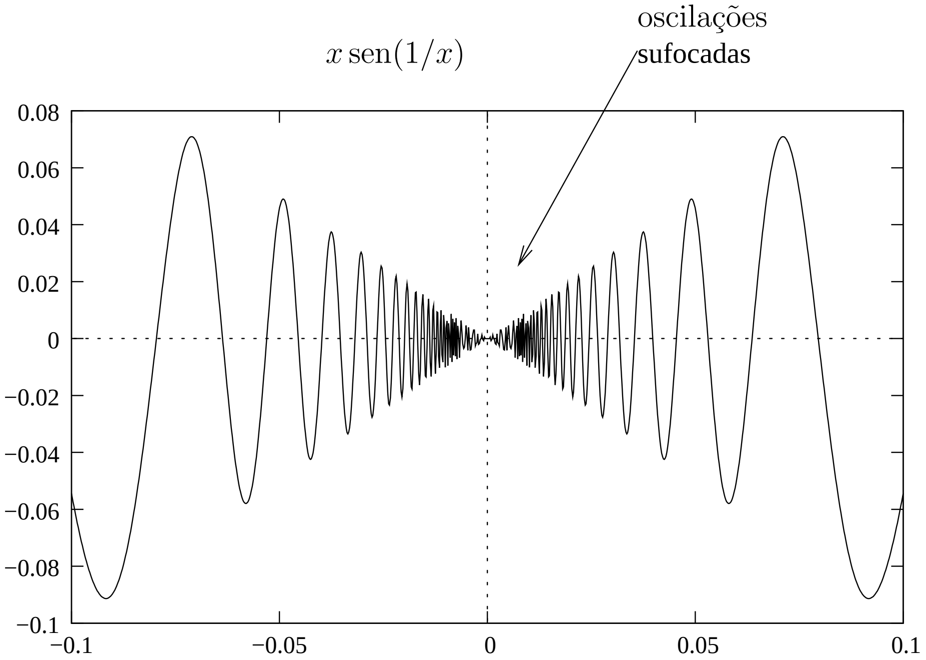

Figura 13.1: A função $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$.

Exercícios 13.1

1. Aplique o Teorema 13.2 para determinar os seguintes limites:

   (a) $\lim_{x\to 1}(x^2+2)(4x^3-3)$ $(x \in \mathbb{R})$;

   (b) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2}{x^2-1}$ $(x > 1)$;

   (c) $\lim_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{2x-3} - \dfrac{1}{x-4}\right)$ $(x > 4)$;

   (d) $\lim_{x\to 0}\dfrac{2x-5}{x^2+3}$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

   (a) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f$ existe e se $|f|$ é a função definida em X por $|f|(x) := |f(x)|$, prove que
   $$\lim_{x\to\bar{x}} |f| = |\lim_{x\to\bar{x}} f|.$$

   (b) Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, se $\lim_{x\to\bar{x}} f$ existe e se $\sqrt{f}$ é a função definida em X por $\sqrt{f}(x) := \sqrt{f(x)}$, prove que
   $$\lim_{x\to\bar{x}} \sqrt{f} = \sqrt{\lim_{x\to\bar{x}} f}.$$

3. Determine os seguintes limites e diga que teoremas são usados em cada caso. (Você pode usar também o exercício anterior.)

   (a) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{5x+1}{2x+3}}$ $(x > 0)$;

   (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ $(2 < x < 3)$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x}$ $(x > 0)$;

   (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $(0 < x < 2)$.

4. Encontre $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+x}}{x+3x^2}$ onde $x > 0$.

5. Prove que $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ não existe mas que $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x) = 0$.

6. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que f é limitada numa vizinhança de $\bar{x}$ e que $\lim_{x\to\bar{x}} g = 0$. Prove que $\lim_{x\to\bar{x}} fg = 0$.

7. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

   (a) Mostre que se ambos $\lim_{x\to\bar{x}} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}} (f+g)$ existem, então $\lim_{x\to\bar{x}} g$ existe.

   (b) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}} fg$ existem, segue que $\lim_{x\to\bar{x}} g$ existe?

8. Determine se os seguintes limites existem em $\mathbb{R}$.

   (a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x \neq 0)$;

   (b) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x \neq 0)$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} \operatorname{sen}(1/x)$ $(x \neq 0)$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x > 0)$.