Aula 8 – Seqüências Monótonas e Subseqüências

Metas da aula: Apresentar o conceito de seqüência monótona e estabelecer o Teorema da Seqüência Monótona. Introduzir o conceito de subseqüência e estabelecer o Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o enunciado do Teorema da Seqüência Monótona e o uso desse resultado para estabelecer a existência do limite de seqüências.

- Entender o conceito de subseqüências e seu uso em conexão com o estabelecimento da convergência e da divergência de seqüências.

- Saber o enunciado do Teorema de Bolzano-Weierstrass e seu uso para estabelecer a existência de subseqüências convergentes.

Nesta aula vamos aprender um resultado muito importante que nos permitirá afirmar a convergência de certas seqüências, chamadas monótonas, mesmo em situações em que não temos candidatos a limites dessas seqüências, nas quais, portanto, não seria possível verificar a convergência diretamente usando a Definição 6.2. Vamos também estudar o conceito de subseqüências e seu uso no estabelecimento de limites bem como na prova da divergência de seqüências. Por fim, vamos enunciar e provar o famoso Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Seqüências Monótonas

Vamos iniciar nossa aula definindo seqüências monótonas.

Definição 8.1
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma seqüência de números reais. Dizemos que $\mathbf{x}$ é **não-decrescente** se $x_n \le x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots$. Diz-se que $\mathbf{x}$ é **crescente** se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$. Em particular, seqüências crescentes constituem um caso especial de seqüências não-decrescentes.

Analogamente, dizemos que $\mathbf{x}$ é **não-crescente** se $x_n \ge x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \cdots$, e $\mathbf{x}$ é decrescente se $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_1 > x_2 > x_3 > \cdots$. De novo, temos que seqüências decrescentes constituem um caso especial de seqüências não-crescentes.

Dizemos, de modo geral, que $\mathbf{x}$ é **monótona** se $\mathbf{x}$ é não-decrescente ou não-crescente.

As seqüências $(1, 2, 2, 3, 3, 3, \dots)$, (n), $(1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, 1/3, \dots)$ e $(1/n)$ são exemplos de seqüências monótonas: a primeira é não-decrescente, a segunda é crescente, a terceira é não-crescente e a quarta é decrescente.

A seguir enunciamos o resultado mais importante sobre seqüências monótonas.

Teorema 8.1 (Teorema da Seqüência Monótona)
Uma seqüência monótona de números reais é convergente se e somente se é limitada. Além disso:

(a) Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência não-decrescente limitada, então

$$\lim x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência não-crescente limitada, então

$$\lim x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Prova: Vimos no Teorema 7.1 que toda seqüência convergente é limitada. Portanto, basta mostrar que se uma seqüência monótona é limitada, então ela é convergente. Seja, então, $\mathbf{x}$ uma seqüência monótona limitada. Então, ou $\mathbf{x}$ é não-decrescente, ou $\mathbf{x}$ é não-crescente.

(a) Vamos tratar primeiro o caso em que $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência limitada não-decrescente. Como $\mathbf{x}(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto limitado, pelo Teorema 5.7 (do Supremo), existe $x^* := \sup \mathbf{x}(\mathbb{N})$. Afirmamos que $\lim x_n = x^*$.

Com efeito, seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Então $x^* - \varepsilon$ não é cota superior de $\mathbf{x}(\mathbb{N})$, e, portanto, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x^* - \varepsilon < x_{N_0}$. Como (x_n) é não-decrescente, temos que $x_{N_0} \leq x_n$ para todo $n > N_0$, e assim segue que

$$x^* - \varepsilon < x_{N_0} \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_0,$$

ou seja,

$$|x_n - x^*| < \varepsilon \qquad \text{para todo } n > N_0.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, fica provado que $x_n \to x^*$.

(b) Consideremos agora o caso em que $\mathbf{x} = (x_n)$ é não-crescente. De novo, como $\mathbf{x}(\mathbb{N})$ é limitado, segue do Teorema do Supremo que existe $x_* := \inf \mathbf{x}(\mathbb{N})$. A prova de que $\lim x_n = x_*$ é inteiramente análoga à que acabamos de dar para o caso em que (x_n) é não-decrescente e deixaremos para você como exercício.

□

Exemplos 8.1

(a) $\lim(1/n^{1/3}) = 0$.

Esse é um caso particular do Exemplo 7.2 (c); contudo, daremos aqui uma outra demonstração usando o Teorema da Seqüência Monótona. A seqüência $\mathbf{x} := (1/n^{1/3})$ é decrescente e, claramente, 0 é uma cota inferior de $\mathbf{x}$. Não é difícil mostrar que, de fato, temos $0 = \inf \mathbf{x}(\mathbb{N})$ e, portanto, a afirmação segue do referido teorema. De outro modo, sabemos pelo Teorema da Seqüência Monótona que existe $\bar{x} := \lim x_n$. Como $x_n^3 = 1/n$ e $\lim 1/n = 0$, temos

$$\bar{x}^3 = (\lim x_n)^3 = \lim x_n^3 = \lim \frac{1}{n} = 0 \Longrightarrow \bar{x} = \lim \frac{1}{n^{1/3}} = 0.$$

(b) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida indutivamente por $x_1 := 1$, $x_{n+1} := (x_n/3) + 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que $\lim x_n = 3/2$.

Provemos, usando Indução Matemática, que vale $1 \le x_n < x_{n+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_2 = (x_1/3) + 1 = (1/3) + 1 = 4/3$, a afirmação é válida para $n = 1$. Suponhamos, por indução, que vale $1 \le x_k < x_{k+1} < 2$. Temos

$$1 \le x_k < x_{k+1} = (x_k/3)+1 < (x_{k+1}/3)+1 = x_{k+2} < (2/3)+1 = 5/3 < 2,$$

e, portanto, vale $1 \le x_{k+1} < x_{k+2} < 2$, o que conclui a prova por indução de que $1 \le x_n < x_{n+1} < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que (x_n) é crescente e limitada. Pelo Teorema da Seqüência Monótona, existe $\bar{x} = \lim x_n$. Como a 1-cauda $\mathbf{x}_1 = (x_{n+1})$ converge para o mesmo limite que $\mathbf{x}$, tomando o limite na relação $x_{n+1} = (x_n/3) + 1$ obtemos

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}}{3} + 1,$$

e daí segue que $\bar{x} = 3/2$.

(c) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida indutivamente por $x_1 := 0$, $x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $\lim x_n = 2$.

Provemos por indução que vale $0 \le x_n < x_{n+1} \le 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x_2 = \sqrt{2+0} = \sqrt{2}$, a afirmação é claramente verdadeira para $n = 1$. Suponhamos por indução que vale $0 \le x_k < x_{k+1} \le 2$. Então

$$0 \le x_k < x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + x_{k+1}} = x_{k+2} \le \sqrt{2+2} = 2,$$

e, portanto, $0 \le x_{k+1} < x_{k+2} \le 2$, o que conclui a prova por indução de que $0 \le x_n < x_{n+1} \le 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que (x_n) é uma seqüência crescente e limitada. Logo, pelo Teorema da Seqüência Monótona, existe $\bar{x} = \lim x_n$ e $\bar{x} = \sup \mathbf{x}(\mathbb{N})$. Como a 1-cauda $\mathbf{x}_1 = (x_{n+1})$ converge para o mesmo limite que $\mathbf{x}$, tomando o limite na relação $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, usando o Exemplo 7.2 (b) e o Teorema 7.5, obtemos

$$\bar{x} = \sqrt{2 + \bar{x}} \quad \text{e} \quad 0 \le \bar{x} \le 2.$$

Vemos então que $\bar{x}$ é uma raiz não-negativa da equação $x^2 - x - 2 = 0$ cujas raizes são -1 e 2. Logo, $\bar{x} = 2$ como afirmado.

(d) Seja $s_n := 1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n$. A seqüência (s_n) é conhecida como *série harmônica*. Como $s_{n+1} = s_n + 1/(n+1) > s_n$, essa é uma seqüência crescente e, pelo Teorema da Seqüência Monótona, será convergente se, e somente se, for limitada superiormente. Mostraremos a seguir que (s_n) é ilimitada e, portanto, divergente.

O interessante nessa questão é que ela nos traz um exemplo claro de um caso em que um argumento simples, puramente matemático, mostra-se muito mais poderoso que a tentativa de se fazer previsões baseadas exclusivamente no cálculo massivo de computadores de última geração. De fato, um cálculo com computador exibirá valores aproximados de s_n em torno de 11.4 para $n = 50\,000$, e $s_n \approx 12.1$ para $n = 100\,000$. Tais dados poderiam nos levar a concluir que a seqüência é limitada. No entanto, podemos provar que vale o contrário, observando que

$$\begin{aligned} s_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)}_{2^{n-1} \text{ vezes}} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{n \text{ vezes}} \\ &= 1 + \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Os termos s_n crescem de modo extremamente lento. Por exemplo, pode-se mostrar que para obtermos $s_n > 50$ seriam necessárias aproximadamente 5.2×10^{21} adições, trabalho esse que levaria cerca de 400 000 anos num computador normal da atualidade, e mais de 160 anos num supercomputador capaz de realizar um trilhão de adições por segundo.

Cálculo de Raízes Quadradas.

Agora daremos uma aplicação do Teorema da Seqüência Monótona relacionada com o cálculo de raízes quadradas de números positivos.

Seja $a > 0$. Apresentaremos um método de aproximação de $\sqrt{a}$ por meio da construção de uma seqüencia (s_n) que converge a esse número. Esse processo para calcular raízes quadradas já era conhecido na Mesopotamia antes do ano 1500 A.C..

Seja $s_1 > 0$ arbitrariamente escolhido e definamos

$$s_{n+1} := \frac{1}{2}(s_n + a/s_n) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Mostraremos que (s_n) converge a $\sqrt{a}$.

Primeiramente, mostremos que $s_n^2 \geq a$ para $n \geq 2$. De fato, da relação $s_n^2 - 2s_{n+1}s_n + a = 0$ vemos que s_n é raiz da equação de segundo grau $x^2 - 2s_{n+1}x + a = 0$, cujo discriminante é $4s_{n+1}^2 - 4a$. Como tal equação possui raízes reais, seu discriminante deve ser não negativo e, portanto, devemos ter $s_{n+1}^2 \geq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora mostraremos que (s_n) é ultimadamente não-crescente; mais precisamente, que $s_{n+1} \leq s_n$ para $n \geq 2$. Com efeito,

$$s_n - s_{n+1} = s_n - \frac{1}{2}\left(s_n + \frac{a}{s_n}\right) = \frac{1}{2}\frac{(s_n^2 - a)}{s_n} \geq 0.$$

Portanto, $s_{n+1} \leq s_n$ para todo $n \geq 2$. O Teorema da Seqüência Monótona implica que $\bar{s} := \lim s_n$ existe. Além disso, os Teorema 7.2 e 7.5 nos dão que $\bar{s}$ deve satisfazer as relações

$$\bar{s} = \frac{1}{2}\left(\bar{s} + \frac{a}{\bar{s}}\right) \qquad \bar{s} \geq \sqrt{a},$$

donde segue que $\bar{s} = a/\bar{s}$, ou seja, $\bar{s}^2 = a$. Logo, $\bar{s} = \sqrt{a}$.

O Número e.

Seja (s_n) definida indutivamente por $s_1 = 1$, $s_{n+1} = s_n + \dfrac{1}{n!}$ e, portanto,

$$s_{n+1} := 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como, para todo $n \in \mathbb{N}$, $s_n < s_{n+1}$ e

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \\ &< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + 1 + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}) < 3, \end{aligned}$$

segue do Teorema da Seqüência Monótona que (s_n) converge. Definimos

$$e := \lim s_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right). \tag{8.1}$$

O número e assim definido é o número "transcendental" mais importante da Matemática depois de π. O termo "transcendental" significa que esses números não são raízes de polinômios com coeficientes racionais, a não ser, obviamente, o polinômio identicamente nulo. Em particular, os números trancendentais são irracionais. A prova de que e é transcendental, embora possa ser feita de modo relativamente simples, escapa dos objetivos deste curso.

Pelo que acabamos de ver, vale $2 < e \leq 3$. A seqüência acima nos permite obter aproximações de e com erros arbitrariamente pequenos. Por exemplo, s_{10} nos dá a aproximação 2.7182818, com erro menor que 10^{-7}. O número e é às vezes chamado de *número de Euler*, em homenagem a LEONHARD EULER (1707–1783), considerado até hoje um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Ele é a base dos assim chamados *logaritmos naturais*; isto é, o logaritmo natural de um número x é o número $\log x$ tal que $e^{\log x} = x$.

O resultado seguinte trata de um limite clássico bastante importante.

Teorema 8.2

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \tag{8.2}$$

Prova: Seja $t_n := (1 + 1/n)^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Aplicando a fórmula binomial obtemos

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right). \end{aligned}$$

Fazendo o mesmo para t_{n+1} e comparando as respectivas fórmulas, vemos que a segunda fórmula para t_{n+1} contém uma parcela positiva a mais que a segunda fórmula para t_n e que as parcelas restantes são todas maiores que as parcelas correspondentes na fórmula para t_n. Portanto, temos que $t_n < t_{n+1}$ para todo n. Claramente, temos que $t_n < s_n$, onde $s_n = 1 + 1 + 1/2! + \cdots + 1/n!$. Como vimos há pouco, $s_n < 3$ e, assim, segue que $t_n < 3$. Logo, pelo Teorema da Seqüência Monótona segue que (t_n) converge.

Afirmamos que $\lim t_n = \lim s_n = e$. Com efeito, o fato de que $\lim t_n \leq \lim s_n = e$ decorre diretamente do Teorema 7.4, uma vez que vale $t_n < s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Agora, tomando $n > m$, vale

$$t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Fixando m e fazendo $n \to \infty$ obtemos

$$\lim t_n \geq 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{m!} = s_m.$$

Fazendo agora $m \to \infty$, obtemos $\lim t_n \geq \lim_{m\to\infty} s_m = e$. Segue, então, que $\lim t_n = e$.

□

Subseqüências e o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Como uma seqüência de números reais é por definição uma função $\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dada uma função qualquer $\mathbf{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ (isto é, uma seqüência de números naturais) a função composta $\mathbf{x} \circ \mathbf{n} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é também seqüência de números reais. As subseqüências de uma dada seqüência $\mathbf{x}$ constituem os casos especiais, em que a função $\mathbf{n}$ é crescente, dessa forma de obter novas seqüências a partir de uma seqüência dada.

Definição 8.2
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma seqüência de números reais e $\mathbf{n} = (n_k)$ uma seqüência crescente de números naturais, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. Então a seqüência $\mathbf{x} \circ \mathbf{n} = (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}, \ldots)$ é chamada uma **subseqüência** de $\mathbf{x}$.

Por exemplo, dada a seqüência $(1/n)$ as seqüências $(1/2k)$ e $(1/(2k-1))$ são ambas subseqüências suas com $n_k = 2k$ e $n_k = 2k - 1$ para $k \in \mathbb{N}$, respectivamente. Outros exemplos de subseqüências dessa mesma seqüência são as seqüências $(1/2^k)$ e $(1/k!)$, com $n_k = 2^k$ e $n_k = k!$, respectivamente. Por outro lado, a seqüência

$$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{3k}, \frac{1}{3k-1}, \frac{1}{3k-2}, \dots)$$

não é subseqüência de $(1/n)$, pois a seqüência (n_k) correspondente não é crescente.

O resultado seguinte afirma que todas as subseqüências de uma seqüência convergente convergem para o mesmo limite da seqüência.

Teorema 8.3
Se uma seqüência de números reais (x_n) converge para $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então qualquer subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) também converge para $\bar{x}$.

Prova: Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Existe N_0 tal que se $n > N_0$, então $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Como $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$, é fácil mostrar usando Indução Matemática que $n_k \geq k$. Portanto, se $k > N_0$, então $n_k \geq k > N_0$ e, portanto, $|x_{n_k} - \bar{x}| < \varepsilon$. Decorre daí que (x_{n_k}) também converge para $\bar{x}$.

□

Uma conseqüência imediata porém bastante útil do Teorema 8.3 é o seguinte critério para testar a divergência de seqüências.

Teorema 8.4
Suponhamos que $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência e que (x_{n_k}) e (x_{m_k}) são duas subseqüências de $\mathbf{x}$ satisfazendo: existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|x_{n_k} - x_{m_k}| > \varepsilon_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Então $\mathbf{x}$ é divergente.

Prova: Com efeito, se existe $\bar{x} = \lim x_n$, então, pelo Teorema 8.2, $\bar{x} = \lim x_{n_k} = \lim x_{m_k}$. Daí teríamos, pelos resultados da aula anterior,

$$0 = |\bar{x} - \bar{x}| = \lim_{k\to\infty} |x_{n_k} - x_{m_k}| \geq \varepsilon_0 > 0,$$

o que é um absurdo, provando assim que $\mathbf{x}$ é divergente.

□

Exemplos 8.2

(a) $\lim(1 + \frac{1}{n^2})^{n^2} = e$.

A seqüência (y_k), com $y_k := (1+\frac{1}{k^2})^{k^2}$, é uma subseqüência da seqüência (t_n), com $t_n = (1 + 1/n)^n$. Logo, pelo Teorema 8.3, $\lim(1 + \frac{1}{k^2})^{k^2} = \lim(1 + 1/n)^n$.

(b) A seqüência $\mathbf{x} = ((1 + (-1)^n)/2 - (-1)^n/n)$ é divergente.

Com efeito, $\mathbf{x} = (x_n)$ com $x_{2k-1} = 1/k$ e $x_{2k} = 1 - 1/k$ para $k \in \mathbb{N}$, de modo que as subseqüências (x_{2k-1}) e (x_{2k}) convergem para 0 e 1, respectivamente. Portanto, pelo Teorema 8.4, $\mathbf{x}$ é divergente.

A seguir vamos enunciar e provar o célebre Teorema de Bolzano-Weierstrass assim nomeado em referência aos matemáticos Bernhard Bolzano (1781–1848) e Karl Weierstrass (1815–1897) que foram os primeiros a estabelecê-lo. Ele foi, na verdade, provado primeiramente por Bolzano, mas essa prova se perdeu. Foi depois redemonstrado por Weierstrass e se tornou uma peça central da Análise. Mais tarde descobriu-se que o teorema havia sido provado por Bolzano muito antes de Weierstrass e daí veio seu nome.

Teorema 8.5 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)
Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.

Prova: Como o conjunto de valores $\mathbf{x}(\mathbb{N}) = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado, ele está contido num intervalo fechado $I_1 := [a, b]$. Façamos $n_1 = 1$. Agora, dividimos o intervalo I_1 em dois intervalos fechados de igual comprimento I_1' e I_1'', isto é, $I_1' := [a, (a+b)/2]$ e $I_1'' := [(a+b)/2, b]$. Distinguimos assim dois subconjuntos de $\mathbb{N}$, a saber,

$$\mathbb{N}_1' := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1,\ x_n \in I_1'\} \quad \text{e} \quad \mathbb{N}_1'' := \{b \in \mathbb{N} : n > n_1,\ x_n \in I_1''\}.$$

Como $\mathbb{N}_1' \cup \mathbb{N}_1'' = \mathbb{N}_1 := \{n \in \mathbb{N} : n > n_1\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, temos que pelo menos um dos dois conjuntos, $\mathbb{N}_1''$ e $\mathbb{N}_1''$, é infinito. Chamemos um desses dois subconjuntos que seja infinito de $\mathbb{N}_2$, o subintevalo correspondente de I_2 e chamemos de n_2 o menor elemento de $\mathbb{N}_2$, cuja existência é dada pelo Princípio da Boa Ordenação. Observe que $x_{n_2} \in I_2$. Vamos mostrar por Indução Matemática que é possível construir dessa forma uma família de intervalos fechados limitados I_1, I_2,...,I_k,..., com $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \cdots$ e uma seqüência de números naturais (n_k) com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, tais que $x_{n_k} \in I_k$. Suponhamos por indução que $I_1, I_2, \dots, I_k$ e $n_1, n_2, \dots, n_k$ tenham sido definidos satisfazendo $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k$, $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ e tais que $x_{n_j} \in I_j$, $j = 1, \dots, k$. Sejam $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \dots, \mathbb{N}_k$ definidos indutivamente por $\mathbb{N}_j := \{n \in \mathbb{N}_{j-1} : n > n_{j-1},\ x_n \in I_{j-1}\}$. De novo, dividimos o intervalo I_k em dois subintervalos de igual comprimento, I_k' e I_k'', e definimos

$$\mathbb{N}_k' := \{n \in \mathbb{N}_k : n > n_k,\ x_n \in I_k'\}, \qquad \mathbb{N}_k'' := \{n \in \mathbb{N}_k : n > n_k,\ x_n \in I_k''\},$$

Chamemos de $\mathbb{N}_{k+1}$ a um desses dois subconjuntos de $\mathbb{N}_k$ que seja infinito, denotemos por I_{k+1} o subintervalo de I_k correspondente, e façamos $n_{k+1} := \inf \mathbb{N}_{k+1}$. Temos então que $I_k \supset I_{k+1}$, $n_k < n_{k+1}$ e $x_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Fica, assim, provada por indução a existência da família de intervalos fechados encaixados $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset I_{k+1} \supset \cdots$ e da seqüência de números naturais (n_k) com $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$, tais que $x_{n_k} \in I_k$.

Como o comprimento de I_k é igual a $(b-a)/2^{k-1}$, segue do Teorema 5.12 (Propriedade dos Intervalos Encaixados) que existe um único ponto $\xi \in I_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como ambos x_{n_k} e ξ pertencem a I_k, temos

$$|x_{n_k} - \xi| \leq \frac{(b-a)}{2^{k-1}},$$

donde concluímos que a subseqüência (x_{n_k}) converge para ξ.

$\square$

O próximo resultado é uma aplicação do Teorema de Bolzano-Weierstrass. Em sua prova, vamos utilizar o fato de que se $\mathbf{x}'$ é uma subseqüência de $\mathbf{x}$, então $\mathbf{x}'$ é, com todo direito, também uma seqüência e, sendo assim, também possui subseqüências. Observamos que se $\mathbf{x}''$ é uma subseqüência de $\mathbf{x}'$, então $\mathbf{x}''$ também é uma subseqüência de $\mathbf{x}$.

Teorema 8.6
Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma seqüência limitada de números reais e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tendo a propriedade de que toda subseqüência convergente de $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$. Então a seqüência $\mathbf{x}$ converge a $\bar{x}$.

Prova: Como (x_n) é limitada, podemos obter $M > 0$ tal que $|x_n| < M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, por absurdo, que $\mathbf{x}$ não converge a $\bar{x}$. Então existe um $\varepsilon_0 > 0$ e uma subseqüência (x_{n_k}) de (x_n) tal que

$$|x_{n_k} - \bar{x}| \geq \varepsilon_0 \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \tag{8.3}$$

De fato, a negação da afirmação

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N_0 \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon), \tag{8.4}$$

que é a definição formal de $x_n \to \bar{x}$, é a proposição

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})(n_k > k \text{ e } |x_{n_k} - \bar{x}| \geq \varepsilon_0), \tag{8.5}$$

que equivale à afirmação que fizemos contendo (8.3). Observe que, apenas por conveniência, ao escrever a negação de (8.4), trocamos as variáveis ε, N_0, n pelas variáveis ε_0, k, n_k, o que é plenamente de nosso direito.

Agora, temos $|x_{n_k}| < M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass implica que a seqüência $\mathbf{x}' = (x_{n_k})$ possui uma subseqüência convergente $\mathbf{x}''$. Como $\mathbf{x}''$ também é subseqüência de $\mathbf{x}$, por hipótese devemos ter $\lim \mathbf{x}'' = \bar{x}$. Portanto, todos os termos de $\mathbf{x}''$ devem ultimadamente pertencer a ε_0-vizinhança de $\bar{x}$, $V_{\varepsilon_0}(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \bar{x}| < \varepsilon_0\}$, o que contradiz (8.3) e conclui a prova do teorema.

□

Exemplos 8.3

(a) Suponhamos que $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência tal que as suas subseqüências $\mathbf{x}' := (x_{2k-1})$ e $\mathbf{x}'' := (x_{2k})$, correspondentes aos índices ímpares e pares, respectivamente, convergem ambas para $\bar{x}$. Então (x_n) converge para $\bar{x}$.

Essa afirmação pode ser provada sem nenhuma dificuldade usando-se diretamente a Definição 6.2. Em vez disso, vamos prová-la aplicando o Teorema 8.6.

Com efeito, as subseqüências $\mathbf{x}'$ e $\mathbf{x}''$ são convergentes e, portanto, são limitadas. Como o conjunto dos valores de $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(\mathbb{N})$, é a união do conjunto dos valores de $\mathbf{x}'$, $\mathbf{x}'(\mathbb{N})$, com o conjunto dos valores de $\mathbf{x}''$, $\mathbf{x}''(\mathbb{N})$, segue que $\mathbf{x}$ é limitada.

Agora, dada qualquer subseqüência convergente $\mathbf{z} := (x_{n_k})$ de (x_n), então pelo menos uma das duas afirmações seguintes é verdadeira: (i) n_k é ímpar para uma infinidade de sub-índices $k \in \mathbb{N}$; (ii) n_k é par para uma infinidade de sub-índices $k \in \mathbb{N}$. Em qualquer caso, será possível obter uma subseqüência $\mathbf{z}'$ de $\mathbf{z}$ cujos índices são todos ímpares ou todos pares. Então, $\mathbf{z}'$ será uma subseqüência de $\mathbf{x}'$ e, assim, pelo Teorema 8.1, converge a $\bar{x}$. Mas então, pela mesma razão, devemos ter $\lim \mathbf{z} = \bar{x}$. Logo, podemos usar o Teorema 8.6 para concluir que $\lim x_n = \bar{x}$.

Sugerimos que você dê uma demonstração dessa mesma proposição usando diretamente a Definição 6.2.

(b) Seja (x_n) a seqüência definida indutivamente por

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} := \frac{1}{1 + x_n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os termos dessa seqüência têm a forma

$$\frac{1}{1+1}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}}, \ldots$$

e, por isso, constituem o que chamamos *fração contínua* ou *fração continuada*. Mostraremos que

$$\lim x_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Por indução, provamos facilmente que $0 \le x_n \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, isso é verdade para $n = 1$ e, supondo que $0 \le x_k \le 1$, segue da fórmula $x_{k+1} = 1/(1 + x_k)$ que $0 \le x_{k+1} \le 1$, o que prova que $0 \le x_n \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vemos por substituição direta que $x_2 = 1/2$, $x_3 = 2/3$ e $x_4 = 3/5$. Portanto, $x_1 = 1 > x_3 = 2/3$ e $x_2 = 1/2 < x_4 = 3/5$. Seja $y_k := x_{2k-1}$ e $z_k := x_{2k}$. Agora, temos

$$x_{n+2} = \frac{1}{1+x_{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x_n}} = \frac{1+x_n}{2+x_n} = 1 - \frac{1}{2+x_n}. \tag{8.6}$$

Logo, se $x_n < x_{n+2}$, então $x_{n+2} < x_{n+4}$. Da mesma forma, se $x_n > x_{n+2}$, então $x_{n+2} > x_{n+4}$.

Portanto, temos $x_1 > x_3 > \cdots > x_{2k-1} > x_{2k+1} > \cdots$, e $x_2 < x_4 < \cdots < x_{2k} < x_{2k+2} < \cdots$. Assim, a subseqüência (y_n) é decrescente e a subseqüência (z_n) é crescente. Além disso, ambas são limitadas e, portanto, são convergentes, pelo Teorema da Seqüência Monótona. Mais ainda, de (8.6) temos

$$y_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+y_n} \quad \text{e} \quad z_{n+1} = 1 - \frac{1}{2+z_n}.$$

Sejam $\bar{y} := \lim y_n$ e $\bar{z} := \lim z_n$. Segue do que foi visto na aula anterior que $0 \le \bar{y} \le 1$, $0 \le \bar{z} \le 1$, $\bar{y} = 1 - 1/(2+\bar{y})$ e $\bar{z} = 1 - 1/(2+\bar{z})$. Logo, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ são ambos raízes não-negativas da equação de segundo grau

$$t^2 + t - 1 = 0,$$

cujas raízes são $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. Assim, $\bar{y} = \bar{z} = (-1+\sqrt{5})/2$. Segue do exemplo anterior que $\lim x_n = (-1+\sqrt{5})/2$.

Exercícios 8.1

1. Seja $x_1 = 3$ e $x_{n+1} := \frac{1}{5}x_n + 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é limitada e monótona. Encontre o limite.

2. Seja $x_1 > 1$ e $x_{n+1} := 2 - 1/x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é limitada e monótona. Encontre o limite.

3. Seja $x_1 \geq 2$ e $x_{n+1} := 1 + \sqrt{x_n - 1}$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) é decrescente e limitada inferiormente por 2. Encontre o limite.

4. Seja $x_1 = 1$ e $x_{n+1} := \sqrt{2x_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (x_n) converge e encontre o limite.

5. Seja $y_1 := \sqrt{p}$, onde $p > 0$ e $y_{n+1} := \sqrt{p + y_n}$ para $n \in \mathbb{N}$. Mostre que (y_n) converge e encontre o limite. (Dica: Primeiro mostre por indução que $1 + 2\sqrt{p}$ é uma cota superior.)

6. Seja $a > 0$ e $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Determine se (x_n) diverge ou converge. (Dica: Mostre que (x_n) é crescente e veja o que acontece quando se supõe que x_n converge.)

7. Estabeleça a convergência e encontre o limite das seguintes seqüências:

   (a) $((1 + 1/n)^{n+1})$,

   (b) $((1 + 1/n)^{2n})$,

   (c) $((1 + 1/(n+1))^n)$,

   (d) $((1 - 1/n)^n)$.

8. Estabeleça a convergência e ache os limites das seguintes seqüências:

   (a) $\left((1 + 1/n^2)^{2n^2}\right)$,

   (b) $\left((1 + 1/(9n^2))^{n^2}\right)$,

   (c) $((1 + 1/2n)^n)$,

   (d) $((1 + 2/n)^n)$.

9. Determine os limites das seguintes seqüências:

   (a) $\left((3n)^{1/2n}\right)$,

   (b) $((1 + 2/n)^{3n})$.

10. Suponha que toda subseqüência de $\mathbf{x} = (x_n)$ possui uma subseqüência que converge a um mesmo número real $\bar{x}$. Mostre que $\lim x_n = \bar{x}$.

11. Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida indutivamente por $x_1 = 1$ e $x_{n+1} = 1/(2 + x_n)$. Mostre que $\mathbf{x}$ converge e encontre o limite.

12. Considere a seqüência de Fibonacci definida indutivamente por $y_1 = 1$, $y_2 = 1$ e $y_{n+2} := y_{n+1} + y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida por $x_n = y_n/y_{n+1}$. Mostre que $\mathbf{x}$ converge e encontre o limite.

13. Considere a seqüência (x_n) definida indutivamente por $x_1 := 1$ e $x_{n+1} = 1/(a_n + x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $a_{2k-1} := 1$ e $a_{2k} := 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

    (a) Mostre que $0 \le x_n \le 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    (b) Mostre que $\mathbf{x}' := (x_{2k-1})$ é decrescente e $\mathbf{x}'' := (x_{2k})$ é crescente.

    (c) Encontre $\bar{x}' := \lim_{k\to\infty} x_{2k-1}$ e $\bar{x}'' := \lim_{k\to\infty} x_{2k}$.

    (d) Observe que $\bar{x}' \neq \bar{x}''$ e justifique a conclusão de que (x_n) é divergente.