Álgebra Linear I

Exercícios Programados 7 – EP7

Resolução

1. Considere os subespaços U = [(1, 0, 0)] e V = [(1, 0, 1),(1, 1, 0)] de $\Re^3$. Determine $U \cap V$ e U + V. Verifique se a soma é direta.

Solução.

(x, y, z) $\in$ U, (x, y, z) = a(1, 0 ,0). Daí, a =x, y = z = 0 e H = {(x, 0, 0)/ x $\in \Re$ }.

(x, y, z) $\in$ V, (x, y, z) = a(1, 0 ,1) + b(1, 1, 0). Daí, a + b = x, b = y e a = z e V = {(y + z, y, z)/ y,z $\in \Re$ }.

Então, $U \cap V$ = {(x, y, z) $\in \Re^3$/ (x, y, z) $\in$ U e (x, y, z) $\in$ V} = {(x, y, z) $\in \Re^3$/ y = z = 0 e x = 0 + 0 = 0} = {(0, 0 ,0)}.

U + V = $\Re^3$, pois todo vetor (a, b, c) em $\Re^3$ pode ser escrito na forma (a, b, c)= (a-(b + c), 0, 0) + (b + c, b , c)}, ou podemos observar que dim U + V = 1 + 2 – 0 = 3.

O $\Re^3$ é soma direta de seus subespaços U e V, pois U + V = $\Re^3$ e $U \cap V$ = {(0, 0 ,0)}.

2. Sejam

   W_1 = {(x, y, z, t) / x + y = 0 e z – t = 0} e W_2 = {(x, y, z, t) / x – y - z + t = 0} subespaços de $\Re^4$.

   a) Determine $W_1 \cap W_2$
   b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.
   c) Determine $W_1 + W_2$
   d) Exiba uma base para $W_1 + W_2$
   e) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.

Solução.

(a) W_1= {(x, -x, y, y)/x, y $\in \Re$ } e W_2 = {(x, y, z, y + z -x) / x, y , z $\in \Re$ }.

$W_1 \cap W_2$ = {(0, 0, x, x)/ x$\in \Re$ }.

(b) Como (0, 0, x, x) = x(0, 0, 1, 1), o conjunto {(0, 0, 1, 1)} é uma base para $W_1 \cap W_2$.

© Como dim $W_1 + W_2$ = 2 + 3 – 1 = 4, $W_1 + W_2$ = 4, logo uma base é por exemplo a canônica do $\Re^4$, {(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)}.

(d) $\Re^4$ embora seja a soma de W_1 e W_2, ele não é soma direta deles, pois a interseção de W_1 e W_2 não é o conjunto formado pelo 0=(0,0,0,0).

3. Considerando o espaço euclidiano $\Re^3$ e os pares de vetores u = (2, 1, -5) e v = (5, 0, 2). Calcule:

   a) O produto interno de u e v (Notação: <u, v>)
   b) A norma de u (Notação: || u ||)
   c) A norma de v
   d) O ângulo entre u e v.

   Solução:

a) $\langle (2,-1,-5),(5,0,2)\rangle$ = 2.5 +(-1).0 + (-5).2 = 0.

b) $\|(2,1,-5)\| = \sqrt{2^2+1^2+(-5)^2} = \sqrt{4+1+25} = \sqrt{30}$

c) $\|(5,0,2)\| = \sqrt{5^2+0^2+2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$

d) Como o produto interno destes vetores é zero eles são ortogonais, o ângulo entre eles é 90º. Ou, se θ é o ângulo entre u e v, verificamos que θ = 90º pela igualdade $\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \frac{0}{\sqrt{30}\sqrt{29}}$ =0.

4. Considere o seguinte produto interno em P_2: $p.q = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$, sendo $p = a_2x^2 + a_1x + a_0$ e $p = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dados os vetores $p_1 = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 3x - 4$ e $p_3 = 1 - x^2$, Calcule:

1. $p_1.p_2$
2. $|p_1|$ e $|p_3|$
3. $|p_1 + p_2|$
4. $\frac{p_2}{|p_2|}$
5. Cosseno do ângulo entre p_2 e p_3

Solução.

(a) $p_1.p_2 = -18$

(b) $|p_1| = \sqrt{p_1p_1} = \sqrt{14}$ e $|p_3| = \sqrt{p_3p_3} = \sqrt{2}$

(c) $|p_1 + p_2| = \sqrt{3}$

(d) $\frac{p_2}{|p_2|} = \frac{3x-4}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}$

(e) $\cos\theta = \frac{-4}{5\sqrt{2}} = \frac{-2\sqrt{2}}{5}$

5. Considere V o espaço vetorial das matrizes quadradas de ordem 2:

$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a,b,c,d \in \Re\right\}$. Sejam S_1 e S_2 subespaços de V:

$S_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a,b \in \Re\right\}, S_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}; a,c \in \Re\right\}$. Determine a soma e a interseção dos subespaços S_1 e S_2.

Solução

$$S_1 + S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}; a, b, c \in \Re \right\} \text{ e } S_1 \cap S_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; a \in \Re \right\}$$