Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Primeira Avaliação Presencial de Álgebra Linear I - 12/04/2008
GABARITO

Nome:____

Pólo:____

1ª Questão.(2,0pts)

(a) Encontre todos os valores de a para os quais a inversa de $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & a\end{bmatrix}$ existe.
(b) Calcule A^{-1} nesses casos.

Solução.
(a) $\det A = -a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0.$
(b) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \; para \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \; para \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$para \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -2/a & 1/a & 1/a\end{bmatrix}$. Logo, se $a \neq 0$, $A^{-1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -2/a & 1/a & 1/a\end{bmatrix}$.

2ª Questão. (2,0pts) Determine, se possível, os valores de k para que o sistema a seguir, nas incógnitas x, y, z, tenha:
(a) Solução única.
(b) Nenhuma solução.
(c) Infinitas soluções.

$$\begin{cases} y + 3kz = 0 \\ x + 2y + 7z = 1 \\ 2x + y + 4z = k \end{cases}$$

Solução.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3k & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & k \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3k & 0 \\ 1 & 0 & -6k+7 & 1 \\ 2 & 0 & -3k+4 & k \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3k & 0 \\ 1 & 0 & -6k+7 & 1 \\ 0 & 0 & 9k-10 & k-2 \end{bmatrix}$$

Daí, $z = \dfrac{k-2}{9k-10}$.

Logo,

(a) $k \neq {}^{10}\!/\!_{9}$.

(b) $k = {}^{10}\!/\!_{9}$. .

(c) não há valor para k.

3ª Questão. (2,0 pts) Considere o subconjunto A = {(1, 2, 1), (2, 1, -2)} do $\Re^3$.

(a) Determine o subespaço gerado pelos vetores de A.
(b) Dê a dimensão e uma base para o subespaço determinado em (a).
(c) Mostre que o vetor w = (-5, -1, 7) pertence ao subespaço gerado por A.
(d) Para qual valor de k o vetor (1, k, 1) é combinação linear dos vetores de A.

Solução.

(a) (a, b, c) pertencerá ao subespaço gerado por A se
(a, b, c) = x(1, 2, 1) + y(2, 1, -2).

Logo, o sistema $\begin{cases} a + 2b = x \\ 2a + b = y \\ a - 2b = z \end{cases}$ deve ser compatível. Por escalonamento, obtemos o seguinte sistema equivalente $\begin{cases} a + 2b = x \\ -3b = -2x + y \\ -4b = -x + z \end{cases}$. Devemos ter então 5x-4y+3z=0.

Logo, o subespaço gerado por A é dada por
S = {(x, y, z) $\in \Re^3$/ 5x - 4y + 3z = 0}.

(b) dim S = 2 e como A é um conjunto LI, A é uma base para S .

(c) Basta mostrar que (-5, -1, 7) satisfaz a equação 5x - 4y + 3z = 0.

Mas, -25+4+21= 0. Daí, (-5, -1, 7) pertence ao subespaço gerado por A.

(d) (1, k, 1) é combinação dos vetores de A se (1, k, 1) $\in$ S. Logo, k = 2.

4ª Questão. (3,0pts) Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Caso verdadeiras justifique, caso contrário dê um contra-exemplo.

(a) Se P e Q são matrizes ortogonais de mesma ordem, a matriz PQ é uma matriz ortogonal.
(b) Se A é uma matriz de ordem 4 e det A = 5, det 3A = 180.

(c) O conjunto S = $\{(x, y, z) / x = y = z\}$ é um subespaço vetorial de $\Re^3$.

(d) $[(1,2),(-1,2),(-1,-2)] = \Re^2$.

(e) $\{(1,2),(0,0)\}$ é uma base do $\Re^2$.

(f) $\{(1,-1,-2),(-1,1,2),(1,2,3)\}$ é uma base do $\Re^3$.

Solução.

(a) Verdadeira. PQ é ortogonal se $(PQ)(PQ)^T=I$. $(PQ)(PQ)^T= PQQ^TP^T = PIP^T = PP^T=I$ (pois P é ortonal e Q é ortogonal).

(b) Falsa. Det3A = $3^4.5 = 405$.

(c) Verdadeira. S é diferente do vazio e verifica as propriedades:

(i) Se u=(x,x,x) e (y,y,y) são elementos de S u + v =(x+y,x+y,x+y) é um elemento de S.

(ii) Se (x,x,x) é um elemento de S e a um real, au=(ax,ax,ax) é um elemento de S.

(d) Verdadeira.

Note que (x,y) = $(x, y) = (\frac{2x + y}{4})(1,2) + (\frac{-2x + y}{4})(-1,2) + (0)(-1,-2).$.

(e) Falsa. Este conjunto contém o vetor nulo, logo é LD.

(f) Falsa. Este conjunto é LD, o vetor (1,-1,-2) é múltiplo escalar do vetor (-1,1,2).

5ª Questão.(1,0pt) Considere o subconjunto S = $\{(x, y) / y = x + 1\}$ de $\Re^2$. Verifique se S é um subespaço vetorial de $\Re^2$. Justifique sua resposta.

Solução.

Observe que $(0,0) \notin S$. Logo, S não é um subespaço vetorial de $\Re^2$.