Matemática Discreta – AP3 – 2006/2

1. (1,5) Quantos anagramas podemos formar com a palavra $PROBLEMA$ nos quais as letras P, R e O ocorrem duas a duas separadas? Por exemplo, $\underline{P}B\underline{R}L\underline{O}EMA$ é um anagrama deste tipo mas $\underline{P}B\underline{RO}LEMA$ não é.

Solução:

Vamos contar o total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ e subtrair deste o total de anagramas nos quais as letras P, R e O ocorrem sempre juntas.

O total de anagramas da palavra problema é $P(8) = 8!$.

Cada anagrama onde as letras P, R e O ocorrem juntas pode ser formado se realizamos duas tarefas:

$$\begin{array}{lll} T_1 & : & \text{escolher uma ordem para escrever as letras } P, R, O \\ & & \text{e considerar esta seqüência como uma única letra } X \\ T_2 & : & \text{formar um anagrama com as letras } X, B, L, E, M, A. \end{array}$$

Assim, pelo PFC, o número total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ que têm as letras P, R e O sempre juntas é $3! \times 6!$.

Logo, o total de anagramas nos quais as letras P, R e O ocorrem duas a duas separadas é dado por $8! - (3! \times 6!)$.

---

2. Uma caixa contém nove etiquetas numeradas de 1 a 9, inclusive. Três etiquetas são retiradas da caixa, uma de cada vez, com reposição.

(a) (0,5) Descreva o espaço amostral Ω deste experimento e determine o número de elementos de Ω.

(b) (1,0) Determine a probabilidade de que as etiquetas sejam, na ordem em que são retiradas, *ímpar*, *par* e *ímpar*, respectivamente.

(c) (0,5) Determine a probabilidade de que as etiquetas sejam, na ordem em que são retiradas, *par*, *ímpar* e *par*, respectivamente.

(d) (1,0) Determine a probabilidade de que duas etiquetas de paridade distintas sejam retiradas consecutivamente. Dizemos que duas etiquetas *são de paridades distintas* quando uma é par e a outra é ímpar ou quando uma é ímpar e a outra é par.

Solução:

(a) O espaço amostral Ω é o conjunto de todas as triplas ordenadas (x, y, z) de três elementos tomados no conjunto $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

Temos que $\#\Sigma = 9 \times 9 \times 9 = 9^3$.

(b) Considere o evento:

$$A = \{(x, y, z) \in \Omega : x \text{ é ímpar, } y \text{ é par e } z \text{ é ímpar}\}.$$

O evento A tem $5 \times 4 \times 5 = 4 \times 5^2$ elementos.

Logo, a probabilidade procurada é $P(A) = \dfrac{4 \times 5^2}{9^3}$.

(c) Considere o evento:

$$B = \{(x, y, z) \in \Omega : x \text{ é par, } y \text{ é ímpar e } z \text{ é par}\}.$$

O evento B tem $4 \times 5 \times 4 = 4^2 \times 5$ elementos.

Logo, a probabilidade procurada é $P(A) = \dfrac{4^2 \times 5}{9^3}$.

(d) Considere o evento:

$$C : \text{as etiquetas são de paridade distintas.}$$

Observe que C é o evento $A \cup B$ e que $A \cap B = \emptyset$.

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento C é $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \dfrac{4 \times 5^2}{9^3} + \dfrac{4^2 \times 5}{9^3} = \dfrac{4 \times 5^2 + 4^2 \times 5}{729}$.

---

3. Um dado é viciado de maneira que a probabilidade de sair um certo número é diretamente proporcional ao seu valor. Por exemplo, o número 5 é 5 vezes mais provável de sair que o número 1. Determine a probabilidade:

   (a) (1,0) De cada evento simples;

   (b) (1,0) de sair um número primo, quando o dado é arremessado;

   (c) (1,0) de sair 2 sabendo que saiu um número primo.

Solução:

Temso que $P(1) = x$, $P(2) = 2x$, $P(3) = 3x$, $P(4) = 4x$, $P(5) = 5x$ e $P(6) = 6x$.

(a) Pela definição de probabilidade, $P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6) = x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x = 1$. Logo, $x = \dfrac{1}{21}$.

(b) Considere o evento:

$$A = \text{ o resultado é primo.}$$

Temos que $A = \{2, 3, 5\}$.

Logo, a probabilidade procurada é $P(A) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{3}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{10}{21}$.

(c) Considere o evento $B = \{2\}$.

Queremos determinar $P(B|A)$. Temos $A \cap B = \{2\}$. Logo, a probabilidade procurada é $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{21}}{\frac{10}{21}} = \dfrac{3}{10}$.

---

4. Para o argumento abaixo, faça o que se pede:

(a) (1,0) Destaque as proposições simples que compõem as premissas e a conclusão do argumento.

(b) (0,5) Determine a estrutura lógica do argumento.

(c) (1,0) Determine se o argumento é *válido* ou *inválido*, usando uma tabela-verdade.

> **Argumento:** Se Mozart compõe uma sinfonia e Salieri compõe uma ópera, o Rei fica feliz. Se Salieri não compõe uma ópera, Mozart não compõe uma sinfonia. Logo, se Mozart compõe uma sinfonia, o Rei fica feliz.

Solução:

(a) Destacando as premissas simples que compõem o argumento, temos:

p : Mozart compõe uma sinfonia.
q : Salieri compõe uma ópera.
r : o Rei fica feliz.

(b) Assim, a estrutura lógica do argumento é dada por:

$$\begin{array}{ll} \textit{Premissas:} & (p \wedge q) \rightarrow r, \\ & \sim q \rightarrow \sim p, \\ \textit{Conclusão:} & p \rightarrow r. \end{array}$$

(c) Construindo uma tabela, de acordo com o exposto no Módulo, se verifica que $(((p \wedge q) \rightarrow r) \wedge (\sim q \rightarrow \sim p)) \rightarrow (p \rightarrow r)$ é uma tautologia e que o argumento é válido.