

Observações: Caro aluno, aqui está o EP3, referente as aulas 6 e 7 do Módulo 1.

Este EP3 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre o texto das aulas;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- uma dica de sítio na internet aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Os alunos, geralmente, apresentam uma enorme dificuldade na redação de soluções adequadas para os problemas de contagem propostos nos EPs, ADs e APs. Neste EP3, eu formulei questões que exigem soluções baseadas diretamente nas soluções apresentadas no Módulo. Desta maneira, você tem um modelo a seguir, na hora de redigir as suas soluções.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aulas 6 e 7 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O princípio fundamental da contagem;
- Permutações;
- Fatorial de um número natural;
- Número de permutações.

O PFC é um princípio básico que será muito usado, em conjunto com outros princípios —a saber, o princípio da bijeção e o princípio da divisão— que são implicitamente utilizados no Módulo de MD. Na verdade, a maioria dos problemas de combinatória básica de contagem podem ser resolvidos apenas pelo uso destes princípios. Mais especificamente, as fórmulas para o número de permutações, arranjos, permutações com elementos repetidos, permutações circulares e combinações, que serão vistas nas Aulas 7–11, nada mais são que “abreviações” da aplicação conjunta do PFC, do PB e do PD. Portanto, muita atenção na Aula 6 e nas deduções das fórmulas que são apresentadas nas aulas seguintes.

Sobre a Aula 6:

- **Página 58:** No enunciado do PM para duas tarefas, dentro do retângulo em destaque, o texto deve ser:

Suponha que duas tarefas T_1 e T_2 são dadas, satisfazendo as seguintes condições:

- T_1 pode ser realizada de N_1 maneiras;
- T_2 pode ser realizada de N_2 maneiras;
- N_2 está completamente determinado, dado que a tarefa T_1 já foi realizada;

então existem $N_1 \times N_2$ maneiras de se realizar as tarefas T_1 e T_2 em seqüência, isto é, realizar a tarefa T_1 e em seguida realizar a tarefa T_2 .

- **Página 58:** No enunciado do PM para k tarefas, dentro do retângulo em destaque, o texto deve ser:

Suponha que k tarefas T_1, T_2, \dots, T_k são dadas, satisfazendo as seguintes condições:

- T_1 pode ser realizada de N_1 maneiras;
- T_2 pode ser realizada de N_2 maneiras;
- ...
- T_k pode ser realizada de N_k maneiras;
- para cada i , $2 \leq i \leq k$, o número N_i , de maneiras de se realizar a tarefa T_i , está completamente determinado, dado que a tarefa anterior T_{i-1} já foi realizada;

então existem $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_k$ maneiras de se realizar as tarefas T_1, T_2, \dots, T_k em seqüência, isto é, realizar a tarefa T_1 , em seguida realizar a tarefa T_2 , ... e, finalmente, realizar a tarefa T_k .

- **Página 60:** No Exemplo 34, observe que as chaves numéricas podem ser iniciadas com o algarismo 0. Em problemas envolvendo numerais, você deve sempre verificar, antes de iniciar a contagem, se esta liberdade pode ser tomada, ou não.

Sobre a Aula 7:

- **Página 65:** Na definição de permutação, e em outras partes do texto, a expressão *ordenação de um conjunto* se refere uma configuração obtida pela *listagem dos elementos do conjunto, um a um, em uma fila vertical, sem repetições*.
- **Página 68:** No Exemplo 40, observe que, implicitamente, os autores estão admitindo que empates não ocorrem em nenhuma das posições finais da prova.
- **Página 69:** O comentário após o Exemplo 41 se estende a todos os problemas de contagem tratados no curso de MD, isto é, *dado um conjunto cujos elementos são usados para formar configurações que são contadas, admite-se (a menos quando se diz explicitamente o contrário) que os elementos do conjunto são distintos, dois a dois*.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios mal formulados:

- **Aula 6, Exercício 2:** Certifique-se de que você compreende bem a estrutura de um jogo da Loto e “guarde” o exercício para depois que tiver estudado a Aula 10.
- **Aula 6, Exercícios 10:** Certifique-se de que você compreende bem a estrutura do que o autor denomina *mostrador numérico* e troque a palavra “combinações” por “chaves”.
- **Aula 7, Exercício 7:** Os autores assumem que não ocorre nenhum tipo de empate em nenhuma das posições finais, o seja, que os nadadores chegam numa ordenação.
- **Aula 7, Exercício 9(c):** Observe que a restrição imposta é incompatível com a do enunciado geral. Portanto, considere este item como um NOVO exercício.

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Todos os exercícios apresentados nas Aulas 6 e 7 são essenciais. Você deve estudar detalhadamente todo o conteúdo e tentar resolver todos eles.

Se encontrar dificuldades, não desanime: procure os Tutores presenciais e a distância, e converse com outros alunos de MD.

Informações extras:

Para gerar anagramas automaticamente, em várias línguas, inclusive o Português, visite o sítio:

<http://wordsmith.org/anagram/index.html>

Alguns exercícios para fixação:

1. Em um certo país, as placas de automóveis são formadas por 5 letras do alfabeto A, B, \dots, Z , formado por 23 letras.
 - (a) Quantas placas podem ser formadas, no total?
 - (b) Quantas placas podem ser formadas, que não possuem ocorrências de letras repetidas?
 - (c) Quantas placas do tipo formado em (b) começam pela letra A ?
 - (d) Quantas placas do tipo formado em (b) começam ou pela letra A ou pela letra Z ?
 - (e) Quantas placas do tipo formado em (a) terminam com uma das vogais A, E, I, O, U ?
2. Um *anagrama* de uma palavra cujas letras são duas a duas distintas é uma ordenação do conjunto de letras da palavra, i.e., é uma configuração obtida pela listagem das letras, uma a uma, em uma fila vertical, sem repetições. Por exemplo, *IRACEMA* é um anagrama de *AMERICA*.
 - (a) Quantos são os anagramas da palavra *DISCRETA*?
 - (b) Quantos são os anagramas da palavra *DISCRETA* que começam com a letra C ?
 - (c) Quantos são os anagramas da palavra *DISCRETA* onde as letras C e R ocorrem juntas e na ordem CR ?
 - (d) Quantos são os anagramas da palavra *DISCRETA* onde as letras C e R ocorrem juntas?

Soluções comentadas:

1. Redação baseada no Exemplo 35 da Aula 6).
 - (a) Uma placa é uma seqüência $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5$ de 5 letras escolhidas entre as 23 letras disponíveis. Então, temos 23 possibilidades para l_1 , 23 possibilidades para l_2 , 23 possibilidades para l_3 , 23 possibilidades para l_4 e 23 possibilidades para l_5 . Portanto, pelo PFC, há no total de $23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 = 64.364.343$ placas de automóvel.
 - (b) Uma placa que não possuem ocorrências de letras repetidas é uma seqüência $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5$ de 5 letras distintas escolhidas entre as 23 letras disponíveis. Então, temos 23 possibilidades para l_1 , 22 possibilidades para l_2 , 21 possibilidades para l_3 , 20 possibilidades para l_4 e 19 possibilidades para l_5 . Portanto, pelo PFC, há no total $23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 = 4.037.880$ placas de automóvel que não possuem ocorrências de letras repetidas.
 - (c) Uma placa que começa pela letra A é uma seqüência $A l_2 l_3 l_4 l_5$ de 5 letras, onde $l_2 l_3 l_4 l_5$ é uma seqüência de 4 letras distintas escolhidas entre as 22 letras B, C, \dots, X, Y, Z , disponíveis. Então, temos 22 possibilidades para l_2 , 21 possibilidades para l_3 , 20 possibilidades para l_4 e 19 possibilidades para l_5 . Portanto, pelo PFC, há no total $22 \times 21 \times 20 \times 19 = 175.560$ placas de automóvel do tipo formado em (b) que começam pela letra A .
 - (d) Vamos particionar o universo das placas do tipo formado em (b) que começam ou pela letra A ou pela letra Z em 2 conjuntos. O conjunto das placas que começam pela letra A e o conjunto das placas que começam pela letra Z . Observe duas coisas:
 - Estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos;
 - Um raciocínio análogo ao que foi feito no item (c) garante que cada conjunto tem 175.560 elementos.

Portanto, PA e pelo PFC, há no total $2 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 = 2 \times 175.560 = 351.120$ placas de automóvel do tipo formado em (b) que começam ou pela letra A ou pela letra Z .

(e) Uma placa do tipo formado em (a) que termina com vogal é uma seqüência $l_1 l_2 l_3 l_4 v$ de 5 letras, onde v é uma vogal escolhida entre as 5 vogais disponíveis e $l_1 l_2 l_3 l_4$ é uma seqüência de 4 letras escolhidas entre as 22 letras disponíveis, após a escolha da vogal. Então, temos 5 possibilidades para v , 22 possibilidades para l_1 , 21 possibilidades para l_2 ,

20 possibilidades para l_3 e 19 possibilidades para l_4 . Portanto, pelo PFC, há no total $5 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 = 877.800$ placas de automóvel do tipo formado em (a) que terminam com vogal.

2. (Redação baseada no Exemplo 41 da Aula 7).

(a) Cada anagrama corresponde a uma permutação das letras D, I, S, C, R, E, T e A . O número total de permutações de 8 elementos é $8! = 40.320$. Portanto, há um total de 40.320 anagramas.

(b) Cada anagrama que começa com a letra C corresponde a uma permutação das letras D, I, S, R, E, T e A . O número total de permutações de 7 elementos é $7! = 5.040$. Portanto, há um total de 5.040 anagramas que começa com C .

(c) Considerando o par de palavras CR como uma única letra, cada anagrama onde as letras C e R ocorrem juntas e na ordem CR corresponde a uma permutação das letras D, I, S, CR, E, T e A . O número total de permutações de 7 elementos é $7! = 5.040$. Portanto, há um total de 5.040 anagramas onde as letras C e R ocorrem juntas e na ordem CR .

(d) Vamos particionar o universo de anagramas onde as letras C e R ocorrem juntas em 2 conjuntos. O conjunto dos anagramas nos quais as letras C e R ocorrem na ordem CR e o conjunto dos anagramas nos quais as letras C e R ocorrem na ordem RC . Observe duas coisas:

- Estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos;
- Um raciocínio análogo ao que foi feito no item (c) garante que cada conjunto tem 5.040 elementos.

Portanto, pelo PA, há no total $2 \times 7! = 2 \times 5040 = 10.080$ anagramas onde as letras C e R ocorrem juntas.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF