Aula 10 – Séries Numéricas

Metas da aula: Definir séries numéricas. Apresentar os primeiros resultados para estabelecer a convergência e a divergência de séries numéricas bem como exemplos de aplicação dos mesmos.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber resultados básicos estabelecendo a convergência e a divergência de séries numéricas bem como suas aplicações em exemplos concretos.

Introdução

Nesta aula iniciaremos nosso estudo sobre as séries numéricas. Estas nada mais são que sequências (s_n) onde o termo geral é escrito na forma $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ para alguma sequência de números reais (x_n).

Séries Numéricas

Comecemos com a definição formal do que vem a ser uma série numérica.

Definição 10.1
Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma sequência em $\mathbb{R}$, então a *série gerada por* $\mathbf{x}$ é a sequência $\mathbf{s} = (s_n)$ definida por

$$s_1 := x_1 \quad \text{e} \quad s_{n+1} := s_n + x_{n+1}.$$

Assim, temos

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Os números x_n são chamados os *termos* da série e os números s_n são chamados as *somas parciais* dessa série. Se $\lim s_n$ existe, dizemos que a série é convergente e chamamos esse limite a *soma* dessa série. Se o referido limite não existe, dizemos que a série $\mathbf{s}$ é *divergente*.

É usual se adotar as notações

$$\sum x_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \tag{10.1}$$

para designar a série (s_n) gerada por (x_n) como na Definição 10.1.

No caso de uma série $\sum x_n$ convergente é usual também usar-se as notações em (10.1) para denotar o $\lim s_n$. Portanto, as expressões em (10.1) poderão ser usadas tanto para denotar a série, seja ela convergente ou divergente, como o limite da mesma, no caso em que for convergente. Quando houver risco de confusão será mencionado explicitamente o significado dessas expressões no contexto em questão.

Em alguns casos, a sequência $\mathbf{x}$ geradora da série pode estar definida a partir de um índice inicial $n_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ diferente de 1, como $n_0 = 0, 2, 5$, etc, isto é, $\mathbf{x} := (x_n)_{n=n_0}^{\infty}$. Em tais casos usaremos a notação

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} x_n$$

para denotar tanto a série como o seu limite, no caso em que este existe. Por exemplo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n}{(n-1)(n-2)(n-3)}, \qquad \text{etc.}$$

Exemplos 10.1

(a) Você certamente já está bastante familiarizado com as séries geométricas. Uma tal série é gerada por uma sequência da forma $\mathbf{x} := (r^n)_{n=0}^{\infty}$ onde $r \in \mathbb{R}$ e, portanto, se escreve

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n + \cdots . \tag{10.2}$$

Como já foi visto anteriormente, se $|r| < 1$, então a série converge a $1/(1-r)$. De fato, se $s_n := 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$ para $n \geq 0$, tomando a diferença entre s_n e r vezes s_n, obtemos após simplificações

$$s_n(1-r) = 1 - r^{n+1}.$$

Portanto,

$$s_n = \frac{1}{1-r} - \frac{r^{n+1}}{1-r},$$

donde segue que

$$\left| s_n - \frac{1}{1-r} \right| \leq \frac{|r|^{n+1}}{|1-r|}.$$

Como $|r|^{n+1} \to 0$ quando $|r| < 1$, concluímos que a série (10.2) converge a $1/(1-r)$ se $|r| < 1$.

(b) Consideremos a série gerada por $((-1)^n)_{n=0}^{\infty}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots . \tag{10.3}$$

Temos então que $s_n = 1$ se $n \geq 0$ é par e $s_n = 0$ se n é ímpar; isto é, a sequência de somas parciais é $(1, 0, 1, 0, \ldots)$. Como essa sequência não é convergente, a série (10.3) é divergente.

(c) Consideremos a série $\sum 1/n(n+1)$ e investiguemos a existência do limite

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots . \tag{10.4}$$

O truque para analizar essa série é observar que

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Portanto, somando-se essas igualdades de $k = 1$ até n e notando-se que os membros à direita formam uma "soma telescópica", i.e., $(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})$, com $a_k = 1/k$, obtemos

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1},$$

donde segue que $s_n \to 1$. Portanto, a série (10.4) converge a 1.

Apresentamos a seguir uma condição necessária imediata para a convergência de uma série, que é bastante útil para determinar casos em que há divergência, porém não é suficiente para determinar convergência.

Teorema 10.1
Se a série $\sum x_n$ converge, então $\lim x_n = 0$.

Prova: Pela Definição 10.1 a convergência de $\sum x_n$ significa que $\lim s_n$ existe. Agora, $x_n = s_n - s_{n-1}$. Com s_n e s_{n-1} convergem ao mesmo limite, x_n converge e $\lim x_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0$. □

Exemplos 10.2

(a) A série geométrica (10.2) diverge se $|r| \geq 1$.

Isso segue imediatamente do fato de que o termo geral r^n não converge a 0 quando $|r| \geq 1$.

(b) A série harmônica $\sum 1/n$ diverge.

Esse fato foi visto em aula anterior no Exemplo 8.1 (d) onde mostramos que $s_{2^n} \geq 1+n/2$ e, portanto, s_n não é limitada. Essa série constitui um dos mais simples exemplos de que a condição $\lim x_n = 0$ não é suficiente para garantir a convergência da série, já que nesse caso $x_n = 1/n$ satisfaz tal condição.

O seguinte Critério de Cauchy é uma simples reformulação para séries do Teorema 9.1 homônimo para sequências. A prova é idêntica à do Teorema 9.1 e, portanto, vamos omitir.

Teorema 10.2 (Critério de Cauchy para Séries)
A série $\sum x_n$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m \geq n > N_0$, então

$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon. \tag{10.5}$$

O próximo resultado é consequência imediata do Teorema da Sequência Monótona e é de grande utilidade.

Teorema 10.3
Seja (x_n) uma sequência de números reais não-negativos. Então a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a sequência $\mathbf{s} = (s_n)$ das somas parciais é limitada. Nesse caso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim s_n = \sup\{s_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}.$$

Prova: Como $x_n \geq 0$, a sequência $\mathbf{s} = (s_n)$ das somas parciais é monótona não-decrescente, $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$. Pelo Teorema 8.1 (da Sequência Monótona), a sequência $\mathbf{s}$ converge se, e somente se, é limitada, em cujo caso seu limite é igual a $\sup\{s_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$. □

Exemplos 10.3

(a) Mostremos diretamente que a série harmônica $\sum 1/n$ não satisfaz o Critério de Cauchy para séries.

De fato, se $m > n$ temos

$$s_m - s_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{m} \geq \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}.$$

Em particular, se $m = 2n$ temos $s_{2n} - s_n \geq 1/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que mostra que a série não satisfaz a condição (10.5) no Teorema 10.2 para $\varepsilon \leq 1/2$.

Uma outra forma engenhosa de mostrar a divergência da série harmônica é a seguinte prova por contradição. Suponhamos que $\sum 1/n$ seja convergente e ponhamos $s = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Como $t_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(2k-1) < s_{2n-1}$ e $u_n = \sum_{k=1}^{n} 1/(2k) < s_{2n}$, temos então que as séries $\sum 1/(2n-1)$ e $\sum 1/(2n)$ também são convergentes (por quê?). Ponhamos $t = \lim t_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)$ e $u = \lim u_n = \sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n)$. Como $u_n = s_n/2$ e $s_{2n} = t_n + u_n$, temos $u = s/2$ e $t = s/2$ (por quê?). Agora,

$$t_n - u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k(2k-1)} \geq \frac{1}{2},$$

e, portanto, temos

$$0 = \frac{s}{2} - \frac{s}{2} = \lim t_n - \lim u_n \geq \frac{1}{2} > 0,$$

o que nos dá uma contradição, provando que $\sum 1/n$ diverge.

(b) A 2-*série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente.

Como as somas parciais formam uma sequência crescente (s_n), basta mostrar que (s_n) possui uma subsequência que é limitada (por quê?). Seja $k_n = 2^n - 1$ e mostremos que (s_{k_n}) é limitada. Temos $s_{k_1} = s_1 = 1$ e para $n > 1$

$$\begin{aligned} s_{k_n} &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) + \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^2} \right) \\ &< 1 + \frac{2}{2^2} + \frac{4}{4^2} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^2} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &< \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 2. \end{aligned}$$

Logo (s_{k_n}) é limitada, o que mostra que $\sum 1/n^2$ converge.

(c) A p-*série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge quando p é um número real com $p > 1$.

No caso em que p é irracional $n^p := e^{p \log n}$; a função exponencial e^x e sua inversa $\log x$ serão definidas rigorosamente e estudadas mais adiante neste curso. Por ora, se preferir, você pode pensar que p é racional.

A demonstração é totalmente similar à que foi feita para o caso $p = 2$. De novo, vamos mostrar que a subsequência (s_{n_k}) é limitada, onde $n_k = 2^k - 1$ e $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k^p$, e dessa forma provar a convergência da sequência crescente s_n. Como no caso $p = 2$, temos

$$
\begin{aligned}
s_{k_n} &= \frac{1}{1} + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^p} + \cdots + \frac{1}{(2^n - 1)^p}\right) \\
&< 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^p} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{(2^{p-1})^2} + \cdots + \frac{1}{(2^{p-1})^{n-1}} \\
&< \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^k = \frac{1}{1 - 2^{-(p-1)}}.
\end{aligned}
$$

Portanto, o Teorema 10.3 implica que a p-série converge quando $p > 1$.

(d) A p-série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ diverge quando $0 < p \leq 1$.

Como $n^p \leq n$ quando $0 < p \leq 1$, temos que as somas parciais da p-série $s_n = \sum_{k=1}^n 1/n^p$ são maiores que as somas parciais correspondentes da série harmônica $h_n = \sum_{k=1}^n 1/n$; $s_n \geq h_n$. Como a sequência $h_n \to +\infty$, o mesmo vale para s_n (por quê?), o que prova que a p-série diverge se $0 < p \leq 1$.

(e) A *série harmônica alternada*, dada por

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots \qquad (10.6)
$$

é convergente.

Ponhamos $s_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}/k$. Temos

$$
s_{2n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right),
$$

o que mostra que a subsequência (s_{2n}) é crescente. Da mesma forma, vemos que a subsequência (s_{2n-1}) é decrescente, já que

$$
s_{2n+1} = \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}\right).
$$

Como $0 < s_{2n} < s_{2n} + 1/(2n+1) = s_{2n+1} \leq 1$, concluímos que essas duas subsequências convergem, pois são limitadas inferiormente por

0 e superiormente por 1, e para o mesmo limite, devido a igualdade $s_{2n} + 1/(2n+1) = s_{2n+1}$. Logo a sequência de somas parciais (s_n) converge, provando que a série harmônica alternada é convergente.

Testes de Comparação

Em seguida vamos apresentar dois resultados simples que indicam como determinar a convergência de uma série por meio de comparação com uma série cuja convergência já esteja estabelecida.

Teorema 10.4 (Teste da Comparação)
Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências em $\mathbb{R}$ e suponhamos que para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ se tenha

$$0 \le x_n \le y_n \qquad \text{para } n > n_0. \tag{10.7}$$

Então:

(i) A convergência de $\sum y_n$ implica a convergência de $\sum x_n$;

(ii) A divergência de $\sum x_n$ implica a divergência de $\sum y_n$.

Prova: (i) Suponhamos que $\sum y_n$ seja convergente e, dado $\varepsilon > 0$, seja $N_1 = N_1(\varepsilon)$ tal que se $m > n \ge N_1$, então

$$y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon.$$

Se $m > n > N_0 := \max\{n_0, N_1\}$, então segue que

$$0 \le x_{n+1} + \cdots + x_m \le y_{n+1} + \cdots + y_m < \varepsilon,$$

donde segue a convergência de $\sum x_n$.

A afirmação (ii) é a contrapositiva de (i). □

O seguinte resultado é bastante útil em casos em que é difícil estabelecer as desigualdades em (10.7).

Teorema 10.5 (Teste da Comparação Limite)
Sejam $\mathbf{x} = (x_n)$ e $\mathbf{y} = (y_n)$ sequências de números estritamente positivos e suponhamos que existe o seguinte limite em $\mathbb{R}$:

$$r := \lim \left(\frac{x_n}{y_n}\right). \tag{10.8}$$

Temos:

(i) Se $r \neq 0$ então $\sum x_n$ é convergente se, e somente se, $\sum y_n$ é convergente.

(ii) Se $r = 0$ e se $\sum y_n$ é convergente, então $\sum x_n$ é convergente.

Prova: (i) Segue de (10.8) que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2}r \leq x_n/y_n \leq 2r$ para $n > N_0$, donde

$$\frac{r}{2}y_n \leq x_n \leq 2ry_n \qquad \text{para } n > N_0.$$

Aplicando o Teste da Comparação 10.4 duas vezes, obtemos a afirmação (i).

(ii) Se $r = 0$, então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < x_n \leq y_n \qquad \text{para } n > N_0 \text{ (por quê?)},$$

de modo que podemos aplicar diretamente o Teorema 10.4.

Exemplos 10.4

(a) A série $\sum 1/(n^2 + n + 1)$ é convergente.

Claramente temos

$$0 < \frac{1}{n^2 + n + 1} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Logo, a convergência dessa série segue da convergência da 2-série pelo Teorema 10.4.

(b) A série $\sum 1/(n^2 - 3n + 3)$ é convergente.

De fato, seja $x_n = 1/(n^2 - 3n + 3)$ e $y_n = 1/n^2$. Observe que não vale $x_n \leq y_n$. Mas temos

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{n^2}{n^2 - 3n + 3} = \frac{1}{1 - (3/n) + (3/n^2)} \to 1.$$

Logo, podemos aplicar o Teste da Comparação Limite 10.5 para concluir que a série dada converge, como consequência da convergência da 2-série.

(c) A série $\sum 1/\sqrt{n + \sqrt{n}}$ é divergente.

Façamos $x_n := 1/\sqrt{n + \sqrt{n}}$ e $y_n := 1/\sqrt{n}$. A série $\sum y_n$ é a $\frac{1}{2}$-série que é divergente. Temos

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\sqrt{n}}} \to 1.$$

Logo, segue do Teste da Comparação Limite que a série dada diverge.

(d) A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ é convergente. Aqui, usamos a convenção $0! := 1$.

Já vimos em aula passada que a sequência das somas parciais dessa série, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n=0}^{\infty}$, converge e seu limite define o número e. Vamos, no entanto, dar outra prova desse fato, usando o Teorema 10.4. Com efeito, temos

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n(n-1)} \qquad \text{para } n \geq 2.$$

Como a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$ coincide com a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (por quê?) e esta última converge, pelo Exemplo 10.1 (c), concluímos pelo Teorema 10.4 que a série dada converge.

Exercícios 10.1

1. Use o Critério de Cauchy para Séries para provar as seguintes proposições:

   (a) Para todo $m \in \mathbb{N}$ a série $\sum x_n$ converge se, e somente se, a série $\sum x_{n+m}$ converge. Nesse caso, temos

   $$\sum_{n=1}^{\infty} x_{n+m} = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n.$$

   (b) Se $\sum x_n$ e $\sum y_n$ são séries convergentes e $a, b \in \mathbb{R}$, então a série $\sum (ax_n + by_n)$ converge e vale

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (ax_n + by_n) = a\sum_{n=1}^{\infty} x_n + b\sum_{n=1}^{\infty} y_n.$$

2. Use somas telescópicas para estabelecer os seguintes limites:

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1;$

   (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a}$, se $a \in \mathbb{R}$ e $-a \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$;

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$.

3. Use o Critério de Cauchy para Séries para mostrar que a série $\sum (\operatorname{sen} n)/n^2$ é convergente.

4. Use um argumento semelhante ao usado no Exemplo 10.3 (e) para mostrar que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ é convergente.

5. Investigue a convergência ou divergência das seguintes séries:

   (a) $\sum 1/(n^2 - n + 1)$;
   (b) $\sum 1/\sqrt{n^2 - 3n + 3}$;
   (c) $\sum 1/(n^2 + n + 2)^{3/4}$;
   (d) $\sum 1/(n^3 - n^2 + 1)^{1/3}$.

6. Seja $\sum_{n+1}^{\infty} x_n$ tal que (x_n) é uma sequência decrescente de números estritamente positivos. Se (s_n) denota a sequência das somas parciais mostre (agrupando os termos de s_{2^n} de dois modos distintos) que

$$\frac{1}{2}\left(x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^n x_{2^n}\right) \le s_{2^n} \le \left(x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^{n-1} x_{2^{n-1}}\right) + x_{2^n}.$$

   Use essas desigualdades para mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ converge.
   Esse resultado é muito poderoso e é freqüentemente chamado *Teste da Condensação de Cauchy*.

7. Use o Teste da Condensação de Cauchy para estabelecer a divergência das séries:

   (a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$;
   (b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)}$;
   (c) $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)(\log\log\log n)}$.

8. Use o Teste da Condensação de Cauchy para estabelecer a convergência das séries

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^2}, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^2}.$$