Matemática Discreta – AD1 – 2006/2

Observações: Caro tutor, aqui estão as soluções comentadas da AD1, referente as aulas 2–11 do Módulo 1. Ao elaborar as soluções procurei colocar a ênfase na aplicação dos princípios de contagem e não, por exemplo, na simples aplicação das fórmulas apresentadas no Módulo. Desta maneira, o raciocínio utilizado na elaboração de cada solução ganha destaque.

Nada impede que ao resolver as questões, o aluno apresente soluções alternativas que você, tutor, considere mais interessantes do que as que eu estou fornecendo. Quando este for o caso, use seu bom senso para redistribuir os pontos, sem ofender o critério de correção, de modo a prestigiar a iniciativa do aluno.

Qualquer sugestão ou observação que você queira fazer, por favor, entre em contato pelo email petrucio@cos.ufrj.br ou mande uma msg para a nossa lista de discussões.

Conteúdo abordado: *Princípio da inclusão exclusão, Princípios aditivo e multiplicativo, Permutações, Arranjos, Permutações com repeticão, Permutações circulares* e *Combinações.*

Soluções comentadas:

---

1. Quantos números naturais entre 10.000 e 100.000, inclusive:

   (a) (0,5) existem?

   (b) (0,5) Não têm dígitos diferentes de $6, 7, 8$?

   (c) (1,0) Não têm dígitos diferentes de $6, 7, 8, 0$?

   Solução:

   (a) A quantidade de números naturais entre 10.000 e 100.000, inclusive, é igual a quantidade de números entre $1 = 10.000 - 9.999$ e $90.001 = 100.000 - 9.999$. Assim, existem 90.001 números entre 10.000 e 100.000, inclusive.

   (b) Os números naturais entre 10.000 e 100.000, inclusive, que não têm dígitos diferentes de $6, 7, 8$ são os números de 5 algarismos formados pelos números $6, 7, 8$. Assim, temos um total de $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$ tais números.

   (c) Os números naturais entre 10.000 e 100.000, inclusive, que não têm dígitos diferentes de $6, 7, 8, 0$ são os números de 5 algarismos formados pelos números $6, 7, 8, 0$. Como 0 não pode ocorrer como primeiro algarismo mas pode ocorrer em qualquer outra posição, temos um total de $3 \times \times 4 \times 4 \times 4 = 768$ tais números.

---

2. Com os dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

   (a) (1,0) quantos números de quatro dígitos distintos podem ser formados?

   (b) (1,0) quantos números pares de quatro dígitos distintos podem ser formados?

   Solução:

   (a) Como 0 não pode ocorrer como primeiro algarismo mas pode ocorrer em qualquer outra posição, temos um total de $6 \times 6 \times 5 \times 4 = 720$ tais números.

   (b) Observe que 0 não pode ocorrer como primeiro algarismo mas pode ocorrer em qualquer outra posição e que como o número é par, o último algarismo deve ser $0, 2, 4$ ou 6.

   Vamos particionar os números em dois grupos: aqueles que terminam em 0 e aqueles que não terminam em 0.

   Temos um total de $6 \times 5 \times 4 \times 1 = 120$ números no primeiro grupo e um total de $5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$ números no segundo grupo.

   Assim, temos um total de $120 + 300 = 420$ números pares de quatro dígitos distintos formado com os dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

---

3. Um homem trabalha em um escritório localizado sete esquinas a leste e oito esquinas ao norte da sua casa. Assim, ao se deslocar de casa para o trabalho ele passa em quinze esquinas. Represente esta situação adequadamente por um diagrama 7×8, formado por ruas verticais e ruas horizontais, ligando esquinas consecutivas. Rotule as esquinas verticais inferiores do diagrama (incluindo a que contém a casa do homem) com as letras $A, B, C, \ldots, H$ e as esquinas horizontais mais a esquerda do diagrama (incluindo a que contém a casa do homem) com os números $1, 2, 3, \ldots, 9$. Assim, o ponto mais a esquerda e abaixo do diagrama é denotado por $A1$.

   (a) (0,5) Se todas as ruas horizontais ligando duas esquinas consecutivas estão desimpedidas e todas as ruas verticais ligando duas esquinas consecutivas estão desimpedidas, quantos são os caminhos possíveis que o homem pode tomar ao ir de casa para o trabalho?

   (b) (1,5) Se todas as ruas horizontais ligando duas esquinas consecutivas estão desimpedidas e todas as ruas verticais ligando duas esquinas consecutivas estão desimpedidas com excessão da rua ligando as esquinas $E5$ e $E6$, quantos são os caminhos possíveis que o homem pode tomar ao ir de casa para o trabalho?

Solução:

(a) Cada caminho pode ser representado por uma sequência formada por 7 ocorrências da letra L (leste) e 8 ocorrências da letra N (norte). Assim, cada caminho é uma permutação de 7 objetos do tipo L e 8 objetos do tipo N. Logo, o número total de tais caminhos é igual a $\frac{15!}{7!8!} = 6.435$.

(b) Vamos calcular o número de caminhos que passam pela rua ligando as esquinas $E5$ e $E6$ e subtrair do total.

Cada caminho que passa pela rua ligando as esquinas $E5$ e $E6$ é formado por três partes: um caminho ligando a esquina $A1$ a esquina $E5$, a rua ligando as esquinas $E5$ e $E6$ e um caminho ligando a esquina $E6$ a esquina $H9$.

Cada caminho ligando a esquina $A1$ a esquina $E5$ pode ser representado por uma sequência formada por 4 ocorrências da letra L (leste) e 4 ocorrências da letra N (norte). Assim, cada tal caminho é uma permutação de 5 objetos do tipo L e 4 objetos do tipo N. Logo, o número total de tais caminhos é igual a $\frac{8!}{4!4!} = 70$.

Cada caminho ligando a esquina $E6$ a esquina $H9$ pode ser representado por uma sequência formada por 3 ocorrências da letra L (leste) e 3 ocorrências da letra N (norte). Assim, cada tal caminho é uma permutação de 3 objetos do tipo L e 3 objetos do tipo N. Logo, o número total de tais caminhos é igual a $\frac{6!}{3!3!} = 20$.

Assim, o número total de caminhos que passam pela rua ligando as esquinas $E5$ e $E6$ é igual a $70 \times 20 = 1.400$.

Finalmente, o número de caminhos que não passam pela rua ligando as esquinas $E5$ e $E6$ é igual a $6.435 - 1.400 = 5.035$.

---

4. De quantas maneiras 4 homens e 4 mulheres:

   (a) (0,5) podem sentar-se em uma mesa redonda?

   (b) (1,0) podem sentar-se em uma mesa redonda, de modo que não haja dois homens sentados lado a lado?

Solução:

(a) Cada maneira de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 8 objetos. Assim, o total de maneiras é igual a $7! = 5.040$.

(b) Cada maneira de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda de modo que não haja dois homens sentados lado a lado pode ser formada em duas etapas. Primeira, sentar os 4 homens em torno da mesa. Segunda, sentar as 4 mulheres intercaladas com os homens.

Cada maneira de 4 homens sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 4 objetos. Assim, o total de tais maneiras é igual a $3! = 6$.

Cada maneira de 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda intercaladas com os homensé uma permutação simples de 4 objetos. Assim, o total de tais maneiras é igual a $4! = 24$.

Logo, o total de maneiras de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda de modo que não haja dois homens sentados lado a lado é igual a $6 \times 24 = 144$.

---

5. Utilizando as 23 letras do alfabeto, quantos subconjuntos de três letras:

(a) (0,5) podem ser formados?

(b) (1,0) não possuem três letras consecutivas do alfabeto como elementos?

Solução:

(a) Cada subconjunto é uma combinação de três letras escolhidas dentre as 23 letras $a, b, c, \ldots, x, y, z$. Logo, temos um total de $C(23, 3) = 1.771$ tais subconjuntos.

(b) Vamos calcular o número de subconjuntos formados por letras consecutivas e subtrair do total.

Observe que os conjuntos formados por letras consecutivas são:

$$\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d, e\}, \ldots, \{x, y, z\},$$

ou seja, o número de tais conjuntos é igual ao números de letras em $a, b, c, \ldots, x$. Como existem $23 - 2 = 21$ tais letras, o número de conjuntos procurados é 21.

Finalmente, temos que o número de subconjuntos que não possuem três letras consecutivas do alfabeto é igual a $1.771 - 21 = 1.750$.

---

6. Calcule:

(a) (0,5) $C(6, 0) + C(6, 1) + C(6, 2) + C(6, 3) + C(6, 4) + C(6, 5) + C(6, 6)$ efetuando apenas uma adição e cinco multiplicações.

(b) (0,5) $C(6,0) - C(6,1) + C(6,2) - C(6,3) + C(6,4) - C(6,5) + C(6,6)$ efetuando apenas uma subtração.

Solução:

(a) Substituindo x e y por 1 em $(x+y)^6$ e expandindo pelo TB, temos:

$(1+1)^6 = C(6,0) + C(6,1) + C(6,2) + C(6,3) + C(6,4) + C(6,5) + C(6,6)$.

Logo, a soma procurada é igual a $(1+1)^6 = 2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$.

(b) Substituindo x por 1 e y por -1 em $(x+y)^6$, e expandindo pelo TB, temos:

$(1-1)^6 = C(6,0) - C(6,1) + C(6,2) - C(6,3) + C(6,4) - C(6,5) + C(6,6)$.

Logo, a soma procurada é igual a $(1-1)^6 = 0^6 = 0$.