

*Observações:* Caro aluno, aqui está o EP4, referente as aulas 8 e 9 do Módulo 1.

Este EP4 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre os textos das aulas;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- alguns comentários sobre a AD1.
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

---

#### Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 8 e 9 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O conceito de arranjo de  $n$  elementos tomados  $r$  a  $r$ ;
- Como calcular o número total de arranjos de  $n$  elementos tomados  $r$  a  $r$ , **usando o Princípio Fundamental da Contagem**;
- O conceito de permutação com elementos repetidos;
- Como calcular o número total de permutações de  $n$  elementos, sendo  $n_1$  do tipo 1,  $n_2$  do tipo 2, ...,  $n_r$  do tipo  $r$ ;
- O conceito de permutação circular de  $n$  elementos;
- Como calcular o número total de permutações circulares de  $n$  elementos.

---

#### Sobre a Aula 7:

Arranjos são configurações básicas que ocorrem na resolução de muitos problemas de contagem. Para compreender bem o conceito de arranjo e aprender a contá-los, vamos enfatizar como a noção de ordem está relacionada com a de arranjo e que o número total de arranjos pode ser determinado diretamente a partir do PFC.

- **Página 73:** Para formar um arranjo, os objetos não necessitam ser *selecionados* em ordem mas sim *dispostos* em ordem. Por exemplo, o arranjo  $ab$  ( $a$  seguido de  $b$ ) pode ser formado de duas maneiras:

- escreve-se o  $a$  e depois o  $b$ , à direita do  $a$ ;
- escreve-se o  $b$  e depois o  $a$ , à esquerda do  $b$ .

No primeiro caso, *seleciona-se* primeiro o  $a$  e depois o  $b$  e, no segundo caso, *seleciona-se* primeiro o  $b$  e depois o  $a$ . Em ambos os casos os objetos  $a$  e  $b$  são dispostos na mesma ordem:  $a$  seguido de  $b$ .

- **Página 73:** Também, na formação de um arranjo os elementos selecionados devem ser *distintos, dois a dois*.
- **Página 73:** Esta observação requer vários passos:

1. Compare o enunciado do Exemplo 45 com o enunciado do Exercício 5, na página 63.

2. Note que, num sentido bem preciso, ambos são um único problema formulado de duas maneiras diferentes.
  3. Observe que este problema é resolvido por aplicação direta do PFC (se não, você nem teria conseguido resolvê-lo, usando os conhecimentos aprendidos na Aula 6).
  4. Leia os enunciados dos Exemplos 46 e 47, nas páginas 74 e 75, respectivamente.
  5. Resolva os Exemplos 46 e 47 por aplicação direta do PFC.
  6. Leia o parágrafo após o final do Exemplo 45, na página 74, e note que o cálculo geral do número total de arranjos de  $r$  elementos, selecionados em um total de  $n$ , é obtido por aplicação direta do PFC.
  7. Conclua que a fórmula apresentada no retângulo em destaque não tem nenhuma utilidade no cálculo do número total de arranjos de  $r$  elementos, selecionados em um total de  $n$ .
  8. Observe que, na verdade, nos exemplos em que os autores utilizam a fórmula em destaque, eles estão escrevendo mais do que deviam pois, no final das contas, há uma simplificação que leva ao cálculo feito por aplicação direta do PFC.
- **Página 77:** No Exemplo 49, observe que a figura faz parte do enunciado do problema e não da sua solução. Observe, também, que a determinação do número de rotas pode ser feito diretamente da figura, sem a aplicação de nenhum tipo especial de técnica de contagem.

#### Sobre a Aula 9:

- **Página 81:** Conjuntos *sempre* possuem objetos dois a dois distintos. A noção de “conjunto com (possivelmente) objetos repetidos” é por si só inconsistente. Neste caso, falamos em *multiconjunto*. Esta nomenclatura, apesar de amplamente adotada, não é muito adequada pois a palavra *multiconjunto* parece especificar um *tipo especial de conjunto* quando, na verdade, conjuntos é que são tipos especiais de multiconjuntos. De fato, um conjunto é um multiconjunto sem objetos repetidos!
- **Página 87:** No Exemplo 55, os autores estão utilizando uma noção relaxada de círculo, uma vez que a mesa em questão pode não ser circular.
- **Página 87:** Tente resolver o Exemplo 56 usando somente a noção de permutação circular.

#### Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios mal formulados:

- **Aula 8, Exercício 3:** Observe que os autores estão supondo que as pessoas serão dispostas em uma ordenação.
- **Aula 8, Exercício 5:** No item (a) os autores estão assumindo que não há empate nas duas primeiras posições de chegada. No item (b) os autores estão assumindo que as condições da corrida são idênticas as do item (a).

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 8: todos os exercícios.
- Aula 9: exercícios 6—10.

Se encontrar dificuldades, não desanime: procure os Tutores presenciais e a distância, e converse com outros alunos de MD.

#### Sobre a AD1:

Como estamos em fase de avaliação a distância, aqui vão alguns comentários sobre a AD1.

Um aspecto importante de nosso curso, a ser discutido desde já, é o comportamento que você, aluno, deve assumir diante desta AD1. Em primeiro lugar, trate-a como uma avaliação e não como uma simples lista de exercícios. Ou seja, antes de tentar resolver cada questão, estude a matéria e resolva os exercícios do Módulo 1, que dizem respeito ao conteúdo que está sendo cobrado na questão. Nunca utilize a AD1 como um trampolim para estudar a matéria resumidamente, ou seja, sem tentar enfrentar os exercícios do Módulo antes de enfrentar a AD1.

Para a resolução de cada questão proposta, sugerimos que você efetue os passos descritos no EP1, que revisamos a seguir:

1. Faça uma revisão detalhada dos conteúdos apresentados nas aulas em questão. Esclareça as dúvidas que ainda persistam com o(s) tutor(es).
2. Para cada questão: leia seu enunciado, procure entendê-lo completamente e faça uma lista preliminar dos conteúdos que você acha que serão usados na sua resolução.
3. Antes de tentar resolver cada questão, use a lista obtida no passo anterior para certificar-se de que você domina os conceitos, notações e resultados envolvidos.
4. Agora, sim, comece a resolver a questão, respondendo cada item proposto de forma clara e objetiva, utilizando, se possível, a linguagem e o estilo dos módulos.
5. Se durante a resolução das questões você tiver dúvidas, discuta-as com os tutores ou com outros alunos mas, lembre-se, *a redação da questão é de sua inteira responsabilidade*.

Em segundo lugar, aproveite a AD1 para aprimorar o seu estilo, discutindo com os tutores e com outros alunos a melhor maneira de redigir as soluções que você encontrou para cada questão. Tenha sempre em mente que *em nossa disciplina, a redação da questão é tão importante quanto a sua solução*. Aproveite esta AD1 para aprimorar o seu estilo, utilizando como parâmetros as soluções dos EP e os exemplos do Módulo. Você não terá em mãos as soluções destas questões antes de redigir e entregar as suas próprias soluções. Mas —não esqueça que— você terá a oportunidade de discutir com os tutores presenciais e a distância, e também com outros alunos, todas as suas idéias e dificuldades para resolvê-las.

Finalmente, gostaria de desejar boa sorte para aqueles que estão se dedicando a aprender os conteúdos de MD e espero que o trabalho nesta AD1 seja proveitoso tanto como uma avaliação de seu desempenho quanto como uma preparação para a AP1, que virá.

---

### Alguns exercícios para fixação:

1. De quantas maneiras 4 homens e 4 mulheres:
  - (a) podem sentar-se em uma mesa redonda?
  - (b) podem sentar-se em uma mesa redonda, de modo que não haja dois homens sentados lado a lado?
2. (a) De quantas maneiras 8 crianças podem formar uma *roda*?
  - (b) Se 3 destas 8 crianças (a saber, Kátia, Marília e Eliane) ficam sempre juntas, lado a lado, quantas rodas podem ser formadas?

### Soluções comentadas:

1. (a) Cada maneira de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 8 objetos. Assim, o total de maneiras é igual a  $7! = 5.040$ .
  - (b) Cada maneira de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda de modo que não haja dois homens sentados lado a lado pode ser formada em duas etapas. Primeira, sentar os 4 homens em torno da mesa. Segunda, sentar as 4 mulheres intercaladas com os homens.  
Cada maneira de 4 homens sentarem em uma mesa redonda é uma permutação circular de 4 objetos. Assim, o total de tais maneiras é igual a  $3! = 6$ .

Cada maneira de 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda intercaladas com os homens é uma permutação simples de 4 objetos. Assim, o total de tais maneiras é igual a  $4! = 24$ .

Logo, o total de maneiras de 4 homens e 4 mulheres sentarem em uma mesa redonda de modo que não haja dois homens sentados lado a lado é igual a  $6 \times 24 = 144$ .

2. (a) Cada roda formada por 8 crianças é uma permutação circular de 8 elementos. Assim, o número total de tais rodas é  $7! = 5.040$ .

(b) Para formar uma roda na qual Kátia, Marília e Eliane estão juntas, devemos tomar duas decisões:

$d_1$  : escolher uma permutação (linear) das três crianças;

$d_2$  : escolher uma permutação circular cujos elementos são:  
a permutação escolhida e as outras 5 crianças.

Para tomar a decisão  $d_1$  temos  $3! = 6$  possibilidades. Para tomar a decisão  $d_2$  temos  $5! = 120$  possibilidades. Logo, pelo PM, temos um total de  $6 \times 120 = 720$  rodas nas quais Kátia, Marília e Eliane ficam juntas, lado a lado.

---

*Jorge Petrucio Viana*  
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF