Aula 8 – Espaços Vetoriais

Objetivos

Definir espaços vetoriais, e estudar alguns dos principais exemplos dessa estrutura.
Identificar propriedades dos espaços vetoriais.

Introdução

Imagine um conjunto V onde seja possível somar elementos e multiplicar os elementos por números reais, e que o resultado dessas operações esteja no conjunto V. Imagine ainda que essas operações têm "boas"propriedades, aquelas que estamos acostumados a usar quando somamos e quando multiplicamos por números reais:

- podemos somar os elementos trocando a ordem, ou agrupando-os como quisermos, sem que o resultado seja alterado;
- existe um elemento que quando somado a outro resulta sempre nesse outro;
- feita uma soma, é possível desfazê-la com uma subtração, e todo elemento de V pode ser subtraído de outro;
- multiplicar por um não faz efeito;
- multiplicar seguidamente por vários reais é o mesmo que multiplicar pelo produto deles;
- multiplicar o resultado de uma soma por um número real é o mesmo que multiplicar cada parcela e depois somar;
- multiplicar por um elemento de V uma soma de reais é o mesmo que multiplicar cada real pelo elemento em questão e depois somar os resultados.

Existem vários conjuntos onde a adição e a multiplicação por números reais que fazemos usualmente gozam dessas propriedades. Os conjuntos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são exemplos. Os conjuntos de matrizes de mesma ordem ($M_{2\times 3}(\mathbb{R})$, $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ etc.) também são exemplos (veja aula 3). Na verdade, há muitos exemplos de conjuntos com essa mesma estrutura. Chamamos a esses conjuntos, munidos dessas operações com as propriedades acima de *espaços vetoriais*.

A vantagem de se estudar os espaços vetoriais de forma mais abstrata, como faremos a partir de agora, é que estaremos estudando propriedades e leis que são válidas em *qualquer* espaço vetorial, em particular nos exemplos que acabamos de destacar. Ou seja, veremos o que existe de comum entre conjuntos de matrizes, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e vários outros espaços vetoriais.

Definição de espaço vetorial

Considere um conjunto V no qual estão definidas duas operações: uma *adição*, que a cada par de elementos u e v de V associa um elemento $u + v$ de V, chamado *soma* de u e v, e uma *multiplicação por escalar*, que a cada número real α e a cada elemento v de V associa um elemento αv de V, chamado *produto* de α por v. Dizemos que o conjunto V munido dessas operações é um *espaço vetorial real* (ou um *espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$, ou ainda, um $\mathbb{R}$-*espaço vetorial*) se são satisfeitas as seguintes condições, para todos os elementos de V, aqui designados pelas letras u, v e w, e todos os números reais, aqui designados pelas letras α e β:

- $u + v = v + u$ (comutatividade);
- $u + (v + w) = (u + v) + w$ (associatividade);
- existe um elemento em V, que designaremos por e, que satisfaz $v+e = v$ para qualquer v em V (existência de elemento neutro para a adição);
- para cada $v \in V$, existe um elemento de V, que designaremos por $-v$, que satisfaz $v + (-v) = e$ (existência de inverso aditivo, também chamado de simétrico ou oposto);
- $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$ (associatividade);
- $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ (distributividade);
- $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ (distributividade);
- $1 \cdot v = v$ (multiplicação por 1).

De acordo com essa definição, podemos concluir que **não são** espaços vetoriais o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, e o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros, para começar. Em nenhum dos dois, por exemplo, a operação multiplicação por escalar está bem definida: ao multiplicar um número inteiro não nulo por $\sqrt{2}$, que é um número real, a resposta certamente não será um número inteiro.

Isso nos diz que alguns dos conjuntos que conhecemos não são espaços vetoriais. Para nos certificarmos que um determinado conjunto é de fato um espaço vetorial, é necessário verificar se as operações estão bem definidas, e se valem *todas* as condições da definição! Qualquer uma que não se verifique indica que o conjunto em questão não é um espaço vetorial.

Exemplos de espaços vetoriais

Para verificar se um conjunto é ou não um exemplo de espaço vetorial, partimos do princípio que no conjunto dos números reais a adição e a multiplicação têm todas as propriedades dadas na definição de espaço vetorial (na verdade, estaremos usando o fato de que $\mathbb{R}$ é um *Corpo*, que é uma outra estrutura estudada nos cursos de álgebra). São vários os exemplos de espaços vetoriais. Listamos alguns deles a seguir.

1. $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

   Provaremos que $\mathbb{R}^2$ é espaço vetorial, sendo que a prova para $\mathbb{R}^3$ é análoga. Aqui as operações consideradas são as *usuais*, ou seja, aquelas que estamos acostumados a fazer: se (x_1, x_2) e (y_2, y_2) são elementos de $\mathbb{R}^2$, e α é um número real, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

   Considere $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$, todos em $\mathbb{R}^2$, α e β números reais. Então temos:

   - $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (y_1 + x_1, y_2 + x_2) = u + v$;
   - $u + (v + w) = (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2)) = ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2) = (u + v) + w$;
   - o par $e = (0, 0)$ satisfaz $u + e = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = u$;
   - tomando $-u = (-x_1, -x_2)$, temos $u + (-u) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2) = (0, 0) = e$;
   - $\alpha(\beta u) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2) = (\alpha\beta)u$;
   - $(\alpha + \beta)u = ((\alpha + \beta)x_1, (\alpha + \beta)x_2) = (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2) = \alpha u + \beta u$;
   - $\alpha(u + v) = \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2)) = (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2) = \alpha u + \alpha v$;
   - $1u = (1x_1, 1x_2) = (x_1, x_2) = u$.

2. $\mathbb{R}^n$, com n natural não nulo qualquer

   O conjunto $\mathbb{R}^n$ é formado pelas n-*uplas* (lê-se "ênuplas") de números reais:

   $$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

   Em $\mathbb{R}^n$, as operações usuais são definidas da seguinte maneira: considerando $u = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$, e α em $\mathbb{R}$, temos $u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ e $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$. A prova de que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial é análoga às provas para $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, que são casos particulares onde se considera $n = 2$ e $n = 3$.

3. $M_{n\times m}(\mathbb{R})$

   Já vimos na aula 3 que o conjunto $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ com as operações definidas na aula 2, satisfazem a todas as condições dadas na definição de espaço vetorial real.

4. $\mathbb{C}$

   Aqui apenas recordaremos as operações de soma e produto por escalar no conjunto dos números complexos (conceitos vistos no curso de Pré-Cálculo), deixando a prova como exercício. Considere os números complexos $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, e o número real α. Temos então $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ e $\alpha z_1 = \alpha a + \alpha b_1 i$.

5. Polinômios de grau $\leq n$ (n natural não nulo), com coeficientes reais, a uma variável, acrescidos do polinômio nulo

   O grau do polinômio nulo não está definido.

   Os polinômios são muito estudados em diversos ramos da Álgebra. Os conjuntos de polinômios de grau $\leq n$ (acrescidos do polinômio nulo), para os diversos valores de n, têm estrutura muito rica (no sentido da quantidade de operações e propriedades que são válidas nesses conjuntos), e o fato de serem espaços vetoriais é apenas uma de suas características. Vamos fazer a prova para o conjunto dos polinômios de grau ≤ 2, sendo que a prova para o caso geral é inteiramente análoga.

   Usaremos a notação $P_2(t, \mathbb{R})$ para indicar o conjunto dos polinômios de grau ≤ 2 a uma variável t, com coeficientes reais, acrescido do polinômio nulo. Nesse caso,

   $$P_2(t, \mathbb{R}) = \{at^2 + bt + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

A expressão "grau ≤ 2" é traduzida matematicamente pelo fato de que a pode ser qualquer número real, inclusive zero: caso a seja 0, e $b \neq 0$, o polinômio em questão tem grau 1. Para o polinômio nulo, temos $a = b = c = 0$.

Lembre-se de que um polinômio é um objeto abstrato, ao trabalhar com uma expressão do tipo $2t^2 + t + 1$ não estamos interessados em "encontrar t"(nem seria possível, pois não se trata de uma equação). No nosso curso estaremos interessados em somar tais expressões, ou multiplicá-las por escalares, obtendo outras do mesmo tipo. Para isso, sejam $p_1 = a_1t^2 + b_1t + c_1$ e $p_2 = a_2t^2 + b_2t + c_2$ elementos de $P_2(t, \mathbb{R})$, e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então

$$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2),$$

$$\alpha p_1 = \alpha a_1 t^2 + \alpha b_1 + \alpha c_1.$$

Vamos às propriedades das operações:

- $p_1 + p_2 = (a_1 + a_2)t^2 + (b_1 + b_2)t + (c_1 + c_2) = (a_2 + a_1)t^2 + (b_2 + b_1)t + (c_2 + c_1) = p_2 + p_1$;
- $p_1+(p_2+p_3) = (a_1+(a_2+a_3))t^2+(b_1+(b_2+b_3))t+(c_1+(c_2+c_3)) = ((a_1+a_2)+a_3)t^2+((b_1+b_2)+b_3)t+((c_1+c_2)+c_3) = (p_1+p_2)+p_3$;
- o polinômio $0 = 0t^2 + 0t + 0$ satisfaz $p_1 + 0 = (a_1 + 0)t^2 + (b_1 + 0)t + (c_1 + 0) = a_1t^2 + b_1t + c_1$;
- tomando $-p_1 = (-a_1)t^2 + (-b_1)t + (-c_1)$, temos $p_1 + (-p_1) = (a_1 - a_1)t^2 + (b_1 - b_1)t + (c_1 - c_1) = 0t^2 + 0t + 0 = 0$;
- $\alpha(\beta p_1) = \alpha(\beta a_1t^2+\beta b_1t+\beta c_1) = \alpha\beta a_1t^2+\alpha\beta b_1t+\alpha\beta c_1 = (\alpha\beta)p_1$;
- $(\alpha+\beta)p_1 = (\alpha+\beta)a_1t^2+(\alpha+\beta)b_1t+(\alpha+\beta)c_1 = \alpha a_1t^2+\beta a_1t^2+\alpha b_1t + \beta b_1t + \alpha c_1 + \beta c_1 = \alpha p_1 + \beta p_1$;
- $\alpha(p_1 + p_2) = \alpha(a_1 + a_2)t^2 + \alpha(b_1 + b_2)t + \alpha(c_1 + c_2) = \alpha a_1t^2 + \alpha a_2t^2 + \alpha b_1t + \alpha b_2t + \alpha c_1 + \alpha c_2 = \alpha p_1 + \alpha p_2$;
- $1p_1 = 1a_1t^2 + 1b_1t + 1c_1 = a_1t^2 + b_1t + c_1 = p_1$.

O conjunto dos polinômios de grau *exatamente* 2 não é um espaço vetorial. De fato, a soma não está bem definida nesse conjunto: somando $t^2 + t + 1$ e $-t^2 + 2t - 3$, que têm grau 2, obtemos o polinômio $3t - 2$, que tem grau 1.

6. Polinômios de qualquer grau, com coeficientes reais, a uma variável

   Considerando o conjunto de todos os polinômios a uma variável, com coeficientes reais, as operações soma e produto por escalar usuais (análogas às que definimos para $P_2(t, \mathbb{R})$) estão bem definidas e satisfazem a todas as propriedades que caracterizam os espaços vetoriais, tratando-se, portanto, de um exemplo de espaço vetorial.

Observações: Os elementos de um espaço vetorial são chamados **vetores**. O elemento neutro da soma é chamado *vetor nulo*, e denotado por $\mathbf{0}$ ou $\vec{0}$. Note que, segundo essa convenção, vetores podem ser polinômios, matrizes, etc, e o símbolo $\mathbf{0}$ será usado também para matrizes nulas, n-uplas de zeros, etc.

Veremos ao longo deste módulo que muitos dos conceitos aplicáveis aos "antigos" vetores (como módulo, ângulo, etc) também fazem sentido para os vetores da forma que estamos definindo agora.

Propriedades dos espaços vetoriais

Vamos considerar um espaço vetorial V, e usar as letras u, v e w para designar elementos desse espaço. Usaremos as letras gregas (α, β, λ, etc) para designar números reais. Para facilitar as referências futuras às propriedades, vamos numerá-las.

1. Existe um único vetor nulo em V, que é o elemento neutro da adição.

   Em todos os exemplos que listamos na última aula, é bastante claro que existe apenas um elemento neutro em cada espaço, mas existem vários outros espaços vetoriais que não vimos ainda. Vamos então provar que a existência de um único elemento neutro é um fato que decorre *apenas* da definição de espaço vetorial (e, portanto, vale em *qualquer* um). Vamos então provar essa propriedade, e todas as outras, usando a definição e as propriedades que já tenhamos provado.

   Já sabemos da definição que existe um elemento neutro no espaço V. Suponhamos que $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ sejam elementos neutros de V, e vamos mostrar que $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

   De fato, temos que ter $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'$, pois $\mathbf{0}$ é elemento neutro, mas também temos $\mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$, pois $\mathbf{0}'$ também é elemento neutro. Logo tem-se $\mathbf{0} = \mathbf{0}'$.

2. Para cada $v \in V$, existe um único simétrico $-v \in V$.

   De novo, suponhamos que algum v de V admitisse dois simétricos, $-v$ e $-v^{'}$. Nesse caso, teríamos

$$v + (-v) = v + (-v^{'}),$$

   pois os dois lados da igualdade resultam no vetor nulo. Somando $(-v)$ aos dois membros, obtemos

$$(-v) + (v + (-v)) = (-v) + (v + (-v^{'})).$$

   Pela associatividade da soma, podemos escrever

$$((-v) + v) + (-v) = ((-v) + v) + (-v^{'}).$$

   Usando o fato de que $-v$ é simétrico de v, e $\mathbf{0}$ é o elemento neutro da soma, obtemos

$$\mathbf{0} + (-v) = \mathbf{0} + (-v^{'})$$

$$-v = -v^{'}.$$

3. Se $u + w = v + w$ então $u = v$.

   Somando $-w$ aos dois membros da equação $u + w = v + w$, obtemos

$$(u + w) + (-w) = (v + w) + (-w).$$

   Pela associatividade da soma e pelo fato de que $-w$ é o simétrico de w e $\mathbf{0}$ é o neutro da soma, obtemos

$$u + (w + (-w)) = v + (w + (-w))$$

$$u + \mathbf{0} = v + \mathbf{0}$$

$$u = v.$$

4. $-(-v) = v$ (ou seja, o simétrico do vetor $-v$ é o vetor v).

   Como o simétrico de um vetor qualquer de V é único (propriedade 2), e como $v + (-v) = \mathbf{0}$, então o simétrico de $-v$ só pode ser v.

5. Fixados u e v em V, existe uma única solução para a equação $u+x=v$.

   Somando $-u$ aos dois membros da equação $u+x=v$, obtemos

$$(-u)+(u+x)=(-u)+v$$

$$((-u)+u)+x=(-u)+v$$

$$\mathbf{0}+x=(-u)+v$$

$$x=(-u)+v,$$

   ou seja, a equação $u+x=v$ tem pelo menos uma solução, que é $(-u)+v$. Supondo que x e $x^{'}$ sejam soluções da referida equação, ou seja, que $u+x=v$ e $u+x^{'}=v$, teremos

$$u+x=u+x^{'},$$

   e, pela propriedade 3,

$$x=x^{'}.$$

6. Se $v \in V$ satisfaz $v+v=v$, então $v=\mathbf{0}$ (só o elemento neutro satisfaz a essa equação).

   Note que, se $v+v=v$, então v é solução da equação $v+x=v$. Como $\mathbf{0}$ também é solução, visto que $v+\mathbf{0}=v$, pela propriedade anterior, tem-se $v=\mathbf{0}$.

7. $0v=\mathbf{0}$

   Basta verificar que, pela propriedade distributiva,

$$0v+0v=(0+0)v=0v.$$

   Pela propriedade anterior, $0v=\mathbf{0}$.

8. $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$, qualquer que seja o real α considerado.

   De novo usando a propriedade distributiva da adição, e o fato de que $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}$, temos

$$\alpha\mathbf{0}=\alpha(\mathbf{0}+\mathbf{0})=\alpha\mathbf{0}+\alpha\mathbf{0}.$$

   Pela propriedade 6, $\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$

9. Se $\alpha v=\mathbf{0}$ então $\alpha=0$ ou $v=\mathbf{0}$

   Note que essa propriedade nos diz que a equações das propriedades 7 e 8 representam as únicas formas de obter o vetor nulo como produto de escalar por vetor. Para prová-la, vamos supor que $\alpha v = \mathbf{0}$ e $\alpha \neq 0$ (o caso $\alpha = 0$ já nos dá a conclusão desejada). Nesse caso, podemos multiplicar os dois membros da igualdade $\alpha v = \mathbf{0}$ por α^{-1}, obtendo

$$\alpha^{-1}(\alpha v) = \alpha^{-1}\mathbf{0}.$$

Usando a propriedade associativa da multiplicação por escalar, e a propriedade 8, obtemos

$$(\alpha^{-1}\alpha)v = \mathbf{0}$$

$$1v = \mathbf{0}$$

$$v = \mathbf{0}$$

onde a última passagem utiliza a propriedade da multiplicação por 1 dos espaços vetoriais.

10. $(-1)v = -v$

    Como $1v = v$, podemos escrever

    $$(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1+1)v = 0v = \mathbf{0},$$

    considerando a propriedade distributiva e a propriedade 7. Daí, concluímos que $(-1)v$ é o simétrico de v, ou seja, $(-1)v = -v$.

11. $(-\alpha)v = -(\alpha v) = \alpha(-v)$

    Na prova dessa propriedade, deixaremos como exercício a identificação das propriedades utilizadas em cada passagem. Siga o raciocínio das provas das propriedades anteriores.

    $$(-\alpha)v + \alpha v = (-\alpha + \alpha)v = 0v = \mathbf{0},$$

    portanto $(-\alpha)v = -(\alpha v)$.

    $$\alpha(-v) + \alpha v = \alpha(-v + v) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0},$$

    portanto $\alpha(-v) = -(\alpha v)$.

Com essas propriedades que demonstramos, podemos concluir que grande parte das contas que fazemos com vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são válidas em qualquer espaço vetorial.

A partir de agora, escreveremos $u - v$ no lugar de $u + (-v)$, $u + v + w$ no lugar de $u + (v + w)$ ou $(u + v) + w$ e $\alpha\beta v$ no lugar de $\alpha(\beta v)$ ou $(\alpha\beta)v$.

Exercícios

1. Verdadeiro ou falso? Justifique!

   a- O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é um espaço vetorial real.

   b- O conjunto $\mathbb{Q}^2 = \{(a, b) : a,\ b \in \mathbb{Q}\}$, com as operações usuais, é um espaço vetorial real.

   c- O conjunto unitário $\{0\}$, com as operações usuais, é um espaço vetorial real.

   d- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ com as operações usuais não é espaço vetorial real.

   e- O conjunto dos números complexos com parte real não negativa é um espaço vetorial real.

2. Mostre que $\mathbb{R}^3$ com as operações usuais é um espaço vetorial real (siga os passos da demonstração para $\mathbb{R}^2$ feita no exemplo 1).

3. Mostre que $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) : z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}\}$ é um espaço vetorial real, com as operações definidas abaixo:

   Adição: $(z_1, z_2) + (z_1^{'}, z_2^{'}) = (z_1 + z_1^{'}, z_2 + z_2^{'})$

   Multiplicação por escalar: $\alpha(z_1, z_2) = (\alpha z_1, \alpha z_2)$

   onde (z_1, z_2) e $(z_1^{'}, z_2^{'})$ são elementos de $\mathbb{C}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Mostre que, no conjunto $A = \{0, 1\}$, as operações definidas abaixo satisfazem a todas as condições da definição de espaço vetorial real, exceto à lei associativa para a multiplicação por escalar e às leis distributivas.

   Adição: $0 \oplus 0 = 0$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 0 = 1$ e $1 \oplus 1 = 0$

   Multiplicação por escalar: $\alpha \odot x = x$ se $\alpha > 0$ e $\alpha \odot x = 0$ se $\alpha \leq 0$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in A$.

5. Também definem-se espaços vetoriais sobre o conjunto dos números racionais (o *corpo* dos racionais), apenas fazendo com que a operação multiplicação por escalar considere apenas escalares racionais, e mantendo o restante da definição inalterado. Mostre que o conjunto $\mathbb{Q}^2$ é um espaço vetorial sobre os racionais.

Auto-avaliação

O conteúdo desta aula envolve conceitos muito abstratos. Para obter alguma segurança nesses conceitos, talvez seja necessário reler várias vezes algumas partes. Não se preocupe se você não conseguiu fazer alguns dos exercícios de imediato, retorne a esta aula depois de estudar a próxima, que trata dos *Subespaços Vetoriais*, e você estará mais familiarizado com os conceitos aqui apresentados.

Respostas dos exercícios

1. a- Falso.
   b- Falso.
   c- Verdadeiro.
   d- Verdadeiro.
   e- Falso.

Aula 9 – Subespaços vetoriais

Objetivos

Pré-requisito: Aula 8.

Caracterizar subespacos vetoriais;
Identificar subespaços vetoriais, demonstrando que atende às condições de subespaço.

Introdução

Nesta aula veremos um tipo muito importante de subconjuntos de espaços vetoriais: os *subespaços vetoriais*. Nem todo subconjunto S de um espaço vetorial V é um seu subespaço: é necessário que o subconjunto em questão tenha a mesma estrutura de V, como estabelece a definição a seguir.

Definição

Considere um espaço vetorial V. Um subconjunto S de V é dito um *subespaço vetorial* de V se S for um espaço vetorial com respeito às mesmas operações que tornam V um espaço vetorial.

Como primeira conseqüência dessa definição, um subespaço vetorial S deve ser não vazio, já que uma das condições que devem ser satisfeitas para que S seja um subespaço vetorial de V é a existência em S de um elemento neutro para a adição de vetores: com isso, obrigatoriamente $\mathbf{0} \in S$.

De acordo também com a definição acima, para verificar se um dado subconjunto S de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V, deve-se checar se as operações de adição e multiplicação por escalar estão bem definidas em S, e se elas satisfazem a todas as condições dadas na definição de espaço vetorial.

Se observarmos melhor, no entanto, veremos que não é necessário verificar cada uma das condições: uma vez que a adição em S esteja bem definida (ou seja, que a soma de dois elementos quaisquer de S seja também um elemento de S), ela não deixará de ser comutativa (por exemplo) apenas porque estamos considerando elementos de S, pois a adição em V tem essa propriedade. O mesmo se verifica para a multiplicação por escalar.

A seguir, então, listamos três condições que, se satisfeitas, garantem que um subconjunto S de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V:

- $S \neq \emptyset$.
- Dados u e v quaisquer em S, a soma $u + v$ está em S.
- Dados $u \in S$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto αu está em S.

Uma vez que $S \subset V$ satisfaça tais requisitos, todas as outras propriedades listadas na definição de espaço vetorial serão automaticamente "herdadas" pelo conjunto S.

Exemplos

1. Dado um espaço vetorial V qualquer, os conjuntos $\{\mathbf{0}\}$ (conjunto cujo único elemento é o vetor nulo) e V são subespaços vetoriais de V.

   De fato, é claro que $\{\mathbf{0}\} \neq \emptyset$. Além disso, dados dois elementos de $\{\mathbf{0}\}$, a soma deles pertence a $\{\mathbf{0}\}$ (o único elemento que existe para considerarmos é $\mathbf{0}$!) e o produto de um número real qualquer por um elemento de $\{\mathbf{0}\}$ resulta no vetor nulo, pertencendo, portanto, a $\{\mathbf{0}\}$.

   Para verificar que V é subspaço vetorial de V, basta aplicar diretamente a definição de subespaço vetorial, e observar que $V \subset V$ e é obviamente um espaço vetorial com respeito às mesmas operações.

   Por serem os subespaços mais simples do espaço vetorial V, $\{\mathbf{0}\}$ e V são chamados *subespaços triviais* de V.

2. Seja $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. O conjunto S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

   Nota: Na seção seguinte, veremos quais são todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$. Neste momento, estudaremos este exemplo particular, para nos familiarizarmos com o procedimento de verificação de que um dado conjunto é um subespaço vetorial. Ao nos confrontarmos com um "candidato" S a subespaço, temos que nos fazer três perguntas:

   i- $S \neq \emptyset$?

   ii- Se $u \in S$ e $v \in S$ então $u + v \in S$ (a adição está bem definida em S)?

   iii- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u \in S$ então $\alpha u \in S$ (a multiplicação por escalar está bem definida em S)?

Vamos então responder a essas perguntas para o caso de $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$:

i- $S \neq \emptyset$, porque $(0, 0) \in S$, por exemplo. Basta considerar $x = 0$.

ii- Se $u \in S$ e $v \in S$, digamos que $u = (x, 2x)$ e $v = (y, 2y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$ (precisamos usar letras diferentes para designar elementos diferentes!), então $u + v = (x + y, 2x + 2y) = (x + y, 2(x + y))$. Logo, $u + v \in S$, pois é um par ordenado de números reais onde a segunda coordenada é o dobro da primeira, que é precisamente a regra que define os elementos de S neste exemplo.

iii- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = (x, 2x) \in S$ então $\alpha u = \alpha(x, 2x) = (\alpha x, \alpha 2x) \in S$, pois $\alpha 2x = 2\alpha x$ é o dobro de αx.

Como a resposta às três perguntas formuladas foi positiva, podemos concluir que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Observe que, para responder à primeira pergunta, exibimos um elemento de S, concluindo que $S \neq \emptyset$. Escolhemos exibir o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$, embora qualquer outro elemento servisse para esse propósito. Tal escolha não foi por acaso: se o vetor nulo não fosse um elemento de S, então S não seria um subespaço vetorial (pois não seria ele mesmo um espaço vetorial). Sempre que tivermos à nossa frente um candidato a subespaço vetorial, podemos verificar se o vetor nulo do espaço vetorial que o contém pertence ao candidato, para responder à primeira das perguntas. Caso a resposta seja afirmativa, passamos a verificar as outras duas perguntas e, se a resposta for negativa, já podemos concluir que o candidato não é um subespaço vetorial, sem nenhum trabalho adicional.

3. Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $S = \{(x, x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Observe que $(0, 0) \notin S$. Logo, S **não é** um subespaço vetorial de V.

4. Seja V um espaço vetorial e w um elemento de V. Então o conjunto $S = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V.

   Nota: Neste exemplo, os elementos de S são caracterizados por serem todos produto de um número real qualquer por um elemento fixo de V. No caso desse elemento ser o vetor nulo, temos um subespaço trivial.

   i- $S \neq \emptyset$, pois $\mathbf{0} = 0w \in S$;

   ii- se $u \in S$ e $v \in S$, digamos, $u = \lambda_1 w$ e $v = \lambda_2 w$ com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, então $u + v = \lambda_1 w + \lambda_2 w = (\lambda_1 + \lambda_2)w \in S$;

   iii- se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = \lambda_1 w \in S$ então $\alpha u = \alpha(\lambda_1)w = (\alpha\lambda_1)w \in S$

5. O conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 4z + 3t &= 0 \\ x + 4y - 2z + 3t &= 0 \\ x + 2y - 2z + 2t &= 0 \end{cases}$$

é o subconjunto de $\mathbb{R}^4$ dado por $\{(-2y - 2z, y, z, 2z); y, z \in \mathbb{R}\}$. Você pode verificar que esse conjunto satisfaz às três condições de subespaço.

6. O conjunto-solução de um sistema linear homogêneo de m equações e n incógnitas é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

O exemplo anterior é um caso particular deste. Considere o sistema escrito na forma matricial,

$$AX = \mathbf{0} \tag{1}$$

onde $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, X é o vetor-coluna (de n linhas) das incógnitas do sistema, e $\mathbf{0}$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^m$ representado como coluna. Vamos verificar que o conjunto S de todos os vetores X de $\mathbb{R}^n$ que, se representados por vetores-coluna, satisfazem à equação matricial (1), formam um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$:

i- $S \neq \emptyset$?

Como sabemos, um sistema homogêneo qualquer tem sempre a solução trivial, portanto $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ é um elemento de S (podemos também verificar que $A\mathbf{0} = \mathbf{0}$, tomando o cuidado de notar que o símbolo $\mathbf{0}$ representa uma coluna de n zeros do lado direito da equação, e uma coluna de m zeros do lado esquerdo da equação).

ii- Se $U \in S$ e $V \in S$ então $U + V \in S$ (a adição está bem definida em S)?

Sejam U e V duas soluções do sistema (1), ou seja, vetores-coluna de $\mathbb{R}^n$ qe satisfazem àquela equação matricial. Então temos

$$A(U + V) = AU + AV = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

onde a primeira igualdade vem da propriedade distributiva da adição de matrizes, e a segunda do fato de que, como U e V são soluções do sistema (1), $AU = \mathbf{0}$ e $AV = \mathbf{0}$. Vemos, portanto, que $U + V$ satisfaz à equação matricial (1), representando, portanto, uma solução do sistema.

iii- Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $U \in S$ então $\alpha U \in S$ (a multiplicação por escalar está bem definida em S)?

Novamente, considere U um vetor coluna de $\mathbb{R}^n$ que satisfaz à equação (1). Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então temos

$$A(\alpha U) = \alpha AU = \alpha \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

A primeira igualdade utiliza a propriedade $mn1$, de multiplicação de matrizes por números reais, vista na Aula 2.

Acabamos de verificar, usando representações matriciais, que a soma de duas soluções de um sistema linear homogêneo também é solução desse sistema e que qualquer múltiplo real de uma solução também o é. Logo, o conjunto-solução de um sistema linear homogêneo com n incógnitas é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

7. O conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}; a + c = d \right\}$$

é subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

8. O conjunto $S = \{a + bx + cx^2; a, b, c \in \mathbb{R} \text{ e } a = b + c\}$ é subespaço vetorial de $V = P_2$.

Lembrando: P_2 é o conjunto de todos os polinômios a variável e coeficientes reais, de grau menor ou igual a 2, acrescido do polinômio identicamente nulo.

Observe que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ são espaços vetoriais, e $\mathbb{R}$ **não é** um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$. Isso porque $\mathbb{R}$ **não está** contido em $\mathbb{R}^2$, assim como $\mathbb{R}^2$ não está contido em $\mathbb{R}^3$. A confusão costuma acontecer, em parte, porque a representação geométrica de $\mathbb{R}^2$ (plano cartesiano) parece incluir a representação geométrica de $\mathbb{R}$ (reta). Na verdade, porém, $\mathbb{R}$ é um conjunto de **números**, enquanto $\mathbb{R}^2$ é um conjunto de **pares ordenados de números**, e esses dois objetos são completamente distintos. Veremos mais tarde que $\mathbb{R}^2$ contém apenas "cópias" de $\mathbb{R}$, assim como $\mathbb{R}^3$ contém "cópias" tanto de $\mathbb{R}$ como de $\mathbb{R}^2$.

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$

Ja conhecemos alguns dos subespaços de $\mathbb{R}^2$:

- $\{(0,0)\}$ e $\mathbb{R}^2$, que são os subespaços triviais;
- $\{\alpha w : \alpha \in \mathbb{R}\}$, onde $w \in \mathbb{R}$ é um elemento de $\mathbb{R}^2$.

Esses subespaços foram vistos nos exemplos anteriores. Note que, variando w no segundo item, existem infinitos exemplos de subespaços. Veremos nesta seção que esses são os únicos subespaços de $\mathbb{R}^2$: são em número infinito, mas são todos de algum dos tipos acima. Para isso, vamos considerar o plano cartesiano, que é a representação geométrica do conjunto $\mathbb{R}^2$. Cada elemento $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é representado como um vetor com origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade no ponto (x, y).

A cada vetor do plano com origem no ponto $(0, 0)$ e extremidade no ponto (x, y) fazemos corresponder o ponto (x, y) de $\mathbb{R}^2$, e vice-versa.

Considere um subespaço S de $\mathbb{R}^2$ que não seja $\{(0, 0)\}$. Então nesse subespaço existe um vetor w que não é o vetor nulo. Como S é fechado para a multiplicação por escalar, todos os múltiplos de w também são elementos de S. Com isso, como vemos na figura (1), a reta que contém w deve estar toda contida em S. Ou seja, se S é não trivial, ele contém pelo menos uma reta (infinitos pontos!). Observe que essa mesma reta também contém a origem.

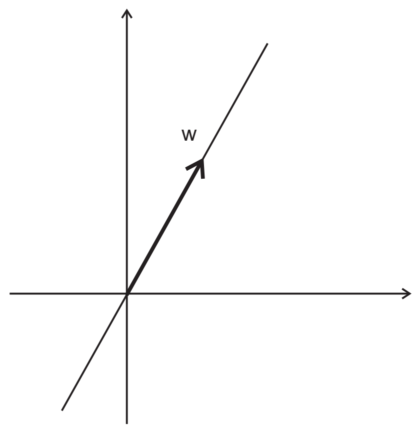


Fig. 1: Reta que contém w

Suponhamos agora que, além de conter w, S também contenha algum outro vetor v de $\mathbb{R}^2$, que não esteja na reta que contém w. Nesse caso, S também deve conter a reta dos múltiplos de v. Observe as duas retas na figura (2).

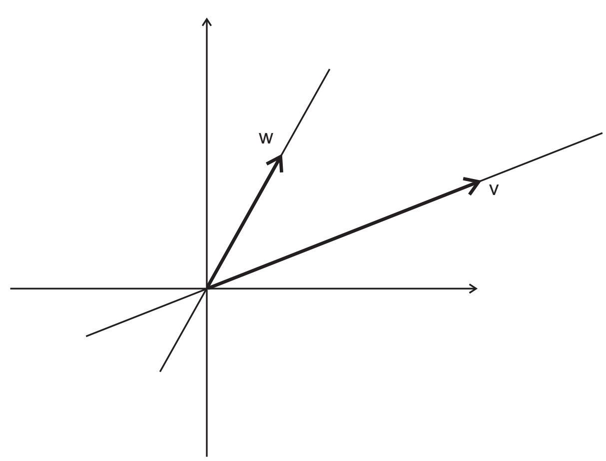


Fig. 2: Retas contidas em S

Note que o subespaço S não pode consistir apenas das duas retas da figura (2). Isso porque a adição não está bem definida no conjunto formado pela união das duas retas; se considerarmos, por exemplo, o vetor $w + v$, veremos que ele não pertence a nenhuma das duas retas.

Lembre-se de como somar vetores geometricamente no plano!

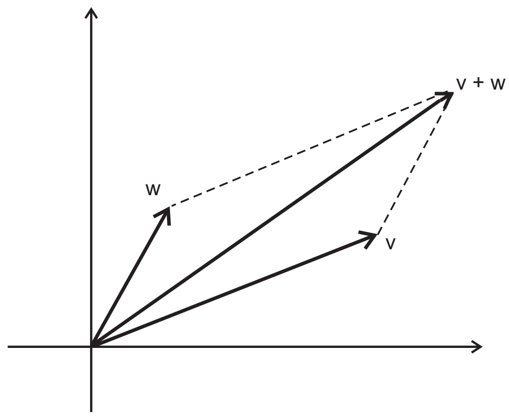


Fig. 3: Soma de w e v

Observe, agora, que qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ (com origem em $\mathbf{0} = (0, 0)$) pode ser obtido pela soma de vetores das duas retas, e isso significa que, nesse caso, $S = \mathbb{R}^2$. Na figura (4), vemos alguns exemplos de vetores em diversas posições, obtidos como soma de vetores das retas, e você pode procurar mais exemplos para se convencer desse fato.

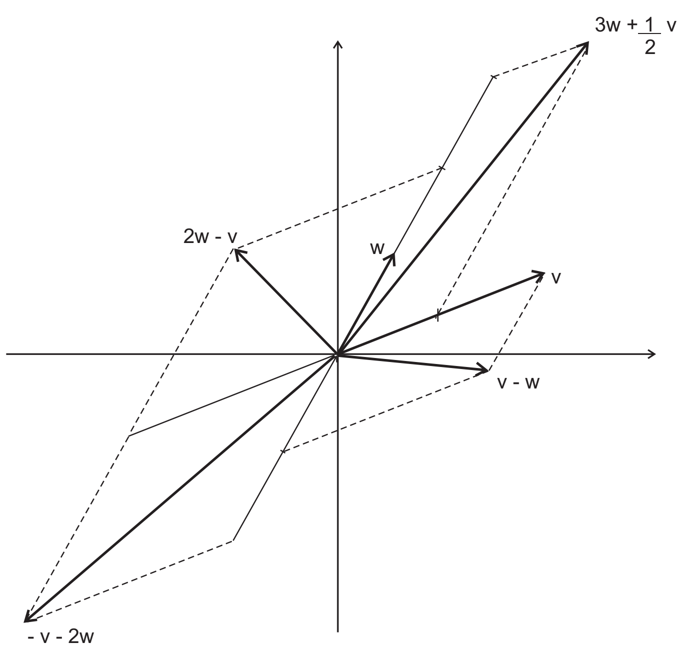


Fig. 4: Vetores de $\mathbb{R}^2$

Até agora, resumindo, temos os seguintes fatos para um subespaço S de $\mathbb{R}^2$:

- se S não contém vetores não nulos, $S = \{\mathbf{0}\}$;
- se S contém um vetor não nulo, S também contém a reta que contém esse vetor;
- se S contém dois vetores não nulos, que não estejam sobre uma mesma reta, então $S = \mathbb{R}^2$.

Com isso, os únicos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ são $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^2$ e as retas de $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem.

Uma reta de $\mathbb{R}^2$ que não contém a origem (ponto $(0,0)$) pode ser um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$? Por quê?

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$

Os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ são do seguinte tipo:

- $\{\mathbf{0}\}$ e $\mathbb{R}^3$ (triviais);
- retas do $\mathbb{R}^3$ que contêm a origem ($\mathbf{0} = (0,0,0)$ neste caso);
- planos de $\mathbb{R}^3$ que contêm a origem.

Não faremos aqui uma demonstração desse fato, como fizemos na seção passada. Os motivos que fazem com que esses sejam os únicos possíveis subespaços são inteiramente análogos ao caso de $\mathbb{R}^2$. Nas próximas aulas estudaremos conceitos que permitirão uma demonstração bem simples desse fato.

Resumo

Nesta aula vimos a definição de subespaço: trata-se de subconjuntos de espaços vetoriais que são, por si mesmos, espaços vetoriais também, considerando as mesmas operações definidas no espaço que os contêm. Vimos que, para comprovar que um subconjunto de um espaço vetorial é um subespaço, basta verificar três condições: ser não-vazio, e ser fechado para as operações de adição e multiplicação por número real. Vimos também que, embora sejam em número infinito, os subespaços de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são facilmente identificados.

Exercícios

1. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^3$:

   a) todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.

   b) todos os vetores da forma $(a, 1, 0)$.

   c) todos os vetores da forma (a, b, c), com $c = a + b$.

   d) todos os vetores da forma (a, b, c), com $a + b + c = 1$.

2. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

   a) todas as matrizes 2×2 com elementos inteiros.

   b) todas as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a + b + c + d = 0$.

   c) todas as matrizes 2×2 inversíveis.

   d) todas as matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Lembrando: uma matriz é inversível se, e somente se, seu deteminante é diferente de zero.

3. Verifique quais dos seguintes subconjuntos são subespaços de $P_3(\mathbb{R})$:

   a) todos os polinômios da forma $a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, onde a_1, a_2 e a_3 são números reais quaisquer.

   b) todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, onde a soma dos coeficientes é igual a zero.

   c) todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ para os quais a soma dos coeficientes é um número inteiro.

   d) todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x$, a_0 e a_1 reais quaisquer.

Auto-avaliação

Você deverá ter segurança quanto a conferir se um subconjunto é ou não subespaço de um espaço que o contenha. Lembre-se de que o primeiro passo é verificar se o elemento nulo do espaço pertence ao subconjunto: a resposta negativa já garante que **não** se trata de um subespaço, mas a resposta afirmativa só mostra que o subconjunto não é vazio. É preciso, ainda, verificar se a soma de dois vetores quaisquer, genéricos, do subconjunto, também pertence a ele, e se um múltiplo real qualquer de um vetor genérico do subconjunto também pertence ao subconjunto. Procure fazer essa verificação nos exemplos da aula. Quando o espaço vetorial for $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, basta verificar se o candidato a subespaço é uma reta passando pela origem ou, no caso do espaço, um plano passando pela origem. Além desses, apenas o subespaço nulo e todo o espaço dado são subconjuntos também. Se você tiver qualquer dúvida na resolução dos exercícios ou na compreensão dos exemplos, procure o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. São subespeços a), c).
2. São subespeços b), d).
3. São subespaços a), b), d).

Aula 10 – Combinações lineares

Objetivos

Caracterizar combinação linear e subespaço gerado por um conjunto de vetores;
Determinar o subespaço gerado por um conjunto de vetores;
Encontrar geradores para um subespaço vetorial dado.

Pré-requisitos: Aulas 6 e 7, sobre resolução de sistemas lineares por escalonamento, e aulas 8 e 9.

Introdução

Iniciaremos o estudo do importante conceito de combinação linear. Através das propriedades das combinações lineares, é possível dar uma descrição simples e completa de cada espaço vetorial, como veremos a partir desta aula.

Definição

Considere um espaço vetorial V, e $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de V. Uma *combinação linear* desses vetores é uma expressão do tipo

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n,$$

onde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são números reais.

Se é possível descrever um vetor $v \in V$ através de uma expressão como essa, dizemos que *v é combinação linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, ou que *v se escreve como combinação linear* de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

Exemplo 1

a) O vetor $v = (2, -4) \in \mathbb{R}^2$ é combinação linear de $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, -1)$, pois $v = -1v_1 + 3v_2$.

b) O vetor $v = 2 + 3t \in P_2(t, \mathbb{R})$ é combinação linear dos vetores $v_1 = t + 2t^2$, $v_2 = 1 + t^2$ e $v_3 = 2t^2$, pois $v = 3v_1 + 2v_2 - 4v_3$.

c) O vetor $v = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ é combinação linear dos vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 2 & 2 & -4 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}\ e\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pois $v = v_1 + 0v_2 + 257v_3$. Temos ainda que $v = 3v_1 - v_2 + \pi v_3$, ou ainda, $v = -5v_1 + 3v_2 + \sqrt{2}v_3$, ou seja, v é combinação linear de v_1, v_2 e v_3 de várias maneiras diferentes.

d) Para que o vetor $(0, m)$ de $\mathbb{R}^2$ seja combinação linear dos vetores $(1, -2)$ e $(-2, 4)$ é necessário que existam a e b em $\mathbb{R}$ tais que $(0, m) = a(1, -2) + b(-2, 4)$. Para isso devemos ter $(0, m) = (a - 2b, -2a + 4b)$, ou seja, $a - 2b = 0$ e $-2a + 4b = m$ simultaneamente. Tal sistema de duas equações nas variáveis a e b tem solução apenas para o caso em que $m = 0$.

Subespaços gerados

No exemplo 4 da aula 9, vimos que, se V é um espaço vetorial e w um elemento de V, então o conjunto $S = \{\lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de V. Agora que definimos combinação linear, podemos observar que tal S é o conjunto formado por todas as combinações lineares do vetor w.

Esse exemplo pode ser generalizado para um número qualquer de vetores da seguinte maneira: se $w_1, w_2, \ldots, w_n$ são vetores do espaço vetorial V, então o conjunto de todas as combinações lineares desses vetores é um subespaço vetorial de V (vamos provar isso!), chamado *subespaço gerado pelos vetores* $w_1, w_2, \ldots, w_n$, ou ainda *subespaço gerado pelo conjunto* $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Denotamos esse espaço por $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$, ou $[\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}]$, e dizemos que $w_1, w_2, \ldots, w_n$ são geradores de $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$. Assim temos

$$[w_1, w_2, \ldots, w_n] = \{a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n : a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

Vamos agora mostrar que $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ é um subespaço vetorial de V.

(*i*) $S \neq \emptyset$, pois $\mathbf{0} = 0w_1 + 0w_2 + \cdots + 0w_n \in [w_1, w_2, \ldots, w_n]$;

(*ii*) se $u \in S$ e $v \in S$, digamos,

$$u = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n$$

e

$$v = b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n$$

com $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n) + (b_1w_1 + b_2w_2 + \cdots + b_nw_n) \\ &= (a_1 + b_1)w_1 + (a_2 + b_2)w_2 + \cdots + (a_n + b_n)w_n, \end{aligned}$$

ou seja, $u+v$ é também uma combinação linear dos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_n$, sendo, portanto, um elemento de $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$;

(*iii*) se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u = a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n \in S$ então

$$\begin{aligned} \alpha u &= \alpha(a_1w_1 + a_2w_2 + \cdots + a_nw_n) \\ &= (\alpha a_1)w_1 + (\alpha a_2)w_2 + \cdots + (\alpha a_n)w_n, \end{aligned}$$

ou seja $\alpha u \in [w_1, w_2, \ldots, w_n]$.

Observe que se os geradores $w_1, w_2, \ldots, w_n$ não são todos nulos, o conjunto $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ é infinito. Já o conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é finito: possui, exatamente, n elementos.

De acordo com os itens *i*, *ii* e *iii*, $[w_1, w_2, \ldots, w_n]$ é um subespaço vetorial de V.

Exemplo 2

Veremos agora alguns exemplos de subespaços gerados.

a) No exemplo 2 da aula 9, $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ é o subespaço gerado pelo vetor $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$, ou seja, $S = [(1, 2)]$.

b) O subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u = (1, 2, 0)$, $v = (3, 0, 1)$ e $w = (2, -2, 1)$ é o plano de equação $2x - y - 6z = 0$. Note que os vetores dados satisfazem a equação obtida para o subespaço gerado por eles.

c) O conjunto $\{at + bt^2 : a, b \in \mathbb{R}\}$ é o subespaço de $P_2(\mathbb{R}, t)$ gerado pelos vetores t e t^2.

Lembre-se de que os vetores de $P_2(\mathbb{R}, t)$ são polinômios!

d) O conjunto $\mathbb{R}^3$ é o (sub)espaço gerado pelos vetores $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$ de $\mathbb{R}^3$. Os vetores $(1, 2, 0)$, $(0, -1, 2)$ e $(1, 1, 3)$, juntos, também geram o $\mathbb{R}^3$.

e) O conjunto de todos os polinômios (de qualquer grau) com coeficientes reais, a uma variável t, denotado por $P(t, \mathbb{R})$, é gerado pelo conjunto infinito de vetores $\{1, t, t^2, t^3 \ldots\}$

Ao longo deste curso serão dados inúmeros outros exemplos de subespaços gerados. Nas próximas seções veremos como determinar o subespaço gerado por um conjunto de vetores, e como encontrar geradores para um subespaço vetorial dado.

Determinação do subespaço gerado por um conjunto de vetores

Há várias maneiras de se descrever um mesmo subespaço vetorial S de um espaço V. Eis algumas delas:

- através de um conjunto de geradores (ex: $S = [(1,1),(1,2)] \subset \mathbb{R}^2$);
- através de uma equação ou conjunto de equações (ex: S é o plano de equação $x + y - z = 0$ em $\mathbb{R}^3$);
- através de uma propriedade de seus elementos (ex: $S = \{a + bt + ct^2 \in P_2(t, \mathbb{R}) : a + b - c = 0\}$.

No exemplo 2 da seção anterior, cada subespaço foi descrito por duas dessas formas. *Determinar* o subespaço gerado por um conjunto de vetores significa passar da descrição por geradores (a primeira acima) para outras descrições qua permitam melhor entendimento do subespaço. Veremos como isso é feito através de alguns exemplos.

Exemplo 3

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u = (1, 2, 0)$, $v = (3, 0, 1)$ e $w = (2, -2, 1)$. A descrição de S como espaço gerado não deixa claro, por exemplo, se S é trivial, ou uma reta que passa pela origem, ou um plano que passa pela origem. Ajuda bastante saber que S é o plano de equação $2x - y - 6z = 0$. Como fazer para encontrar essa outra descrição?

Como $S = [u, v, w]$, cada elemento de S é uma combinação linear de u, v e w. Se denotarmos por (x, y, z) um elemento genérico de S, teremos então que $(x, y, z) = au + bv + cw$, onde a, b e c são números reais. Daí temos

$$(x, y, z) = a(1, 2, 0) + b(3, 0, 1) + c(2, -2, 1),$$

ou seja,

$$(x, y, z) = (a + 3b + 2c, 2a - 2c, b + c).$$

Para que a igualdade anterior se verifique, é necessário que as coordenadas correspondentes dos ternos ordenados de cada lado da equação coincidam, ou seja, devemos ter

$$\begin{aligned} x &= a + 3b + 2c \\ y &= 2a - 2c \\ z &= b + c \end{aligned}$$

Para que um dado vetor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ seja um elemento de S, é preciso que existam valores para a, b e c de forma que as três equações acima se verifiquem simultaneamente (compare com o exemplo 2-d) desta aula).

Vamos então, resolver, por escalonamento, o sistema linear (nas variáveis a, b e c)

$$S : \left\{ \begin{array}{rrrl} a & +3b & +2c & = x \\ 2a & & -2c & = y \\ & b & +c & = z \end{array} \right.$$

Passando à matriz ampliada, e escalonando, temos

$$\left[\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & 2 & x \\ 2 & 0 & -2 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right] \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & -6 & -6 & y - 2x \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right]$$

$$L_2 \leftarrow -1/6L_2 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-y+2x}{6} \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array} \right]$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \;\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & x \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-y+2x}{6} \\ 0 & 0 & 0 & z + \frac{y-2x}{6} \end{array} \right]$$

O sistema em questão tem solução se, e somente se, os valores de x, y e z são tais que se tenha $z + \frac{y-2x}{6} = 0$, ou, equivalentemente, se $2x - y - 6z = 0$. Essa é precisamente a equação de um plano em $\mathbb{R}^3$ contendo a origem.

Os cálculos para determinar o subespaço gerado são sempre análogos ao que acabamos de fazer. Sempre que ocorrerem linhas de zeros, podemos obter equações que descrevem o espaço. Quando tais linhas não ocorrerem, isso significa que não existem restrições para que o elemento genérico esteja no subespaço gerado, ou seja, o subespaço em questão coincide com o espaço todo. Isso é o que acontece no próximo exemplo.

Exemplo 4

Considere o subespaço de $\mathbb{R}^2$ gerado pelos vetores $(1,1)$ e $(1,-1)$. Para que (x,y) seja combinação desses vetores, devem existir a e b em $\mathbb{R}$ tais que $a(1,1)+b(1,-1)=(x,y)$. Isso significa que o sistema

$$S:\begin{cases} a & +b & = x \\ a & -b & = y \end{cases}$$

deve ter solução. Escalonando, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{y-x}{2} \\ 0 & 1 & \frac{x-y}{2} \end{bmatrix}$$

que tem sempre solução, para quaisquer valores de x e y (não há restrições sobre x e y para que (x,y) esteja no espaço gerado pelos vetores em questão). Daí $[(1,1),(1,-1)]=\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5

Considere o subespaço S, de P_3, gerado pelos polinômios $p_1=2-t+t^2$ e $p_2=t+3t^3$. Um polinômio $x+yt+zt^2+wt^3$, para pertencer a S, deve poder ser escrito como uma combinação linear de p_1 e p_2, isto é, queremos que existam escalares a e b tais que $x+yt+zt^2+wt^3=a(2-t+t^2)+b(t+3t^3)$. Ou seja, queremos que o sistema linear $\begin{cases} 2a & = & x \\ -a+b & = & y \\ a & = & z \\ 3b & = & w \end{cases}$ possua solução. Escalonando esse sistema, chegamos ao sistema equivalente

$\begin{cases} a & = & z \\ b & = & y+z \\ 0 & = & z-2x \\ 0 & = & w-3y-3z \end{cases}$. Logo, para que o sistema seja compatível, devemos ter $z-2x=0$ e $w-3y-3z=0$, ou seja, $z=2x$ e $w=3y+6x$. Concluimos, então, que $S=\{x+yt+zt^2+wt^3\in P_3 | z=2x \text{ e } w=3y+6x\}$.

Determinação de geradores de um subespaço vetorial

Vimos que, dado um conjunto de vetores de um espaço vetorial V, o conjunto de todas as suas combinações lineares é um subespaço vetorial de V. É natural pensarmos se o contrário também acontece: será que todo subespaço S de V é gerado por um conjunto de vetores? A resposta à pergunta nesses termos é simples: é claro que S é o subespaço gerado por S (verifique!).

Façamos a pergunta de outro modo: será que todo subespaço S de V, incluindo o próprio V, é gerado por um conjunto finito de vetores? A resposta é sim para alguns espaços, entre eles $\mathbb{R}^n$, ou $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Existem também espaços que não têm essa propriedade, como é o caso do exemplo 1-l) de subespaços gerados. Em nosso curso, estudaremos mais a fundo os espaços que são *finitamente gerados*, ou seja, que admitem um conjunto finito de geradores, o mesmo acontecendo para todos os seus subespaços.

Veremos agora como encontrar geradores para subespaços através do estudo de alguns exemplos.

Exemplo 6

Retornemos ao exemplo 2 da Aula 9, $S = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. Para verificar que de fato S é o subespaço gerado pelo vetor $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$, basta notar que os elementos de S são todos da forma $(x, 2x) = x(1, 2)$: variando o valor de x, obtemos diferentes elementos de S. Ora, $x(1, 2)$ é a expressão de uma combinação linear de $(1, 2)$, portanto todos os elementos de S são combinações lineares de $(1, 2)$.

Exemplo 7

Seja $S = \{(x, x + y, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}^3$. Raciocinando como anteriormente, vemos que o *elemento genérico* de S é da forma $(x, x + y, y) = (x, x, 0) + (0, y, y) = x(1, 1, 0) + y(0, 1, 1)$, ou seja, é combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Podemos escrever, então, $S = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$.

Exemplo 8

Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$. Para encontrar geradores para esse subespaço do $\mathbb{R}^3$, devemos procurar escrevê-lo na forma do exemplo acima, colocando nas coordenadas do vetor genérico a(s) equação(ões) que define(m) o espaço. No caso em questão, como temos uma equação e três variáveis, podemos escrever o conjunto solução da equação (que é exatamente o subespaço S!) em função de duas variáveis livres. Nesse caso, temos $S = \{(-y+z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ (apenas escrevemos a variável x em função de y e z). Assim, como no exemplo anterior, temos $(-y+z, y, z) = y(-1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$, ou seja, $S = [(-1, 1, 0), (1, 0, 1)]$.

Exemplo 9

Seja $S = \{a + bt + ct^2 \in P_2; a - b - 2c = 0\}$. A condição que define S pode ser escrita como $a = b + 2c$. Inserindo essa condição na expressão do vetor genérico de P_2, temos: $a + bt + ct^2 = b + 2c + bt + ct^2 = b(1 + t) + c(2 + t^2)$. Logo, escrevemos o polinômio de S como combinação linear dos polinômios $1 + t$ e $2 + t^2$, que são, assim, os geradores de S.

Exemplo 10

Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2\mathbb{R}; a + b - c = 0 \text{ e } c + d = 0 \right\}$. As equações que definem S podem ser escritas como $c = -d$ e $a = -b - d$. Logo, uma matriz de S é do tipo $\begin{bmatrix} -b-d & b \\ -d & d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, e o conjunto gerador de S é formado por essas duas últimas matrizes.

Resumo

Nesta aula vimos duas importantes técnicas envolvendo subespaços gerados:

1. Como determinar o subespaço gerado por um conjunto de vetores: Neste caso, escrevemo um vetor genérico do espaço como combinação linear dos vetores geradores. Isso fornece um sistema linear o qual queremos que seja compatível. Assim, após o escalonamento, se alguma equação tiver o primeiro membro nulo, o segundo membro também terá que se anular, fornecendo uma equação do subespaço. Caso nenhuma equação tenha seu primeiro lado anulado, significa que o subespaço gerado é todo o espaço.

2. Como determinar os geradores de um subespaço dado: "embutimos" as condições dadas pelas equações do subespaço num vetor genérico do espaço e o decompomos como uma combinação linear.

Exercícios

1. Em cada caso, escreva o vetor v como combinação linear de $v_1, \ldots, v_n$.

   a) Em $\mathbb{R}^2$, $v = (1, 3)$, $v_1 = (1, 2)$ e $v_2 = (-1, 1)$.

   b) Em $\mathbb{R}^3$, $v = (2, 1, 4)$, $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$.

   c) Em $\mathbb{R}^2$, $v = (1, 3)$, $v_1 = (0, 0)$ e $v_2 = (3, 9)$.

   d) Em $\mathbb{R}^3$, $v = (2, -1, 6)$, $v_1 = (1, 0, 2)$ e $v_2 = (1, 1, 0)$.

   e) Em $P_2(t, \mathbb{R})$, $v = t^2 - 2t$, $v_1 = t + 1$, $v_2 = t^2$ e $v_3 = 2t$.

2. Determine $m \in \mathbb{R}$ tal que o vetor $v = (1, -m, 3)$ seja combinação linear dos vetores $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 1, 1)$ e $v_3 = (2, -1, 5)$.

3. No exercício anterior, substituindo o valor de m que você encontrou, escreva v como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

4. Determine o subespaço S do espaço V, gerado pelos vetores de A, em cada caso.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, $A = \{(1, 2, 1), (2, 1, -2)\}$.

   b) $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $A = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\ e\ v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   c) $V = P_2(t, \mathbb{R})$, $v_1 = t + 1$ e $v_2 = t^2$.

5. Determine um conjunto de geradores para os seguintes subespaços:

   a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 5y \text{ e } z = -2y\}$

   b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}$

   c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}); a = -d \text{ e } c = 2b \right\}$

   d) $S = \{at^2 + at + b : a, b \in \mathbb{R}\} \subset P_2(t, \mathbb{R})$

Auto-avaliação

Ao final desta aula você deverá estar dominando as duas técnicas estudadas: (i) como determinar o subespaço gerado por um conjunto de vetores e (ii) como determinar um conjunto de geradores de um subespaço dado. Este segundo tipo de problema é resolvido rapidamente, enquanto que o primeiro sempre recai num sistema linear sobre o qual imporemos a condição de ser compatível. Os vetores geradores não são únicos, por isso, as respostas dadas aqui podem não coincidir com as suas. Para verificar se acertou, basta testar se cada vetor, candidato a gerador, satisfaz a condição do subespaço. Se houver qualquer dúvida, consulte o tutor da disciplina... e vamos em frente!!!!

Respostas dos exercícios

1. a) $v = 4/3v_1 + 1/3v_2$.
   b) $v = v_1 - 3v_2 + 4v_3$.
   c) Várias respostas possíveis. Uma delas é $v = 45v_1 + 1/3v_2$.
   d) $v = 3v_1 - v_2$.
   e) $v = 0v_1 + v_2 - v_3$.

2. $m = -1$

3. $v = (1, -1, 3) = (2 - 3a)v_1 + (a - 1)v_2 + av_3$, onde $a \in \mathbb{R}$.

4. a) $[A] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 5x - 4y + 3z = 0\}$
   b) $[A] = \left\{ \begin{bmatrix} 2a & 2b - 5a \\ b & a \end{bmatrix} \in M_{2\times2}(\mathbb{R}) \right\}$
   c) $[A] = \{a + at + bt^2 \in P_2(t, \mathbb{R})\}$

5. a) $\{(5, 1, -2)\}$
   b) $\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$
   c) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$
   d) $\{t + t^2, 1\}$.

Aula 11 – Base e dimensão

Objetivos

Definir independência linear *e mostrar como verificar se um conjunto é linearmente independente;*
Definir base *de um espaço vetorial e dar alguns exemplos;*
Mostrar a base canônica do $\mathbb{R}^n$.

Introdução

Na aula 10 estudamos subespaços gerados por um conjunto de vetores em um espaço vetorial V.

Veremos agora que alguns conjuntos de vetores geram um subespaço de maneira mais "eficiente". Vamos começar com um exemplo.

Exemplo 1

O subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $u = (1,2,0)$, $v = (3,0,1)$ e $w = (2,-2,1)$ é o plano de equação $S = 2x - y - 6z = 0$. Dizemos que $\{u, v, w\}$ é um conjunto de geradores para o plano S. No entanto, como veremos a seguir, os vetores $u = (1,2,0)$ e $s = (12,-6,5)$ juntos geram o plano S.

No exemplo 3 da aula 10 vimos, com detalhes, a determinação do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por u, v, e w.

Para ver isto, vamos usar o método explicado no exemplo 3 da aula 10.

Se W é o subespaço gerado por u e s, então $(x,y,z) \in W$ quando existem a, $b \in \mathbb{R}$ tais que $(x,y,z) = a.u + b.s$. Mas

$$au + bs = a(1,2,0) + b(12,-6,5) = (a + 12b, 2a - 6b, 5b).$$

Assim, $(x,y,z) \in W$, quando existe solução para o sistema

$$\begin{cases} a + 12b = x \\ 2a - 6b = y \\ 5b = z \end{cases}$$

Vamos colocar este sistema em forma matricial e resolvê-lo:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 12 & x \\ 2 & -6 & y \\ 0 & 5 & z \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rcl} L_2 & \leftarrow & L_2 - 2L_1 \\ L_3 & \leftarrow & \frac{1}{5}.L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 12 & x \\ 0 & -30 & y-2x \\ 0 & 1 & \frac{z}{5} \end{array}\right] \qquad \begin{array}{rcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 12L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_2 + 30L_3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-\frac{12z}{5} \\ 0 & 0 & y-2x+\frac{30z}{5} \\ 0 & 1 & \frac{z}{5} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x-\frac{12z}{5} \\ 0 & 1 & \frac{z}{5} \\ 0 & 0 & y-2x+6z \end{array}\right]$$

Isto mostra que o sistema tem solução se, e somente se, $-2x+y+6z=0$ (linha nula) e que, neste caso, a solução é $a = x - \frac{12z}{5}$ e $b = \frac{z}{5}$.

Como $-2x+y+6z$ é a equação do plano S, então u e s geram o plano S.

Portanto, o conjunto $\{u, v, w\}$ gera o plano S e o conjunto $\{u, s\}$ também gera o mesmo plano S.

O segundo conjunto gera o mesmo subespaço com um número menor de vetores geradores.

Independência linear

A chave para entendermos o que está acontecendo no exemplo anterior está no conceito de *independência linear*.

Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ em um espaço vetorial V é chamado linearmente independente se a equação vetorial

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_nv_n = 0 \qquad (1)$$

admite *apenas* a solução trivial $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é chamado linearmente dependente quando a equação (1) admite alguma solução não trivial, isto é, se existem escalares $c_1, \ldots, c_n$, não todos iguais a zero, tais que (1) seja válido.

É comum usar a abreviação L.I. para conjuntos linearmente independentes e L.D. para os linearmente dependentes.

Exemplo 2

Um conjunto contendo um único vetor v é linearmente independente se, e somente se, $v \neq 0$.

Exemplo 3

O conjunto $\{v_1,\ v_2\}$ contendo apenas dois vetores $v_1,\ v_2$ não-nulos é linearmente dependente quando um é múltiplo do outro, pois, se $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$ possui solução não trivial então $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$ (pois $c_1 = 0 \ \Rightarrow \ c_2 \neq 0$ e $c_2v_2 = 0 \ \Rightarrow \ v_2 = 0$, analogamente, $c_2 = 0 \ \Rightarrow \ v_1 = 0$).

$$c_1v_1 + c_2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -\frac{c_2}{c_1} \cdot v_2.$$

Portanto v_1 é múltiplo de v_2.

Exemplo 4

Seja $C[0,1]$ o conjunto das funções reais, contínuas com domínio $[0,1]$. Este conjunto forma um espaço vetorial com as operações usuais de soma de funções e multiplicação por escalar.

O conjunto $\{\operatorname{sen} t,\ \cos t\}$ é linearmente independente em $C[0,1]$, já que $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ são não-nulos e não são múltiplos um do outro enquanto vetores de $C[0,1]$.

Isto é, não há $c \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} t = c\cos t$, para todo $t \in [0,1]$. Para ver isso, basta comparar os gráficos de $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

O conjunto $\{\operatorname{sen} 2t,\ \operatorname{sen} t \cos t\}$ é linearmente dependente em $C[0,1]$,pois

$$\operatorname{sen} 2t = 2 \operatorname{sen} t \cos t,\ \forall\ t \in [0,1].$$

Exemplo 5

Seja P_2 o espaço vetorial formado por polinômios de grau ≤ 2. Sejam $p_1 = 1,\ p_2 = x - 1,\ p_3 = 5 - x$, então $\{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ forma um conjunto linearmente dependente, pois

$$-4p_1 \ + \ p_2 \ + \ p_3 = 0.$$

Como determinar se um conjunto é L.I.

Para determinarmos se um conjunto de vetores $\{v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n\}$ é linearmente independente em um espaço vetorial V, devemos verificar se a equação $c_1v_1 \ + \ \ldots \ + \ c_nv_n = 0$ possui ou não solução não-trivial.

Exemplo 6

Mostre que o conjunto $\{(1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)\}$ é L.I. em $\mathbb{R}^3$

Solução:

Vamos resolver a equação,

$$c_1(1,0,0)+c_2(0,1,0)+c_3(0,0,1)=(0,0,0)$$

$$(c_1,0,0)+(0,c_2,0)+(0,0,c_3)=(0,0,0)$$

$$(c_1,c_2,c_3)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow c_1=c_2=c_3=0$$

Portanto, a única solução é a trivial, $c_1=c_2=c_3=0$, o que mostra que o conjunto é L.I.

Exemplo 7

Determine se o conjunto $\{u,v,w\}$, onde $u=(1,2,0), v=(3,0,1)$ e $w=(2,-2,1)$ é L.I. em $\mathbb{R}^3$.

Solução:

Voltamos aos vetores do exemplo 1 que, como vimos, geram o plano S dado por $2x-y-6z=0$.

Vamos resolver a equação

$$c_1u+c_2v+c_3w=(0,0,0) \tag{2}$$

Substituindo os valores de $u,\ v$ e w :

$$c_1(1,2,0)+c_2(3,0,1)+c_3(2,-2,1)=(0,0,0)$$
$$(c_1,2c_1,0)+(3c_2,0,c_2)+(2c_3,-2c_3,c_3)=(0,0,0)$$
$$(c_1+3c_2+2c_3,2c_1-2c_3,c_2+c_3)=(0,0,0)$$

o que leva ao sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} c_1 & + & 3c_2 & + & 2c_3 & = & 0 \\ 2c_1 & & & - & 2c_3 & = & 0 \\ & & c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array}\right.$$

Colocando na forma matricial e reduzindo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 2 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & -6 & -6 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 6L_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{lcl} L_1 & \leftarrow & L_1 - 3L_3 \\ L_2 & \leftarrow & L_3 \\ L_3 & \leftarrow & L_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \qquad \longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{ccccc} c_1 & - & c_3 & = & 0 \\ c_2 & + & c_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Este sistema possui solução $c_1 = c_3,\ c_2 = -c_3$ e $c_3 = c_3$, para qualquer valor de c_3.

Ou seja, a equação (2) possui infinitas soluções não triviais.

Por exemplo, $c_3 = 1$ resulta em $c_1 = 1,\ c_2 = -1$ e $c_3 = 1$. Verifique que, com estes valores, $c_1u + c_2v + c_3w = 0$.

Exemplo 8

Determine se o conjunto $\{u, s\}$, onde $u = (1, 2, 0)$ e $s = (12, -6, 5)$ é L.I.

Ver exemplo 1.

Solução:

Como o conjunto $\{u, s\}$ tem dois vetores, ele é L.D. apenas quando um dos vetores é múltiplo do outro. Claramente, este não é o caso de $\{u, s\}$. Portanto, $\{u, s\}$ é L.I.

Comparando os exemplos 7 e 8, vemos que os conjuntos $\{u, v, w\}$ e $\{u, s\}$ geraram o mesmo subespaço S. No entanto, $\{u, v, w\}$ é L.D., enquanto que $\{u, s\}$ é L.I.

Veremos posteriormente que se um subespaço W é gerado por um conjunto de n elementos, então qualquer conjunto de m elementos, onde $m > n$, é necessariamente linearmente dependente.

No exemplo acima, como $\{u, s\}$ gera o subespaço S, então qualquer conjunto com mais de 2 elementos é L.D.

Base de um subespaço vetorial

Seja W um subespaço de um espaço vetorial V. Um conjunto de vetores $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de W se

(i) B é um conjunto linearmente independente.

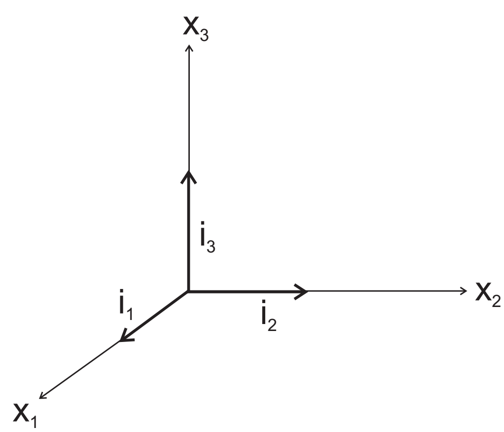
(ii) O subespaço gerado por B é W.

Observe que a definição de base se aplica também ao próprio espaço vetorial V, pois todo espaço vetorial é subespaço de si mesmo.

Observe também que se $B = \{v_1, ..., v_n\}$ é base de W, então $v_1, ..., v_n$ pertencem a W.

Exemplo 9

Sejam os vetores $i_1 = (1, 0, 0)$, $i_2 = (0, 1, 0)$ e $i_3 = (0, 0, 1)$. Considere o conjunto $\{i_1, i_2, i_3\}$, já vimos que o conjunto é L.I. e claramente gera $\mathbb{R}^3$, pois $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x, y, z) = xi_1 + yi_2 + zi_3$. Logo $\{i_1, i_2, i_3\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Esta base é chamada base canônica do $\mathbb{R}^3$.



Base canônica do $\mathbb{R}^3$

Exemplo 10

Sejam os vetores:

$$\begin{aligned} i_1 &= (1, 0, ..., 0) \\ i_2 &= (0, 1, ..., 0) \\ &\vdots \\ i_n &= (0, 0, ..., 1) \end{aligned}$$

O conjunto $\{i_1, ..., i_n\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$, chamada base canônica.

Exemplo 11

O conjunto $\{u, s\}$, onde $u = \{1, 2, 0\}$ e $s = \{12, -6, 5\}$, é uma base do subespaço S, onde $S : 2x - y - 6z = 0$. (Veja os exemplos 7 e 8.)

Exemplo 12

Seja P^n o espaço dos polinômios de grau $\leq n$. Então o conjunto $B = \{1,\ t,\ ...,\ t^n\}$ forma uma base de P^n. Esta base é chamada canônica de P^n.

De fato, B claramente gera P^n. Para provar que B é L.I., sejam $c_0,\ \ldots,\ c_n$ tais que

$$c_0.1 + c_1.t + c_2.t^2 + ... + c_n.t^n = 0.$$

A igualdade significa que o polinômio da esquerda tem os mesmos coeficientes que o polinômio da direita, que é o polinômio nulo. Mas o polinômio da esquerda deve ter infinitas soluções, pois seu valor é zero $\forall t \in \mathbb{R}$, logo deve ser nulo. Portanto, $c_0 = c_1 = ... = c_n = 0$ e assim, $\{1,\ t_1,\ ...,\ t_n\}$ é L.I.

Resumo

Nesta aula estudamos conjuntos linearmente independentes (L.I.) e linearmente dependentes (L.D.). Vimos que um conjunto B gerador de um subespaço W e linearmente independente é uma base de W. Vimos alguns exemplos.

As bases são conjuntos geradores "mínimos" para um subespaço, no sentido de que se um conjunto tem mais elementos que uma base então ele é L.D., e se tem menos elementos que uma base de W então não gera W. Estas propriedades das bases serão vistas na próxima aula.

Exercícios

1. Determine uma base para o espaço das matrizes

$$M_{2x2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sejam u, v e w os vetores do exemplo 7. Vimos que $\{u, v, w\}$ é L.D. Mostre que os conjuntos $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ e $\{v, w\}$ são linearmente independentes.

3. Determine uma base para o subespaço

$$S = \{(x, x + y, 2y)|\ x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3.$$

4. Sejam $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 10 \\ -3 \end{bmatrix}$. Seja H o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $\{v_1, v_2, v_3\}$. Mostre que $\{v_1, v_2, v_3\}$ é linearmente dependente e que $\{v_1, v_2\}$ é uma base para H.

5. No espaço vetorial de todas as funções reais, mostre que $\{t, \operatorname{sen} t, \cos 2t, \operatorname{sen} t \cos t\}$ é um conjunto linearmente independente.

6. Determine uma base para os subespaços a seguir (veja exercício 5 da aula 10).

   (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 5y \text{ e } z = -2y\}$.

   (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$.

   (c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2X2}(\mathbb{R});\ a = -d \text{ e } c = 2b \right\}$.

   (d) $S = \{at^2 + at + b;\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset P_2(t, \mathbb{R})$.

Aula 12 – Dimensão de um espaço vetorial

Objetivo

Apresentar o sistema de coordenadas determinado por uma base em um espaço vetorial V;
Mostrar que se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos então todas as bases de V tem n elementos;
Definir dimensão.

Introdução

Uma vez que esteja especificada uma base B para um espaço vetorial V, podemos representar um vetor $v \in V$ por suas *coordenadas* na base B. Por isso, dizemos que uma base B de V estabelece um *sistema de coordenadas* em V.

Veremos, com mais detalhes, o que isso tudo quer dizer mais adiante. Veremos que, se a base B tem n vetores, então um vetor $v \in V$ fica representado por uma n-upla $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$. Isto faz o espaço vetorial V "se parecer" com $\mathbb{R}^n$. Exploraremos esta relação para mostrar que todas as bases de um mesmo espaço vetorial V têm o mesmo número de elementos.

Sistema de coordenadas

A existência de um sistema de coordenadas está baseada no seguinte teorema.

Teorema 1 (Representação única)
Seja $B = \{b_1,\ \ldots,\ b_n\}$ uma base para um espaço vetorial V. Então, para cada $x \in V$, existe um único conjunto de escalares $c_1,\ \ldots,\ c_n$, tal que

$$x = c_1b_1\ +\ \ldots\ +\ c_nb_n.$$

Demonstração.

Como $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ é uma base de V, então gera V, logo todo $x \in V$ é combinação linear dos vetores em B. Portanto, existem $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$x = c_1b_1 + \ldots + c_nb_n. \quad (1)$$

Vamos agora provar a unicidade. Suponha que x também tenha a representação

$$x = d_1b_1 + \ldots + d_nb_n. \quad (2)$$

Subtraindo (1) e (2), obtemos:

$$0 = x - x = (c_1 - d_1)b_1 + \ldots + (c_n - d_n)b_n. \quad (3)$$

Como B é linearmente independente, os coeficientes $c_1 - d_1$, $c_2 - d_2, \ldots, c_n - d_n$, na equação (3), devem ser todos nulos, logo $c_i = d_i,\ i = 1, \ldots, n$, o que mostra que a representação é única.

Definição

Seja $x \in V$ e seja $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base de V. Se

$$x = c_1b_1 + \ldots + c_nb_n,$$

então os escalares $c_1, \ldots, c_n$ são chamados coordenadas de x na base B e escrevemos

$$[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

Seja a base $B = \{b_1, b_2\}$ do $\mathbb{R}^2$ dada por $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^2$. Se $[x]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, determine x e, se $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, determine $[y]_B$.

Solução:

Como $x_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, então

$$x = 1.b_1 + 3b_2 = 1.\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Se $y = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ e $[y]_B = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, então,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = y_1 b_1 + y_2 b_2 = y_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1 + 2y_2 \end{bmatrix},$$

o que resulta em

$$\begin{cases} y_1 = 2 \\ y_1 + 2y_2 = 5 \;\Rightarrow\; 2 + 2y_2 = 5 \;\Rightarrow\; y_2 = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Portanto, $[y]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$.

Exemplo 2

A base canônica $b = \{i_1,\ i_2\}$ é a base em que $x = [x]_B$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, pois, se $[x]_B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, então

$$x = a.i_1 + b.i_2 = a.\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [x]_B.$$

Exemplo 3

Seja $B = \{2,\ 1-t,\ 1+t+t^2\}$ uma base de $P^2[t]$, o espaço dos polinômios em uma variável de grau $\leq\ 2$ (verifique que B é uma base de $P^2[t]$). Determine as coordenadas de $x = t^2 - 1$ na base B.

Solução:

Se $B = \{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ e $[x]_B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, então

$$\begin{array}{rcl} x & = & c_1b_1 \ + \ c_2b_2 \ + \ c_3b_3, \qquad \text{isto é} \\ -1+t^2 & = & c_1.2 \ + \ c_2.(1-t) \ + \ c_3.(1+t+t^2) \\ -1+t^2 & = & 2c_1 \ + \ c_2 \ - \ c_2t \ + \ c_3 \ + \ c_3t \ + \ c_3t^2 \\ -1+t^2 & = & (2c_1 \ + \ c_2 \ + \ c_3) \ + \ t(-c_2+c_3) \ + \ c_3t^2 \end{array}$$

Comparando os coeficientes, obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2c_1 \ + \ c_2 \ + \ c_3 & = & -1 \\ -c_2 \ + \ c_3 & = & 0 \\ c_3 & = & 1 \end{array} \right. , \ \text{o que leva a} \ \left\{ \begin{array}{rcl} c_1 & = & -\frac{3}{2} \\ c_2 & = & 1 \\ c_3 & = & 1 \end{array} \right. .$$

Portanto, $[x]_B = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Exemplo 4

Seja V um espaço vetorial e $B = \{b_1,\ \dots,\ b_n\}$ uma base de V. A representação do vetor nulo em B é $[0]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, pois, se $[v]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, então $v = 0.b \ + \ \dots \ + \ 0.b_n = 0$.

Base de um espaço vetorial

Nesta seção, provaremos que todas as bases de um espaço vetorial V tem o mesmo número de elementos. Vamos iniciar com o $\mathbb{R}^n$.

O conjunto $B = \{i_1,\ i_2,\ ...,\ i_n\}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ (ver exemplo 10 da aula 11). Esta é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. No teorema a seguir, veremos que qualquer conjunto com mais de n elementos é L.D.

Teorema 2

Seja $S = \{u_1,\ ...,\ u_p\}$ um subconjunto do $\mathbb{R}^n$. Se $p > n$, então S é linearmente dependente.

Demonstração.

Seja $u_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, \ldots, u_p = \begin{bmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ \vdots \\ x_{pn} \end{bmatrix}$.

A equação

$$c_1 u_1 + \ldots + c_p u_p = 0 \qquad (1)$$

pode ser escrita como

$$c_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + c_p \begin{bmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \\ \vdots \\ x_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{vetor nulo do} \mathbb{R}^n$$

o que resulta no sistema

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + & \cdots & + x_{1p}c_p & = & 0 \\ x_{21}c_1 + & \cdots & + x_{2p}c_p & = & 0 \\ \quad \vdots & & & & \\ x_{n1}c_1 + & \cdots & + x_{2p}c_p & = & 0 \end{cases} \qquad (2)$$

O sistema (2) é um sistema homogêneo, nas variáveis $c_1, \ldots, c_p$, com n equações. Como $p > n$, então trata-se de um sistema homogêneo com mais variáveis que equações. Segue-se que há soluções não-triviais de (2), logo (1) tem soluções não-triviais e, portanto $S = \{u_1, \ldots, u_p\}$ é linearmente dependente.

O próximo teorema, generaliza este resultado para qualquer espaço vetorial.

Teorema 3

Se um espaço vetorial V tem base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, então todo subconjunto de V com mais de n vetores é linearmente dependente.

Demonstração.

Seja $\{u_1, \ldots, u_p\}$ um subconjunto de V, com $p > n$. Os vetores das coordenadas $[u_1]_B, [u_2]_B, \ldots, [u_p]_B$ formam um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ com $p > n$ vetores. Pelo teorema anterior este é um conjunto L.D.

Portanto, existem escalares $c_1, \ldots, c_p$, nem todos iguais a zero, tais que

$$c_1[u_1]_B + \ldots + c_p[u_p]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que se B é uma base de um espaço vetorial V, $a, b \in V$ e c_1 e c_2 são escalares, então $[c_1 a + c_2 b]_B = c_1[a]_B + c_2[b]_B$. Isto mostra que a transformação de coordenadas é uma transformação linear.

Como a transformação de coordenadas é uma transformação linear, temos

$$[c_1u_1 + \ldots + c_pu_p]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, a representação do vetor $c_1u_1 + \ldots + c_pu_p$, na base B é $[0 \cdots 0]$, isto é,

$$c_1u_1 + ... + c_pu_p = 0.b_1 + ... + 0.b_n = 0 \qquad (3)$$

A equação (3) mostra que $u_1, \ldots, u_p$ é um conjunto linearmente dependente.

Teorema 4

Se um espaço vetorial V tem uma base com n vetores, então toda base de V também tem exatamente n vetores.

Demonstração.

Seja B_1 uma base com n vetores e seja B_2 uma outra base de V.

Como B_1 é base e B_2 é linearmente independente, então B_2 não tem mais que n vetores, pelo teorema anterior.

Por outro lado, como B_2 é base e B_1 é linearmente independente, então B_2 não tem menos que n vetores. Disto resulta que B_2 tem exatamente n vetores.

Um espaço vetorial pode não ter uma base com um número finito de vetores. Por exemplo, o espaço vetorial dos polinômios na variável t, denotado $\mathbb{R}[t]$, não tem base finita. Uma base para este espaço é

$$\{1,\ t,\ t^2,\ t^3,\ ...\}.$$

Como este conjunto é infinito, então $\mathbb{R}[t]$ não pode ter base finita (se tivesse uma base com d elementos, então qualquer conjunto com mais de d elementos seria L.D., logo não poderia ter uma base infinita).

O teorema anterior mostra que, se um espaço vetorial V tem base finita, então todas as bases tem o mesmo número de elementos. Isto motiva a seguinte definição:

Definição

Se V tem uma base finita, então V é chamado espaço vetorial de dimensão finita e chamamos de dimensão de V, denotada $\dim V$, o número de vetores de uma base de V. Caso V não tenha uma base finita, dizemos que V é um espaço vetorial de dimensão infinita. A dimensão do espaço vetorial trivial $[0]$ é definida como sendo igual a zero.

Exemplo 5

$\dim \mathbb{R}^n = n$. Basta notar que a base canônica do $\mathbb{R}^n$ tem n vetores.

Exemplo 6

$\dim P^n = n + 1$, onde o P^n é o espaço vetorial dos polinômios de grau $\leq n$. Uma base de P^n é o conjunto

$$\{1,\ t,\ t^2,\ \ldots,\ t^n\},$$

que tem $n + 1$ vetores.

Exemplo 7

Determine a dimensão do subespaço H de $\mathbb{R}^3$ geral do pelos vetores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Solução:

Como v_1 e v_2 não são múltiplos um do outro, então o conjunto $\{v_1,\ v_2\}$ é L.I, portanto é uma base de H. Logo $\dim H = 2$.

Teorema do conjunto gerador

Um problema comum é o de encontrar uma base para um subespaço gerado por um certo conjunto de vetores. Se este conjunto é L.I., então é base do subespaço que ele gera, se não for L.I., então possui "excesso" de vetores, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 5 (Teorema do Conjunto Gerador)
Seja $S = \{v_1, ..., v_p\}$ um conjunto em V e seja H o conjunto gerado por $\{v_1, ..., v_p\}$

a) Se um dos vetores de S, digamos v_k, é combinação linear dos outros, então $S - \{v_k\}$ ainda gera o subespaço H.

b) Se $H \neq \{0\}$, então algum subconjunto se S é uma base de H.

Demonstração.

a) Reordenando os vetores, se necessário, suponha que v_p é combinação linear dos vetores $v_1, ..., v_{p-1}$. Então existem escalares $c_1, ..., c_{p-1}$ tais que

$$v_p = c_1 v_1 \ + \ \ldots \ + \ c_{p-1} v_{p-1}. \tag{1}$$

Seja x um vetor em H. Então existem $x_1,\ ...,\ x_p$ tais que

$$x = x_1 v_1 \ + \ \ldots \ + \ x_{p-1} v_{p-1} \ + \ x_p v_p. \tag{2}$$

Substituindo o valor de v_p de (1) em (2) resulta que

$$\begin{aligned} x &= x_1 v_1 \ + \ \ldots \ + \ x_{p-1} v_{p-1} \ + \ x_p.(c_1 v_1 \ + \ \ldots \ + \ c_{p-1} v_{p-1}) \\ &= (x_1 \ + \ c_1 x_p) v_1 \ + \ \ldots \ + \ (x_{p-1} \ + \ c_{p-1} x_p) v_{p-1}. \end{aligned}$$

Portanto, todo $x \in H$ é combinação linear dos vetores $v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{p-1}$.

b) Se o conjunto gerador inicial S é linearmente independente, então é base do subespaço H que gera. Caso contrário, é linearmente dependente, o que implica que algum vetor em S é combinação linear dos demais. Excluindo este vetor, obtemos um subconjunto $S_1 \subset S$, que também gera H. Se S_1 é linearmente independente então é base de H. Caso contrário, algum vetor em S_1 é combinação linear dos outros. Excluindo este, obtemos S_2 que também gera.

Como $H \neq \{0\}$ e o conjunto inicial S é finito, então o processo acima deve parar, isto é, existe um subconjunto S_i de S, tal que S_i gera H e S_i é linearmente independente.

Exemplo 8

Determine uma base para o subespaço

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a + b - c \\ 2a + d \\ b - c - d \\ 5d \end{bmatrix}, \text{ tal que } a,\ b,\ c \ \text{ e } \ d \in \mathbb{R} \right\}$$

Solução:

Claramente $H \subset \mathbb{R}^4$. Note que

$$\begin{bmatrix} a + b - c \\ 2a + d \\ b - c - d \\ 5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c \\ 0 \\ -c \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \\ -d \\ 5d \end{bmatrix}$$

$$= a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Portanto, H é gerado pelos vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Devemos checar se estes vetores formam um conjunto L.I. Claramente, v_3 é múltiplo de v_2. Portanto, podemos excluir v_3. O conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ é, pelo teorema anterior, gerador de H.

Para checar se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é L.I., vamos resolver a equação $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_4 v_4 = 0$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O que resulta no sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & 0 \\ 2c_1 + c_4 & = & 0 \\ c_2 - c_4 & = & 0 \\ 5c_4 & = & 0 \end{cases},$$

este sistema implica em $c_2 = c_4 = 0$ e $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, o que mostra que $\{v_1, v_2, v_4\}$ é L.I. e, portanto, base de H.

Resumo

Nesta aula vimos a definição de dimensão de um espaço vetorial. A definição dada faz sentido apenas porque, como estudamos, se um espaço vetorial V tem uma base com n elementos, então todas as bases de V têm também n elementos.

Vimos também que, dado um conjunto B, linearmente dependente, gerador de um subespaço H de um espaço vetorial, podemos ir retirando certos vetores de B até que o conjunto resultante seja uma base de H.

Exercícios

Para cada subespaço H nos exercícios 1 a 6, determine uma base de H e sua dimensão.

1. $H = \{(s - 2t,\ s + t,\ 4t);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

2. $H = \{(3s,\ 2s,\ t);\ s, t \in \mathbb{R}\}$.

3. $H = \{(a + b,\ 2a,\ 3a - b,\ 2b);\ a, b \in \mathbb{R}\}$.

4. $H = \{(a,\ b,\ c);\ a - 3b + c = 0,\ b - 2c = 0 \text{ e } 2b - c = 0\}$.

5. $H = \{(a,\ b,\ c,\ d);\ a - 3b + c = 0\}$.

6. $H = \{(x,\ y,\ x);\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

7. Determine a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

8. Os quatro primeiros polinômios de Hermite são 1, $2t$, $-2+4t^2$ e $-12t+8t^3$.

   Mostre que estes polinômios formam uma base de $\mathbb{P}^3$.

9. Encontre as coordenadas do polinômio $p(t)=7-12t-8t^2+12t^3$ na base de $\mathbb{P}^3$ formada pelos polinômios de Hermite (ver exercício 8).

10. Mostre que o espaço $C(\mathbb{R})$ formado por todas as funções reais é um espaço de dimensão infinita.

11. Mostre que uma base B de um espaço vetorial de dimensão finita V é um conjunto gerador minimal. Em outras palavras, se B tem n vetores então nenhum conjunto com menos de n vetores pode gerar V.

    Mostre também que a base B é um conjunto linearmente independente maximal, no sentido que qualquer conjunto com mais de n vetores não pode ser L.I.

12. Mostre que se H é subespaço de V e $\dim H = \dim V$ então $H = V$.

Aula 13 – Soma de subespaços

Objetivos

Mostrar um método prático para obter uma base de um subespaço vetorial a partir de um conjunto gerador deste subespaço.
Provar o teorema do completamento, que afirma que, dado um conjunto L.I. em um subespaço vetorial V podemos completá-lo para tornar uma base de V.
Definir soma de subespaços e ver o teorema da dimensão da soma.

Como obter uma base a partir de um conjunto gerador

Seja $S = \{b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n\}$ um conjunto e U o subespaço gerado por S. Seja M a matriz obtida escrevendo os vetores $b_1, \ldots, b_n$ como linhas de M, isto é, b_i é a i-ésima linha de M.

$$M = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

As operações elementares nas linhas de M são:

- Multiplicação de uma linha por uma constante: $L_i \leftarrow \alpha.L_i$
- Troca de uma linha por outra: $L_i \leftrightarrow L_j$
- Substituir uma linha por uma combinação linear dela por outra: $L_i \leftarrow L_i + \alpha.L_j$.

Estas operações levam os vetores $b_1, \ldots, b_n$ a vetores $b_i{}', \ldots, b_n{}'$ que pertencem ao espaço gerado por $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Como estas operações são invertíveis, isto é, posso passar de $\{b_1{}', \ldots, b_n{}'\}$ a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ aplicando operações elementares, então o espaço gerado por $\{b_1, \ldots, b_n\}$ é o mesmo gerado por $\{b_1{}', \ldots, b_n{}'\}$.

Podemos usar esta propriedade para reduzir a matriz $M = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

a uma matriz na forma $M' = \begin{bmatrix} b_1{}' \\ b_2{}' \\ \vdots \\ b_r{}' \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$; onde os $b_1{}', b_2{}', \ldots, b_r{}'$ são L.I..

Neste caso, $\{b_1{}', b_2{}', \ldots, b_r{}'\}$ é um conjunto L.I. e gera o mesmo subespaço U gerado por $\{b_1, \ldots, b_n\}$. Em outras palavras, obtivemos uma base a partir do conjunto gerado.

Exemplo 1

Obtenha uma base do subespaço U do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $\{(1,1,0,-2), (2,0,-1,-1), (0,1,-2,1), (1,1,1,-3)\}$. Determine a dimensão de U.

Solução:

Vamos formar a matriz M dos vetores acima e reduzí-la:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que o subespaço U tem base $\{(1,1,0,-2), (0,1,-2,1), (0,0,1,-1)\}$. Portanto, $\dim U = 3$.

Observe que, claramente, vetores na forma $\begin{pmatrix} x_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & x_4 & \cdot & \cdot\cdot \\ \vdots & & & & & \end{pmatrix}$,

onde as entradas marcadas $\cdot$ podem ter qualquer valor e $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ etc. são necessariamente L.I.

Teorema do Completamento

Vimos, na seção anterior, como obter uma base de um conjunto gerador. Se este conjunto não é L.I., temos que "diminuí-lo" para conseguir uma base.

Nesta seção veremos o inverso. Como obter uma base de um conjunto L.I.. Se este conjunto não é gerador, então temos que "aumentá-lo" de forma que continue L.I. e que se torne gerador.

Teorema 1
Seja $\{b_1, \ldots, b_r\}$ um conjunto L.I. em um espaço vetorial de dimensão finita V. Então existem $b_{r+1}, \ldots, b_n$, tal que $\{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n\}$ formam uma base de V, onde $n = \dim V$.

Demonstração.

Se $\{b_1, \ldots, b_r\}$ gera o espaço V então nada temos a fazer.

Se $\{b_1, \ldots, b_r\}$ não é gerador então existe $b_{r+1} \in V$ tal que b_{r+1} não é combinação linear de $b_1, \ldots, b_r$. Portanto,

$$\{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}\} \text{ é um conjunto L.I.}$$

Se este conjunto agora é gerador, obtivemos uma base. Se não, há um vetor $b_{r+2} \in V$ tal que b_{r+2} não é combinação linear de $b_1, \ldots, b_{r+1}$. Portanto,

$$\{b_1, \ldots, b_r, b_{r+1}, b_{r+2}\} \text{ é L.I.}$$

Se este conjunto for gerador, obtivemos uma base, caso contrário continuamos com o processo, obtendo b_{r+3}, b_{r+4}, etc. Como V tem dimensão finita, digamos $\dim V = n$, quando chegarmos a $\{b_1, \ldots, b_n\}$ teremos obtido uma base, pois o processo leva sempre a conjuntos L.I. e um conjunto L.I. com n $(= \dim(V))$ elementos deve ser uma base.

Soma de subespaços

Dados subespaços U e V de um espaço vetorial W, podemos obter um subespaço maior que inclui U e V como subconjuntos (e como subespaços). Já que este subespaço contem todo $u \in U$ e todo $v \in V$, então deve conter todos os $u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$. (Lembre-se que subespaços são fechados para a soma de vetores!)

Portanto, qualquer subespaço que contenha U e V deve conter as somas $u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$. Isto motiva a seguinte definição:

Definição

Note que, nesta definição, $U+V$ é só um conjunto. Mostraremos em seguida que é subespaço de W.

Sejam U e V subespaços de um espaço vetorial W. Chamamos de soma de U e V o conjunto

$$U+V=\{u+v;\ u\in V \ \text{ e } \ v\in V\}.$$

Note que $U\subset U+V$ e $V\subset U+V$.

Na discussão acima, vimos que qualquer subespaço que contenha U e V deve conter o conjunto $U+V$ definido acima.

A próxima proposição mostra que o conjunto $U+V$ já é um subespaço vetorial.

A soma de subespaços é um subespaço

Proposição 1
Se U e V são subespaços de um espaço vetorial W, então $U+V$ é subespaço de W.

Demonstração.

Basta provar que $U+V$ é não vazio, fechado para a soma de vetores e produto por escalar.

- $U+V\neq\emptyset$ pois U e V são não vazios. Em particular, $0\in U+V$, pois

$$0\in U \ \text{ e } \ 0\in V \ \Rightarrow \ 0=0+0 \ \in \ U+V.$$

- Se $x_1,\ x_2\in U+V$ então $x_1=u_1+v_1$ e $x_2=u_2+v_2$, para certos vetores $u_1,\ u_2\in U$ e $v_1,\ v_2\in V$, então

$$x_1+x_2=(u_1+v_1)+(u_2+v_2)=(u_1+u_2)+(v_1+v_2).$$

Como $u_1+u_2\in U$ e $v_1+v_2\in V$ então $x_1+x_2\in U+V$.

- Se $x=u+v\in U+V$, com $u\in U$ e $v\in V$, então $\alpha x=\alpha(u+v)=\alpha u+\alpha v;\ \forall\alpha\in\mathbb{R}$. Como $\alpha u\in U$ e $\alpha v\in V$, então $\alpha x\in U+V$.

$\square$

Como $U+V$ é subespaço e, como observamos acima, todo subespaço de W que contenha U e V deve conter $U+V$, então podemos dizer que $U+V$ é o *menor* subespaço de W contendo U e V.

Exemplos

2. $U = U + \{0\}$, onde $\{0\}$ é o espaço vetorial nulo.

3. Seja $U = \{(x,0,0);\ x \in \mathbb{R}\}$ e $V = \{(0,y,z);\ y,z \in \mathbb{R}\}$, subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$. Então temos que

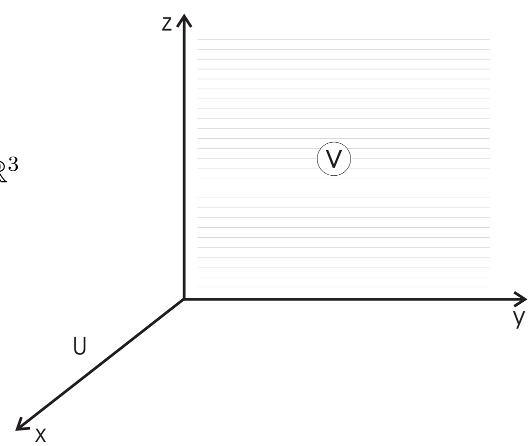
$$\begin{aligned} U+V &= \{(x,0,0)+(0,y,z);\ x,y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x,y,z);\ x,y,z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Isto é, a soma de U e V é todo o $\mathbb{R}^3$.

Agora observe o seguinte: U é uma reta, o eixo OX, enquanto que V é o plano dado por $x = 0$.

Neste caso, a soma de um plano e uma reta é o espaço $\mathbb{R}^3$.

$U + V = \mathbb{R}^3$



4. Seja $U = \{(x,0,0)\} \in \mathbb{R}^3$ e $V = \{(x,y,0)\} \in \mathbb{R}^3$, então $U \subset V$ e $U + V = V$.

Neste caso, a soma de um plano e uma reta é o próprio plano.

O que diferencia os exemplos 3 e 4?

No exemplo 3, somamos um plano e uma reta não contida nele, o que resulta no espaço, enquanto que no exemplo 4, somamos um plano e uma reta contida no plano, resultando no próprio plano. Voltaremos a este tópico quando falarmos sobre a base da soma.

5. Claramente, se $U \subset V$ então $U + V = V$.

Soma direta

Intuitivamente, quanto menor $U \cap V$, mais "ganhamos" quando passamos de U e V para $U+V$. Em um caso extremo, se $U \subset V$ então $U+V=V$ e não ganhamos nada.

Lembre-se que $U+V$ deve sempre conter o vetor nulo 0.

Definição

Sejam U e V subespaços vetoriais de W tais que $U \cap V = \{0\}$. Então dizemos que $U+V$ é a soma direta de U e V.

Denotamos a soma direta por $U \oplus V$.

No caso que $U \oplus V = W$ então dizemos que U e V são complementares e dizemos que V é o complementar de U em relação a W (e vice-versa).

Veremos que dado subespaço U de W, sempre existe o espaço complementar de U em relação a W, isto é, sempre existe $V \subset W$ tal que $U \oplus V = W$.

Na próxima proposição, veremos como a soma direta está relacionada à decomposição única de cada vetor como soma de vetores nos subespaços.

Proposição 2
Sejam U e V subespaços vetoriais de um espaço vetorial W. Então $W = U \oplus V$ se, e somente se, cada vetor $w \in W$ admite uma única decomposição $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$.

Demonstração.

($\Rightarrow$) Suponha, por hipótese, que $W = U \oplus V$. Então, dado $w \in W$, existem $u \in U$ e $v \in V$, tais que $w = u + v$. Temos que provar apenas a unicidade. Suponha que exista outra decomposição $w = u' + v$‘, com $u' \in U$ e $v' \in V$.

Então

$$\begin{matrix} w = u + v \\ w = u' + v' \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad (u - u') + (v - v') = 0 \quad \Rightarrow \quad u - u' = v' - v.$$

Mas $u - u' \in U$ e $v' - v \in V$. Como $U \cap V = \{0\}$ (pois a soma é direta), então

$$u - u' = v' - v \;\Rightarrow\; u - u' = v' - v = 0 \;\Rightarrow\; u = u' \text{ e } v = v'.$$

Portanto a decomposição é única.

($\Leftarrow$) Suponha que exista decomposição única.

Como todo $w \in W$ se escreve como $w = u + v$, com $u \in U$ e $v \in V$, então $W = U + V$. Resta provar que a soma é direta.

Seja $x \in U \cap V$. Então podemos escrever

$$x = \underset{\in U}{x} + \underset{\in V}{0} = \underset{\in U}{0} + \underset{\in V}{x}$$

A unicidade da decomposição implica em que $x = 0$, ou seja, $U \cap V = \{0\}$.

Exemplo 6

Seja $\{b_1, \ldots, b_n\}$ uma base para um espaço vetorial. Vimos que todo $v \in V$ tem uma única decomposição na forma

$$v = \alpha_1 b_1 + \ldots + \alpha_n b_n.$$

Cada $\alpha_i b_i$ pertence ao subespaço $[b_i]$ gerado pelo vetor b_i. Portanto, vale que

$$V = [b_1] \oplus [b_2] \oplus \ldots \oplus [b_n].$$

O exemplo anterior leva à questão de como obter uma base de uma soma $U \oplus V$, tendo a base de U e de V.

Base e dimensão da soma de subespaços

Seja W um espaço vetorial de dimensão finita, e sejam U e V subespaços de W. Vimos que $U \cap V$ e $U + V$ são subespaços de W. A proposição a seguir relaciona a dimensão destes subespaços.

Proposição 3
$\dim(U + V) + \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V$

Demonstração.

Seja $B_1 = \{x_1, ..., x_r\}$ uma base de $U \cap V$, onde $r = \dim(U \cap V)$.

Vamos agora completar esta base B_1 de forma a criar uma base de U e uma base de V.

Pelo teorema do completamento, existem vetores $u_1, \ldots, u_s$ em U e $v_1, \ldots, v_t$ em V tais que

$$B_2 = \{x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s\} \text{ é uma base de } U \text{ e}$$

$$B_3 = \{x_1, \ldots, x_r, v_1, \ldots, v_t\} \text{ é uma base de } V.$$

Note que $r + s = \dim U$ e $r + t = \dim V$. Mostraremos, a seguir, que

$$B = \{x_1, \ldots, x_r, u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_t\} \text{ é uma base de } U + V.$$

a) o conjunto B gera $U + V$.

Seja $w \in U + V$. Então $w = u + v$, para certos $u \in U$ e $v \in V$. Como B_2 e B_3 são bases de U e V, respectivamente, então podemos escrever,

$$u = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s$$

$$v = {\alpha_1}' x_1 + \ldots + {\alpha_r}' x_r + \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_t v_t$$

onde as letras gregas são escalares. Somando u e v encontramos

$$w = u+v = (\alpha_1+{\alpha_1}')x_1+\ldots+(\alpha_r+{\alpha_r}')x_r+\beta_1 u_1+\ldots+\beta_s u_s+\gamma_1 v_1+\ldots+\gamma_t v_t.$$

Portanto, o conjunto B gera $U + V$.

b) o conjunto B é linearmente independente. Suponhamos que

$$(1) \qquad \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s + \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_t v_t = 0$$

então,

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s = -\gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_t v_t.$$

O vetor do lado esquerdo da igualdade está em U, logo $-\gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_t v_t \in U$. Mas $v_1, \ldots, v_t$ estão em V, logo

$$-\gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_t v_t \in U \cap V.$$

Como $x_1, \ldots, x_r$ formam uma base de $U \cap V$, segue-se que existem escalares $\delta_1, \ldots, \delta_r$ tais que

$$-\gamma_1 v_1 - \ldots - \gamma_t v_t = \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_r x_r$$

$$\delta_1 x_1 + \ldots + \delta_r x_r + \gamma_1 v_1 + \ldots + \gamma_t v_t = 0.$$

A equação anterior é uma combinação linear dos vetores em B_3, que é base de V, portanto L.I.. Segue-se que

$$\delta_1 = \ldots = \delta_r = \gamma_1 = \ldots = \gamma_t = 0.$$

Substituindo $\gamma_1 = ... = \gamma_t = 0$ em (1), obtemos

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_s u_s = 0$$

que é uma combinação linear nos vetores em B_1, que é base de U, logo

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = \beta_1 = \ldots = \beta_s = 0.$$

Com isto, provamos que todos os coeficientes em (1) são nulos, ou seja, o conjunto B é L.I.

Concluímos que B é base de $U + V$. Como B tem $r + s + t$ vetores, então $\dim(U + V) = r + s + t$, segue-se que

$$\begin{aligned}&\dim(U + V) + \dim(U \cap V)\\&= r + s + t + r = (r + s) + (r + t) = \dim U + \dim V\end{aligned}$$

$\square$

No caso em que a soma é direta, $U \cap V = \{0\}$, logo $\dim U \cap V = 0$ e

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V.$$

Além disso, na demonstração do teorema acima, vimos que, no caso de soma direta, se B_1 é base de U e B_2 é base de V, então $B_1 \cup B_2$ é base de $U \oplus V$.

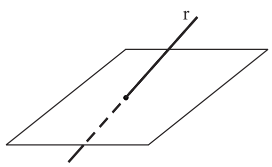
Em geral, se $U \cap V \neq \{0\}$, então $B_1 \cup B_2$ é um conjunto gerador de $U + V$, mas não é L.I.

Exemplo 7

Seja $U = \{(0, y, z);\; y, z \in \mathbb{R}\}$ e $V = [(1, 1, 0)]$. O subespaço U de $\mathbb{R}^3$ tem base $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, portanto $\dim U = 2$. Claramente $\dim V = 1$. Vamos determinar $U \cap V$.

Se $w \in U \cap V$, então $w = \alpha(1, 1, 0)$, logo

$$(0, y, z) = \alpha.(1, 1, 0) = (\alpha, \alpha, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha &= 0\\ \alpha &= y\\ 0 &= z\end{cases}$$



Se uma reta r não está contida em um plano α, então $r \cap \alpha$ pode ser vazio (reta paralela) ou um ponto, quando a reta corta o plano (ver figura acima).

Portanto $\alpha = 0 \Rightarrow w = 0$.

Assim $U \cap V = \{0\}$. Segue-se que a soma é direta e

$$\dim(U \oplus V) = \dim U + \dim V = 2 + 1 = 3.$$

Como $U + V$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$ e $\dim(U + V) = 3$ então $U + V = \mathbb{R}^3$.

Temos então a situação em que a soma de um plano (U é o plano $x = 0$) e uma reta não contida no plano é todo o espaço $\mathbb{R}^3$. Se a reta estiver contida no plano, então $V \subset U \Rightarrow U + V = U$.

Exemplo 8

Seja U subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ e $V = \{(x,y,z,t);\ y + z = 0\}$.

É fácil ver que o conjunto $\{(1,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente, logo $\dim U = 2$.

Vamos determinar uma base de V.

$$v = (x,y,z,t) \in V \ \Leftrightarrow\ y + z = 0 \ \Leftrightarrow\ z = -y, \text{ logo,}$$

$$v = (x,y,-y,t) = x(1,0,0,0) + y(0,1,-1,0) + t(0,0,0,1).$$

Segue-se que V é gerado por $\{(1,0,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,0,1)\}$.

É fácil ver que este conjunto é L.I., logo $\dim V = 3$.

Podemos agora proceder de duas maneiras, determinar $U + V$ ou determinar $U \cap V$. Vamos determinar $U + V$. Sabemos que a união das bases de U e de V é um conjunto gerador de $U + V$. Vamos encontrar uma base de $U + V$ a partir deste conjunto gerador:

$$\begin{array}{c} \\ \text{base de U} \\ -\,-\,-\,-\,- \\ \\ \text{base de V} \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ - & - & - & - \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow L_4 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ \longrightarrow \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftrightarrow L_5 \\ \longrightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \\ L_5 \leftarrow L_5 - L_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Isto mostra que a união das bases de U e V pode ser transformada em um conjunto que contém $\{(1,1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$, que é uma base de $\mathbb{R}^4$, isto é,

$$U+V=\mathbb{R}^4 \;\Rightarrow\; \dim(U+V)=4.$$

Sendo assim,

$$\dim(U+V)+\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V=2+3=5$$

$$\Rightarrow\; \dim(U\cap V)=1.$$

Resumo

Iniciamos esta aula vendo um processo de obter uma base a partir de um conjunto gerador para um espaço vetorial, usando operações elementares nas linhas da matriz formada pelos vetores deste conjunto gerador.

Em seguida, vimos o teorema do complemento, que afirma que dado um conjunto L.I., em um espaço vetorial V se ele não for uma base de V, nós acrescentamos vetores até que se torne uma base de V.

Passemos então ao estudo da soma $U+V$ dos subespaços U e V de um espaço vetorial W. Quando $U\cap V=\{0\}$ então a soma é chamada direta e denota por $U\oplus V$.

O conjunto união das bases de U e V forma um conjunto gerador de $U+V$ que, no caso de soma direta, é uma base de $U\oplus V$. A dimensão de $U+V$ é dada por:

$$\dim(U+V)=\dim(U)+\dim(V)-\dim(U\cap V).$$

Exercícios

1. Seja $U \subset \mathbb{R}^4$ o subespaço gerado pelo conjunto

$$\{(1,1,2,0),(0,1,3,1),(2,-1,-5,-3)\}.$$

Encontre uma base de U e determine $\dim U$.

2. Para os subespaços U e V de $\mathbb{R}^3$ nos itens abaixo, determine $U \cap V$ e $U+V$.

   a) $U = [(1,0,1),(0,1,1)$ e $V = [(1,1,1)]$.

   b) $U = [(1,0,1),(0,1,1)$ e $V = [(1,2,3)]$.

   c) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ e $V = [(0,0,1)]$.

   d) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y = 0\}$ e $V = [(2,-2,1)]$.

3. Em qual dos itens do exercício 2 a soma é direta?

4. Se U e V são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^4$, $\dim U = 2$ e $\dim V = 3$, determine o menor e o maior valor possível para $\dim U \cap V$ e para $\dim U + V$.

5. Seja M_{2X2} o espaço vetorial das matrizes reais de ordem 2x2. Seja U o subespaço de M_{2X2} dado por $U = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{bmatrix};\ b,c \in \mathbb{R} \right\}$. Determine um subespaço $V \subset M_{2X2}$ tal que $M_{2X2} = U \oplus V$.

Respostas dos exercícios

1. Base de U é $B = \{(1,1,2,0),(0,1,3,1)\}$, $\dim U = 2$.

2. a) $U \cap V = \{0\}$ e $U + V = \mathbb{R}^3$.

   b) $V \subset U$, logo $U \cap V = V$ e $U + V = U$.

   c) $U \cap V = \{0\}$ e $U + V = \mathbb{R}^3$.

   d) $V \subset U$, logo $U \cap V = V$ e $U + V = \mathbb{R}^3$.

3. A soma é direta nos itens a e c.

4. Temos $\max\{\dim U, \dim V\} \leq \dim(U+V) \leq \dim(\mathbb{R}^4)$,

$$\Rightarrow 3 \leq \dim(U+V) \leq 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Como} \quad & \dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) \\ & \dim(U \cap V) = 5 - \dim(U+V) \end{aligned}$$

então

$$1 \leq \dim U \cap V \leq 2.$$

5. $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} ;\ a, d \in \mathbb{R} \right\}.$

Aula 14 – Espaços Vetoriais com Produto Interno

Objetivos

Reconhecer produtos internos;
Determinar a norma de um vetor e o ângulo entre dois vetores;
Identificar vetores ortogonais;
Aplicar as propriedades dos produtos internos na resolução de exercícios.

Pré-requisitos: aulas 8, 11 e 12.

Nesta aula definiremos uma operação entre vetores cujo resultado é um número real: o produto interno. Veremos vários exemplos, com destaque para o chamado produto interno; estudaremos as principais propriedades dos produtos internos e suas aplicações na determinação de grandezas geométricas associadas a vetores de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Neste curso trabalhamos penas com espaços vetoriais reais, isto é, considerando o conjunto dos números reais como o conjunto de escalares. Poderíamos, no entanto, considerar o conjunto dos números complexos. Nesse caso, o resultado do produto interno seria um número complexo, e a definição, ligeiramente diferente.

Produto interno

Seja V um espaço vetorial (real). Um *produto interno* definido em V é uma relação

$$< .,. >: V \times V \to \mathbb{R}$$

que, a cada par de vetores $(u, v) \in V \times V$, associa um número real representado por $< u, v >$, e que satisfaz as seguintes condições:

(i) $< u, v >=< v, u >$

(ii) $< u, v + w >=< u, v > + < u, w >$

(iii) $< \alpha u, v >= \alpha < u, v >$

(iv) $< u, u >\geq 0 \quad \text{e} \quad < u, u >= 0 \Leftrightarrow u = \vec{o}_V, \forall u, v, w \in V, \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Chamamos de *espaço euclidiano* a um espaço vetorial real munido de produto interno.

Podemos definir diferentes produtos internos num mesmo espaço vetorial. Vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1

Vamos mostrar que a relação $< u, v >= 2x_1x_2 + 3y_1y_2$, onde $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, é um produto interno definido em $\mathbb{R}^2$. Para isso, temos que mostrar a validade das quatro condições da definição de produto interno:

(i) $< u, v >= 2x_1x_2 + 3y_1y_2 = 2x_2x_1 + 3y_2y_1 =< v, u >$.

(ii) Seja $w = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$. Então
$< u, v + w >= 2x_1(x_2 + x_3) + 3y_1(y_2 + y_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3y_1y_2 + 3y_1y_3 = (2x_1x_2 + 3y_1y_2) + (2x_1x_3 + 3y_1y_3) =< u, v > + < u, w >$.

(iii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então
$< \alpha u, v >= 2\alpha x_1x_2 + 3\alpha y_1y_2 = \alpha(2x_1x_2 + 3y_1y_2) = \alpha < u, v >$.

(iv) $< u, u >= 2x_1^2 + 3y_1^2 \geq 0$. Além disso, se $< u, u >= 0$ então $2x_1^2 + 3y_1^2 = 0$, que implica $x_1^2 = 0$ e $y_1^2 = 0$. Daí, $x_1 = 0$ e $y_1 = 0$, isto é, $u = (0, 0) = v_{\mathbb{R}^2}$. Finalmente, se $u = v_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, segue que $< u, u >= 2.0 + 3.0 = 0$.

Exemplo 2

Na aula 12, você determinou o vetor-coordenadas de um vetor em relação a uma certa base. Viu que, fixados a base e o vetor, as coordenadas são únicas. Sejam V, um espaço vetorial real de dimensão n, e $B = \{u_1, u_2, ..., u_n\}$, uma base de V.

A relação definida em $V \times V$ que, a cada par de vetores u e v, de V, associa o número real $a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n$, onde $u]_B = (a_1, a_2, ..., a_n)$ e $v]_B = (b_1, b_2, ..., b_n)$ são os vetores-coordenadas dos vetores u e v, de V, em relação à base B, respectivamente, é um produto interno em V.

Importante: Tendo em vista o exemplo anterior, podemos concluir que TODO espaço vetorial admite produto interno. Assim, quando nos referimos a um espaço vetorial munido de produto interno, não significa que existem espaços que não satisfazem essa propriedade, mas sim que estamos querendo enfatizar o fato de que usaremos o produto interno na argumentação ou nas aplicações que forem o objeto de estudo, naquele instante.

Quando a base considerada é a canônica, o produto interno assim definido chama-se produto interno *usual*. Particularmente, nos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, o produto interno usual é também conhecido como produto escalar.

Você já estudou o produto escalar na disciplina de Geometria Analítica.

Exemplo 3

Em $M_2(\mathbb{R})$, sendo $u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$, a relação $< u, v >= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + u_4v_4$ é um produto interno (é produto interno usual em M_2). Você pode verificar isso, como exercício. Segundo esse produto interno, sendo $u = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, temos $< u, v >= 2.3 + 1.6 + 5.0 + (-1).2 = 10$.

Exemplo 4

Dados $p = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ e $q = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$, a relação $< p, q >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ define um produto interno em P_3 (é o produto interno usual em P_3). Dados $p = 2 + 3t - t^2$ e $q = 2t + t^2 - 5t^3$, temos $< p, q >= 2.0 + 3.2 + (-1).1 + 0.(-5) = 5$.

Propriedades do Produto Interno

Seja V um espaço vetorial real e $< .,. >: V \times V \to \mathbb{R}$ um produto interno. Valem as seguintes propriedades:

1. $< o_V, v >=< v, o_V >= 0, \forall v \in V$

   De fato, como $0v = o_V$, para todo vetor v em V, podemos escrever $< o_V, v >=< 0v, v > \overset{(iii)}{=} 0 < v, v >= 0$. Além disso, por (i), temos $< o_V, v >=< v, o_V >= 0$. Logo, $< o_V, v >=< v, o_V >= 0$.

2. $< v, \alpha u >= \alpha < v, u >, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v, u \in V$.

   De fato, $< v, \alpha u > \overset{(i)}{=} < \alpha u, v > \overset{(iii)}{=} \alpha < u, v > \overset{(i)}{=} < \alpha v, u >$.

3. $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >, \forall u, v, w \in V$.

   De fato, $< u + v, w > \overset{(i)}{=} < w, u + v > \overset{(ii)}{=} < w, u > + < w, v > \overset{(i)}{=} < u, w > + < v, w >$.

4. $< \alpha_1u_1 + \alpha_2u_2 + ... + \alpha_nu_n, v >=< \alpha_1u_1, v > + < \alpha_2u_2, v > +... + < \alpha_nu_n, v >, \forall n$ inteiro $, n \geq 1, \forall u, v_i \in V, i = 1, ..., n$.

   A prova desta propriedade usa indução e as condições (ii) e (iii) da definição de produto interno. De modo mais suscinto, podemos escrevê-la usando o símbolo de somatório:

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, v \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < u_i, v > .$$

5. $\left\langle u, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} < u, v_i >.$

   A prova desta propriedade usa indução e as propriedades 2 e 3 já vistas.

6. Generalizando, podemos provar que

   $$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_1 \beta_j < u_i, v_j >.$$

Veremos a seguir aplicações práticas do produto interno.

Aplicações do produto interno

Norma de vetor

Sejam V um espaço euclidiano e $v \in V$. Chama-se *norma* de v o número real

$$||v|| = \sqrt{< v, v >}.$$

Note que, pela condição (iv) da definição de produto interno, esse número está bem definido, pois $< v, v >$ é não negativo, para qualquer vetor v considerado. Assim, a norma de um vetor é sempre um número real não negativo e o vetor nulo é o único vetor de V que tem norma igual a zero.

Exemplo 5

Em $\mathbb{R}^2$, com o produto interno usual, a norma de um vetor $v = (x_1, x_2)$ é dada por $||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Assim, temos:

$||(-3, 4)|| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$

$||(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})|| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1.$

Exemplo 6

Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, a norma de um vetor $v = (x_1, x_2, x_3)$ é $||v|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Por exemplo:

$||(-1, 2, 3)|| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}.$

$||(2, -2, 1)|| = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9} = 3.$

Na figura 1 podemos ver que, no plano, a norma do vetor v coincide com a medida da hipotenusa do triângulo retângulo determinado por x_1 e x_2

(compare a expressão a norma com a conhecida fórmula de Pitágoras...). No espaço, a norma de v coincide com a medida da diagonal do paralelepípedo formado por x_1, x_2 e x_3.

Devido a essa interpretação geométrica que podemos dar à norma de um vetor de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, a norma de um vetor v é também conhecida como sendo o *módulo*, *tamanho*, ou ainda, *comprimento* de v.

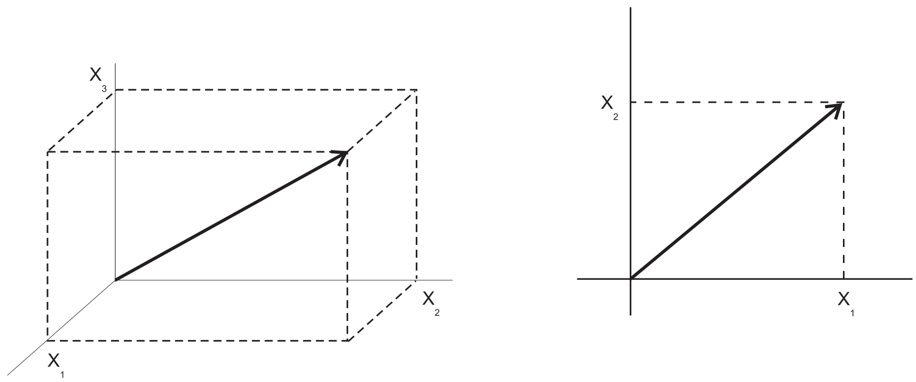


Fig. 1: Norma de vetores em $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

Observação: A não ser que se diga algo em contrário, o produto interno considerado será sempre o usual.

Exemplo 7

Em $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno definido no exemplo 3, a norma da matriz $v = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é $||v|| = \sqrt{< v, v >} = \sqrt{9 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$.

Exemplo 8

Usando o produto interno de P_3, definido no exemplo 4, a norma do polinômio $p = 2 + 3t - t^2$ é $||p|| = \sqrt{< p, p >} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$.

A norma de vetores possui importantes propriedades que listamos a seguir; suas demonstrações são propostas como exercícios, ao final da aula.

Propriedades da norma de vetores

Seja V um espaço euclidiano. Então:

1. $||\alpha v|| = |\alpha| \; ||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$.

2. $||v|| \geq 0, \forall v \in V$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = o_V$.
3. $| < u, v > | \leq ||u||\,||v||, \forall u, v \in V$. (Desigualdade de Cauchy Schwarz)
4. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$. (Desigualdade triangular)

Usando o conceito de norma de vetor, podemos também definir a distância entre dois vetores: dados u e v em um espaço euclidiano V, a *distância* entre eles, representada por $d(u, v)$, é dada por:

$$d(u, v) = ||u - v||.$$

A figura 2 ilustra o caso em que $V = \mathbb{R}^2$.

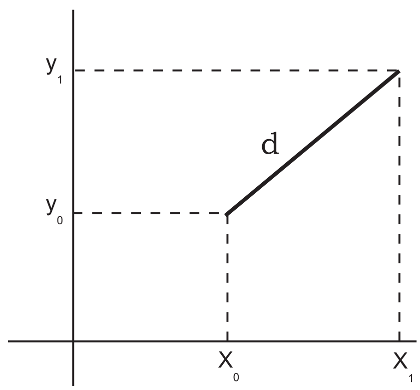


Fig. 2: Distância em $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 9

Em $\mathbb{R}^3$, a distância entre $u = (3, -2, 1)$ e $v = (4, 1, -3)$ é $d(u, v) = ||u - v|| = ||(-1, -3, 4)|| = \sqrt{1 + 9 + 16} = \sqrt{26}$.

Ângulo de dois vetores

Sejam V, um espaço vetorial euclidiano, e $u, v \in V$, não nulos. A desigualdade de Cauchy Schwarz: $| < u, v > | \leq ||u||\,||v||$, sendo modular, se desdobra na dupla desigualdade:

$$-||u||\,||v|| \leq < u, v > \leq ||u||\,||v||.$$

Como os vetores u e v são não nulos, suas normas são números reais positivos e podemos dividir cada termo dessa desigualdade por $||u||\,||v||$:

$$-1 \leq \frac{< u, v >}{||u||\,||v||} \leq 1.$$

Na disciplina de pré-cálculo, você estudou as funções trigonométricas. Deve se lembrar, então que, a cada número real a no intervalo $[-1, 1]$ corresponde um único arco θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, tal que $cos\,\theta = a$, conforme ilustra a figura 3.

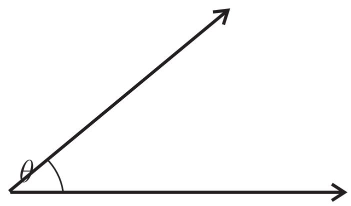


Fig. 3: Ângulo entre dois vetores de $\mathbb{R}^2$.

Podemos, então, definir o *ângulo entre os vetores* u *e* v como sendo θ tal que

$$cos\,\theta = \frac{< u, v >}{||u||\,||v||}.$$

Em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, θ é, de fato, o ângulo geométrico determinado pelos vetores u e v. A fórmula fornece o cosseno do ângulo. Ao final da aula, há uma tabela com os cossenos dos ângulos notáveis no intervalo $[0, \pi]$.

Exemplo 10

Vamos determinar o ângulos entre os vetores $u = (4, -2)$ e $v = (3, 1)$, de $\mathbb{R}^2$:

$$cos\,\theta = \frac{< u, v >}{||u||\,||v||} = \frac{12 - 2}{\sqrt{16+4}\sqrt{9+1}} = \frac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Um caso particularmente interessante é quando $\theta = 90^0$, ou seja, quando os vetores formam um ângulo reto, ou, em outras palavras, quando são *ortogonais*. Como $cos\,90^0 = 0 = \dfrac{< u, v >}{||u||\,||v||}$, concluimos que

$$u \text{ e } v \text{ são } \textbf{ortogonais} \;\Leftrightarrow < u, v >= 0.$$

Exemplo 11

Em $M_2(\mathbb{R})$, com o produto interno definido no exemplo 3, as matrizes $u = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ são ortogonais, pois $< u, v >= 2.3 + 0.5 + 1.4 + 5.(-2) = 0$.

Resumo

Nesta aula definimos produto interno: uma importante relação definida em espaços vetoriais, que associa um número real a cada par de vetores do espaço. A partir da definição de produto interno, podemos determinar a norma de um vetor e o ângulo definido por dois vetores. Podemos definir diferentes produtos internos em um mesmo espaço vetorial; cada um deles determinará uma norma e um ângulo entre vetores. O produto interno mais estudado, mais útil para nós, é o usual; a partir dele, a norma de um vetor do plano ou do espaço corresponde ao seu comprimento geométrico, o mesmo acontecendo com o ângulo entre eles. Vimos, também, o conceito de ortogonalidade de vetores. Na próxima aula retomaremos esse assunto, estudando importantes subespaços de um espaço euclidiano.

Exercícios

1. Prove a validade das propriedades do produto interno, isto é, sendo V um espaço euclidiano,

   a) $||\alpha v|| = |\alpha| \; ||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall v \in V$.

   b) $||v|| \geq 0, \forall v \in V$ e $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = o_V$

   c) (Desigualdade de Cauchy Schwarz) $| < u, v > | \leq ||u|| \; ||v||$, $\forall u, v \in V$.

      Sugestão: Primeiramente, mostre que no caso em que v é o vetor nulo, vale a igualdade. Suponha, então, $v \neq o$. Nesse caso, sendo α um real qualquer, é verdade que $||u + \alpha v||^2 \geq 0$. Desenvolva essa expressão, obtendo um trinômio do segundo grau, em α, sempre positivo. Então seu discriminante tem que ser menor ou igual a zero. Daí segue a desigualdade procurada.

   d) (Desigualdade triangular) $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$.
      Sugestão: Desenvolva a expressão $||u + v||^2$ e use a desigualdade de Cauchy Schwarz.

2. Considerando o espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, calcule $< u, v >$ em cada caso:

   a) $u = (2, -1, 0)$ e $v = (-3, 4, 1)$

   b) $u = (1/2, 3, 2)$ e $v = (-1, 1, 5)$

3. Seja o espaço euclidiano $\mathbb{R}^2$. Determine o vetor w tal que $< u, w >= 8$ e $< v, w >= 10$, dados $u = (2, 1)$ e $v = (-1, 3)$.
   Sugestão: Represente o vetor w pelo par (x, y).

4. Calcule a norma de $v \in V$, em cada caso:

   a) $v = (-3, 4), \;\; V = \mathbb{R}^2$
   b) $v = (1, 1, 1), \;\; V = \mathbb{R}^3$
   c) $v = (-1, 0, 4, \sqrt{19}), \;\; V = \mathbb{R}^4$

5. Em um espaço euclidiano, um vetor é dito ser *unitário* quando sua norma é igual a 1.

   a) Entre os seguintes vetores de $I\!R^2$, quais são unitários:
   $u = (1, 1) \quad v = (-1, 0) \quad w = (1/2, 1/2) \quad t = (1/2, \sqrt{3}/2)$
   b) Determine $a \in \mathbb{R}^2$ tal que o vetor $u = (a, 1/2)$, de $I\!R^2$ seja unitário.

6. Obtenha o ângulo entre os seguintes pares de vetores de $\mathbb{R}^2$:

   a) $u = (3, 1)$ e $v = (6, 2)$
   b) $u = (1, 2)$ e $v = (-1, 3)$
   c) $u = (3, 1)$ e $v = (2, 2)$
   d) $u = (0, 2)$ e $v = (-1, -1)$

7. Considere o espaço euclidiano $M_2(\mathbb{R})$.

   a) Quais das matrizes abaixo são ortogonais a $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$:
   $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$
   b) Calcule a norma da matriz M, do item anterior.
   c) Determine o ângulo entre as matrizes $M_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
   d) Calcule a distância entre as matrizes M_1 e M_2 do item anterior.

8. No espaço vetorial P_2,

   a) Defina o produto interno usual (análogo ao definido em P_3, no exemplo 4 da aula).

   b) Calcule a norma do polinômio $p = 3 - 4t + 2t^2$, de P_2.

Auto-avaliação

O assunto tratado nesta aula é muito importante, no desenvolvimento de toda a teoria. Note que os conceitos de norma, distância, ângulo, ortogonalidade, tão naturais quando pensamos em vetores do plano ou do espaço, foram estendidos para espaços vetoriais quaisquer. Expressões como "norma de polinômio", "distância entre matrizes", "polinômios ortogonais", não devem mais causar estranheza. Você não deve ficar com nenhuma dúvida, antes de seguir em frente. Refaça os exemplos, se julgar necessário. E lembre-se: encontrando qualquer obstáculo, peça ajuda ao tutor da disciplina. Até a próxima aula!!

Respostas dos exercícios

Note que, dado $a \in \mathbb{R}$, $\sqrt{a^2} = |a|$.

1. a) $||\alpha v|| = \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} = \sqrt{\alpha^2 < v, v >} = \sqrt{\alpha^2 ||v||^2} = |\alpha|.||v||$.

   b) $||v|| \geq 0$, pela própria definição de norma. $||v|| = 0 \Rightarrow \sqrt{< v, v >} = 0 \Rightarrow < v, v >= 0 \Rightarrow v = o_V$. Finalmente, $v = o_V \Rightarrow < v, v >= 0 \Rightarrow \sqrt{< v, v >} = 0 \Rightarrow ||v|| = 0$.

   c) Se $v = o_V$, então $||v|| = 0$ e $< u, v >= 0 = ||u\ ||v||$. Portanto, vale a igualdade (e, em conseqüência, a desigualdade). Supondo $v \neq o_V$, e sendo $\alpha \in \mathbb{R}$, arbitrário, podemos afirmar que $||u + \alpha v||^2 \geq 0$. Desenvolvendo essa expressão (usando a definição de norma), chegamos a $||v||^2\alpha^2 + 2 < u, v > \alpha + ||u||^2 \geq 0$, para todo α real. Isto é, obtemos um trinômio do segundo grau, em α, sempre positivo. Então seu discriminante tem que ser menor ou igual a zero, isto é: $4 < u, v >^2 -4||v||^2\ ||u||^2 \leq 0$. Separando os termos da desigualdade, simplificando e extraindo a raiz quadrada de cada termo, concluimos que $| < u, v > | \leq ||u||\ ||v||$.

d) $||u+v||^2 =< u+v, u+v >=< u,u > + < u,v > + < v,u > + < v,v >= ||u||^2 + 2 < u,v > + ||v||^2$. Usando a desigualdade de Cauchy Schwarz, $||u+v||^2 \leq ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2$. Logo, $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$.

2. a) -10
   b) $25/2$

3. $w = (2, 4)$

4. a) 5
   b) $\sqrt{3}$
   c) 6

5. a) $v,\ t$
   b) $||u|| = 1 \Rightarrow ||u||^2 = 1 \Rightarrow a^2 + 1/4 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}/2$

6. a) 0^0
   b) 45^0
   c) arccos $2\sqrt{5}/5$
   d) 135^0

7. a) A, C, D
   b) $||M|| = 15$
   c) 90^o - as matrizes M_1 e M_2 são ortogonais.
   d) $d(M_1, M_2) = ||M_1 - M_2|| = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

8. a) Sendo $p = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$, em P_2, o produto interno usual é dado por: $< p, q >= a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$.
   b) $\sqrt{29}$

Tabela do cosseno:

θ:	$0\ (0^o)$	$\pi/6\ (30^o)$	$\pi/4\ (45^o)$	$\pi/3\ (60^o)$	$\pi/2\ 90^o)$
$cos\,\theta$:	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Para os ângulos do segundo quadrante (compreendidos no intervalo $[\pi/2, \pi]$, basta lembrar que $cos\,(\pi - \theta) = -\cos\,\theta$ (ou: $cos\,(180 - \theta) = cos\,\theta$). Por exemplo, $cos\,120^0 = -cos\,(180^0 - 120^0) = -cos\,60^0 = -1/2$.

Aula 15 – Conjuntos ortogonais e ortonormais

Objetivos

Reconhecer conjuntos ortogonais e ortonormais;
Aplicar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt;
Reconhecer bases ortonormais;
Projetar vetores ortogonalmente em subespaços.

Pré-requisitos: aulas 11 (independência linear), 12 (base), e 14 (ortogonalidade).

Nesta aula vamos caracterizar subconjuntos especiais de espaços euclidianos. Na aula 14 vimos que, num espaço euclidiano, dois vetores são ortogonais quando o produto interno deles se anula. Isto é, sendo V um espaço euclidiano,

Espaços vetoriais reais, com produto interno e dimensão finita.

$$u \perp v \quad \Leftrightarrow \quad < u, v >= 0, \;\; \forall u, v \in V.$$

Vejamos, agora, as duas definições importantes desta aula:

Seja V um espaço euclidiano. Um subconjunto $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$ é

- *ortogonal*, quando seus elementos são ortogonais dois a dois, isto é:

$$< v_i, v_j >= 0, \;\; \forall i, j \in \{1, ..., n\}, \;\; i \neq j.$$

- *ortonormal* quando é ortogonal e todos os seus elementos são unitários, isto é:

$$S \text{ é ortogonal e } ||v_i|| = 1, \;\; \forall i \in \{1, ..., n\}.$$

Exemplo 1

a) O conjunto $S = \{2, -3, 1), (5, 4, 2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é ortogonal. De fato, $< (2, -3, 1), (5, 4, 2) >= 10 - 12 + 2 = 0$. S não é ortonormal pois, por exemplo, $||(2, -3, 1)|| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14} \neq 1$.

b) O conjunto $S = \{(1, 0, 0), (0, -\sqrt{3}/2, 1/2)\} \subset \mathbb{R}^3$ é ortonormal, pois

$< (1, 0, 0), (0, -\sqrt{3}/2, 1/2) >= 0$,

$||(1, 0, 0)|| = \sqrt{1} = 1$ e

$||(0, -\sqrt{3}/2, 1/2)|| = \sqrt{3/4 + 1/4} = \sqrt{1} = 1$.

c) Se S é um conjunto ortogonal num espaço euclidiano V, então o conjunto resultante da união $S \cup \{o_V\}$ também é ortogonal pois o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor. É claro, também, que nenhum conjunto em que o vetor nulo comparece é ortonormal, pois a condição de todos os vetores serem unitários não é satisfeita.

Na aula 14, vimos que, num espaço euclidiano, o cosseno do ângulo θ, formado por dois vetores u e v, não nulos, é:

$$cos\,\theta = \frac{< u, v >}{||u||\,||v||}.$$

No caso de os dois vetores serem unitários, a fórmula se resume a

$$cos\,\theta =< u, v > .$$

Agora, num conjunto ortornomal S, só há duas possibilidades para a medida do ângulo formado por quaisquer dois de seus vetores:

- se os vetores são distintos, então formam ângulo reto e, então, o produto interno é igual a zero (pois vimos acima que o cosseno do ângulo se iguala ao produto interno);

- se consideramos duas vezes o mesmo vetor, então o ângulo é nulo e seu cosseno é igual a 1; logo, o produto interno também é 1.

Daí, podemos concluir que:

Sendo $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ um subconjunto ortonormal de um espaço euclidiano, então

- $i \neq j \Rightarrow \theta = 90^o \Rightarrow cos\,\theta = 0 =< v_i, v_j > .$

- $i = j \Rightarrow \theta = 0^o \Rightarrow cos\,\theta = 1 =< v_i, v_j > .$

Podemos, então, caracterizar um conjunto ortonormal $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ usando o símbolo de Kronecker:

Lembrando: A função delta de Kronecker nos índices i e j é definida por: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$.

$$< v_i, v_j >= \delta ij,\ \forall i, j \in \{1, ..., n\}.$$

Veremos, a seguir, um importante resultado envolvendo conjuntos ortonormais.

Proposição 1

Um conjunto ortonormal é linearmente independente.

Demonstração.

Lembrando: um conjunto de vetores é LI quando, ao escrevermos o vetor nulo como uma combinação linear deles, obtemos todos os coeficientes nulos.

Sejam V um espaço euclidiano e $S = \{v_1, ..., v_n\} \subset V$, ortonormal. Sejam $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 ... + \alpha_n v_n = o_V$. Como o produto interno de qualquer vetor pelo vetor nulo é igual a zero, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
0 &=< o_V, v_1 >= \\
&=< \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n, v_1 >= \\
&= \alpha_1 \underbrace{< v_1, v_1 >}_{1} + \alpha_2 \underbrace{< v_2, v_1 >}_{0} + ... + \alpha_n \underbrace{< v_n, v_1 >}_{0} = \\
&= \alpha_1.
\end{aligned}
$$

Logo, $\alpha_1 = 0$. Procedendo de forma análoga com os vetores $v_2, ..., v_n$, iremos concluir que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Logo, o conjunto S é LI.

Já vimos, na aula 10, que todo subconjunto de um espaço vetorial V gera um subespaço de V. Quando o conjunto considerado é LI, além de gerar, ele forma uma base do subespaço gerado. Assim, a Proposição 1 permite concluir que um conjunto ortonormal é uma base do subespaço que ele gera. Nesse caso, dizemos que a base é ortonormal. Bases ortonormais são particularmente interessantes por simplificarem os cálculos e permitirem uma representação gráfica mais clara e fácil de se construir. Surge, então, a questão: como obter bases ortonormais de subespaços dados?

Mas vamos com calma. O primeiro passo para chegar à resposta procurada é saber obter a projeção de um vetor na direção de outro.

Projeção de um vetor na direção de outro

Sejam V um espaço euclidiano, $u, v \in V, v \neq o_V$. Vamos obter o vetor projeção de u na direção de v. Em outras palavras, vamos decompor u em duas componentes: uma na direção de v - que será a projeção mencionada, e outra, ortogonal a v, como mostra a figura 1.

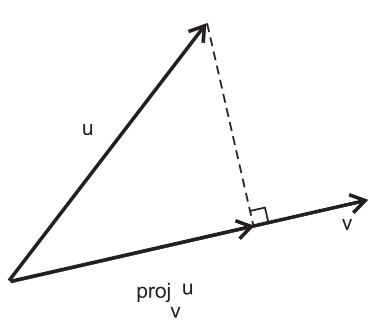


Fig. 1: Projetando u na direção de v.

Os cálculos ficam mais simples se o vetor sobre o qual se projeta é unitário. Caso ele não seja, podemos "trocá-lo"por outro, de mesma direção e sentido, e de tamanho 1. Esse vetor se chama *versor* do vetor dado. Para isso, basta dividir o vetor v pelo seu módulo:

$$\text{versor de } v = \frac{v}{||v||}.$$

É fácil verificar que, de fato, o versor de v é unitário:

$$\left|\left|\frac{v}{||v||}\right|\right| = \sqrt{< \frac{v}{||v||}, \frac{v}{||v||} >} = \sqrt{\frac{1}{||v||^2} < v, v >} = \sqrt{\frac{||v||^2}{||v||^2}} = 1.$$

Exemplo 2

Consideremos o vetor $v = (3, 4)$, de $\mathbb{R}^2$. Seu módulo é $||v|| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$. Seu versor é o vetor $\frac{v}{||v||} = \frac{(3,4)}{5} = (3/5, 4/5)$. Vamos verificar que esse vetor é realmente unitário: $\sqrt{(3/5)^2 + (4/5)^2} = \sqrt{9/25 + 16/25} = \sqrt{25/25} = 1$. A figura 2 ilustra esse caso.

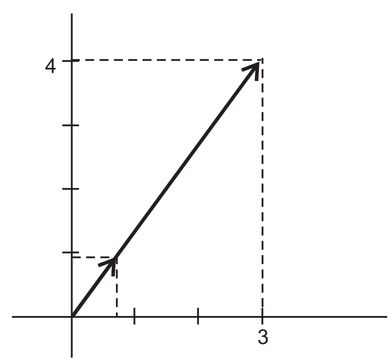


Fig. 2: O vetor $(3, 4)$ de $\mathbb{R}^2$ e seu versor.

Assim, ao projetar um vetor na direção de v, não nulo, podemos sempre considerá-lo unitário. Na figura 3 vemos que a projeção de u na direção de v é um vetor paralelo a v e, portanto, pode ser escrito como um múltiplo de v, isto é,

$$proj_v u = kv, \quad \text{para algum } k \in \mathbb{R}.$$

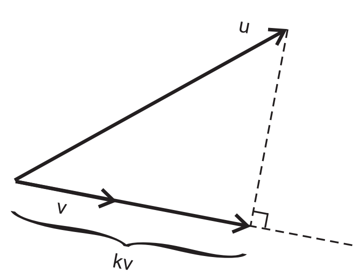


Fig. 3:

Então $||proj_v u|| = ||kv|| = |k|\,||v|| = |k|$, uma vez que estamos supondo $||v|| = 1$. Para conhecer o vetor projeção, então, temos que determinar k. No triângulo retângulo da figura 3, o vetor projeção é o cateto adjacente ao ângulo θ, formado pelos vetores u e v, e a hipotenusa mede $||u||$. Logo, lembrando da expressão do cosseno do ângulo formado por dois vetores e usando o fato de v ser unitário, temos:

Num triângulo retângulo, o cosseno de um ângulo agudo é igual à medida do cateto adjacente dividida pela medida da hipotenusa.

$$||proj_v u|| = |cos\,\theta.||u||| = \left|\frac{< u, v >}{||u||\,||v||}\,||u||\right| = |< u, v >|.$$

Assim, $||proj_v u|| = |< u, v >| = |k|$, donde podemos concluir que $k = \pm < u, v >$. Ocorre, porém, que k e $< u, v >$ têm o mesmo sinal, como indica a figura 3. No caso em que $\theta = 90^o$, temos $k = 0$, ou seja, a projeção é o vetor nulo (a projeção reduz-se a um ponto).

Concluimos, então, que

$$proj_v u =< u, v > v.$$

Nesse processo, a partir de um vetor u, qualquer, de um espaço euclidiano V, obtivemos a componente $u - proj_v u$, que é ortogonal à direção de v. Isso fica claro na figura 1, mas podemos verificar algebricamente, calculando o produto interno dos vetores $u - proj_v u$ e v:

$$\begin{aligned} < u- < u, v > v, v > &=< u, v > - << u, v > v, v >= \\ &=< u, v > - < u, v >< v, v >= \\ &=< u, v > (1- < v, v >) = \\ &=< u, v > (1 - ||v||^2) = \\ &=< u, v > .(1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Exemplo 3

No espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, a projeção ortogonal do vetor $u = (0, 1, -4)$ na direção do vetor $v = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)$ é o vetor $< u, v > v$ (note que v é unitário). Ou seja, é o vetor $-2\sqrt{3}v = (-\sqrt{3}, 0, -3)$.) vetor $u^{'} = u - proj_v u = (0, 1, -4) - (-\sqrt{3}, 0, 3) = (\sqrt{3}, 1, -1)$ é ortogonal a v. (Verifique!)

Ao projetar u na direção de v, o que fizemos foi projetá-lo ortogonalmente no subespaço de V gerado pelo vetor v (a reta suporte de v). Vamos estender esse método para o caso em que o subespaço sobre o qual projetamos é gerado por n vetores:

Sejam V, um espaço euclidiano, $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$, ortonormal, e $v \in V$. A **projeção ortogonal de u sobre o subespaço gerado por S** é o vetor

$$< v, v_1 > v_1 + < v, v_2 > v_2 + ... + < v, v_n > v_n.$$

Exemplo 4

Seja $S = \{(1, 0, 0), (0, -1, 0)\}$ no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$. Vamos projetar o vetor $v = (5, 2, -3)$, ortogonalmente, sobre o plano $[S]$. Primeiramente, notamos que os vetores de S são ortogonais e unitários. Podemos, então, usar a expressão da projeção:

$proj_{v_1} v =< v, v_1 > v = 5v_1 = (5, 0, 0)$.

$proj_{v_2} v =< v, v_2 > v = -2v_2 = (0, 2, 0)$. Então $proj_{[S]} v = (5, 0, 0) + (0, 2, 0) = (5, 2, 0)$.

Além disso, de forma análoga à que ocorre quando projetamos sobre a direção de um único vetor, a diferença entre o vetor projetado e a projeção é um vetor orgogonal ao subespaço de projeção, como mostramos na

Proposição 2

Sejam V um espaço euclidiano, $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$, um conjunto ortonormal, e $v \in V$. O vetor

$$u = v - < v, v_1 > v_1 - < v, v_2 > v_2 - ... - < v, v_n > v_n$$

é ortogonal a todo vetor de S.

Demonstração.

Vamos mostrar que u é ortogonal a v_1:

$< u, v_1 >=$

$=< v - < v, v_1 > v_1 - < v, v_2 > v_2 - ... - < v, v_n > v_n, v_1 >=$

$=< v, v_1 > - << v, v_1 > v_1, v_1 > - << v, v_2 > v_2, v_1 > - ... - << v, v_n > v_n, v_1 >=$

$=< v, v_1 > - < v, v_1 > \underbrace{< v_1, v_1 >}_{1} - < v, v_2 > \underbrace{< v_2, v_1 >}_{0} - ... - < v, v_n > \underbrace{< v_n, v_1 >}_{0} =$

$=< v, v_1 > - < v, v_1 >= 0$.

Procedendo de maneira análoga, com os demais vetores de S, concluiremos que

$$u \perp v_1,\ u \perp v_2, ..., u \perp v_n.$$

Exemplo 5

No exemplo anterior, o vetor $v - proj_{[S]}v = (5,2,-3) - (5,2,0) = (0,0,-3)$ é ortogonal a $(1,0,0)$ e a $(0,-1,0)$, vetores de S.

Proposição 3

Sejam V um espaço euclidiano, $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\} \subset V$, um conjunto ortonormal e $v \in V$. O vetor

$$u = v - < v, v_1 > v_1 - < v, v_2 > v_2 - ... - < v, v_n > v_n$$

é ortogonal a todo vetor do subespaço de V gerado por S. Ou seja, u é ortogonal a todo vetor de V que pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de S.

Demonstração.

Pela Proposição 2, já sabemos que u é ortogonal a cada vetor de S, ou seja,

$$< u, v_1 > = < u, v_2 > = ... = < u, v_n > = 0.$$

Vamos calcular o produto interno de u por um vetor genérico do subespaço gerado por S:

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \in V$. Então

$$\begin{aligned} < u, w > &= < u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n > = \\ &= \alpha_1 \underbrace{< u, v_1 >}_{0} + \alpha_2 \underbrace{< u, v_2 >}_{0} + ... + \alpha_n \underbrace{< u, v_n >}_{0} = 0. \end{aligned}$$

Logo, u é ortogonal a w.

Exemplo 6

Retomando o exemplo anterior, podemos afirmar que o vetor $v - proj_{[S]}v = (5,2,-3) - (5,2,0) = (0,0,-3)$ é ortogonal ao plano $[S]$.

Estamos, agora, em condições de responder à pergunta: uma vez que temos que ter bases ortonormais para poder efetuar a projeção, como obter bases ortonormais para espaços dados? Vamos fazer isso usando o chamado Método de ortonormalização de Gram-Schmidt, que nada mais é do que a aplicação do resultado demonstrado na proposição 3. Vamos a ele:

Método de ortonormalização de Gram-Schmidt

Todo espaço euclidiano admite uma base ortonormal

Demonstração.

$\dim V = 1$: Seja $\{v\}$ uma base de V. Então o conjunto $\{u\} = \{\frac{v}{||v||}\}$ é uma base ortonormal de V.

$\dim V = 2$: Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de V. Seja $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||}$. Pela proposição 3, o vetor $g_2 = v_2 - proj_{u_1} v_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1$ é ortogonal a u_1. Então o vetor $u_2 =$ versor de $g_2 = \frac{g_2}{||_2||}$ é unitário e também é ortogonal a u_1. Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de V, pois possui dois vetores ortogonais e unitários e a dimensão de V é dois.

$\dim V = n$: Prosseguindo de forma análoga, dada uma base de V, vamos construindo, um a um, os vetores de uma outra base, esta sim, ortonormal. O primeiro é, simplesmente, o versor do primeiro vetor da base original. A partir do segundo, a idéia é decompor cada vetor em duas componentes: uma na direção do subespaço gerado pelos vetores já obtidos e outra ortogonal à primeira. É o versor desa segunda componente que irá se reunir aos vetores já obtidos, para formar a base ortonormal.

Exemplo 7

Vamos aplicar o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, a partir da base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, com $v_1 = (1,1,1); v_2 = (1,-1,1)$ e $v_3 = (0,1,1)$. Seja $B' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a base ortonormal procurada. Então

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}).$$

$$\begin{aligned}
g_2 &= v_2 - proj_{u_1} v_2 = \\
&= v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = \\
&= (1,-1,1) - < (1,-1,1), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) > (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \\
&= (1,-1,1) - 1/\sqrt{3}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \\
&= (1,-1,1) - (1/3, 1/3, 1/3) = \\
&= (2/3, -4/3, 2/3).
\end{aligned}$$

O vetor g_2 é ortogonal a u_1. De fato, $< g_2, u_1 >= 2/3\sqrt{3} - 4/3\sqrt{3} + 2/3\sqrt{3} = 0$. Então o segundo vetor da nova base é o versor de g_2, isto é:

$$\begin{aligned}
u_2 &= \frac{g_2}{||g_2||} = \\
&= \frac{(2/3,-4/3,2/3)}{\sqrt{4/9+16/9+4/9}} = \\
&= \frac{(2/3,-4/3,2/3)}{\sqrt{24/9}} = \\
&= \frac{(2/3,-4/3,2/3)}{\frac{2\sqrt{6}}{3}} = \\
&= 3/2\sqrt{6}(2/3, -4/3, 2/3) = \\
&= (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}).
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_3 &= v_3 - proj_{u_1}v_3 - proj_{u_2}v_3 = \\
&= v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2 = \\
&= v_3 - 2/\sqrt{3}u_1 - (-1/\sqrt{6})u_2 = \\
&= (0,1,1) - 2/\sqrt{3}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) - (-1/\sqrt{6})(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = \\
&= (0,1,1) - (2/3, 2/3, 2/3) + (1/6, -2/6, 1/6) = \\
&= (-1/2, 0, 1/2).
\end{aligned}
$$

Logo, o terceiro vetor da base B' é o versor de g_3, isto é:

$u_3 = \frac{g_3}{||g_3||} = \frac{(-1/2,0,1/2)}{\sqrt{\frac{2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}}(-1/2, 0, 1/2) = (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

Logo, a base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ é

$B' = \{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}), (-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$.

Exemplo 8

Em $\mathbb{R}^3$, vamos projetar o vetor $u = (1, 2, -3)$, ortogonalmente, na direção do vetor $v = (1, 2, 2)$.

Observe, primeiramente, que v não é unitário, pois $||v|| = \sqrt{1+4+4} = 3$. O seu versor é o vetor $v' = \frac{v}{3} = (1/3, 2/3, 2/3)$. O vetor projeção é $proj_v u = proj_{v'} u = < u, v' > v' = (-1/3)(1/3, 2/3, 2/3) = (-1/9, -2/9, -2/9)$.

Além disso, o vetor $u - proj_v u = (1, 2, -3) - (-1/9, -2/9, -2/9) = (10/9, 20/9, -25/9)$ é ortogonal a v.

Exemplo 9

Vamos projetar o vetor $u = (1, 2, -3)$, do exemplo anterior, sobre o plano P de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, 2)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$. Precisamos de uma base ortonormal do subespaço gerado por v_1 e v_2. Note que esses dois vetores são ortogonais; precisamo, apenas, tomar o versor de v_1, uma vez que v_2 já é unitário:

$v_1' = \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}} = (1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5})$ Então

$$
\begin{aligned}
&proj_P u = proj_{v_1} u + proj_{v_2} u = \\
&= < u, v_1' > v_1' + < u, v_2' > v_2' = \\
&= (-5/\sqrt{5})(1/\sqrt{5}, 0, 2/\sqrt{5}) + 2(0, 1, 0) = (-1, 2, -2).
\end{aligned}
$$

Note que a projeção é um vetor de P. Por outro lado, a diferença:

$u - (1, 2, -1) = (2, 0, -1)$ é um vetor ortogonal a P.

Exemplo 10

Vamos obter uma base ortonormal do subespaço de $\mathbb{R}^3$: $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + z = 0\}$ e, em seguida, projetar o vetor $u = (5, 3, 2)$, ortogonalmente, sobre U.

Primeiramente, vamos obter uma base para U. Note que um vetor de U é da forma $(x, x+z, z) = x(1,1,0) + z(0,1,1)$. Logo, $v_1 = (1,1,0)$ e $v_2 = (0,1,1)$ formam uma base de U. Precisamos ortonormalizar essa base. Seja $B = \{u_1, u_2\}$ a base ortonormal procurada. Então:
$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
$g_2 = v_2 - proj_{u_1} v_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 =$
$= (0,1,1) - 1/\sqrt{2}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) = (-1/2, 1/2, 1)$.
Logo,
$u_2 = \frac{g_2}{||g_2||} = 2/\sqrt{6}(-1/2, 1/2, 1) = (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$.
Então $B' = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})\}$.

Agora podemos obter a projeção de u sobre U:
$proj_U u = proj_{u_1} u + proj_{u_2} u =< u, u_1 > u_1 + < u, u_2 > u_2 =$
$= 8/\sqrt{2}(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) + 2/\sqrt{6}(-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}) = (11/3, 13/3, 2/3)$.

Resumo

Nesta aula você aprendeu um método prático de obter uma base ortonormal, a partir de outra base dada. Isso é necessário pois aprendemos como projetar ortogonalmente um vetor sobre um subespaço, desde que conheçamos uma base ortornormal desse subespaço. Vimos, também, que a diferença entre o vetor projetado e sua projeção ortogonal sobre um subespaço é um vetor ortogonal ao subespaço.

Exercícios

1. Em $\mathbb{R}^2$, obtenha o vetor projeção ortogonal de $u = (4,5)$ na direção de $v = (1,2)$.

2. Em $\mathbb{R}^3$, obtenha o vetor projeção ortogonal de $u = (1,1,3)$ na direção de $v = (0,1,1)$.

3. Dê a componente de $u = (2,-1,1)$, em $\mathbb{R}^3$, ortogonal ao vetor $v = (1,2,1)$.

4. Determine a projeção ortogonal do vetor $u = (2,-1,3)$ sobre o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado por $S = \{(1,0,1), (2,1,-2)\}$.

5. Projete, ortogonalmente, o vetor $u = 3,2,1)$ sobre o subespaço $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-z=0\}$.

6. Use o método de ortonormalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, a partir da base $B = \{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,2)\}$.

7. Obtenha uma base ortornormal de $\mathbb{R}^2$, a partir da base $B = \{(1,2), (-1,3)\}$.

8. Obtenha uma base ortornormal para o seguinte subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x - y = 0 \text{ e } z = 2t\}$. A seguir, projete o vetor $u = (1,3,4,2)$ ortogonalmente sobre U.

Auto-avaliação

Você deve estar familiarizado com a expressão que fornece a projeção ortogonal de um vetor sobre um subespaço. Lembre-se que isso só pode ser feito quando temos uma base ortonormal. Então, o que devemos fazer é:

Verificar se a base do subespaço sobre o qual vamos projetar é ortonormal:

- Se sim, usar a fórmula da projeção ortogonal;
- Se não, usar primeiramente o Método de ortonormalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal e aí sim, aplicar a fórmula da projeção.

Não resta dúvida de que é um método trabalhoso, envolvendo muitos cálculos, mas o importante é que você compreenda o significado geométrico do que o processo realiza. A idéia é "desentortar"os vetores, trocando cada um deles pela sua componente que é ortogonal à direção de cada subespaço gerado pelos anteriores. Ao final do método, obtemos vetores ortogonais, dois a dois, todos unitários. A utilidade de se lidar com bases ortonormais ficará mais evidente quando estudarmos representações matriciais de transformações lineares. Não se assuste com o nome - tudo a seu tempo!!! Até lá! Em tempo: havendo qualquer dúvida, procure o tutor da disciplina!!

Respostas dos exercícios

1. $(14/5, 28/5)$

2. $(0, 2, 2)$

3. $(11/6, -8/6, 5/6)$

4. Observe, primeiramente, que os vetores geradores são ortogonais.A resposta é $(11/6, -1/3, 19/6)$.

5. Veja o exemplo feito em aula: primeiramente obtenha uma base de W; em seguida, aplique o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal. Aí, sim, use a expressão que fornece a projeção ortogonal. A resposta é $(5/3, 2/3, 7/3)$.

6. $\{(1, 0, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})\}$

7. $(\sqrt{5}/5, 2\sqrt{5}/5), (-2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/5)\}$

8. $\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0), (0, 0, 2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})\}; \quad (2, 2, 4, 2)$

Aula 16 – Complemento Ortogonal

Objetivo

Obter o complemento ortogonal de um subespaço.

Pré-requisitos: aulas 13 (Soma de subespaços); 14 (Espaços euclidianos) e 15 (Conjuntos ortonormais/projeção ortogonal).

Esta aula é curta - nela completaremos a teoria iniciada na aula anterior. Destacaremos um subespaço especial, que é definido a partir de um outro subespaço, usando a noção de ortogonalidade. Recordaremos também o conceito de soma direta de subespaços. Iniciamos com a principal definição desta aula.

Complemento ortogonal

Sejam V um espaço euclidiano e $U \subset V$ um subespaço vetorial de V. Vamos representar por $U^{\perp}$ o subconjunto formado pelos vetores de V que são ortogonais a todo vetor de U, isto é:

$$U^{\perp} = \{v \in V | < v, u >= 0, \forall u \in U\}$$

O subconjunto $U^{\perp}$ é chamado *complemento ortogonal* de U e é também um subespaço vetorial de V.

De fato,

(i) $U^{\perp} \neq \emptyset$, pois $< o_V, u >= 0, \forall u \in V$; logo, $o_V \in U^{\perp}$.

(ii) Sejam $v_1, v_2 \in U^{\perp}$, isto é, $< v_1, u >= 0$ e $< v_2, u >= 0, \forall u \in U$. Então $< v_1 + v_2, u >=< v_1, u > + < v_2, u >= 0 + 0 = 0, \forall u \in U$.
Logo, $v_1 + v_2 \in U^{\perp}$.

(iii) Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in U^{\perp}$, isto é, $< v, u >= 0, \forall u \in U$. Então $< \alpha v, u >= \alpha < v, u >= \alpha .0 = 0, \forall u \in U$. Logo, $\alpha v \in U^{\perp}$.

Exemplo 1

Em $\mathbb{R}^2$, o complemento ortogonal do subespaço gerado pelo vetor $(3,0)$ é o subespaço gerado pelo vetor $(0,1)$. De fato, sendo $U = [(3,0)]$, um vetor $u \in U$ é da forma $(3\alpha, 0)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Queremos identificar os vetores de $\mathbb{R}^2$ que são ortogonais a todo vetor de U. Isto é, os vetores $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $< v, u >= 0, \forall u \in U$. Ou seja, queremos (x, y) tais que $3\alpha x = 0$. Como essa igualdade tem que se verificar para qualquer α real, concluímos que $x = 0$. Logo, todo vetor de $U^\perp$ é da forma $(0, y)$, com $y \in \mathbb{R}$. Assim, qualquer vetor dessa forma, não nulo, gera $U^\perp$, e podemos escrever $U^\perp = [(0,1)]$. Note que U é o eixo das abscissas e $U^\perp$, o eixo das ordenadas, como indica a figura 1.

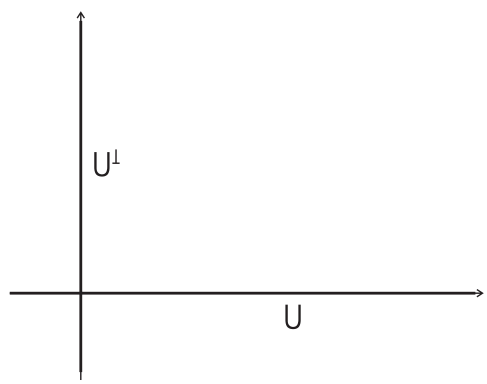


Fig. 1: Um subespaço de $\mathbb{R}^2$ e seu complemento ortogonal.

Na aula 13, você estudou soma e soma direta de subespaços.
Recordando:

- Sendo U e W subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial V, a soma de U e W é o subconjunto de V formado pelos vetores que podem ser escritos como a soma de um vetor de U com um de W, isto é:

$$U + W = \{v \in V | v = u + w; u \in U \text{ e } w \in W\}.$$

- A soma de dois subespaços de V é também um subespaço de V.
- A soma direta de U e W, representada por $U \oplus W$, é a soma de U e W no caso em que $U \cap W = \{o_V\}$.
- Sendo V de dimensão finita, a dimensão da soma direta de U e W é a soma das dimensões de U e W e a união de uma base de U com uma base de W é uma base da soma direta.

- Além disso, quando a soma é direta, só existe uma maneira de decompor cada vetor de V numa soma de um vetor de U com um vetor de $U^\perp$, o que significa dizer que esses dois vetores são únicos.

Proposição 1

Sejam V um espaço euclidiano e U, subespaço de V. Então $V = U \oplus U^\perp$.

Demonstração.

Temos que mostrar duas coisas: (i) V é soma de U e do complemento ortogonal de U, e (ii) essa soma é direta.

(i) Queremos mostrar que, $\forall v \in V, v = u + w$, para algum $u \in U$ e algum $w \in U^\perp$.
Sejam $B = \{u_1, ..., u_m\}$ uma base ortonormal de U, e $v \in V$. Pela proposição 3 da aula 15, o vetor

Vimos, na aula 15, que todo espaço euclidiano admite uma base ortonormal.

$$w = v - < v, u_1 > u_1 - < v, u_2 > u_2 - ... - < v, u_m > u_m$$

é ortogonal a todo vetor de B e, assim, ortogonal a todo elemento de U. Logo, $w \in U^\perp$. Podemos, então, escrever

$$v = \underbrace{w}_{\in U^\perp} + \underbrace{(- < v, u_1 > u_1 - < v, u_2 > u_2 - ... - < v, u_m > u_m)}_{\in U},$$

o que prova que $V = U + U^\perp$.

(ii) Seja $v \in U \cap U^\perp$. Como $v \in U^\perp, < v, u >= 0, \forall u \in U^\perp$. Em particular, como $v \in U$, temos $< v, v >= 0$, o que implica $v = o_V$.
Logo, $U \cap U^\perp = \{o_V\}$.

Como já vimos na aula 15, todo vetor $v \in V$ pode ser decomposto em duas parcelas, uma sendo a projeção ortogonal do vetor sobre um subespaço de V e a outra, um vetor ortogonal a esse subespaço. Considerando os subespaços U e $U^\perp$, podemos então, decompor cada vetor v de V, de forma única, na soma:

$$v = w + u,$$

onde

- $u \in U$: u é a projeção ortogonal de v sobre o subespaço U, e
- $w \in U^\perp$: w é ortogonal a U.

É importante lembrar que para determinar a projeção de um vetor v de V sobre U, é necessário conhecer uma base ortonormal de U. Para isso, estudamos o método de Gram-Schmidt.

Em resumo:

Sendo

- U um subespaço vetorial do espaço euclidiano V;

- $\{v_1, ..., v_m\}$ base ortonormal de U

- $v \in V$,

então $v = w + u$, onde

$$u = proj_U v = \sum_{i=1}^{m} < v, v_i > v_i$$

Exemplo 2

Seja W o eixo z de $\mathbb{R}^3$, isto é,

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = y = 0\} = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\}.$$

$W^\perp$ é o plano xy, isto é:

$$W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Temos, então, que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$, pois, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{(x, y, 0)}_{\in W^\perp} + \underbrace{(0, 0, z)}_{\in W}$$

e

$$W \cap W^\perp = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\} \cap \} = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\} = \{(0, 0, 0)\} = o_{\mathbb{R}^3}.$$

Essa situação está ilustrada na figura 2.

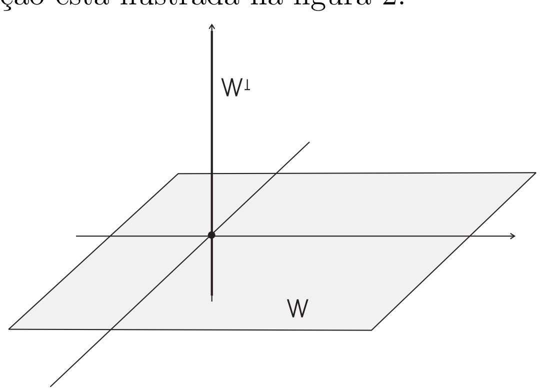


Fig. 2: Um subespaço de $\mathbb{R}^3$ e seu complemento ortogonal.

Exemplo 3

Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $u = (1, 2, 3, -1)$ e $w = (2, 4, 7, 2)$. Vamos encontrar uma base para $W^\perp$.
Para um vetor $v = (x, y, z, t)$ de $\mathbb{R}^4$ pertencer a $W^\perp$, deve ser ortogonal a u e a w, simultaneamente, isto é:

$$\begin{cases} < v, u >= 0 \\ < v, w >= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ 2x + 4y + 7z + 2t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ z + 4t = 0 \end{cases}.$$

Um vetor de $\mathbb{R}^4$ é solução desse sistema quando é da forma $(-2y+13t, y, -4t, t)$, com $y, t \in \mathbb{R}$. Como $(-2y+13t, y, -4t, t) = y(-2, 1, 0, 0,)+ t(13, 0, -4, 1)$, temos que o subespaço $W^\perp$ é gerado pelos vetores $(-2, 1, 0, 0,)$ e $(13, 0, -4, 1)$, que são LI . Logo, $\{(-2, 1, 0, 0,), (13, 0, -4, 1)\}$ é uma base de $W^\perp$.

Você se lembra? Este método para determinar um conjunto de geradores sempre fornece uma base do subespaço.

Exemplo 4

Dado $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$, vamos

a) escrever o vetor $(3, 2, 5)$, de $\mathbb{R}^3$ como uma soma de um vetor de U e um de $U^\perp$;

b) obter o vetor projeção ortogonal de $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sobre U e

c) escrever o vetor $v = (a, b, c)$, de $\mathbb{R}^3$, como soma de um vetor de U e um ortogonal a U.

Vamos obter uma base para U: um vetor de U pode ser escrito na forma $(x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$. Logo, os vetores $(1, 0, -1)$ e $(0, 1, -1)$ geram U e são LI. Logo, formam uma base de U. Precisamos ortonormalizar essa base. Para isso, aplicamos o método de Gram-Schmidt: Sejam $v_1 = (1, 0, -1)$ e $v_2 = (0, 1, -1)$. Seja $\{u_1, u_2\}$ a base ortonormal procurada. Então:

$$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}).$$
$$w_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = (0, 1, -1) - \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}) = (-\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}).$$
$$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \tfrac{2}{\sqrt{6}}(-\tfrac{1}{2}, 1, -\tfrac{1}{2}) = (-\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, -\tfrac{1}{\sqrt{6}}).$$

Podemos, agora, resolver o exercício:

a) $$\begin{aligned} proj_U(3, 2, 5) &= proj_{u_1}(3, 2, 5) + proj_{u_2}(3, 2, 5) = \\ &= -\tfrac{2}{\sqrt{2}}u_1 - \tfrac{4}{\sqrt{6}}u_2 = \\ &= (-1, 0, 1) + (\tfrac{2}{3}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{2}{3}) = \\ &= (-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{5}{3}). \end{aligned}$$

Daí, temos

$(3,2,5) - proj_U(3,2,5) = (3,2,5) - (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3}) = (\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})$.

Então

$$(3,2,5) = \underbrace{(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{3})}_{\in U} + \underbrace{(\frac{10}{3}, \frac{10}{3}, \frac{10}{3})}_{\in U^\perp}.$$

b)
$$\begin{aligned} proj_U(a,b,c) &= proj_{u_1}(a,b,c) + proj_{u_2}(a,b,c) = \\ &= \tfrac{a-c}{\sqrt{2}} u_1 + \left(\tfrac{-a+2b-c}{\sqrt{6}}\right) u_2 = \\ &= \left(\tfrac{2a-b-c}{3}, \tfrac{-a+2b-c}{3}, \tfrac{-a-b+2c}{3}\right). \end{aligned}$$

c)
$$(a,b,c) = \underbrace{(\frac{2a-b-c}{3}, \frac{-a+2b-c}{3}, \frac{-a-b+2c}{3})}_{\in U} + \underbrace{(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3}, \frac{a+b+c}{3})}_{\in U^\perp}.$$

Exemplo 5

Em $P_2(\mathbb{R})$, definimos o produto interno

$$< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)\, g(t) dt.$$

Vamos obter uma base ortonormal do subespaço $[3, 1-t]^\perp$.

Seja $p(t) = at^2 + bt + c \in [3, 1-t]^\perp$. Então

$< f(t), p(t) >= \int_0^1 3(at^2 + bt + c)dt = 0 \Rightarrow 2a + 3b + 6c = 0 \quad (1)$.

$< g(t), p(t) >= \int_0^1 (1-t)(at^2 + bt + c)t = 0 \Rightarrow a + 2b + 6c = 0 \quad (2)$.

O sistema linear formado pelas equações (1) e (2) possui soluções (a, b, c) tais que $a = -b; c = -b/6$. Logo, $p(t) = 6bt^2 - 6bt + b = b(6t^2 - 6t + 1), b \in \mathbb{R}$.

Ou seja, o vetor $6t^2 - 6t + 1$ gera o complemento ortogonal do subespaço $[3, 1-t]$. Assim, $\{6t^2 - 6t + 1\}$ é uma base de $[3, 1-t]^\perp$.

Resumo

Nesta aula estudamos o subespaço que é o complemento ortogonal de um outro. Na verdade, podemos definir o complemento ortogonal de qualquer subconjunto de um espaço euclidiano e provar que é um subespaço, mas quando partimos de um subsconjunto U que é, ele próprio, um subespaço, o caso fica muito mais interessante porque podemos escrever o espaço como soma direta de U e seu complemento ortogonal. Podemos, também, decompor um vetor do espaço em duas parcelas, sendo cada uma delas a projeção ortogonal do vetor em um dos subespaços: U e $U^{\perp}$.

Exercícios

1. Dado $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y - 2z = 0\}$,

   a) Escreva o vetor $(1, 2, 4)$, de $\mathbb{R}^3$ como uma soma de um vetor de U e um de $U^{\perp}$.

   b) Obtenha o vetor projeção ortogonal de $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ sobre U.

2. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $u = (1, 2, 3, -1), v = (2, 4, 7, 2)$ e $= (1, 1, 1, 1)$. Encontre uma base ortonormal para $W^{\perp}$.

3. Considere o seguinte produto interno em $\mathbb{R}^4$:

   $$< (a, b, c, d), (x, y, z, w) >= 2ax + by + cz + dw,$$

   para $(a, b, c, d), (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$. Determine uma base do subespaço ortogonal de $U = [(1, 2, 0, -1), (2, 0, -1, 1)]$.

4. Em $M_2(\mathbb{R})$, a relação

   $$< A, B >= a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22},$$

   onde $A = (a_{1j})$, $B = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$, é um produto interno. Considere o seguinte subespaço de $M_2(\mathbb{R})$:

   $$W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} ; x - y + z = 0 \right\}.$$

   a) Determine uma base de W.

   b) Determine uma base de $W^{\perp}$.

5. Sejam $\mathbb{R}^4$ e $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x + y - z + 2w = 0\}$. Determine uma base ortonormal de U de uma de $U^{\perp}$.

Auto-avaliação

Bem, chegamos ao final do primeiro módulo. A próxima aula revê a teoria apresentada ao longo das 16 primeiras aulas, em forma de exercícios. Antes de partir para ela, porém, certifique-se de ter apreendido a técnica e, principalmente, o significado do que estudamos nesta aula. Se sentir qualquer dificuldade ao resolver os exercícios ou ao estudar os exemplos, entre em contato com o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. a) $(1,2,4) = (1, \frac{16}{5}, \frac{8}{5}) + (0, -\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$

   b) $proj_U(a,b,c) = (a, \frac{4a+2c}{5}, \frac{2b+c}{5})$

2. Uma base de $W^\perp$: $\{\frac{(-7,10,-4,1)}{\sqrt{166}}\}$

3. (Atenção para o produto interno, diferente do usual!!)

   Uma base de $U^\perp$: $\{(-1,1,-4,0),(1,0,6,2)\}$

4. a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

   b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

5. Uma base de U : $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0), (-\frac{2}{\sqrt{21}}, -\frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}, \frac{3}{\sqrt{21}})\}$.
   Uma base de $U^\perp$: $\{\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{2}{\sqrt{7}})\}$

Aula 17 – Exercícios Resolvidos

Objetivo

Pré-requisito: aulas 1 a 16.

Fazer uma revisão do primeiro módulo, através da resolução de exercícios variados.

Nesta aula, damos uma pequena pausa na apresentação da teoria para exercitar o conteúdo já estudado. Você tem uma lista de exercícios para tentar resolver e conferir com as resoluções, que se encontram após os enunciados.

A idéia é que você primeiro tente resolvê-los, recorrendo, se necessário, às anotações de aula, e só depois de resolver, compare sua solução com a que apresentamos aqui.

Caso haja alguma discordância ou dúvida, procure o tutor. O objetivo principal é que você siga em frente, iniciando o segundo módulo bem seguro do conteúdo estudado no primeiro.

Exercícios

1. Sendo $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$, $C_{2\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & a & -3 & 2 \\ 0 & -1 & b & 6 \end{pmatrix}$, determine a e b para que a matriz $(2A+B)C$ seja igual a $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 & 4 \\ 14 & 3 & -1 & 38 \\ 2 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$.

2. Dada $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$, calcule:

   a) A^2
   b) A^T
   c) $det\, A$
   d) $det\, A^T$
   e) A^{-1}
   f) $(A^T)^{-1}$
   g) $det\, A^{-1}$
   h) $f(A)$, onde $f(x) = x^2 + 2x - 11$

3. Classifique em V (verdadeira) ou F (Falsa) cada sentença abaixo:

   a) $(A+B)^T = A^T + B^T$
   b) $(AB)^T = A^T\,B^T$
   c) $(A+B)^{-1} = A^{-1}\,B^{-1}$
   d) $(AB)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$
   e) $det\,A = det\,A^T$
   f) $det\,A^{-1} = -det\,A$
   g) Se $A \in M_n(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R},\ det\,\alpha A = n\alpha det\,A$

4. Determine $a \in \mathbb{R}$ para que exista a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & a \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

   Caso exista, calcule A^{-1}, para $a = 8$.

5. (Provão - MEC - 2002)
   A e B são matrizes reais $n \times n$, sendo $n \geq 2$ e α, um número real. A respeito dos determinantes dessas matrizes, é correto afirmar que:

   (a) $det\,(AB) = det\,A.det\,B$
   (b) $det\,(A+B) = det\,A + det\,B$
   (c) $det\,(\alpha A) = \alpha det\,A$
   (d) $det\,A \geq 0$, se todos os elementos de A forem positivos
   (e) se $det\,A = 0$ então A possui duas linhas ou colunas iguais

6. Calcule $det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ por triangularização.

7. Classifique e resolva, por escalonamento, cada um dos sistemas lineares abaixo:

   $S_1 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ $\quad S_2 : \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$ $\quad S_3 : \begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x - 3y + 5z = 5 \end{cases}$

8. Discuta o sistema linear $\begin{cases} 2x + 3y + az = 3 \\ x + y - z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$, segundo os valores do parâmetro real a.

9. Determine as condições sobre a, b e c que tornam compatível o sistema $\begin{cases} x - 2y + 7z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 2x + 6y - 11z = c \end{cases}$.

10. Dado um espaço vetorial V, mostre que $W \subset V$, não vazio, é subespaço vetorial de V se, e somente se, $au + bv \in W, \forall u, v \in W, \forall a, b \in \mathbb{R}$.

11. Verifique se os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$ são LD ou LI:

    a) $(1, 1, -1), (2, 1, 0)$ e $(-1, 1, 2)$

    b) $(1, 2, 0), (3, 1, 2)$ e $(2, -1, 2)$

12. Obtenha um conjunto de geradores do subespaço U, de V, em cada caso:

    a) $V = \mathbb{R}^2$; $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x = 3y\}$

    b) $V = \mathbb{R}^3$; $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 3y\}$

    c) $V = \mathbb{R}^4$; $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x = 3y \text{ e } z - t = 0\}$

13. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, -3, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 1)$.

14. Encontre uma base e dê a dimensão do subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ gerado por $u = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -11 & 7 \end{bmatrix}$.

15. Dados $U = \{(x, x, z); x, z \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, 0, x); x \in \mathbb{R}\}$, suespaços de $\mathbb{R}^3$, encontre uma base e determine a dimensão dos subespaços $U \cap W$ e $U + W$, de $\mathbb{R}^3$.

16. Determine a sabendo que o vetor $v = (1, -2, a, 4) \in \mathbb{R}^4$ tem módulo igual a $\sqrt{30}$.

17. Considere os vetores $u = (1, -2, 1)$ e $v = (0, -3, 4)$, de $\mathbb{R}^3$. Determine:

    a) $2u - v$

    b) $||u||$

    c) o versor de v

    d) $< u, v >$

    e) $d(u, v)$ (a distância de u e v)

18. Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $u = (a, a+2, 1)$ e $v = (a+1, 1, a)$, de $\mathbb{R}^3$, sejam ortogonais.

19. Dadas as matrizes $u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$, em $M_2(\mathbb{R})$, a expressão $< u, v >= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$ define um produto interno no espaço $M_2(\mathbb{R})$.
    Dados os vetores $u = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $v = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, determine

    a) $||u + v||$

    b) o ângulo entre u e v

20. Em $P_2(\mathbb{R})$, definimos o produto interno de dois vetores $p(t) = a_1t^2 + b_1t + c_1$ e $q(t) = a_2t^2 + b_2t + c_2$ como $< p, t >= a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2$. Calcule $< p(t), q(t) >$ no caso em que $p(t) = 2t^2 - 3t + 1$ e $q(t) = t^2 + 5t - 2$.

21. Determinar o versor de um vetor v é um processo também conhecido por *normalização* de v. Normalize cada um dos vetores abaixo, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$:

    a) $u = (1, 2, -1)$

    b) $v = (1/2, 2/3, 1/2)$

22. Em $P_3(\mathbb{R})$, considere o produto interno

$$< f(t), g(t) >= \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

    a) Calcule o produto interno de $f(t) = t - 1$ por $g(t) = 3t^3 + 2t + 1$.

    b) Calcule $||p(t)||$, onde $p(t) = t^2 - t$.

    c) Determine $a \in \mathbb{R}$ para que $f(t) = at^2 + 1$ e $g(t) = t - 2$ sejam ortogonais.

23. Mostre que se u é ortogonal a v então todo múltiplo escalar de u também é ortogonal a v.

24. Encontre um vetor unitário, ortogonal, simultaneamente, a $v_1 = (2, 1, 1)$ e $v_2 = (1, 3, 0)$, em $\mathbb{R}^3$.

25. Sejam u, v vetores de um espaço euclidiano V, com v não nulo. Mostre que o vetor $w = u - \frac{< u, v >}{||v||^2} v$ é ortogonal a v. (O vetor w é a projeção ortogonal de u na direção de v, obtido sem a hipótese de v ser unitário.)

26. Determine $a \in \mathbb{R}$ tal que os vetores $u = (a, a+2, 1)$ e $v = (a+1, 1, a)$, de $\mathbb{R}^3$, sejam ortogonais.

27. Obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir da base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1 = (1, 1, -1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (-1, 1, 1)$.

28. Em $\mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, determine a projeção ortogonal do vetor $u = (1, 2, -3)$ sobre o subespaço gerado pelos vetores $v_1 = (1, 0, 2)$ e $v_2 = (0, 1, 0)$.

29. Considere $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}$, subespaço de $\mathbb{R}^3$.

    a) Determine uma base ortonormal de U.

    b) Determine uma base ortonormal de $U^\perp$.

    c) Escreva o vetor $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ como soma de um vetor de U e um de $U^\perp$.

Resolução dos exercícios

R1. $(2A + B)C) = \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 2 & a & -3 & 2 \\ 0 & -1 & b & 6 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & a & -3 & 2 \\ 0 & -1 & b & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2a & -6 & 4 \\ 14 & 7a-4 & -21+4b & 38 \\ 2 & a-1 & -3+b & 8 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$\begin{cases} 2a = 2 \\ 7a - 4 = 3 \\ a - 1 = 0 \\ -21 + 4b = -1 \\ -3 + b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases}$$

R2. a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+8 & 2-6 \\ 4-12 & 8+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix}.$

b) $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

c) $det\, A = -3 - 8 = -11$

d) $det\, A^T = det\, A = -11$

e) A^{-1} :

$$\begin{array}{rrcrrl}
1 & 2 & | & 1 & 0 & \\
4 & -3 & | & 0 & 1 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\
 & & | & & & \\
1 & 2 & | & 1 & 0 & \\
0 & -11 & | & -4 & 1 & L_2 \leftarrow -1/11 L_2 \\
 & & | & & & \\
1 & 2 & | & 1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
0 & 1 & | & 4/11 & -1/11 & \\
 & & | & & & \\
1 & 0 & | & 3/11 & 2/11 & \\
0 & 1 & | & 4/11 & -1/11 &
\end{array}.$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/11 & 2/11 \\ 4/11 & -1/11 \end{pmatrix}$.

f) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 3/11 & 4/11 \\ 2/11 & -1/11 \end{pmatrix}$

g) $det\, A^{-1} = (det\, A)^{-1} = (11)^{-1} = -1/11$

h) $f(A) = A^2 + 2A - 11I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Neste caso, dizemos que a matriz A é um *zero* da função f.

R3. a) (V)

b) (F): $(AB)^T = B^T\, A^T$

c) (F): não há fórmula para a inversa da soma

d) (V)

e) (V)

f) (F): $det\, A^{-1} = (det\, A)^{-1} = \frac{1}{det\, A}$. Justamente porque o determinante da matriz A aparece no denominador é que só existe a inversa de A se seu determinante for diferente de zero.

g) (F): A cada linha de A que é multiplicada pelo escalar α, o determinante fica multiplicado por α. Uma matriz quadrada de ordem n possui n linhas. Logo, o determinante de A multiplicada por α é igual ao determinante de A multiplicado por α, n vezes. Ou seja, $det\, \alpha A = \alpha^n det\, A$.

R4. Para que exista a inversa de A, o seu determinante não pode ser nulo. Vamos calcular $det\, A$, pelo método de Sarrus:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & a \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (3-8)-(4-a) = a-9$. Queremos $det\, A \neq 0$, isto é, $a - 9 \neq 0 \Rightarrow a \neq 9$.

Podemos calcular a inversa de A para $a = 8$:

$$\begin{array}{rrrcrrrl}
1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & \\
4 & 1 & 8 & | & 0 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\
2 & -1 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\
 & & & | & & & & \\
1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & | & -4 & 1 & 0 & \\
0 & -1 & -1 & | & -2 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\
 & & & | & & & & \\
1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & | & -4 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & -1 & | & -6 & 1 & 1 & L_3 \leftarrow -L_3 \\
 & & & | & & & & \\
1 & 0 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\
0 & 1 & 0 & | & -4 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 & \\
 & & & | & & & & \\
1 & 0 & 0 & | & -11 & 2 & 2 & \\
0 & 1 & 0 & | & -4 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & | & 6 & -1 & -1 &
\end{array}$$

Logo, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

R5. A opção correta é a letra (a).

R6. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_4 \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} =$

$= (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} = (-) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{6}L_3 \\ \\ \end{matrix} =$

$= (-)(6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 2 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{matrix} = (-)(6) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{64}{6} \end{vmatrix} =$

$= (-)(6)(1)(1)(1)\left(-\frac{64}{6}\right) = 64.$

R7. a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 \leftrightarrow L_3 \; \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$. Obtemos o sistema equivalente:

$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 5z = 0 \\ 11z = 0 \end{cases}$, que é compatível determinado, com conjunto-solução $\{(0,0,0)\}$.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \\ \\ \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obtemos o sistema equivalente: $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -5y + 3z = 0 \end{cases}$, que é compatível e indeterminado. Fazendo $y = \frac{3}{5}z$, na segunda equação, e substituindo na primeira, obtemos $x = -\frac{1}{5}z$. Logo, as soluções do sistema são os vetores de $\mathbb{R}^3$ da forma $(-z/5, 3z/5, z)$, para $z \in \mathbb{R}$.

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -3 & 5 & | & 5 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & -2 & 2 & | & 3 \end{bmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 0 & 2 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{bmatrix}$. Obtemos o sistema equivalente $\begin{cases} x - y + 3z = 2 \\ 2y - 2z = -1 \\ 0 = 2 \end{cases}$, que é incompatível. Logo, o conjunto-solução do sistema dado é vazio.

R8. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & a & | & 3 \\ 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 1 & a & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & a & | & 3 \\ 1 & a & 3 & | & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & | & 1 \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - (a-1)L_2 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 4-(a-1)(a+2) & | & 1-(a-1) \end{bmatrix}$.

A terceira equação pode ser escrita $-(a-2)(a+3)z = -(a-2)$. Note que a expressão do primeiro membro se anula para $a = 2$ ou $a = -3$. Então,

Se $a = 2$, a terceira equação fica $0 = 0$ e o sistema é, nesse caso, compatível e indeterminado.
Se $a = -3$, a terceira equação fica $0z = 5$, o que torna o sistema incompatível.
Finalmente, se $a \neq 2$ e $a \neq -3$, a terceira equação nem é eliminada nem é impossível. Nesse caso, o sistema é compatível e determinado.

R9. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & | & a \\ 1 & 2 & -3 & | & b \\ 2 & 6 & -11 & | & c \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & | & a \\ 0 & 4 & -10 & | & b-a \\ 0 & 10 & -25 & | & c-2a \end{bmatrix}$

$L_2 \leftarrow 1/4L_2 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & | & a \\ 0 & 1 & -5/2 & | & (b-a)/4 \\ 0 & 10 & -25 & | & c-2a \end{bmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - 10L_2 \rightarrow$

$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 & | & a \\ 0 & 1 & -5/2 & | & (b-a)/4 \\ 0 & 0 & 0 & | & c-2a-10(\frac{b-a}{4}) \end{bmatrix}$. Para que o sistema seja compatível é necessário ter $c-2a-10(\frac{b-a}{4}) = 0$, ou seja, $a-5b+2c = 0$.

R10. Vimos que um subconjunto W de um espaço vetorial V é subespaço vetorial de V se (i) $W \neq \emptyset$; (ii) $av \in W, \forall v \in W, \forall a \in \mathbb{R}$ e (iii) $u+v \in W, \forall u, v \in W$.

($\Rightarrow$) Vamos supor que W é subespaço. Então W é não-vazio. Além disso, dados $a, b \in \mathbb{R}$, $u, v \in W$, por (ii), temos que $au \in W$ e $bv \in W$. Por (iii), $au + bv \in W$.

($\Leftarrow$) Vamos supor, agora, que W é não-vazio e $au + bv \in V, \forall u, v \in V, \forall a, b \in \mathbb{R}$. Fazendo $b = 0$, temos a validade da propriedade (ii) da definição de subespaço. Fazendo $a = b = 1$, temos a validade de (iii).

R11. a) $a_1(1,1,-1) + a_2(2,1,0) + a_3(-1,1,2) = o_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ -a_1 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obtemos, assim, o sistema equivalente:

$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ -a_2 + 2a_3 = 0 \\ 5a_3 = 0 \end{cases}$, cuja solução é dada por $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Logo, os vetores v_1, v_2, e v_3 são LI.

b) $a_1(1,2,0) + a_2(3,-1,2) + a_3(2,-1,2) = o_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 + a_2 - a_3 = 0 \\ 2a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow -1/5L_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2L2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obtemos, assim, o sistema equivalente $\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$, que é indeterminado. Logo, os vetores v_1, v_2 e v_3 são LD.

R12. a) $v \in U \Rightarrow v = (3y, y) = y(3,1); y \in \mathbb{R}$. Um conjunto gerador de U é $\{(3,1)\}$.

b) $v \in U \Rightarrow v = (3y, y, z) = y(3,1,0) + z(0,0,1); y, z \in \mathbb{R}$. Um conjunto gerador de U é $\{(3,1,0),(0,0,1)\}$.

c) $v \in U \Rightarrow v = (3y, y, t, t) = y(3,1,0,0) + t(0,0,1,1); y, t \in \mathbb{R}$. Um conjunto gerador de U é $\{(3,1,0,0),(0,0,1,1)\}$.

R13. Um vetor $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pertence ao subespaço gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3 se v pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores. Isto é, queremos que existam a, b, c reais tais que $(x, y, z) = a(1,-1,1) + b(2,-3,1) + c(0,1,1)$. Em outras palavras, queremos que o sistema linear $\begin{cases} a + 2b = x \\ -a - 3b + c = y \\ a + b + c = z \end{cases}$ seja compatível.

Vamos escalonar o sistema:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 0 & x \\ -1 & -3 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y + x \\ 0 & -1 & 1 & z - x \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y + x \\ 0 & 0 & 0 & z - x - (y + x) \end{array}\right]$$

. Para que o sistema admita solução devemos ter $z - x - (y + x) = 0$, isto é, o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1, v_2 e v_3 é $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$.

R14. Queremos caracterizar as matrizes de $M_2(\mathbb{R})$ que podem ser escritas como combinação linear de u, v e w:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = au + bv + cw = \begin{bmatrix} a + 3b + 3c & -2a + 2b + 10c \\ 3a - b - 11c & a + 5b + 7c \end{bmatrix}.$$

Em outras palavras, queremos que seja compatível o sistema:

$$\begin{cases} a + 3b + 3c = x \\ -2a + 2b + 10c = y \\ 3a - b - 11c = z \\ a + 5b + 7c = t \end{cases}$$

. Escalonando esse sistema temos:

$$\left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 3 & x \\ -2 & 2 & 10 & y \\ 3 & -1 & -11 & z \\ 1 & 5 & 7 & t \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 3 & x \\ 0 & 8 & 16 & y+2x \\ 0 & -10 & -20 & z-3x \\ 0 & 2 & 4 & t-x \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_4 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 & t-x \\ 0 & -10 & -20 & z-3x \\ 0 & 8 & 16 & y+2x \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3+5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-4L_2 \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 3 & 3 & x \\ 0 & 2 & 4 & t-x \\ 0 & 0 & 0 & z-3x+5(t-x) \\ 0 & 0 & 0 & y+2x-4(t-x) \end{array}\right].$$

Temos que ter, então:

$z-3x+5(t-x)=0$ e $y+2x-4(t-x)=0$. Escrevendo y e z em função das variáveis livres x e t, temos:

$y=-6x+4t$ e $z=8x-5t$. Logo, uma matriz do subespaço procurado é da forma

$$\begin{bmatrix} x & -6x+4t \\ 8x-5t & t \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}; x,t \in \mathbb{R}.$$

Concluimos, então, que $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base do subespaço e sua dimensão é 2.

R15. Seja $v=(a,b,c) \in U \cap W$. Então $\begin{cases} a=b \\ a=c \\ b=0 \end{cases}$ Logo, $a=b=c=0$, o que implica $U \cap W = \{(0,0,0)\}$. Então $dim\,(U \cap W)=0$. Como $dim\,U=2$, pois $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de U e $dim\,W=1$, pois $\{(1,0,1)\}$ é uma base de W, temos $dim\,U + dim\,W = 3 = dim\mathbb{R}^3$. Logo, $\mathbb{R}^3$ é a soma direta dos subespaços U e W. Como base de $\mathbb{R}^3$ podemos considerar a canônica ou a união das bases mencionadas acima, de U e W.

R16. $||v|| = \sqrt{<v,v>} = \sqrt{30} \Rightarrow \sqrt{1+4+a^2+16} = \sqrt{30} \Rightarrow 21+a^2 = 30 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 9.$

R17. a) $2u-v=(2,-4,2)-(0,-3,4)=(2,-1,-2)$.

b) $||u|| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

c) versor de $v = \frac{v}{||v||} = \frac{(0,-3,4)}{\sqrt{9+16}} = \left(0, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

d) $< u, v >= 0 + 6 + 4 = 10.$

e) $d(u, v) = ||u - v|| = ||(1, 1, -3)|| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}.$

R18. $< u, v >= 0 \Rightarrow a(a + 1) + (a + 2) + a = 0 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ ou $a = -2.$

R19. a) $||u + v|| = \left|\left|\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{1 + 9 + 16 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}.$

b) $cos\,\theta = \frac{<u,v>}{||u||.||v||} = \frac{-2+2+3+12}{\sqrt{1+4+1+9}\sqrt{4+1+9+16}} = \frac{15}{\sqrt{15}\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^o.$

R20. $< p(t), q(t) >= 2 - 15 - 2 = -15.$

R21. a) $\frac{u}{||u||} = \frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

b) $\frac{v}{||v||} = \frac{(1/2,2/3,1/2)}{\sqrt{17/18}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{17}}(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}}, \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}\right).$

R22. a) $\int_0^1 (t - 1)(3t^3 + 2t + 1)dt = \int_0^1 (3t^4 - 3t^3 + 2t^2 - t - 1)dt = \frac{3t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - t\Big]_0^1 = \frac{3}{5} - \frac{3}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{59}{60}.$

b) $||p(t)|| = \sqrt{< p(t), p(t) >} = \sqrt{\int_0^1 (p(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (t^2 - t)^2 dt} = \sqrt{\int_0^1 (t^4 - 2t^3 + t^2)dt} = \sqrt{\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right)\Big]_0^1} = \sqrt{\frac{1}{30}}.$

c) $< f(t), g(t) >= 0 \Rightarrow \int_0^1 (f(t).g(t))dt = 0 \Rightarrow \int_0^1 (at^3 - 2at^2 + t - 2)dt = 0 \Rightarrow \left(\frac{at^4}{4} - \frac{2at^3}{3} + \frac{t^2}{2} - 2t\right)\Big]_0^1 = 0 \Rightarrow \frac{a}{4} - \frac{2a}{3} + \frac{1}{2} - 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{18}{5}.$

R23. Se u é ortogonal a v então $< u, v >= 0$. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então $< \alpha u, v >= \alpha < u, v >= \alpha.0 = 0$. Logo, αu também é ortogonal a v, para qualquer escalar α.

R24. Queremos um vetor $v = (a, b, c)$ tal que $< v, v_1 >= 0 =< v, v_2 >$. Isto leva a $\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$. A solução desse sistema é qualquer vetor de $\mathbb{R}^3$ da forma $(-3b, b, 5b)$, para $b \in \mathbb{R}$.

R25. $\left\langle u - \frac{<u,v>}{||v||^2}v, v \right\rangle =< u, v > - \left\langle \frac{<u,v>}{||v||^2}v, v \right\rangle =< u, v > - \frac{<u,v>}{||v||^2}||v||^2 = \\ =< u, v > - < u, v >= 0.$

R26. $a(a + 1) + (a + 2) + a = 0 \Rightarrow a^2 + 3a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$ ou $a = -2.$

R27. Seja $\{u_1, u_2, u_3\}$ a base ortonormal procurada. Então:
$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}}$.
$w_2 = v_2 - proj_{u_1}v_2 =< v_2, u_1 > u_1 = 0.u_1$, o que indica que os vetores u_1 e v_2 são ortogonais. Basta normalizar o vetor v_2:
$u_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$.
$w_3 = v_3 - proj_{u_1}v_3 - proj_{u_2}v_3 = v_3 - < v_3, u_1 > u_1 - < v_3, u_2 > u_2 = (-1, 1, 1) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
$u_3 = \frac{w_3}{||w_3||} = \frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.
Resposta:
$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$.

R28. Sendo S o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores v_1 e v_2, sabemos que $proj_S u = proj_{u_1}u + proj_{u_2}u$, onde $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortonormal de S. Verificamos que os vetores v_1 e v_2 são LI (um não é múltiplo do outro) e, portanto, formam uma base de S. Além disso, o produto interno deles é zero, logo, formam uma base ortogonal. Precisamos apenas normalizá-la. Logo, $u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{(1,0,2)}{\sqrt{5}}$ e $u_2 = v_2$, pois vetor v_2 é unitário.
Então:
$proj_S u =< u, u_1 > u_1+ < u, u_2 > u_2 = \frac{-5}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2(0, 1, 0) = (-1, 0, -2) + (0, 2, 0) = (-1, 2, -2)$.

R29. a) Um vetor de U é da forma $(y + z, y, z) = y(1, 1, 0) + z(1, 0, 1)$. Assim, $\{v_1, v_2\}$ com $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 1)$ é uma base de U. Vamos aplicar o método de Gram-Schmidt para ortonormalizar essa base. Seja $\{u_1, u_2\}$ a base ortonormal procurada. Então
$u_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.
$w_2 = v_2 - < v_2, u_1 > u_1 = (1, 0, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$.
$u_2 = \frac{w_2}{||w_2||} = \frac{2}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.
Logo, $\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)\}$ é uma base ortonormal de U.

b) Um vetor $v = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ pertence a $U^\perp$ se $< v, v_1 >=< v, v_2 >= 0$. Isto leva a $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$. Logo, $v = (x, -x, -x) = x(1, -1, -1)$, para $x \in \mathbb{R}$. Vamos normalizar o vetor $(1, -1, -1)$, obtendo o vetor $u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Então, $\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\}$ é uma base ortonormal de $U^\perp$.

c) Queremos escrever $(a,b,c) = u + w$, com $u \in U$ e $w \in U^{\perp}$. Para isso, temos que determinar o vetor u, projeção ortogonal de $v = (a,b,c)$ sobre o subespaço U:

$u = proj_U v = proj_{u_1} v + proj_{u_2} v = < v, u_1 > u_1 + < v, u_2 > u_2 = \frac{a+b}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) + \frac{a-b+2c}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, 0\right) + \left(\frac{a-b+2c}{6}, \frac{-a+b-2c}{6}, \frac{2a-2b+4c}{6}\right) = \left(\frac{2a+b+c}{3}, \frac{a+2b-c}{3}, \frac{a-b+2c}{3}\right)$.

Calculando $v - proj_v U = (a,b,c) - \left(\frac{2a+b+c}{3}, \frac{a+2b-c}{3}, \frac{a-b+2c}{3}\right) = \left(\frac{a-b-c}{3}, \frac{-a+b+c}{3}, \frac{-a+b+c}{3}\right)$.

Logo, a decomposição do vetor (a,b,c) numa soma de um vetor de U com um de $U^{\perp}$ é dada por

$$(a,b,c) = \underbrace{\left(\frac{2a+b+c}{3}, \frac{a+2b-c}{3}, \frac{a-b+2c}{3}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(\frac{a-b-c}{3}, \frac{-a+b+c}{3}, \frac{-a+b+c}{3}\right)}_{\in U^{\perp}}.$$