Matemática Discreta – EP11 – 2007/2

Observações: Caro aluno, aqui está o EP10, referente as aulas 23–25 do Módulo 2. Ele contém:

- alguns comentários sobre o conteúdo abordado;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- dicas de um texto aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Sobre o conteúdo:

As aulas 23–25 tratam dos seguintes conteúdos —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática:

- Teorema de Bayes;
- Variável aleatória e valor esperado;
- Distribuição binomial.

Estes conteúdos, junto com os conteúdos complementam os das aulas 17–22. Você deve, realmente, dominar esses temas e saber resolver os exercícios das aulas 23–25, estuando detalhadamente os gabaritos que aparecem nas páginas 138–144 do Módulo.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 23: todos os exercícios.
- Aula 24: todos os exercícios.
- Aula 24: todos os exercícios.

Informações extras:

Para mais informações sobre a vida e a importância de Thomas Bayes, bem como uma descrição de seu famoso teorema, recomendamos o artigo:

S. D. pena. Thomas Bayes: o 'cara'! *Ciência Hoje*, **228**, vol.38, 22–29, Julho, 2006.

Alguns exercícios para fixação:

1. Considere um espaço amostral Ω e dois eventos A e B de Ω. Sabendo-se que $P(A) = 0,2$, $P(A \cup B) = 0,8$ e que A e B são independentes, determine $P(B)$.
2. Sejam Ω um espaço amostral e A, B, C eventos de Ω com $P(A) > 0$. Prove que:
   (a) $P(\emptyset|A) = 0$.
   (b) $P(\Omega|A) = 1$.
   (c) $0 \leq P(B|A) \leq 1$.
   (d) Se $B \cap C = \emptyset$, então $P((B \cup C)|A) = P(B|A) + P(C|A)$.

3. O exercício por excelência deste EP10 é estudar detalhadamente e resolver as questões propostas nas aulas 23–25 do Módulo 2.

Soluções comentadas:

1. Para facilitar, vamos denotar $P(B)$ por x.
   Pela Regra da Adição, temos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
   Como A e B são independentes, temos também que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
   Assim, $0,8 = 0,2 + x - 0,2x$, o que fornece $0,8x = 0,6$, ou seja, $x = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

2. É só aplicar a definição de probabilidade condicional.
   (a) $P(\emptyset|A) = \dfrac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(\emptyset)}{P(A)} = \dfrac{0}{P(A)} = 0$.
   (b) $P(\Omega|A) = \dfrac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$.
   (c) Como $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A)$, temos: $0 \leq \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$. Isto é, $0 \leq P(A|B) \leq 1$.
   (d) Observe que como $B \cap C = \emptyset$, temos que $(B \cap A) \cap (C \cap A) = \emptyset$. Assim, temos: $P((B \cup C)|A) = \dfrac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P((B \cap A) \cup (C \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(B \cap A}{P(A)} + \dfrac{P(C \cap A)}{P(A)} = P(B|A) + P(C|A)$.

Qualquer sugestão ou observação que você queira fazer, por favor, entre em contato pelo email petrucio@cos.ufrj.br.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF