Matemática Discreta – EP14 – 2007/2

Observações: Caro aluno, este é o terceiro e último EP de uma série especial. Ele contém uma seleção de questões de *Probabilidades* que foram cobradas nas APs de 2005 e 2006. Meu objetivo, ao formular este tipo de EP, é dar a você uma amostra do grau de dificuldade que você enfretará ao resolver as questões da(s) próxima(s) AP(s). Ele contém:

- uma dica de como estudar para as avaliações, usando este EP;
- uma seleção das questões que foram cobradas nas APs de 2005 e 2006;
- um gabarito com as soluções utilizadas como parâmetro para a correção.

Como estudar:

1. Leia o enunciado da questão cuidadosamente, separando, de um lado, os dados e, do outro, aquilo que foi perguntado;
2. Faça uma lista dos conceitos que, na sua opinião podem ser utilizados na solução da questão (se necessário, revise estes conceitos);
3. Elabore uma solução para a questão e escreva-a, tentando atingir o máximo de clareza;
4. Confira a sua *resposta* com a do gabarito;
5. *Se estiver correta*, leia atentamente a solução do gabarito e confronte-a com a solução que você apresentou (melhore sua redação, se achar necessário);

   Se não, não leia a solução do gabarito mas pense novamente na questão e tente elaborar uma solução que leve ao resultado que, agora, você já conhece;
6. Procure os tutores e colegas da disciplina para trocar informações, se familiarizar com outras idéias e superar suas dificuldades.

Questões selecionadas:

1. **(2005/1)** Considere os objetos a, b, c, d e e. Um experimento consiste em *escolher aleatóriamente uma permutação destes objetos e anotar a permutação escolhida.* Considere os seguintes eventos do espaço amostral Ω:

$$A = \{p \in \Omega : a \text{ ocupa a primeira e } b \text{ ocupa a terceira posição em } p\},$$

$$B = \{p \in \Omega : c \text{ ocupa a segunda e } d \text{ ocupa a quinta posição em } p\},$$

e

$$C = \{p \in \Omega : b \text{ ocupa a primeira e } c \text{ ocupa a quarta posição em } p\}.$$

   (a) Determine o número de elementos de Ω.

   (b) Determine o número de elementos de A e o número de elementos de $A \cap B$.

   (c) Defina o evento $\overline{A}$ por meio de uma propriedade.

   (d) Calcule $P(A \cap C)$.

2. **(2005/1)** Joga-se um dado duas vezes seguidas. Calcular a probabilidade de se obter 2 na primeira jogada, sendo que a soma dos resultados obtidos é 7.

---

3. **(2005/1)** Uma moeda (que não cai de pé) é lançada duas vezes. Considere os seguintes eventos:

$$A = \text{o primeiro resultado é cara},$$

$$B = \text{o segundo resultado é cara},$$

e

$$C = \text{os dois resultados são iguais}.$$

   (a) Calcular $P(C)$, $P(C/A)$, $P(C/A \cap B)$ e $P(C/A \cup B)$.

   (b) Dentre os eventos A, B, $A \cap B$ e $A \cup B$, quais são, dois a dois, independentes.

---

4. **(2005/1)** Sejam $A = \{2, 3, 5, 6, 9, 13\}$, $B = \{x^y : x, y \in A\}$ e $C = \{x^y : x, y \in A \text{ e } x \neq y\}$.

   (a) (0,5) Quantos elementos B possui?

   (b) (0,5) Quantos elementos C possui?

   (c) (0,5) Quantos elementos de B são números pares?

   (d) (0,5) Um elemento de C é selecionado ao acaso. Qual a probabilidade de que ele seja um número ímpar?

---

5. **(2005/1)** Uma urna contém 10 bolas brancas, 15 pretas e 5 vermelhas.

   (a) (1,0) Se duas bolas são retiradas sucessivamente, *com reposição*, qual a probabilidade de que a primeira bola seja branca e a segunda seja preta?

   (b) (1,0) Idem, mas *sem reposição.*

---

6. **(2005/2)** As probabilidades de um marido e uma esposa estarem vivos daqui a 20 anos são de, respectivamente, 0.8 e 0.9. Considerando os eventos *o marido está vivo* e *a esposa está viva* como independentes, determine a probabilidade de, daqui a 20 anos:

   (a) (1,0) ambos estarem vivos;

   (b) (1,0) nenhum dos dois estar vivo;

   (c) (1,0) ao menos um dos dois estar vivo.

---

7. **(2005/2)** (2,0) Uma urna I contém 2 bolas brancas e 3 bolas pretas. Uma urna II contém 4 bolas brancas e 5 bolas pretas. Uma bola é transferida da urna I para a urna II e, então, uma bola é retirada da urna II. Qual é a probabilidade da bola ser branca?

---

8. **(2005/2)** (2,0) Sejam A, B e C eventos de um espaço amostral Ω. Dizemos que A, B e C são independentes, se eles são dois a dois independentes e verificam a seguinte igualdade:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Considere o seguinte experimento:

Dois dados são lançados, os números obtidos nas faces superiores são somados e o resultado é anotado.

Usando a definição acima, verifique se os seguintes eventos são independentes:

$$A: \text{o número anotado é par,}$$

$$B: \text{o número anotado é primo,}$$

$$C: \text{o número anotado é menor do que 10.}$$

---

9. **(2005/2)** (1,0) Dado o conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, considere o seguinte experimento:

Um elemento x de A é escolhido ao acaso e a proposiç ao "x é primo é escrita.

Qual é a probabilidade de ter-se escrito uma proposição falsa?

---

10. **(2006/1)** Considere 3 pessoas, Marcelo, Petrúcio e Wanderlei, que sentam-se lado-a-lado em um sofá. Considere os eventos (de acordo com a visão de uma pessoa que está olhando de frente para o sofá):

$$A: \text{Petrúcio está à direita de Marcelo,}$$

$$B: \text{Wanderlei está à direita de Marcelo.}$$

(a) (2,0) Qual a probabilidade dos dois eventos ocorrerem simultaneamente?

(b) (1,0) A e B são eventos independentes?

---

11. **(2006/1)** Numa urna, são depositadas 10 etiquetas, numeradas de 1 a 10. A seguir, 3 etiquetas são retiradas da urna, sem reposição.

(a) (1,5) Qual a probabilidade de que os números retirados sejam consecutivos?

(b) (1,0) O Professor Petrúcio elaborou, para um EP de MD, a seguinte generalização da questão acima:

n etiquetas numeradas de 1 a n, são depositadadas numa urna. 3 etiquetas são retiradas da urna, sem reposição. Qual a probabilidade de que os números retirados sejam consecutivos?

Ao resolver a questão, um aluno, x, obteve a resposta $\dfrac{(n-2)!}{3!n!}$ e um outro, y, obteve a resposta $\dfrac{3!(n-2)!}{n!}$. Algum dos dois está correto? Justifique sua resposta.

---

12. **(2006/1)** (1,0) Um número do conjunto $\{x \in N : 1 \leq x \leq 200\}$ é escolhido aleatoriamente. Qual a probabilidade de não ser um múltiplo de 10?

---

13. **(2006/1)** (1,5) Considere os eventos independentes A e B de um espaço amostral. Sabendo-se que $P(A) = 0,2$, $P(A \cup B) = 0,8$ e $P(B) = x$, determine o valor de x.

---

14. **(2006/1)** Numa gaveta há 10 pares de meias, mas ambos os pés de 1 dos pares estão rasgaddos. Retira-se da gaveta, ao acaso, 2 meias.

    (a) (1,0) Qual a probabilidade de retirarmos os 2 pés de meia rasgados?

    (b) (1,0) Qual a probabilidade de retirarmos 2 pés de meia não rasgados do mesmo par?

---

15. **(2006/1)** Em um plano, 12 pontos são escolhidos, de modo que 5, e somente 5, estão alinhados em uma reta.

    (a) (1,0) Quantos triângulos distintos podem ser formados com vértices em 3 quaisquer dos 12 pontos?

    (b) (1,0) Um aluno de MD respondeu a esta questão do seguinte modo:

    > *O conjunto de tais triângulos pode ser particionado em dois conjuntos:*
    >
    > - *o conjunto A dos triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto dos* 7 *pontos não alinhados;*
    > - *o conjunto B dos triângulos cujas bases têm vértices pertencentes ao conjunto dos* 5 *pontos alinhados e cujo outro vértice pertence ao conjunto dos pontos não alinhados.*
    >
    > *Assim, pelo PA, o número total de triângulos é dado por:* $C(7,3) + C(5,2) \times 7 = 105$.

    Aonde está o erro? Justifique a sua resposta.

---

16. **(2006/2)** Uma caixa contém nove etiquetas numeradas de 1 a 9, inclusive. Três etiquetas são retiradas da caixa, uma de cada vez, sem reposição.

    (a) (0,5) Descreva o espaço amostral Ω deste experimento e determine o número de elementos de Ω.

    (b) (1,0) Determine a probabilidade de que as etiquetas sejam, na ordem em que são retiradas, *ímpar*, *par* e *ímpar*, respectivamente.

    (c) (0,5) Determine a probabilidade de que as etiquetas sejam, na ordem em que são retiradas, *par*, *ímpar* e *par*, respectivamente.

    (d) (1,0) Determine a probabilidade de que duas etiquetas de mesma paridade sejam retiradas consecutivamente. Dizemos que duas etiquetas *são de mesma paridade* quando são ambas pares ou ambas ímpares.

---

17. **(2006/2)** Um baralho consiste de 52 cartas, sendo 13 de cada um dos naipes, *copas*, *espadas*, *ouros* e *paus*. Um jogador retira treze cartas, aleatoriamente, deste baralho e considera a *mão* formada por estas cartas, sem levar em conta a ordem em que são retiradas.

    (a) (0,5) Descreva o espaço amostral Ω deste experimento e determine o número de elementos de Ω.

    (b) (1,0) Determine a probabilidade do jogador retirar 7 cartas de copas, 2 cartas de espadas, 3 cartas de ouros e 1 carta de paus.

    (c) (1,0) Determine a probabilidade do jogador retirar todas as cartas de um mesmo naipe.

---

18. **(2006/2)** Considere 6 livros distintos de matemática e 6 livros distintos de física, arrumados em uma prateleira de uma biblioteca, considerando-se a ordem em que os livros estão dispostos.

    (a) (0,5) Determine o espaço amostral Ω deste experimento e determine o número de elementos de Ω.

    (b) (1,0) Determine a probabilidade de que os livros de matemática estejam antes dos livros de física.

    (c) (0,5) Determine a probabilidade de que 4 livros de física, previamente determinados, estejam lado a lado.

---

19. **(2006/2)** (1,5) Quantos anagramas podemos formar com a palavra $PROBLEMA$ nos quais as letras P, R e O ocorrem duas a duas separadas? Por exemplo, $\underline{P}B\underline{R}L\underline{O}EMA$ é um anagrama deste tipo mas $\underline{P}B\underline{RO}LEMA$ não é.

---

20. **(2006/2)** Um dado é viciado de maneira que a probabilidade de sair um certo número é diretamente proporcional ao seu valor. Por exemplo, o número 5 é 5 vezes mais provável de sair que o número 1. Determine a probabilidade:

    (a) (1,0) De cada evento simples;

    (b) (1,0) de sair um número primo, quando o dado é arremessado;

    (c) (1,0) de sair 2 sabendo que saiu um número primo.

Solucões das questões selecionadas:

---

1. (a) Cada elemento de Ω é uma permutação dos cinco objetos a, b, c, d, e. Assim, $n(\Omega) = P(5) = 5! = 120$.

    (b) Cada elemento de A é uma permutação dos cinco objetos a, b, c, d, e, da forma:

    $$a, x, b, y, z,$$

    onde x, y, z é uma permutação dos três objetos c, d, e. Assim, o número de elementos de A é $P(3) = 3! = 6$.

    Já um elemento de $A \cap B$ é uma permutação dos cinco objetos a, b, c, d, e, da forma:

    $$a, c, b, y, d,$$

    onde y só pode ser o objeto e. Assim, o número de elementos de $A \cap B$ é 1.

    (c) $\overline{A} = \{p \in \Omega : a$ não ocupa a primeira ou b não ocupa a terceira posição em $p\}$.

    (d) Cada elemento de $A \cap C$ deve ter, ao mesmo tempo, ocorrências de a e b na primeira posição. Assim, $n(A \cap C) = 0$ e $P(A \cap C) = 0$.

---

2. O espaço amostral para este experimento pode ser representado por:

    $$\Omega = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1).\}$$

    O evento obter 2 na primeira jogada pode ser representado por $A = \{(2, 5)\}$. Assim, a probabilidade é dada por $P(A) = 1/6$.

---

3. O espaço amostral para este evento pode ser representado por:

$$\Omega = \{(K,K),(K,C),(C,K),(C,C).\}$$

Cada um dos eventos em questão pode ser representado por:

$$A = \{(K,K),(K,C)\},$$

$$B = \{(K,K),(C,K)\},$$

e

$$C = \{(K,K),(C,C)\}.$$

Assim, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \{(K,K)\}$ e $A \cup B = \{(K,K),(K,C),(C,K)\}$.

(a) Temos o seguinte: $P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{1/4}{2/4} = \frac{1}{2}$, $P(C/A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{1/2}{2/4} = \frac{1}{2}$ e, finalmente, $P(C/A \cup B) =$.

---

4. (a) Observe que a cada elemento de B corresponde, de maneira única, uma base x e um expoente y, distinto de x, ambos escolhidos dentre os elementos de A. Para ser a base temos 6 possibilidades. Para ser o expoente temos 5 possibilidades. Assim, o total de elementos de A é dado por $6 \times 5 = 30$.

(b) Um elemento de b é par se, e somente se, sua base é 2 ou 6. Assim, para formar um elemento de B que é um número par temos 2 possibilidade para a base e 5 possibilidades para o expoente. Logo, o total de elementos de B que são números pares é $2 \times 5 = 10$.

(c) Cada elemento de C é composto de uma base x e um expoente y, ambos escolhidos dentre os elementos de A. Para ser a base temos 6 possibilidades. Para ser o expoente temos 6 possibilidades, já que repetições são admitidas. Assim, o total de elementos de C é dado por $6 \times 6 = 36$.

(d) Considere B como espaço amostral e os seguintes eventos:

$$X = \{x \in B : x \text{ é par}\}$$

e

$$Y = \{x \in B : x \text{ é ímpar}\}.$$

Pelos itens (a) e (b), temos que $P(X) = \frac{n(X)}{n(B)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Como X e Y são eventos complementares, temos que $P(Y) = 1 - P(X) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

---

5. Considere o espaço amostral

$$\Omega = \{b_1, \ldots, b_{10}, p_1, \ldots, p_{15}, v_1, \ldots, v_5\}$$

e os eventos *a bola retirada é branca* e *a bola retirada é preta*, representados por

$$X = \{b_1, \ldots, b_{10}\}$$

e

$$Y = \{p_1, \ldots, p_{15}\},$$

respectivamente.

(a) A probabilidade procurada é $P(X \cap Y)$. Como o experimento é com reposição, X e Y são eventos independentes. Assim, temos que $P(X \cap Y) = P(X)P(Y)$. Mas $P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ e $P(Y) = \frac{n(Y)}{n(\Omega)} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$. Assim, $P(X \cap Y) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.
(b) A probabilidade procurada também é $P(X \cap Y)$. Mas agora, como o experimento é sem reposição, X e Y não são eventos independentes, uma vez que a primeira retirada modifica o espaço amostral para o cálculo da probabilidade de Y. Assim, temos que $P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X)$, onde $P(Y|X)$ é a probabilidade de que a segunda bola retirada seja preta, dado que a primeira bola retirada era branca e não foi recolocada na urna. Como $P(X) = \frac{1}{3}$ e $P(Y|X) = \frac{15}{29}$, temos que $P(X \cap Y) = \frac{1}{3} \times \frac{15}{29} = \frac{5}{29}$.

---

6. Considere os eventos, que consideramos como independentes:

$$M: \text{o marido estará vivo daqui a 20 anos,}$$

$$E: \text{a esposa estará viva daqui a 20 anos.}$$

(a) Queremos calcular a probabilidade do evento:

$$M \cap E: \text{o marido estará vivo daqui a 20 anos e a esposa estará viva daqui a 20 anos.}$$

Pelas propriedades básicas da probabilidade, temos:

$$P(M \cap E) = P(M)P(E) \quad \text{Eventos independentes}$$

Assim, $P(M \cap E) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$.
(b) Queremos calcular a probabilidade do evento:

$$\overline{M} \cap \overline{E}: \text{o marido não estará vivo daqui a 20 anos e a esposa não estará viva daqui a 20 anos.}$$

Pelas propriedades básicas da probabilidade, temos:

$$\begin{aligned} P(\overline{M} \cap \overline{E}) &= P(\overline{M})P(\overline{E}) && \text{Eventos independentes} \\ &= (1 - P(M))(1 - P(E)) && \text{Eventos complementares} \end{aligned}$$

Assim, $P(\overline{M} \cap \overline{E}) = (1 - 0,8) \times (1 - 0,9) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$.
(c) Queremos calcular a probabilidade do evento:

$$M \cup E: \text{o marido estará vivo daqui a 20 anos ou a esposa estará viva daqui a 20 anos.}$$

Pelas propriedades básicas da probabilidade, temos:

$$P(M \cup E) = P(M) + P(E) - P(M \cap E) \quad \text{Probabilidade total}$$

Assim, $P(M \cup E) = 0,8 + 0,9 - 0,72 = 0,98$.

---

7. Considere os eventos:

$$A: \text{a primeira bola é branca,}$$

$$B: \text{a primeira bola é preta,}$$

$$C: \text{a segunda bola é branca.}$$

Queremos calcular a $P(C)$. Observe que C pode ser particionado em dois eventos independentes:

$$A \cap C: \text{a primeira é branca e a segunda bola é branca,}$$

$$B \cap C: \text{a primeira é preta e a segunda bola é branca.}$$

Pelas propriedades das probabilidades temos:

$$\begin{array}{rcll} P(C) & = & P(A \cap C) \cup P(B \cap C) & \\ & = & P(A \cap C) + P(B \cap C) & \text{Eventos independentes} \\ & = & P(A)P(C/A) + P(B)P(C/B) & \text{Probabilidade condicional} \end{array}$$

Assim, se calcularmo $P(A)$, $P(C/A)$, $+P(B)$ e $P(C/B)$, o problema estará resolvido.

Para calcular $P(A)$, note que na urna I, temos 2 bolas brancas em um total de 5 bolas. Logo, $P(A) = \dfrac{2}{5}$.

Para calcular $P(C/A)$, note que, transferindo uma bola branca da urna I para a urna II, na urna II, teremos 5 bolas brancas em um total de 10 bolas. Assim, $P(C/A) = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$.

Para calcular $P(B)$, note que na urna I, temos 3 bolas pretas em um total de 5 bolas. Logo, $P(B) = \dfrac{3}{5}$.

Para calcular $P(C/B)$, note que, transferindo uma bola preta da urna I para a urna II, na urna II, teremos 4 bolas brancas em um total de 10 bolas. Assim, $P(C/A) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$.

Finalmente, com os dados obtidos acima, teremos: $P(C) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{25} = \dfrac{12}{25}$.

---

8. A resposta é: não.

   Para ver isso, basta considerar o espaço amostral $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ e os dois eventos $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$. Observe que $A \cap B = \{2\}$.

   Assim, temos $P(A) = \dfrac{6}{11}$, $P(B) = \dfrac{5}{11}$ e $P(A \cap B) = \dfrac{1}{11}$.

   Como, $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, os eventos A e B não são independentes, o que, pela definição, implica que os eventos A, B e C também não são.

---

9. O espaço amostral para este experimento pode ser representado por $\Omega = \{\text{"x é primo"} : x \in A\}$ e tem 11 elementos. Como os elementos de A que são primos são $2, 3, 5, 7$, e 11, das proposições em Ω exatamente 6 são falsas. Logo, a probabilidade procurada é $\dfrac{6}{11}$.

---

10. (a) Temos que:

    $$\Omega = \{MPW, MWP, PMW, PWM, WMP, WPM\},$$

    $$A = \{MPW, MWP, WMP\},$$

    e

    $$B = \{MPW, MWP, PMW\}.$$

    (b) A interseção dos dois eventos é $A \cap B = \{MPW, MWP\}$. Logo, $P(A \cap B) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

    (c) Como $\dfrac{1}{2} = P(A \cap B) \neq \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = P(A)P(B)$, os evento não são independentes.

---

11. (a) Temos que $n(\Omega) = C(10, 3)$.
O evento "os números retirados são consecutivos" é o conjunto A cujos elementos são:

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}, \{5, 6, 7\}, \{6, 7, 8\}, \{7, 8, 9\}, \{8, 9, 10\}$$

Assim, $n(A) = 8$.
Logo, $P(A) = \dfrac{8}{C(10,3)} = \dfrac{1}{15}$.
(b) O aluno que obteve a resposta $\dfrac{3!(n-2)!}{n!}$ está correto. De fato, raciocinando de maneira análoga ao item (a), temos: $n(\Omega) = C(n, 3)$ e $n(A) = n - 2$.
Logo, $P(A) = \dfrac{n-2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}} = \dfrac{3!(n-2)!}{n!}$.

---

12. Temos que $n(\Omega) = 200$.
Considere o evento:

$$A: \text{o número retirado é um múltiplo de } 10.$$

Como os múltiplos de 10 aparecem de 10 em 10, entre 1 e 200, temos $n(A) = \dfrac{200}{10} = 20$.
Assim, $P(A) = \dfrac{20}{200} = \dfrac{1}{10}$. Logo, $P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{10} = \dfrac{9}{10}$.

---

13. Sabemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Como os eventos são independentes, temos $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.
Assim, $0,8 = 0,2 + x - 0,2x$. Logo, $x = 0,75$.

---

14. (a) Como cada pé de meia tem dois pares, temos que $n(\Omega) = C(20, 2) = 190$.
Como existe somente 1 par cujos pés estão rasgados, a probabilidade é dada por: $\dfrac{1}{190}$.
(b) Analogamente, temos que $n(\Omega) = C(20, 2) = 190$.
Como existem 9 pares cujos pés estão rasgados, a probabilidade é dada por: $\dfrac{9}{190}$.

---

15. (a) Vamos determinar o número total de triângulos e subtrair o número de figuras de três pontos formadas com os pontos alinhados.
Assim, o número de trângulos procurado é $C(12, 3) - C(5, 3) = 210$.
(b) A partição dada não está correta.
A solução da questão é:

O conjunto de tais triângulos pode ser particionado em três conjuntos:

- *o conjunto A dos triângulos cujos vértices pertencem ao conjunto dos 7 pontos não alinhados;*
- *o conjunto B dos triângulos cujas bases têm vértices pertencentes ao conjunto dos 5 pontos alinhados e cujo outro vértice pertence ao conjunto dos pontos não alinhados.*

- *o conjunto C dos triângulos cujas bases têm vértices pertencentes ao conjunto dos 7 pontos alinhados e cujo outro vértice pertence ao conjunto dos pontos alinhados.*

Assim, pelo PA, o número total de triângulos é dado por: $C(7,3)+C(5,2)\times 7+C(7,2)\times 5=35+70+105=210.$

---

16. (a) O espaço amostral Ω é o conjunto de todas as triplas ordenadas (x,y,z) de três elementos distintos tomados no conjunto $\{1,2,\ldots,9\}$.
Temos que $\#\Sigma = 9\times 8\times 7 = 504$.
(b) Considere o evento:
$$A=\{(x,y,z)\in\Omega : x \text{ é ímpar, } y \text{ é par e } z \text{ é ímpar}\}.$$
O evento A tem $5\times 4\times 4 = 80$ elementos.
Logo, a probabilidade procurada é $P(A)=\dfrac{80}{504}$.
(c) Considere o evento:
$$B=\{(x,y,z)\in\Omega : x \text{ é par, } y \text{ é ímpar e } z \text{ é par}\}.$$
O evento B tem $4\times 5\times 3 = 60$ elementos.
Logo, a probabilidade procurada é $P(A)=\dfrac{60}{504}$.
(d) Considere o evento:
$$C: \text{as etiquetas são de mesma paridade.}$$
Observe que C é o complementar do evento $A\cup B$.
Logo, a probabilidade de ocorrer o evento C é $P(C)=1-P(A\cup B)=1-(P(A)+P(B))=1-\dfrac{140}{729}=\dfrac{589}{729}$.

---

17. (a) O espaço amostral Ω consiste de todos os subconjuntos de 13 elementos de cartas do baralho.
Temos que $\#\Omega = C(52,13)$.
(b) Considere o evento:
$$A: \text{a mão tem 7 copas, 2 espadas, 3 ouros e 1 paus.}$$
Temos que $\#A = C(13,7)\times C(13,2)\times C(13,3)\times C(13,1)$.
Logo, a probabilidade procurada é
$$P(A)=\frac{C(13,7)\times C(13,2)\times C(13,3)\times C(13,1)}{C(52,13)}.$$
(c) Considere o evento:
$$B: \text{a mão tem todas as cartas de um mesmo naipe.}$$
De acordo com a configuração do baralho e o fato de que a ordem das cartas que formam uma mão não é levada em conta, temos que $\#B = 4$.
Logo, a probabilidade procurada é $P(B)=\dfrac{4}{C(52,13)}$.

---

18. (a) O espaço amostral Ω consiste de todas as ordens formadas com os 12 livros disponíveis. Temos que $\#\Omega = 12!$.
(b) Para ordenar os livros de modo que os livros de matemática estajem antes dos livros de física, devemos executar duas tarefas:

$$T_1 : \text{arrumar os 6 livros de matemática,}$$

$$T_2 : \text{arrumar, em seguida, os 6 livros de física.}$$

Assim, existem $6! \times 6!$ maneiras de arrumar os livros de modo que os livros de matemática estejam antes dos livros de física.
Logo, a probabilidade procurada é $\dfrac{6! \times 6!}{12!}$.
(c) Para ordenar os livros de modo que os 4 livros de física, previamente determinados, estejam lado a lado, devemos executar duas tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para arrumar os 4 livros previamente determinados,

T_2 : arrumar os livros, considerando os 4 livros já ordenados como um só.

Assim, existem $4! \times 9!$ maneiras de arrumar os livros de modo que os 4 livros de física, previamente determinados, estejam lado a lado.
Logo, a probabilidade procurada é $\dfrac{4! \times 9!}{12!}$.

---

19. Vamos contar o total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ e subtrair deste o total de anagramas nos quais as letras P, R e O ocorrem sempre juntas.
O total de anagramas da palavra problema é $P(8) = 8!$.
Cada anagrama onde as letras P, R e O ocorrem juntas pode ser formado se realizamos duas tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para escrever as letras P, R, O e considerar esta seqüência como uma única letra X
T_2 : formar um anagrama com as letras X, B, L, E, M, A.

Assim, pelo PFC, o número total de anagramas da palavra $PROBLEMA$ que têm as letras P, R e O sempre juntas é $3! \times 6!$.
Logo, o total de anagramas nos quais as letras P, R e O ocorrem duas a duas separadas é dado por $8! - (3! \times 6!)$.

---

20. Temos que $P(1) = x$, $P(2) = 2x$, $P(3) = 3x$, $P(4) = 4x$, $P(5) = 5x$ e $P(6) = 6x$.
(a) Pela definição de probabilidade, $P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 21x = 1$. Logo, $x = \dfrac{1}{21}$.
(b) Considere o evento:

$$A = \text{ o resultado é primo.}$$

Temos que $A = \{2, 3, 5\}$.
Logo, a probabilidade procurada é $P(A) = \dfrac{2}{21} + \dfrac{3}{21} + \dfrac{5}{21} = \dfrac{10}{21}$.
(c) Considere o evento $B = \{2\}$.
Queremos determinar $P(B|A)$. Temos $A \cap B = \{2\}$. Logo, a probabilidade procurada é $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{3}{21}}{\frac{10}{21}} = \dfrac{3}{10}$.
