Apresentação e Objetivos

Prezado(a) aluno(a), gostaríamos de dar boas-vindas nesta que pode ser considerada a primeira disciplina do seu Curso de Licenciatura em Matemática da UFF/CEDERJ/UAB. Você está iniciando uma jornada que mudará a sua vida. Você agora é parte de uma universidade pública, que lhe oferece a oportunidade de obter uma formação de excelente qualidade.

Estamos felizes por iniciar esta caminhada juntos em direção a este tão nobre objetivo que é a formação de quadros docentes com qualidade em nosso Estado, para atuação nos Ensinos Fundamental e Médio. Para atingir tão precioso objetivo, planejamos um curso aberto, com a maior flexibilidade possível, e favorecendo o processo individual de construção de sua autonomia. A proposta do curso é a formação de qualidade diversificada, permitindo planejar caminhadas futuras em Pós-graduações, sem limites na escalada do processo de conhecimento, na perspectiva maior da educação autônoma, cujo lema é aprender ao longo da vida.

Em todo o curso de Graduação do CEDERJ, apoiado na metodologia da Educação a Distância, a orientação de estudos é uma forte componente.

Você, provavelmente, está cursando esta disciplina por orientação da coordenação do curso, que ponderou oportuna uma recuperação de estudos centrada em conteúdos importantes de Matemática, pelos quais você passou no Ensino Médio. Não considere esta tarefa menor. Em nenhuma área do conhecimento os conteúdos estão tão encadeados e dependentes uns dos outros como em Matemática.

Se construirmos um bom alicerce, o edifício será sólido!

Como início de percurso nesta boa jornada, teremos o tempo de caminhar e de descansar e também de enfrentar algumas ladeiras. Faz parte do jogo! É impossível chegar a lugares significativos, sem subir uma ladeira! Mas, uma vez no alto do morro, poderemos contemplar o horizonte que descortina a bela paisagem panorâmica.

Como ter sucesso fazendo uma graduação na modalidade a distância?

Você já conhece as enormes vantagens que essa modalidade de ensino oferece e com certeza seu compromisso com o curso é grande. Sua formação inicia nesta disciplina com a construção de uma sólida base de conhecimentos matemáticos e com o desenvolvimento de hábitos necessários para ter sucesso na empreitada. Essa bagagem toda, adquirida nesta disciplina, lhe será ex-

tremamente útil, tanto na vida profissional quanto na vida pessoal. Mas é importante salientar algumas daquelas características tão necessárias para se ter sucesso nessa forma de aprendizagem.

Entre outras coisas pode-se mencionar a importância de se ter força de vontade, autodisciplina e dedicação. Organização também é fundamental. Vamos nomear algumas sugestões que serão úteis:

- *Estude regularmente. É preciso que você faça uma agenda de trabalho que lhe garanta um tempo específico para o estudo. Isso significa que você não pode estudar somente quando "tiver" tempo. Somos nós os responsáveis pelo nosso tempo.*
- *Consulte a tutoria para tirar dúvidas. A sua presença às seções de tutoria e a formação de grupos de estudo são ferramentas poderosas que você dispõe para progredir no curso.*
- *Busque apoio na execução das atividades propostas. A tutoria a distância tem um papel importante a cumprir no seu programa de estudos. Ela lhe dará uma maior agilidade para debelar dúvidas e isso é um privilégio acessível aos alunos do ensino a distância.*
- *Estamos sempre trabalhando para que o material didático disponibilizado seja de qualidade e lhe dê um caminho seguro para a construção do seu conhecimento.*
- *O trabalho semanal com os EPs, Exercícios Programados, que serão disponibilizados todas as semanas, e a posterior análise dos correspondentes gabaritos, o ajudarão a estar em dia com os estudos. Esse trabalho lhe permitirá traçar um mapa do curso, pelo qual você precisa navegar. Ele lhe indicará os temas semanais que você precisa estudar, determinará os exercícios típicos que você não deve deixar de fazer, marcando um ritmo de estudo e progresso que você deve tentar manter.*

Matemática, uma grande opção!

Vamos falar agora um pouco sobre Matemática, que já foi chamada "a rainha das ciências".

A Matemática desempenha um papel fundamental no desenvolvimento científico e tecnológico de nossa sociedade. Assim, maior é a nossa responsabilidade de contribuir para uma boa formação nessa área.

Há muita coisa a respeito da Matemática que a maioria das pessoas desconhece. O conhecimento delas pode mudar muito a nossa perspectiva dessa ciência, sempre respeitada, mas nem sempre devidamente estimada. E, como você sabe, a motivação é fundamental para o aprendizado.

No intuito de contribuir positivamente a esse respeito, ressaltamos alguns pontos importantes para sua reflexão.

- *A matemática não lida apenas com números, ela lida com números, formas, relações, argumentações, enfim, lida com diversas idéias e suas inter-relações.*

- *Estabelecer a verdade é o fim principal de qualquer tipo de ciência. Chegar àquilo a que chamamos "verdade científica". Fundamental a respeito disso é a maneira como, no âmbito de cada atividade científica, se estabelece a verdade.*

  Na Matemática, a "verdade" é estabelecida a partir de um conjunto de afirmações, chamadas de axiomas. Uma vez estabelecidas essas "verdades fundamentais", usamos regras da lógica para deduzir ou estabelecer todas as outras verdades. É o que chamamos "método dedutivo". Em outras ciências, a noção de verdade é, em geral, estabelecida por experimentos. É por isso que, em muitos casos, uma nova teoria toma o lugar da anterior, que já não consegue explicar os fenômenos que prevê ou em função do desenvolvimento de novas técnicas. Isso não ocorre na Matemática, onde o conhecimento é sempre acumulativo. Esse fato distingue a Matemática das demais ciências.

- *A principal atividade dos matemáticos é resolver problemas. Podemos afirmar até que um matemático feliz é um matemático que acabou de resolver um bom problema e, ao fazer isso, descobriu mais uma porção de novos problemas para pensar.*

- *Matemática também é sinônimo de diversidade. Em muitas línguas a palavra matemática é usada no plural. Há tantas ramificações e subáreas na matemática contemporânea que é impossível acompanhar o desenvolvimento em todas as frentes de pesquisa. A matemática encontra inspiração para seu desenvolvimento nas mais diversas áreas de atuação humana. Uma boa idéia pode surgir tanto em um problema motivado intrinsecamente na matemática como em uma situação prática, ocorrida em algum campo fora dela.*

O que nos oferece a Matemática Básica

Nesta disciplina, Matemática Básica, você irá rever alguns conceitos do Ensino Fundamental e Médio. A diferença aqui estará na forma da abordagem que será dada. Além de rever esses conceitos, de maneira efetiva, você construirá uma atitude matemática profissional. A Matemática deixará de ser um conjunto de regras e convenções e se desenvolverá num conjunto sustentado de conhecimentos que se relacionam e se sustentam. Esperamos que ao final deste semestre você tenha sucesso e se sinta bastante confiante para enfrentar os futuros desafios de seu curso.

Para orientar seu estudo, a disciplina é apresentada em dois volumes, cada um apresentando o conteúdo programático sob a forma de aulas. Neste Volume I, que inicia a disciplina Matemática Básica, revisaremos conteúdos importantes do Ensino Médio, entre as quais se destacam: Frações, Números Decimais, Potenciação, Radiciação, Equações do Primeiro e Segundo Graus, Inequações, Progressões Aritmética e Geométrica e Conjuntos.

Elementos integrantes em todas as aulas são os exemplos e as atividades a serem resolvidas. Eles formam parte do conteúdo e pontuam o encadeamento da disciplina. Assim, é importante que você entenda bem o desenvolvimento dos exercícios e resolva todas as atividades.

Bom estudo!! Conte sempre com nossa ajuda e nosso estímulo.

Sucesso!

Roberto Geraldo Arnaut, Celso Costa,
Mário Olivero, Regina Moreth e Dirce Uesu Pesco.

Aula 1 – Frações

Os números estão no âmago de todas as coisas.
Pitágoras

Introdução

A Matemática, na forma como conhecemos hoje, teve seu início no Período de Ouro da Antiga Grécia. Parte primordial deste desenvolvimento se deve a um grupo de matemáticos que foi liderado por Pitágoras, autor de frases famosas, como a que abre essa aula.

Os gregos foram particularmente felizes ao estruturar os conhecimentos matemáticos desenvolvidos pelas civilizações que os precederam, arrumando-os essencialmente nos moldes que praticamos até hoje. Eles tinham uma visão predominantemente geométrica desses conhecimentos, mas deram também os primeiros passos no estudo dos *números*. A palavra Aritmética, por exemplo, é de origem grega.

Ao relermos a frase de Pitágoras mais uma vez, somos levados a considerar a seguinte questão: que tipo de números ele tinha em mente ao pronunciar frase tão lapidar?

A questão procede, pois o conceito de número, como vemos hoje, demorou muito tempo para se estabelecer e recebeu contribuições de muitas culturas, por gerações e gerações de matemáticos.

Por exemplo, os gregos não tinham uma notação específica para representar os números, usavam letras, tais como os romanos depois deles.

A Matemática, assim como as ciências em geral, não teria se desenvolvido da maneira como observamos hoje sem a contribuição inestimável das culturas hindu e árabe, que nos legaram os algarismos hindu-arábicos, assim como o sistema numérico posicional.

Números Naturais

Mas calma, voltemos um pouco, aos números tais como foram inicialmente concebidos. Na forma mais primitiva, quando dizemos *números*, estamos nos referindo aos números chamados naturais, cujo conjunto representamos pela letra $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Os pontinhos indicam que podemos continuar assim, outro número e outro ainda, indefinidamente. Ou seja, o conjunto $\mathbb{N}$ é um manancial inesgotável dessa matéria prima que usamos na confecção da Matemática.

Preferimos não incluir o zero nesse conjunto, uma vez que o zero, número tão importante nas nossas vidas e na Matemática, custou bastante para se estabelecer.

A propriedade fundamental geradora dos Números Naturais é a que cada um deles tem um sucessor. Essa noção é formalizada nos dois axiomas conhecidos como Axiomas de Peano. O primeiro estabelece a existência do número natural 1 (afinal, é preciso começar de alguma coisa) e o segundo afirma que todo número natural tem um sucessor. Assim, começamos com 1, cujo sucessor é 2, seguido do 3, e assim por diante.

O que mais podemos fazer com os naturais?

É claro que a seqüência de números naturais serve primordialmente para contar coisas, tais como carneiros, frutas, flechas, dias e tudo o mais. Mas queremos mais do que isso. Veja, não se deixe enganar pela simplicidade desses números.

O que torna os números inteiros objetos matemáticos de grande interesse é o fato de podermos operar com eles, somando-os e multiplicando-os. Munido dessas duas operações, o conjunto dos números naturais passa a apresentar questões várias. Algumas delas continuam a desafiar mentes brilhantes até hoje.

Um teorema notável

Esse especial interesse matemático pelos números naturais ocorre especialmente devido à multiplicação. Nesse contexto surge um dos primeiros resultados matemáticos profundos com que tomamos contato. Do ponto de vista da multiplicação, os números maiores do que 1 se dividem em duas categorias: primos e compostos, dependendo de seus divisores. O teorema que mencionamos afirma que todo número natural, maior do que dois, se decompõe em fatores primos e, mais ainda, a decomposição é única, a menos da ordem dos fatores.

Em linguagem informal, o teorema afirma que, do ponto de vista da multiplicação, todos os números podem ser montados a partir de peças básicas, os números primos, como um infinito brinquedo *lego*. Assim, $6 = 2 \times 3$, $30 = 2 \times 3 \times 5$, $121 = 11^2$, $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$ e $47 = 47$, pois 47 é, ele próprio, um número primo.

Esse resultado matemático era conhecido pelos antigos gregos (você sabe o que é o crivo de Eratóstenes?) mas só foi rigorosamente demonstrado bem posteriormente, por Gauss, um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Seu nome *científico* é Teorema Fundamental da Aritmética. Mas, não se preocupe com isso agora, haverá tempo para ele no futuro. Mas, para que você não fique apenas lendo, temos aqui duas atividades. Você encontrará as soluções no fim da aula.

Atividade 01

Explique de maneira convincente o porque dos números 1134 e 53172 serem divisíveis por 9.

Atividade 02

Por que é difícil decompor o número 97343 em fatores primos?

Dois velhos conhecidos . . .

Através da decomposição em fatores primos podemos chegar a dois importantes conceitos associados a dois números dados, digamos a e b: o *mínimo múltiplo comum*, $\text{mmc}(a,b)$, e o *maior divisor comum*, $\text{mdc}(a,b)$.

Para que servem esses números?

Deve haver uma boa resposta para essa pergunta, uma vez que nos ensinam a determiná-los desde os primeiros passos na escola... Bem, eles servem para efetuar certas operações de maneira ótima!

Como calculá-los?

Se sabemos a decomposição em fatores primos dos números a e b, é muito fácil: para o mmc basta tomar os fatores primos que comparecem em pelo menos um dos dois números (levando em conta a maior potência, caso ele compareça tanto em a como em b); para o mdc basta tomar os primos que aparecem simultaneamente nos dois números (levando em conta a menor potência, caso ele compareça tanto em a como em b). Veja dois exemplos na tabela a seguir.

a	b	$\text{mdc}(a,b)$	$\text{mmc}(a,b)$
$6 = 2 \times 3$	$15 = 3 \times 5$	3	$2 \times 3 \times 5 = 30$
$1050 = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7$	$280 = 2^3 \times 5 \times 7$	$70 = 2 \times 5 \times 7$	$4200 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$

Como os antigos matemáticos faziam?

Os antigos gregos já conheciam algoritmos para calcular o mdc e o mmc de pares de números. A idéia do algoritmo se baseia no seguinte fato:

Se r é o resto quando a é dividido por b, então $\text{mdc}(a,b) = \text{mdc}(b,r)$.

Assim, usando divisões sucessivas, chegamos ao mdc. Veja, por exemplo, como calculamos o maior divisor comum de 72 e 30.

Num diagrama de três linhas, colocamos os números 72 e 30 na linha do meio. Ao alto de 30 colocamos a parte inteira da divisão (Algoritmo de Euclides) de 72 por 30 e sob o 72 colocamos o resto desta divisão.

	2	
72	30	
12		

No segundo passo, colocamos o resto da primeira divisão ao lado do 30 e repetimos a operação:

	2	2	
72	30	12	
12	6		

Como todo algoritmo, basta prosseguir repetindo os passos até ...

	2	2	2
72	30	12	6
12	6	0	

O que aconteceu de diferente nessa etapa do algoritmo? Você notou que o resto desta vez é igual a zero. Bom, isso indica que chegamos ao fim do processo e o número obtido nesta etapa, 6, é o mdc: $\text{mdc}(72, 30) = 6$. Realmente, $72 = 2^3 \times 3^2$ e $30 = 2 \times 3 \times 5$ e, portanto, $\text{mdc}(72, 30) = 2 \times 3$.

Pratique o algoritmo calculando $\text{mdc}(450, 105)$.

Agora, um algoritmo para o cálculo do mmc. Ele lembra bastante o conhecido algoritmo de decomposição em fatores primos. A diferença é que efetuamos a decomposição dos dois números simultaneamente. Veja, na prática, o cálculo de $\text{mmc}(132, 124)$.

132	126	2
66	63	2
33	63	3
11	21	3
11	7	7
11	1	11
1	1	

$$\text{mmc}(132, 126) = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 = 2772$$

Você pode usar essa técnica para calcular o mmc de mais do que dois números. Só para ter certeza, você não gostaria de calcular $\text{mmc}(297, 140, 90)$?

Por que representamos os inteiros pela letra $\mathbb{Z}$?

Os números naturais não nos permitem representar certas situações importantes, como as que envolvem perdas e prejuízos. Mais ainda, há situações nas quais sentimos a necessidade de *estender* os números naturais a um conjunto, digamos assim, mais completo. Por exemplo, a equação $x + 5 = 3$ não tem solução no conjunto dos números naturais. Assim, a Matemática demanda o que chamamos *conjunto dos números inteiros*:

$$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \}.$$

Você sabe por que representamos os inteiros pela letra $\mathbb{Z}$ no lugar de algo como $\mathbb{I}$?

Bem, como você deve saber, a Teoria de Conjuntos foi criada por Georg Cantor, que falava alemão. A palavra para números em alemão é Zahlen.

Atividade 03

Quais das seguintes equações podem ser resolvidas no âmbito dos números naturais? E no âmbito dos números inteiros?

a) $x + 2 = 7$ c) $3x + 7 = 4$ e) $2x + 5 = 7$

b) $x + 4 = 1$ d) $2x + 4 = 8$ f) $2x + 6 = 13$

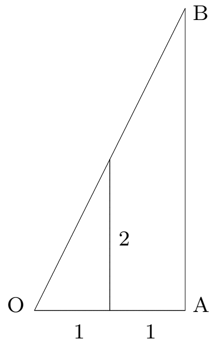
Os Números Racionais

Como você deve ter notado, ao fazer a atividade anterior, há situações nas quais nem mesmo o conjunto dos inteiros permite considerar. Em contrapartida aos números inteiros deveríamos considerar os números *quebrados*, não é mesmo?

Realmente, há situações tanto no âmbito da Matemática quanto no caso de situações, digamos assim, do dia-a-dia, nas quais lançamos mão da noção de *proporção*. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 01

Na figura a seguir, determine o comprimento do segmento AB.



Não é preciso ser gênio para concluir que o comprimento do segmento AB é 4 unidades de comprimento, pois o fato de que, em triângulos semelhantes, lados correspondentes são *proporcionais*. Assim, AB é 4 unidades de comprimento, pois 1 está para 2 assim como 2 está para 4.

Essa essência da proporção é que queremos registrar numericamente.

Exemplo 02

Desde os primórdios os cozinheiros, os construtores e tantos outros profissionais têm usado essa noção de proporção em seus afazeres. Algo como: “cinco medidas de água para duas medidas de arroz” ou “uma medida de cimento para seis de areia”. Seguindo essa *receita* podemos variar a quantidade daquilo que queremos preparar, seja arroz para duas pessoas, seja arroz para uma família de doze pessoas, contanto que mantenhamos a *proporção* $5:2$ (cinco por dois).

O que é um número racional?

Tornando uma história longa mais curta, queremos nos referir numericamente a proporções tais como as que foram exemplificadas: $1:2$, $5:2$ ou $1:6$ e assim por diante. Isto é, proporções nas quais comparamos dois número inteiros. Para isso, é claro, precisamos de *dois* números inteiros, a e b, com a propriedade importante de que $b \neq 0$, e representamos a proporção $a:b$ pela notação $\dfrac{a}{b}$.

Tudo muito bem, com o seguinte cuidado: devemos levar em conta que, por exemplo, $1:2$ e $2:4$ representam a *mesma* proporção. Assim, na versão numérica, $\dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{2}{4}$ são iguais.

Ufa! Podemos então dizer que um número racional é representado por uma fração do tipo $\dfrac{a}{b}$, na qual a e b são números inteiros com $b \neq 0$ e que duas frações representam o mesmo número se, e somente se, satisfazem a seguinte relação de igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = c \cdot b.$$

Assim, obtemos o conjunto representado por $\mathbb{Q}$, como uma espécie de extensão dos inteiros. Ou seja, se estabelecermos que, se $n \in \mathbb{Z}$, então $n = \dfrac{n}{1}$, temos $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Atividade 04

Use a definição anterior de igualdade de números racionais para verificar que $\dfrac{3}{-5} = \dfrac{-3}{5}$.

Assim, de um modo geral, $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$, que denotamos por $-\dfrac{a}{b}$.

Atividade 05

Determine o valor de x tal que $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{3}$.

Notação

Dado um par de números inteiros a e b, com $b \neq 0$, obtemos o número racional $\dfrac{a}{b}$ e chamamos a de numerador e b de denominador. A palavra *fração* também é usada, mas serve para contextos mais gerais, nos quais numeradores e denominadores são outros objetos matemáticos e não apenas números inteiros. Por exemplo, você deve ter ouvido falar da fração $\dfrac{\pi}{2}$ ou da fração $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Mas, por enquanto, tomaremos o termo fração por sinônimo de número racional.

Leitura de uma fração

Na tabela abaixo indicamos, para cada número de partes iguais em que foi dividida a unidade, o nome de cada parte.

Número de partes		Nome de cada parte	Número de partes		Nome de cada parte
2	$\longrightarrow$	meio	9	$\longrightarrow$	nono
3	$\longrightarrow$	terço	10	$\longrightarrow$	décimo
4	$\longrightarrow$	quarto	11	$\longrightarrow$	onze avos
5	$\longrightarrow$	quinto	12	$\longrightarrow$	doze avos
6	$\longrightarrow$	sexto	13	$\longrightarrow$	treze avos
7	$\longrightarrow$	sétimo	100	$\longrightarrow$	centésimo
8	$\longrightarrow$	oitavo	1000	$\longrightarrow$	milésimo

Para efetuar a leitura de uma fração você deve ler o numerador e, em seguida, o nome de cada parte. Este último depende do número de partes em que foi dividida a unidade, isto é, do denominador da fração.

Exemplos:

$\dfrac{1}{2}$ lê-se "um meio" $\qquad$ $\dfrac{1}{15}$ lê-se "um quinze avos"

$\dfrac{3}{5}$ lê-se "três quintos" $\qquad$ $\dfrac{7}{10}$ lê-se "sete décimos"

$\dfrac{8}{11}$ lê-se "oito onze avos" $\qquad$ $\dfrac{49}{100}$ lê-se "quarenta e nove centésimos"

Curiosidade

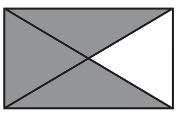
Os homens da idade da Pedra não usavam frações. O conceito de fração tornou-se necessário com a evolução dos conhecimentos.

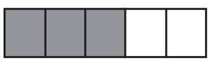
Os antigos egípcios tinham uma notação especial de fração com numerador 1. A fração $\frac{1}{3}$, por exemplo, era indicada colocando-se sobre o inteiro 3 um sinal oval alongado: $\overset{\frown}{\text{III}}$; os babilônios usavam frações com denominadores 60, 60^2, 60^3, etc; já os romanos usavam frações com denominador 12.

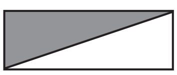
A nossa maneira atual de representar fração, por meio de uma barra, surgiu no século XVI.

Exercícios

1. Qual a fração representada pela parte sombreada de cada figura?

a) 

b) 

c) 

d) 

2. João acertou $\frac{7}{15}$ dos 15 problemas de uma prova. Responda:

   a) quantos problemas ele acertou?

   b) quantos problemas ele errou?

   c) que fração representa o número de problemas que ele errou?

3. Uma estante é formada por 9 prateleiras. Se enchermos 3 prateleiras de livros, que fração da estante não foi aproveitada?

4. Escreva como você lê as frações:

   a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{2}{10}$ c) $\frac{11}{50}$ d) $\frac{27}{100}$ e) $\frac{51}{1000}$

5. Determine

   a) $\frac{2}{5}$ de 20 b) $\frac{1}{4}$ de 40 c) $\frac{3}{4}$ de 32 d) $\frac{5}{7}$ de 14

6. Se $\frac{1}{3}$ de um número é 5, qual é esse número?

7. Se $\frac{3}{5}$ de um número é 30, quanto é $\frac{1}{5}$ desse número?

8. Uma escola tem 40 professores, dos quais $\frac{3}{8}$ são mulheres. Determine o número de professoras dessa escola.

Gabarito

1. a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{5}{9}$

2. a) 7 b) 8 c) $\frac{8}{15}$

3. $\frac{6}{9}$

4. a) três quintos b) dois décimos c) onze cinqüenta avos

   d) vinte e sete centésimos e) cinqüenta e um milésimos

5. a) 8 b) 10 c) 24 d) 10

6. 15

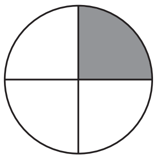
7. 10

8. 15

Tipos de Frações

Observe os seguintes exemplos:

1º) Tomamos uma unidade, dividimos em quatro partes iguais e tomamos uma delas.

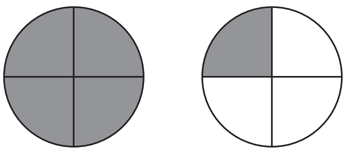


$\frac{1}{4}$

Encontramos essa fração $\left(\frac{1}{4}\right)$ em que o numerador é menor que o denominador.

Frações assim são chamadas de frações próprias.

2º) Tomamos outras duas unidades, dividimos cada uma delas em quatro partes iguais e tomamos cinco delas.



$\frac{5}{4}$

Encontramos uma fração $\left(\frac{5}{4}\right)$ em que o numerador é maior que o denominador.

Frações assim são chamadas frações impróprias.

Note que $\frac{5}{4}$ é o mesmo que uma unidade inteira e mais $\frac{1}{4}$ da unidade. Por isso dizemos que $\frac{5}{4}$ é o mesmo que 1 inteiro e $\frac{1}{4}$. Indicamos: $\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$.

Outra maneira de indicar $1 + \frac{1}{4}$ é $1\frac{1}{4}$.

A forma $1\frac{1}{4}$ lê-se "um inteiro e um quarto".

A forma $1\frac{1}{4}$, composta de uma parte inteira e outra fracionária, é chamada forma mista para representar $\frac{5}{4}$.

Podemos passar uma fração imprópria para a forma mista sem recorrer a desenhos ou figuras.

Exemplo: Passar $\dfrac{21}{6}$ para a forma mista.

Devemos descobrir quantas unidades inteiras estão contidas em $\dfrac{21}{6}$ e quantos sextos sobram depois da separação dessas unidades.

Descobrimos isso dividindo 21 por 6

$$\begin{array}{r|l} 21 & \underline{\;6\;} \\ 3 & 3 \rightarrow \text{unidades inteiras contidas em } \dfrac{21}{6} \\ \uparrow & \end{array}$$

número de sextos
que sobram

Então $\dfrac{21}{6} = 3\,\dfrac{3}{6}$.

Transformar um número misto em fração imprópria.

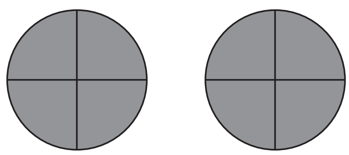
Exemplos:

1) $1\,\dfrac{2}{3} = 1 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{5}{3}$

2) $2\,\dfrac{3}{5} = 1 + 1 + \dfrac{3}{5} = \dfrac{5}{5} + \dfrac{5}{5} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{10}{5} + \dfrac{3}{5} = \dfrac{13}{5}$

3) $5\,\dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4} + \dfrac{4}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{20}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{21}{4}$

3º) Tomamos duas unidades, dividimos cada uma delas em quatro partes iguais e tomamos as oito partes.



$\dfrac{8}{4}$

Encontramos uma fração $\left(\dfrac{8}{4}\right)$ em que o numerador é múltiplo do denominador. Frações assim são chamadas frações aparentes. Note que $\dfrac{8}{4}$ é o mesmo que 2 unidades inteiras, isto é, 2 inteiros.

Indicamos: $\dfrac{8}{4} = 2$

A fração aparente é uma outra forma de representar o número natural 2.

$\dfrac{3}{3}$, $\dfrac{4}{4}$, $\dfrac{5}{5}$, $\dfrac{23}{23}$ são frações aparentes que representam o número natural 1.

As frações podem ser classificadas em três categorias.

* Frações Próprias → são aquelas em que o numerador é menor que o denominador

* Frações Impróprias → são aquelas em que o numerador é maior ou igual ao denominador.

* Frações Aparentes → são as frações impróprias em que o numerador é múltiplo do denominador.

As frações aparentes podem ser escritas na forma de número natural. As frações impróprias e não aparentes podem ser escritas na forma mista.

Exercícios

1. Classifique cada uma das frações em próprias (P), impróprias (I) ou aparentes (A).

   a) $\frac{8}{4}$ b) $\frac{18}{1}$ c) $\frac{2}{13}$ d) $\frac{32}{5}$ e) $\frac{57}{2}$

2. Escreva na forma mista as seguintes frações impróprias:

   a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{8}{3}$ c) $\frac{13}{4}$ d) $\frac{31}{6}$ e) $\frac{57}{11}$

3. Transforme cada número misto em fração imprópria:

   a) $3\,\frac{1}{4}$ b) $4\,\frac{1}{3}$ c) $1\,\frac{3}{5}$ d) $5\,\frac{1}{2}$ e) $6\,\frac{3}{8}$

4. Em uma cidade, $\frac{4}{5}$ dos 280 veículos existentes são automóveis e os demais são caminhões. Quantos caminhões há nessa cidade?

5. José possui R$ 480,00 e isto equivale a $\frac{3}{4}$ de sua dívida na lanchonete de Manoel. Quanto José deve a lanchonete?

Gabarito

1. a) A b) A c) P d) I e) I

2. a) $1\,\frac{1}{2}$ b) $2\,\frac{2}{3}$ c) $3\,\frac{1}{4}$ d) $5\,\frac{1}{6}$ e) $5\,\frac{2}{11}$

3. a) $\frac{13}{4}$ b) $\frac{13}{3}$ c) $\frac{8}{5}$ d) $\frac{11}{2}$ e) $\frac{51}{8}$

4. Observe que se $\frac{4}{5}$ são automóveis e o restante são caminhões então representamos todos os veículos por $\frac{5}{5}$

   A fração que representa o número de caminhões é $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$

   Número total de veículos: 280

   $\frac{1}{5}$ de 280 – número total de caminhões $\rightarrow$ $\frac{1}{5}280 = 56$

5. Vamos representar a dívida de José por x. Logo, temos que $\frac{3}{4}x = 480$

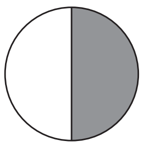
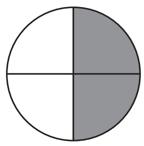
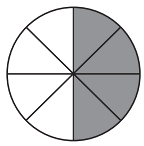
   Então

$$3x = 4 \cdot 480 = 1920$$
$$x = 1920 : 3 = 640$$

   Portanto, José deve R$ 640,00 a lanchonete.

Frações Equivalentes

Note estas ações:

Ação 1	Ação 2	Ação 3
Dividir uma pizza em duas partes iguais e comer uma parte	Dividir uma pizza em quatro partes iguais e comer duas partes	Dividir uma pizza em oito partes iguais e comer quatro partes iguais
		

As ações acima são diferentes, entretanto, as frações obtidas representam a mesma parte do todo. Por esse motivo, dizemos que essas frações se equivalem, isto é, as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes.

Frações equivalentes são frações que representam a mesma parte do todo.

Obtenção de frações equivalentes

Vamos obter frações equivalentes à fração $\frac{1}{3}$?

$\boxed{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 1} = \frac{1}{3}}$ $\boxed{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}}$ $\boxed{\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}}$ $\boxed{\frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{4}{12}}$

Assim, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$ são algumas das frações equivalentes a $\frac{1}{3}$.

Para encontrar essas frações equivalentes, multiplicamos o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{3}$ por uma mesmo número natural diferente de zero.

Note que para obter uma fração equivalente à fração $\frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ basta dividir (se possível) ou multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número natural, desde que ele seja diferente de zero.

Simplificação de frações

Uma fração equivalente a $\frac{6}{12}$ é $\frac{1}{2}$. A fração $\frac{1}{2}$ foi obtida dividindo-se ambos os termos da fração $\frac{6}{12}$ por 6.

Dizemos que a fração $\frac{1}{2}$ é uma fração simplificada de $\frac{6}{12}$

Uma fração que não pode ser simplificada é chamada de irredutível. Por exemplo, a fração $\frac{1}{2}$ não pode ser simplificada, porque 1 e 2 não possuem fator comum (mdc(1,2)=1). Podemos dizer, então, que $\frac{1}{2}$ é a fração irredutível de $\frac{6}{12}$.

Exercícios

1. Quais das frações são equivalentes a $\frac{1}{5}$?

   a) $\frac{2}{10}$ b) $\frac{3}{12}$ c) $\frac{4}{18}$ d) $\frac{5}{25}$ e) $\frac{7}{30}$ f) $\frac{12}{60}$

2. Quais das frações abaixo são irredutíveis?

   a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{8}$ c) $\frac{15}{45}$ d) $\frac{24}{36}$ e) $\frac{12}{60}$

3. Encontre a fração de denominador 20 equivalente a cada uma das seguintes frações:

   a) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{2}$

   b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{400}{2000}$

4. As letras abaixo representam números. Quais são esses números?

   a) $\frac{4}{6} = \frac{a}{18}$ b) $\frac{b}{5} = \frac{32}{20}$ c) $\frac{2}{5} = \frac{c}{50}$

Gabarito

1. a, d, f
2. a,b
3. a) $\dfrac{4}{20}$ b) $\dfrac{5}{20}$ c) $\dfrac{30}{20}$ d) $\dfrac{4}{20}$
4. a) $a = 12$ b) $b = 8$ c)$c = 20$

Redução de frações a um mesmo denominador

Observe as frações $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{6}$. Elas têm denominadores diferentes. Vamos procurar três frações, equivalentes às três frações dadas, tendo todas o mesmo denominador. O novo denominador é múltiplo de 3, 5 e 6. O menor número é o mmc(3,5,6) que é 30.

Estamos, então, com o problema - obter frações equivalentes a $\frac{4}{3}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{6}$ tendo todas elas denominador 30.

$$\frac{4}{3} = \frac{?}{30} \quad \Rightarrow \quad \text{o numerador é } 4 \cdot 10 = 40 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} = \frac{40}{30}$$
$$\frac{4}{5} = \frac{?}{30} \quad \Rightarrow \quad \text{o numerador é } 4 \cdot 6 = 24 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5} = \frac{24}{30}$$
$$\frac{1}{6} = \frac{?}{30} \quad \Rightarrow \quad \text{o numerador é } 1 \cdot 5 = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{6} = \frac{5}{30}$$

Para reduzirmos duas ou mais frações ao menor denominador comum:

1º) Calculamos o mmc dos denominadores, esse mmc será o menor denominador comum;

2º) Multiplicamos o numerador de cada fração pelo quociente entre o denominador comum e o denominador inicial da fração.

Exercícios

1. Reduza ao mesmo denominador comum.

   a) $\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{5}{3}$ b) $\dfrac{12}{5}$ e $\dfrac{3}{11}$

   c) $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{1}{3}$ e $\dfrac{7}{6}$ d) $\dfrac{2}{7}$, $\dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{5}{9}$

2. João e Maria vão repartir entre si um prêmio da Loteria Federal. João irá receber $\frac{2}{5}$ do prêmio e Maria R$ 1.500.000,00. Qual o valor total do prêmio?

Gabarito

1. a) $\frac{9}{6}$ e $\frac{10}{6}$ b) $\frac{132}{55}$ e $\frac{15}{55}$ c) $\frac{12}{30}, \frac{10}{30}$ e $\frac{35}{30}$ d) $\frac{36}{126}, \frac{21}{126}$ e $\frac{70}{126}$

2. A fração que representa o valor do prêmio que será recebido por Maria é $\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ do total. Como ela irá receber R$ 1.500.000,00, então o valor total do prêmio (x) pode ser determinado por $\frac{3}{5}x = 1.500.000,00$. Daí,

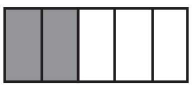
$$3x = 5 \cdot 1.500.000,00 = 7.500.000,00$$
$$x = 7.500.000,00 : 3 = 2.500.000,00$$

Comparação de Frações

Comparar duas frações significa estabelecer se elas são iguais, ou não. Se forem diferentes, estabelecer qual delas é a maior.

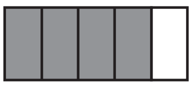
1ª Situação: As frações têm denominadores iguais.

Exemplo: $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$



$\frac{2}{5}$

$\frac{2}{5}$ é menor que $\frac{4}{5}$



$\frac{4}{5}$

$$\frac{2}{5} < \frac{4}{5}$$

Usamos o símbolo "<" que significa "é menor que" e o símbolo ">" que significa "é maior que"

> Quando duas frações tem denominadores iguais, a maior delas é a que tem maior numerador.

2ª Situação: As frações têm denominadores diferentes.

Vamos comparar as frações $\frac{6}{7}$ e $\frac{4}{5}$.

Vamos reduzir as frações ao mesmo denominador. mmc(7,5)=35

$$\frac{30}{35} \quad \text{e} \quad \frac{28}{35}$$

Daí como $\frac{30}{35} > \frac{28}{35}$ temos que $\frac{6}{7} > \frac{4}{5}$.

> Quando vamos comparar duas frações que têm denominadores diferentes, reduzimos ao mesmo denominador e aplicamos a regra anterior.

Exercícios

1. Compare entre si as frações:

a) $\dfrac{7}{5}$ e $\dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{6}$ e $\dfrac{1}{13}$ c) $\dfrac{2}{5}$ e $\dfrac{3}{7}$ d) $2\,\dfrac{3}{6}$ e $2\,\dfrac{5}{7}$ e) $\dfrac{41}{13}$ e $\dfrac{43}{15}$

2. Qual o maior elemento do conjunto $A = \left\{\dfrac{9}{5},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{3},\ 2\right\}$

3. Coloque em ordem crescente as frações: $\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{5}{8},\ \dfrac{1}{2}$ e $\dfrac{1}{4}$

4. Em certa classe, $\dfrac{2}{5}$ dos alunos foram reprovados em Matemática e $\dfrac{7}{9}$ em Português. Que matéria reprovou mais?

5. Num campeonato nacional o Fluminense ganhou $\dfrac{5}{7}$ dos pontos que disputou, enquanto o Vasco ganhou $\dfrac{11}{16}$. Qual dos dois obteve melhores resultados?

Gabarito

1. a) $\dfrac{7}{5} > \dfrac{1}{5}$ b) $\dfrac{1}{6} > \dfrac{1}{13}$ c) $\dfrac{3}{7} > \dfrac{2}{5}$ d) $2\,\dfrac{3}{6} < 2\,\dfrac{5}{7}$ e) $\dfrac{41}{13} > \dfrac{43}{15}$

2. $\dfrac{7}{3}$

3. $\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{4}{7},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{5}{8}$

4. Português, pois $\text{mmc}(5,9) = 45$, $\dfrac{2}{5} = \dfrac{18}{45}$ e $\dfrac{7}{9} = \dfrac{35}{45}$ e $\dfrac{35}{45} > \dfrac{18}{45}$

5. Fluminense, pois $\text{mmc}(7,16) = 112$, $\dfrac{5}{7} = \dfrac{80}{112}$ e $\dfrac{11}{16} = \dfrac{77}{112}$ e $\dfrac{80}{112} > \dfrac{77}{112}$

Adição e subtração de números fracionários

1º Caso: Denominadores iguais

No mercado gastei $\dfrac{3}{5}$ do que possuia em alimentos e $\dfrac{1}{5}$ em material de limpeza. Quanto gastei da importância que possuia?

Vamos representar graficamente.

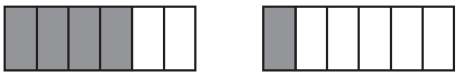
gasto em alimentos $\dfrac{3}{5}$ gasto com material de limpeza $\dfrac{1}{5}$

Daí $\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{4}{5}$ (só observar o gráfico)

> A soma de frações com denominadores iguais é uma fração cujo denominador é igual ao das parcelas e cujo numerador é a soma dos numeradores das parcelas.

No mercado gastei $\frac{4}{6}$ do que possuia em alimentos e $\frac{1}{6}$ em material de limpeza. Quanto gastei a mais em alimentos?

Vamos representar graficamente.



gasto com alimentos: $\frac{4}{6}$ — gasto com material de limpeza: $\frac{1}{6}$

Observando o gráfico vem:

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

> A diferença entre duas frações com denominadores iguais é uma fração cujo denominador é igual ao das frações dadas e cujo numerador é a diferença dos numeradores.

2º Caso: Denominadores diferentes

Quando as frações tem denominadores diferentes temos que, em primeiro lugar, obter frações equivalentes que tenham denominadores iguais.

Exemplo: $\frac{4}{10} + \frac{5}{6}$

$\frac{4}{10}, \frac{8}{20}, \frac{12}{30}, \frac{16}{40}, \frac{20}{50}, \frac{24}{60} \ldots$ são frações equivalentes a $\frac{4}{10}$.

$\frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \frac{30}{36}, \frac{35}{42}, \frac{40}{48}, \frac{45}{54}, \frac{50}{60} \ldots$ são frações equivalentes a $\frac{5}{6}$.

Procurando as frações equivalentes que tem o mesmo denominador e usando a regra anterior vem:

$$\frac{12}{30} + \frac{25}{30} = \frac{37}{30} \quad \text{ou} \quad \frac{24}{60} + \frac{50}{60} = \frac{74}{60} = \frac{37}{30}$$

Note que mmc(10,6)=30. Devemos, usando o mmc, determinar a fração equivalente com denominador 30.

> Quando vamos somar ou subtrair frações que tem denominadores diferentes, devemos primeiro reduzí-las ao mesmo denominador e, depois, aplicar a regra anterior.

Exercícios

1. Calcule:

a) $\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}$ c) $3-\dfrac{5}{6}$ e) $4\,\dfrac{2}{7}+6\,\dfrac{3}{7}$

b) $\dfrac{13}{4}-\dfrac{5}{4}$ d) $2+\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}$ f) $5-4\,\dfrac{1}{9}$

2. Calcule:

a) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{2}{9}$ e) $\dfrac{6}{5}+\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{4}$ d) $\dfrac{11}{60}+\dfrac{13}{72}$ f) $\dfrac{3}{7}-\dfrac{1}{3}$

3. Calcule o valor de cada expressão abaixo:

a) $\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{3}\right)$

b) $1+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $3\,\dfrac{1}{4}+2\,\dfrac{1}{2}-4\,\dfrac{1}{6}$

d) $\left(3\,\dfrac{1}{11}-1\right)+\left(2\,\dfrac{1}{4}-\dfrac{7}{4}\right)-\left(2\,\dfrac{1}{2}-2\,\dfrac{1}{3}\right)$

4. No sítio de Daniel, $\dfrac{1}{3}$ da plantação é de milho, $\dfrac{1}{5}$ é de feijão e o restante é de arroz. Qual é a fração correspondente à plantação de arroz?

5. O censo revelou que, do total da população brasileira, $\dfrac{11}{20}$ são brancos, $\dfrac{10}{25}$ são morenos e negros e a fração restante é de raça amarela.
Qual a fração da população brasileira corresponde à raça amarela?

Gabarito

1. a) 1 b) 2 c) $\dfrac{13}{6}$ d) $\dfrac{11}{4}$ e) $\dfrac{75}{7}$ f) $\dfrac{8}{9}$

2. a) $\dfrac{7}{12}$ b) $\dfrac{7}{12}$ c) $\dfrac{79}{45}$ d) $\dfrac{131}{360}$ e) $\dfrac{39}{20}$ f) $\dfrac{2}{21}$

3. a) $\dfrac{123}{60}$ b) $\dfrac{9}{30}$ c) $\dfrac{19}{12}$ d) $\dfrac{80}{33}$

4. $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{5}{15}+\frac{3}{15}=\frac{8}{15}$.

   A plantação inteira corresponde a $\frac{15}{15}$ logo, temos de arroz $\frac{15}{15}-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$

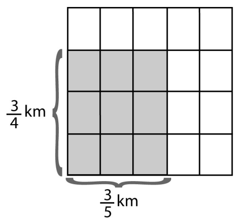
5. $\frac{5}{100}$

Multiplicação e divisão de números fracionários

Multiplicação

João tem um terreno quadrado de lados medindo $1\,km$. Ele precisa cercar uma parte desse terreno para o pasto de seu gado. Para isso, vai usar $\frac{3}{4}$ de um lado e $\frac{3}{5}$ do outro. Que fração do terreno será o pasto? Qual será a área desse pasto?

Como vão ser usados $\frac{3}{4}$ de um lado e $\frac{3}{5}$ do outro, o pasto será $\frac{9}{20}$ do terreno. (Observe o gráfico)



Mas o terreno é quadrado e a área de um quadrado é: $A=1\,km\cdot 1\,km=1\,km^2$.

Como o pasto é igual a $\frac{9}{20}$ do terreno, sua área é $\frac{9}{20}$ de $1\,km^2$, ou seja, $\frac{9}{20}\,km^2$. Assim, a área do pasto, que é um retângulo, pode ser obtida aplicando a fórmula: $A_{\text{retângulo}}=b\cdot h$ onde $b\rightarrow$ base e $h\rightarrow$ altura.

Daí $A_{\text{retângulo}}=\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}\right)\,km^2$. Temos que $\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{9}{20}$.

Portanto para multiplicar duas frações, basta multiplicar os numeradores entre si e os denominadores entre si.

Exemplos:

1) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}=\frac{15}{24}=\frac{5}{8}$ 2) $\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{3}=\frac{21}{21}=1$

Observação: Podemos evitar a simplificação do produto de frações se tomarmos o cuidado de cancelar os fatores comuns ao numerador e denominador das frações que vão ser multiplicadas.

Exemplos:

1) $\frac{4}{\cancel{5}_1}\cdot\frac{\cancel{40}^{8}}{7}=\frac{32}{7}$

2) $\frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{5}_{1}}\cdot\frac{\cancel{50}^{\cancel{10}^{5}}}{\cancel{12}_{\cancel{4}_{2}}}=\frac{5}{2}$

Exercícios

1. Calcule

   a) O triplo de $\frac{1}{7}$

   b) A metade de $\frac{4}{5}$

   c) A terça parte de 18

   d) Os $\frac{4}{7}$ de $\frac{11}{5}$

2. Calcule os produtos

   a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}$

   b) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$

   c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8}$

   d) $9 \cdot \frac{1}{9}$

3. Calcule o valor das expressões:

   a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}$

   b) $\left(\frac{3}{5} + \frac{5}{3}\right) \cdot \left(\frac{8}{7} - \frac{7}{8}\right)$

   c) $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{5}{2} - \frac{2}{5}\right)$

   d) $\frac{18}{35} \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{24}{15} \cdot \frac{5}{49}\right) \cdot \left(\frac{7}{3} - 1\right)$

4. José comeu $\frac{2}{5}$ de uma barra de chocolate e João comeu $\frac{2}{3}$ do restante.

   a) Quem comeu mais?

   b) Que fração do chocolate sobrou?

Gabarito

1. a) $\frac{3}{7}$ b) $\frac{2}{5}$ c) 6 d) $\frac{44}{35}$

2. a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{6}{35}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 1

3. a) $\frac{17}{40}$ b) $\frac{17}{28}$ c) $\frac{9}{40}$ d) $\frac{2136}{8575}$

4. a) Os dois comeram a mesma quantidade de chocolate, pois José comeu $\frac{2}{5}$ e João comeu $\frac{2}{3}$ do restante $\left(\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}\right)$ que significa $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{5} = \frac{2}{5}$.

   b) José e João comeram $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ e sobrou $\frac{5}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$.

Divisão

Inverso ou recíproco

Chama-se inverso ou recíproco da fração $\frac{3}{4}$ a fração $\frac{4}{3}$, isto é, a fração que se obtém trocando entre si o numerador e o denominador de $\frac{3}{4}$.

Note que $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

> Inverso ou recíproco de uma fração diferente de zero é a fração que se obtém trocando entre si o numerador e o denominador da fração dada. O produto de uma fração pelo seu inverso é 1.

Quociente de frações

Vamos calcular o quociente $\frac{3}{4} : \frac{5}{6}$.

Denominemos o quociente procurado pela fração $\frac{x}{y}$.

Temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$$

Multiplicando o quociente pelo divisor, obtemos o dividendo:

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3}{4}$$

Vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pelo inverso de $\frac{5}{6}$, isto é, $\frac{6}{5}$.

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$$

Como $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{5} = 1$, vem:

$$\frac{x}{y} \cdot 1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}.$$

Sendo $\frac{x}{y} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6}$ e $\frac{x}{y} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$.

Concluímos $\frac{3}{4} : \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5}$.

> O quociente de uma fração por outra é igual ao produto da 1ª fração pelo inverso da 2ª.

Exercícios

1. Calcule:

   a) $\dfrac{5}{3} : \dfrac{10}{3}$ c) $\dfrac{3}{5} : \dfrac{9}{7}$ e) $2\,\dfrac{1}{7} : 3\,\dfrac{4}{14}$

   b) $6 : \dfrac{1}{3}$ d) $\dfrac{19}{80} : \dfrac{38}{40}$ f) $\dfrac{\frac{3}{5}}{\frac{5}{4}}$

2. Calcule o valor das seguintes expressões:

   a) $\left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{1}{5}\right) : \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\right)$

   b) $\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) : \left(1 - \dfrac{1}{6}\right)$

   c) $\dfrac{11}{5} : \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} : \dfrac{3}{4}\right)$

   d) $\left[\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) : \dfrac{7}{6} + \dfrac{1}{7} \cdot \left(3\,\dfrac{1}{4} - \dfrac{5}{3}\right)\right] \cdot \dfrac{1}{3} : \dfrac{1}{7}$

3. João tem o salário incluindo as horas extras de R\$ 3.840,00. João gasta metade do salário para alimentar sua família, gasta $\dfrac{1}{4}$ do salário no aluguel da casa e $\dfrac{3}{16}$ do restante em condução.

   a) Quanto custa o aluguel da casa do João?

   b) Quanto a família de João gasta em condução?

   c) Que fração do salário sobra para outras despesas?

Gabarito

1. a) $\dfrac{1}{2}$ b) 18 c) $\dfrac{7}{15}$ d) $\dfrac{1}{4}$ e) $\dfrac{15}{23}$ f) $\dfrac{12}{25}$

2. a) $\dfrac{48}{5}$ b) $\dfrac{3}{10}$ c) $\dfrac{396}{125}$ d) $\dfrac{37}{36}$

3. a) R\$ 960,00 b) R\$ 180,00 c) $\dfrac{13}{64}$

Sugestões e Soluções das Atividades Propostas

Atividade 01

Explique de maneira convincente o porque dos números 1134 e 53172 são divisíveis por 9.

Solução:

Você deve ter se lembrado do critério de divisibilidade por 9, que é simples: um número é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos for divisível por 9. Assim, como $1 + 1 + 3 + 4 = 9$, 1134 é divisível por 9. Mas, isso é convincente? Bem, se você simplesmente acredita nas regras, não há mais nada a discutir. No entanto, essa não é uma atitude matemática muito positiva. Regras são importantes pois são muito úteis em situações práticas, fazem parte da cultura matemática. Mas, é fundamental entender o porque da regra funcionar. Neste caso, a explicação é simples. Devido ao nosso sistema numérico decimal, $1134 = 1 \times 1000 + 1 \times 100 + 3 \times 10 + 4$. Agora, como $1000 = 999 + 1$, $100 = 99 + 1$ e $10 = 9 + 1$, podemos escrever

$$\begin{aligned} 1134 &= 1 \times (999 + 1) + 1 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 4 = \\ &= [1 \times 999 + 1 \times 99 + 3 \times 9] + [1 + 1 + 3 + 4]. \end{aligned}$$

Como o número $[1 \times 999 + 1 \times 99 + 3 \times 9]$ é divisível por 9, claramente 1134 é divisível por 9 se, e somente se, 1+1+3+4 é divisível por 9. Repita o raciocínio com o outro número. Observe que essa explicação é ilustrativa mas não é uma *demonstração* do critério de divisibilidade por 9, uma vez que usamos apenas um exemplo.

Atividade 02

Por que é difícil decompor o número 97343 em fatores primos?

Solução:

Quanto tempo você gastou com esse exercício? Bem, a idéia aqui é colocar a teoria e a prática em contato. A teoria é o maravilhoso Teorema Fundamental da Aritmética que afirma que *todo* natural admite uma única decomposição em fatores primos. A prática é o ganha-pão de muitos matemáticos: pode ser muito, muito difícil decompor um número em fatores primos. Determinar se um dado número é primo ou não já é uma tarefa titânica. Procure saber sobre os chamados primos de Mersenne e você terá uma idéia melhor do que isso quer dizer. Mas, voltemos à nossa *vaca fria*: por que é difícil decompor o número 97343 em fatores primos?

A pergunta tem um certo subjetivismo e você poderia ter respondido: mas não é difícil decompor este número, veja: $97343 = 311 \times 313$.

A eventual dificuldade reside no fato de que para decompor teríamos que tentar a sua divisibilidade por todos os primos menores do que 311.

Moral da História: se os fatores primos de um número forem relativamente grande, é difícil obter sua decomposição em fatores primos.

Atividade 03

Quais das seguintes equações podem ser resolvidas no âmbito dos números naturais? E no âmbito dos números inteiros?

a) $x + 2 = 7$

b) $x + 4 = 1$

c) $3x + 7 = 4$

d) $2x + 4 = 8$

e) $2x + 5 = 7$

f) $2x + 6 = 13$

Solução:

As equações (a), (d) e (e) têm respostas 5, 2 e 1, respectivamente. Portanto, podem ser resolvidas no conjunto dos números naturais. Já as equações (b) e (c) demandam um conjunto maior, uma vez que é preciso *subtrair* 3 de 4 e de 7 para obtermos 1 e 4, respectivamente. Assim, as respostas de (b) e (c) são, respectivamente, -3 e -1. Finalmente, para resolver a equação (f) precisamos de um número tal que, somado a si mesmo resulte em 7, um número ímpar. Ora, não há, no conjunto dos inteiros, um número com tal característica. Para resolver essa equação (muito simples), precisamos estender os inteiros a um conjunto maior, o que chamamos conjunto dos racionais... O nome científico do bicho é *corpo de frações dos números inteiros*. Mas, não se preocupe. Chegará a hora de você aprender esse latim todo, quando você fizer as disciplinas de Álgebra.

Atividade 04

Use a definição anterior de igualdade de números racionais para verificar que $\dfrac{3}{-5} = \dfrac{-3}{5}$.

Solução:

Para verificar a igualdade $\dfrac{3}{-5} = \dfrac{-3}{5}$, devemos verificar se 3×5 é igual a $(-3) \times (-5)$, que é verdade, pois ambos produtos são iguais a 15.

Atividade 05

Determine o valor de x tal que $\dfrac{2}{x-1} = \dfrac{1}{3}$.

Solução:

Antes de qualquer coisa, para que $\dfrac{2}{x-1}$ seja um legítimo número racional, uma fração, é necessário que x seja diferente de 1, pois $x - 1$ deve ser diferente de zero. Mas, considerando essa condição, fazemos $(x-1)\times 1 = 2\times 3$, ou seja, $x - 1 = 6$, cuja solução é $x = 7$, que respeita a condição $x \neq 1$.

Aula 2 – Números Decimais

Introdução

Há um livro maravilhoso, escrito por Tobias Dantzig, cujo título é "Número, a Linguagem da Ciência". Não há afirmação mais verdadeira. Seria impossível atingir o desenvolvimento científico-tecnológico a que chegamos sem dispor de ferramenta tão eficaz quanto os sistema numérico decimal representado por algarismos hindu-arábicos.

Esse sistema, que o mundo todo usa, tem suas origens na Índia, por volta de 200 aC, foi adotado pelos árabes no século 8. Em 711 os árabes cruzaram o Estreito de Gibraltar e invadiram a Península Ibérica, levando na bagagem os algarismos e tantos outros conhecimentos, de astronomia, medicina, e hoje enriquecem a cultura ocidental. O resto da Europa eventualmente se rendeu ao novo sistema, mas não o fez sem muita resistência.

A grande qualidade do sistema numérico decimal, representado pelos algarismos hindu-arábicos, os nossos números de cada dia, é sua simplicidade, aliada a uma notação extremamente feliz – posicional. Ao escrevermos 11 031, onze mil e trinta e um, usamos o algarismo 1 em três situações, com diferentes significados, diferenciados apenas por suas posições em relação aos demais algarismos, o 3 e o 0.

Essa conquista estupenda, tanto para a Matemática quanto para as demais ciências, se fez sem alarde nem nomes – de maneira anônima – bem ao estilo da cultura hindu.

Isso só foi possível devido à introdução de um símbolo representando o nada – a coluna vazia. Isso não fora considerado pelas outras culturas, representar o vazio era inconcebível. Veja que a etimologia da palavra *zero* é do latim zephyrum, o nome do vento oeste, que provem de sifr, árabe para *vazio*, pronunciado vulgarmente *séfer*. Sem o zero não poderíamos diferenciar 11 031 de 1 131.

Atividade 01

Você sabe escrever 11 031 usando números romanos? Experimente multiplicar, por exemplo, MMMCDXXIII por CLVII ...

Números Decimais – os números nossos de cada dia

Quando falamos em números, com as pessoas comuns, os números com os quais lidamos na nossa vida diária, na padaria, no ônibus, no posto de gasolina, estamos nos referindo a uma classe bem especial de números racionais – os chamados números decimais. Veja alguns exemplos:

$$1205 \qquad -11,7547 \qquad 9,82 \qquad 10\,000,00 \qquad 0,000349 \qquad 171$$

Esses números podem representar medidas de comprimento, preços de objetos, notas de provas, índices dos mais diversos e muito mais. Apesar de serem uma parcela realmente pequena de números, mesmo se considerarmos apenas o conjunto dos números racionais, eles bastam para a maioria das nossas necessidades diárias. Veja a definição de números decimais:

> Os *números decimais* são todos aqueles que podem ser escritos na forma $\pm\dfrac{p}{10^n}$, com p e n inteiros tais que $p, n \geq 0$.

Assim, a lista anterior pode ser reconhecida como

$$1205 = \frac{1205}{1} \qquad -11,7547 = -\frac{117547}{10\,000} \qquad 9,82 = \frac{982}{100}$$

$$10\,000,00 = \frac{10000}{1} \qquad 0,000349 = \frac{349}{1000000} \qquad 171 = \frac{171}{1}$$

Fração decimal

Observe as frações escritas abaixo:

$$\frac{5}{10}, \ \frac{2}{100}, \ \frac{3}{1000}, \ \frac{25}{10000}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

$$10^1 \quad 10^2 \quad 10^3 \quad 10^4$$

Os denominadores são potências de 10.

> Definição: Denomina-se fração decimal toda fração em que o denominador é uma potência de 10 com o expoente natural.

Numeral decimal

Sabemos que cada algarismo que compõe <u>um</u> numeral ocupa certa ordem. Assim, no numeral:

$$\boxed{4689}$$

O valor dos algarismos deste numeral depende da ordem que ele ocupa. Como $4689 = 4 \times 1000 + 6 \times 100 + 2 \times 10 + 9$, então

O algarismo 4 na ordem das unidades de milhar $\longrightarrow$ vale $4 \cdot 1000$

O algarismo 6 na ordem das centenas $\longrightarrow$ vale $6 \cdot 100$

O algarismo 8 na ordem das dezenas $\longrightarrow$ vale $8 \cdot 10$

O algarismo 9 na ordem das unidades $\longrightarrow$ vale $9 \cdot 1$

Quando um algarismo é deslocado uma ordem à direita, seu valor passa a ser $\frac{1}{10}$ do anterior. E, quando ele é deslocado à esquerda o seu valor passa a ser $10\times$ o anterior.

Para representar os números racionais de outro modo, vamos apresentar os números decimais. Como teremos que representar partes da unidade, ampliaremos o sistema de numeração decimal.

1º) Colocaremos uma vírgula para separar as unidades inteiras das partes da unidade.

2º) Criaremos novas ordens, chamadas ordens decimais ou casas decimais, à direita da vírgula, obedecendo ao princípio de cada ordem vale $\dfrac{1}{10}$ do que está a sua esquerda.

Eis alguns numerais e como devem ser lidos:

0,8 $\rightarrow$ oito décimos

0,18 $\rightarrow$ dezoito centésimos

5,8 $\rightarrow$ cinco inteiros e oito décimos

7,20 $\rightarrow$ sete inteiros e vinte centésimos

19,421 $\rightarrow$ dezenove inteiros e quatrocentos e vinte e um milésimos

Fração decimal e numeral decimal

Transformação de numeral decimal em fração decimal.

Transformar $0,043$ em fração decimal.

$$0,043 = \frac{43}{1000}$$

Portanto,

Para transformar um numeral decimal em fração decimal escreve-se uma fração cujo numerador é o numeral decimal sem a vírgula e cujo denominador é o algarismo 1 seguido de tantos zeros quantas forem as casas decimais do numeral dado.

Exemplos:

1) $47,\underbrace{23}_{\substack{2 \text{ casas}\\ \text{decimais}}} = \dfrac{4723}{100} \to 2 \text{ zeros}$

2) $0,\underbrace{00431}_{\substack{5 \text{ casas}\\ \text{decimais}}} = \dfrac{431}{100000} \to 5 \text{ zeros}$

Transformação de fração decimal em numeral decimal.

Transformar $\dfrac{35}{10000}$ em numeral decimal.

$\dfrac{35}{10000}$ representa 35 décimos de milésimos, logo $\dfrac{35}{10000} = 0,0035$

Para transformar uma fração decimal em número decimal escreve-se o numerador da fração com tantas ordens decimais quantos forem os zeros do denominador.

Exemplos:

1) $\dfrac{324}{\underbrace{10}_{1 \text{ zero}}} = 32,\underbrace{4}_{\substack{1 \text{ casa}\\ \text{decimal}}}$

2) $\dfrac{34}{1\underbrace{0000}_{4 \text{ zeros}}} = 0,\underbrace{0034}_{\substack{4 \text{ casas}\\ \text{decimais}}}$

Propriedades dos números decimais.

Consideremos 4,31

Sabemos que $4,31 = \dfrac{431}{100}$

Vamos multiplicar os termos dessa fração por 10, por 100 e por 1000.

$$\frac{431}{100} = \frac{4310}{1000} = \frac{43100}{10000} = \frac{431000}{100000}$$

Se transformarmos cada fração em numeral decimal, obtemos:

$$4,31 = 4,310 = 4,3100 = 4,31000$$

Concluímos então

> 1ª Propriedade:
> Um numeral decimal não se altera quando retiramos ou acrescentamos um ou mais zeros à direita da sua parte decimal.

Exemplos:

1) $34,1 = 34,10 = 34,100 = 34,1000$

2) $4,181 = 4,1810 = 4,18100 = 4,181000$

Conseqüência

A principal conseqüência da 1ª propriedade é que dois números decimais quaisquer podem sempre ser representados com o mesmo número de ordens decimais.

Exemplo:

4,156 e 2,14 podem ser escritos:

4,156 e 2,140 (ambos com 3 casas)

Consideremos 4,518.

Multipliquemos esse numeral por 10, por 100 e por 1000:

$$\begin{aligned}
4,518 \times 10 &= \frac{4518}{100\cancel{0}} \times \frac{1\cancel{0}}{1} = \frac{4518}{100} = 45,18 \\
4,518 \times 100 &= \frac{4518}{10\cancel{0}\cancel{0}} \times 1\cancel{0}\cancel{0} = \frac{4518}{10} = 451,8 \\
4,518 \times 1000 &= \frac{4518}{1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}} \times 1\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} = 4518
\end{aligned}$$

Daí temos:

> 2ª Propriedade:
> Para multiplicar um numeral decimal por 10, por 100, por 1000, etc, basta deslocar a vírgula uma, duas, três, etc, casas decimais para a direita.

Exemplos:

1) $13,4 \times 10 = 134$

2) $431,45 \times 100 = 43145$

3) $0,00412 \times 1000 = 4,12$

Aplicação - Comparação de decimais

A 2^a propriedade é aplicada na comparação de numerais decimais.

Exemplo: Comparar os numerais

$$0,345 \text{ e } 0,2431$$

1°) Reescrevemos os dois decimais com igual número de casas (1^a propriedade)

$$0,3450 \text{ e } 0,2431$$

2°) Eliminamos a vírgula (multiplicar por 10000) e comparamos os números restantes.

$$3450 > 2431$$

então $0,345 > 0,2431$.

Vamos dividir 314,21 por 10, por 100 e por 1000.

$$\begin{aligned}
314,21 : 10 &= \frac{31421}{100} : 10 = \frac{31421}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{31421}{1000} = 31,421 \\
314,21 : 100 &= \frac{31421}{100} : 100 = \frac{31421}{100} \cdot \frac{1}{100} = \frac{31421}{10000} = 3,1421 \\
314,21 : 1000 &= \frac{31421}{100} : 1000 = \frac{31421}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{31421}{100000} = 0,31421
\end{aligned}$$

Daí temos:

> 3^a Propriedade:
> Para dividir um número decimal por 10, por 100, por 1000, etc, basta deslocar a vírgula uma, duas, três, etc, casas decimais para a esquerda.

Exemplos:

1) 5,21 : 10 = 0,521

2) 434,25 : 100 = 4,3425

3) 3,421 : 1000 = 0,003421

Notação Científica

É comum precisarmos comparar números decimais. Esse processo pode ser facilitado se usarmos uma convenção a que chamamos *notação científica*.

A notação científica de um número decimal é escrevê-lo na forma

$$\pm\, a \times 10^n$$

onde a é um decimal tal que $1 \leq a < 10$, com n um inteiro.

O fator 10^n é a *ordem de grandeza* do número.

Veja, no quadro a seguir exemplos de números com suas respectivas notações científicas e ordens de grandeza.

$147,357$	$1,47357 \times 10^2$	2
$0,0000567$	$5,67 \times 10^{-5}$	-5
-22052	$-2,2052 \times 10^4$	4
$0,005 \times 10^{-4}$	$5,0 \times 10^{-7}$	-7

Exercícios

1. Transforme em frações decimais.

   a) 0,3 c) 11,43 e) 9,2324
   b) 1,34 d) 0,222 f) 0,0014

2. Transforme um numeral decimal.

   a) $\dfrac{8}{1000}$ c) $\dfrac{138}{100}$ e) $\dfrac{1723}{100}$
   b) $\dfrac{54}{10}$ d) $\dfrac{41}{1000}$ f) $\dfrac{324}{10^5}$

3. Transforme as porcentagens abaixo em número decimal e em fração decimal.

   a) 18% c) 50%
   b) 34% d) 70%

4. Um professor recebia R$ 200,00 por aula e teve um aumento de 35%. Quanto passou a ganhar por aula?

5. Efetue

   a) $0,34 \times 10$ c) $0,004 \times 1000$ e) $0,74 : 100$ g) $0,1 : 1000$
   b) $0,0453 \times 100$ d) $42,1 \times 10^5$ f) $4,3 : 10$

Gabarito

1. a) $\dfrac{3}{10}$ b) $\dfrac{134}{100}$ c) $\dfrac{1143}{100}$ d) $\dfrac{222}{1000}$ e) $\dfrac{92324}{10000}$ f) $\dfrac{14}{10000}$
2. a) 0,008 b) 5,4 c) 1,38 d) 0,041 e) 17,23 f) 0,00324
3. a) 0,18 e $\dfrac{18}{100}$ b) 0,34 e $\dfrac{34}{100}$ c) 0,5 e $\dfrac{50}{100}$ d) 0,7 e $\dfrac{7}{10}$
4. R$ 270,00
5. a) 3,4 b) 4,53 c) 4 d) 4210000 e) 0,0074 f) 0,43 g) 0,0001

Adição e subtração de decimais

Adição

Para calcular a soma 3,6 + 0,38 + 31,424 podemos converter os decimais em frações e somá-las:

$$\begin{aligned} 3,6 + 0,38 + 31,424 &= \frac{36}{10} + \frac{38}{100} + \frac{31424}{1000} = \frac{3600 + 380 + 31424}{1000} \\ &= \frac{35404}{1000} = 35,404 \end{aligned}$$

Ou simplesmente somar os números decimais da seguinte forma:

$$\begin{array}{rl} 3,600 & \\ 0,380 & \\ \underline{31,424} & + \\ 35,404 & \end{array}$$

Portanto para somar numerais decimais:

1°) Igualamos o número de casas decimais das parcelas, acrescentando zeros.

2°) Colocamos vírgula debaixo de vírgula.

3°) Somamos como se fossem números naturais e colocamos a vírgula alinhada com as outras.

Subtração

Para subtrair numerais decimais, procedemos de modo similar ao usado na adição.

Exemplo: 29,34 - 14,321

$$\begin{array}{rl} 29,340 & \\ \underline{14,321} & - \\ 15,019 & \end{array}$$

Multiplicação de decimais

Para calcular o produto $3,6 \times 18,36$ podemos converter os decimais em frações e multiplicá-las.

$3,6 \times 18,36 = \dfrac{36}{10} \times \dfrac{1836}{100} = \dfrac{66096}{1000} = 66,096$

Ou simplesmente multiplicar esses números da seguinte forma:

$$\begin{array}{r} 3,6 \\ \underline{18,36} \\ 216 \\ 108 \\ 288 \\ \underline{36} \\ 66,096 \end{array}$$

Daí temos que para multiplicar numerais decimais:

> 1°) Multiplicamos os decimais como fossem números naturais.
> 2°) Damos ao produto tantas casas decimais quanto seja a soma dos números de casas decimais dos fatores.

Divisão de decimais

Divisões exatas

Exemplo 1: Vamos achar o quociente de 10 por 4.

No conjunto dos naturais é 2, mas vamos obter o resto 2.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 2 & 2 \end{array}$$

Podemos neste caso obter um quociente mais preciso (com resto 0) se continuarmos a divisão.

O que faremos então?

Vamos acrescentar um zero ao resto (significa multiplicar o resto por 10), para não alterar o resultado basta dividirmos o quociente por 10, isto significa colocar uma vírgula no quociente depois do 2. Assim teremos:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 2 & 2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 20 & 2, \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \hline 20 & 2,5 \\ 0 & \end{array}$$

Exemplo 2: Vamos dividir 30 por 8. De modo similar ao exemplo 1, vem:

$$\begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 6 & 3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 3, \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 3,7 \\ 4 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 8 \\ \cline{2-2} 60 & 3,75 \\ 40 & \\ \smile{0} & \end{array}$$

Em resumo, há divisões entre naturais em que após alguns passos conseguimos, obter um quociente decimal e resto 0. Nesses casos, o quociente é chamado de decimal exato.

Divisões não exatas

Nem sempre a divisão acaba por apresentar resto 0.

Exemplo: Vamos calcular 211 : 90

1° passo

$$\begin{array}{r|l} 211 & 90 \\ \cline{2-2} 31 & 2 \end{array}$$

Como há um resto, o quociente será da forma 2, . . .
Notamos que o quociente é maior que 2 e menor que 3.

2° passo $\qquad$ 3° passo $\qquad$ 4° passo

$$\begin{array}{r|l} 211 & 90 \\ \cline{2-2} 310 & 2,3 \\ 40 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 211 & 90 \\ \cline{2-2} 310 & 2,34 \\ 400 & \\ 40 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} 211 & 90 \\ \cline{2-2} 310 & 2,344 \\ 400 & \\ 400 & \end{array}$$

Observamos que, mesmo prosseguindo na divisão, jamais obteremos resto zero. O algarismo 4 irá repetir-se como resto e obteremos aproximados, por falta, do quociente, assim 2,344; 2,3444; 2,34444; etc. Note que o algarismo 4 se repete.

Logo temos:

Há divisões não exatas em que conseguimos obter apenas valores aproximados para o quociente, porque nunca se obtém resto zero. Pelo fato de haver algarismos que se repetem periodicamente no quociente, o quociente é chamado de dízima periódica.

Transformar uma dízima periódica em fração

Exemplo 1: $0,333\ldots$

Esta dízima é chamada dízima periódica simples, pois depois da vírgula só tem a parte que repete.

Solução

$$\begin{array}{lcll} 0,333\ldots & = & \square & \quad (\times 10) \\ 3,333\ldots & = & 10\square & \\ 0,333\ldots & = & 1\square & - \\ \hline 3 & = & 9\square & \Longrightarrow \square = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3} \end{array}$$

Logo, temos que $0,333\ldots = \dfrac{1}{3}$.

Exemplo 2: $1,424242\ldots$

É uma dízima periódica simples.

$$\begin{array}{lcll} 1,424242\ldots & = & \square & \\ 142,4242\ldots & = & 100\square & \\ 1,4242\ldots & = & 1\square & - \\ \hline 141 & = & 99\square & \Longrightarrow \square = \dfrac{141}{99} = 1\ \dfrac{42}{99} \end{array}$$

Obs.:

1) Se a parte que repete é 1 algarismo, devemos multiplicar por 10, se a parte que se repete são 2 algarismos devemos multiplicar por 100, etc ... na dízima periódica simples.

2) A fração obtida é chamada geratriz da dízima.

Exemplo 3: $2,3444\ldots$

Esta dízima é chamada dízima periódica composta, pois depois da vírgula tem parte que repete (4) e parte que não repete (3).

Solução

$$\begin{array}{lcll} 2,3444\ldots & = & \square & \\ 234,44\ldots & = & 100\square & \quad \text{(multiplicar até a parte que repete)} \\ 23,44\ldots & = & 10\square & - \quad \text{(multiplicar até a parte que não repete)} \\ \hline 211 & = & 90\square & \Longrightarrow \square = \dfrac{211}{90} = 2\ \dfrac{31}{90} \end{array}$$

Divisão de decimais

Calcular o quociente $\quad 3,24 : 1,8$

$$3,24 : 1,8 = \frac{324}{100} : \frac{18}{10} = \frac{324}{10\cancel{0}} \cdot \frac{1\cancel{0}}{18} = \frac{324}{180}$$

Logo, dividir $3,24$ por $1,8$ é o mesmo que dividir 324 por 180.

$$\begin{array}{l|l} 324 & 180 \\ \cline{2-2} 1440 & 1,8 \\ \underbrace{0} & \end{array}$$

Daí para dividir dois decimais:

1°) Igualamos o número de casas decimais do dividendo e do divisor, acrescentando zeros.

2°) Eliminamos as vírgulas.

3°) Dividimos os números naturais que resultam das etapas anteriores.

Conjuntos numéricos

Vimos a representação dos conjuntos numéricos:

$\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

$\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

$\mathbb{Q}$ é o conjunto dos números racionais, que são aqueles que podem ser escritos em forma de fração.

$$\mathbb{Q} = \left\{x \mid x = \frac{a}{b},\ a,\, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\right\}.$$

Portanto, os números inteiros, os números decimais exatos e as dízimas periódicas são números racionais.

O conjunto dos números que não podem ser representados por frações são denominados números irracionais e representamos por $\mathbb{I}$. Pode-se demonstrar, em estudos mais avançados, que os números irracionais são exatamente as dízimas não periódicas.

Exemplo:

$$\sqrt{2} = 1,414213\ldots$$
$$e = 2,7182818\ldots$$
$$\pi = 3,1415926\ldots$$

O conjunto dos números racionais e irracionais é denominado números reais e representamos por $\mathbb{R}$.

Nota: Na representação de conjuntos numéricos são usadas as convenções:

(i) Sinal (+): elimina os números negativos de um conjunto.

Exemplo: $Z_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (conjunto dos números inteiros não negativos).

(ii) Sinal (−): elimina os números positivos de um conjunto.

Exemplo: $Z_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$ (conjunto dos números inteiros não positivos).

(iii) Sinal ($*$): elimina o número 0 (zero) de um conjunto.

Exemplo: $\mathbb{Z}^*$ é o conjunto dos números inteiros não nulos.

Exemplo: $\mathbb{R}^*$ é o conjunto dos números reais não nulos.

Exercícios

1. Efetue as seguintes operações:

a) 7,48 + 4,3

b) 0,4143 + 3,04 + 51,4

c) 78,05 + 5,8

d) 3,41 - 1,4

e) 43,1 - 11,4

f) 3,41 × 4

g) 11,4 × 10,5

h) 0,01 × 43,4

i) (1,3) × 1,4 + 0,001 × 100

j) 1,64 + 3,1 × 4,3 - 2,3

l) 27,34 + 81,43 - 7,45

m) 65 : 2

n) 1 : 20

o) 1870 : 20

p) 274 : 16

q) 8 : 3

r) 88,2 : 21

s) 40 : 11

2. Calcule os quocientes

a) 2,4 : 0,12

b) 0,02 : 4

c) 2,56 : 0,16

d) 5,14 : 0,3

3. Calcule
$$\frac{(0,1)\cdot(0,001)\cdot 0,1}{10\cdot 0,0001}$$

4. Determine a soma $0,333\ldots + 0,777\ldots$

5. Calcule $0,999\ldots$

6. Determinar a fração de cada dízima periódica:

a) $0,222\ldots$

b) $0,232323\ldots$

c) $3,1133\ldots$

Gabarito

1. a) $11,78$ b) $54,8543$ c) $83,85$ d) $2,01$ e) $31,7$ f) $13,64$
g) $119,70$ h) $0,434$ i) $1,92$ j) $12,67$ l) $101,32$ m) $32,5$
n) $0,05$ o) $93,5$ p) $17,125$ q) $2,666\ldots$ r) $4,2$ s) $3,636363\ldots$

2. a) 20 b) $0,005$ c) 16 d) $17,1333\ldots$

3. $0,01$

4. $\dfrac{10}{9}$

5. 1

6. a) $\dfrac{2}{9}$ b) $\dfrac{23}{99}$ c) $3\,\dfrac{17}{150}$

Sugestão e Solução da Atividade Proposta

Atividade 01

Escreva os números a seguir usando a notação científica.

$22000000 \qquad 0,01^2 \qquad -0,037 \qquad 15 \times 10^{-3} \qquad 151 \times 10^{-3}$

Solução:

$22000000 \;=\; 2,2 \times 10^7; \qquad 0,01^2 \;=\; 0,0001 = 1,0 \times 10^{-4};$

$-0,037 \;=\; -3,7 \times 10^{-2}; \qquad 15 \times 10^{-3} \;=\; 1,5 \times 10^{-4};$

$151 \times 10^{-3} \;=\; 1,51 \times 10^{-1}.$

Aula 3 – Potenciação

Vamos começar esta aula com a definição de potências de números reais. O objetivo mais imediato da definição é simplificar a notação e fornecer um método para trabalhar com grandes números. No entanto, com o aprofundamento do estudo, mais adiante no curso, você perceberá que potenciação está na base das definições das funções logaritmo e exponencial. Esta última uma das mais importantes funções da Matemática.

Definição 1
Seja a um número real e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de expoente n de a, denotada por a^n, é o número

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Definição 2
Seja a um número real não nulo e n um número natural, com $n \geq 2$. A potência de expoente $-n$ de a, denotada por a^{-n}, é o número

$$a^{-n} = \underbrace{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a}}_{n \text{ fatores}}$$

Notas:

1. Se a é um número real qualquer escrevemos

$$a^1 = a\,.$$

   Também, no caso em que $a \neq 0$, assumimos por convenção que

$$a^0 = 1\,.$$

2. A expressão 0^0 não tem sentido matemático. É o que chamamos de uma *indeterminação*. Para entender um pouco mais o porque da impossibilidade de dar sentido numérico a 0^0 você deve aguardar o estudo das disciplinas de Cálculo.

3. Note que se $a \neq 0$ e n é um número natural vale

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n.$$

4. Finalmente, na expressão a^n os números a e n são chamados de base e expoente, respectivamente.

Exemplo 1

a) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64.$

b) $(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = 81.$

c) $(0,2)^3 = (0,2) \times (0,2) \times (0,2) = 0,008.$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$

e) $6^1 = 6.$

f) $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{81}.$

g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{3}{4}}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}.$

h) $10^2 = 10 \times 10 = 100.$

i) $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10000.$

j) $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100} = 0,01.$

k) $10^{-6} = \left(\frac{1}{10}\right)^6 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = 0,000001.$

l) $(-1)^{24} = 1.$

m) $(-2)^{-3} = \left(\frac{1}{-2}\right)^3 = \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}.$

Propriedades das potências

Sejam a e b números reais e m, n números inteiros. Supondo que as potências expressas estão bem definidas então valem as seguintes propriedades:

Potências de mesma base

Para multiplicar, mantém-se a base e somam-se os expoentes, isto é:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}\,.$$

Para dividir, mantém-se a base e subtraem-se os expoentes, isto é:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\,,\; a \neq 0\,.$$

Potências de mesmo expoente

Para multiplicar, mantém-se o expoente e multiplicam-se as bases, isto é:

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n\,.$$

Para dividir, mantém-se o expoente e dividem-se as bases, isto é:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\; b \neq 0\,.$$

Potência de potência

Para calcular a potência de outra potência, mantém-se a base e multiplicam-se os expoentes, isto é:

$$\left(a^m\right)^n = a^{m\cdot n}\,.$$

Obs.:

- Nas propriedades enunciadas a base deve ser não-nula nas seguintes situações: o expoente é negativo ou a potência está no denominador.
- As propriedades têm a finalidade de facilitar o cálculo. Não é obrigatório o seu uso. Devemos usá-las quando for conveniente.
- As propriedades enunciadas podem ser provadas a partir das definições. Por objetividade, partimos direto para os exemplos.

Exemplo 2

a) $3^2 \times 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243.$

b) $\dfrac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3 = 64.$

c) $3^2 \times 5^2 = (3 \times 5)^2 = 15^2 = 225.$

d) $\dfrac{6^4}{3^4} = \left(\dfrac{6}{3}\right)^4 = 2^4 = 16.$

e) $\left(3^3\right)^2 = 3^{3\times 2} = 3^6 = 729.$

f) $\left(a^2b^2\right)^2 = \left(a^2\right)^2\left(b^2\right)^2 = 4^4b^4.$

Aplicação

Todo número real positivo b pode ser expresso na forma $b = a \times 10^p$, onde p é um número inteiro e a um número real, com $1 < a < 10$. Esta maneira especial de escrever o número b é denominado *notação científica*.

Exemplo 3

A notação científica de 450 é $4,5 \times 10^2$ e, a notação científica de $0,042$ é $4,2 \times 10^{-2}$.

Exemplo 4

Qual é a notação científica do número $4^{14} \times 5^{21}$?

Solução:

$$4^{14}\times 5^{21} = \left(2^2\right)^{14}\times 5^{21} = 2^{28}\times 5^{21} = 2^7\times 2^{21}\times 5^{21} = 128\times 10^{21} = 1,28\times 10^{23}\,.$$

Exercícios Propostos

1. Efetue as operações indicadas :

a) $2^3 \times 2^6$

b) $3^2 \times 3^6 \times 3^{-4}$

c) $5^4 \div 5^2$

d) $\dfrac{3^{98}}{3^{95}}$

e) $\dfrac{3^{-4}}{3^{-3}}$

f) $(0,3)^2 \times (0,5)^2$

g) $(-0,04)^2 \times (50)^2$

h) $\dfrac{(-0,6)^2}{(0,2)^2}$

i) $\left(2^4\right)^3$

j) 2^{4^3}

2. Determine o valor da expressão $\left(2^2 \times 2^{-3} \times 3^{-1} \times 3^3\right)^2$.

3. Sendo a e b números reais diferentes de zero, determine o valor de $\dfrac{\left(a^3b^2\right)^3}{\left(a^2b^3\right)^2}$.

4. Determine o valor de $\dfrac{5^{-1} + 7^{-1}}{3^{-1}}$.

5. Determine o valor da expressão

$$\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \div \left(-\frac{1}{2}\right)^3\right] \times \left(-\frac{1}{2}\right)^6 + 2^{-6}.$$

6. Determine o valor de $(0,2)^3 + (0,32)^2$.

7. Se $a = 2^4$, $b = a^3$, $c = 2^a$, determine o valor de $2abc^2$.

8. Determine o valor de $\dfrac{10^2 \times 10^{-4} \times 10^{-3}}{10^{-2} \times 10^{-6}}$.

9. Encontrar o valor aproximado de $1.000.000 \times (1,09)^{160}$ adotando $(1,09)^8 \cong 2$ e $2^{10} \cong 1000$.

10. Determine a quantidade de algarismos do número $16^8 \times 125^9$.

11. Qual é a metade de 2^{22}?

12. Simplifique a fração $\dfrac{2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}}{2^{n+1}}$, onde $n \in \mathbb{N}$.

13. Determine a relação entre a e b onde a e b são números naturais que expressam os números de algarismos de $x = 4^{12} \times 5^{20}$ e $y = 4^{14} \times 5^{18}$, respectivamente.

Gabarito

1. a) 2^9 b) 3^4 c) 5^2 d) 3^3 e) 3^{-1} f) $0,0225$ g) 4 h) 9 i) 2^{12} j) 2^{64}
2. 81/4
3. a^5
4. 36/35
5. 1/128
6. $0,1104$
7. 2^{49}
8. 1000
9. um trilhão
10. 29
11. 2^{21}
12. 7/2
13. $a = b$

Aula 4 – Radiciação

Nesta aula estudaremos radiciação que é, conforme você perceberá, a operação inversa da potenciação. Vamos à definição.

Definição 1
Seja a um número real e n um número natural. O número x é chamado *raiz enésima de* a se, e somente se, $x^n = a$. Ou seja, temos a seguinte equivalência:

$$x \text{ é raiz enésima de } a \Longleftrightarrow x^n = a.$$

Notação

Usaremos a notação $\sqrt[n]{a}$, para representar raízes enésimas do número a. No caso em que $n = 2$ e $a > 0$, em vez de $\sqrt[2]{a}$, escrevemos simplesmente $\sqrt{a}$ e lemos "raiz quadrada de a". Nesta situação, $-\sqrt{a}$ é o simétrico da raiz quadrada de a e $(-\sqrt{a})^2 = a$. Mais adiante vamos definir melhor a representação $\sqrt[n]{a}$.

Existência

Da definição conclui-se que determinar as raízes enésimas de a é o mesmo que determinar todas as soluções da equação $x^n = a$. Vamos examinar os seguintes casos:

Primeiro caso: $a = 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

A única raiz enésima de zero é o próprio zero, ou seja:

$$\sqrt[n]{0} = 0\,.$$

Segundo caso: $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ sendo n par

O número a possui duas raízes enésimas. Essas duas raízes são simétricas. A raiz enésima positiva de a é representada pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$. A raiz enésima negativa de a, por simétrica da primeira, é representada pelo símbolo $-\sqrt[n]{a}$.

Portanto cuidado quando escrevemos, por exemplo, $\sqrt[4]{3}\,,\ \sqrt[6]{5}\,,\ \sqrt{3}\,,$ estamos representando números positivos.

Exemplo 1

O número 16 tem duas raízes quartas. A raiz quarta positiva de 16 é 2. A raiz quarta negativa de 16 é -2. Assim,

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{16} &= \ \ 2 \\ -\sqrt[4]{16} &= -2\,. \end{aligned}$$

As raízes quartas de 16 são 2 e -2.

Terceiro caso: $a < 0$ e $n \in \mathbb{N}$ sendo n par

Neste caso não existe raiz. O que queremos dizer com isto? Simplesmente que no conjunto dos números reais não tem sentido uma expressão como $\sqrt{-2}$ ou $\sqrt[8]{-6}\,.$

Exemplo 2

Não existe raiz quadrada de -4. Ou dito de outro modo, não existe nenhum número real x tal que $x^2 = -4$.

Quarto caso: $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ sendo n ímpar

O número a possui exatamente uma única raiz enésima no conjunto dos números reais. Esta raiz tem o mesmo sinal de a e é representado pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$.

Exemplo 3

a) O número 8 tem uma única raiz cúbica que é representada com o símbolo $\sqrt[3]{8}$ e vale 2, isto é,

$$\sqrt[3]{8} = 2\,.$$

b) O número -64 tem uma única raiz cúbica no conjunto dos números reais, que é representada pelo símbolo $\sqrt[3]{-64}$ e vale -4, isto é:

$$\sqrt[3]{-64} = -4\,.$$

Obs.:

1) No símbolo $\sqrt[n]{a}$ dizemos que:

$\sqrt{\ }$ é o radical
a é o radicando
n é o índice da raiz.

2) Conforme já observado, por convenção, na raiz quadrada, omite-se o índice. Escreve-se, por exemplo, $\sqrt{6}$ e $-\sqrt{6}$ para representar $\sqrt[2]{6}$.

Exemplo 4

a) O número 8 é uma raiz quadrada de 64, pois $8^2 = 64$.

b) O número -8 é uma raiz quadrada de 64, pois $(-8)^2 = 64$.

c) $\sqrt[3]{0} = 0$.

d) $\sqrt{16} = 4$.

e) $-\sqrt{16} = -4$.

f) $\pm\sqrt{16} = \pm 4$.

g) $\sqrt{-4}$ não tem sentido em $\mathbb{R}$.

h) $\sqrt[3]{27} = 3$.

i) $\sqrt[3]{-27} = -3$.

j) $\sqrt[3]{-1} = -1$.

k) $\sqrt[4]{2401} = 7$.

Propriedades das Raízes

Sejam a e b números reais e m, n números inteiros. Suponha que as raízes enésimas que escreveremos nas propriedades de 1 até 4, a seguir, são bem definidas. Então valem as seguintes propriedades:

Propriedade 1 (Radicais de mesmo Índice)
Para multiplicar, mantém-se o índice e multiplicam-se os radicandos, isto é,

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\,.$$

Para dividir, mantém-se o índice e dividem-se os radicandos, isto é,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\,,\ b \neq 0\,.$$

Exemplo 5

a) $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{27} = 3$

b) $\sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$

c) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{4}$

d) $\sqrt{8} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = \sqrt{2} \times 2 = 2\sqrt{2}$

Propriedade 2 (Raiz de Raiz)
Para calcular uma raiz de outra raiz, mantém-se o radicando e multiplicam-se os índices, isto é,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}\ .$$

Exemplo 6

a) $\sqrt{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = 3$

b) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{5}}} = \sqrt[24]{5}$

Propriedade 3 (Raiz de Potência)
Calcular a raiz e em seguida a potência é o mesmo que calcular a potência e em seguida a raiz, isto é,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}\,,\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

Exemplo 7

a) $\sqrt{4^5} = \left(\sqrt{4}\right)^5 = 2^5 = 32$

b) $\sqrt[4]{16^2} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = 2^2 = 4$

Propriedade 4 (Alteração do Índice)
Multiplicar ou dividir índice e expoente por um mesmo número não altera o resultado, isto é,

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}\ .$$

Exemplo 8

a) $\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6:3]{2^{3:3}} = \sqrt{2}$

b) $\sqrt[16]{2^8} = \sqrt[16:8]{2^{8:8}} = \sqrt{2}$

c) $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[2\times 3]{5^3} \times \sqrt[3\times 2]{2^2} = \sqrt[6]{500}$

Notas:

1. Voltamos a enfatizar que as propriedades enunciadas são válidas sob a condição que as potências e radicais estejam bem definidas. Por exemplo, não tem sentido usar a Propriedade 3 para escrever $\sqrt[4]{(-2)^3} = = \left(\sqrt[4]{-2}\right)^3$, uma vez que não tem sentido $\sqrt[4]{-2}$, no conjunto dos números reais.

2. As demonstrações das propriedades enunciadas não são difíceis de serem realizadas. Basta um uso cuidadoso das definições. Se você tiver tempo tente provar algumas delas. Se tiver dificuldade procure seu tutor, ou discuta com seus colegas de grupo de estudo.

Nosso próximo assunto tem como objetivo ampliar a utilização de potências e radicais com o objetivo de facilitar operações com números reais. Ou de um outro ponto de vista, veja a Definição 2 a seguir, trataremos a radiciação como um caso especial de potências de expoentes fracionários.

Potência de Expoente Racional

Definição 2

a) Seja a un número real positivo, n um número natural não-nulo e $\frac{m}{n}$ um número racional na forma irredutível. A potência de base a e expoente racional $\frac{m}{n}$ é definido por

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}\,.$$

b) Seja a um número real, n um número natural ímpar e $\frac{m}{n}$ um número racional na forma irredutível. A potência de base a e expoente racional $\frac{m}{n}$ é definida por

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\;.$$

Nota:

Valem para as potências de expoente racional, as mesmas propriedades válidas para as potências de expoente inteiro.

Exemplo 9

a) $3^{3/5} = \sqrt[5]{3^3}$

b) $2^{1/7} = \sqrt[7]{2^1} = \sqrt[7]{2}$

c) $2^{-2/5} = \sqrt[5]{2^{-2}}$

d) $2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$

Racionalização

Racionalizar o denominador de uma fração significa eliminar os radicais do denominador sem alterá-la.

Exemplo 10

a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2}{\sqrt[5]{2}} \times \frac{\sqrt[5]{2^4}}{\sqrt[5]{2^4}} = \sqrt[5]{16}$

c) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{1}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} \times \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

Exercícios Propostos

1. Efetue:

   a) $\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4}$

   b) $\dfrac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}$

   c) $\sqrt{\sqrt{256}}$

   d) $\sqrt[3]{27^2}$

   e) $\sqrt[8]{3^6}$

   f) $\sqrt{72}$

2. Escrever $\sqrt{45} + \sqrt{80}$ na forma de um único radical.

3. Efetue $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28} + 2^{30}}{10}}$

4. Escreva na forma de um único radical:

   a) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[3]{3} \times \sqrt[6]{5}$

   b) $\sqrt{3\sqrt{2}}$

   c) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[5]{3}}$

   d) $\sqrt[3]{\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}}$

5. Dados os dois números $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt[4]{4}$, determine o maior.

6. Escrever cada potência na forma de radical:

   a) $3^{3/4}$ b) $3^{1/7}$ c) $5^{1/2}$ d) $2^{-2/3}$

7. Determine o valor de $\left(9^{3/2} - 27^{2/3}\right)^{1/2}$.

8. Racionalizar o denominador:

   a) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{27}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

9. Simplificar $\sqrt{\dfrac{75}{12}}$.

10. Simplifique $\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}}$.

Gabarito

1. a) 4 b) $\sqrt{5}$ c) 4 d) 9 e) $\sqrt[4]{27}$ f) $6\sqrt{2}$
2. $7\sqrt{5}$
3. 2^9
4. a) $\sqrt[12]{16200}$ b) $\sqrt[4]{18}$ c) $\sqrt[15]{\frac{32}{27}}$ d) $\sqrt[12]{\frac{16}{3}}$
5. $\sqrt[3]{3}$
6. a) $\sqrt[4]{27}$ b) $\sqrt[7]{3}$ c) $\sqrt{5}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$
7. $3\sqrt{2}$
8. a) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{35}}{7}$ c) $\frac{\sqrt[5]{9}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$
9. $5/2$
10. 2

Exercícios de Reforço

1. (PUC-99) O valor de $\dfrac{\sqrt{1,777\ldots}}{\sqrt{0,111\ldots}}$ é:

   a) $4,444\ldots$ b) 4   c) $4,777\ldots$ d) 3   e) $\dfrac{4}{3}$

2. (PUC-93) Somando as dízimas periódicas $0,4545\ldots$ e $0,5454\ldots$ obtém-se:

   a) um inteiro
   b) um racional maior que 1
   c) um racional menor que 1
   d) um irracional maior que 1
   e) um irracional menor que 1

3. (FGV-SP) Assinale a alternativa incorreta:

   a) Todo número inteiro é racional.
   b) O quadrado de um irracional é real.
   c) A soma de dois números irracionais pode ser racional.
   d) O produto de dois números irraiconais é sempre irracional.

4. Escrever na forma decimal os números:

$$a = \frac{1}{2} \qquad b = \frac{9}{5} \qquad c = \frac{2}{45}$$

5. Escreva na forma fracionária os números

$$a = 0,075 \qquad b = 2,4141\ldots \qquad c = 1,325151\ldots$$

6. (UF-AL-80) A expressão $\sqrt{10+\sqrt{10}} \cdot \sqrt{10-\sqrt{10}}$ é igual a:

   a) 0 b) $\sqrt{10}$ c) $10-\sqrt{10}$ d) $3\sqrt{10}$ e) 90

7. (CESGRANRIO-84) Dentre os números x indicados nas opções abaixo, aquele que satisfaz $\frac{14}{11} < x < \frac{9}{7}$ é:

   a) 1,24 b) 1,28 c) 1,30 d) 1,32 e) 1,35

8. (UFF-1ª fase) Se X e Y são racionais onde $X = 0,1010101010\ldots$ e $Y = 0,0101010101\ldots$ assinale a alternativa que representa o quociente de X por Y

   a) $0,0101010101\ldots$ b) 0,11 c) $10,10101010\ldots$ d) 10

9. (UFF 95 - 1ª fase) Assinale qual das expressões abaixo não é um número real:

   a) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{\pi}$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ d) $\sqrt[3]{-\pi}$ e) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{3}}$

10. (FUVEST) Usando $(1,41)^2 < 2 < (1,42)^2$, prove que

$$6,1 < \frac{50}{1+\sqrt{50}} < 6,3.$$

11. (FUVEST) Seja $r = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

    a) Escreva $\sqrt{6}$ em função de r.

    b) Admitindo que $\sqrt{6}$ seja irracional, prove que r também é irracional.

12. (FUVEST) Sejam a, b e p números reais, $a > 0$, $b > 0$ e $p > 1$. Demonstre: Se $\dfrac{a+bp^2}{a+b} > p$, então $\dfrac{a}{b} < p$.

13. (FATEC-SP) Se $a = 0,666\ldots$, $b = 1,333\ldots$ e $c = 0,1414\ldots$, calcule, então, $a \cdot b^{-1} + c$.

14. (PUC-RJ-80) Efetuadas as operações indicadas, concluímos que o número:
$$\frac{\frac{1}{2} \times (3 - \frac{2}{7})}{2/4 - 1/6} + 3$$
a) é > 5 b) está entre 2 e 3 c) é $< \dfrac{19}{14}$ d) está entre 5 e 6 e) é > 6

15. (FATEC-SP-80) Sejam $x \in \mathbb{R}^*$, $m = x - \dfrac{1}{4x}$ e $y = \sqrt{1+m^2}$, então:

a) $y = \dfrac{1}{2x}$
c) $y = \dfrac{4x^2+1}{4x}$
b) $y = \dfrac{\sqrt{4x^4+4x^2+2}}{2x}$
d) $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{2x}$

Gabarito - Exercícios de reforço

1. b)
2. a)
3. d)
4. $a = 0,5$, $b = 1,8$, $c = 0,044\ldots$
5. $a = \dfrac{3}{40}$, $b = \dfrac{239}{99}$, $c = \dfrac{13219}{9900}$
6. d)
7. b)
8. d)
9. a)
10. Demonstração
11. a) $\sqrt{6} = \dfrac{r^2-5}{2}$ b) Demonstração
12. Demonstração
13. $\dfrac{127}{198}$
14. e)
15. d)

Aula 5 – Fatoração

Fatorar é transformar uma soma ou diferença de duas ou mais parcelas como produto de dois ou mais fatores. Por exemplo, a expressão $cx + cy$ é equivalente à expressão fatorada $c(x + y)$. Note que, $cx + cy = c(x + y)$.

A seguir vamos trabalhar algumas técnicas básicas de fatoração, entre as quais, fator comum, agrupamento, diferenças de quadrados, quadrado perfeito, soma e diferença de cubos e cubo perfeito.

Primeiro caso: Fator Comum

a) $ac + ad = a(c + d)$, a é fator comum de ac e ad

b) $2x^2 - 3xy = x(2x - 3y)$, x é fator comum de $2x^2$ e $3xy$

c) $36x^2y^2 - 48x^3y^4 = 12x^2y^2\big(3 - 4xy^2\big)$, $12x^2y^2$ é fator comum de $36x^2y^2$ e $48x^3y^4$.

d) $3x^2 + 6x^3 + 12x^4 = 3x^2\big(1 + 2x + 4x^2\big)$, $3x^2$ é fator comum dos três termos.

Segundo caso: Agrupamento

a) $ac + bc + ad + bd = c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d)$

b) $ab + ac - b - c = a(b + c) - 1(b + c) = (b + c)(a - 1)$

c) $6x^2 - 4ax - 9bx + 6ab = 2x(3x - 2a) - 3b(3x - 2a) = (3x - 2a)(2x - 3b)$

d) $ab + a - b - 1 = a(b + 1) - 1(b + 1) = (b + 1)(a - 1)$

Terceiro caso: Diferença de Quadrados

A diferença entre dois quadrados $a^2 - b^2$ é igual ao produto da soma $a + b$ pela diferença $a - b$. Assim,

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)\,.$$

A justificativa é que:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2\,.$$

Veja alguns exemplos:

Exemplo 1

a) $a^2 - 16 = a^2 - 4^2 = (a+4)(a-4)$

b) $81 - m^6 = 9^2 - \left(m^3\right)^2 = \left(9 + m^3\right)\left(9 - m^3\right)$

c) $4 - (x-y)^2 = (2 + x - y)(2 - (x-y)) = (2 + x - y)(2 - x + y)$

Quarto caso: Quadrado Perfeito

O desenvolvimento da expressão $(a+b)^2$, resulta no quadrado da primeira parcela, a^2, somado com o dobro do produto das duas parcelas, $2ab$, somado com o quadrado da segunda parcela, b^2, portanto,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \,.$$

A justificativa é que:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2 \,.$$

O quadrado da diferença entre duas parcelas $(a-b)^2$ é igual ao quadrado da primeira parcela, a^2, menos o dobro das duas parcelas, $2ab$, mais o quadrado da segunda parcela b^2, isto é,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \,.$$

A justificativa é que:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a(a-b)-b(a-b) = a^2-ab-ba+b^2 = a^2-ab-ab+b^2 = a^2-2ab+b^2 \,.$$

Obs.: Não confunda o quadrado da diferença $(a-b)^2$ com a diferença de quadrados $a^2 - b^2$.

$$(5-2)^2 = 3^2 = 9$$
$$5^2 - 2^2 = 25 - 4 = 21 \,.$$

Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 2

a) $(2-x)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2x + x^2 = 4 - 4x + x^2$

b) $(3a-2b)^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 2b + (2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

c)

$$\begin{array}{ccccccc} m^2 & - & 6m & + & 9 & = (m-3)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & \\ \sqrt{m^2} & & & & \sqrt{9} & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ccccccc} 25x^2 & + & 30xy & + & 9y^2 & = (5x+3y)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & \\ \sqrt{25x^2} & & & & \sqrt{9y^2} & \end{array}$$

e)

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 4xy & + & 4y^2 & = (x+2y)^2 \\ \downarrow & & & & \downarrow & \\ \sqrt{x^2} & & & & \sqrt{4y^2} & \end{array}$$

Veja agora a técnica com um exemplo mais elaborado envolvendo fatoração. Vamos simplificar as expressões supondo cada denominador diferente de zero:

f) $\dfrac{10x^2-10}{x^2-2x+1} = \dfrac{10(x^2-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{10(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)} = \dfrac{10(x+1)}{x-1}$

g) $\dfrac{a^2-4}{a^2+4a+4} = \dfrac{(a+2)(a-2)}{(a+2)^2} = \dfrac{(a+2)(a-2)}{(a+2)(a+2)} = \dfrac{a-2}{a+2}$

Soma e Diferença de Cubos

A soma de dois cubos é igual ao produto do fator $a+b$ pelo fator a^2-ab+b^2, isto é,

$$a^3+b^3 = (a+b)\big(a^2-ab+b^2\big)\,.$$

Diferença de Cubos

A diferença entre dois cubos é igual ao produto do fator $a-b$ pelo fator a^2+ab+b^2, isto é,

$$a^3-b^3 = (a-b)\big(a^2+ab+b^2\big)\,.$$

Justificativa

$$\begin{aligned}(a+b)\big(a^2-ab+b^2\big) &= \\ &= a\big(a^2-ab+b^2\big)+b\big(a^2-ab+b^2\big) = \\ &= a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3 = \\ &= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3 = \\ &= a^3+b^3\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)\big(a^2+ab+b^2\big) &= \\ &= a\big(a^2+ab+b^2\big)-b\big(a^2+ab+b^2\big) = \\ &= a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3 = \\ &= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3 = \\ &= a^3-b^3\,.\end{aligned}$$

Examine esses exemplos envolvendo fatoração:

Exemplo 3

a) $x^3+8=(x+2)\big(x^2-2x+4\big)$

b) $125-64m^3=(5-4m)\big(25+20m+16m^2\big)$

Veja novos exemplos envolvendo simplificação de frações com denominador diferente de zero:

c) $\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)\big(x^2+2x+4\big)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$

d) $\dfrac{x^3+64}{x^2+8x+16}=\dfrac{(x+4)\big(x^2-4x+16\big)}{(x+4)^2}=\dfrac{x^2-4x+16}{x+4}$

Cubo Perfeito

O cubo da soma de duas parcelas é igual ao cubo da primeira parcela, a^3, mais três vezes o quadrado da primeira pela segunda, $3a^2b$, mais três vezes a primeira pelo quadrado do segundo, $3ab^2$, mais o cubo da segunda parcela, b^3, portanto,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,.$$

O cubo da diferença entre duas parcelas, $(a-b)^3$, é igual ao cubo da primeira parcela, a^3, menos três vezes o quadrado da primeira pela segunda, $3a^2b$, mais três vezes a primeira pelo quadrado do segundo, $3ab^2$, menos o cubo da seginda parcela, b^3, portanto,

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\,.$$

Justificativa

$$\begin{aligned}(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2 &= \\ &= (a+b)\big(a^2+2ab+b^2\big)= \\ &= a\big(a^2+2ab+b^2\big)+b\big(a^2+2ab+b^2\big)= \\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3= \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2 &= \\ &= (a-b)\big(a^2-2ab+b^2\big)= \\ &= a\big(a^2-2ab+b^2\big)-b\big(a^2-2ab+b^2\big)= \\ &= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3= \\ &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\,.\end{aligned}$$

Os exemplos a seguir utilizam as igualdades envolvendo cubos perfeitos e fatoração. Siga atentamente os cálculos.

Exemplo 4

a) $(3x+4y)^3=(3x)^3+3(3x)^2(4y)+3(3x)(4y)^2+(4y)^3=27x^3+108x^2y+144xy^2+64y^3$

b) $(x-2y)^3=x^3-3x^2(2y)+3x(2y)^2-(2y)^3=x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$

c)

$$\begin{array}{llllllll} \text{a) } 27 & + & 135x & + & 225x^2 & + & 125x^3 & =(3+5x)^3 \\ \downarrow & & & & & & \downarrow & \\ \sqrt[3]{27}=3 & & & & & & \sqrt[3]{125x^3}=5x & \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{llllllll} \text{b) } 64 & - & 48x & + & 12x^2 & - & x^3 & =(4-x)^3 \\ \downarrow & & & & & & \downarrow & \\ \sqrt[3]{64}=4 & & & & & & \sqrt[3]{x^3}=x & \end{array}$$

Exercícios Propostos

1. Fatore:

a) $xy+3y+x+3$

b) x^2-y^2

c) $25x^2-4y^2$

d) $36m^2-100n^2$

e) $121-169a^2b^2$

f) $(2x+y)^2-(x-2y)^2$

g) x^8-1

h) $10a^2b^3c^4-15a^3b^2c^4-34a^4b^3c^2$

i) $mn-m-n+1$

j) y^4-16

2. Simplifique:

a) $\dfrac{ab+a+b+1}{a^2-1}$

b) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab-a-b}$

3. Fatorar as seguintes expressões:

a) $4x^2+6xy+2x$

b) $(a-b)^2+2(a-b)$

c) $2ab-ac-2xb+xc$

d) $42x^3y-70x^2y-6x+10$

e) $16x^2-36$

f) $2x^3y^3-16x^2y^4+32xy^5$

g) $25-x^2+6xy-9y^2$

h) x^6+y^6

i) $8a^3-1$

j) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

4. Simplificar as frações, supondo cada denominador diferente de zero:

a) $\dfrac{dx-ex}{mx-nx}$

b) $\dfrac{ax^4-x^3}{x^3y}$

c) $\dfrac{x^2+xy+x+y}{x^2-1}$

d) $\dfrac{a^3+a^2-ab^2-b^2}{a^2+ab+a+b}$

e) $\dfrac{(a-b)^2+4ab}{5a+5b}$

f) $\dfrac{x^4-1}{x^4-2x^2+1}$

g) $\dfrac{a^3-27}{a^2+3a+9}$

h) $\dfrac{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}{a^3-b^3}$

i) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-2ab+b^2}$

5. Calcular o valor de $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ se $a+\dfrac{1}{a}=6$.

6. Os números naturais a e b, com $a>b$, são tais que $a^2-b^2=7$. Determine o valor de $a-b$.

Gabarito

1. a) $(x+3)(y+1)$
   b) $(x+y)(x-y)$
   c) $(5x+2y)(5x-2y)$
   d) $(6m+10n)(6m-10n)$
   e) $(11+13ab)(11-13ab)$
   f) $(3x-y)(x+3y)$
   g) $((x^2)^2+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)$
   h) $a^2b^2c^2(10bc^2-15ac^2-34a^2b)$
   i) $(n-1)(m-1)$
   j) $(y^2+4)(y+2)(y-2)$

2. a) $\dfrac{b+1}{a-1}$ b) $\dfrac{a-b}{a-1}$

3. a) $2x(2x+3y+1)$
   b) $(a-b)(a-b+2)$
   c) $(a-x)(2b-c)$
   d) $\big(7x^2y-1\big)(6x-10)$
   e) $(4x+6)(4x-6)$
   f) $2xy^3(x-4y)^2$
   g) $(25+x-3y)(25-x+3y)$
   h) $\big(x^2+y^2\big)\big(x^4-x^2y^2+y^4\big)$
   i) $(2a-1)\big(4a^2+2a+1\big)$
   j) $(a-b)^3$

4. a) $\dfrac{d-e}{m-n}$ b) $\dfrac{ax-1}{y}$ c) $\dfrac{x+y}{x-1}$
   d) $a-b$ e) $\dfrac{a+b}{5}$ f) $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$
   g) $a-3$ h) $\dfrac{a^2-2ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$ i) $\dfrac{a+b}{a-b}$

5. 34 6. 1

Aula 6 – Equação do 1^o Grau

Sentença Aberta e Equação

Vamos analisar as seguintes sentenças:

$$3 \cdot 5 - 1 = 17 \tag{6.1}$$

$$3 \cdot 6 - 1 = 17 \tag{6.2}$$

$$3 \cdot x - 1 = 17 \tag{6.3}$$

Observe que:

A sentença (6.1) é falsa pois $3 \cdot 5 - 1 = 14 \neq 17$

A sentença (6.2) é verdadeira pois $3 \cdot 6 - 1 = 18 - 1 = 17$

A sentença (6.3) não é verdadeira nem falsa, pois x, chamado variável, pode assumir qualquer valor.

Esse último tipo é um exemplo de sentença aberta. Toda sentença aberta, onde aparece uma variável real, na forma de igualdade é chamada de *equação*. Substituindo x por 6, a sentença aberta $3 \cdot x - 1 = 17$ se transforma em $3 \cdot 6 - 1 = 17$ que é uma sentença verdadeira. Nesta situação $x = 6$ é uma raiz (ou uma solução) da equação, uma vez que para este valor de x, $3 \cdot x - 1 = 17$.

Raiz e Conjunto-Verdade

Raiz (ou solução) de uma equação é um número que transforma a sentença aberta em sentença verdadeira. Conjunto-Verdade ou Conjunto-Solução de uma equação é o conjunto de todas as raízes. Resolver uma equação é determinar o seu Conjunto-Verdade.

Equação do 1^o Grau

Equação do 1^o Grau é toda sentença aberta em uma variável real x, que pode ser expressa na forma $ax + b = 0$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$. Vamos determinar o Conjunto-Solução da equação $ax + b = 0$:

$$ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}\,,\ a \neq 0\,.$$

Portanto, o Conjunto-Solução de $ax + b = 0$, com $a \neq 0$ é $V = \{-\frac{b}{a}\}$.

Exemplo 1

a) O número 2 é raiz da equação $4x - 1 = 7$, pois substituindo x por 2 a sentença aberta $4x - 1 = 7$ se transforma em $4 \cdot 2 - 1 = 7$ que é uma sentença verdadeira.

b) O número 5 não é raiz da equação $4x - 1 = 7$, pois substituindo x por 5 a sentença aberta $4x - 1 = 7$ se transforma em $4 \cdot 5 - 1 = 7$ que é uma sentença falsa.

c) O conjunto solução V da equação $3x - 18 = 0$ é $V = \{6\}$. De fato, $3x - 18 = 0$ se, e somente se, $x = 6$.

d) O conjunto solução da equação $3x + 2 = 3x - 1$ é $\emptyset$, pois

$$3x + 2 = 3x - 1 \Leftrightarrow 0x = -3 \Leftrightarrow 0 = -3$$

que é uma sentença falsa.

e) Qual é o conjunto solução V da equação $3x - 6 = 3(x - 2)$?

Solução:

$$3x - 6 = 3x - 6 \Leftrightarrow 0x = 0\,.$$

Note que $0x = 0$ é uma sentença verdadeira seja qual for $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $V = \mathbb{R}$.

f) Resolver a equação $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{x+1}{3} = 1$.

Solução:

$$\frac{3x}{4} - \frac{x+1}{3} = 1 \Leftrightarrow \frac{9x - 4(x+1)}{12} = \frac{12}{12} \Leftrightarrow 9x - 4x - 4 = 12 \Leftrightarrow 5x = 12 + 4 \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}\,.$$

Daí, o conjunto solução V, da equação é $V = \left\{\dfrac{16}{5}\right\}$.

Aplicações da Equação do 1^o Grau

Exemplo 2

A soma de quatro números inteiros e consecutivos é 38. Achar esses números.

Solução:

Considere os números $x, x+1, x+2$ e $x+3$. Então:

$$x + x + 1 + x + 2 + x + 3 = 38 \Leftrightarrow 4x = 38 - 6 \Leftrightarrow x = 8\,.$$

Logo, os números são: $8, 9, 10$ e 11.

Exemplo 3

A idade de uma pessoa é o dobro da de outra. Há cinco anos a soma das idades das duas pessoas era igual à idade atual da mais velha. Quais são as idades atuais das duas pessoas?

Solução:

Sejam x a idade da pessoa mais nova. Portanto, $2x$ a idade da mais velha. Usando dados de cinco anos atrás encontramos que

$$x - 5 + 2x - 5 = 2x \Leftrightarrow x = 10 \text{ e } 2x = 20\,.$$

Logo, as idades atuais são 10 anos e 20 anos.

Exercícios Propostos

1. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $3x - 27 = 0$.
2. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $12 + 4x = 0$.
3. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $x[2x - (3 - x)] - 3\big(x^2 - 1\big) = 0$.
4. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $3x + 1 = 3x + 4$.
5. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $5(x - 1) = 5x - 5$.
6. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $\dfrac{5x-1}{2} - \dfrac{x}{3} = \dfrac{142}{15}$.
7. Resolva em $\mathbb{R}$, a equação $\dfrac{4x-2}{5} - \dfrac{1}{10} = 2 - \dfrac{1-4x}{2}$.
8. A soma de cinco números ímpares e consecutivos é 905. Quais são esses números?
9. A soma de dois números é 200. Ache-os sabendo que a metade de um é igual a $\frac{3}{4}$ do outro.
10. A diferença entre dois números é 18. Somando 4 a ambos, o maior torna-se o quádruplo do menor. Determine os dois números.

Gabarito

1. $V = \{9\}$
2. $V = \{-3\}$
3. $V = \{1\}$
4. $V = \emptyset$
5. $V = \mathbb{R}$
6. $V = \{\frac{23}{5}\}$
7. $V = \{-\frac{5}{3}\}$
8. $177, 179, 181, 183$ e 185
9. 120 e 80
10. 20 e 2

Aula 7 – Sistemas de Equações do 1^o Grau

Considere numa situação um pouco mais geral, as situações abertas

$$x + y = 8 \tag{7.1}$$

$$x - y = 4 \tag{7.2}$$

onde x e y são números reais. Não é possível decidir se (7.1) ou (7.2) são verdadeiras ou falsas. No entanto, observe que:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

são algumas das soluções da equação $x + y = 8$. Da mesma forma

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}$$

são algumas das soluções da equação $x - y = 4$. Repare que $x = 6$ e $y = 2$ é solução de ambas as equações $x + y = 8$ e $x - y = 4$. Daí, que $x = 6$ e $y = 2$ é solução do sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

Uma solução de um sistema de duas equações e duas incógnitas x e y é qualquer par ordenado (x, y) que satisfaz as duas equações.

Definição 1
Se a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, a equação

$$ax + by = c\,,$$

é dita uma *equação do primeiro grau com duas incógnitas.*

Nota:

1. Conforme visto acima, uma equação do primeiro grau possui muitas soluções.

2. Um conjunto de duas equações do primeiro grau, isto é, um sistema de duas equações do primeiro grau possui uma única solução em x e y ou não possui solução ou possui infinitas soluções.

Vamos agora aprender dois métodos para achar soluções de um sistema de duas equações com duas incógnitas.

Método da Substituição

Exemplo 1

Determine o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$.

Solução:

A partir da equação $2x+5y=1$, vamos "isolar", por exemplo, a variável y, isto é:

$$2x+5y=1 \Leftrightarrow y=\frac{1-2x}{5}.$$

Substituindo o valor de y na equação $3x+2y=-4$ temos que

$$3x+2\left(\frac{1-2x}{5}\right)=-4 \Leftrightarrow 15x+2-4x=-20 \Leftrightarrow 11x=-22 \Leftrightarrow x=-2.$$

Logo,

$$y=\frac{1-2(-2)}{5} \Leftrightarrow y=1.$$

Portanto, $x=-2$ e $y=1$ ou $V=\{(-2,1)\}$ é o conjunto solução.

Método da Adição

Determine o conjunto solução do sistema $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+2y=-4 \end{cases}$.

Solução:

Multiplicando a primeira equação por 2 e a segunda equação por -5, e em seguida adicionando as equações encontramos que,

$$\begin{array}{r} +\begin{cases} 4x+10y &= \ \ 2 \\ -15x-10y &= 20 \end{cases} \\ \hline -11x+0y \ = \ 22. \end{array}$$

Portanto, $-11x=22$ o que implica $x=-2$. Substituindo $x=-2$ em qualquer das duas equações iniciais temos que

$$2(-2)+5y=1 \Leftrightarrow y=1.$$

Daí, $x=-2$ e $y=1$ ou $V=\{(-2,1)\}$ é o conjunto solução.

Veja mais um exemplo usando o método da substituição:

Exemplo 2

Resolver o sistema $\begin{cases} x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

Solução:

A partir da primeira equação $x + 3y = 4$ "isolamos", por exemplo, a variável y, isto é:

$$x + 3y = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4 - x}{3}\,.$$

Substituindo este resultado na equação em $2x - y = 1$ temos que

$$2x - \left(\frac{4 - x}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 6x - 4 + x = 3 \Leftrightarrow 7x = 7 \Leftrightarrow x = 1\,.$$

Logo,

$$y = \frac{4 - 1}{3} = 1\,.$$

Portanto, $x = 1$ e $y = 1$ ou $V = \{(1, 1)\}$ é a solução do sistema de equações.

Exercícios Propostos

1. Resolva o sistema $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$.

2. Resolva o sistema $\begin{cases} x - 4y = 5 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$.

3. Num sítio existem patos e porcos, num total de 40 cabeças e 128 pés. Determine o número de porcos desse sítio.

4. Há cinco anos a idade de Pedro era o dobro da idade de Joana. Daqui a cinco anos a soma das duas idades será de 65 anos. Quantos anos Pedro é mais velho que Joana?

5. O IBGE contratou um certo número de entrevistadores para realizar o recenseamento em uma certa cidade. Se cada um deles recenseasse 100 residências, 60 delas não seriam visitadas. Como, no entanto, todas as residências foram visitadas e cada recenseador visitou 102, quantas residências tem a cidade?

Gabarito

1. $V = \{(1, 1)\}$
2. $V = \{(1, -1)\}$
3. 24
4. 15
5. 3060

Aula 8 – Equação do 2^o Grau

Definição

Definição 1
Equação do 2^o Grau é toda equação da forma $ax^2+bx+c=0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

Nota: Repare que $a \neq 0$ é fundamental na definição da equação do 2^o grau. De fato, se $a = 0$, então $ax^2 + bx + c = 0$ é reduzida à equação $bx + c = 0$ que é uma equação do 1^o grau (na hipótese em que $b \neq 0$).

Exemplo 1

a) Na equação $7x^2 + x - 1 = 0$ temos $a = 7$, $b = 1$ e $c = -1$.

b) Na equação $x^2 - x - 1 = 0$ temos $a = 1$, $b = -1$ e $c = -1$.

c) Na equação $x^2 - 10x = 0$ temos $a = 1$, $b = -10$ e $c = 0$.

d) Na equação $x^2 - 25 = 0$ temos $a = 1$, $b = 0$ e $c = -25$.

Resolução de uma Equação do 2^o Grau (Método de Baskara)

Uma equação do 2^o grau $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, possui no máximo duas raízes. Vamos estabelecer um procedimento para encontrar essas raízes. O método de Baskara consiste em completar quadrados para isolar a incógnita x. Veja como funciona passo-a-passo.

1^o passo: Vamos multiplicar a equação por $4a$:

$$4a\big(ax^2 + bx + c\big) = 4a(0) \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0\,.$$

2^o passo: Vamos somar b^2 aos dois membros da igualdade:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = 0 + b^2 \Leftrightarrow 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2\,.$$

3º passo: Neste último passo vamos manipular algebricamente a equação obtida no passo anterior:

$$\begin{aligned} 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow \quad (2ax+b)^2 = b^2 - 4ac \\ &\Leftrightarrow \quad 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{aligned}$$

A expressão que acabamos de determinar para a raiz x da equação é chamada de *solução geral*. O número $\Delta = b^2 - 4ac$ recebe a denominação de *discriminante* da equação.

Exemplo 2

a) Vamos achar as raízes da equação $x^2 - 7x + 6 = 0$.

Solução:

Temos que $a = 1, b = -7$ e $c = 6$. Então:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{7 \pm 5}{2} \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 6\,.$$

Portanto, $S = \{1, 6\}$ é o conjunto solução da equação.

b) Vamos achar as raízes da equação $x^2 + 11x + 28 = 0$.

Solução:

Temos que $a = 1, b = 11$ e $c = 28$. Então:

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4 \times 1 \times 28}}{2 \times 1} = \frac{-11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-11 \pm 3}{2} \Rightarrow x = -7 \text{ ou } x = -4\,.$$

Portanto, $S = \{-7, -4\}$ é o conjunto solução da equação.

Obs.:

1) Se a, b e c são reais não-nulos, então, a equação $ax^2 + bx + c = 0$, diz-se *completa*.

2) Se pelo menos um dos números reais b ou c é nulo, então, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ diz-se incompleta. Uma equação do 2º grau incompleta pode ser resolvida diretamente, sem passar pela fórmula geral. Vamos tratar estes casos.

Equações Incompletas

1º caso: $b = 0$.

Neste caso, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ se torna $ax^2 + c = 0$. Portanto, a solução pode ser obtida:

$$ax^2 + c = 0 \iff ax^2 = -c \iff x^2 = -\frac{c}{a} \iff x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

Repare que na situação que $-\frac{c}{a} > 0$, a equação admite duas raízes simétricas. No caso em que $-\frac{c}{a} < 0$, a equação não possui solução real.

Exemplo 3

a) Resolvendo a equação $4x^2 - 16 = 0$ temos:

$$4x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 = \frac{16}{4} \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2\,.$$

Daí, $S = \{-2, 2\}$ é o conjunto solução.

b) Resolvendo a equação $2x^2 - 36 = 0$ temos:

$$2x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 = \frac{36}{2} \Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \pm 3\sqrt{2}\,.$$

Daí, $S = \{-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}\}$ é o conjunto solução.

c) Resolvendo a equação $3x^2 + 12 = 0$ temos:

$$3x^2 + 12 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = -12 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-12}{3} \Leftrightarrow x^2 = -4 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-4}\,.$$

Daí, $S = \emptyset$, ou seja, a equação não possui solução nos números reais.

2º caso: $c = 0$.

Neste caso, a equação $ax^2 + bx + c = 0$ se torna $ax^2 + bx = 0$. Resolvendo diretamente encontramos que:

$$ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } ax = -b \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{b}{a}\,.$$

Portanto, uma das raízes é sempre nula e a outra é da forma $-\frac{b}{a}$.

Exemplo 4

a) Resolvendo a equação $6x^2 - 8x = 0$ temos:

$$6x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow 2x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}\,.$$

Daí, $S = \{0, \frac{4}{3}\}$ é o conjunto solução da equação.

b) Resolvendo a equação $x^2 - 7x = 0$ temos que

$$x^2 - 7x = 0 \Leftrightarrow x(x-7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = 7\,.$$

Daí, $S = \{0, 7\}$ é o conjunto solução da equação.

Discussão Sobre Existência e Número de Raízes

As raízes da equação do 2^o grau são obtidas pela fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac\,.$$

Portanto,

Se $\Delta < 0$ então a equação não tem raízes reais;
Se $\Delta = 0$ então a equação tem duas raízes reais e iguais;
Se $\Delta > 0$ então a equação tem duas raízes reais e distintas.

Exemplo 5

a) Na equação $9x^2 + 6x + 1 = 0$ temos que

$$\Delta = 36 - 36 = 0\,.$$

Assim, sem resolver a equação dada, podemos afirmar que ela possui duas raízes reais e iguais pois $\Delta = 0$.

b) Na equação $x^2 + x + 4 = 0$ temos que

$$\Delta = 1 - 16 = -15\,.$$

Assim, sem resolver a equação dada, podemos afirmar que ela não possui raízes reais pois $\Delta < 0$.

Relação entre os Coeficientes e as Raízes de uma Equação do 2^o Grau

Sabemos que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ são dadas por

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\,, \text{ onde } \Delta = b^2 - 4ac\,.$$

Assim,

Soma ($S = x_1 + x_2$) das Raízes

Usando os resultados anteriores obtemos que

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}\,.$$

Logo,

$$S = -\frac{b}{a}\,.$$

Produto ($P = x_1 \cdot x_2$) das Raízes

Usando os resultados anteriores obtemos que

$$P = x_1{\cdot}x_2 = \left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\,.$$

Logo,

$$P = \frac{c}{a}\,.$$

Composição da Equação do 2^o Grau

O nosso objetivo é determinar um processo para a obtenção de uma equação do 2^o grau conhecidas as suas raízes. Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dividindo a equação por a temos que

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a} \Leftrightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Como $S = -\dfrac{b}{a}$ e $P = \dfrac{c}{a}$ temos:

$$x^2 - Sx + P = 0\,.$$

Portanto, a partir da prescrição de dois números x_1 e x_2, a equação $x^2 - Sx + P = 0$, admite estes números como raízes desde que $S = x_1 + x_2$ e $P = x_1 \cdot x_2$.

Exemplo 6

a) Calcule a soma e o produto das raízes das equação $x^2 - 8x + 20 = 0$.

Solução:

Temos que:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{(-8)}{1} = 8 \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{20}{1} = 20\,.$$

b) Calcule a soma e o produto das raízes das equação $x^2 + 18x - 25 = 0$.

Solução:

Temos que:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{18}{1} = -18 \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-25}{1} = -25\,.$$

c) Calcule a soma e o produto das raízes das equação $3x^2 - 54 = 0$.

Solução:

Temos que:

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{3} = 0 \quad \text{e} \quad P = \frac{c}{a} = \frac{-54}{3} = -18\,.$$

d) Escreva a equação do 2^o grau cujas raízes são 4 e -8.

Solução:

Temos que:

$$S = 4 + (-8) = -4$$
$$P = 4 \times (-8) = -32\,.$$

Usando a fórmula $x^2 - Sx + P = 0$ temos que

$$x^2 + 4x - 32 = 0\,.$$

e) Escreva a equação do 2^o grau cujas raízes são $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$.

Solução:

Temos que:

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$
$$P = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1\,.$$

Usando a fórmula $x^2 - Sx + P = 0$ temos que

$$x^2 - 4x + 1 = 0\,.$$

Exercícios Propostos

1. Se x é positivo e se o inverso de $x + 1$ é $x - 1$, determine o valor de x.

2. Determine a relação entre a e b para que a equação $\frac{b^2}{2}\big(x^2 + 1\big) + ax = 0$ não possua raiz real.

3. Resolva as equações:

   a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

   b) $x^2 - 6x + 8 = 0$

   c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

   d) $x^2 + 3\sqrt{2}\,x + 4,5 = 0$

4. Determine m para que a equação $3x^2 + (5m - 2)x + m - 1 = 0$ admita raízes simétricas.

5. Determine o valor de m para que o produto das raízes da equação $5x^2 - 8x + 2m - 1 = 0$ seja igual a 20.

6. Determine a média aritmética das raízes da equação

$$x^2 - (p - m)x + 3p - 4m = 0\,.$$

7. Determine os valores de k para os quais a equação

$$(2k - 3)x^2 - (5k + 6)x + k + 4 = 0\,.$$

   a) Tenha raízes simétricas

   b) Tenha uma só raiz nula

8. Determine o valor de m de modo que o número 3 seja uma das raízes da equação $2x^2 - (4m + 1)x - m + 2 = 0$.

9. Determine a equação do 2^o grau de raízes

   a) 6 e -4

   b) $4 + \sqrt{3}$ e $4 - \sqrt{3}$

   c) $\dfrac{3}{5}$ e -2

10. Resolva a equação $x^2 - 3kx + 2k^2 = 0$.

Gabarito

1. $\sqrt{2}$
2. $a^2 < b^2$
3. a) $S = \{3, -\frac{1}{2}\}$ b) $S = \{2, 4\}$ c) $S = \{2\}$ d) $S = \{\frac{-3\sqrt{2}}{2}\}$
4. $m = \frac{2}{5}$
5. $m = \frac{101}{2}$
6. $\frac{p-m}{2}$
7. a) $k = -\frac{6}{5}$ b) $k = -4$
8. $m = \frac{17}{13}$
9. a) $x^2 - 2x - 24 = 0$ b) $x^2 - 8x + 13 = 0$ c) $5x^2 + 7x - 6 = 0$
10. $S = \{k, 2k\}$

Aula 9 – Inequação do 1^o Grau

Definição

Definição 1
Chama-se *inequação do* 1^o *grau na variável* x toda inequação que se reduz a uma das formas $ax + b \geq 0$, $ax + b > 0$, $ax + b \leq 0$ ou $ax + b < 0$, onde a e b são números reais quaisquer com $a \neq 0$.

Nota: Definições equivalentes podem ser formuladas para inequações do 2^o grau e sistemas de inequações. Por exemplo,

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 5x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

é um sistema de inequações do primeiro grau. Por outro lado,

$$x^2 - 5x + 2 \leq 0$$

é uma inequação do segundo grau.

Resolver uma inequação do primeiro grau é encontrar todos os números reais x que satisfazem a desigualdade. A solução pode ser obtida com auxilio de propriedades conhecidas de números reais. Veja a seguir algumas dessas propriedades:

Se x e y são números reais, então

$$x < y \Longleftrightarrow x + a < y + a\,,\ \forall\ a \in \mathbb{R};$$
$$x < y \Longleftrightarrow xa < ya\,,\ \forall\ a \in \mathbb{R}\,,\ a > 0;$$
$$x < y \Longleftrightarrow xa > ya\,,\ \forall\ a \in \mathbb{R}\,,\ a < 0.$$

Propriedades equivalentes valem para os sinais $\leq$, $\geq$ e $>$.

Exemplo 1

Resolver a inequação $-3x + 9 \geq 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução:

$$-3x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow -3x \geq -9 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3\,.$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$.

Exemplo 2

Resolver a inequação $3(2x-1) - 4(x-2) \geq 3$ em $\mathbb{R}$.

Solução:

$$\begin{aligned} 3(2x-1) - 4(x-2) &\geq 3 \\ 6x - 3 - 4x + 8 &\geq 3 \\ 2x + 5 &\geq 3 \\ 2x &\geq -2 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$.

Exemplo 3

Resolver a inequação $1 < 3x - 5 < 10$ em $\mathbb{R}$.

Solução:

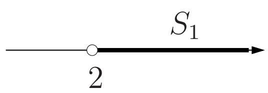
Devemos resolver as inequações $1 < 3x-5$ e $3x-5 < 10$, ou seja, temos um sistemas de inequações,

$$\begin{cases} 1 < 3x - 5 \\ 3x - 5 < 10\,. \end{cases}$$

Resolvendo a primeira inequação encontramos

$$1 < 3x - 5 \Leftrightarrow -3x < -5 - 1 \Leftrightarrow -3x < -6 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2\,.$$

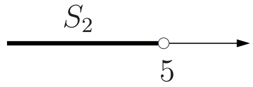
Podemos representar graficamente o conjunto solução S_1 desta inequação. Veja a figura a seguir:



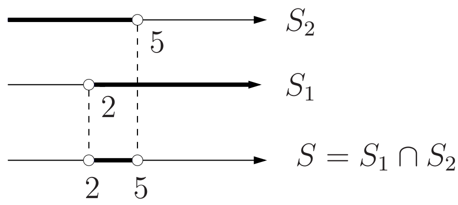
Para a segunda equação temos que

$$3x - 5 < 10 \Leftrightarrow 3x < 10 + 5 \Leftrightarrow 3x < 15 \Leftrightarrow x < 5\,.$$

Representando o conjunto solução S_2 sobre uma reta, encontramos



A interseção $S_1 \cap S_2$ dessas duas soluções dá a solução S procurada. Veja a figura a seguir,



O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$.

Exercícios

1. Resolva as inequações do 1º grau em $\mathbb{R}$:

a) $3(x-8) - 5(x+2) > 3$

b) $\dfrac{x+3}{4} - \dfrac{x-1}{3} \geq 0$

c) $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{2x}{3} \leq 1$

d) $-2 < 3x - 1 < 5$

e) $x < 3x - 4 < 2x + 5$

Gabarito

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-37}{2}\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 13\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -15\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < 2\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 9\}$

Inequação Produto

Nesta seção vamos considerar caso simples de inequação obtidas através de produto de duas inequações do primeiro grau.

Para isto, considere equações do primeiro grau $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, onde

$$f(x) = ax + b \text{ e } g(x) = cx + d\,.$$

Vamos resolver inequações produto do tipo

$$f(x)g(x) \geq 0\,,\ f(x)g(x) > 0\,,\ f(x)g(x) \leq 0 \text{ ou } f(x)g(x) < 0\,.$$

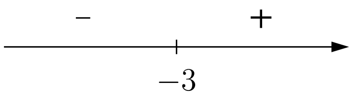
A solução de qualquer destas inequações pode ser obtida através do estudo dos sinais de $f(x)$ e $g(x)$. Vamos ver como isto funciona através dos exemplos a seguir.

Exemplo 4

Resolver a inequação $(x+3)(-2x+4) \geq 0$.

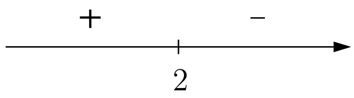
Solução:

Escrevendo $f(x) = x+3$ e $g(x) = -2x+4$ a inequação se torna $f(x) \cdot g(x) \geq 0$. Estudaremos o sinal de $f(x)$ e $g(x)$.



Sinal de $f(x)$

Note que qualquer valor maior que -3, $f(x) > 0$ e qualquer valor menor que -3, $f(x) < 0$.

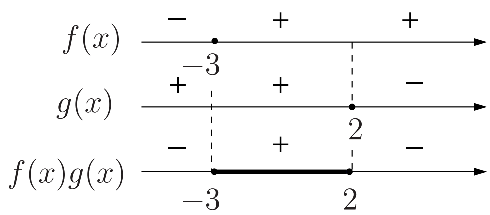


Sinal de $g(x)$

Note que qualquer valor maior que 2, $g(x) < 0$ e qualquer valor menor que 2, $g(x) > 0$.

Os valores divisórios -3 para $f(x)$ e 2 para $g(x)$ são obtidos resolvendo as equações $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$. Em seguida, para determinar o sinal $(+)$ ou $(-)$ resolvemos as inequações $f(x) > 0$, $f(x) < 0$, $g(x) > 0$ e $g(x) < 0$.

Vamos agora determinar o sinal do produto $f(x)g(x)$:



Uma vez que estamos resolvendo a inequação $f(x)g(x) \geq 0$ encontramos

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 2\},$$

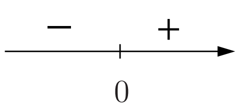
como o conjunto solução.

Exemplo 5

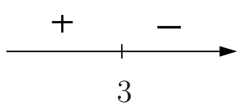
Resolver a inequação $x(-2x+6)(x-2) < 0$.

Solução:

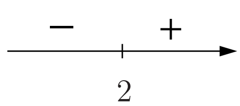
Escrevendo $f(x) = x$, $g(x) = -2x+6$ e $h(x) = x-2$, a inequação se torna $f(x)g(x)h(x) < 0$. Estudando os sinais encontramos:



$x = 0$

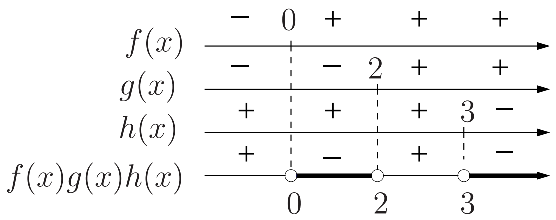


$-2x+6 = 0 \Rightarrow x = 3$



$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Vamos agora determinar o sinal do produto $f(x)g(x)h(x)$:



Uma vez que estamos resolvendo a inequação $f(x)g(x)h(x) < 0$, encontramos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}\,,$$

como o conjunto solução.

Exercícios

1. Resolva as inequações do 1^o grau em $\mathbb{R}$:

   a) $(x+1)(x-5) > 0$

   b) $(-x-1)(3x-5) < 0$

   c) $(x-1)(-x+3)(x-2) < 0$

   d) $2x(3x+1)(-x+2) \leq 0$

Gabarito

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 5\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{5}{3}\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2\}$

Inequação Quociente

Na mesma linha das inequações produto que acabamos de estudar, vamos tratar o caso de inequações onde aparecem quociente do tipo

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0\,,\ \frac{f(x)}{g(x)} > 0\,,\ \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0\,,$$

onde $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

Iremos encontrar o conjunto solução S destas inequações no conjunto dos números reais. No entanto, temos um problema! Nas inequações aparece como denominador $g(x) = cx + d$, $c \neq 0$. Ora, a inequação não tem sentido quando $g(x) = 0$. Isto ocorre quando $x = -\dfrac{d}{c}$. Para contornar esta dificuldade procuraremos o conjunto solução S da inequação de modo que

$$S \subset \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{d}{c} \right\}.$$

Como a regra de sinais para o quociente é similar à regra de sinais para o produto, para resolvermos uma inequação quociente o procedimento segue a linha daquele usado na resolução da inequação produto.Aqui é necessário observar o cuidado extra que $g(x) \neq 0$.

Exemplo 6

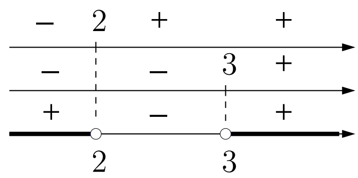
Resolver a inequação $\dfrac{3x-6}{x-3} > 0$.

Solução:

Temos que:

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$



Observando as representações dos sinais concluimos que

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$$

é o conjunto solução da inequação.

Exemplo 7

Resolver a inequação $\dfrac{3x-6}{x-3} \geq 0$.

Solução:

A solução é idêntica ao exemplo anterior com a diferença de que o número $x = 2$ que anula o numerador deve ser acrescentado ao conjunto solução. Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$.

Exemplo 8

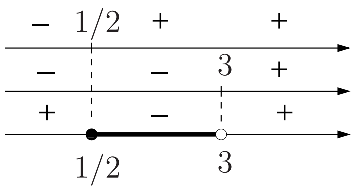
Resolver a inequação $\dfrac{3x-4}{x-3} \leq 1$.

Solução:

Temos que:

$$\frac{3x-4}{x-3} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{3x-4}{x-3} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3x-4-x+3}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-3} \leq 0\,.$$

Assim, podemos representar graficamente os sinais.



Note que $\frac{1}{2}$ é solução. Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 3\}$.

Exercícios

1. Resolva as seguintes inequações:

a) $\dfrac{x+3}{x+5} < 0$

b) $\dfrac{x}{-x+3} \leq 0$

c) $\dfrac{x+3}{x-1} < 1$

d) $\dfrac{x+5}{3x-4} < 2$

Gabarito

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x < -3\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0 \text{ ou } x > 3\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > \frac{13}{5}\}$

Inequação Potência

Encerrando nosso breve estudo de inequações vamos colocar em destaque inequações do tipo

$$[f(x)]^n \geq 0\,,\ [f(x)]^n > 0\,,\ [f(x)]^n \leq 0 \text{ ou } [f(x)]^n < 0\,,$$

onde $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$ e $n > 1$ é um número natural.

Exemplo 9

Resolver as inequações $(3x-6)^6 \geq 0$, $(3x-6)^6 > 0$, $(3x-6)^6 < 0$ e $(3x-6)^6 \leq 0$

Solução:

Como $n = 6$ (par), então a potência $(3x-6)^6$ nunca será negativa. Ela será positiva se $3x - 6 \neq 0$ e nula se $3x - 6 = 0$. Em vista disso podemos escrever o conjunto solução S para cada inequação:

$$(3x-6)^6 \geq 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$$

$$(3x-6)^6 > 0 \Rightarrow S = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$(3x-6)^6 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$$(3x-6)^6 \leq 0 \Rightarrow S = \{2\}$$

Exemplo 10

Resolva a inequação $(4x-8)^3 > 0$.

Solução:

A potência de expoente ímpar tem sempre o sinal da base. Então:

$$(4x-8)^3 > 0 \Leftrightarrow 4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2\,.$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$ é o conjunto solução.

Exemplo 11

Resolva a inequação $(3x-7)^{101} < 0$.

Solução:

A solução é idêntica que no exemplo anterior, isto é, a potência de expoente ímpar tem sempre o sinal da base. Então:

$$(3x-7)^{101} < 0 \Leftrightarrow 3x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}\,.$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{3}\}$ é o conjunto solução.

Exercícios

1. Resolva as seguintes inequações:

   a) $(7-3x)^4 < 0$

   b) $(2x-1)^{100} \geq 0$

   c) $(x-4)^7 \leq 0$

   d) $(3x-1)^{1001} \geq 0$

Gabarito

1. a) $S = \emptyset$ b) $S = \mathbb{R}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{1}{3}\}$

Exercícios Propostos

1. Determine o menor inteiro que verifica a inequação

$$3(4x-2)-2(5x-3) \leq 5(x+1)\,.$$

2. Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $x(x-3)^6(3x-12)^5 < 0$.

3. Determine os valores de $x \in \mathbb{Z}$ que satisfaçam a inequação $\dfrac{56-7x}{5x-37} \geq 0$.

4. Ache todos os números reais x que satisfaçam $\dfrac{x-1}{3-x} < 2$.

5. Ache os valores reais de x para os quais vale a desigualdade $\dfrac{-4}{x}+\dfrac{3}{2} \geq \dfrac{-1}{x}$.

6. Determine o número de soluções inteiras do sistema $3 \leq \dfrac{2x-7}{3} \leq 5$.

7. Ache todos os números reais x que satisfaçam $\left(x^2-4\right)^{10}(x-2)^5 > 0$.

8. Determine os valores reais x que satisfaçam $\dfrac{4}{x-3} \leq 0$.

9. Determine os valores reais x que satisfaçam $\dfrac{4-x}{x+3} > 0$.

10. Determine o número de soluções inteiras da inequação $-3 < x+2 \leq 4$.

Gabarito

1. -1
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3 \text{ ou } 3 < x < 4\}$
3. $x = 8$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{7}{3} \text{ ou } x > 3\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq 2\}$
6. 4
7. $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
8. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$
9. $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 4\}$
10. 7

Aula 10 – Progressão Aritmética

Sequências

Introdução

Uma sequência de números reais, ou uma sequência abreviadamente, é uma coleção enumerável de números reais escrita ordenadamente,

$$(a_i) = a_1\,,\; a_2\,,\; a_3\,,\; \cdots\,,\; a_n\,,\; \cdots$$

onde a_n é um número real qualquer com $i \in \mathbb{N}^*$.

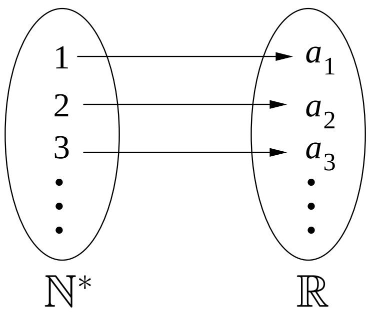
Na verdade, expressamos a sequência infinita, através da inscrição de três pontinhos $\cdots$ à direita da sequência. No entanto, também consideraremos sequências finitas. Por exemplo,

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots$$

e

$$1, -2, 3, \pi, 5, \sqrt{2}$$

são respectivamente uma sequência infinita e uma sequência finita.



Nota: É necessário considerar também sequências finitas do tipo $a_1\,,\; a_2\,,\; \cdots$ $\cdots\,,\; a_k$. Neste caso, basta considerar o conjunto finito $I_k = \{1, 2, 3, \cdots, k\}$ e descrever as sequências de números reais finitas como funções $f : I_k \to \mathbb{R}$.

Exemplo 1

Escreva explicitamente os termos da sequência $a_n = (-1)^{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} a_1 &= (-1)^{1+1} = (-1)^2 = \ \ 1 \\ a_2 &= (-1)^{2+1} = (-1)^3 = -1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, $(a_n) = (a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ ...) = (1, -1, 1, ...)$.

Exemplo 2

Escreva explicitamente os termos da sequência (a_n) tal que $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n + 2n$.

Solução:

Observe que:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= a_{1+1} = a_1 + 2 \times 1 = 2 + 2 = 4 \\ a_3 &= a_{2+1} = a_2 + 2 \times 2 = 4 + 4 = 8 \\ a_4 &= a_{3+1} = a_3 + 2 \times 3 = 8 + 6 = 14 \\ a_5 &= a_{4+1} = a_4 + 2 \times 4 = 14 + 8 = 22 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Logo, $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...) = (2, 4, 8, 14, 22, ...)$.

Classificação das Sequências

Tipos Especiais de Sequências

- (a_n) é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) é crescente se $a_n \leq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) é estritamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) é decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$
- (a_n) é constante se $a_n = a_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$

Exercícios Propostos

1. Considere a sequência (a_n), onde $a_n = 2^n - 1$. Faça as contas e escreva os primeiros cinco termos da sequência.

2. Seja a sequência $(a_1, a_2, a_3, ...)$ cujo termo geral é dado por $a_n = n + 2(n+2)$. Determine os quatro primeiros termos.

3. Determine o 5^o termo da sequência definida por $\begin{cases} a_1 &= 20 \\ 3a_{n+1} &= a_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

4. A partir da sequência

$$\begin{array}{rcrcccccl} a_1 & = & 1 & \times & 9 & + & 2 & = & 11 \\ a_2 & = & 12 & \times & 9 & + & 3 & = & 111 \\ a_3 & = & 123 & \times & 9 & + & 4 & = & 1111 \\ a_4 & = & 1234 & \times & 9 & + & 5 & = & 11111 \\ & & & \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

determine o valor da expressão $\dfrac{1234567 \times 81 + 72}{11}$.

Progressão Aritmética

Definição 1

Sejam a e r dois números reais. Chama-se *Progressão Aritmética* (P.A.) à sequência (a_n) tal que

$$\begin{cases} a_1 &= a \\ a_{n+1} &= a_n + r\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases},$$

ou seja, $(a_n) = (a\,,\ a+r\,,\ a+2r\,,\ a+3r\,,\ \ldots)$.

O número real r chama-se *razão* da P.A. Segue da definição que:

$$r = a_{n+1} - a_n\,,\ \forall n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Assim,

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots$$

Exemplo 3

Seja (a_n) uma sequência. Então:

$(a_n) = (-10, -8, -6, -4, \ldots)$ é uma P.A. de razão 2

$(a_n) = (10, 8, 6, 4, \ldots)$ é uma P.A. de razão -2

$(a_n) = (10, 10, 10, 10, \ldots)$ é uma P.A. de razão 0

Classificação

Se (a_n) é uma P.A. então:

- (a_n) é estritamente crescente se $r > 0$
- (a_n) é estritamente decrescente se $r < 0$
- (a_n) é constante se $r = 0$

Termo Geral de uma P.A.

Seja uma P.A. $(a_n) = (a_1\,, a_2\,, a_3\,, a_4\,, \ldots)$. Pela definição de P.A. temos que:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + r \\
a_3 &= a_2 + r = a_1 + r + r &&= a_1 + 2r \\
a_4 &= a_3 + r = a_1 + 2r + r &&= a_1 + 3r \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 + (n-1)r
\end{aligned}$$

Esta última expressão traduz o e-nésimo termo da P.A. em função do primeiro termo e da razão. A fórmula é chamada *expressão do termo geral.*

Exemplo 4

Na progressão aritmética $(a_n) = (3, 7, 11, \ldots)$, determine o 10^o termo.

Solução:

Temos que $a_{10} = a_1 + (10-1)r$. Como $a_1 = 3$ e $r = 4$ obtemos:

$$a_{10} = 3 + 9 \times 4 = 39\,.$$

Logo, concluimos que o 10^o termo é igual a 39.

Exemplo 5

Se as eleições para presidente continuarem a ocorrer a cada quatro anos, então em que ano ocorrerá a vigésima eleição a partir de 2006?

Solução:

A P.A. $(2006, 2010, 2014, \ldots)$ tem como primeiro termo 2006 e razão igual
a 4. Logo,

$$a_{20} = a_1 + 19r = 2006 + 19 \times 4 = 2082\,.$$

Concluimos que a vigésima eleição será no ano de 2082.

Exercícios Propostos

5. O 150^o número ímpar positivo é:

   a) 151 b) 291 c) 301 d) 299 e) 399

6. Calcule a razão de uma P.A. de 23 termos cujo primeiro termo é 8 e o último termo é 74.

7. Sendo 47 o décimo termo de uma P.A. e 2,75 sua razão, calcule o primeiro termo.

8. Na sequência (a_n) dada por $\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & \dfrac{4a_n+1}{4} \end{cases}$ em que n é um número natural. Então a_{45} vale:

   a) $\dfrac{43}{4}$ b) 13 c) $\dfrac{45}{4}$ d) 12 e) 15

9. Inserindo-se cinco números entre 18 e 96 de modo que a sequência $(18\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,a_4\,,\,a_5\,,\,a_6\,,\,96)$ seja uma progressão aritmética tem-se a_3 igual a:

   a) 43 b) 44 c) 45 d) 46 e) 47

10. Seja A o conjunto dos 1993 primeiros números inteiros estritamente positivos. Quantos múltiplos inteiros de 15 pertencem ao conjunto A?

11. As raízes da equação $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$:

    a) possuem soma igual a 10

    b) estão em P.A., se colocadas em ordem crescente

    c) estão em P.A. cujo produto é 3

    d) possuem soma igual a $\sqrt{10}$

    e) possuem soma igual a 10^2

Desafio: Qual a relação dos coeficientes a, b e c da equação $ax^4+bx^2+c=0$ para que as raízes estejam em P.A.?

Propriedades de uma P.A.

Termos Equidistantes dos Extremos

Definição 2

Considere os n primeiros termos de uma P.A. Dois termos são chamados equidistantes dos extremos se o número de termos que precede um deles é igual ao número que sucede o outro.

$$\underbrace{a_1 \cdots}_{p-1} a_p \,, \;\cdots\;, \; a_k \underbrace{\cdots a_n}_{n-k} \,.$$

Nota: Se a_p e a_k são termos equidistantes em uma P.A. então:

$$p - 1 = n - k \Longrightarrow p + k = 1 + n \,.$$

Propriedade 1

A soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos, isto é,

$$a_p + a_k = a_1 + a_n \,.$$

De fato,

$$\begin{aligned} a_p &= a_1 + (p-1)r \\ a_k &= a_1 + (k-1)r \\ a_n &= a_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

daí,

$$\begin{aligned} a_p + a_k &= 2a_1 + (p+k-2)r \\ &= 2a_1 + (n+1-2)r \\ &= a_1 + a_1 + (n-1)r \\ &= a_1 + a_n \,. \end{aligned}$$

Propriedade 2

Cada termo de uma P.A. é a média aritmética entre o termo anterior e posterior.

Demonstração:

Seja a P.A. $(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,\ldots,\,a_{p-1}\,,\,a_p\,,\,a_{p+1}\,,\,\ldots)$. Então:

$$\begin{aligned}
a_{p-1} &= a_1+(p-1-1)r &&= a_1+(p-2)r\\
a_{p+1} &= a_1+(p+1-1)r &&= a_1+p\cdot r\\
a_{p-1}+a_{p+1} &= 2a_1+(2p-2)r &&= 2a_1+2(p-1)r\\
\frac{a_{p-1}+a_{p+1}}{2} &= a_1+(p-1)r=a_p &&.
\end{aligned}$$

isto é,

$$a_p=\frac{a_{p-1}+a_{p+1}}{2}\,.$$

Exemplo 6

$(a_1\,,\,-1\,,\,a_3\,,\,2\,,\,a_5)$ são os cinco primeiros termos de uma P.A. Determine $a_1\,,\,a_3$ e a_5.

Solução:

Usando a propriedade 2 temos:

$$a_3=\frac{-1+2}{2}\Longrightarrow a_3=\frac{1}{2}\,.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-1 &= \frac{a_1+a_3}{2} &\Longrightarrow\quad -2 &= a_1+\frac{1}{2} &\Longrightarrow\quad a_1&=-\frac{5}{2}\\
2 &= \frac{a_3+a_5}{2} &\Longrightarrow\quad 4 &= \frac{1}{2}+a_5 &\Longrightarrow\quad a_5&=\frac{7}{2}\,.
\end{aligned}$$

Exercícios Propostos

12. Se a, b e c, nesta ordem, são termos consecutivos de uma P.A., então o valor de $2a-3b+2c$ é igual a :

    a) $a+c$ b) $-b$ c) a d) b e) c

13. A média aritmética de 50 números que são termos consecutivos de uma P.A. é 100. Retirando-se dessa P.A. os $3^o, 5^o, 46^o$ e 48^o termos a média aritmética dos 46 termos restantes é:

    a) 100

    b) um número menor que 100

    c) um número compreendido entre 100 e 4600

d) 5000

e) 4600

14. Assinale (V) ou (F) conforme as sentenças sejam verdadeiras ou falsas.

Numa P.A. a soma do 7^o com o 17^o termo é 50. Pode-se afirmar que:

1) ( ) A soma do 1^o com o 23^o termo é maior que 50

2) ( ) A soma do 9^o com o 15^o termo é menor que 50

3) ( ) O dobro do 12^o termo é 50

Soma dos Primeiros n Termos de uma P.A.

Vamos considerar o seguinte problema: Achar a soma dos 100 primeiros termos da sequência $(1, 2, 3, \ldots)$.

Solução:

Note que $(1, 2, 3, \ldots)$ é uma P.A. de razão 1. Consideremos a soma duas vezes em ordem crescente e decrescente:

$$\begin{array}{rcrcrcrcccrcrcr}
\text{S} & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
\text{S} & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
2\text{S} & = & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101
\end{array}$$

logo,

$$2S = 100 \times 101 \Longrightarrow S = \frac{100 \times 101}{2} \Longrightarrow S = 5050\,.$$

Note acima a aplicação da propriedade 1. De um modo geral temos que:

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}\,.$$

Exemplo 7

Qual a soma dos inteiros consecutivos $1\,,\,2\,,\,3\,,\,\cdots\,,\,2004\,,\,2005$?

Solução:

Temos uma P.A. de $a_1 = 1\,,\ r = 1\,,\ n = 2005$ e $a_n = 2005$. Logo,

$$S = \frac{(1 + 2005) \times 2005}{2} = 2.011.015\,.$$

Exercícios Propostos

15. A soma dos p primeiros números naturais ímpares é igual:

    a) ao quadrado da metade de p

    b) ao cubo de p

    c) ao quadrado de p

    d) à metade do quadrado de p

    e) ao triplo de p

16. Sabendo que a soma dos nove primeiros termos de uma P.A. é 17.874, calcule o seu 5^o termo.

17. Numa P.A. sabe-se que $a_{14} = 3$ e $a_{16} = 11$. Calcule a soma dos seus trinta primeiros termos.

18. A soma das frações irredutíveis positivas menores do que 10, de denominador 4, é:

    a) 10 b) 20 c) 60 d) 80 e) 100

19. A soma dos n primeiros termos de uma P.A. infinita é dada por $S_n = 4n^2 - 6n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Determine o primeiro termo e a razão dessa P.A.

20. Determine a soma dos números inteiros estritamente positivo menores que 101 e que não são divisíveis por 3.

21. Considere uma P.A. de cinco termos. A soma dos termos é 10 e a soma do primeiro com o terceiro é -2. O produto da razão pelo primeiro termo é:

    a) 6 b) -3 c) -12 d) -6 e) -15

22. Qual o número mínimo de termos que devemos somar na P.A. $8\,,\,7\,,\,6\,,\,5\,,\,\cdots$ para obtermos soma negativa?

23. A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é $n(n-2)$, qualquer que seja n. Determine o 5^o termo desta progressão.

24. A soma dos múltiplos de 11 comprrendidos entre 1 e 1000 é:

    a) 42000 b) 45045 c) 47500 d) 43045 e) 45450

Exercícios Complementares

25. Os números $a_1\,,\,a_2\,,\,a_3\,,\,\cdots\,,\,a_n\,,\,\cdots$ em que n é inteiro positivo, estão relacionados por $a_p = a_{p-1} + 2$, com $p = 2\,,\,3\,,\,4\,,\,\cdots$. Se $a_1 = 1$, determine a_{57}.

26. Se o número 225 for dividido em três partes, formando uma P.A., de maneira que a terceira parte excede à primeira de 140. Essas partes serão:

    a) primos entre si

    b) múltiplos de 5 e 10 ao mesmo tempo

    c) números cujo produto é 54375

    d) múltiplos de 5 e 3 ao mesmo tempo

    e) indeterminados

27. Em uma P.A. de sete termos, de razão k, retiramos o segundo, terceiro, quinto e sexto termos. A sucessão restante é uma P.A. de razão:

    a) k b) $2k$ c) $\frac{k}{2}$ d) $3k$ e) $\frac{k}{3}$

28. Numa P.A. tem-se que $a_{15} - a_5 = 5$ e o primeiro termo é oito vezes a razão. Logo, o primeiro termo é:

    a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

29. A soma dos números entre 0 e 101 não divisíveis por 5 é:

    a) 1000 b) 2000 c) 3000 d) 4000 e) 5000

30. A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é $n^2 + 4n$. Então, o termo geral dessa P.A. é:

    a) $5 + 2n$ b) $2n + 3$ c) $n + 4$ d) $2n + 1$ e) $2n - 3$

31. A soma dos n primeiros elementos da seqüência $\left(\frac{1-n}{n}\,,\,\frac{2-n}{n}\,,\,\frac{3-n}{n}\,,\,\cdots\right)$ é dado por:

    a) 0 b) $\frac{1}{n}$ c) $\frac{1-n}{2}$ d) $\frac{2n+3}{2}$ e) $n + 1$

32. O valor de x da P.A $(x\,,\,2x+1\,,\,5x+7\,,\,\cdots)$ é:

    a) $\frac{2}{5}$ b) $-\frac{1}{4}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{4}{5}$ e) $-\frac{5}{2}$

33. Se numa P.A., $a_m + a_n = a_p + a_q$ então:

a) $m + n = p + q$

b) $m - n = p - q$

c) $mn = pq$

d) $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$

e) $m = n = p = q$

34. A soma do 4^o e 8^o termos de uma P.A. é 20. O 31^o termo é o dobro do 16^o termo. A razão dessa P.A. é:

a) 7 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

Gabarito dos Exercícios Propostos

1. $(1, 3, 7, 15, 31)$	9. b	17. 270
2. $(7, 10, 13, 16)$	10. 132	18. e
3. $\frac{20}{9}$	11. b	19. $a_1 = -2$ e $r = 8$
4. 9090909	12. d	20. 3367
5. d	13. a	21. c
6. $r = 3$	14. 1)F, 2)F, 3)V	22. 18
7. $22, 25$	15. c	23. 7
8. d	16. 1986	24. b

Gabarito dos Exercícios Complementares

25. 113	30. b
26. c	31. c
27. d	32. e
28. e	33. a
29. d	34. b

Aula 11 – Progressão Geométrica

Introdução

Vamos continuar considerando tipos especiais de sequências de números reais. É o caso das *progressões geométricas.*

Definição 1
Sejam a e q dois números reais não nulos. Chama-se *Progressão Geométrica* (P.G.) à sequência (a_n) tal que

$$\begin{cases} a_1 & = & a \\ a_{n+1} & = & a_n \cdot q \, , \, \forall n \in \mathbb{N}^* \, . \end{cases}$$

Portanto,

$$(a_n) = (a \, , \, aq \, , \, aq^2 \, , \, aq^3 \, , \, \cdots) \, .$$

O número real q é chamado de *razão da P.G.*

Nota: A progressão geométrica definida acima é infinita. Com pequena modificação estão definidas P.G. finitas com n termos: $a_1 \, , \, a_2 \, , \, \cdots \, , \, a_n$.

Segue da Definição 1 que, se $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, então

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \, , \, \forall n \in \mathbb{N}^* \, .$$

Assim,

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots$$

Exemplo 1

A P.G $(a_n) = (2 \, , 6 \, , 18 \, , \cdots)$ tem como primeiro termo $a_1 = 2$ e razão $q = 3$.

Classificação das P.G's

Se (a_n) é uma P.G. então:

- (a_n) é estritamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. As condições para a P.G. ser estritamente crescente são: $\begin{cases} a_1 > 0 \quad \text{e} \quad q > 1 \\ \quad\quad\text{ou} \\ a_1 < 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1 \end{cases}$

Exemplo 2

a) $(a_n) = (2\,,\,10\,,\,50\,,\,\cdots)$ temos que $a_1 = 2\,;\,q = 5$

b) $(a_n) = \big(-3\,,\,-\frac{3}{2}\,,\,-\frac{3}{4}\,,\,\cdots\big)$ temos que $a_1 = -3\,;\,q = \frac{1}{2}$

- (a_n) é estritamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. As condições para uma P.G. ser decrescente são: $\begin{cases} a_1 > 0 \quad \text{e} \quad 0 < q < 1 \\ \quad\quad\text{ou} \\ a_1 < 0 \quad \text{e} \quad q > 1 \end{cases}$

Exemplo 3

a) $(a_n) = \big(1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4}\,,\,\cdots\big)$ temos que $a_1 = 1\,;\,q = \frac{1}{2}$

b) $(a_n) = \big(-2\,,\,-4\,,\,-8\,,\,\cdots\big)$ temos que $a_1 = -2\,;\,q = 2$

- (a_n) é constante se $a_1 \neq 0$ e $q = 1$.

Exemplo 4

$(a_n) = (2\,,\,2\,,\,2\,,\,\cdots)$

- (a_n) é singular se $a_1 = 0$ ou $q = 0$.

Exemplo 5

a) $(a_n) = (0\,,\,0\,,\,0\,,\,\cdots)$ temos que $a_1 = 0\,;\,q =$ qualquer

b) $(a_n) = (3\,,\,0\,,\,0\,,\,\cdots)$ temos que $a_1 = 3\,;\,q = 0$

- (a_n) é alternante se $a_1 \neq 0$ e $q < 0$.

Exemplo 6

$(a_n) = (2\,,\,-4\,,\,8\,,\,-16\,,\,\cdots)$, $a_1 = 2$ e $q = -2$.

Termo Geral de uma P.G.

Sabemos que, pela definição, $(a_n) = (a\,,\, aq\,,\, aq^2\,,\,\cdots)$. Daí,

$$a_n = a_1 q^{n-1}\,.$$

A expressão acima é denominada *termo geral de uma P.G.*

Exemplo 7

Em cada item abaixo, dada a P.G., determinemos sua razão e sua classificação:

a) $(a_n) = (1\,,\,4\,,\,16\,,\,64\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{4}{1} = 4$, logo a P.G. é estritamente crescente.

b) $(a_n) = (-27\,,\,-9\,,\,-3\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{-9}{-27} = \dfrac{1}{3}$, logo a P.G. é estritamente crescente.

c) (a_n) tal que $\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3}\,,\,\forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Observe que $a_2 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{18}{3} = 6$ e $a_3 = \dfrac{a_2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$. Daí, $(a_n) = (18\,,\,6\,,\,9\,,\,\cdots)$. Então temos que $q = \frac{1}{3}$, logo a P.G é estritamente decrescente.

d) $(a_n) = (-1\,,\,-3\,,\,-9\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{-3}{-1} = 3$, logo, a P.G. é estritamente decrescente.

e) $(a_n) = (-2\,,\,-2\,,\,-2\,,\,\cdots)$, $q = \dfrac{-2}{-2} = 1$, logo a P.G. é constante.

f) $(a_n) = (5\,,\,0\,,\,0\,,\,\cdots)$, $q = \frac{0}{5} = 0$, logo a P.G é singular.

g) $(a_n) = (0\,,\,0\,,\,0\,,\,\cdots)$, $q \in \mathbb{R}$, logo a P.G é constante.

h) $(a_n) = (-1\,,\,3\,,\,-9\,,\,27\,,\,\cdots)$, $q = \frac{3}{-1} = -3$, logo a P.G. é alternante.

Exemplo 8

Se a_1 , a_2 , $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, a_5 , a_6 , a_7 formam, nessa ordem, uma P.G., achar a soma desses termos.

Solução:

Usando a definição de P.G. temos:

$$q = \frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{1} = 2\,.$$

Daí,

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{1}{2} \times 2 = 1 \\ a_6 &= 1 \times 2 = 2 \\ a_7 &= 2 \times 2 = 4 \\ a_2 &= \frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\ a_1 &= \frac{1}{8} \div 2 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$S = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 = \frac{127}{16}\,.$$

Exercícios Propostos

1. A sequência $(a_n) = (1\,, a\,, \cdots)$ é uma P.G. O nono termo dessa progressão é 256. Então, o valor de a pode ser:

   a) 4 b) 3 c) 2 d) $\frac{1}{2}$ e) 8

2. Se o 7^o termo de uma P.G. é $-\frac{1}{3}$ e o 14^o termo é -729, então o 10^o termo é:

   a) -27 b) -18 c) -54 d) -9 e) -36

3. Numa P.G. a diferença entre o 2^o e o 1^o termo é 9 e a diferença entre o 5^o e o 4^o termo é 576. Então o 1^o termo dessa progressão é:

   a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 9

4. Em um parque ecológico, há cinco anos, a população de onças pintadas era de 325. Hoje ela é de 481. Então a taxa média anual de crescimento da população de onças, se elas só se reproduzem uma vez por ano é de: (Dado: $1,48^{\frac{1}{5}} = 1,082$)

   a) 6,7% b) 5,8% c) 7,6% d) 8,2% e) 8,5%

5. Um país contraiu em 1829 um empréstimo de 1 milhão de dólares para pagar em cem anos a taxa de juros de 9% ao ano. Por problemas de balança comercial, nada foi pago até hoje e a dívida foi sendo "rolada" com capitalização anual de juros. Qual dos valores abaixo está mais próximo do valor da dívida em 1989?

   a) 14 bilhões de dólares

   b) 500 bilhões de dólares

   c) 700 bilhões de dólares

   d) 4 bilhões de dólares

   e) 4 trilhões de dólares

6. Numa P.G. de quatro termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. Calcule a razão dessa progressão.

7. Sabendo-se que uma célula se divide em duas a cada segundo, qual o total de células ao final de 10 segundos?

8. Se $S_3 = 21$ e $S_4 = 45$ são, respectivamente, as somas dos três e quatro primeiros termos de uma P.G. cujo termo inicial é 3, então a soma dos cinco primeiros termos dessa progressão é:

   a) 66 b) 69 c) 93 d) 96 e) 105

Propriedades de uma P.G.

Propriedade 1 (Termos Equidistantes)
O produto de dois termos equidistantes dos extremos é igual ao produto dos extremos, ou seja, se $p + k = n + 1$ temos $a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_n$.

De fato, suponhamos $p + k = n + 1$. Então, sejam

$$\begin{aligned} a_p &= a_1 \cdot q^{p-1} \\ a_k &= a_1 \cdot q^{k-1} \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Fazendo $a_p \cdot a_k$ temos:

$$a_p \cdot a_k = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{p+k-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n+1-2} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{n-1} = a_1 \cdot a_n\,.$$

Exemplo 9

Seja $(a_n) = (1\,,\,2\,,\,4\,,\,8\,,\,16\,,\,32)$. Note que:

$$1 \times 32 = 2 \times 16 = 4 \times 8\,.$$

Propriedade 2 (Média Geométrica)
Cada termo de uma P.G., a partir do segundo, é a média geométrica entre o termo anterior e o posterior.

Seja $(a_n) = (a_1\,,\, a_2\,,\, \cdots\,,\, a_{p-1}\,,\, a_p\,,\, a_{p+1}\,,\, \cdots)$. Vamos provar que $a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}$.

De fato, sejam

$$\begin{aligned} a_{p-1} &= a_1 \cdot q^{p-1-1} \\ a_{p+1} &= a_1 \cdot q^{p+1-1} \\ a_p &= a_1 \cdot q^{p-1} \end{aligned}$$

Fazendo $a_{p-1} \cdot a_{p+1}$ temos:

$$a_{p-1} \cdot a_{p+1} = a_1 \cdot a_1 \cdot q^{2p-2} = a_1 \cdot q^{p-1} \cdot a_1 \cdot q^{p-1} = a_p^2\,.$$

Logo,

$$a_p^2 = a_{p-1} \cdot a_{p+1}\,.$$

Exemplo 10

Seja $(a_n) = (3\,,\, 9\,,\, 27\,,\, 81\,,\, 243\,,\, \cdots)$. Note que:

$$\begin{aligned} 9^2 &= 3 \times 27 \\ 27^2 &= 9 \times 81 \\ 81^2 &= 27 \times 243 \end{aligned}$$

Exemplo 11

O terceiro e o sétimo termo de uma P.G. valem, respectivamente, 10 e 18. Determine o quinto termo dessa progressão.

Solução:

Note que $5 + 5 = 3 + 7$. Logo,

$$\begin{aligned} a_5 \cdot a_5 &= a_3 \cdot a_7 \quad \text{(propriedade 1)} \\ a_5^2 &= 10 \times 18 \\ a_5^2 &= 180 \Longrightarrow a_5 = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

Logo, o quinto termo dessa progressão vale $6\sqrt{5}$.

Exercícios Propostos

9. A sequência de números reais e positivos dado por $\left(x-2\,,\,\sqrt{x^2+11}\,,\right.$ $\left.2x+2\,,\,\cdots\right)$ é uma P.G. cujo sétimo termo vale:

   a) 96 b) 192 c) 484 d) 252 e) 384

10. Numa P.A. de termos positivos, o 1^o, o 5^o e o 21^o termo formam, nessa ordem, uma P.G. A razão dessa P.G. é:

    a) 2 b) 4 c) 16 d) 20 e) impossível de ser determinado

11. Se $(A_1\,,\,A_2\,,\,A_3\,,\,\cdots)$ é uma P.G de termos positivos e distintos e de razão q, então $(\log A_1\,,\,\log A_2\,,\,\log A_3\,,\,\cdots)$

    a) é uma P.G. de razão q
    d) é uma P.A. de razão $\log q$
    b) é uma P.G. de razão $\log q$
    e) não é P.A. nem P.G.
    c) é uma P.A. de razão $\log q^2$

12. Numa P.G. estritamente decrescente, sabe-se que $a_1 + a_{10} = -513$ e $a_4 \cdot a_7 = 512$. Determine a razão dessa P.G.

13. Adicionando-se a mesma constante a cada um dos números 6, 10 e 15, nessa ordem, obtemos uma P.G. de razâo:

    a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $\frac{5}{3}$ d) 4 e) 31

Produto de n Termos de uma P.G.

Teorema 1
Se (a_n) é uma P.G e P_n é produto dos n primeiros termos, então

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}\ .$$

Demonstração:

De fato, sejam

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \\ P_n &= a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \\ P_n^2 &= (a_1 \cdot a_n)(a_2 \cdot a_{n-1}) \cdots (a_n \cdot a_1) = (a_1 \cdot a_n)^n \quad \text{(propriedade 1)}\,. \end{aligned}$$

Daí,

$$|P_n| = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}\ .$$

Obs.: A fórmula anterior nos permite calcular o módulo do produto. Para obter o sinal de P_n, basta analisar o sinal dos termos.

Exemplo 12

Na P.G. $(1\,,\,-3\,,\,9\,,\,-27\,,\,\cdots)$, determine o produto dos 8 primeiros termos.

Solução:

Observe que

$$\begin{aligned} q &= \frac{-3}{1} = -3 \\ a_8 &= a_1 q^7 = 1 \times (-3)^7 = (-1) \times 3^7\,. \end{aligned}$$

Daí,

$$|P_8| = \sqrt{(a_1 \cdot a_8)^8} \;=\; \sqrt{(1 \times (-1) \times 3^7)^8} \;=\; \sqrt{3^{56}} \;=\; 3^{28}\;.$$

Como dos 8 termos 4 são positivos e 4 são negativos, temos que

$$P_8 = 3^{28}\,.$$

Soma dos n Primeiros Termos de uma P.G.

Teorema 2

Se (a_n) é uma P.G. de razão q e S_n a soma dos n primeiros termos de (a_n) então:

$$\begin{aligned} S_n &= n \cdot a_1 && \text{se} \quad q = 1 \\ S_n &= \frac{a_1\big(1-q^n\big)}{1-q} = \frac{a_1\big(q^n-1\big)}{q-1} && \text{se} \quad q \neq 1 \end{aligned}$$

Demonstração:

De fato, se $q = 1$ então $S_n = n \cdot a_1$. Vamos considerar o caso $q \neq 1$.

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 \;+ a_2 \;+ \cdots + a_{n-1} \;+ a_n \\ S_n q &= a_1 q + a_2 q + \cdots + a_{n-1} q + a_n q \\ \hline S_n q - S_n &= a_n \cdot q - a_1 \\ S_n(q-1) &= a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1 = a_1 q^n - a_1 \\ S_n &= \frac{a_1\big(q^n-1\big)}{q-1}\,. \end{aligned}$$

Exemplo 13

Determine a soma dos 10 primeiros termos da P.G. $(1\,,\,3\,,\,9\,,\,27\,,\,\cdots)$.

Solução:

Temos que $q = \frac{3}{1} = 3$. Então:

$$S_{10} = \frac{a_1\big(q\ 10 - 1\big)}{q-1} = \frac{1 \times \big(3^{10} - 1\big)}{3-1} = \frac{3^{10}-1}{2} = 29524\,.$$

Exercícios Propostos

14. Numa P.G estritamente decrescente tem-se $a_1 = -\frac{1}{9}$ e $a_{15} = -9$. O produto dos 15 primeiros termos é:

    a) 1 b) -1 c) 11 d) -11 e) 2^{15}

15. Uma P.G tem primeiro termo igual a 1 e razão igual a $\sqrt{2}$. Se o produto dos termos dessa progressão é 2^{39}, então o número de termos é igual a:

    a) 12 b) 13 c) 14 d) 15 e) 16

16. Uma P.G. de 8 termos tem primeiro termo igual a 10. O logaritmo decimal do produto de seus termos vale 36. Ache a razão dessa progressão.

17. Dada a P.G. finita $(5\,,\,50\,,\,\cdots\,,\,5000000)$, sua soma resulta:

    a) 5.555.555 b) 10.000.000 c) 9.945.555 d) 55.555.555
    e) infinita

18. A soma dos cinco primeiros termos de uma P.G., sabendo-se que o quinto termo é 162 e a razão é igual a 3 é:

    a) 162 b) 620 c) 324 d) 242 e) 342

19. O número de ancestrais de uma pessoa, em seis gerações é:

    a) 63 b) 126 c) 127 d) 32 e) 64

Limite da Soma

O Limite da Soma dos Infinitos Termos de uma P.G.

Teorema 3

Seja (a_n) uma P.G. de razão q tal que $-1 < q < 1$. A soma S dos infinitos termos dessa P.G. existe, é finita e igual a $\lim\limits_{n\to\infty} S = \dfrac{a_1}{1-q}$.

Demonstração:

De fato, como $-1 < q < 1$ então:

$$\lim_{n\to\infty} \left(q^n\right) = 0\,.$$

(Não provaremos este resultado aqui pois foge ao nosso objetivo). Logo,

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} \cdots = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{a_1(1-0)}{1-q}\,.$$

Portanto:

$$S = \frac{a_1}{1-q}\,.$$

Exemplo 14

Determine a soma dos infinitos termos da P.G. $\left(1\,,\,\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{4}\,,\,\frac{1}{8}\,,\,\cdots\right)$.

Solução:

Como $q = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \dfrac{1}{2}$, temos que $-1 < q < 1$ e podemos aplicar a equação $S = \frac{a_1}{1-q}$ para calcularmos essa soma. Logo:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Exercícios Propostos

20. A soma $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots$ vale:

    a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{5}$ d) 1 e) 3

21. Seja S_n a soma dos n primeiros termos da sequência infinita $10^{-1}\,,\,10^{-2}\,,\,10^{-3}\,,\,\cdots\,,\,10^{-n}\,,\,\cdots$.

    a) Calcule S_5

    b) Qual o limite de S_n quando n tende a ∞?

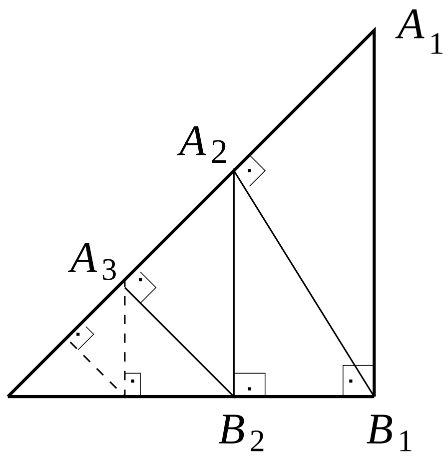
22. Roberto chega às 15 h para um encontro que havia marcado com Rosângela. Como Rosângela não chegara ainda, Roberto resolveu esperar um tempo t_1 igual a meia hora e após isso, um tempo $t_2 = \frac{1}{2} \cdot t_1$ e após isso, um tempo $t_3 = \frac{1}{2} \cdot t_2$ e assim por diante. Se Rosângela não foi ao encontro, quanto tempo Roberto esperou até ir embora?

    a) 45 min b) 50 min c) 55 min d) 1 h e) 2 h

23. O valor de $\sqrt{0,4 + 0,04 + 0,004 + \cdots}$ é:

    a) 0,222... b) 0,333... c) 0,444... d) 0,555... e) 0,666...

24. Na figura a seguir $\overline{A_1B_1} = 3\,,\ \overline{B_1A_2} = 2$. Calcule a soma dos infinitos segmentos $\overline{A_1B_1} + \overline{B_1A_2} + \overline{A_2B_2} + \overline{B_2A_3} + \cdots$



25. Uma bola é lançada na vertical, de encontro ao solo, de uma altura h. Cada vez que bate no solo, ela sobe até a metade da altura que caiu. Calcular o comprimento total percorrido pela mesma bola em suas trajetórias até atingir o repouso.

26. O valor de $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\ \cdots}}}}$ é:

a) $\frac{1}{x}$ b) $2x$ c) x^2 d) x e) $x^{\frac{2}{3}}$

27. O limite da soma dos termos da P.G. $\frac{357}{10^3}\,,\ \frac{357}{10^6}\,,\ \frac{357}{10^9}\,,\ \cdots$ é:

a) 357 b) $\frac{357}{99}$ c) 357,357357... d) 0,357357357...
e) 0,357

Exercícios Complementares

28. Quantos termos da P.G. $(1\,,\,3\,,\,9\,,\,\cdots)$ devem ser somados para que a soma seja 3.280?

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

29. O limite da soma dos termos da P.G. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{\sqrt{2}}{4}\,,\ \cdots\right)$ é:

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $\sqrt{2}-1$ d) $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ e) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

30. Os três primeiros termos de uma P.G. são $a_1 = \sqrt{2}\,,\ a_2 = \sqrt[3]{2}$ e $a_3 = \sqrt[6]{2}$. O 4^o termo é:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) 1 c) $\sqrt[5]{2}$ d) $\sqrt[3]{2}$ e) $\frac{1}{2}$

31. Os valores de x de modo que $x^2 - \frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} + \cdots = 6$ são:

    a) -3 e 5 b) -5 e 3 c) 3 e -3 d) 5 e -5 e) 0 e 2

32. A soma dos três números que formam uma P.A. crescente é 36 e se somarmos 6 unidades ao último, eles passam a constituir uma P.G. de razão:

    a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 2 d) -3 e) 4

33. O número real x é positivo e diferente de 1. O quadrado de x, o próprio x e $\log x$ formam uma P.G., nessa ordem. Então x vale:

    a) -1 b) 0 c) $\frac{1}{10}$ d) 1 e) 10

34. Dada a P.G. $\left(\cdots, 1, \frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \cdots\right)$ o termo que precede 1 é:

    a) $1-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}+1$ c) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ d) $\sqrt{3}-1$ e) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

35. Os ângulos de um triângulo estão em P.G. de razão 2. Então o triângulo:

    a) tem um ângulo de 60^o

    b) é retângulo

    c) é acutângulo

    d) é obtusângulo

    e) é isósceles

36. A sequência $(x, xy, 2x)$, com $x \neq 0$ é uma P.G. Então:

    a) x é um número racional

    b) x é um número irracional

    c) y é um número racional

    d) y é um número irracional

    e) $\frac{y}{x}$ é um número irracional

37. Em uma P.G. em que $a_8 = 10$ e $a_{15} = 1280$, a razão é igual a:

    a) 2 b) 4 c) -2 d) $\frac{1}{2}$ e) 3

Gabarito dos Exercícios Propostos

1. c
2. d
3. a
4. d
5. e
6. $q = 3$
7. 1024
8. c
9. b
10. b
11. d
12. 2
13. a
14. b
15. b
16. $q = 10$ ou $q = -10$
17. a
18. d
19. b
20. b
21. a) $0,11111$
    b) $\frac{1}{9}$
22. d
23. e
24. 9
25. 3 h
26. d
27. d

Gabarito dos Exercícios Complementares

28. c
29. b
30. b
31. c
32. c
33. e
34. b
35. d
36. d
37. a

Aula 12 – Conjuntos

Objetivos:

Nesta aula pretendemos que você:

- Entenda o conceito de conjunto e possa realizar operações entre conjuntos.
- Recorde a estrutura dos conjuntos numéricos.
- Trabalhe com intervalos de números reais e realize operações entre intervalos.

Introdução

Conjunto é toda reunião de elementos (pessoas, objetos, números, etc.) que podem ser agrupadas por possuírem características comuns. Exemplo: o conjunto de todas as letras de nosso alfabeto ou o conjunto de todas as mulheres brasileiras.

Símbolos

Para representar conjuntos usamos as letras maiúsculas A, B, $C \ldots$ e para representar elementos de conjuntos usamos letras minúsculas a, b, c, $d \ldots$

Exemplo: $A = \{a, e, i, o, u\}$ também pode ser escrito como $A = \{x \mid x$ é vogal de nosso alfabeto$\}$. Para representar que u está no conjunto A e que o elemento d não está no conjunto A escrevemos $u \in A$ "lê-se u pertence a A" e $d \notin A$ "lê-se d não pertence a A".

Conjunto unitário e conjunto vazio

Um conjunto que possui apenas um elemento é dito um conjunto unitário. Um conjunto que não possui elemento é um conjunto vazio. Usamos o símbolo $\emptyset$ para representar um conjunto vazio.

Exemplo: Se $B = \{x \mid$ os dias da semana cuja primeira letra é $f\}$ então $B = \emptyset$.

Subconjuntos

Um conjunto B cujos elementos todos pertencem a um outro conjunto A é dito um subconjunto deste outro conjunto.

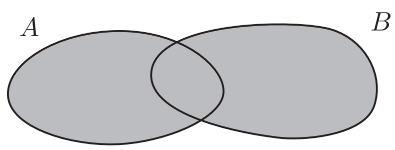
Exemplo: $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{a, e\}$ e $C = \{a, e, i\}$ então B é um subconjunto de A, C não é um subconjunto de A. Usamos a notação:

$B \subset A$ "lê-se B está contido em A" ou $A \supset B$ "lê-se A contém B" e $C \not\subset A$ "lê-se C não está contido em A".

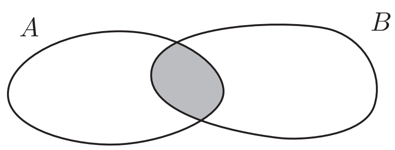
União, interseção e produto cartesiano de conjuntos

Dados dois conjuntos A e B podemos formar três novos conjuntos:

i) o conjunto união de A e B é o conjunto formado por todos os elementos de A e de B, $A \cup B\ \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ "lê-se o conjunto dos x tal que se x pertence a A ou x pertence a B"



ii) o conjunto interseção de A e B é o conjunto dos elementos que estão simultaneamente em A e em B.
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$ "lê-se o conjunto dos x tal que x pertence a A e x pertence a B".



Exemplo: Se $B = \{a, e, i\}$ e $A = \{a, b, c, d, e\}$ então

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, i\} \text{ e } A \cap B = \{a, e\}.$$

iii) o conjunto produto cartesiano, $A \times B$, de A por B é um novo conjunto, definido por

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo: Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b\}$, então

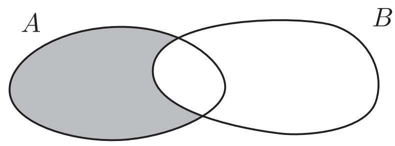
$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}.$$

Nota: Se A tem n elementos e B tem m elementos então $A \times B$ tem $m \cdot n$ elementos.

Conjunto Diferença e Conjunto Complementar

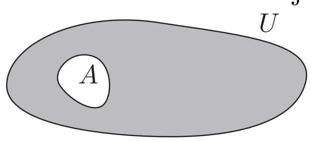
O conjunto diferença entre os conjuntos A e B é formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Usamos a notação $A - B$ para o conjunto diferença.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$



Quando estamos estudando conjuntos, podemos nos referir ao conjunto universo representado pela letra U. Numa situação especificada U é o conjunto que contém como subconjuntos os conjuntos estudados.

$A \subset U$ "lê-se o conjunto A está contido no conjunto universo U".



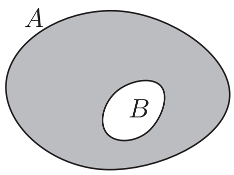
O conjunto complementar do conjunto A é o conjunto formado pelos elementos do conjunto universo que não pertence a A. Então na verdade este conjunto é igual a $U - A$.

Também é comum o uso da notação A^c. Assim, $A^c = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$. Também aparece a notação CA e $\overline{A}$.

Exemplo: $A = \{1, 3, \{2, 4\}, a, b\}$. O conjunto A possui 5 elementos. Podemos escrever que $3 \in A$ e que $\{2, 4\} \in A$. Note que não é correto escrever $\{2, 4\} \subset A$. No entanto é perfeito escrever: $\{\{2, 4\}\} \subset A$.

Caso Particular

Quando temos dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada de Complemento de B em relação a A, representado por $C_A B$.



$C_A B$ é o que falta a B para ser igual a A.

Por exemplo, se $A = \{a, e, i\}$ e $B = \{a\}$, então:

$$C_A B = A - B = \{e, i\}.$$

Observação: Sendo U o conjunto Universo, então escrevemos:

$$U - A = C_U A = CA = \overline{A}.$$

Conjunto das partes

Dado um conjunto A definimos o conjunto das partes de A, $P(A)$, como o conjunto cujos elementos são todos os subconjuntos de A.

$$P(A) = \{X \mid X \text{ é subconjunto de }, A\}.$$

Exemplo:

Se $A = \{a, e, i, \}$ então $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$.

Nota: Se um conjunto tem n elementos então $P(A)$ possui 2^n elementos.

Número de elementos de um conjunto

Um conjunto é dito finito quando possui um número finito n de elementos. Em caso contrário o conjunto é chamado infinito. Dados os conjuntos finitos A e B representamos por $n(A)$ o número de elementos de A; por $n(B)$ o número de elementos de B; por $n(A \cup B)$ o número de elementos de $A \cup B$ e por $n(A \cap B)$ o número de elementos de $A \cap B$. Não é difícil provar que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

Veja por quê. Qual é o método para encontrar $n(A \cup B)$, o número de elementos do conjunto $A \cup B$. Contamos A e B e somamos, obtendo $n(A) + n(B)$. Agora faço a seguite pergunta: em que circunstância é correto escrever $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$?

A resposta é: apenas quando $A \cap B = \emptyset$. Pois nessa situação, contar $A \cup B$ é equivalente a contar A, contar B e adicionar os resultados. No caso em que $A \cap B \neq \emptyset$, ao escrevermos $n(A) + n(B)$, estaremos contando duas vezes os elementos de $A \cap B \subset A \cup B$. Portanto, de modo geral, vale

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B).$$

Em seguida, recordamos e listamos algumas propriedades e observações interessantes.

a) o símbolo $\in$ é usado para relacionar um elemento e seu conjunto enquanto que o símbolo $\subset$ é usado para relacionar dois conjuntos.

b) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto. $\emptyset \subset A$, para qualquer conjunto A.

c) $A \subset A$, todo conjunto está contido em si próprio.

d) Também $A \in P(A)$ e $\emptyset \in P(A)$.

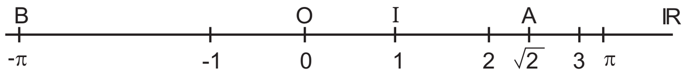
e) $A \subset U$. Todo conjunto é subconjunto de um conjunto universo.

f) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

g) Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $B = A$ (esta é uma maneira muito útil de verificar que dois conjuntos são iguais).

Representação de Conjuntos Numéricos

Podemos representar geometricamente os números reais em uma reta. A cada ponto da reta está associado um número real e a cada número real está associado um ponto da reta.



Para fazer a representação escolhemos dois pontos O e I da reta e associamos a eles os números reais 0 e 1, respectivamente. O segmento de reta OI é muito especial. Foi escolhido para ter comprimento 1. Veja a Figura acima. Os números reais negativos são colocados na reta à esquerda do ponto O e os números positivos à direita do ponto zero.

Nesta representação, a distância entre os números inteiros n e $n+1$ é a mesma distância que entre os números 0 e 1.

Também, por exemplo, $\sqrt{2}$ e $-\pi$ ganharam as posições indicadas na figura acima, em função de que os segmentos de reta OA e OB medem respectivamente, $\sqrt{2}$ e π.

Na continuação de nosso estudo vamos usar (na verdade, já estamos usando) os seguintes símbolos:

$\mid$ significa "tal que"	$\exists$ significa "existe"
$\wedge$ significa "e"	$\vee$ significa "ou"
$\Leftrightarrow$ significa "equivalente"	$\Rightarrow$ significa "implica que"

(i) Intervalos de números reais.

Intervalos são subconjuntos dos números reais determindos por desigualdades.

Sendo $a \in \mathbb{R}$, $\quad b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, temos:

Intervalo fechado

$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$. Lê-se: x pertence a $\mathbb{R}$, tal que x seja igual ou maior que a e igual ou menor que b. $[a, b]$ é o conjunto dos números reais compreendidos entre a e b, incluindo a e b.

Representamos na reta $[a, b]$ por:

Exemplo: $[5,8] = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x \leq 8\}$. x pode ser igual ou maior que 5 e igual ou menor que 8.

Note que na figura acima os pontos a e b são representados por um ponto cheio. É uma convenção que adotamos para significar que a e b pertencem ao intervalo $[a,b]$.

Intervalo aberto

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = (a,b)$$

é o conjunto dos números reais compreendidos entre a e b, não incluindo a e b. Veja a representação geométrica abaixo.

Note que na figura acima os pontos a e b são representados por pontos vazados. É uma convenção para significar que a e b não pertencem ao intervalo (a,b).

Exemplo: $(5,8) = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < 8\}$ é o conjunto dos números maiores que 5 e menores que 8.

Intervalo aberto à esquerda e fechado à direita

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} = (a,b]$$

é o conjunto dos números reais compreendidos entre a e b, não incluindo a e incluindo b. Veja a representação geométrica abaixo.

Exemplo: $(5,8] = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x \leq 8\}$ é o conjunto formado pelos números maiores que 5 e iguais ou menores que 8.

Intervalo fechado à esquerda e aberto à direita

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a,b)$$

é o conjunto dos números reais compreendidos entre a e b incluindo a e não incluindo b. Veja a interpretação geométrica abaixo.

Exemplo: $[5, 8) = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 \leq x < 8\}$ é o conjunto dos números maiores que 5 ou iguais a 5 e menores que 8

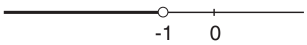
Intervalos infinitos

$$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\},$$

é o conjunto de todos os números reais maiores ou iguais ao número a. Veja a representação geométrica abaixo.

Exemplo: $(2, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

Outro exemplo:$(-\infty, -1)$=$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$.



Nota: $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Potências e raízes de números reais

Dado um número real b e um número natural $n \geq 1$, ao produto de n fatores b, denominamos potência n-ésima de b e representamos por b^n. Isto é,

$$b^n = b.b.b...b \quad (n \text{ fatores})$$

Também se $b \neq 0$ e m é um número inteiro negativo então a m-ésima potência de b, é definido por

$$b^m = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m} = \frac{1}{b}.\frac{1}{b}...\frac{1}{b} \quad (-m \text{ fatores})$$

Por definição, se $b \neq 0$, colocamos,

$$b^0 = 1.$$

Note que, das definições anteriores, vem que se n e m são números inteiros, $b \neq 0$ e $c \neq 0$, então,

a) $b^m = \left(\frac{1}{b}\right)^{-m}$ b) $\left(\frac{b}{c}\right)^m = \frac{b^m}{c^m}$

c) $(b.c)^n = b^n.c^n$ d) $b^m.b^n = b^{m+n}$

e) $(b^m)^n = b^{m.n}$

Exemplos: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{2^3} = -\frac{27}{8}$$

Raízes de números reais

Considere um número natural n e um número real b. Queremos encontrar um outro número real x tal que

$$x^n = b.$$

Caso x exista, chamamos este número de raiz n-ésima de b e indicamos como

$$x = \sqrt[n]{b}.$$

Casos de existência da raiz

1) Se $n > 0$ é par e $b \geq 0$ então sempre existe $\sqrt[n]{b}$. Por exemplo, $\sqrt[4]{81} = 3$. No entanto não tem sentido $\sqrt[6]{-2}$.

2) Se $n > 0$ é ímpar e b é um número real qualquer então existe $\sqrt[n]{b}$. Por exemplo,
$\sqrt[3]{-125} = -5$, $\sqrt[5]{-\dfrac{1}{243}} = -\dfrac{1}{3}$.

Nota 1: No caso de $\sqrt[2]{b}$, onde b é um número real positivo, indicamos simplesmente por $\sqrt{b}$ e lemos "raiz quadrada de b". Também $\sqrt[3]{c}$, onde c é um número real, lemos "raiz cúbica de c".

Nota 2: Sempre que a raiz estiver bem definida vale

$$\sqrt[n]{a\,.b} = \sqrt[n]{a}\,.\,\sqrt[n]{b} \text{ e } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Potência racional de um número real

Se b é um número real e $q = \dfrac{m}{n}$ é um número racional, onde $n > 0$, então definimos

$$b^q = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m},$$

desde que a raiz n-ésima de b^m esteja bem definida.

Exemplo:

$$(-9)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-9)^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{(-9)^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{81}} = \frac{1}{\sqrt[3]{81}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}.$$

Exercícios

1. Dado o conjunto $A = \{x, y, z\}$, associar V (verdadeira) ou F (falsa) em cada sentença a seguir:

   a) $0 \in A$
   b) $y \notin A$
   c) $A = \{y, x, z\}$
   d) $x \in A$
   e) $\{x\} \in A$
   f) $A \in A$

2. Sendo $A = \{2, 3, 5\}$ e $B = \{0, 1\}$, escrever em símbolos da teoria dos conjuntos:

   a) 2 pertence a A
   b) 1 pertence a B
   c) 3 não pertence a B
   d) A não é igual a B

3. Sendo $A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 6, 8\}$, $C = \{0, 2, 3, 4, \}$ e $D = \{0, 2, 6, 8\}$, assinalar as afirmações verdadeiras:

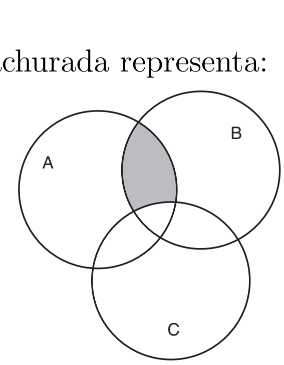
   a) $B \subset A$, b) $B \not\subset D$
   c) $C \not\subset D$, d) $D \subset A$
   e) $A \supset C$, f) $A \not\supset B$
   g) $D \supset B$, h) $C \not\subset A$

4. (FGV-72) Se $A = \{1, 2, 3, \{1\}\}$ e $B = \{1, 2, \{3\}\}$, $(A - B)$ é:

   a) $\{3, \{2\}\}$, b) $\{3, \{1\}\}$, c) $\{0, \{+2\}\}$ d) $\{0, \{0\}\}$

5. (EPUSP-70) No diagrama, a parte hachurada representa:

   a) $(A \cup C) - B$ b) $(B \cap C) - A$
   c) $(A \cap B) - C$ d) $(A \cap C) \cup B$
   e) $A - (B - C)$



6. (AMAN-74) Dados os conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ tais que $(A \cup B) \subset A$ então:

   a) $A \subset B$ b) $A \cap B = \emptyset$ c) $A \cup B = \emptyset$ d) $B \subset A$ e) $B \in A$

7. (CONCITEC-72) Seja A um conjunto de 11 elementos. O conjunto Y de todos os subconjuntos de A tem n elementos. Pode-se concluir que:

   a) $n = 2.048$ b) $n = 2.047$ c) $n = 2.049$ d) $n = 2.046$ e) 2.050

8. (MACK-SP-79) Se A e B são dois conjuntos tais que $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$, então

   a) sempre existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.
   b) sempre exite $x \in B$ tal que $x \notin A$.
   c) se $x \in B$ então $x \in A$.
   d) se $x \notin B$ então $x \notin A$.
   e) $A \cap B = \emptyset$

9. (CESGRANRIO-79) O número de conjuntos X que satisfazem: $\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4\}$ é:

   a) 3 b) 4 c) 9 d) 6 e) 7

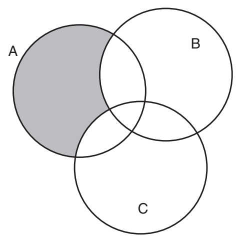
10. (PUC-RJ-79) O número de elementos do conjunto A é 2^m e o número de elementos do conjunto B é 2^n. O número de elementos de $(A \times B)$ é:

    a) $2^m + 2^n$ b) $2^{m \times n}$ c) 2^{m+n} d) $m \times n$ e) $m + n$

11. (FGV-SP-80) Considere as afirmações a respeito da parte hachurada do diagrama seguinte:

    OBS.: $U = A \cup B \cup C$ é o conjunto universo e $\overline{B}$ e $\overline{C}$ são os complementares de B e C, respectivamente.

    I) $A \cap (\overline{B} \cup \overline{C})$
    II) $A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})$
    III) $A \cap (\overline{B \cap C})$
    IV) $A \cap (\overline{B \cap C})$



    A(s) afirmação(ções) correta(s) é (são):

    a) I b) III c) I e IV d) II e III e) II e IV

12. (UFRS-80) Sendo $A = \{0, 1\}$ e $B = \{2, 3\}$, o número de elementos $[P(A) \cap P(B)]$ é:

    a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) 8

13. Dados $A = [1, \infty)$, $B = (-\infty, -2) \cup (1, \infty)$ e $C = [-3, 4]$, assinale falso ou verdadeiro

    ( ) $A - B = \emptyset$
    ( ) $(A \cup B) \cap C = [1, 4]$
    ( ) $C_{\mathbb{R}} B = [-2, 1]$
    ( ) $A \cap B \cap C = (1, 4]$

14. (ITA) Depois de N dias de férias, um estudante observa que:
    I - Choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde.
    II - Quando chove de manhã, não chove à tarde.
    III - Houve 5 tardes sem chuva.
    IV - Houve 6 manhãs sem chuva.

    O número N de dias de férias foi:

    a) 7 b) 9 c) 10 d) 11 e) 8

Gabarito

1. a) F, b) F, c) V, d) V, e) F, f) F. 2. a) $2 \in A$, b) $1 \in B$, c) $3 \not\subset B$, d) $A \neq B$. 3. a), c), d), g), h) são verdadeiras. 4. b) 5. c) 6. d) 7. a) 8. d) 9. b) 10. c) 11. d) 12. b) 13. F, V, V, V 14 b)

Aula 13 – Introdução às funções

Objetivos:

Após estudar esta aula você será capaz de:

- Distinguir entre uma relação e uma função entre dois conjuntos.
- Definir domínio, contradomínio e esboçar gráficos de funções.

Produto cartesiano

Dados dois conjuntos não vazios A e B, o produto cartesiano de A por B é o conjunto formado pelos pares ordenados, nos quais o primeiro elemento pertence a A e o segundo elemento pertence a B.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Exemplo: Se $A = \{1, 2\}$ e $B = \{a, b, c\}$, então:

$$A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$$

e

$$B \times A = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2)\}$$

Notas:

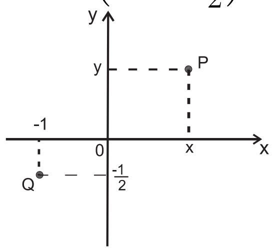
1) De modo geral $A \times B \neq B \times A$.

2) Se $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, por definição $A \times B = \emptyset$, isto é, $A \times \emptyset = \emptyset$ ou $\emptyset \times B = \emptyset$.

3) Se $A = B$ podemos escrever o produto cartesiano $A \times A$ como A^2, isto é, $A \times A = A^2$.

4) O produto cartesiano de duas cópias do conjunto de números reais $\mathbb{R}$, fornece
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$.

   Como vimos na Aula 1, os números reais podem ser identificados com uma reta. Também $\mathbb{R}^2$, pode ser identificado com um plano, através de um sistema de coordenadas. Veja a figura abaixo, onde o ponto P do plano é identificado com um par de números reais: $P = (x, y)$. Veja a representação do ponto $Q = \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.



5) Se os números de elementos dos conjuntos A e B são $n(A)$ e $n(B)$ então para o número de elementos de $A \times B$ vale $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$.

Relações

Dados dois conjuntos A e B, uma relação R sobre A e B (ou de A em B) é uma relação que associa elementos $x \in A$ a elementos $y \in B$, mediante uma lei previamente determinada (lei de associação ou de relação).

Como você verá, através de exemplos, toda relação de A em B determina um subconjunto de $A \times B$.

Exemplo: $A = \{-1, 0, 1, 3\}$

$B = \{0, 1, 9, 10\}$

Determine

a) $R_1 = \{(x, y) \in A \times B \mid y = x^2\}$

Solução:
$R_1 = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (3, 9)\}$

b) $R_2 = \{(x, y) \in A \times B \mid x = \sqrt{y}\}$

Solução:
$R_2 = \{(1, 1), (3, 9), (0, 0)\}$

Domínio e imagem ou contradomínio

Dada uma relação R de A em B, chama-se domínio de R ao conjunto D de todos os elementos de A que aparecem como primeiros elementos nos pares ordenados de R.

$$x \in D \Leftrightarrow \exists\, y, y \in B \mid (x, y) \in R.$$

Denominamos imagem da relação R (ou contradomínio) ao conjunto Im de todos os elementos de B que aparecem como segundos elementos nos pares ordenados de R.

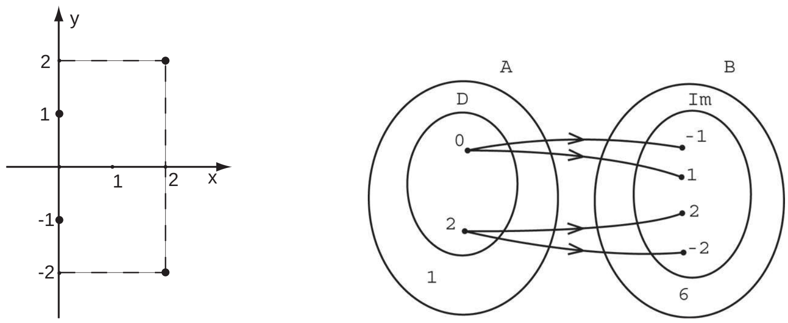
$$y \in \mathrm{Im} \;\Leftrightarrow\; \exists\, x, x \in A \mid (x, y) \in R.$$

Exemplo: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{-1, 1, 2, -2, 6\}$ e $R = \{(0, -1), (0, 1), (2, 2), (2, -2)\}$. Então

$$D = \{0, 2) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im} = \{-1, 1, 2, -2\}.$$

Representação gráfica e diagramas de uma relação

Para o último exemplo dado podemos associar a representação gráfica e o diagrama



Função

Função é uma relação com propriedades especiais. Uma relação R do conjunto A no conjunto B é uma função se

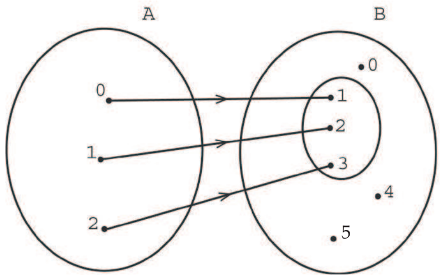
I) o domínio da relação R, $D(R) = A$;

II) para cada elemento $x \in D(R)$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in R$

III) a imagem da relação R, $\mathrm{Im}(R) \subset B$.

Uma relação R de A e B que é uma função é mais comumente representada pela letra f e do seguinte modo: $f\colon A \to B$, onde, $x \to y = f(x)$. Isto significa que, dados os conjuntos A e B, a função tem a lei de correspondência $y = f(x)$.

Exemplo: Sejam os conjuntos $A = \{0, 1, 2\}$ e $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; vamos considerar a função $f\colon A \to B$ definida por $y = x + 1$, ou seja, $f(x) = x + 1$



$$x = 0 \to y = 0 + 1 = 1$$
$$x = 1 \to y = 1 + 1 = 2$$
$$x = 2 \to y = 2 + 1 = 3$$

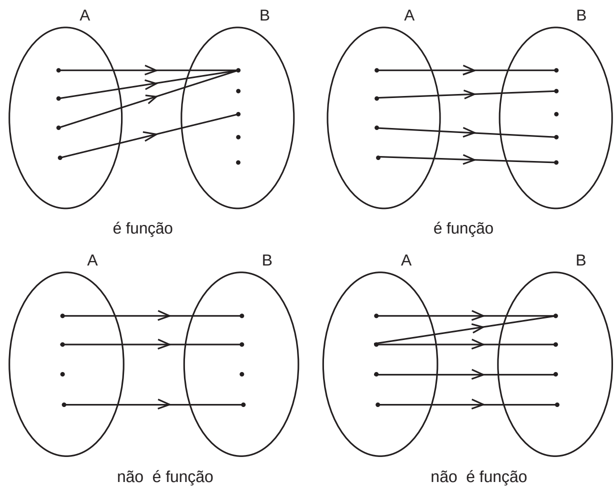
- O conjunto A é o domínio da função.
- O conjunto $\{1, 2, 3\}$, que é um subconjunto de B, é denominado conjunto *imagem da função*, que indicamos por Im. No exemplo acima, $\text{Im} = \{1, 2, 3\}$.

Representação de funções por diagramas

Um diagrama de setas representando uma relação de um conjunto A em um conjunto B é uma função se:

(I) De cada elemento de A parte exatamente uma única seta.

(II) Nenhuma seta termina em mais de um elemento de B

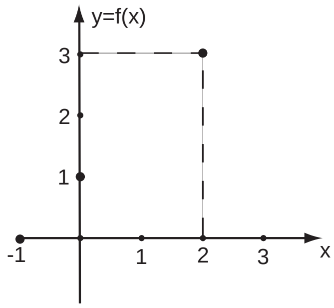


Representação Gráfica

Dados subconjuntos A e B de números reais e uma função $f\colon A \to B$, podemos representar a função graficamente como pontos do plano. No eixo horizontal representamos o domínio e no eixo vertical, o contradomínio.

Exemplo: $A = \{-1, 0, 2\}$ e $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ e $f(x) = x + 1$, vem que

$$x = -1 \to y = 0$$
$$x = 0 \to y = 1$$
$$x = 2 \to y = 3$$

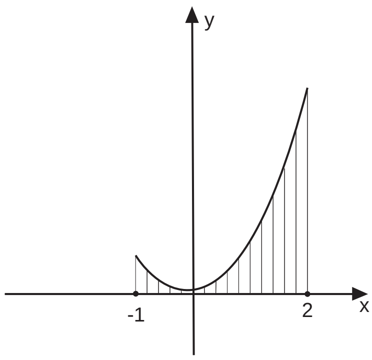


$f = \{(-1, 0), (0, 1), (2.3)\}$ e os três pontos assinalados formam o gráfico da função.

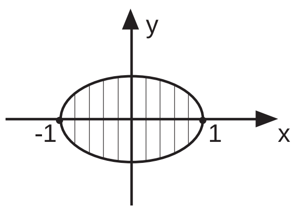
Observação sobre gráficos: Sabemos que um dos requisitos ao qual uma relação deve satisfazer para ser uma função, $x \to y = f(x)$, é que a cada x deve corresponder um único y. Esta propriedade tem a seguinte interpretação: toda reta vertical passando pelo domínio intercepta o gráfico da função em exatamente *um ponto*.

Exemplos:

a) A relação f de A em $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ com $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$, representada abaixo é função, pois toda reta vertical passando por pontos de abscissa $x \in A$ encontra o gráfico de f num só ponto.



b) O gráfico da relação R de A em $\mathbb{R}$ representada abaixo $x^2 + y^2 = 1$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ não é função, pois há retas verticais passando por pontos de A que encontram o gráfico de R em dois pontos.



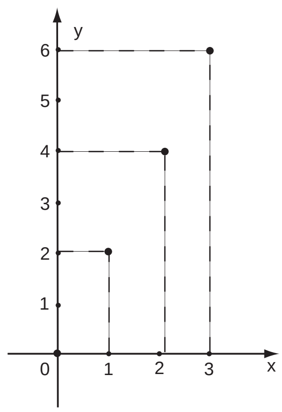
Esboço do Gráfico de uma Função

Para esboçarmos o gráfico cartesiano de uma função f, atribuimos valores convenientes a x no domínio da função e determinamos os correspondentes valores de $y = f(x)$. O gráfico, então, é constituído pelos pontos representativos dos pares (x, y).

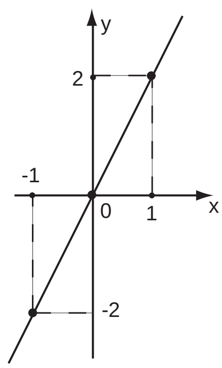
Exemplo: (a) Se a função $f\colon A \to B$, é tal que $x \to y = 2x$, onde $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 2, 4, 6\}$. É possível calcular todos os pontos do gráfico cartesiano de f. Veja a tabela de valores abaixo.

x	0	1	2	3
y	0	2	4	6

Nesta situação, representamos, ponto a ponto, a função.



(b) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto y = 2x$. Para esta função é impossível construir uma tabela indicando explicitamente todos os pontos do gráfico. No entanto podemos, com alguns pontos auxiliares, deduzir a forma do gráfico f. Usando os valores já calculados na tabela do exemplo a), esboçamos o gráfico.



Exercícios Resolvidos

1. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to y = x^2 - x$$

a) Calcular $f(6)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3}-2)$.

b) Determinar os elementos de $D(f)$ cuja imagem pela f vale 2.

Solução:

a) Para calcularmos a imagem de 6 pela f, basta substituir x por 6 em $f(x) = x^2 - x$,

$$f(6) = 6^2 - 6 = 30.$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}\,, \\ f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2}\,, \\ f(\sqrt{3}-2) &= (\sqrt{3}-2)^2 - (\sqrt{3}-2) \\ &= 3 - 4\sqrt{3} + 4 - \sqrt{3} + 2 \\ &= 9 - 5\sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

b) $f(x) = 2 \Rightarrow x^2 - x = 2$,

$$x^2 - x - 2 = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$
$$x_1 = 2,\ x_2 = -1$$

são os dois valores solução.

2. Seja a função $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x+1}\cdot$ Calcule $f(0)$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ e $f(\sqrt{2}-1)$.

Solução:

a) $f(0) = \dfrac{0^2 - 0 + 1}{0+1} = 1.$

b) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} + 1} = \dfrac{\frac{1-2+4}{4}}{\frac{1+2}{2}} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2}.$

c) $f(\sqrt{2} - 1) = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)^2 - (\sqrt{2} - 1) + 1}{\sqrt{2} - 1 + 1} =$

$= \dfrac{2 - 2\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{5 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} =$

$= \dfrac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}. \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2} - 6}{2}.$

3. Sendo $f(x) = x^2, \quad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ assinale (V) ou (F):

a) $f(2) = f(-2)$ ( )

b) $f(1) > f(0)$ ( )

c) $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) - 5$ ( )

d) $f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3})$ ( )

Solução:

a) (V) $\begin{cases} f(2) = 2^2 = 4 \\ f(-2) = (-2)^2 = 4 \Rightarrow f(2) = f(-2) \end{cases}$

b) (V) $\begin{cases} f(1) = 1^2 = 1 \\ f(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow f(1) > f(0) \end{cases}$

c) (F) $f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$
$f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) - 5 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - 5 = 2 + 3 - 5 = 0$
$\Rightarrow f(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \neq f(\sqrt{2}) + f(\sqrt{3}) - 5$

d) (V) $f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = (\sqrt{2} \cdot \sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 = 6$
$f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) = (\sqrt{2})^2 \dot{} (\sqrt{3})^2 = 2 \cdot 3 = 6$
$\Rightarrow f(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}) = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3})$

Determinação de Domínios de Funções Numéricas

Em geral, quando se define uma função f através de uma fórmula (ex.: $f(x) = x^2, \quad f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$, etc.), subentende-se que o domínio de definição de $f, \quad D(f)$, é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$, no qual a definição faz sentido (ou onde a função pode operar).

Exemplos: Defina os domínios das funções abaixo.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$

Basta impor que o denominador não pode ser nulo: $x - 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$.

b) $f(x) = \sqrt{2x-6}$

Em $\mathbb{R}$, o radicando de uma raiz quadrada não pode ser negativo. Portanto,

$$2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 3$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\} = [3, +\infty)$.

c) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

O radicando de uma raiz de índice ímpar pode ser negativo ou nulo ou positivo, ou seja, $2x - 1$ pode assumir todos os valores reais.

Portanto, $D(f) = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{3-x^2}}{\sqrt{2x+1}}$

Como as raízes envolvidas são todas de índice par, é exigência que os radicandos sejam não negativos. Além disso, o denominador deve ser não nulo. Assim,

$$3 - x^2 \geq 0 \text{ e } 2x + 1 > 0$$

Ou seja, $3 \geq x^2$ e $x > \dfrac{1}{2}$.

Veja as representações gráficas:

Portanto a interseção destes conjuntos determina o domínio. Ou seja

$$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} < x \leq \sqrt{3}\right\}$$

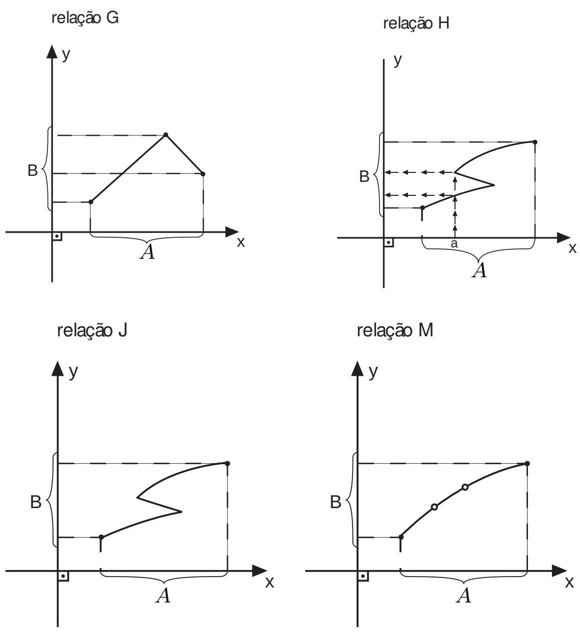
Exercícios - Série A

1. Sejam $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 2\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x \leq 6\}$ e a relação $R = \{(x, y) \in A \times B \mid x = y + y^2\}$. Solicita-se:
   a) Enumerar os pares ordenados de R.
   b) Indicar os conjuntos Domínio e Imagem.

2. Defina os máximos subconjuntos de números reais que são domínios das funções abaixo:

   a) $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x - 2}$ $\qquad$ b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{5}{x + 2}}$

3. Considere as relações G, H, J, M do conjunto A no conjunto B conforme os gráficos abaixo. Identifique as funções.



4. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e sejam os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \leq 2\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ se $D = \{(x, y) \in (A \times B) \mid y \leq x + 4\}$. Então:
   a) $D = A \times B$
   b) D tem 2 elementos
   c) D tem 1 elemento
   d) D tem 8 elementos
   e) D tem 4 elementos

5. $y = \dfrac{4x - 1}{2x - 3}$ define uma relação $H \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ são os números reais. Determine o número real x, tal que $(x, 1) \in H$.

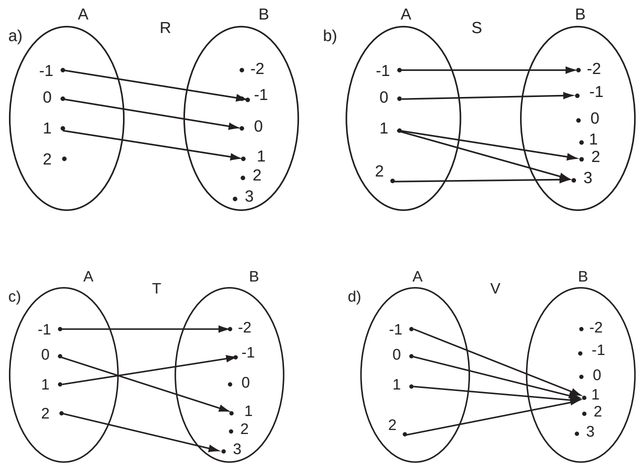
   a) $x = 0$ $\qquad$ b) $x = 1$ $\qquad$ c) $x = -1$ $\qquad$ d) $x = 5$ $\qquad$ e) $x = -5$

6. Determinado-se os pares (x, y) de números reais que satisfazem às condições

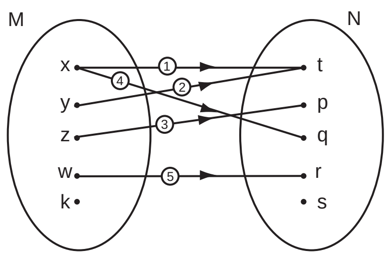
$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ y = x \end{cases} \quad , \quad \text{temos:}$$

a) 2 pares b) nenhum par c) 3 pares d) infinitos pares e) 1 par

7. Estabelecer se cada um dos esquemas abaixo define ou não uma função de $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ em $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Justificar.



8. (UFF-93 1ª fase) Considere a relação f de M em N, representada no diagrama abaixo:



Para que f seja uma função de M em N, basta:

a) apagar a seta (1) e retirar o elemento s

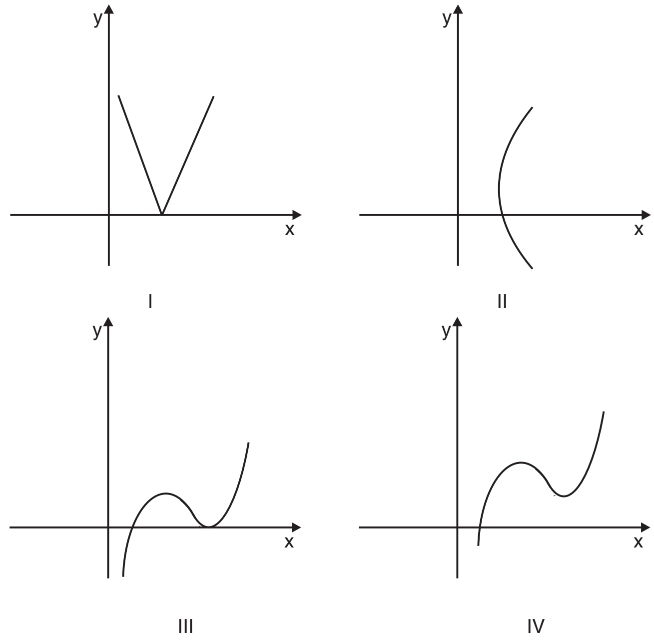
b) apagar as setas (1) e (4) e retirar o elemento k

c) retirar os elementos k e s

d) apagar a seta (4) e retirar o elemento k

e) apagar a seta (2) e retirar o elemento k

9. (PUC-95) Dentre os 4 desenhos a seguir:



a) Somente I pode ser gráfico de função da forma $y = f(x)$.

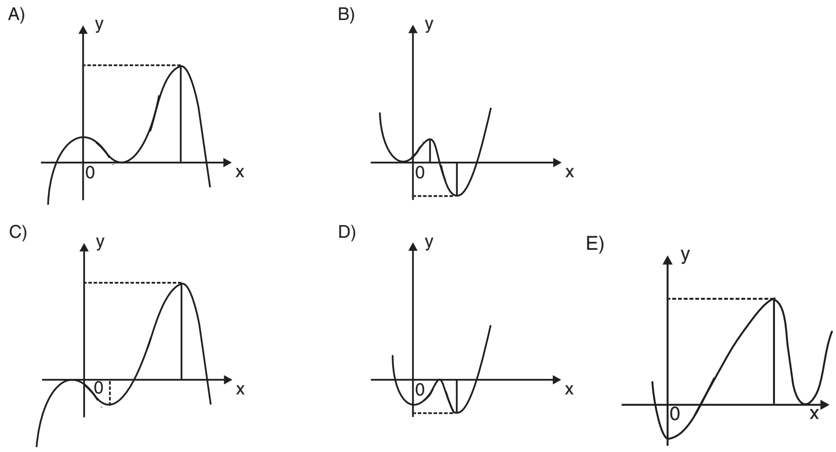
b) I, III e IV podem ser gráficos de funções da forma $y = f(x)$.

c) Nenhum deles pode ser gráfico de funções da forma $y = f(x)$.

d) II e IV não podem ser gráficos de funções da forma $y = f(x)$.

e) Nenhuma das respostas acima.

10. (UFF-94-1ª fase) O gráfico que melhor representa a função polinomial $p(x) = (x-1)^2(x-4)(x+\frac{4}{9})$ é:



11. Esboce o gráfico de:

a) $y = x^2 - 1, \quad D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = x - 2$, sendo $D = [-2, 2]$

12. Determine a e b, de modo que os pares ordenados $(2a-1, b+2)$ e $(3a+2, 2b-6)$ sejam iguais.

13. Determinar x e y, de modo que:

    a) $(x+2, y-3) = (2x+1, 3y-1)$

    b) $(2x, x-8) = (1-3y, y)$

    c) $(x^2+x, 2y) = (6, y^2)$

14. Se os conjuntos A e B possuem, respectivamente, 5 e 7 elementos, calcule o número de elementos de $A \times B$.

15. (UFF/95 - 1ª fase) Em um certo dia, três mães deram à luz em uma maternidade. A primeira teve gêmeos; a segunda, trigêmeos e a terceira, um único filho. Considere, para aquele dia, o conjunto das três mães, o conjunto das seis crianças e as seguintes relações:

    I) A que associa cada mãe a seu filho;

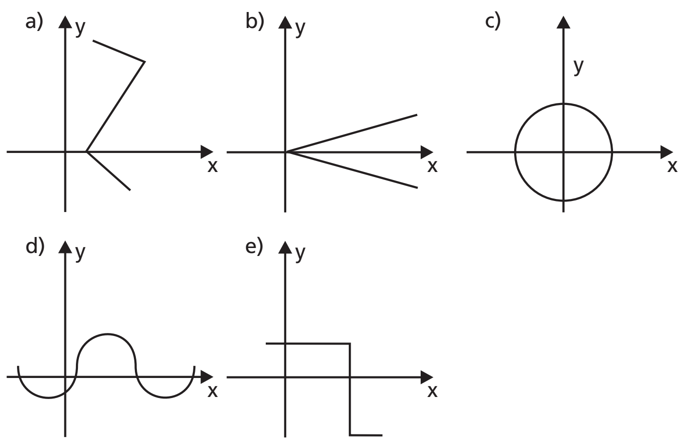
    II) A que associa cada filho a sua mãe;

    III) A que associa cada criança a seu irmão.

    São funções:

    a) somente a I b) somente a II c) somente a III d) todas e) nenhuma

16. (PUC) Entre os gráficos abaixo, o único que pode representar uma função de variável real é:



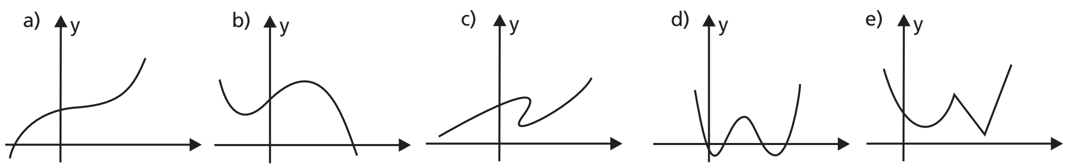
17. (UERJ/93) A função f definida no conjunto dos inteiros positivos por:

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & \text{se } n \text{ for par} \\ 3n+1, & \text{se } n \text{ for ímpar} \end{cases}$$

O número de soluções da equação $f(n) = 25$ é:

a) zero b) um c) dois d) quatro e) infinito

18. (UFC-CE) Qual dos gráficos a seguir não pode representar uma função?



19. (FGV-SP) Considere a seguinte função de variável real

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \text{ é racional} \\ 0 \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Podemos afirmar que:

a) $f(2,3) = 0$
b) $f(3,1415) = 0$
c) $0 \leq f(a) + f(b) + f(c) \leq 3$
d) $f[f(a)] = 0$
e) $f(0) + f(1) = 1$

20. (SANTA CASA-82) Seja f uma função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é par} \\ 1, & \text{se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Nestas condições, pode-se afirmar que:

a) f é injetora e não sobrejetora

b) f é sobrejetora e não injetora

c) $f(-5) \cdot f(2) = 1$

d) $f(f(x)) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

e) O conjunto-imagem de f é $\{0, 1\}$

21. (FUVEST-82) O número real α é solução simultânea das equações $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ se e somente se α é raiz da equação:

    a) $f(x) + f(x) = 0$

    b) $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0$

    c) $f(x) \cdot g(x) = 0$

    d) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 0$

    e) $f(x) - g(x) = 0$

22. (PUC-93) Entre as funções $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ abaixo, NÃO é injetora a definida por:

    a) $T(x, y) = (x, 0)$

    b) $T(x, y) = (y, x)$

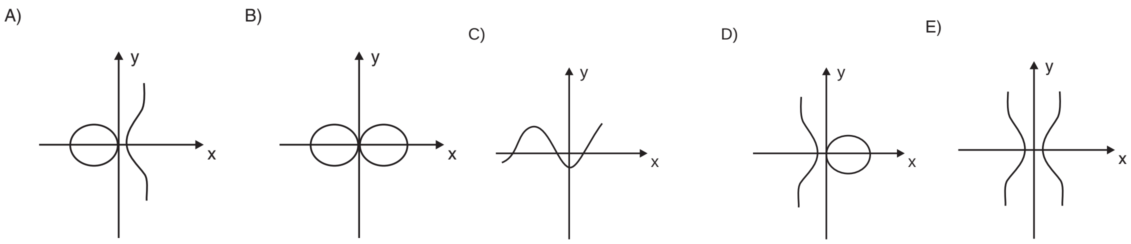
    c) $T(x, y) = (2x, 2y)$

    d) $T(x, y) = (-y, x)$

    e) $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$

Exercícios - Série B

1. (UNIFICADO-92) Qual dos gráficos abaixo representa, em $\mathbb{R}^2$ as soluções da equação $y^2 = x(x^2 - 1)$.



2. (IBEMEC 98) Considere a função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tal que $f(x + 1) = f(x) + 2$ e $f(2) = 3$. Então, $f(50)$ é igual a:

    a) 105 b) 103 c) 101 d) 99 e) 97

3. (FUVEST-SP) Seja f uma função tal que $f(x + 3) = x^2 + 1$ para todo x real. Então $f(x)$ é igual a:

    a) $x^2 - 2$ b) $10 - 3x$ c) $-3x^2 + 16x - 20$ d) $x^2 - 6x + 10$ e) $x^2 + 6x - 16$

4. (UGF-96-2º Sem.) Se $f(3x) = \dfrac{x}{2} + 1$ então $f(x-1)$ é igual a:

   a) $\dfrac{x+5}{6}$ b) $\dfrac{3x-1}{2}$ c) $\dfrac{5x+3}{2}$ d) $\dfrac{3x}{2}$ e) $3x-2$

5. Se $f(n+1) = \dfrac{2 \cdot f(n) + 1}{2}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ e se $f(1) = 2$, então o valor de $f(101)$ é:

   a) 49 b) 50 c) 53 d) 52 e) 51

6. (FUVEST/93) Uma função de variável real satisfaz a condição $f(x+1) = f(x) + f(1)$, qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo que $f(2) = 1$ podemos concluir que $f(5)$ é igual a:

   a) $\dfrac{1}{2}$ b) 1 c) $\dfrac{5}{3}$ d) 5 e) 10

7. (UFF/96) Para a função $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, que a cada número natural não-nulo associa o seu número de divisores, considere as afirmativas:

   I) existe um número natural não-nulo n tal que $f(n) = n$.

   II) f é crescente

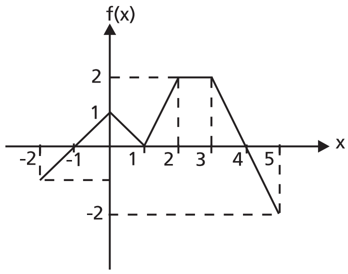
   III) f não é injetiva.

   Assinale a opção que contém a(s) afirmativa(s) correta(s):

   a) apenas II b) apenas I e III c) I, II e III
   d) apenas I e) apenas I e II

8. (UFMG) A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ associa a cada número real x o menor inteiro maior do que $2x$. O valor de $f(-2) + f\left(-\dfrac{1}{5}\right) + f\left(\dfrac{2}{3}\right)$ é:

9. (UFRJ/93) Uma função $f(x)$ tem o seguinte gráfico:



   Considere agora uma nova função $g(x) = f(x+1)$.

   a) Determine as raízes da equação $g(x) = 0$

   b) Determine os intervalos do domínio de $g(x)$ nos quais esta função é estritamente crescente.

10. (CESGRANRIO) Seja $f(x)$ a função que associa, a cada número real x, o menor dos números $(x+1)$ e $(-x+5)$. Então o valor máximo de $f(x)$ é:

    a) 1 b) 3 c) 4 d) 5 e) 7

11. Definimos: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 2^{f(n)} \end{cases}$$

    Calcule $f(3)$.

12. (FEI-73) Chama-se ponto fixo de uma função f um número real x tal que $f(x) = x$. Os pontos fixos da função $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$ são:

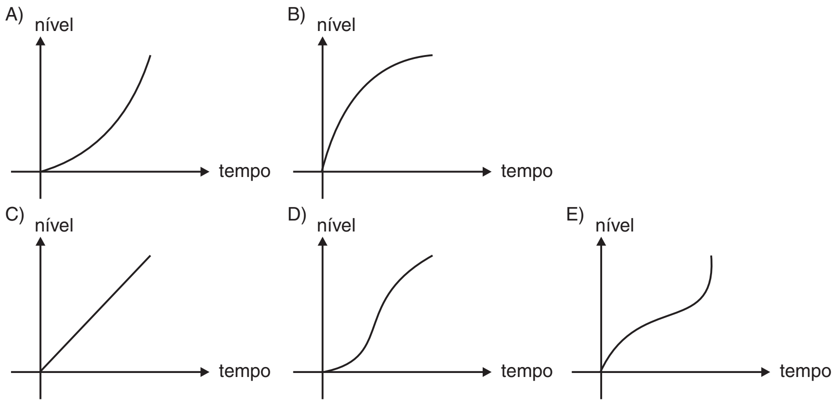
    a) $x = \pm 1$

    b) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

    c) não tem ponto fixo

    d) tem infinitos pontos fixos

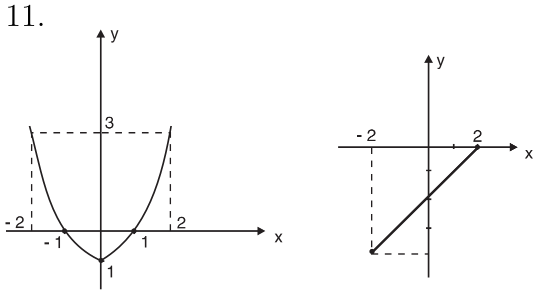
13. (PUC-92) Um reservatório tem a forma de um cone de revolução de eixo vertical e vértice para baixo. Enche-se o reservatório por intermédio de uma torneira de vazão constante. O gráfico que melhor representa o nível da água em função do tempo, contado a partir do instante em que a torneira foi aberta é:



Gabarito

Série A

1. a) $R = \{(2,-2),(0,-1),(0,0),(2,1)\}$. b) $D(R) = \{0,2\}$, $\text{Im}(R) = \{-2,-1,0,1\}$. 2. a) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\} = (-\infty,2) \cup (2,\infty)$. b) $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\} = (-2,\infty)$. 3. Apenas G é função. 4. d) 5. c) 6. d) 7. a) não b) não c) sim d) sim. 8. d) 9.b) 10. d)
11.



12. $a = -3$; $b = 8$ 13. a) $x = 1$ e $y = -1$ b) $x = 5$ e $y = -3$, c) $x = -3$ ou $x = 2$ e $y = 0$ ou $y = 2$, d) $x = \pm 2$ e $y = \pm\sqrt{3}$. 14. 35 15. b) 16. d) 17. b) 18. c) 19. c) 20. e) 21. b) 22. a)

Série B

1. a) 2. d) 3 d) 4. a) 5. d) 6. c) 7. b) 8. -2
9. a) $x \in \{-2,0,3\}$ b) $(-3,-1)$ e (0,1) 10. b) 11. $f(3) = 16$
12. b) 13. b)

Auto-avaliação

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 14 – Funções composta e inversa

Objetivos:

São objetivos desta aula possibilitar que você:

- Entenda e trabalhe com o conceito de função composta.
- Possa decidir quando uma função possui ou não inversa.
- Entenda os conceitos de função sobrejetiva, injetiva e bijetiva e de função inversa.
- Possa resolver problemas envolvendo funções inversas e possa representar graficamente as soluções.

Função composta

Considere f uma função do conjunto A no conjunto B e g uma função do conjunto B no conjunto C. Então a função h de A em C, h a função composta de f e g, pode ser definida por

$$h(x) = g(f(x)).$$

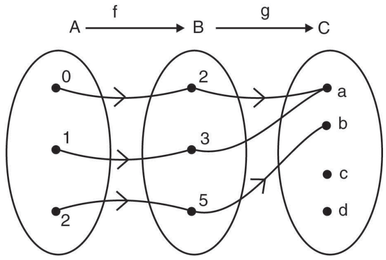
Notação: $h = g \circ f$.

No diagrama abaixo está representada a composição de f em g.

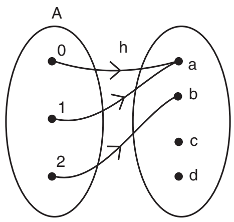
$$\underbrace{A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C}_{g \circ f}$$

Exemplos

(i) Se



então $h = g \circ f$ é tal que



(ii) Suponha $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad f(x) = x - 2$

$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad g(x) = x^3$

então a função composta $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ pode ser calculada por

$$h(x) = g(f(x))$$
$$h(x) = g(x - 2)$$
$$h(x) = (x - 2)^3$$

Exercícios resolvidos

(i) Sejam as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = x + 3$.

a) obter a função composta $h = g \circ f$ e $m = f \circ g$

b) calcule $h(2)$ e $m(-3)$

c) existem valores $x \in \mathbb{R}$ tais que $h(x)$=0?

Solução:

a) $h(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = x^2 - 1 + 3$

$h(x) = x^2 + 2$

$m(x) = f(g(x)) = f(x + 3) = (x + 3)^2 - 1$

$m(x) = x^2 + 6x + 9 - 1 = x^2 + 6x + 8$

b) $h(2) = 2^2 + 2 = 4$

$m(-3) = (-3)^2 + 6(-3) + 8$

$m(-3) = 9 - 18 + 8 = -1$

c) $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+2 = 0$ (esta equação não tem solução $x \in \mathbb{R}$). Resposta: Não.

(ii) Sejam $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sabendo-se que $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$ e que a imagem da função $f \circ g$ é o intervalo real $[+\sqrt{5}, +3]$, a alternativa que representa a imagem da função g é:

a) $[+\sqrt{5}, +3]$ b) $[-2. + 2]$
c) $[-2, +\sqrt{5}]$ d) $[-\sqrt{5}, +2]$
e) $[-\sqrt{5}, +\sqrt{5}]$

Solução:

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{5 + g^2(x)}$. Logo $\sqrt{5} \leq \sqrt{5 + g^2(x)} \leq 3 \Rightarrow 5 \leq 5 + g^2(x) \leq 9$

Então $\quad 0 \leq g^2(x) \leq 4$. Os valores de $g(x)$ que verificam a desigualdade acima são $-2 \leq g(x) \leq 2$.

Logo, $\quad \text{Im } g(x) = [-2, 2]$. Resposta b).

(iii) Sejam as funções $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \geq 0 \\ x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = x - 3.$$

Encontre a expressão que define $f \circ g = h$.

Solução: $h(x) = f(g(x)) = f(x - 3)$.

Em virtude da definição de f precisamos saber quando $x - 3 \geq 0$ e quando $x - 3 < 0$.

Ora $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ e $x - 3 < 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Logo $h(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{se} \quad x \geq 3 \\ x - 3 & \text{se} \quad x < 3 \end{cases}$

(iv) Sejam as funções reais $g(x) = 3x + 2$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - x + 1$. Determine a expressão de f.

Solução: $\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = x^2 - x + 1$

Façamos agora $3x + 2 = y \Rightarrow x = \dfrac{y-2}{3}$

Logo,

$$f(y) = \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 - \frac{y-2}{3} + 1$$

$$f(y) = \frac{y^2 - 4y + 4}{9} - \frac{y-2}{3} + 1$$

$$f(y) = \frac{1}{9}\left[y^2 - 4y + 4 - 3(y-2) + 9\right]$$

$$f(y) = \frac{1}{9}\left[y^2 - 7y + 19\right]$$

Funções sobrejetora, injetora e bijetora

Uma função $f\colon A \to B$ é sobrejetora se $\mathrm{Im}(f) = B$. Isto para todo elemento $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

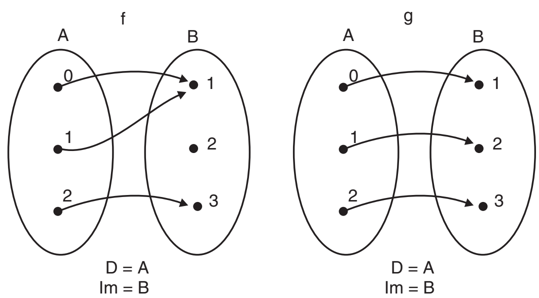
Uma função $g\colon A \to B$ é injetora (ou injetiva) se elementos diferentes x_1 e x_2 do domínio A dão como imagens elementos $g(x_1)$ e $g(x_2)$ também diferentes. Isto é, vale a propriedade:

$$x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow g(x_1), g(x) \in \mathrm{Im}(g) \ \text{ e } \ g(x_1) \neq g(x_2).$$

Uma função $f\colon A \to B$ que tem ambas as propriedades injetora e sobrejetora, é dita uma função bijetora.

Exemplos: Sejam $A = \{0, 1, 2\}$, $\ B = \{1, 2, 3\}$ e $f,\ g : A \to B$ como nos diagramas abaixo.

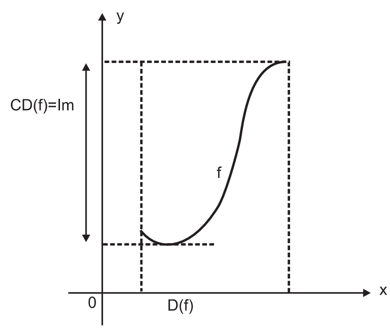
A função f não é injetora, nem sobrejetora. A função g é bijetora.



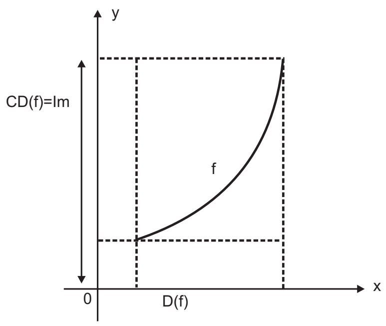
Identificação a partir do gráfico se uma função é sobrejetora, injetora ou bijetora

Seja $y = f(x)$ uma função. Considere seu gráfico, representado abaixo.

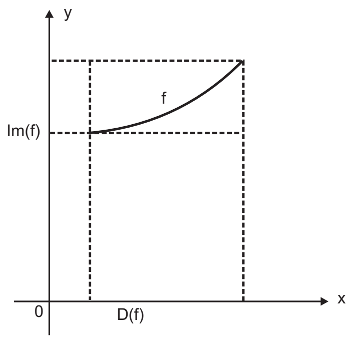
Se as retas paralelas a Ox e passando pelo contradomínio de f encontram o gráfico de f *em pelo menos um ponto*, f é *sobrejetora.*



Se as retas paralelas a Ox encontram o gráfico de f *no máximo em um ponto*, f é *injetora*.



Se as retas paralelas a Ox e passando pelo contradomínio de f encontram o gráfico de f *em exatamente um só ponto*, f é *bijetora*.



Função inversa

Uma função $f \colon A \to B$ é uma relação entre os conjuntos A e B com propriedades especiais. f como relação é um subconjunto de $A \times B$. Os pares ordenados (x, y) deste subconjunto são tais que $y = f(x)$.

Por exemplo, se $A = \{-1, 1, 2\}$, $B = \{-1, 0, 1, 4\}$ e $f(x) = x^2$. Enquanto relação, f se escreve como $f = \{(-1, 1), (1, 1), (2.4)\}$. Suponha que as coordenadas são trocadas para obter uma nova relação g.

$$g = \{(1, -1), (1, 1), (4, 2)\}.$$

Em que condições podemos garantir que, após a inversão, g é ainda uma função (e não meramente uma relação?) Nos casos afirmativos g é chamada função inversa de f e geralmente denotada por f^{-1}.

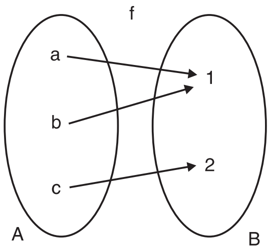
Se você pensar um pouquinho vai chegar à conclusão de que g é uma nova função apenas no caso em que a função f for bijetora. Entre outras palavras, somente as funções bijetoras f possuem uma inversa f^{-1}.

Vamos tentar te convencer da validade desta resposta através de diagramas.

Caso (I): Se f não é injetora então não existe inversa. Veja um exemplo, representado no diagrama a seguir, onde

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{e} \qquad B = \{1, 2\}$$

A função inversa não pode ser definida para o elemento 1, pois $f(a) = f(b) = 1$.

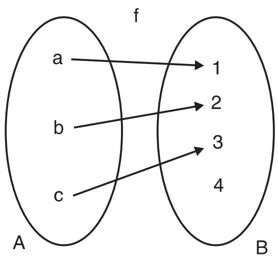


Caso (II): Se f não é sobrejetora então não existe inversa. Veja um exemplo, representado no diagrama abaixo, onde

$$A = \{a, b, c\} \qquad \text{e} \qquad B = \{1, 2, 3, 4\}$$

A função inversa não pode ser definida em $4 \in B$.

$$f^{-1}(4) = ?$$



Portanto, uma função $f\colon A \to B$, possui a função inversa f^{-1} se e somente se f é bijetora.

Seja $f\colon A \to B$ uma função bijetora. Então a função inversa $f^{-1}\colon B \to A$ tem as seguintes propriedades:

(i) f^{-1} é uma função bijetora de B em A.

(ii) $D(f^{-1}) = \text{Im}(f) = B$.

(iii) $\text{Im}(f^{-1}) = D(f) = A$.

A relação entre os pares ordenados de f e f^{-1} pode ser expressa simbolicamente por

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

ou

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Exemplos. (i) Qual a função inversa da função bijetora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 2$?

Solução: se $y = f(x)$ então $f^{-1}(y) = x$.

Partindo de $y = f(x)$, $\quad y = 3x + 2$, procuramos isolar x.

$$y = 3x + 2 \;\Rightarrow\; x = \frac{y-2}{3}$$

Logo, $f^{-1}(y) = x = \dfrac{y-2}{3}$

Nota: Como a variável pode indiferentemente ser trocada também podemos escrever

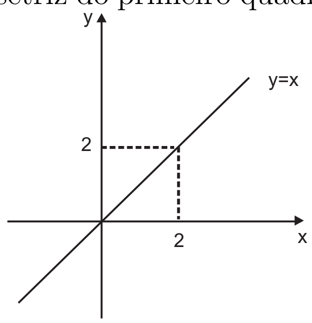
$$f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$$

(ii) Qual é a função inversa da função bijetora em $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$?

Solução: $y = f(x) = x^3$, logo, $x = \sqrt[3]{y}$.

Portanto $f^{-1}(y) = x = \sqrt[3]{y}$. Ou seja, $\qquad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

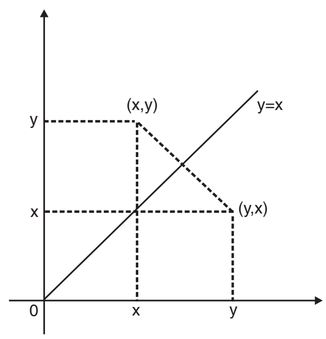
(iii) Um exemplo importante é o da função identidade. $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I(x) = x$. Isto é, se escrevermos $y = I(x)$, temos que $y = x$. A representação gráfica desta função resulta na bissetriz do primeiro quadrante. Veja a figura abaixo.



É claro que $I^{-1} = I$. Isto é, a função identidade e sua inversa coincidem.

Observações Importantes

(i) Um exame do gráfico abaixo nos leva à conclusão que os pontos (x, y) e (y, x) do plano, abaixo representados, são simétricos com relação à reta $y = x$.



Lembrando a relação

$$(x, y) \in f \iff (y, x) \in f^{-1}$$

podemos concluir que, no plano, os pontos que representam uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$. Isto é, os gráficos que representam f e f^{-1} são simétricos em relação à reta bissetriz do 1º e 4º quadrante.

(ii) Sejam $f\colon A \to B$ e a função inversa $f^{-1}\colon B \to A$. Então $f \circ f^{-1}\colon B \to B$ e $f^{-1} \circ f\colon A \to A$ são funções identidade. De fato

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y),$$

implica que

$$f \circ f^{-1}(y) = f(x) = y$$

e então $f \circ f^{-1} = \text{ Id}$.

Também

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$$

e então $f^{-1} \circ f = \text{ Id}$.

Exemplo:

Seja a função f em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 3$. Construir num mesmo plano cartesiano os gráficos de f e f^{-1}.

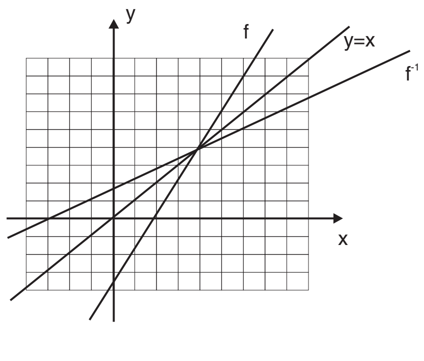
Solução:

$$f(x) = 2x - 3$$

x	y
-1	-5
0	-3
1	-1
2	1
3	3
4	5

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

x	y
-5	-1
-3	0
-1	1
1	2
3	3
5	4



Exercícios - Série A

1. Dados $f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 2x$. Determine:

   a) $f \circ g(x)$ b) $f \circ f(x)$ c) $g \circ f(x)$ d) $g \circ g(x)$.

2. (UFF 96 - 2ªfase) Sendo f a função real definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$, para todos os valores $x > 3$. Determine o valor de $f^{-1}(3)$.

3. (UNI-RIO 97 - 1ª fase) A função inversa da função bijetora $f\colon \mathbb{R} - \{-4\} \to \mathbb{R} - \{2\}$ definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+4}$ é:

   a) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+4}{2x+3}$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{2x-3}$ c) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{2-x}$
   d) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{x-2}$ e) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$

4. (UFF 2001) Dada a função real de variável real f, definida por $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}, \quad x \neq 1$:

   a) determine $(f \circ f)(x)$ b) escreva uma expressão para $f^{-1}(x)$.

5. (UFRS - 81) Se $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$, então $\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) > 0\}$ é:

a) (0,1) b) (1,2) c) $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ d) $(0,1) \cup (2, \infty)$ e) $(-\infty, 0) \cup (1, 2)$.

6. Se $f(x) = 3^x$, então $f(x+1) - f(x)$ é:

   a) 3 b) $f(x)$ c) $2f(x)$ d) $3f(x)$ e) $4f(x)$

7. (FUVEST SP) Se $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é da forma $f(x) = ax + b$ e verifica $f[f(x)] = x + 1$, para todo real, então a e b valem, respectivamente:

   a) 1 e $\dfrac{1}{2}$ b) -1 e $\dfrac{1}{2}$ c) 1 e 2 d) 1 e -2 e) 1 e 1

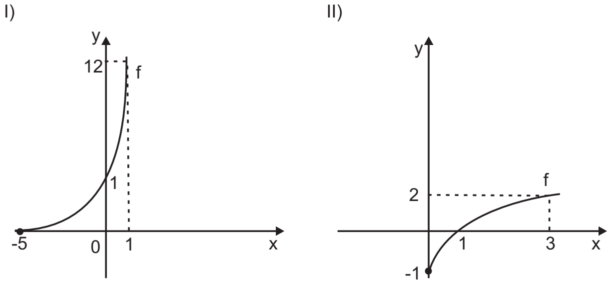
8. (FATEC SP) Seja a função f tal que $f\colon (\mathbb{R} - \{-2\}) \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$ · O número real x que satisfaz $f(f(x)) = -1$ é:

   a) -4 b) -2 c) 2 d) 4 e) n.d.a.

9. Determine o domínio de cada função:

   I) $f(x) = |x|$ II) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ III) $f(x) = 1/x$ IV) $f(x) = \sqrt{x}/x$

10. Nos gráficos abaixo determine $D(f)$ e $\text{Im}(f)$



11. Se $f(x+1) = \dfrac{3x+5}{2x+1}$ $(x \neq -1/2)$, o domínio de $f(x)$ é o conjunto dos números reais x tais que:

a) $x \neq 1/2$ b) $x \neq -1/2$ c) $x \neq -5/3$ d) $x \neq 5/3$ e) $x \neq -3/5$

Exercícios - Série B

1. Sejam as funções reais $g(x) = 2x - 2$ e $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$. Determine a expressão de f.

2. (UFF 96 - 2ª fase) Dadas as funções reais de variável real f e g definidas por $f(x) = x^2 - 4x + 3$, com $x \geq 2$ e $g(x) = 2 + \sqrt{1+x}$, com $x \geq -1$, determine:

   a) $(g \circ f)(x)$ b) $f^{-1}(120)$

3. Dada a função $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, para qualquer número real x, tal que $|x| \geq 3$, tem-se:

   a) $f(3x) = 3f(x)$ b) $f(0) = f(3)$ c) $f^{-1}(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, se $x \neq 0$
   d) $f(-x) = f(x)$ e) $f(x-3) = f(x) - f(3)$

4. (CE.SESP-81) Seja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, a função definida por

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f(1) = 5 \\ f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) \end{cases}$$

   o valor de $f(5)$ é:

   a) 17 b) 6 c) 5 d) 4 e) 10

5. (MACK SP) Sendo $f(x-1) = 2x+3$ uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, a função inversa $f^{-1}(x)$ é igual a:

   a) $(3x+1)\cdot 2^{-1}$ b) $(x-5)\cdot 2^{-1}$ c) $2x+2$ d) $\dfrac{x-3}{2}$ e) $(x+3)\cdot 2^{-1}$

6. (CESGRANRIO) Considere as funções

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to 2x+b \qquad\qquad x \to x^2$$

   onde b é uma constante. Conhecendo-se a composta

$$g\circ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to g(f(x)) = 4x^2 - 12x + 9$$

   podemos afirmar que b é um elemento do conjunto:

   a) $(-4, 0)$ b) (0,2) c) (2,4) d) $(4, +\infty)$ e) $(-\infty, -4)$

7. Considere a função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, \text{se } x \text{ é par} \\ \dfrac{x+1}{2}, \text{ se } x \text{ é ímpar} \end{cases}$$

   onde $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais. Assinale a alternativa verdadeira:

   a) A função f é injetora.
   b) A função f não é sobrejetora.
   c) A função f é bijetora.
   d) A função f é injetora e não é sobrejetora.
   e) A função f é sobrejetora e não é injetora.

8. O domínio da função $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}}$ é o conjunto:

   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1 \vee x > 2\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1 \vee x \geq 2\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \wedge x \geq 2\}$

   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

   e) $\emptyset$

9. (CESGRANRIO-79) Seja $f\colon (0;+\infty) \to (0;+\infty)$ a função dada por $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ e f^{-1} a função inversa de f. O valor de $f^{-1}(4)$ é:

   a) $1/4$ b) $1/2$ c) 1 d) 2 e) 4

10. (UFMG-80) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}\cdot$ Se $x \neq 0$, uma expressão para $f(1/x)$ é:

    a) x^2+1 b) $\dfrac{x^2+1}{x^2}$ c) $\dfrac{x^2}{x^2+1}$ d) $\dfrac{1}{x^2}+x$ e) $\dfrac{1}{x^2+1}$

11. Considere a função $F(x) = |x^2-1|$ definida em $\mathbb{R}$. Se $F \circ F$ representa a função composta de F com F, então:

    a) $(F \circ F)(x) = x|x^2-1|, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

    b) $\nexists\, y \in \mathbb{R} \mid (F \circ F)y = y$

    c) $F \circ F$ é injetora

    d) $(F \circ F)(x) = 0$ apenas para 2 valores reais de x

    e) todas as anteriores são falsas.

Gabarito

Série A

1. a) $f \circ g(x) = 4x^2 - 1$ b) $f \circ f(x) = x^4 - 2x^2$ c) $g \circ f(x) = 2x^2 - 2$ d) $g \circ g(x) = 4x$ 2. 5 3. c) 4. a) $(f \circ f)(x) = x$ b) $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ 5. d) 6. c) 7. a) 8. c) 9. I) $\mathbb{R}$, II) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ e } x \geq 2\}$, III) $\mathbb{R}^*$, IV) $\mathbb{R}^*_+$ 10. I) $D(f) = [-5, 1]$, $\operatorname{Im}(f) = [0, 12]$ II) $D(f) = [0, 3]$, $\operatorname{Im}(f) = [-1, 2]$ 11. a)

Série B

1. $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 - 1$ 2. a) $(g \circ f)(x) = x$ b) 13 3. d) 4. a) 5. b) 6. a) 7. e) 8. a) 9. b) 10. c) 11. e)

Auto-avaliação

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 15 – Função do 1º grau

Objetivos:

Após estudar esta aula, você saberá:

- Reconhecer uma função linear afim, identificar o coeficiente angular e representar graficamente no plano.
- Identificar se a função linear afim é crescente ou decrescente e descrever os pontos do domínio onde a função é positiva ou negativa.

Definição

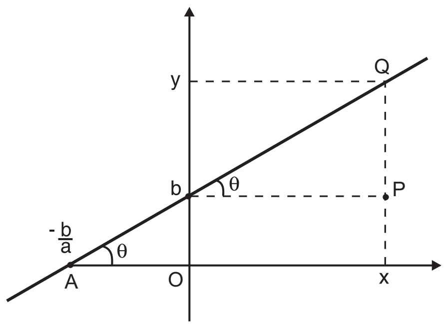
Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais e $a \neq 0$ é chamada de função polinomial do 1º grau (ou função linear afim). O número a é chamado coeficiente angular e b coeficiente linear da função.

Representação gráfica

Seja $y = f(x) = ax + b$. Então

$$x = 0 \to y = b$$
$$x = -\frac{b}{a} \to y = 0$$

e os pontos $(0, b)$ e $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ definem uma reta no plano. Esta reta é o gráfico de f. Suponha para a representação abaixo que $a > 0$ e $b > 0$.



Observe na figura os triângulos retângulos AOb e bPQ, ambos com ângulo agudo θ. Nós ainda não revisamos trigonometria, mas provavelmente você sabe que podemos calcular a tangente do ângulo θ usando os triângulos.

Assim $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{Ob}{OA}$ e $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{QP}{bP}$. Isto é,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{b}{\frac{b}{a}} = a \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y-b}{x}.$$

Juntando as equações vem que

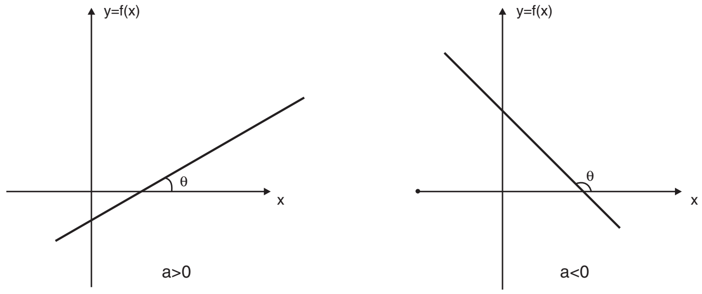
$$a = \frac{y-b}{x} \Rightarrow y = ax + b.$$

Nota: (i) Segundo o gráfico da função linear $f(x) = ax + b$, o coeficiente linear b da reta gráfico de f é o valor da ordenada do ponto de interseção da reta com o eixo Oy.

(ii) O valor a dá origem à equação $a = \operatorname{tg}\theta$, onde θ é a inclinação do gráfico de f. temos dois casos

a) $0 < \theta < 90° \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\theta > 0$ e $a > 0$ logo f é função crescente.

b) $90° < \theta < 180° \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\theta < 0$ e $a < 0$ logo f é função decrescente.



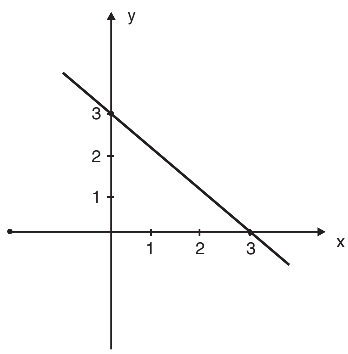
Exercícios resolvidos

(i) Construa o gráfico da função linear $f(x) = -x + 3$.

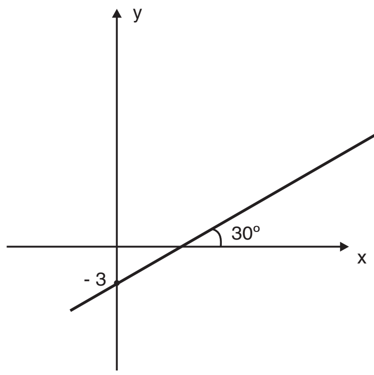
Solução: Precisamos determinar apenas dois pontos (x, y) do gráfico

$$y = f(x) = -x + 3$$
$$x = 0 \ \Rightarrow\ y = 3$$
$$x = 3 \ \Rightarrow\ y = 0$$

Então (0,3) e (3,0) são pontos do gráfico.



(ii) Determine a equação da reta $y = ax + b$ cujo gráfico está abaixo.



Solução: Como $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ este é o valor de a. Logo, $y = f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + b$.
Para achar b, usamos que $(0, -3)$ é ponto do gráfico. Então $-3 = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times 0 + b$
e $b = -3$. Logo $f(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x - 3$.

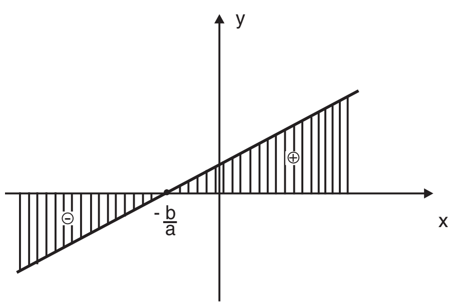
Estudo do sinal de $y = f(x) = ax + b$

Queremos estudar a variação do sinal de $y = f(x)$ quando x varia. Vamos dividir em dois casos.

Caso A: $a > 0$.

$$y = ax + b = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\tfrac{b}{a}$$
$$y = ax + b > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -\tfrac{b}{a}$$
$$y = ax + b < 0 \;\Leftrightarrow\; x < -\tfrac{b}{a}$$

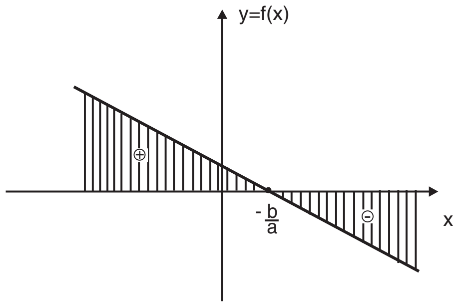
O gráfico mostra que para $x > -\dfrac{b}{a}$ o valor $y = f(x)$ é positivo e para $x < -\dfrac{b}{a}$, $y = f(x)$ é negativo.



Caso B: $a < 0$

$$y = ax + b = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\tfrac{b}{a}$$
$$y = ax + b > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -\tfrac{b}{a}$$
$$y = ax + b < 0 \;\Leftrightarrow\; x > -\tfrac{b}{a}$$

O gráfico de $y = f(x) = ax + b$, mostra que para $x < -\frac{b}{a}$ o valor $y = f(x)$ é positivo e para $x > -\frac{b}{a}$ o valor $y = f(x)$ é negativo.



Exercícios resolvidos

Resolva as inequações abaixo:

a) $3x - 2 < 0$

b) $-x + 1 > 0$

c) $(3x + 6)(-2x + 8) > 0$

d) $\dfrac{x+3}{2x+1} \leq 2$

Solução:

(a) $3x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; 3x < 2 \;\Leftrightarrow\; x < \dfrac{2}{3}$

O conjunto solução $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{2}{3} \right\} = \left(-\infty, \dfrac{2}{3} \right)$

(b) $-x + 1 > 0 \;\Leftrightarrow\; -x > -1 \;\Leftrightarrow\; x < 1.$

O conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} = (-\infty, 1).$

(c) A inequação é um produto e para resolvê-la é eficiente fazer uma tabela. Primeiro encontramos as raízes de

$$y = 3x + 6 \;\rightarrow\; \text{raiz } x = -2$$
$$y = -2x + 8 \;\rightarrow\; \text{raiz } x = 4$$

e construímos a tabela

	-2	4	$\mathbb{R}$
3x+6	−	+	+
-2x+8	−	−	+
(3x+6)(-2x+8)	+	−	+

$$3x + 6 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > -2$$
$$3x + 6 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < -2$$
$$-2x + 8 > 0 \;\Leftrightarrow\; x > 4$$
$$-2x + 8 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 4.$$

Com os dados anteriores, e usando que o produto de números de mesmo sinal é positivo e o produto de números de sinais contrários é negativo, completamos a tabela.

Logo, o conjunto solução

$$S = (-\infty, -2) \cup (4, \infty)$$

(d) Antes de resolver temos que reduzir o segundo membro a zero:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{2x+1} - 2 \leq 0 \;&\Leftrightarrow\; \frac{x+3-2(2x+1)}{2x+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{-3x+1}{2x+1} \leq 0. \end{aligned}$$

Esta última inequação é equivalente à inequação proposta inicialmente e tem forma própria para resolvermos. Vamos construir a tabela

$$\begin{aligned} -3x+1 > 0 \;&\Leftrightarrow\; -3x > -1 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{1}{3} \\ -3x+1 > 0 \;&\Leftrightarrow\; -3x < -1 \;\Leftrightarrow\; x > \frac{1}{3} \\ 2x+1 > 0 \;&\Leftrightarrow\; x > \frac{-1}{2} \\ 2x+1 < 0 \;&\Leftrightarrow\; x < \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

	-1/2	-1/3	$\mathbb{R}$
-3x+1	+	+	−
2x+1	−	+	+
$\frac{\text{-3x+1}}{\text{2x+1}}$	−	+	−

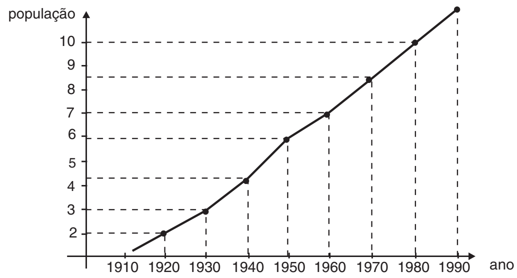
Na inequação quociente $\dfrac{-3x+1}{2x+1} \geq 0$ procuramos os valores de x que tornam o primeiro membro positivo ou nulo. O conjunto solução é

$$S = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$$

Nota: O valor $x = \dfrac{1}{3}$ anula o numerador e é solução. O valor $x = -\dfrac{1}{2}$ anula o denominador. Como o denominador nunca pode ser zero, este valor deve ser excluído do conjunto solução.

Exercícios - Série A

1. (UFRJ 98) O gráfico a seguir descreve o crescimento populacional de certo vilarejo desde 1910 até 1990. No eixo das ordenadas, a população é dada em milhares de habitantes.



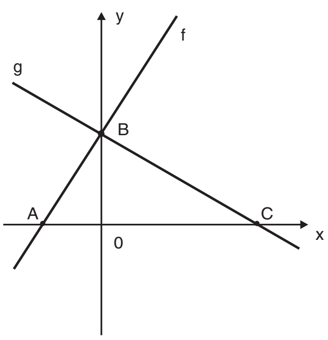
a) Determine em que década a população atingiu a marca de 5.000 habitantes.

b) Observe que a partir de 1960 o crescimento da população em cada década tem se mantido constante. Suponha que esta taxa se mantenha no futuro. Determine em que década o vilarejo terá 20.000 habitantes.

2. Determinar o valor de m para que o gráfico da função $y = f(x) = \frac{1}{3}(2x + m)$ passe pelo ponto $(-2, 1)$.

3. (IBMEC-2001) Na figura abaixo, estão representadas as funções reais:

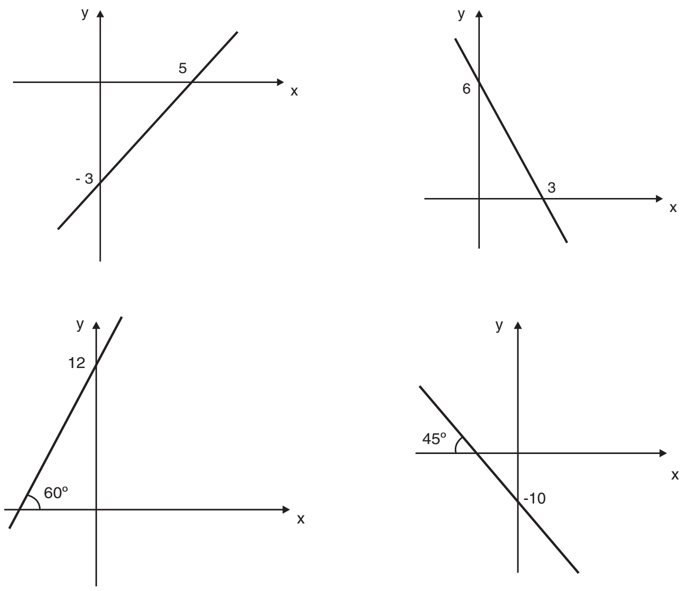
$$f(x) = ax + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = -\frac{2}{3}x + b$$



Sabendo que $AC \times 0B = 8$ então, a reta que representa a função f passa pelo ponto:

a) (1.3) b) $(-2, -2)$ c) $(-1, 4)$ d) (2,4) e) (3,6)

4. Determine $f(x)$ cujos gráficos são representados abaixo:



5. Resolver as inequações do 1º grau:

   a) $4x + 40 > 0$

   b) $12 - 6x \geq 0$

   c) $2x + 3 < 13$

   d) $x + 1 < 2x$

   e) $1 + 2x < 1 - 2x$

   f) $2(x - 1) \geq 1 - 3(1 - x)$

6. (UERJ 93) O conjunto solução da inequação $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 1$ é o seguinte intervalo:

   a) $(-\infty, -1)$ *b)* $\left(-\infty, \dfrac{2}{3}\right]$ c) $\left[-1, \dfrac{2}{3}\right)$ d) $[-1, \infty)$ e) $\left(\dfrac{2}{3}, 1\right]$

7. (CESGRANRIO) O conjunto de todos os números reais $x < 1$ que satisfazem a inequação $\dfrac{2}{x-1} < 1$ é:

   a) $\{0\}$ b) $\{0, 1/2\}$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\}$
   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

8. (FUVEST-SP) A função que representa o valor a ser pago após um desconto de 3% sobre o valor x de uma mercadoria é:

   a) $f(x) = x - 3$ b) $f(x) = 0,97x$ c) $f(x) = 1,3x$
   d) $f(x) = -3x$ e) $f(x) = 1,03x$

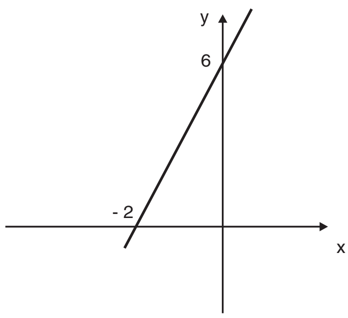
9. (CESGRANRIO) Os valores positivos de x, para os quais $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) > 0$, constituem o intervalo aberto:

   a) (1,3) b) (2,3) c) (0,3) d) (0,1) e) (1,2)

10. (UFSC) Seja $f(x) = ax + b$ uma função afim. Sabe-se que $f(-1) = 4$ e $f(2) = 7$. O valor de $f(8)$ é:

    a) 0 b) 3 c) 13 d) 23 e) 33

11. (UFF 93)



    A soma do coeficiente angular com o coeficiente linear da reta representada no gráfico acima é:

    a) -3 b) -3 c) 3 d) 4 e) 9

12. (PUC 91) A raiz da equação $\dfrac{x-3}{7} = \dfrac{x-1}{4}$ é:

    a) $-5/3$ b) $-3/5$ c) $5/3$ d) $3/5$ e) $2/5$

13. (UNIFOR/CE) Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 3x - 2$. A raiz da equação $f(f(x)) = 0$ é:

    a) $x \leq 0$ b) $0 < x \leq \dfrac{1}{3}$ c) $\dfrac{1}{3} < x \leq 1$ d) $1 < x < \dfrac{8}{3}$ e) $x > \dfrac{8}{3}$

14. (PUC-RJ) Uma encomenda, para ser enviada pelo correio, tem um custo C de 10 reais para um peso P de até 1 kg. Para cada quilo adicional o custo aumenta 30 centavos. A função que representa o custo de uma encomenda de peso $P \geq 1$ kg é:

    a) $C = 10 + 3P$ b) $C = 10P + 0,3$ c) $C = 10 + 0,3(P - 1)$
    d) $C = 9 + 3P$ e) $C = 10P - 7$

15. (PUC) Em uma certa cidade, os taxímetros marcam, nos percursos sem parada, uma quantia inicial de 4 UT (Unidade Taximétrica) e mais 0,2 UT por quilômetro rodado. Se, ao final de um percurso sem paradas, o taxímetro registrava 8,2 UT, o total de quilômetros percorridos foi:

    a) 15,5 b) 21 c) 25,5 d) 27 e) 32,5

16. Seja a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = ax + b$. Se os pontos $(0-3)$ e (2,0) pertencem ao gráfico de f, então $a + b$ é igual a:

    a) $9/2$ b) 3 c) $2/3$ d) $-3/2$ e) -1

Exercícios - Série B

1. (UNICAMP-92) Calcule a e b positivos na equação da reta $ax + by = 6$ de modo que ela passe pelo ponto (3,1) e forme com os eixos coordenados um triângulo de área igual a 6.

2. (UFRJ-91) Suponha que as ligações telefônicas em uma cidade sejam apenas locais e que a tarifa telefônica seja cobrada do seguinte modo:

   1º) uma parte fixa, que é assinatura;

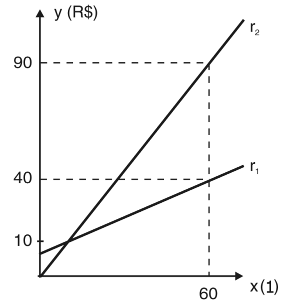
   2º) uma parte variável, dependendo do número de pulsos que excede 90 pulsos mensais. Assim, uma pessoa que tem registrados 150 pulsos na conta mensal de seu telefone pagará somente $150-90 = 60$ pulsos, além da assinatura.

   Em certo mês, o preço de cada pulso excedente era R$ 2,00 e o da assinatura era R$ 125,00. Um usuário gastou nesse mês 220 pulsos. Qual o valor cobrado na conta telefônica?

3. (UFRJ-95) Uma fábrica produz óleo de soja sob encomenda, de modo que toda produção é comercializada.

   O custo de produção é composto de duas parcelas. Uma parcela fixa, independente do volume produzido, corresponde a gastos com aluguel, manutenção de equipamentos, salários etc; a outra parcela é variável, dependente da quantidade de óleo fabricado.

No gráfico abaixo, a reta r_1 representa o custo de produção e a reta r_2 descreve o faturamento da empresa, ambos em função do número de litros comercializados. A escala é tal que uma unidade representa R$ 1.000,00 (mil reais) no eixo das ordenadas e mil litros no eixo das abscissas.



a) Determine, em reais, o custo correspondente à parcela fixa.

b) Determine o volume mínimo de óleo a ser produzido para que a empresa não tenha prejuízo.

4. Resolver as seguintes desigualdades:

a) $(x-1)(2x+1) < 2x(x-3)$

b) $\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x+2}{3} > 0$

c) $\dfrac{t^2-1}{2} - \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{t}{2}(t-1)$

5. (UFPI) Se m, n e p são os números inteiros do domínio da função real $f(x) = \sqrt{(3-2x)\cdot(2x+3)}$, então $m^2+n^2+p^2$ é igual a:

a) 2 b) 5 c) 6 d) 8 e) 9

6. (CESGRANRIO) Dada a inequação $(3x-2)^3(x-5)^2(2-x) \;\; x > 0$ tem-se que a solução é:

a) $\left\{z \mid x < \dfrac{2}{3} \text{ ou } 2 < x < 5\right\}$

b) $\left\{x \mid \dfrac{2}{3} < x < 2 \text{ ou } x < 0\right\}$

c) $2/3 \leq x \leq 2$

d) $2/3 < x < 5$

e) diferente das quatro anteriores

7. (PUC-SP) O domínio da função real dada por $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{x-4}}$ é:

   a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1 \text{ e } x < 4\}$

   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 4\}$

   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1 \text{ e } x \geq 4\}$

   d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x > 4\}$

   e) n.r.a.

8. (UNICAMP) Duas torneiras são abertas juntas; a 1ª enchendo um tanque em 5 horas, a 2ª enchendo outro tanque de igual volume em 4 horas. No fim de quanto tempo, a partir do momento em que as torneiras são abertas, o volume que falta para encher o 2º tanque é 1/4 do volume que falta para encher o 1º tanque?

9. (ESPM/SP) Uma empresa de bicicletas possui um custo unitário de produção de US\$ 28,00 e pretende que este valor represente 80% do preço de venda ao lojista. Esta, por sua vez, deseja que o valor pago ao fabricante seja apenas 70% do total que custará ao consumidor final. Quanto o consumidor final deverá pagar por uma bicicleta?

10. (PUC/MG) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}\cdot$ O valor de x na equação $f^{-1}(x) = \dfrac{7}{2}$ é:

    a) 3/8 b) 4/5 c) 2/7 d) $-4/5$ e) $-3/8$

Gabarito

Série A

1. a) a década de 40 b) $2040 < A < 2050$ 2. $m = 7$ 3. b) 4. a) $f(x) = y = \dfrac{3}{5}x - 3$ b) $y = -2x + 6$ c) $y = \sqrt{3}x + 12$ d) $y = -x - 10$ 5. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -10\} = (-10, \infty)$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\} =)-\infty, 2]$ c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\} = (-\infty, 5)$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} = (1, \infty)$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0]$ 6. c) 7. e) 8. b) 9. e) 10. c) 11. e) 12. a) 13. c) 14. c) 15. b) 16. d)

Série B

1. $a = 1$, $b = 3$ 2. a = R\$ 385,00 3. a) R\$ 10.000,00 b) 10000 litros
4. a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \dfrac{1}{5}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right)$ k b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\dfrac{7}{5}\right\} = \left(-\dfrac{7}{5}, \infty\right)$
c) $\left\{t \in \mathbb{R} \mid t \leq \dfrac{3}{2}\right\} = \left(-\infty, \dfrac{3}{2}\right]$ 5. a) 6. b) 7. d) 8. 3h45min
9. US\$50,00 10. b)

Auto-avaliação

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 16 – Função quadrática

Objetivos:

Após estudar esta aula, você saberá:

- Reconhecer uma função quadrática, bem como representar seu gráfico num sistema de coordenadas.
- Determinar as raízes de uma função quadrática e seus pontos de máximo ou de mínimo.
- Descrever para uma dada função quadrática os intervalos do domínio onde a função é positiva ou é negativa.

Definição

Dados os números reais a, b e c (com $a \neq 0$), a função

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \;\; x \mapsto y = ax^2 + bx + c$$

é chamada função quadrática ou função polinomial de grau dois.

Gráfico no sistema cartesiano

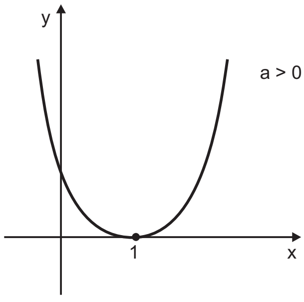
Toda função quadrática é representada graficamente por uma parábola. Temos duas observações importantes:

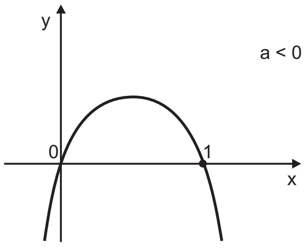
(i) As parábolas que são gráficos de funções quadráticas têm eixo paralelo ao eixo vertical Oy

(ii) Se $a > 0$ a concavidade da parábola é para cima. Se $a < 0$ a concavidade é para baixo.

Exemplos

Abaixo temos os gráficos de $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $\quad g(x) = -x^2 + x$, respectivamente.





Interseção com os eixos coordenados

(I) Interseção com $\overrightarrow{Ox}$.

Os gráficos anteriores mostram exemplos de gráficos, onde as parábolas interceptam, uma ou duas vezes o eixo $\overrightarrow{Ox}$. No caso de apenas um ponto de interseção a parábola é tangente ao eixo $\overrightarrow{Ox}$.

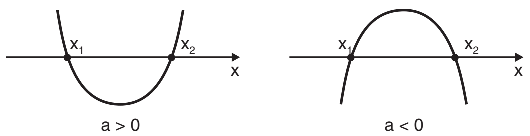
Para encontrar genericamente os pontos de interseção com $\overrightarrow{Ox}$ fazemos

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

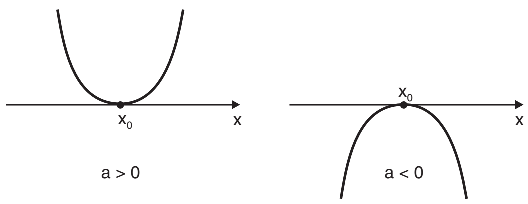
As soluções desta operação são

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac \tag{*}$$

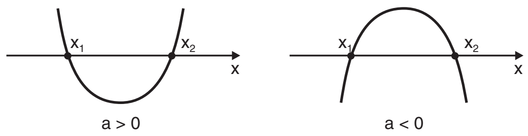
a) Se $\Delta > 0 \Rightarrow$ temos duas raízes x_1 e x_2 distintas em (*) $\Rightarrow$ o gráfico corta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ nestes pontos.



b) Se $\Delta = 0 \Rightarrow$ temos apenas uma raiz x_0 em (*) $\Rightarrow$ o gráfico tangencia o eixo $\overrightarrow{Ox}$.



c) Se $\Delta < 0 \Rightarrow$ não existe solução para (*). Neste caso a parábola não corta o eixo $\overrightarrow{Ox}$.



II) Interseção com o eixo $\overrightarrow{Oy}$

Fazendo $x = 0$, temos que $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$. Logo $y = c$. Portanto, $(0, c)$ é o ponto de interseção com o eixo y.

Exemplos: Determine o valor de m para que a função quadrática

$$f(x) = x^2 - 4x + m$$

possua apenas uma raiz.

Solução: Devemos ter $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.

$$4^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0 \iff 4 - 4m = 0, \ m = 1.$$

Determinação das raízes

Para $ax^2 + bx + c = 0, \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Ou seja

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a},$$

são as raízes.

(I) Soma e produto das raízes

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \\
&= \frac{-b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{a} \\
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \\
&= \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \\
&= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \\
&= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} \\
x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}
\end{aligned}$$

Nota: Se $f(x) = y = ax^2 + bx + c$

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Então chamando de S a soma das raízes e de P o produto das raízes, encontramos

$$y = a(x^2 - Sx + P).$$

(II) Fatoração da função quadrática

Afirmamos que

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

De fato,

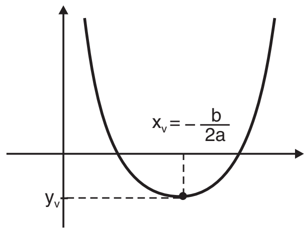
$$\begin{aligned}
&a(x - x_1)(x - x_2) = \\
&a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = \\
&a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2] = \\
&a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = ax^2 + bx + c
\end{aligned}$$

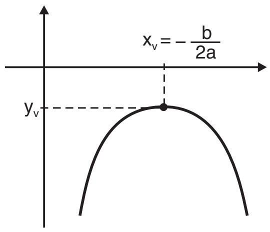
(III) Pontos de máximo ($a < 0$) ou de mínimo ($a > 0$) para uma função quadrática.

Vamos denotar por (x_v, y_v) as coordenadas do ponto máximo ($a > 0$) ou ponto mínimo ($a < 0$) da parábola.

(a) Identificação coordenada x_v.

Devido à simetria da parábola, no caso em que $\Delta \geq 0$, o ponto médio x_v do segmento cujos extremos são os pontos x_1 e x_2 (raízes da equação) é onde ocorre o valor mínimo da função. Como $x_v = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, encontramos que $x_v = -\dfrac{b}{2a}$. No caso em que $\Delta < 0$, é possível ainda provar que $x_v = -\dfrac{b}{a}$ é ainda o ponto onde ocorre o máximo ou mínimo. Portanto, neste ponto ocorre o valor y_v mínimo para y (caso $a > 0$) e o valor y_v máximo para y (caso $a < 0$). Veja abaixo, os gráficos das duas situações.



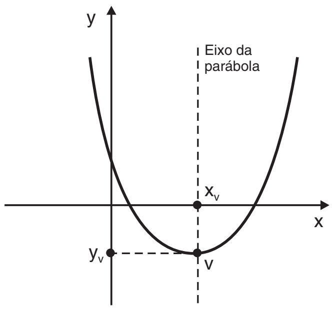


Nota: Conforme dito, quando $\Delta \geq 0$, o valor x_v que fornece o mínimo representa a média aritmética das raízes x_1 e x_2 ,

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}\,.$$

(b) Cálculo de y_v

O ponto $V = (x_v, y_v)$ identifica o vértice da parábola,



$$y_v = ax_v^2 + bx_v + c = a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c$$

$$= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$$

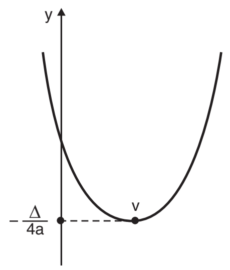
$$y_v = \frac{-\Delta}{4a}.$$

c) Domínio e conjunto imagem

O domínio $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ é toda a reta real $\mathbb{R}$.

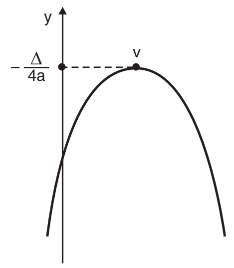
O conjunto imagem depende do sinal do coeficiente a.

1º caso: $a > 0$



$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq \tfrac{-\Delta}{4a} \right\}$$

2º caso: $a < 0$



$$\mathrm{Im}(f) = \left\{ y \in \mathbb{R} \mid y \leq \tfrac{-\Delta}{4a} \right\}$$

Exemplos

1. Determinar as raízes da função definida pela equação $y = x^2 - 2x - 8$ e fazer um esboço do gráfico.

Solução:

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1) \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$

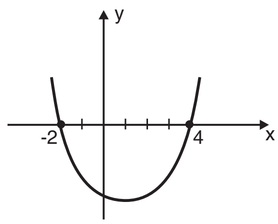
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{(-2) + \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2+6}{2} = 4 \text{ e } x_2 = \frac{(-2) - \sqrt{36}}{2 \cdot 1} = \frac{2-6}{2} = -2$$

Gráfico da Parábola

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ concavidade voltada para cima

$\Delta = 36 > 0 \Rightarrow$ a parábola intercepta o eixo x em dois pontos.



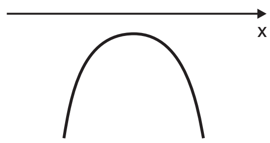
2. Determinar as raízes da função definida pela equação $y = -x^2 + x - 4$ e fazer um esboço do gráfico.

   Solução: $-x^2 + x - 4 = 0$
   $x^2 - x + 4 = 0$
   $\Delta = (-1)^2 - 4(1) \cdot (4) = 1 - 16 = -15,$
   $\Delta < 0$ (não tem raízes reais).

   Gráfico da Parábola

   $a = -1 < 0 \Rightarrow$ concavidade voltada para baixo

   $\Delta = -15 < 0 \Rightarrow$ não intercepta o eixo x



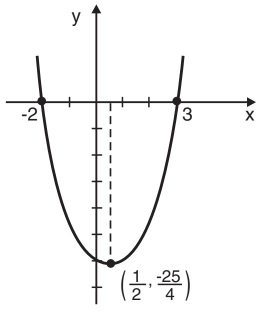
3. Dada a equação $y = x^2 - x - 6$, determinar o vértice da parábola e constuir o seu gráfico.

   Solução: $y = x^2 - x - 6$
   $x^2 - x - 6 = 0$
   $\Delta = 1 + 24 = 25$
   $$x_1 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 + 5}{2} = 3$$
   $$x_2 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2$$
   Raízes: 3 e -2
   $$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-25}{4} \right)$$

Gráfico da Parábola

$a = 1 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow$ concavidade para cima

$\Delta = 26 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$ intercepta o eixo $\overrightarrow{Ox}$ em dois pontos



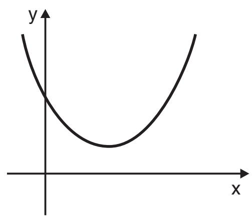
Estudo do sinal da função quadrática

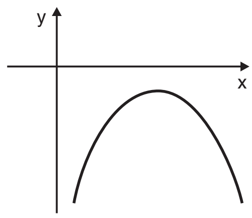
No estudo do sinal da função $y = ax^2 + bx + c$, temos 6 casos a considerar.

Caso 1: $\Delta < 0$ e $a > 0$

Caso 2: $\Delta < 0$ e $a < 0$

Os gráficos das parábolas nestes casos não interceptam o eixo $\overrightarrow{Ox}$. Então $y > 0$ no caso 1 e $y < 0$ no caso 2.

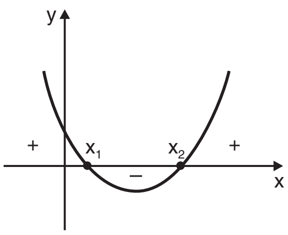


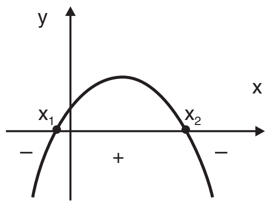


Caso 3: $\Delta > 0$ e $a > 0$

Caso 4: $\Delta > 0$ e $a < 0$

Os gráficos das parábolas nestes casos interceptam o eixo $\overrightarrow{Ox}$ em dois pontos (as raízes x_1 e x_2)

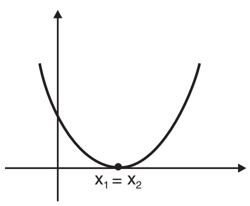


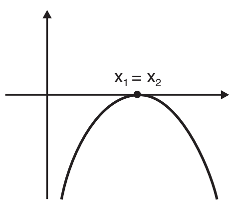


y é positivo para	y é positivo para
$x \in (\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$	$x \in (x_1, x_2)$
y é negativo para	y é negativo para
$x \in (x_1, x_2)$	$x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$

Caso 5: $\Delta = 0, \quad a > 0$

Caso 6: $\Delta = 0, \quad a < 0$





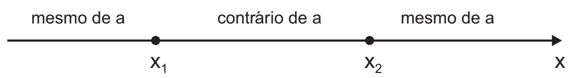
Então y é positivo para todo $x \neq x_1$ no caso 5 e y é negativo para todo $x \neq x_1$ no caso 6.

Regra síntese para questão do sinal

(i) Se $\Delta < 0$ o sinal de y é o mesmo de a

(ii) Se $\Delta = 0$ o sinal de y é o mesmo de a (exceto para $x = x_1 = x_2$ quando $y = 0$)

(iii) Se $\Delta > 0$.



O sinal de y nos intervalos (∞, x_1), (x_1, x_2) e (x_2, ∞) obedecem ao esquema acima.

Exemplos

1. Resolva o inequação

$$5x^2 - 3x - 2 > 0$$

Solução:

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 9 - (4 \cdot 5 \cdot -2)$

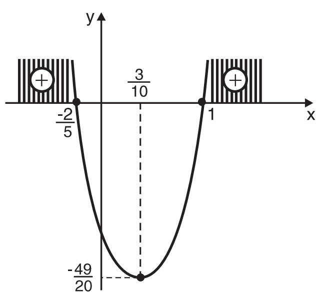
$\Delta = 49 > 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{10} \qquad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-2}{5}$$

$$x_{\text{vértice}} = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{10}$$

$$y_{\text{vértice}} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{49}{20}$$



Conjunto solução S

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ ou } x < -\frac{2}{5} \right\}$$

2. Encontre o conjunto $S \subset \mathbb{R}$ onde para todo $x \in S \Rightarrow y > 0$, onde $y = x^2 - 4x + 4$

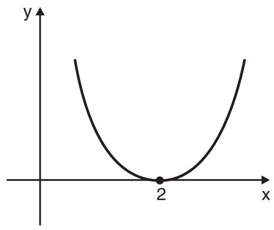
   Solução:

   $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot (4) \cdot (1)$

   $\Delta = 16 - 16 = 0$

   $\Delta = 0$

   $x = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$



   O conjunto solução é: $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

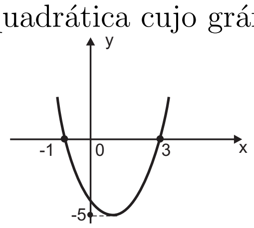
Exercícios - Série A

1. Determinar m, de modo que a parábola definida pela função:

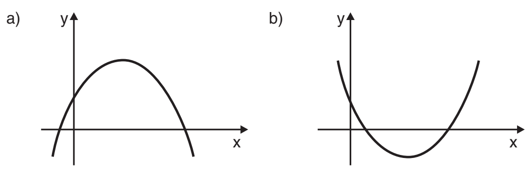
   a) $f(x) = (-2m + 3)x^2 + 3x - 2$ tenha concavidade voltada para baixo

   b) $y = (5 - 3m)x^2 + 16$ tenha concavidade voltada para cima

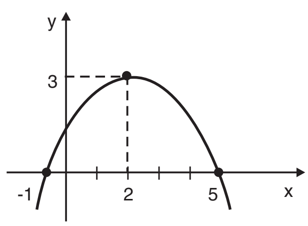
2. Determine a equação quadrática cujo gráfico é:



3. Determine em cada caso os sinais de a, b, c e Δ.



4. (UFRJ/92) A figura abaixo é o gráfico de um trinômio do segundo grau.



   Determine o trinômio.

5. Resolver as seguintes inequações:

   a) $x^2 + 2x - 3 > 0$

   b) $-4x^2 + 11x - 6 \leq 0$

   c) $9x^2 - 6x + 1 > 0$

   d) $x^2 - 5 < 0$

   e) $x(x + 4) > -4(x + 4)$

   f) $(x - 1)^2 \geq 3 - x$

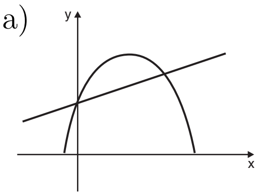
6. (PUC-90) O número de pontos de interseção da parábola

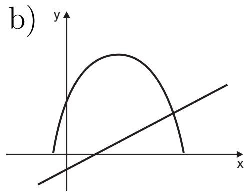
$$y = -4x^2 + 3x + 1$$

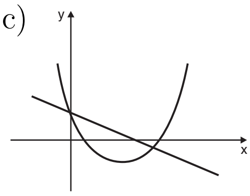
   com a reta $y = 5x - 2$ é:

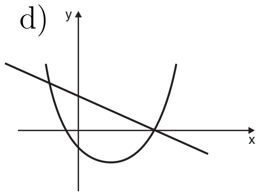
   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

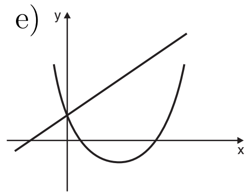
7. (UFF-95) Considere m, n e p números reais e as funções reais f e g de variável real, definidas por $f(x) = mx^2 + nx + p$ e $g(x) = mx + p$. A alternativa que melhor representa os gráficos de f e g é:

   a) 

   b) 

   c) 

   d) 

   e) 

8. (PUC-RIO/99) O número de pontos de intersecção das duas parábolas $y = x^2$ e $y = 2x^2 - 1$ é:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

9. (VEST-RIO/93) O valor mínimo da função real $f(x) = x^2 + x + 1$ é:

   a) -1 b) 0 c) $1/2$ d) $2/3$ e) $3/4$

10. (UFF) Para que a curva representativa da equação dada por $y = px^2 - 4x + 2$ tangencie o eixo dos x, o valor da constante p deve ser igual a:

    a) -6 b) -2 c) 0 d) 2 e) 6

11. (UNIFICADO-93) O vértice da parábola $y = x^2 + x$ é o ponto:
a) $(-1, 0)$ b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ c) (0,0) d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ e) (1,2)

12. (PUC-91) O mínimo valor da função $f(x) = x^2 - 6x + 10$ ocorre quando x vale:
a) 6 b) -6 c) 3 d) -3 e) $-\frac{5}{3}$

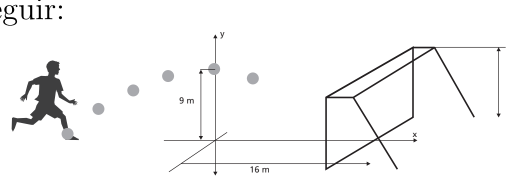
Exercícios - Série B

1. (FUVEST-SP)
a) Se $x + \frac{1}{x} = b$, calcule $x^2 + \frac{1}{x^2}$
b) Resolva a equação $x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

2. (UFF-95) Determine o domínio da função real $f(x)$ definida por $f(x) = \sqrt{x - \frac{900}{x}}\,\cdot$

3. (UERJ/97) Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e quando começou a cair da altura máxima de 9 metros, sua sombra se encontrava a 16 metros da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.

A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura a seguir:



A equação da parábola era do tipo: $Y = -\frac{x^2}{36} + C$. O ponto onde a bola tocou o gramado pela primeira vez foi:

a) na baliza b) atrás do gol c) dentro do gol d) antes da linha do gol

4. (UFF-90) Duas funções f e g definidas por $f(x) = x^2 + ax + b$ e $g(x) = cx^2 + 3x + d$ interceptam-se nos pontos $(0, -2)$ e $(1, 0)$. Determine os valores de a, b, c, e d.

5. (PUC-91) Se $1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$, então $\frac{2}{x}$ vale:
   a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) 1 d) 2 e) -1 ou 2

6. (PUC-88) Um quadrado e um retângulo, cujo comprimento é o triplo da largura, são construídos usando-se todo um arame de 28 cm. Determine as dimensões do quadrado e do retângulo de forma que a soma de suas áreas seja a menor possível.

7. (UFRJ-90) Resolva a inequação:

$$x^4 - 9x^2 + 8 < 0$$

Gabarito

Série A

1. a) $m > \frac{3}{2}$, $b < \frac{5}{3}$ 2. $y = \frac{5}{4}(x^2 - 2x - 3)$ 3. a) $a < 0$; $b > 0$; $c > 0$; $\Delta > 0$. b) $a > 0$; $b < 0$; $c > 0$; $\Delta > 0$ 4. $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ 5. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -3 \text{ ou } x > 1\}$ b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{4} \text{ou } x \geq 2\right\}$ c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{1}{3}\right\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 5\}$ e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 2\}$ f) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -4\}$ 6. c) 7. e) 8. c) 9. e) 10. d) 11. b) 12. c)

Série B

1. a) $b^2 - 2$ b) $\left\{1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ 2. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -30 \leq x < 0 \text{ ou } x \geq 30\}$ 3. c) 4. $a = 1$, $b = -2$; $c = -1$, $d = -2$ 5. c) 6. lado quadrado = 3, retângulo: altura = 2, comprimento = 6 7. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2\sqrt{2} < x < -1$ ou $1 < x < 2\sqrt{2}\}$

Auto-avaliação

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 17 – Função Modular

Objetivos:

O objetivo desta aula é possibilitar que você:

- Compreenda o conceito de módulo de um número real e o conceito de função modular.
- Possa construir gráfico de funções modulares.
- Possa resolver equações e inequações envolvendo módulos.

Introdução

O módulo de um número real x é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}$$

O módulo de x também é chamado de valor absoluto de x.

Exemplo 1

$|3| = 3 \qquad |3,15| = 3,15 \qquad |-1| = 1 \qquad |-\frac{1}{7}| = \frac{1}{7} \qquad |0| = 0$

Observação. Para qualquer número real x vale sempre $\sqrt{x^2} = |x|$. Não é sempre verdade que $\sqrt{x^2} = x$, por exemplo $\sqrt{(-12)^2} = 12$. É claro que $\sqrt{x^2} = x$, se $x \geq 0$.

Função modular

Chamamos de função modular qualquer função de variável real x cuja definição envolva módulos da variável.

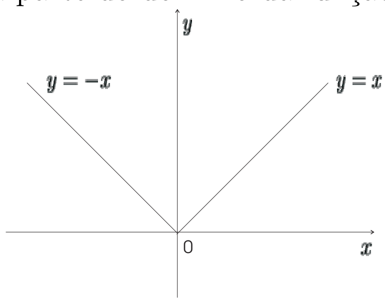
Exemplo 2. O exemplo mais simples de uma função envolvendo módulos é o da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = |x|.$$

O gráfico desta função é apresentada na figura a seguir. Observe que, como

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{se} \quad x < 0 \end{cases},$$

então o gráfico de f é formado pela reta $y = x$ na parte do domínio da função onde $x \geq 0$ e $y = -x$ na parte do domínio da função onde $x < 0$.



Construção de gráficos

Vamos considerar um caso um pouco mais geral, onde $f(x)$ é uma função definida por $f(x) = |g(x)|$. Para construir o gráfico analisamos para que intervalos de x, vale $g(x) \geq 0$ e para que intervalos de x, $g(x) < 0$. Isto é, fazemos o estudo de sinais da função $g(x)$ sobre a qual atua o módulo.

Naturalmente, vale que
$f(x) = |g(x)| = g(x)$ se $g(x) \geq 0$ e $f(x) = |g(x)| = -g(x)$ se $g(x) < 0$.

Vamos a alguns exemplos.

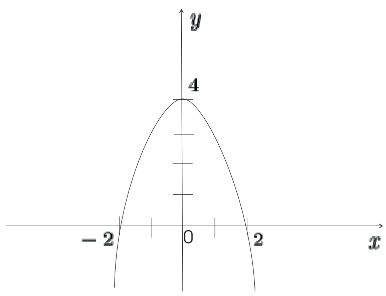
Exemplo 3

Esboce o gráfico de $f(x) = |4 - x^2|$.

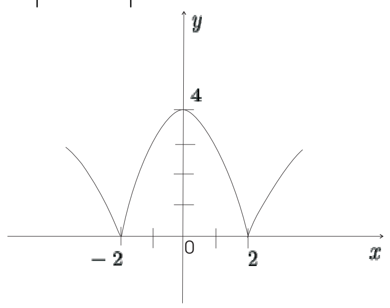
Solução:

Fazemos o estudo de sinais de $4 - x^2$. Esta é uma função quadrática, com raízes ± 2, cujo gráfico é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

O gráfico de $4 - x^2$ é



O gráfico de $f(x) = |4 - x^2|$ será



Note que para $-2 \leq x \leq 2$ temos que $x^2 - 4 \geq 0$. Portanto, o gráfico de $f(x)$ coincide com o gráfico de $x^2 - 4$. No entanto, para os valores $x < -2$ e $x > 2$ temos que $x^2 - 4 < 0$. Logo o gráfico de $f(x)$ é o simétrico, em relação ao eixo Ox, do gráfico de $x^2 - 4$.

Exemplo 4

$f(x) = |x - 2| + |x + 1|$

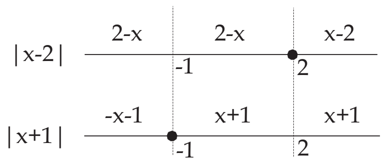
Solução:

Neste caso é necessário separar o domínio em vários intervalos. Temos:

$$|x-2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ -(x-2) = 2 - x & \text{se } x < 2 \end{cases} \quad \text{e}$$

$$|x+1| = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \geq -1 \\ -(x+1) = -x - 1 & \text{se } x < -1 \end{cases}.$$

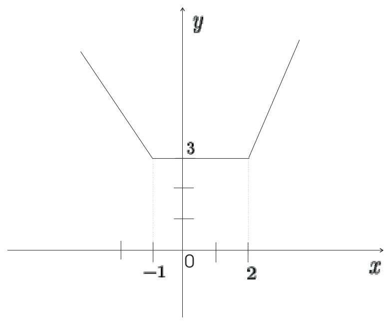
Intervalos a serem considerados:



Portanto,

$$f(x) = |x-2| + |x+1| = \begin{cases} (2-x) + (-x-1) = 1 - 2x & \text{se } x < -1 \\ 2 - x + (x+1) = 3 & \text{se } -1 \leq x < 2 \\ x - 2 + x + 1 = 2x - 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

Cujo gráfico é :



Equações e inequações modulares

Uma equação modular é simplesmente uma equação que envolve funções modulares (o mesmo para inequações).

A seguir vamos listar algumas propriedades simples, no entanto muito úteis, para resolver equações e inequações modulares:

1. $|x| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto não existe número real x para o qual $|x| < 0$.
2. Se $a > 0$ então $\quad |x| = a \;\Leftrightarrow\; x = a$ ou $x = -a\,.$
3. $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0.$
4. Se $|a| > 0$ então $\quad |x| < a \;\Rightarrow\; -a < x < a\,.$
5. $|x| = |y| \;\Leftrightarrow\; x = y$ ou $x = -y.$

Exemplo 5

1. Resolva a equação $|x^2 - 4x| = 4$

   Solução: (Veja a propriedade 2)

   $|x^2 - 4x| = 4 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x = 4$ ou $x^2 - 4x = -4$

   $x^2 - 4x = 4 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$

   $x^2 - 4x = -4 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$

   Portanto a o conjunto solução S da equação é o conjunto:

   $$S = \{2 + \sqrt{2},\ 2 - \sqrt{2},\ 2\}$$

2. Resolva a equação $|2x + 3| = |x - 4|$

   Solução: (Veja a propriedade 6)

   $|2x + 3| = |x - 4| \;\Rightarrow\; 2x + 3 = x - 4$ ou $2x + 3 = -(x - 4)$

   $2x + 3 = x - 4 \;\Rightarrow\; x = -7$

   $2x + 3 = -(x - 4) \;\Rightarrow\; 3x = -7 \;\Rightarrow\; x = -\frac{7}{3}$

   O conjunto solução S da equação é o conjunto:

   $$S = \{-7,\ -\frac{7}{3}\}.$$

3. Resolva a inequação $|2x-1| \leq 4$

   Solução: (Veja a propriedade 5)

   $$|2x-1| \leq 4 \;\Rightarrow\; -4 \leq 2x-1 \leq 4$$
   $$-4 \leq 2x-1 \;\Rightarrow\; -\tfrac{3}{2} \leq x$$
   $$2x+3 \leq 4 \;\Rightarrow\; x \leq \tfrac{5}{2}$$

   O conjunto solução S da inequação é o conjunto:

   $$S = \left[-\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right].$$

4. Resolva a inequação $|x^2-4| \geq 4$

   Solução: (Veja a propriedade 4)

   $|x^2-4| \geq 4 \;\Rightarrow\; x^2-4 \geq 4$ ou $x^2-4 \leq -4$

   $x^2-4 \geq 4 \;\Rightarrow\; x^2 \geq 8 \;\Rightarrow\; x \geq \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ou $x \leq -2\sqrt{2}$

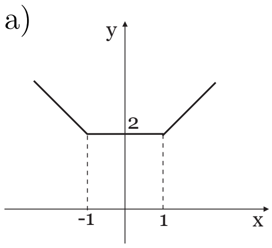
   $x^2-4 \leq -4 \;\Rightarrow\; x^2 \leq 0 \;\Rightarrow\; x = 0$

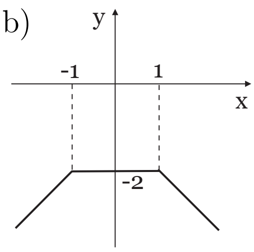
   Portanto o conjunto solução S é composto de todos os valores x tais que $x=0$ ou $x \leq -2\sqrt{2}$ ou $x \geq 2\sqrt{2}$.

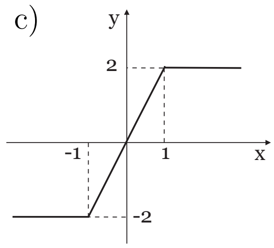
   Então $\qquad S = \{0\} \cup (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, \infty).$

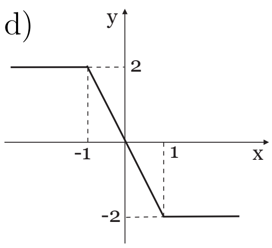
Exercícios - Série A

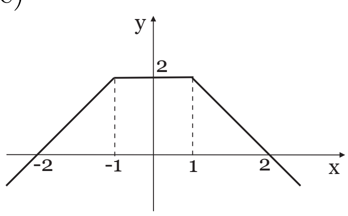
1. O gráfico que melhor representa a função $f(x) = |x+1| - |x-1|$ é:

   a)
   

   b)
   

   c)
   

   d)
   

   e)
   

2. (Uni-Rio - 99) Sejam as funções

   $$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & y=|x| \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rcl} g:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & x^2-2x-8 \end{array}$$

   Faça um esboço do gráfico da função fog.

3. (UFRJ - 99) Durante o ano de 1997 uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função

$$L(x) = 50(|x - 100| + |x - 200|)$$

onde $x = 1, 2, ..., 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais. Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R\$ 10.000, 00.

4. (FUVEST) Determine as raízes das seguintes equações:

a) $|2x - 3| = 5$ b) $|2x^2 - 1| + x = 0$

5. (Osec-SP) O conjunto solução da inequação $|x + 1| > 3$ é o conjunto dos números reais x tais que:

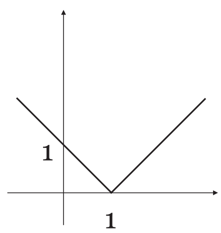
a) $2 < x < 4$ b) $x < -4$ ou $x > 2$ c) $x \leq -4$ ou $x > 2$
d) $x < -4$ e $x > 2$ e) $x > 2$

6. (MACKENZIE-SP) A solução da inequação $|x| \leq -1$ é dada pelo conjunto:

a) $\emptyset$ b) $]-1; 1[$ c) $[-1; \infty[$ d) $[-1; 1]$ e) $]-\infty; -1]$

7. (PUC/CAMPINAS-SP) Na figura abaixo tem-se o gráfico da função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por:

a) f(x)=$|x + 1|$
b) f(x)=$|x - 1|$
c) f(x)=$|x| - 1$
d) f(x)=$|x^2 - 1|$
e) f(x)=$|1 - x|$



8. (UECE) Sejam $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, $S = \{x \in \mathbb{Z};\ x^2 - 3x + 2 = 0\}$ e $T = \{x \in \mathbb{Z};\ |x - 1| < 3\}$. O número de elementos do conjunto $T - S$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

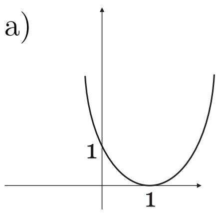
9. (Cesgranrio) A soma das soluções reais de $|x + 2| = 2|x - 2|$ é:

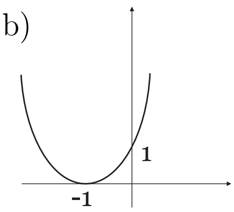
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) 6 d) $\frac{19}{3}$ e) $\frac{20}{3}$

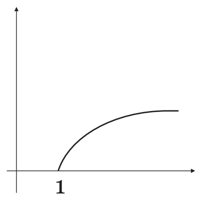
10. (CESGRANRIO) Trace o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x^2 - 1) + |x^2 - 1| + 1$.

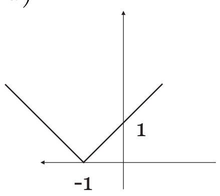
Exercícios - Série B

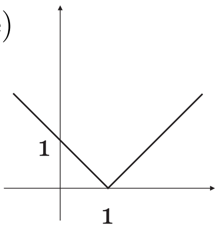
1. (UNIFICADO - 97) O gráfico que melhor representa a função real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ é:

a) 

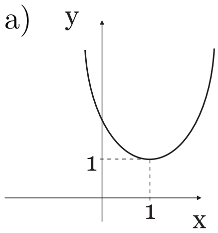
b) 

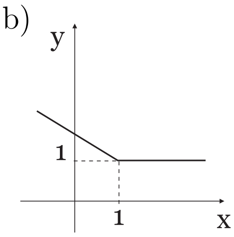
c) 

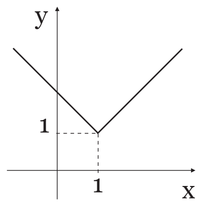
d) 

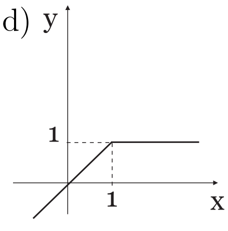
e) 

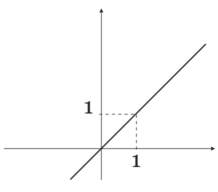
2. (UNIFICADO - 96) O gráfico que melhor representa a função real definida por $f(x) = \sqrt{(x-1)^2} + 1$ é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

3. (PUC - 96) Sendo $a > 0$, o conjunto dos reais x tais que $|a - 2x| < a$ é:

a) $\left\{\dfrac{a}{2}\right\}$

b) o intervalo aberto $(0, a)$

c) o intervalo aberto $\left(\dfrac{-a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$

d) o intervalo aberto $\left(\dfrac{a}{2}, a\right)$

e) vazio

4. (UFMG) Se $f(x) = |x| + 1$ e $g(x) = -x^2 + 6x - 10$ para todo x real, então pode-se afirmar que $f(g(x))$ é igual a:

   a) $x^2 + 6x - 11$

   b)$x^2 + 6x - 9$

   c) $x^2 - 6x + 11$

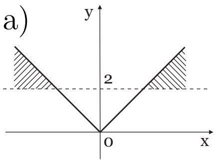
   d) $x^2 - 6x + 9$

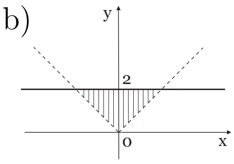
   e) $x^2 - 6x - 11$

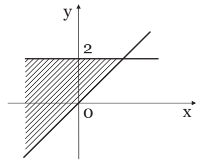
5. (UFF - 99) Considere o sistema

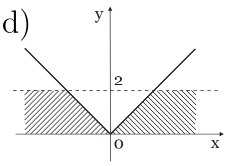
$$\begin{cases} y > & |x| \\ y \leq & 2 \end{cases}$$

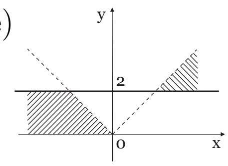
   A região do plano que melhor representa a solução é:

   a)


   b)


   c)


   d)


   e)


6. (FEI-SP) A solução da inequação $\dfrac{1}{|1 - 2x|} < 1$ é:

   a) $0 < x < 1$
   b) $x < -1$ ou $x > 0$
   c) $-1 < x < 0$
   d) $x < 0$ ou $x > 1$
   e) $x < -1$ ou $x > 1$

7. (F.C. Chagas-BA) O maior valor assumido pela função $y = 2 - |x - 2|$ é:
   a) 1   b) 2   c) 3   d) 4   e) ∞

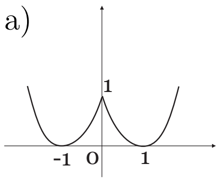
8. (CESGRANRIO) Seja a função definida no intervalo aberto $]-1, 1[$ por $f(x) = \dfrac{x}{1 - |x|}$. Então, $f\left(\dfrac{-1}{2}\right)$ vale:

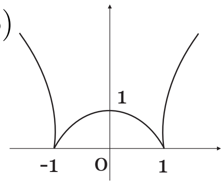
   a) $\dfrac{1}{2}$ b) $\dfrac{1}{4}$ c) $\dfrac{-1}{2}$ d) -1 e) -2

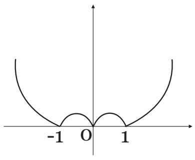
9. (UNI-RIO) Sendo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ e } |y| \leq 1\}$ a representação gráfica de R num plano cartesiano é:

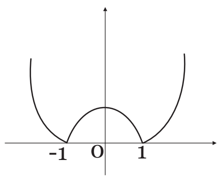
   a) uma reta
   b) um triângulo
   c) um quadrado
   d) um losango
   e) uma circunferência

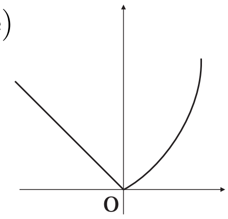
10. (UNI-RIO-92) A representação gráfica da função $y = |x^2 - |x||$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


11. (U.MACK) O conjunto solução da equação $\dfrac{|x|}{x} = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ é:

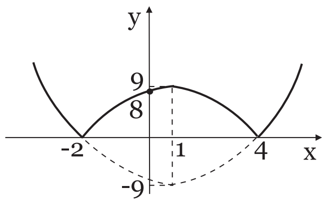
   a) $\mathbb{R} - \{0, 1\}$
   b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ ou } x < 0\}$
   c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$
   d) $\emptyset$
   e) nenhuma das alternativas anteriores é correta.

Gabarito

Série A

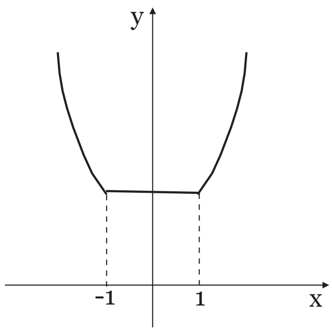
1) c)

2)



3) $x = 50$ ou $x = 250$ 4) a) $x = -1$ e $x = 4$ b) $x = -\frac{1}{2}$ e $x = -1$ 5) b)
6) a) 7) e) 8) c) 9) e)

10)



Série B

1) e) 2) c) 3) b) 4) c) 5) b) 6) d) 7) b) 8) d) 9) c) 10) c)
11) b)

AUTO-AVALIAÇÃO

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 18 – Função Exponencial

Objetivos:

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Entender o conceito de função exponencial e expressar gráficos destas funções.
- Resolver equações exponenciais.

Definição

Uma função exponencial é uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a^x$, onde a é um número real fixo, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Vamos fazer duas observações sobre a definição de função exponencial:

a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$, pois, para todo $x \in \mathbb{R}$, a^x é um número real bem definido.

Devemos comentar o que foi dito neste item a). Sabemos calcular a^n, se n é um número natural. Neste caso, $a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n vezes). Se n é um número inteiro negativo e $a \neq 0$ então $a^n = \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n}$. Para os casos de expoentes racionais, usamos raízes enésimas compostas com exponenciação. Por exemplo, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Note que dado um número racional $\dfrac{m}{n}$, podemos considerar que $n > 0$ (do contrário multiplicaríamos numerador e denominador por -1). Então sabemos calcular a^q onde q é número racional. Para o cálculo de a^x, onde x é real, devemos usar a técnica de aproximação por limite. Tomamos uma seqüência de números racionais q_n convergindo para x e então a^x é o limite de a^{q_n}. No entanto, o assunto limite, nestes termos, é avançado em relação ao nível que estamos trabalhando e pedimos para você aceitar sem provas a argumentação que desenvolvemos.

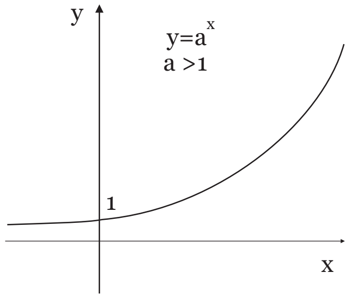
b) $\text{Im}(f) = (0, \infty)$, pois $a^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Gráfico

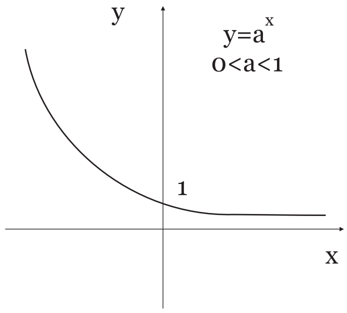
Como $f(0) = a^0 = 1$, o gráfico da função sempre passa pelo ponto $(0, 1)$.

Devemos distinguir 2 casos, de acordo com os valores de a.

Se $a > 1$ então a $f(x) = a^x$ é uma função crescente.



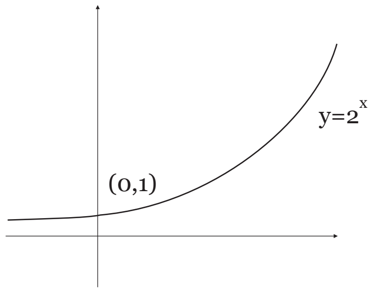
Se $0 < a < 1$ então $f(x) = a^x$ é uma função decrescente.



Exercícios resolvidos

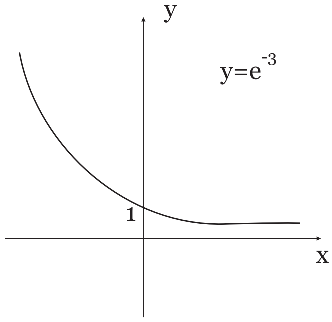
1. Esboce os gráficos das funções $y = 2^x$ e $y = e^{-3x}$.

   Solução:



$$y = e^{-3x} = \left(\frac{1}{e}\right)^{3x} = \left(\frac{1}{e^3}\right)^x$$

Como $e \cong 2.718$ então $0 < \dfrac{1}{e^3} < 1$, portanto o gráfico é do tipo



Equações exponenciais

Uma equação exponencial é uma equação envolvendo potenciação, onde a variável pode aparecer na base e necessariamente aparecendo no expoente. Vamos estudar apenas os casos mais simples destas equações:

1º Caso: $f(x)$ e $g(x)$ são funções, a é número real positivo diferente de 1 e

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

é a equação exponencial. Neste caso o conjunto solução são os valores x para os quais $f(x) = g(x)$.

Então, se $a > 0$,

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)\,.$$

2º Caso: $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são funções, onde $g(x) > 0$, $h(x) > 0$, $g(x) \neq 1$ e $h(x) \neq 1$, para todo x e

$$g(x)^{f(x)} = h(x)^{f(x)}\,.$$

Os valores x que resolvem a equação são aqueles que provocam a igualdade $g(x) = h(x)$. Isto é,

$$g(x)^{f(x)} = h(x)^{f(x)} \Leftrightarrow g(x) = f(x)\,.$$

Muitas equações exponenciais podem ser reduzidas a uma das formas acima após alguma manipulação algébrica. Vamos a alguns exemplos.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a equação $3^{2x-2} \cdot 9^{2x-6} = 81$.

   Solução: Vamos colocar esta equação na forma $3^{f(x)} = 3^{g(x)}$.

   $3^{2x-2} \cdot 9^{2x-6} = 81.$

   $3^{2x-2} \cdot (3^2)^{2x-6} = 3^4$

   $3^{2x-2} \cdot 3^{4x-12} = 3^4$

   $3^{(2x-2)+(4x-12)} = 3^4$

   $3^{6x-14} = 3^4$

   Então, $6x - 14 = 4$

   Logo, $x = 3$.

   Solução: $x = 3$.

2. Resolva a equação $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

   Solução: Vamos fazer a substituição $y = 2^x$ e reduzir a uma equação do 2º grau.

   $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

   $(2^2)^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

   $(2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$.

   Substituindo $y = 2^x$, vem que

   $y^2 - 3 \cdot y - 4 = 0$

   $y = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2}$.

   Logo, $y = -1$ ou $y = 4$.

   Substituindo agora $y = 2^x$, vem que,

   $2^x = -1$ não tem solução;

   $2^x = 4 \;\Rightarrow\; 2^x = 2^2 \;\Rightarrow\; \boxed{x = 2}$

   Solução: $x = 2$

3. Resolva a equação $x^{x^2-4} = 1$.

   Solução: Como x é a base, e o segundo membro é 1, só tem sentido procurar soluções com $x > 0$ e $x^2 - 1 = 0$. Neste caso podemos escrever que $x^0 = 1$. Comparando os expoentes. $x^{x^2-4} = 1 = x^0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ $\Rightarrow x = \pm 2$

   Solução: $x = \pm 2$

4. Resolva $3^{x-1} + 3^{x+1} = 30$.

   Solução: Vamos isolar o termo 3^x.

   $3^{x-1} + 3^{x+1} = 30$

   $3^x \cdot 3^{-1} + 3^x \cdot 3 = 30$

   $\dfrac{1}{3} \cdot 3^x + 3 \cdot 3^x = 30$

   $3^x \cdot \left(\dfrac{1}{3} + 3\right) = 30$

   $3^x \cdot \dfrac{10}{3} = 30$

   $3^x = \dfrac{3}{10} \times 30 = 9$

   $3^x = 3^2 \;\Rightarrow\; x = 2$

   Solução: $x = 2$

Inequações exponenciais

Para resolvermos uma inequação exponencial devemos, em geral, reduzi-la a uma inequação do tipo $h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)}$, onde $f(x)$ e $h(x)$ são funções e, além disso, $h(x) > 0$ e $h(x) \neq 1$, para todo valor x.

A solução então depende da base $h(x)$:

1) se $h(x) > 1$ então
$h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)} \;\Rightarrow\; f(x) > g(x)$

2) se $0 < h(x) < 1$ então
$h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)} \;\Rightarrow\; f(x) < g(x)$

Exercícios resolvidos

1. Resolva a inequação $2^{-x} < 16$.

   Solução:

   $2^{-x} < 16$

   $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 2^4$

   $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}.$

   Como a base está entre 0 e 1, então, em relação aos expoentes, a desigualdade deve ser invertida. Assim,

   $$\left(\frac{1}{2}\right)^x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad\Rightarrow\quad \boxed{x > -4}$$

2. Resolva a inequação $9^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0$.

   Solução: Vamos fazer a substituição $3^x = y$.

   $9^{x+\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0$

   $9^x \cdot 9^{\frac{1}{2}} - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0$

   $(3^2)^x \cdot 3 - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0$

   $3 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 1 \leq 0.$

   Substituindo $y = 3^x$, temos que

   $3y^2 - 4y + 1 \leq 0$

A equação $3y^2 - 4y + 1 = 0$ tem soluções $y = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} \Rightarrow y = 1$ ou $y = \dfrac{1}{3} \cdot$ Logo, $3y^2 - 4y + 1 \leq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{3} \leq y \leq 1$. Portanto, devemos resolver as inequações.

$$\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 1\,.$$

$\dfrac{1}{3} \leq 3^x \;\Rightarrow\; 3^{-1} \leq 3^x \;\Rightarrow\; -1 \leq x$

$3^x \leq 1 \;\Rightarrow\; 3^x \leq 3^0 \;\Rightarrow\; x \leq 0.$

O conjunto solução da inequação é o intervalo fechado $[-1, 0]$.

3. Determine o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{3^x - 1}$$

Solução: Como só tem sentido raízes quadradas de números positivos ou nulos, devemos ter $3^x - 1 \geq 0$. Assim,

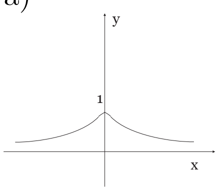
$$3^x \geq 1 \;\Rightarrow\; 3^x \geq 3^0 \;\Rightarrow\; x \geq 0$$

Portanto, $\mathrm{Dom}(f) = [0, \infty)$.

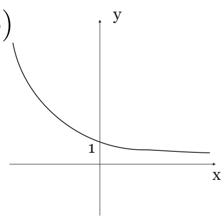
Exercícios - Série A

1. (CESGRANRIO-RJ) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = e^{2x}$ é:

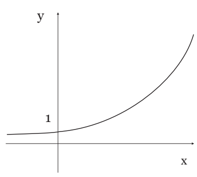
a)



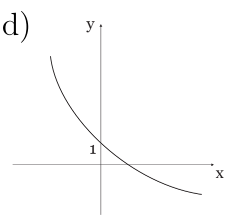
b)



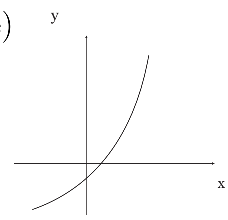
c)



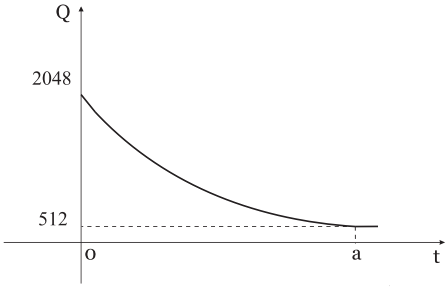
d)



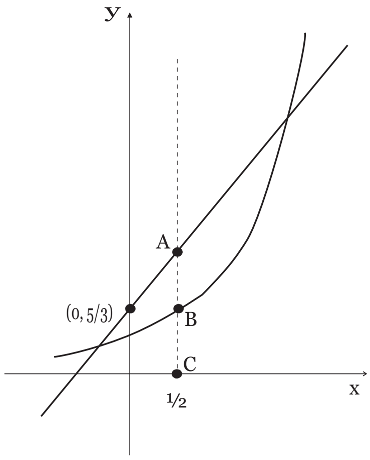
e)



2. (UNESP-93) Uma substância se decompõe aproximadamente segundo a lei $Q(t) = K2^{-0,5t}$, onde K é uma constante, t indica o tempo (em minutos) e $Q(t)$ indica a quantidade de substância (em gramas) no instante t. Considerando-se os dados desse processo de decomposição mostrados no gráfico, determine os valores de k e a.



3. (UNESP-94) A figura mostra os gráficos de uma função exponencial $y = a^x$ e da reta que passa pelo ponto $\left(0, \frac{5}{3}\right)$ e tem inclinação $\frac{10}{7}\cdot$ Pelo ponto $C = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ passou-se a perpendicular ao eixo x, que corta os gráficos, respectivamente, em B e A.



Supondo-se que B esteja entre A e C, conforme mostra a figura, e que a medida do segmento AB é dada por $\dfrac{8}{21}$, determine o valor de a.

4. Esboce os gráficos de $y = 2^x - 1$ e $y = x$. Verifique se $2^x - 1 = x$ possui solução.

5. (FUVEST-99) A equação $2^x = -3x + 2$, com x real,

a) não tem solução.

b) tem uma única solução entre 0 e $\dfrac{2}{3}\cdot$

c) tem uma única solução entre $-\dfrac{2}{3}$ e 0.

d) tem duas soluções, sendo uma negativa e outra positiva.

e) tem mais de duas soluções.

6. (UFF 95) Em uma cidade, a população de pessoas é dada por $P(t) = Po2^t$ e a população de ratos é dada por $R(t) = Ro4^t$, sendo o tempo medido em anos. Se em 1992 havia 112.000 pessoas e 7.000 ratos, em que ano o número de ratos será igual ao de pessoas?

7. (UNI-RIO) O quádruplo da solução da equação $5^{4x+3} = 25$ é:

   a) 1 b) -1 c) -16 d) 5 e) $-\dfrac{1}{4}$

8. (UNI-RIO) O valor de x na equação: $3^{x-1} + 2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = \dfrac{16}{27}$ é:

   a) 2 b) 2/3 c) 1/2 d) $-1/2$ e) -2

9. (PUC) A raiz da equação $2^{2x} - 15 \cdot 2^x - 16 = 0$ é:

   a) 16 b) 12 c) 10 d) 8 e) 4

10. (CESGRANRIO) O número de raízes reais de $3^{2x^2-7x+5} = 1$ é:

    a) 0 b) 1 c)2 d) 3 e) maior que 3

11. Determine o domínio das funções reais:

    a) $f(x) = \sqrt{2^{x^2-1} - 1}$

    b) $f(x) = \dfrac{1}{4^x - 2^x}$

12. (UNI-RIO-96) Assinale o conjunto-solução da inequação $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \dfrac{1}{4}\cdot$

    a) $]-\infty, 5]$
    b) $[4, +\infty[$
    c) $[5, +\infty[$
    d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -5\}$
    e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$

13. (UNI-RIO-99) Seja uma função f definida por $f(x) = 2^{x^2+5x-3}$. Determine os valores de x tais que $f(x)$ seja menor do que 8.

14. (PUC-SP) O valor de x, $x \in \mathbb{R}$, que é solução da equação $4^{x+2} = 8^{-x+3}$, é:

    a) 0 b) $\dfrac{1}{5}$ c) $\dfrac{1}{2}$ d) 1 e) $\dfrac{4}{3}$

Exercícios - Série B

1. Esboce o gráfico de cada função abaixo e determine o conjunto imagem

   a) $y = 3^x - 1$ b) $y = |2^x - 2|$

2. (FESP SP) Se $\sqrt[x]{2} = 16^x$, então os valores de x são:

   a) 0 e $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{8}$ e $-\frac{1}{8}$ e) 0 e 1

3. (UNI-RIO - 2000) O conjunto-solução da inequação $x^{2x} \geq x^{x+3}$, onde $x > 0$ e $x \neq 1$, é:

   a) $]0, 1[\cup[3, +\infty[$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ c) $[3, +\infty[$ d) $\mathbb{R}$ e) $\emptyset$

4. (FESP-SP) A solução da inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^{x(x+1)} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ é:

   a) $x \leq 0$ b) $x \geq 0$ c) $x \leq -1$ ou $x \geq 1$ d) $-1 \leq x \leq 1$ e) $x \geq \frac{1}{3}$

5. (PUC-RS) A solução da equação $2^{x+1} - 2^{3-x} - 6 = 0$ pertence ao intervalo:

   a) $-1 \leq x < 2$ d) $2 < x \leq 4$
   b) $-1 < x \leq 2$ e) $3 \leq x < 4$
   c) $2 < x < 4$

6. (MACKENZIE-SP) O valor de m, $m \in \mathbb{R}$, que satisfaz a equação $(2^{m+2})^3 = 2^{\frac{10}{3}}$ é:

   a) $-\frac{8}{9}$ b) 6 c) $-\frac{4}{3}$ d) $-\frac{8}{9}$ e) -6

7. (FEI-SP) Para que valor real de x temos $8^x - 8^{-x} = 3 \cdot (1 + 8^{-x})$:

   a) 4 b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d)1 e) $\frac{2}{3}$

8. (PUC-MG) Se $3^{x+1} + 3^{x-1} - 3^{x-2} = 87$, então $2x - 1$ é igual a:

   a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

9. (UECE) Se $64^{|x|} - 2 \cdot 8^{|x|} + 1 = 0$, então x^2 é igual a:

   a) 0 b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 1 e) 4

10. (CESGRANRIO) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x + 3^y = 11 \\ 2^x - 3^y = 5 \end{cases}$ a soma $(x + y)$ é igual a:

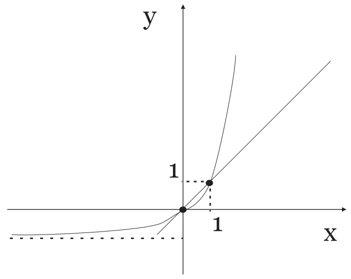
    a) 11 b) 3 d) 6 d) 4 e) 5

Gabarito

Série A

1) c) 2) $K = 2048$ $a = 4$ min 3) $a = 4$

4)



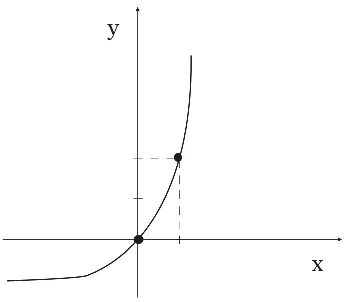
possui duas soluções: $x = 0$ e $x = 1$

5) b) 6) Em 1996 7) b) 8) e) 9) e) 10) c) 11) a) $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ b) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ 12) c) 13) $(-6, 1)$ 14) d)

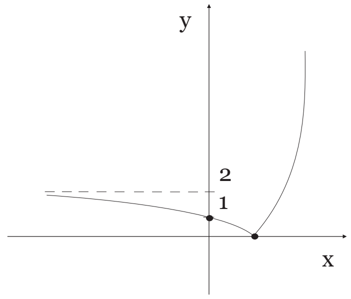
Série B

1)

a)



b)



2) c) 3) a) 4) d) 5) b) 6) a) 7) e) 8) a) 9) a) 10) d)

Auto-avaliação

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 19 – Função logaritmo

Ojetivos:

Ao término desta aula, você:

- Compreenderá o conceito de função logarítmica como inversa da função exponencial.
- Entenderá e será capaz de provar as principais propriedades da função logaritmo.
- Usará as propriedades da função logaritmo para resolver equações e inequações.

Introdução

Nós já estudamos na aula anterior a função exponencial. Lembre como foi a definição. Tomamos um número real a, satisfazendo $a > 0$ e $a \neq 1$ e definimos,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = a^x\,.$$

Para a função exponencial temos os seguintes conjuntos para domínio e contradomínio ou imagem, $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = (0, \infty)$.

Também a função exponencial é injetiva. Isto é, se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Logo podemos pensar na função inversa de $f(x) = a^x$, definida no domínio $(0, \infty) = \mathbb{R}_+$. Note que este domínio para a função inversa é a imagem ou contradomínio da função exponencial.

O objetivo desta aula é estudar o logaritmo como função inversa da exponencial.

Sejam a um número real positivo $(a > 0)$ e y um número real tal que $y > 0$ e $y \neq 1$. Denominamos o logaritmo de y na base a como sendo o número real x tal que $a^x = y$. Usamos a notação

$$x = \log_a y\,,$$

e lemos "x é o logaritmo de y na base a".

Portanto,

$$\log_a y = x \iff a^x = y.$$

Na expressão $\log_a y = x$,

- a é a base do logaritmo,
- y é o logaritmando ou antilogaritmo
- x é o logaritmo.

Em resumo, a expressão $x = \log_a y$ define a função $\log_a$ como uma função da variável y e inversa da função exponencial. Para se convencer disto, veja o diagrama abaixo, onde a primeira função é a função exponencial, a segunda, a função logaritmo e observe que a composição das funções resulta na função identidade (começamos com x e terminamos com x).

$$
\begin{array}{ccccc}
 & \text{exponencial} & & \text{logaritmo} & \\
\mathbb{R} & \longrightarrow & (0,\infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
x & \longmapsto & a^x = y & & \\
 & & y & \longmapsto & \log_a y = x
\end{array}
$$

O diagrama anterior explicita também os domínios e contradomínios das funções.

Nota:

i) Fixada a base a ($a > 0,\ a \neq 1$), o domínio da função $\log_a$ é o intervalo $(0, \infty)$. Então para todo $y > 0$ tem sentido escrever $\log_a y$.

ii) A imagem ou contradomínio de $\log_a$ é todo o conjunto $\mathbb{R}$.

Veja alguns exemplos simples:

a) $\log_2 64 = 6$, pois $2^6 = 64$

b) $\log_1 20 = 0$, pois $20^0 = 1$

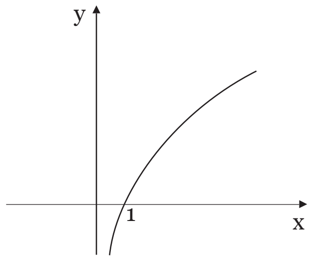
c) $\log_{15} 15 = 1$, pois $15^1 = 15$

d) $\log_5 \dfrac{1}{25} = -2$, pois $5^{-2} = \dfrac{1}{25}$

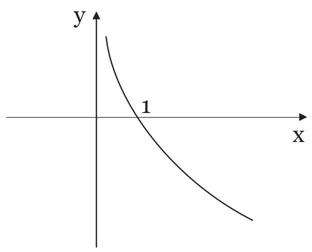
Gráficos da função logaritmo

A função logaritmo é a função inversa da função exponencial. Portanto, a partir dos gráficos das função exponencial, veja o item 2 da aula anterior; concluimos que:

a) Gráfico de $y = \log_a x$, se $a > 1$ (base > 1).



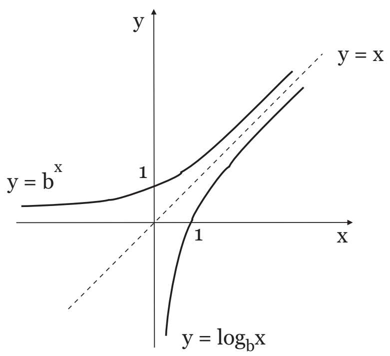
b) Gráfico de $y = \log_a x$, se $0 < a < 1$ (base entre 0 e 1).



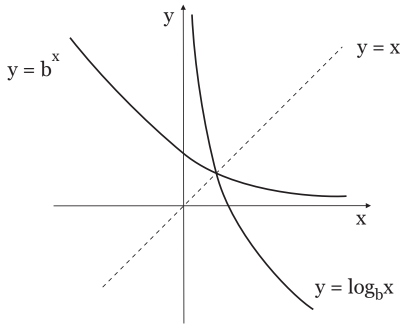
Nota: É importante revisar o método que permite a construção dos gráficos da função logaritmo.

Como a função logarítmica $y = \log_a x$ é a inversa da função exponencial $y = a^x$, podemos obter seu gráfico a partir do gráfico da exponencial. Basta usar o fato de que o gráfico de uma função e sua inversa são simétricos em relação à reta $y = x$, que é a reta bissetriz do 1º e 2º quadrantes. Representando em um mesmo gráfico as funções logaritmo e exponencial, temos:

I. base b > 1



II. $0 <$ base b < 1



Nos dois casos, para a função $f(x) = \log_b x$, vale que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ e $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Propriedades imediatas

a) $\log_b 1 = 0$, pois $b^0 = 1$, qualquer que seja a base b. Portanto, o gráfico da função $y = \log_b x$ sempre passa pelo ponto $(1, 0)$.

b) $\log_b b = 1$, pois $b^1 = b$, para qualquer base b.

c) $\log_b b^m = m$, pois $b^m = b^m$.

Exemplo: $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$.

Exercícios resolvidos

a) Calcule $\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27}$.

Solução:

$$\log_{\frac{1}{9}} \sqrt[5]{27} = x \;\Rightarrow\; \left(\frac{1}{9}\right)^x = \sqrt[5]{27}$$

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)^x = \sqrt[5]{3^4} \;\Rightarrow\; \left(3^{-2}\right)^x = 3^{4/5}$$

$$3^{-2x} = 3^{4/5} \;\Rightarrow\; -2x = \frac{4}{5} \;\Rightarrow\; x = -\frac{2}{5}$$

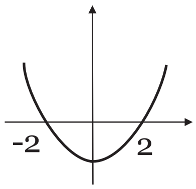
b) Determine o domínio da função $f(x) = \log_x(x^2 - 4)$.

As condições sobre $y = \log_b x$ são $b > 0$, $b \neq 1$ e $x > 0$.

Portanto, o domínio da função acima será $x > 0$, $x \neq 1$ e $x^2 - 4 > 0$.

A equação $x^2 - 4 = 0$ tem solução $x = \pm 2$. Logo $x^2 - 4 > 0 \;\Rightarrow\; x < -2$ ou $x > 2$

Portanto, $\mathrm{Dom}(f) = (2, \infty)$.



Propriedades do logaritmo

Na Seção 3 vimos propriedades que decorrem diretamente da definição. Veremos agora outras propriedades.

a) Logaritmo do produto.

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

b) Logaritmo da potência.

$$\log_b a^w = w \cdot \log_b a$$

c) Logaritmo do quociente.

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$$

d) $\log_{b^z} a = \dfrac{1}{z} \cdot \log_b a$

e) $\log_{b^z} a^w = \dfrac{w}{z} \cdot \log_b a$

Vamos mostrar por que valem as propriedades enunciadas. Precisamos apenas trabalhar cuidadosamente com a definição de logaritmo.

Prova da propriedade a).

Seja $\log_b (x \cdot y) = z$, $\log_b x = z_1$ e $\log_b y = z_2$. Queremos provar que $z = z_1 + z_2$. Podemos escrever,

$$b^x = x \cdot y, \;\; b^{z_1} = x \;\text{ e }\; b^{z_2} = y\,.$$

Logo,

$$b^{z_1} \cdot b^{z_2} = xy \Rightarrow b^{z_1+z_2} = xy\,.$$

Então,

$$b^z = b^{z_1+z_2} \Rightarrow z = z_1 + z_2\,.$$

Esta última igualdade era o que precisávamos provar.

Prova da propriedade b).

Seja $\log_b a^w = x$ e $w \log_b a = y$. Precisamos provar que $x = y$. Temos,

$$b^x = a^w \;\text{ e }\; \log_b a = \frac{y}{w}\,.$$

Logo,

$$b^x = a^w \text{ e } b^{\frac{y}{w}} = a\,.$$

Elevando à potência w a última igualdade vem que

$$b^x = a^w \text{ e } b^y = a^w \Rightarrow x = y\,.$$

Esta última igualdade era o que precisávamos provar.

Prova da propriedade c).

Usando as propriedades a) e b) anteriores escrevemos

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b \left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \log_b x + \log_b \frac{1}{y}\,.$$

Mas,

$$\log_b \left(\frac{1}{y}\right) = \log_b y^{-1} = -1 \cdot \log_b y\,.$$

Juntando os dois resultados está completa a prova da propriedade c).

Prova da propriedade d).

Seja $\log_{b^z} a = x$ e $\dfrac{1}{z} \log_b a = y$. Precisamos provar que $x = y$. Temos

$$b^{zx} = a \text{ e } \log_b a^{\frac{1}{z}} = y\,.$$

Ou seja

$$b^x = a^{\frac{1}{z}} \text{ e } b^y = a^{\frac{1}{z}} \Rightarrow x = y\,.$$

Esta última igualdade prova a propriedade d).

Prova da propriedade e).

Usando a propriedade b) e em seguida a propriedade d), escrevemos

$$\log_{b^z} a^w = w \log_{b^z} a = \frac{w}{z} \log_b a\,.$$

Mudança de base

Todos as propriedades que vimos até agora envolvem logaritmos de mesma base. Em algumas aplicações é interessante transformar um logaritmo de uma base para outra. Conseguimos isto com a propriedade:

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}\,,$$

onde $a, b, c > 0, \quad b \neq 1$ e $c \neq 1$.

Vamos provar este resultado.

Se $\log_b a = x$, $\log_c a = y$ e $\log_c b = z$, precisamos provar que $x = \dfrac{y}{z}$.

De fato,

$$b^x = a,\ c^y = a \text{ e } c^z = b \Rightarrow b^x = c^y \text{ e } c^z = b\,.$$

Logo,

$$b^x = c^y \text{ e } c^{zx} = b^x \Rightarrow zx = y\,.$$

Esta última igualdade prova o que queríamos.

Exemplo: Se $log_2 x = 3$ e $\log_2 y = 5$, $log_y\, x = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 y} = \dfrac{3}{5}\,.$

Observações:

• Os logaritmos de base 10 são chamados decimais. O logaritmo decimal de um número x (com $x > 0$) é indicado por $\log x$ (pode-se omitir o 10 na base).

• Os logaritmos de base e, são chamados logaritimos naturais ou neperianos. O logaritmo neperiano de x é indicado por $\ell n\, x$ ou $\lg x$.

Observação:

O número e é junto com o número π os dois mais importantes números da Matemática. O número e, como o número π, é um número irracional. 2,71 é o valor que aproxima e com três casas decimais exatas.

Equações logarítmicas

São equações envolvendo logaritmos. A maioria das equações logarítmicas, em nosso nível de estudo, são de três tipos básicos, ou podem ser reduzidas a estes tipos, fazendo algumas manipulações algébricas. Vamos aos três tipos básicos.

1º tipo Logaritmos de mesma base

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \ \Rightarrow\ f(x) = g(x).$$

Devemos sempre observar as restrições

na base: $a > 0$ e $a \neq 1$.

nos logaritmandos: $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$

Exemplo: $\log_2(3x-4) = \log_2(x+4)$.

Solução: $3x - 4 = x + 4 \ \Rightarrow\ x = 4$.

Restrições: $3x - 4 > 0 \ \Rightarrow\ x > \dfrac{4}{3}$ e $x + 4 > 0 \ \Rightarrow\ x > -4$

Como $x = 4$ atende às restrições, então o conjunto solução $S = \{4\}$.

2º tipo Aplicação da definição de logaritmo.

$$\log_b (f(x) = a \;\Rightarrow\; f(x) = b^a,$$

Observando sempre as restrições:

na base: $b > 0$ e $b \neq 1$

no logaritmando: $f(x) > 0$

Nestas equações, podemos ter variáveis no logaritmando e na base ao mesmo tempo.

Exemplo: $\log_x(x^2 - 3x + 2) = 2$

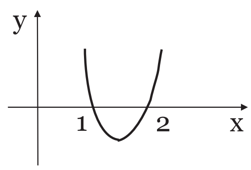
Solução: Temos que $x^2 - 3x + 2 = x^2 \;\Rightarrow\; -3x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{2}{3}$

Restrições:

- $x > 0$ e $x \neq 1$ (base)
- $x^2 - 3x + 2 > 0$

A equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ tem raízes $x = 2$ e $x = 1$, logo

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \;\Rightarrow\; x < 1 \text{ ou } x > 2$$



O valor $x = \dfrac{2}{3}$ atende a estas condições, logo o conjunto solução é $S = \{\dfrac{2}{3}\}$

3º tipo Substituição de variável.

Acontece quando uma substituição do tipo $y = \log_b x$ reduz o problema a uma equação que sabemos resolver, como uma equação do 2º grau.

Exemplo: $(\log_2 x)^2 - 2\log_2 x - 8 = 0$

Solução: Substituindo $y = \log_2 x$, temos $y^2 - 2y - 8 = 0 \;\Rightarrow\; y = 4$ ou $y = -2$.

$\log_2 x = x \;\Rightarrow\; x = 2^4 = 16$

$\log_2 x = -2 \;\Rightarrow\; x = 2^{-2} = \dfrac{1}{4}$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{1/4, 16\}$.

Inequações logarítmicas

São inequações onde aparecem a função logarítmica envolvendo a variável. Vamos examinar algumas técnicas para resolver estas inequações.

Em primeiro lugar, a função $y = \log_b x$, sendo inversa da exponencial, é crescente $b > 1$ e decrescente quando $0 < b < 1$. Assim,

- se $b > 1$,

$\log_b f(x) > \log_b g(x) \;\Rightarrow\; f(x) > g(x)$

- se $0 < b < 1$

$\log_b f(x) > \log_b g(x) \;\Rightarrow\; f(x) < g(x)$

Isto respeitadas as restrições para existência dos logaritmos. Quais sejam,

- $b > 0$ e $b \neq 1$ (base)
- $f(x) > 0$ e $g(x) > 0$ (logaritmando)

Observação:

• Para reduzir uma inequação à forma $\log_b f(x) > \log_b g(x)$, temos que usar propriedades do produto ou do quociente (para reunir dois logaritmos), ou fazer substituição de variáveis $y = \log_b x$.

• Note que

$\log_b f(x) > a \;\Rightarrow\; \log_b f(x) > \log_b b^a$

pois $a = \log_b b^a$.

Exercícios resolvidos

1. Resolva a inequação $\log_3(2x-1) < \log_3 5$.

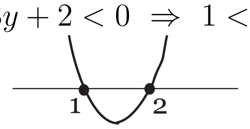
   Solução: $\log_3(2x-1) < \log_3 5 \;\Rightarrow\; 2x-1 < 5 \;\Rightarrow\; 2x < b \;\Rightarrow\; x < 3$

   Restrição: $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \dfrac{1}{2}$. Portanto, o conjunto solução S é $S = \left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$

2. Resolva a inequação $(\log_2 x)^2 = 3\log_2 x + 2 < 0$.

   Solução: Fazemos a substituição $y = \log_2 x$, encontramos

   $$y^2 - 3y + 2 < 0 \;\Rightarrow\; 1 < y < 2$$

   (pois $y = 1$ e $y = 2$ são as raízes de $y^2 - 3y + 2 = 0$).

   Portanto, $1 < \log_2 x < 2$.

   $\log_2 x > 1 \;\Rightarrow\; \log_2 x > \log_2 2 \;\Rightarrow\; x > 2$

   $\log_2 x < 2 \;\Rightarrow\; \log_2 x < \log_2 4 \;\Rightarrow\; x < 4$

   A restrição no logaritmando é $x > 0$, logo o conjunto solução é $S = (2, 4)$.

3. Resolva a inequação $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$.

Solução: Usamos a propriedade do produto para juntar os dois logaritmos

$$\log_2(x-1) + \log_2(x+1) < 3$$

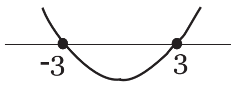
$$\log_2(x-1)(x+1) < \log_2 2^3 = \log_2 8$$

$$(x-1)(x+1) < 8$$

$$x^2 - 1 < 8$$

$$x^2 - 9 < 0$$

As soluções de $x^2 - 9 = 0$ são $x = \pm 3$ logo $x^2 - 9 < 0 \Rightarrow -3 < x < 3$.



As restrições são $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$ e $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

O conjunto solução é

$$S = (-3, 3) \cap (1, \infty) \cap (-1, \infty) = (1, 3).$$

Cararcterística e mantissa

Usando uma calculadora, vemos que $\log 6 \approx 0,77815$ (lembre que $\log 6 = \log_{10} 6$). Sabendo disso, podemos calcular facilmente $\log 60$, $\log 600$ etc.

$\log 60 = \log 6 \cdot 10 = \log 6 + \log 10 = 1 + 0,77815 = 1,77815$

$\log 600 = \log 6 \cdot 100 = \log 6 + \log 10^2 = 2,77815$

Os números $\log 6$, $\log 60$, $\log 600$ etc, têm a mesma parte decimal, que chamamos *mantissa* e diferem na parte inteira, que chamamos *característica*. Assim,

$$\log 600 \text{ tem } \begin{cases} \text{característica: } 2 \\ \text{mantissa: } 0,77815 \end{cases}$$

Nota: Observe que, se x tem 3 dígitos, então $100 \leq x < 1000 \Rightarrow 10^2 \leq x < 10^3 \Rightarrow \log 10^2 \leq \log x < \log 10^3 \Rightarrow 2 \leq \log x < 3$.

Portanto, se x tem 3 dígitos, então $2 \leq \log x < 3$. Em geral, se x é um inteiro positivo de n dígitos, então $n - 1 \leq \log x < n$

Exercícios resolvidos

1. Usando $\log a = 0,3010$ calcule

   a) $\log 200$

   b) $\log 0,0128$

   Solução:

   a) $\log 200 = \log 2 \cdot 10^2 = \log 2 + 2 = 2,3010$

   b) $\log 0,0128 = \log 128 \times 10^{-4} = \log 128 + \log 10^{-4} = \log 2^7 - 4 = -4 + 7 \cdot \log 2 = -4 + 7 \times (0,3010) = -1,893$

2. Determine o número de dígitos do inteiro 2^{50}.

   Solução: Calculamos seu logaritmo decimal,

   $\log 2^{50} = 50 \times \log 2 = 50 \times 0,3010 = 15,05$ Como $15 \leq \log_{2^{50}} < 16$, então 2^{50} é um inteiro de 16 dígitos.

Exercícios - Série A

1. Calcule:

   a) $\log_3 \dfrac{1}{27}$ b) $\log_{25} 125$ c) $\log_{\frac{1}{4}} \sqrt[3]{64}$

   d) $\log_{13} 13 \cdot \log_{15} 1$ e) $\log_{0,01} 10$

2. Sendo $f(x) = 3^{2x}$ e $g(x) = \log_4 x$, calcule $f(g(2))$.

3. (UERJ-92) O valor de $4^{\log_2 9}$ é:

   a) 81 b) 64 c) 48 d) 36 e) 9

4. Determine o domínio da função $f(x) = \log_x x^2 - 3x + 2$.

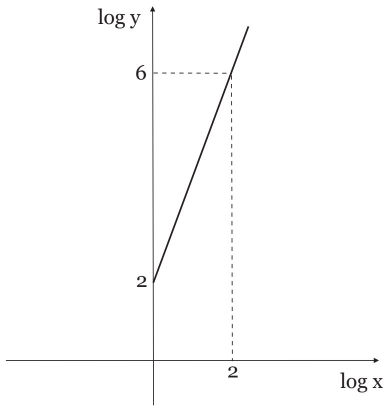
5. Sendo $\log_x a = 4$, $\log_x b = 2$ e $\log_x c = 1$, calcule $\log_x \left(\dfrac{a^3}{b^2c^2}\right)$.

6. Resolva a equação $\log_3(2x-1) - \log_3(5x+3) = -1$

7. (UNI-RIO 92) Se $N(t) = N_0 e^{kt}$, $t \geq 0$ e $N(2) = 3N_0$, então o valor de k é:

   a) $\log_e \left(\dfrac{3}{2}\right)$ b) $\dfrac{1}{2} \log_e 3$ c) $\dfrac{1}{3} \log_e 3$ d) $\dfrac{1}{4} \log_e 4$ e) $\log_2 e$

8. (UFRJ-98) Sejam x e y duas quantidades. O gráfico abaixo expressa a variação de $\log y$ em função de $\log x$, onde log é o logaritmo na base decimal.



Determine uma relação entre x e y que não envolva a função logaritmo.

9. Usando $\log 3 = 0,4771$, calcule:

a) $\log 3000$ b) $\log 0,003$ c) $\log 0,81$

10. Calcule $\log_{0,04} 125$, usando que $\log 2 = 0,3010$.

11. Um número x tem logaritmo igual a 4 na base a e tem logaritmo igual a 8 na base $\frac{a}{3}\cdot$ Calcule x e a.

12. Resolva o sistema $\begin{cases} x + y = 7 \\ \log_a x + \log_a y = \log_a 12 \end{cases}$

13. Simplifique a expressão $(\log_x 9) \cdot (\log_{81} 16) \cdot (\log_4 3)$

14. Resolva o sistema $\begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2^{4+y}} \\ \log_a(2x + y) = 0 \end{cases}$

15. (UNI-RIO 93) Se $x = \log_3 2$, então $3^x + 3^{-x}$ é igual a

a) $\frac{8}{7}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 4 d) 6 e) 9

16. Se $\log_{10} 30 = \log_{10} 2 + 2\log_{10} \sqrt{3} - \log_{10} e^x$, a alternativa que representa o valor de x é:

a) $-\log_e 2$ b) $-\log_e 5$ c) $-\log_e 15$ d) $-\log_e 20$ e) $-\log_e 30$

17. (UNI-RIO 94) Um explorador descobriu, na selva amazônica, uma espécie nova de planta e, pesquisando-a durante anos, comprovou que o seu crescimento médio variava de acordo com a fórmula $A = 40 \cdot (1,1)^t$, onde a altura média A é medida em centímetros e o tempo t em anos. Sabendo-se que $\log 2 = 0,30$ e $\log 11 = 1,04$, determine:

    a) a altura média, em centímetros, de uma planta dessa espécie aos 3 anos de vida;

    b) a idade, em anos, na qual a planta tem uma altura média de 1,6 m.

18. (PUC 90) Se $a = \log_8 225$ e $b = \log_8 15$, então:

    a) $2a = b$ b) $3a = 2b$ c) $a = b$ d) $2b = a$ e) $3b = 2a$

Exercícios - Série B

1. (UNI-RIO 99) Seja a função definida por $f(x) = \log_2 \dfrac{x+1}{2x}$ · O valor de x para o qual $f(x) = 1$ é tal que:

    a) $0 < x < \dfrac{1}{100}$ b) $\dfrac{1}{100} < x < \dfrac{1}{10}$ c) $\dfrac{1}{10} < x < \dfrac{1}{5}$

    d) $\dfrac{1}{5} < x < \dfrac{3}{10}$ e) $x > \dfrac{3}{10}$

2. (UNICAMP 93) Calcule o valor da expressão $\log_n(\log_n \sqrt[n]{\sqrt[n]{n}})$, onde n é um número inteiro, $n \geq 2$. Ao fazer o cálculo, você verá que esse valor é um número que não depende de n.

3. (FUVEST SP) Sendo $a^2 + b^2 = 70ab$, calcule $\log_5 \dfrac{(a+b)^2}{ab}$, em função de $m = \log_5 2$ e $n = \log_5 3$.

4. (UFF 95) Sejam x, y e p números reais positivos e $p \neq 1$. Se $\log_p(x+y) = m$ e $\log_p x + \log_p y = n$, então $\log_p \left(\dfrac{x+y}{xy}\right)$ é igual a:

    a) m^n b) $\dfrac{m}{n}$ c) $m \cdot n$ d) $m + n$ e) $m - n$

5. Resolva as equações:

    a) $\log_x(4x - 4) = 2$

    b) $\log_{x+2}(x^2 + 4) = \log_{x+2}(3x^2 + 1)$

6. (PUC 99) Sabendo-se que $\log_{10} 3 \cong 0,47712$, podemos afirmar que o número de algarismos de 9^{25} é:

   a) 21 b) 22 c) 23 d) 24 e) 25

7. Se $\log a + \log b = P$, então o valor de $\log \frac{1}{a} + \log \frac{1}{b}$ é:

   a) $\frac{1}{P}$ b) $-P$ c) P d) $P-1$ e) $P+1$

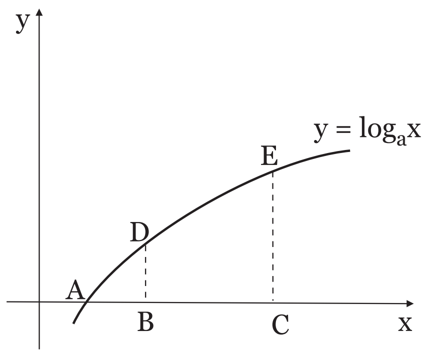
8. Calcule o valor de $\log_{10} 3 + \log_{10} 0,001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10}$, sabendo que $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$.

9. (CESGRANRIO 90) Sendo a e b as raízes da equação $x^2+100x-10 = 0$, calcule o valor de $\log_{10}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$.

10. Sabe-se que $\log_{10} 3 = 0,477$ e que $\log_{10} 103 = 2,013$. O tempo no qual triplicará uma população que cresce 3% ao ano é de aproximadamente:

    a) 37 anos b) 47 anos c) 57 anos d) 67 anos e) 77 anos

11. (UNESP 92) A curva da figura representa o gráfico da função $y = \log_a x$ $(a > 1)$. Dos pontos $B = (2,0)$ e $C = (4,0)$ saem perpendiculares ao eixo das abcissas, as quais interceptam a curva em D e E, respectivamente. Se a área do trapézio retangular $BCED$ vale 3, provar que a área do triângulo ABD, onde $A = (1,0)$, vale $\frac{1}{2}\cdot$



12. (UFRN 83) Considere $\log 2 = 0,3010$ e $\log 3 = 0,4771$. Então, qual a quantidade de algarismos do número $3^{15} \times 2^{12} \times 6^{23}$?

13. (PUC 93) Sabendo-se que $\log_{10} 3 \cong 0,47712$ e que $N = 3^{100}$, podemos afirmar que o número de algarismos do inteiro N é:

    a) 47 b) 48 c) 49 d) 50 e) 51

14. (FUVEST 92) Seja $x = 2^{1000}$. Sabendo que $\log_{10} 2$ é aproximadamente igual a 0,30103, pode-se afirmar que o número de algarismos de x é:

    a) 300 b) 301 c) 302 d) 1000 e) 2000

15. (PUC 93) Sabendo-se que $\log_{10} 3 \cong 0,47712$ e que $N = 3^{100}$, podemos afirmar que o número de algarismos do inteiro N é:

    a) 47 b) 48 c) 49 d) 50 e) 51

Gabarito

Série A

1) a) -3 b) $\frac{3}{2}$ c) -1 d) 0 e) $-\frac{1}{2}$ 2) 3 3) a 4) $(0,1) \cup (2,\infty)$
5) 6 6) 6 7) b 8) $y = 100x^2$ 9) a) 3,4771 b) $-2,5229$ c) $-0,0916$
10) b 11) $a = 9$, $x = 9^4$ 12) $x = 4$ e $y = 3$ ou $x = 3$ e $y = 4$ 13) $\log_x 3$
14) $x = 5$, $y = -9$ 15) a 16) b 17) a) 53, 24 cm b) 15 anos 18) d

Série B

1) e 2) -2 3) $3m + 2n$ 4) e 5) a) 2, b) $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ 6) d
7) $\dfrac{2,094}{1,398} = \dfrac{0,349}{0,233}$ 8) $-1,9771$ 9) 1 10) a 11) Demonstração
12) 29 13) b 14) c 15) b

Auto-avaliação

Antes de passar à aula seguinte, você deve resolver todos os exercícios da Série A. A Série B fica como exercício de aprofundamento.

Aula 20 – Trigonometria

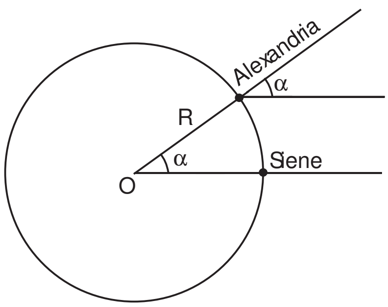
Introdução

O termo trigonometria significa, em uma tradução literal, medidas de um triângulo. Mais especificamente, a trigonometria estuda relações envolvendo ângulos e razões dos lados de triângulos semelhantes.

Historicamente as primeiras relações trigonométricas já eram conhecidas pelos egípcios e babilônicos em 1600 A.C., aproximadamente. Na antiguidade, muitos avanços na trigonometria se devem principalmente as aplicações em astronomia (ver [1], [2], [3] e [4]):

- Aristarco (310-230 A.C.), desenvolveu um consistente método para estimar o raio da lua e do sol bem como de suas distâncias relativas a terra.

- Eratóstenes (276-194 A.C.), por sua vez, calculou uma das mais famosas estimativas para o perímetro da circunferência da terra e seu raio. Para isso, comparou posições relativas de sombras exatamente ao meio dia do solstício de verão em duas cidades: Siene e Alexandria. Assim, obteve que o ângulo α da figura abaixo era cerca de $1/50$ do circulo.

  Sabendo que a distância entre as duas cidades era cerca de 925 Km, estimou que o perímetro da terra seria de cerca de 925 x 50 = 46.250 km, sendo que o valor correto é de 40.075 km.

- O astrônomo grego Hiparco (180-125 A.C.) é considerado o pai da trigonometria devido as suas importantes contribuições. A ele é atribuído a construção da primeira tabela trigonométrica e também uma das primeiras referências a utilizar a medida do ângulo em graus (sistema sexagesimal).

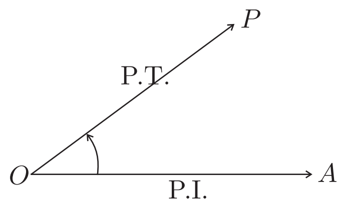
- Cláudio Ptolomeu foi o autor do mais celebre tratado de astronomia (e trigonometria) da antiguidade: O almagesto. Não há registros precisos da época em que viveu Ptolomeu, mas seus trabalhos provavelmente foram realizados no século II. O almagesto apresenta o sistema geocêntrico, ou seja terra como centro do universo. Essa teoria persistiu até a idade média, sendo posteriormente substituída pela teoria heliocêntrica de Nicolau Copérnico (1473-1543).

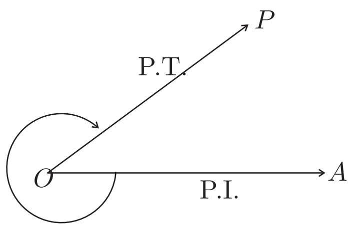
Agora que já discutimos um pouco da história da trigonometria, vamos apresentar os primeiros conceitos trigonométricos. Para isso iniciaremos discutindo o conceito básico de ângulo e o sistema sexagesimal (unidade de grau). Em seguida, apresentaremos as principais relações trigonométricas em um triângulo retângulo: seno, cosseno, tangente, etc, bem como as principais relações fundamentais entre esses elementos.

Ângulos - Medidas

Ângulo

Vamos considerar um ângulo $A\widehat{O}P$ como originário da rotação da semireta $\overrightarrow{OA}$ da posição inicial (P.I.) à posição terminal $\overrightarrow{OP}$ (P.T.)





O ângulo $A\widehat{O}P$ é positivo se o sentido da rotação indicado é anti-horário e negativo se o sentido da rotação é horário.

Medida de ângulo e arcos

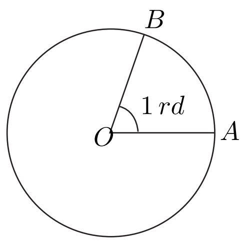
Sistema sexagesimal (unidade graus)

Definição: Ângulo de 1 grau denotado por 1° é o ângulo $\dfrac{1}{90}$ do ângulo reto.

O grau admite dois submúltiplos:
minuto denotado por $'$ e definido por $1' = \dfrac{1}{60}$ do grau;
segundo denotado por $''$ e definido por $1'' = \dfrac{1}{60}$ do minuto $= \dfrac{1}{3600}$ do segundo.

Sistema circular (unidade radiano)

Definição: Um radiano é o ângulo central que subtende na circunferência um arco cujo comprimento é igual ao raio. Notação: $1\,rd$

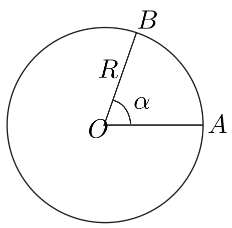


$\overset{\frown}{AB} \rightarrow$ arco AB

$\overline{\overset{\frown}{AB}} \;\rightarrow$ comprimento do arco AB

$$A\widehat{O}B = 1\,rd \quad \text{se} \quad \overline{\overset{\frown}{AB}} = R$$

Se α é um ângulo em radianos que intercepta na circunferência um arco de comprimento l, temos:



$\overset{\frown}{AB} = l$

Ângulo central		Comprimento do arco
$1\,rd$	–	R
$\alpha\,rd$	–	l

Logo, $\boxed{l = \alpha R}$.

Conversão

O ângulo de uma volta em torno de uma circunferência em graus é 360°. Vamos encontrar este ângulo em radianos.

Sabemos que o comprimento de uma circunferência é $2\pi R$.
Daí, $\alpha = \dfrac{2\pi R}{R} \Rightarrow \alpha = 2\pi$.
Portanto a relação entre os sistemas é:

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi.$$

Exercícios resolvidos

1. Exprimir 120° em radianos.

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & - & 2\pi \\ 120^\circ & - & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{120^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = \frac{2\pi}{3}$$

   Resposta: $\dfrac{2\pi}{3} rd$.

2. Exprimir $60^\circ 15'$ em radianos. (Considere $\pi = 3,14$)

$$60^\circ 15' = 60^\circ + \left(\frac{15}{60}\right)^\circ = 60,25^\circ$$

$$\begin{array}{ccc} 360^\circ & - & 2\pi \\ 60,25^\circ & - & x \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{60,25^\circ \cdot 2\pi}{360^\circ} = 1,05$$

   Resposta: $1,05 rd$.

3. Exprimir $1\,rd$ em graus. (Considere $\pi = 3,14$)

   Solução

$$\left.\begin{array}{ccc} 360^\circ & - & 2\pi \\ x & - & 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180}{3,14}$$

$$\begin{array}{l|l} 1800'0 & \underline{\;3\,14\;} \\ 2300 & 57^\circ\,19'\,29'' \\ \;\;102^\circ & \\ \underline{\;\;\;60\;} & \\ 6120' & \\ 2980' & \\ \;\;154' & \\ \underline{\;\;\;60\;} & \\ 9240'' & \\ 2960 & \\ \;\;134'' & \end{array}$$

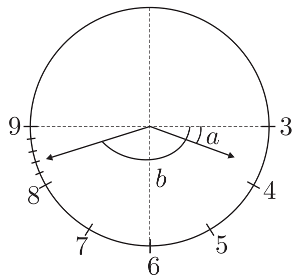
   Temos que $1\,rd$ é, aproximadamente, $57^\circ\,19'\,29''$.

4. Calcular, em graus, o ângulo convexo formado pelos ponteiros de um relógio que marca 3h 42min.

   Solução: Note que em 1h ($60'$) o ponteiro pequeno percorre um ângulo de: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$.

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Ponteiro pequeno} & \text{tempo} \\ 30^\circ & 60' \\ a & 42' \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{30 \cdot 42}{60} = 21^\circ$$

   Este ângulo é o que determina o ponteiro das horas.



$$b = 30 \cdot 5 + 6 \cdot 2 = 150 + 12 = 162^\circ$$

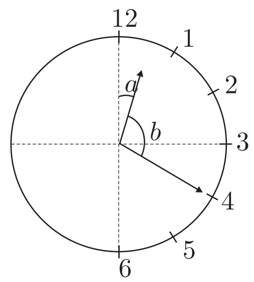
   Daí o ângulo convexo pedido é:

$$x = b - a = 162^\circ - 21^\circ = 141^\circ$$

5. Calcular o menor ângulo entre os ponteiros de um relógio que marca 12h e 20min.

   Solução:

$$\left.\begin{array}{cc} \text{Ponteiro pequeno} & \text{tempo} \\ 30^\circ & 60' \\ a & 20' \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{20 \cdot 30}{60} = 10^\circ$$



   Temos que $a + b = 4 \cdot 30 = 120 \Rightarrow b = 120 - 10 = 110^\circ$.

   Resposta: 110°.

Exercícios propostos

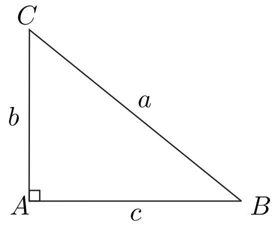
1. Exprimir $30° \, 15'$ para radianos. (Considere $\pi = 3,14$)
2. Transformar $12°$ em radianos.
3. Achar três ângulos, em graus, sabendo que a soma do primeiro com o segundo é $12°$, a do segundo com o terceiro é $9°$ e a soma do primeiro com o terceiro é $\dfrac{\pi}{36}\, rd$.
4. Quantos graus mede, aproximadamente, um arco de $0,105\, rd$?
5. Converter $\dfrac{2}{\pi}$ em graus. (Considere $\pi = 3,14$)
6. Mostre que o ângulo que o ponteiro das horas descreve, em graus, é a metade do número que marca os minutos.
7. Encontre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 2h 15min.
8. Encontre o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio às 9h 10min.
9. O ponteiro dos minutos mede 10 cm. Determine o comprimento do arco. Determine o comprimento do arco quando a sua extremidade descreve 12 minutos.
10. A que horas, da noite, os ponteiros de um relógio coincidem entre os números 8 e 9 do mostrador?

Gabarito

1. $0,53\, rd$ 2. $0,209\, rd$
3. $4°$; $8°$; $1°$.
4. $6°$
5. $36° \, 31'$
7. $22° \, 30'$
8. $145°$
9. 12,56 cm
10. 20h 43min 37,2 segundos.

Funções trigonométricas de um ângulo agudo

Seja um triângulo retângulo ABC de lados a, b e c



Considere as seguintes notações:

seno $\rightarrow$ sen
cosseno $\rightarrow$ cos
tangente $\rightarrow$ tg
secante $\rightarrow$ sec
cossecante $\rightarrow$ csc
cotangente $\rightarrow$ cotg

$$\operatorname{sen} \widehat{B} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \operatorname{cotg} \widehat{B} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

$$\cos \widehat{B} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sec \widehat{B} = \frac{a}{c} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{B} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \qquad \csc \widehat{B} = \frac{a}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$$

A partir das definições anteriores, é imediato que:

$$\operatorname{sen} \widehat{C} = \frac{c}{a} = \cos \widehat{B} \qquad \operatorname{cotg} \widehat{C} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \widehat{B}$$

$$\cos \widehat{C} = \frac{b}{a} = \operatorname{sen} \widehat{B} \qquad \sec \widehat{C} = \frac{a}{b} = \csc \widehat{B}$$

$$\operatorname{tg} \widehat{C} = \frac{c}{b} = \operatorname{cotg} \widehat{B} \qquad \csc \widehat{C} = \frac{a}{c} = \sec \widehat{B}$$

Sendo $\widehat{B} + \widehat{C} = 90^\circ$ (ângulos complementares) e as funções associadas em cada relação chamadas de co-funções. Então <u>co-funções de ângulos complementares são iguais</u>

Relações fundamentais

Seja x um ângulo agudo. De acordo com as definições das funções, podemos verificar que:

I) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

II) $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

III) $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

IV) $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

V) $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

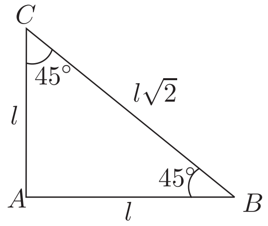
Auxiliares:

$$\begin{cases} \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \\ \csc^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x \end{cases}$$

Valores notáveis

$\operatorname{sen} 45°$, $\cos 45°$, $\operatorname{tg} 45°$

Considere um triângulo retângulo isósceles de catetos l



então $l\sqrt{2}$ será a medida da hipotenusa pois $\left(\overline{BC}\right)^2 = l^2 + l^2 \Rightarrow \overline{BC} = l\sqrt{2}$.

Assim,

a) $\operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{sen} 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

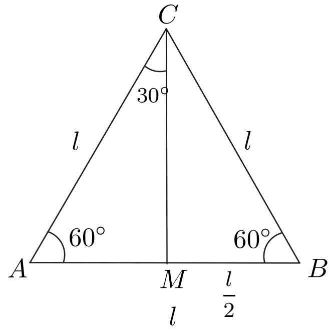
b) $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{l}{l\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\operatorname{tg} \widehat{B} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{l}{l} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} 45° = 1$.

$\operatorname{sen} 60°$, $\cos 60°$, $\operatorname{tg} 60°$

Considere um triângulo equilátero de lado l, então $\dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ será a medida da altura pois

$$(AC)^2 = (AM)^2 + (MC)^2$$
$$\Rightarrow (MC)^2 = l^2 - \frac{l^2}{4} = \frac{3l^2}{4}$$
$$\Rightarrow MC = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$



Assim:

a) $\operatorname{sen} \widehat{A} = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \operatorname{sen} 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\cos \widehat{A} = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

c) $\operatorname{tg} \widehat{A} = \dfrac{MC}{AM} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$.

$\text{sen}\, 30°,\ \cos 30°,\ \text{tg}\, 30°$

No triângulo AMC do item anterior vem:

a) $\text{sen}\, 30° = \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{\frac{l}{2}}{l} \Rightarrow \text{sen}\, 30° = \dfrac{1}{2}.$

b) $\cos 30° = \dfrac{MC}{AC} = \dfrac{\frac{l\sqrt{3}}{2}}{l} \Rightarrow \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

c) $\text{tg}\, 30° = \dfrac{AM}{MC} = \dfrac{\frac{l}{2}}{\frac{l\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}\, 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

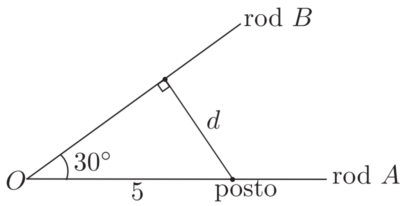
Logo temos o seguinte quadro de valores:

x	$\text{sen}\, x$	$\cos x$	$\text{tg}\, x$
$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Exercícios resolvidos

1. Duas rodovias A e B encontram-se em O, formando um ângulo de $30°$. Na rodovia A existe um posto de gasolina que dista 5 km de O. Determine a distância do posto de gasolina à rodovia B.

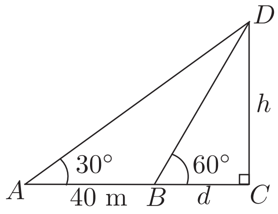
   Solução:



$$\text{sen}\, 30° = \frac{d}{5} \Rightarrow d = 5 \cdot \frac{1}{2} = 2,5 \text{ km}$$

Resposta: $2,5$ km

2. Nas figuras, calcular h e d.



Solução:

$\triangle BCD \qquad \text{tg}\,60^\circ = \dfrac{h}{d} \;\Rightarrow\; h = d\sqrt{3}$

$\triangle ACD \qquad \text{tg}\,30^\circ = \dfrac{h}{40+d} \;\Rightarrow\; h = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(40+d) \;\Rightarrow$

$$d\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(40+d) \;\Rightarrow d = 20 \text{ m e } h = 20\sqrt{3} \text{ m}.$$

Resposta: $d = 20$ m e $h = 20\sqrt{3}$ m

3. Sabendo que $\text{tg}\,x = \dfrac{5}{12}$ (x agudo), calcular $\text{sen}\,x$.

Solução:

Sabemos que $1 + \text{tg}^2 x = \sec^2 x$

$1 + \dfrac{25}{144} = \sec^2 x \;\Rightarrow\; \sec^2 x = \dfrac{169}{144} \;\Rightarrow\; \sec x = \dfrac{13}{12}$

$$\Rightarrow\; \cos x = \frac{12}{13}$$

Usando a F.F. $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ temos

$$\text{sen}^2 x + \frac{144}{169} = 1 \;\Rightarrow\; \text{sen}^2 x = \frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen}\,x = \frac{5}{13}}$$

4. Simplificar a expressão $y = \dfrac{\cos^3 a - \text{sen}^3 a}{1 + \text{sen}\,a\,\cos a}$

Solução:

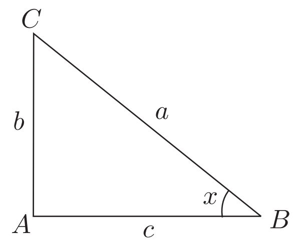
$$y = \frac{(\cos a - \text{sen}\,a)(\cos^2 a + \cos a\,\text{sen}\,a + \text{sen}^2 a)}{1 + \text{sen}\,a\,\cos a} \;\Rightarrow$$

$$y = \frac{(\cos a - \text{sen}\,a)(1 + \cos a\,\text{sen}\,a)}{1 + \text{sen}\,a\,\cos a} = \cos a - \text{sen}\,a$$

$$\boxed{y = \cos a - \text{sen}\,a}$$

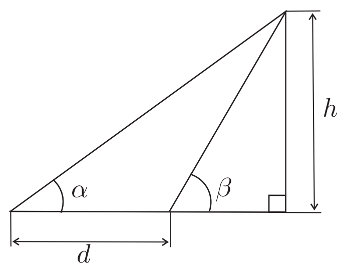
Exercícios propostos

1. Considere o triângulo retângulo ABC com as dimensões $a = 7,5$ m, $b = 4,5$ m e $c = 6$ m. Calcular o valor de $\operatorname{tg} x$.

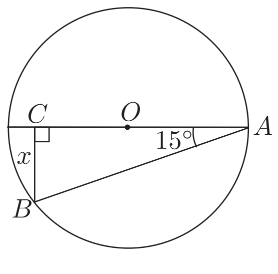


2. Uma pessoa de $1,70$ m de altura observa o topo de uma árvore sob um ângulo α. Conhecendo a distância a do observador até árvore, determine a altura da árvore.

3. Na figura, determine h, sendo dados α, β e d.



4. Sendo O o centro da circunferência de raio unitário, determine o valor de x.



5. Sendo $\operatorname{sen} x = \dfrac{a+b}{c}$ e $\csc x = \dfrac{a-b}{c}$, mostre que o triângulo ABC, de lados a, b e c é retângulo.

6. Seja a função f, definida por
$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{cotg} x + \csc x - \operatorname{tg} x - \sec x,\ \forall x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$
Determine o valor de $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

7. Para que valores de m as raízes da equação $4x^2 + (2-3m)x + m^2 = 0$ são a tangente e a cotangente de um mesmo ângulo.

8. Simplificar a expressão
$$y = \frac{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b}{\cos a - \cos b} + \frac{\cos a + \cos b}{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}$$

9. Duas crianças brincam em uma gangorra cuja tábua tem 3 m de comprimento. Quando a gangorra toca o chão forma com ele uma ângulo de 30°. Determine a altura que se eleva a criança que está na outra extremidade.

10. Determine o valor de
$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}^3 x}{2} + \frac{\operatorname{sen}^5 x}{4} + \ldots$$

Gabarito

1. $0,75$

2. $1,70 + a\ \operatorname{tg}\alpha$

3. $h = \dfrac{d\ \operatorname{tg}\alpha\ \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$

4. $0,5$

6. $\dfrac{\sqrt{3}-3}{2}$

7. -2

8. 0

9. $\dfrac{3}{2}$ 10. $\dfrac{2\ \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}$

Referências

1. Boyer, C. B., História da Matemática, 3o edição, Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.

2. Lima, E.L.. Meu professor de matematica e outras histórias, 3ª Edição, Publicação SBM, 1997.

3. Wikipedia, A enciclopedia livre, http://pt.wikipedia.org

4. Lobo da Costa,N. M. A História da Trigonometria. Educação Matemática em Revista - Revista da SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) - Ano 10, São Paulo, p. 60 - 69, 01 mar. 2003.

Aula 21 – Funções Trigonométricas

Introdução

Na seção anterior estudamos as relações trigonométricas que envolvem os ângulos agudos de um triângulo retângulo. Nosso objetivo é estender estas relações para definir as funções trigonométricas para qualquer número real, e não apenas ângulos de 0 a 90 graus . Para isso utilizaremos o importante conceito de radiano apresentado na seção anterior.

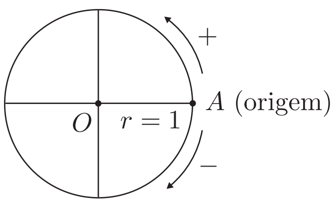
No contexto histórico, as funções trigonométricas como definiremos a seguir surgiram como evolução de diversos resultados. Entre eles podemos destacar os trabalhos de François Viéte (1540-1603) e principalmente de Leonhard Euler (1707-1783) em um dos seus mais importantes tratados: Introductio in analysin infinitorum(1748).

Para definirmos as funções trigonométricas, inicialmente apresentamos o ciclo trigonométrico e as determinações positivas e negativas de uma arco. A idéia central é que as funções trigonométricas serão definidas a partir de uma outra função que associa a cada número real um ponto sobre o ciclo trigonométrico. Feito isso, na seção seguinte, definiremos as funções seno, co-seno, tangente, etc.

Ciclo trigonométrico - determinações

Ciclo Trigonométrico

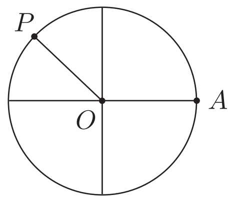
Chamamos de ciclo trigonométrico a uma circunferência de raio unitário na qual fixamos um ponto (A) como origem dos arcos e a adotamos o sentido anti-horário como positivo.



Arco Trigonométrico

Chamamos de arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ ao conjunto dos infinitos arcos de origem A e extremidade P. Esses arcos são obtidos, partindo-se da origem A e girando em qualquer sentido (positivo ou negativo) até a extremidade P, seja na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico.

Analogamente, chamamos de ângulo trignométrico AOP ao conjunto dos infinitos ângulos de lado inicial $\overrightarrow{OA}$ e lado terminal $\overrightarrow{OP}$.

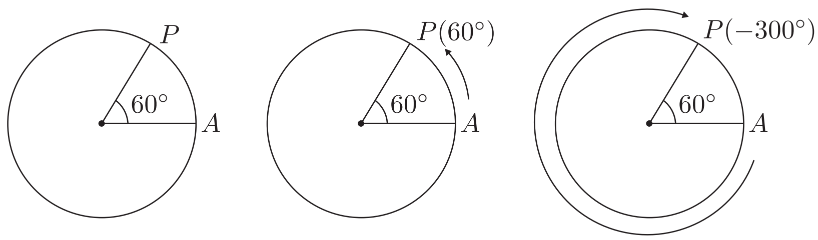


Conjunto das determinações de um arco

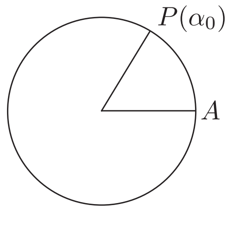
Seja P um ponto qualquer de um ciclo trigonométrico de origem A. A medida do arco $\overset{\frown}{AP}$, de origem A e extremidade P é, por convenção:

a) Positivo se o sentido do percursso de A para P for o anti-horário.

b) Negativo se o sentido de percursso de A para P for horário.

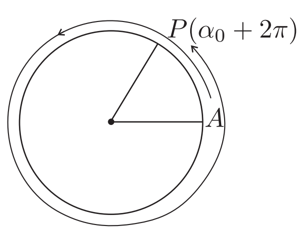


O ponto P é extremidade de infinitos arcos de origem A e a medida de cada um deles é chamada determinação. A medida α_0 do arco $\overset{\frown}{AP}$, tal que $0 \leq \alpha_0 < 2\pi$ é chamada primeira determinação positiva do arco.



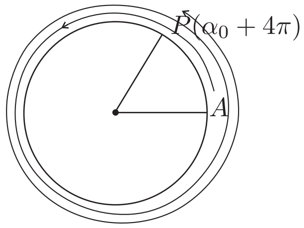
Primeira determinação positiva

Adicionando à primeira medida o número 2π, que equivale a percorrer uma volta do sentido anti-horário, obtém-se o número $\alpha_0+2\pi$ que é a segunda determinação positiva de $\overset{\frown}{AP}$.



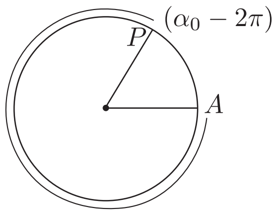
Segunda determinação positiva

Adicionando à primeira determinação o número $2{\cdot}2\pi = 4\pi$, que equivale a percorrer duas voltas no sentido anti-horário, obtém-se o número $\alpha_0 + 4\pi$ que é a terceira determinação positiva do arco $\overset{\frown}{AP}$, e assim por diante.



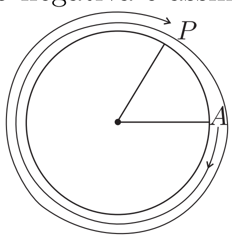
Terceira determinação positiva

Subtraindo da primeira determinação positiva o número 2π, que equivale a percorrer uma volta no sentido horário, obtém-se $\alpha_0 - 2\pi$ que é a primeira determinação negativa do arco $\overset{\frown}{AP}$.



Primeira determinação negativa

Subtraindo da primeira determinação positiva o número $2 \cdot 2\pi = 4\pi$, que equivale a percorrer duas voltas no sentido horário, obtém-se $\alpha_0 - 4\pi$ que é a segunda determinação negativa e assim por diante.



As infinitas determinações dos arcos de origem A e extremidade P são:

	Determinações positivas	Determinações negativas
primeira	α_0	$\alpha_0 - 1 \cdot 2\pi$
segunda	$\alpha_0 + 1 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 2 \cdot 2\pi$
terceira	$\alpha_0 + 2 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 3 \cdot 2\pi$
quarta	$\alpha_0 + 3 \cdot 2\pi$	$\alpha_0 - 4 \cdot 2\pi$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Todas essas determinações são do tipo $\alpha_o + n{\cdot}2\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, e portanto o conjundo das determinações do arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ é:

$$\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha = \alpha_o + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Observações

a) Se a medida dos arcos for expressa em graus, devemos escrever $\alpha = \alpha_o + n \cdot 360°, n \in \mathbb{Z}$.

b) O número α_o, utilizado no conjunto das determinações pode ser o valor de uma qualquer das determinações. É costume, porém, escolher o valor da 1^a determinação positiva ou negativa.

c) A cada ponto P estão associados infinitos números reais, mas a cada número real está associado um único P.

Se a e b são duas determinações quaisquer, do conjunto das determinações, determinar a relação entre a e b.

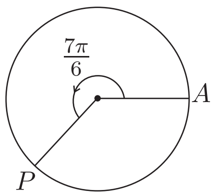
Solução:
$$\begin{array}{l} a = \alpha_0 + n_1 \cdot 2\pi \\ b = \alpha_0 + n_2 \cdot 2\pi \end{array} \Rightarrow a - b = 2\pi(n_1 - n_2),\ n_1 \in \mathbb{Z},\ n_2 \in \mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow a - b = 2\pi n \quad \text{ou} \quad a - b = 360°,\ n \in \mathbb{Z}$$

Def. Dois arcos a e b são côngruos quando tem a mesma origem e a mesma extremidade, isto é, diferem entre si por um número inteiro de voltas na circunferência.

Se a e b são côngruos então: $a-b = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $a-b = 360k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercícios resolvidos

1. Determinar o conjunto das determinações dos arcos de origem A e extremidade B assinalados na figura.



$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + n \cdot 2\pi,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Calcule a primeira determinação positiva (α_0) dos seguintes arcos:

a) $1620°$ b) $\frac{125\pi}{11}$ c) $-810°$ d) $-\frac{97\pi}{7}$

Solução

a)
$$\begin{array}{l|l} 1620° & 360° \\ \hline 180° & 4 \end{array}$$
$$\boxed{\alpha_0 = 180°}$$

b)
$$\begin{array}{l|l} \frac{125\pi}{11} & \frac{22\pi}{11} \\ \hline \frac{15\pi}{11} & 5 \end{array}$$
$$\boxed{\alpha_0 = \frac{15\pi}{11}}$$

c)
$$\begin{array}{l|l} -810° & 360° \\ \hline -90° & -2 \end{array}$$
$$\alpha_0 = 360° - 90° = 270°$$
$$\boxed{\alpha_0 = 270°}$$

d)
$$\begin{array}{l|l} -\frac{97\pi}{7} & \frac{14\pi}{7} \\ \hline -\frac{13\pi}{7} & -6 \end{array}$$
$$\alpha_0 = 2\pi - \frac{13\pi}{7} = \frac{\pi}{7}$$
$$\boxed{\alpha_0 = \frac{\pi}{7}}$$

3. Calcular a 3^a determinação positiva do arco $1910°$.

   $$\begin{array}{l|l} 1910° & \underline{\ 360°\ } \\ 110° & \ \ 5 \end{array} \Rightarrow 1^a \text{ det. positiva } \alpha_0 = 110°$$

   Como a 3^a det. positiva é $\alpha_0 + 2 \cdot 360°$ vem $110° + 720° = 830°$.

4. Calcular a 4^a determinação negativa do arco $810°$.

   $$\begin{array}{l|l} 810° & \underline{\ 360°\ } \\ 90° & \ \ 2 \end{array} \Rightarrow 1^a \text{ det. positiva } \alpha_0 = 90°$$

   A 4^a det. negativa é $\alpha_0 - 4 \cdot 360° \Rightarrow 90° - 1440° = -1350°$.

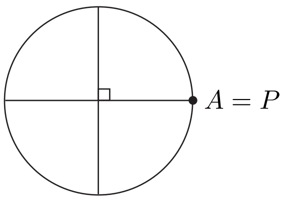
Exercícios Propostos

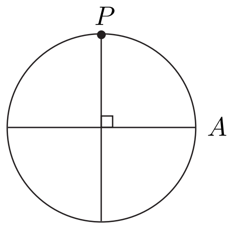
1. Calcular a 1^a determinação positiva dos arcos.

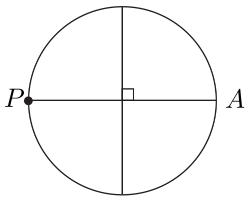
   a) $1630°$ b) $-1430°$ c) $2300°$

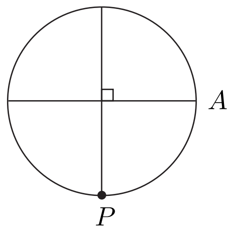
2. Determine a 1^a determinação negativa do arco $\dfrac{37\pi}{3}$.

3. Escrever o conjunto das determinações do arco $\overset{\frown}{AP}$.

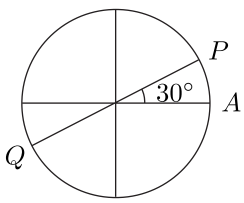
   a)


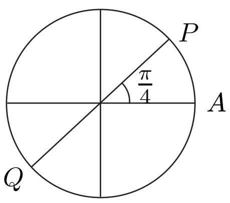
   b)


   c)


   d)


4. Escrever em uma única expressão, o conjunto dos arcos assinalados, com extremidade P e Q, conforme o caso:

   a)


   b)


5. Sabendo que $\pi - x$ e $2x + \pi$ são dois arcos côngruos. Determine o menor valor positivo de x.

Gabarito

1) a) $190°$ b) $10°$ c) $140°$

2) $-\dfrac{5\pi}{3}$

3) a) $2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ b) $2\pi n + \dfrac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

c) $2\pi n + \pi,\ n \in \mathbb{Z}$ d) $2\pi n + \dfrac{3\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

4) a) $V = \left\{x \in \mathbb{R} | x = k\pi + \dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $V = \left\{x \in \mathbb{R} | x = k\pi + \dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

5) $\dfrac{2\pi}{3}$

Funções Trigonométricas

Introdução

Consideremos, no ciclo trigonométrico de origem A, um sistema cartesiano ortogonal XOY conforme mostra a figura (1). Os pontos $A(1,0)$, $B(0,1)$, $A'(-1,0)$ e $B'(0,-1)$ dividem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes. Quando dizemos que um arco $\overset{\frown}{AP}$ pertence ao 2° quadrante, por exemplo, queremos dizer que a extremidade P pertence ao segundo quadrante.

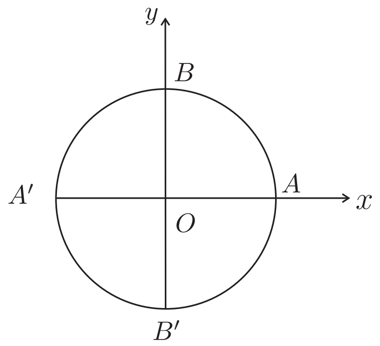
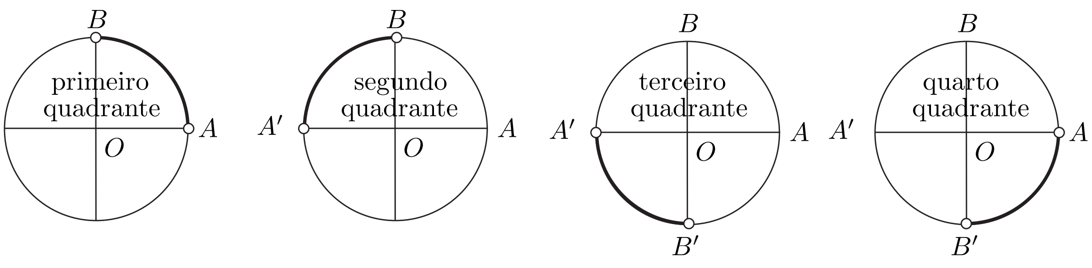
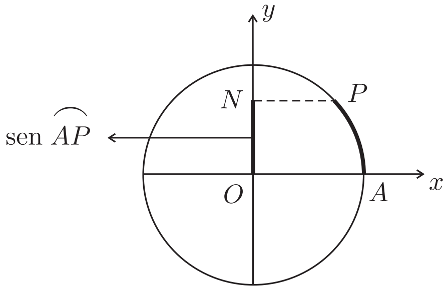


Figura 1



Definição da função seno

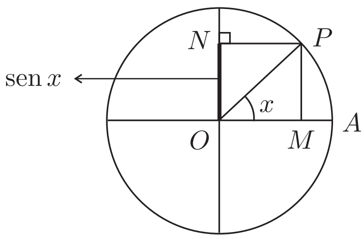
O seno de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ de extremidade P é a ordenada do ponto P. Representa-se: sen $\overset{\frown}{AP}= ON$



A cada número real x corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única ordenada chamada seno de x. A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real associa a ordenada do ponto P é, por definição, a função seno.

Em símbolo

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \text{sen}(x) = ON$$

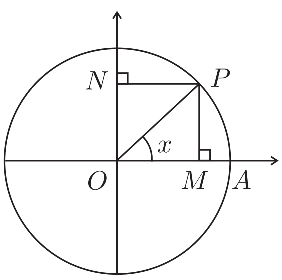


Observação

A definição acima é coerente com aquela no triângulo retângulo. De fato, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então $P \in I^\circ$ quadrante e além disso $OP = 1$ (raio) e $MP = ON$.

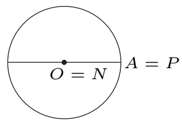
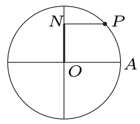
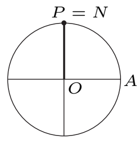
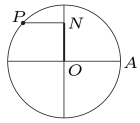
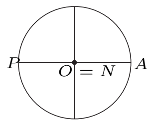
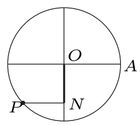
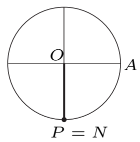
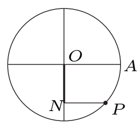
Assim no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\text{sen}\, x = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \frac{MP}{OP} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = \frac{MP}{1} \Leftrightarrow \text{sen}\, x = ON$$



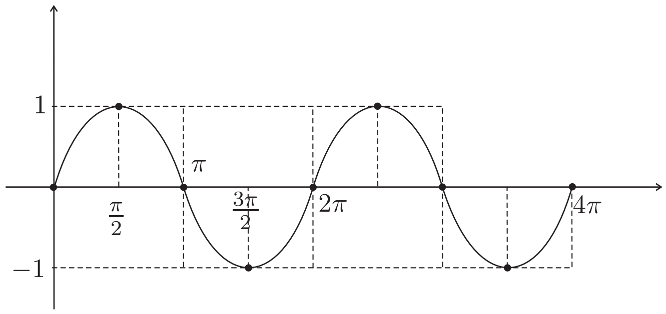
Variação da função seno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta, no sentido anti-horário, o número real x varia de 0 a 2π e o seno de x varia de -1 a 1. Observe, na tabela a seguir, as várias situações possíveis.

Posição do ponto P	Medida do arco em graus	Medida do arco em radianos	Seno de x	Propriedade	No ciclo trigonométrico
$P \equiv A$	$x = 0°$	$x = 0$	$\operatorname{sen} x = 0$		
$P \in 1°Q$	$0° < x < 90°$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$0 < \operatorname{sen} x < 1$	O seno é crescente no 1° quadrante	
$P \equiv B$	$x = 90°$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\operatorname{sen} x = 1$	Valor máximo	
$P \in 2°Q$	$90° < x < 180°$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$0 < \operatorname{sen} x < 1$	O seno é decrescente	
$P = A'$	$x = 180°$	$x = \pi$	$\operatorname{sen} x = 0$		
$P \in 3°Q$	$180° < x < 270°$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-1 < \operatorname{sen} x < 0$	O seno é decrescente	
$P = B'$	$x = 270°$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\operatorname{sen} x = -1$	Valor mínimo	
$P \in 4°Q$	$270° < x < 360°$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-1 < \operatorname{sen} x < 0$	O seno é crescente	

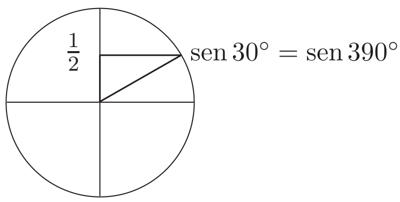
Gráfico

Note que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x \pm 2\pi)$, pois x e $x \pm 2\pi$ são as medidas de arcos de mesma extremidade e de acordo com a tabela do item anterior, concluimos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ é:



e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que

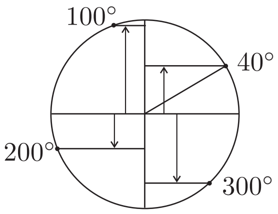


$$\operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{sen}(30^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sen} 390^\circ = \frac{1}{2}$$

Propriedades

Do que foi apresentado anteriormente podemos concluir que a função seno é:

a) positiva no 1° e 2° quadrantes; negativo no 3° e 4° quadrantes

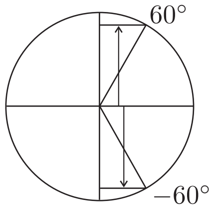


$\operatorname{sen} 40^\circ > 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} 200^\circ < 0$

$\operatorname{sen} 100^\circ > 0$ $\quad$ $\operatorname{sen} 300^\circ < 0$

b) crescente nos 1° e 4° quadrantes e decrescente nos 2° e 3° quadrantes.

c) Ímpar pois $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$



d) Periódica de período 2π.

Exercícios Propostos

1. Calcule:

a) $\operatorname{sen} 0°$ b) $\operatorname{sen} 30°$ c) $\operatorname{sen} 45°$ d) $\operatorname{sen} 60°$

e) $\operatorname{sen} 90°$ f) $\operatorname{sen} 120°$ g) $\operatorname{sen} 150°$ h) $\operatorname{sen} 180°$

2. Calcular o valor de:

a) $\operatorname{sen} 420°$ b) $\operatorname{sen} 750°$

Gabarito

1. a) 0 b) $\dfrac{1}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e) 1 f) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ g) $\dfrac{1}{2}$ h) 0

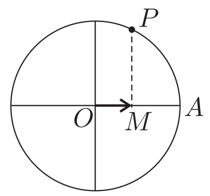
2. a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{1}{2}$

Função Co-seno

Definição

O co-seno de um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AP}$ de extremidade P, é a abscissa do ponto P. Representa-se

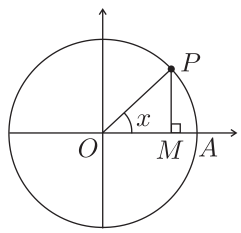
$$\cos \overset{\frown}{AP} = OM$$



A cada número real corresponde um único ponto P, extremidade do arco $\overset{\frown}{AP}$ de medida x. A cada ponto P, por sua vez, corresponde uma única abscissa chamada co-seno de x. A função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada número real x associa a abscissa do ponto P é, por definição, a função co-seno.

Em símbolo

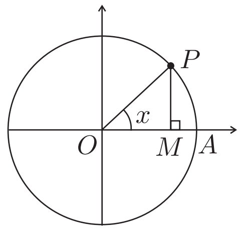
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \cos(x) = OM$$



Obs. A definição dada é coerente com aquela apresentada no triângulo retângulo. De fato, se $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ então P pertence ao 1° quadrante e além disso $OP = 1$ (raio).

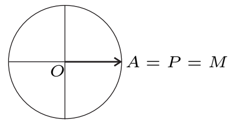
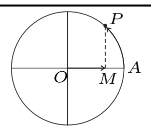
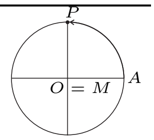
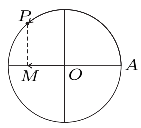
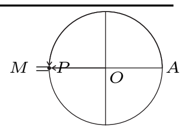
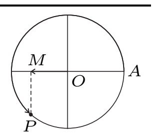
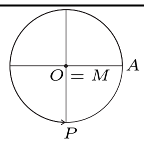
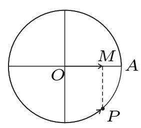
Assim, no triângulo OMP retângulo em M, temos:

$$\cos x = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{OP} \Leftrightarrow \cos x = \frac{OM}{1} \Leftrightarrow \cos x = OM$$



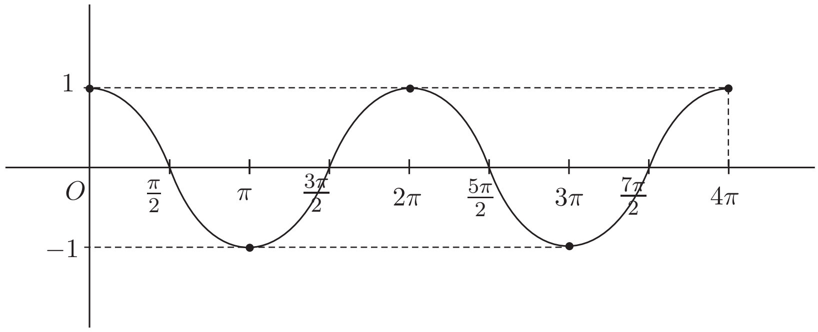
Variação da função co-seno

Enquanto o ponto P percorre a primeira volta no sentido anti-horário, o número real x varia de 0 a 2π e o co-seno de x varia de -1 a 1. Observe, na tabela a seguir as várias situações possíveis.

Posição do ponto P	Medida do arco em graus	Medida do arco em radianos	Co-seno de x	Propriedade	No ciclo trigonométrico
$P \equiv A$	$x = 0°$	$x = 0$	$\cos x = 1$	Valor máximo	
$P \in 1°Q$	$0° < x < 90°$	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$0 < \cos x < 1$	O co-seno é decrescente no 1° quadrante	
$P \equiv B$	$x = 90°$	$x = \frac{\pi}{2}$	$\cos x = 0$		
$P \in 2°Q$	$90° < x < 180°$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$-1 < \cos x < 0$	O co-seno é decrescente no $2°Q$	
$P = A'$	$x = 180°$	$x = \pi$	$\cos x = -1$	Valor mínimo	
$P \in 3°Q$	$180° < x < 270°$	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$-1 < \cos x < 0$	O co-seno é crescente no $3°Q$	
$P = B'$	$x = 270°$	$x = \frac{3\pi}{2}$	$\cos x = 0$		
$P \in 4°Q$	$270° < x < 360°$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$0 < \cos x < 1$	O co-seno é crescente no $4°Q$	

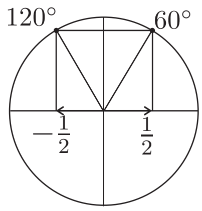
Gráfico

Note que $\cos x = \cos(x \pm 2\pi)$, pois x e $x \pm 2\pi$ são as medidas de arcos de mesma extremidade, e de acordo com a tabela anterior, concluimos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos(x)$ é:



e o conjunto imagem é $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$

Note que



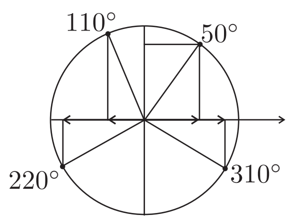
$$\cos 120° = \cos(360° + 120°) = \cos 480° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$$

Propriedades

Do que foi apresentado, podemos concluir que a função co-seno é:

a) Positiva no primeiro e quarto quadrantes. Negativa no segundo e terceiro quadrantes.

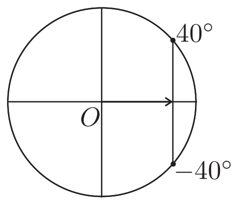
$\cos 50° > 0$	$\text{sen}\, 110° < 0$
$\cos 220° < 0$	$\text{sen}\, 310° > 0$



b) Crescente no terceiro e quarto quadrantes. Decrescente no primeiro e segundo quadrantes.

c) Par, pois $\cos(-x) = \cos x$

$$\boxed{\cos(-40°) = \cos 40°}$$



d) Periódica de período 2π

Exercícios Propostos

1. Calcule

   a) $\cos 0°$ b) $\cos 30°$ c) $\cos 45°$ d) $\cos 90°$

   e) $\cos 120°$ f) $\cos 150°$ g) $\cos 180°$

2. Calcule o valor de:

   a) $\cos 780°$ b) $\cos 1200°$

Gabarito

1. a) 1 b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d) 0 e) $-\dfrac{1}{2}$ f) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ g) -1

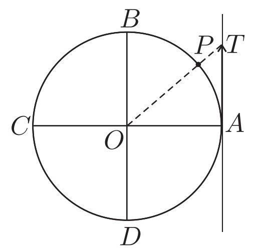
2. a) $\dfrac{1}{2}$ b) $-\dfrac{1}{2}$

Função Tangente

Definição

Consideremos um arco $\overset{\frown}{AP}$ com $P \neq B$ e $P \neq D$ e seja T a interseção da reta OP com o eixo das tangentes AT.

Por definição tg $\overset{\frown}{AP}= AT$



A função tangente é tal que

$$f : \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{tg} x = AT$$

Observe que o ponto P, numa volta completa no ciclo trigonométrico, faz o valor da tangente (AT) tender a $+\infty$ (ou a $-\infty$) quando o ponto P se aproxima de B ou D (onde a tangente não existe). A cada meia volta verificamos que todos os valores da tangente se repetem.

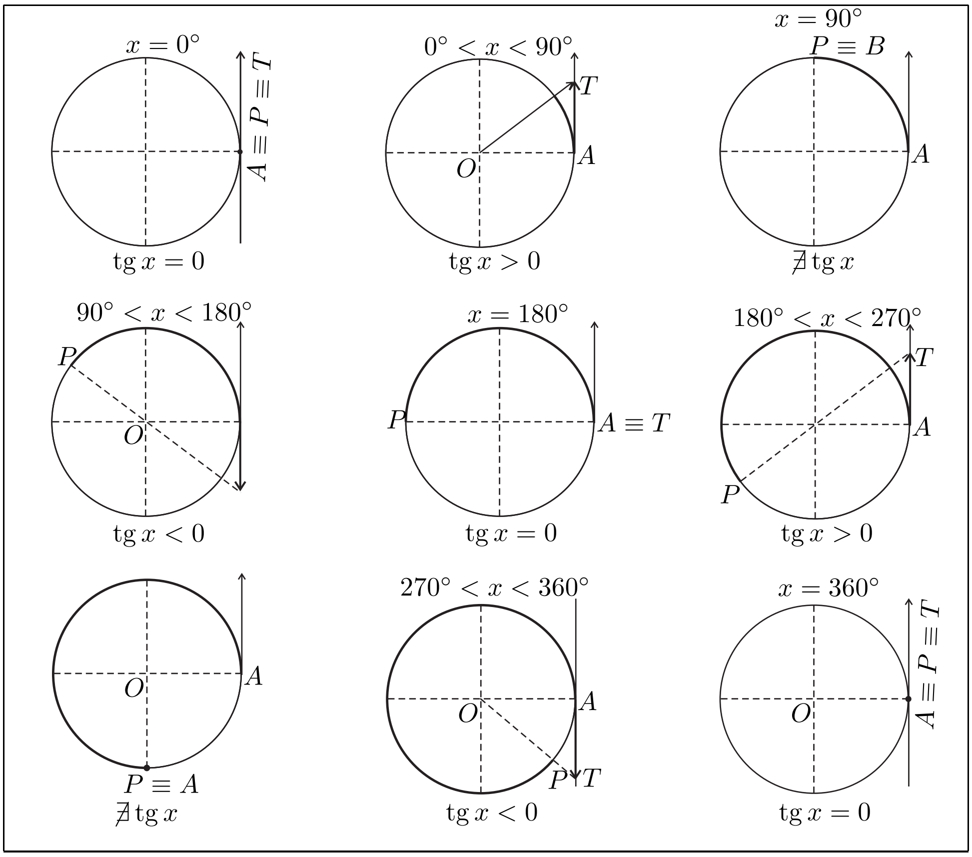
Conseqüências

Da definição da função $y = \operatorname{tg} x$ decorre que:

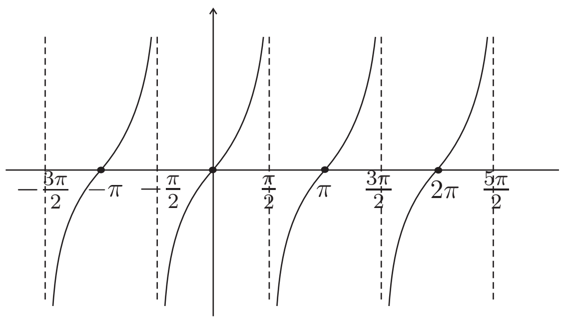
Domínio $D(f) = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Imagem $Im(f) = \mathbb{R}$

Variação da função tangente



Gráfico



Propriedades

O período da função tangente é π.

A função $y = \operatorname{tg} x$ é ímpar $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

A função $y = \operatorname{tg} x$ é crescente no intervalo

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Sinais

A tangente de um arco é positiva no 1° e 3° quadrantes e negativa no 2° e 4° quadrantes.

Exercícios resolvidos

1. Completar o quadro abaixo:

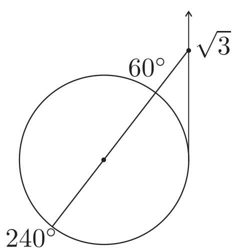
x	$\operatorname{tg} x$
$0°$	
$30°$	
$45°$	
$60°$	
$90°$	
$180°$	
$270°$	
$360°$	

Solução

x	$\operatorname{tg} x$
$0°$	0
$30°$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
$45°$	1
$60°$	$\sqrt{3}$
$90°$	$\nexists$
$180°$	0
$270°$	$\nexists$
$360°$	0

2. Determinar o conjunto verdade da equação $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$, no intervalo $0° \leq x \leq 360°$

Solução:



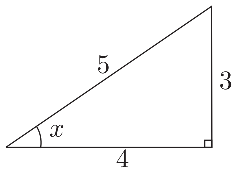
$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \;\Rightarrow\; x = 60° \text{ ou } x = 240°, \quad 0° \leq x \leq 360°$$

$$V = \{60°, 240°\}$$

3. Se $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, determine o valor de $\cos x - \operatorname{sen} x$.

   Solução

   Seja o triângulo retângulo temos:



$$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}, \ \operatorname{sen} x = \frac{3}{5} \ \text{ e } \ \cos x = \frac{4}{5}$$

   Tomando $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, teremos: $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$, $\operatorname{sen} x = -\dfrac{3}{5}$ e $\cos x = -\dfrac{4}{5}$.

   Portanto $\cos x - \operatorname{sen} x = \left(-\dfrac{4}{5}\right) - \left(-\dfrac{3}{5}\right) = -\dfrac{1}{5}$.

Exercícios propostos

1. Determine o conjunto verdade da equação $|\operatorname{tg} x| - 1 = 0$ no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

2. Determine o conjunto verdade da equação $\operatorname{sen} x + \cos x = 0$, no intervalo $[4, 3\pi]$.

3. Se $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{sen} \alpha = a$. Determine $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$.

4. Na estação de trabalho de pintura de peças de uma fábrica, a pressão em um tambor de ar comprimido varia com o tempo conforme a expressão $P(t) = 50 + 50 \operatorname{sen}\left(t - \dfrac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$. Determine o instante t que corresponde ao valor mínimo da pressão.

Gabarito

1. $V = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

2. $V = \left\{\dfrac{7\pi}{4}, \dfrac{11\pi}{4}\right\}$

3. $\dfrac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}$

4. 2π

Funções co-tangente, secante e co-secante

O estudo das funções co-tangente, secante e co-secante pode ser feito a partir das três funções já estudadas (seno, co-seno e tangente).

Função co-tangente

Sabemos que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$.

Podemos concluir que a função $y = \operatorname{cotg} x = f(x)$, tem

- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pois a função co-tangente não existe quando a função tangente é zero
$$(\operatorname{tg} x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$
- $Im(f) = \mathbb{R}$, pois a função tangente tem imagem igual a $\mathbb{R}$.
- O período da função co-tangente é π.
- A função $y = \operatorname{cotg} x$ é ímpar, $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$.
- Sinais

  A co-tangente de um arco é positiva no 1° e 3° quadrantes e negativa no 2° e 4° quadrantes.

Função secante

Sabemos que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Podemos concluir que a função $f(x) = y = \sec x$, tem

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ pois a função secante não existe quando a função co-seno é zero
$$(\cos x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \ \text{ou}\ y \geq 1\}$, pois a função co-seno tem imagem com valores $-1 \leq y \leq 1$.
- O período da função secante é 2π.
- A função $y = \sec x$ é par, $\sec(-x) = \sec x$.
- Sinais

  A secante de um arco é positiva no 1° e 4° quadrantes e negativa no 2° e 3° quadrantes.

Função co-secante

Sabemos que $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.
Podemos concluir que a função $f(x) = y = \csc x$, tem:

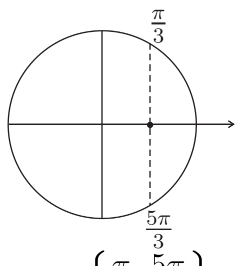
- $D(f) = \mathbb{R} - \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ pois a função co-secante não existe quando a função seno é zero
$$(\operatorname{sen} x = 0 \ \Leftrightarrow\ x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$$
- $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ ou } y \geq 1\}$, pois a função seno tem imagem com valores $-1 \leq y \leq 1$.
- O período da função co-secante é 2π.
- A função $y = \csc x$ é ímpar, $\csc(-x) = -\csc x$.
- Sinais

  A co-tangente de um arco é positiva no 1° e 2° quadrantes e negativa no 3° e 4° quadrantes.

Exercícios resolvidos

1. Resolver a equação $\sec x = 2,\ x \in [0, 2\pi]$.

   Solução
$$\left.\begin{array}{l}\sec x = 2\\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$



   Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos $V = \left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}$.

2. Se $x = \dfrac{\pi}{6}$, calcular o valor da expressão
$$E = \sec x + \operatorname{cotg} x + \csc(3x)$$

   Solução
$$\begin{aligned} E &= \sec\frac{\pi}{6} + \operatorname{cotg}\frac{2\pi}{6} + \csc 3 \cdot \frac{\pi}{6} = \sec\frac{\pi}{6} + \operatorname{cotg}\frac{\pi}{3} + \csc\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

3. Se $\cos x = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ e $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$. Determine o valor de $\operatorname{cotg} x$.

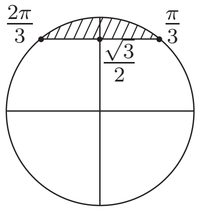
Solução

$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 = 1 - \dfrac{7}{9} = \dfrac{2}{9} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}$,

como $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ então $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e, daí, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{3}}{-\frac{\sqrt{2}}{3}} = -\sqrt{\dfrac{7}{2}}$.

4. Resolver a inequação $2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \geq 0$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Solução $\quad 2\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \geq 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Para $0 \leq x \leq 2\pi$, temos: $V = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

Exercícios propostos

1. Se $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, determine o valor de $\sec x$.
2. Resolver a inequação $2\cos x + 1 < 0$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.
3. Para que valores de x, $0 \leq x \leq 2\pi$, a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{sen} x}}$ existe no campo dos números reais?
4. Resolver a inequação $\operatorname{tg} x \geq 1$, para $0 \leq x \leq 2\pi$.

Gabarito

1. -5
2. $V = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \dfrac{2\pi}{3} < x < \dfrac{4\pi}{3}\right\}$
3. $0 < x < \pi$
4. $\dfrac{\pi}{4} \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{5\pi}{4} \leq x < \dfrac{3\pi}{2}$.

Aula 22 – Relações Fundamentais e Redução ao 1º quadrante

Relações Fundamentais

Introdução

As identidades trigonométricas estabelecem relações de igualdade entre as funções trigonométricas. Através destas identidades é possível, por exemplo, simplificar expressões. Já estudamos as relações fundamentais para triângulo retângulo. Vamos agora estudar as relações fundamentais no círculo trigonométrico.

Relações Fundamentais envolvendo seno,co-seno e tangente

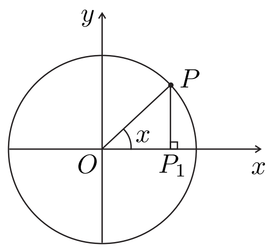
Teorema 1

Para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a relação

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Prova

a) Se $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ temos o triângulo retângulo OP_1P, usando o teorema de Pitágoras vem:



$$\overline{OP_1}^2 + \overline{P_1P}^2 = \overline{OP}^2 \Rightarrow \boxed{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1}$$

b) Se $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, podemos verificar diretamente

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0 + 1 = 1$$

$$\text{Se } x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 + 0 = 1$$

$$\text{Se } x = \pi \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 0^2 + (-1)^2 = 1$$

$$\text{Se } x = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = (-1)^2 + 0^2 = 1$$

Logo vale a relação $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

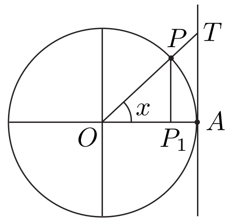
Teorema 2

Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, vale a relação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Prova

a) Se $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ temos



$$\triangle OAT \sim \triangle OP_1P$$

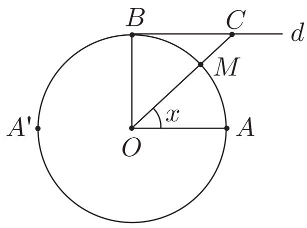
$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{OP_1}} \ \Rightarrow\ \frac{\operatorname{tg} x}{1} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \ \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, temos $\operatorname{tg} x = 0 = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

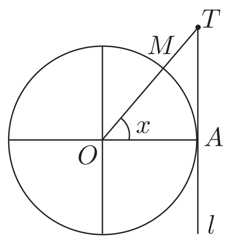
Relações Fundamentais envolvendo cotangente, secante, cossecante

1. Dado um número real $x,\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, seja M sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta OM e seja C sua interseção com o eixo d da figura.



Denominamos cotangente de x e indicamos por $\operatorname{cotg} x$ a medida algébrica do segmento BC. Denominamos cossecante de x e indicamos por $\csc x$ a medida algébrica do segmento OC.

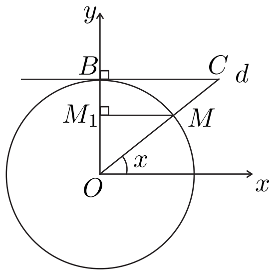
2. Dado um número real $x,\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, seja M sua imagem no círculo trigonométrico. Consideremos a reta l que passa pelos pontos A e T da figura.



Seja T a interseção da reta l com OM. Denominamos secante de x e indicamos por $\sec x$ a medida algébrica de OT.

Teorema 3

Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vale a relação



$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Prova

a) Se $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\triangle OBC \sim \triangle OM_1M$$

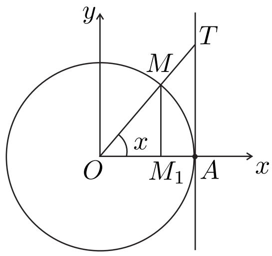
$$\Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{M_1M}}{\overline{OM_1}} \Rightarrow \frac{\operatorname{cotg} x}{1} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, temos $\operatorname{cotg} x = 0 = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Teorema 4

Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$, vale a relação



$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Prova

a) Se $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\triangle OM_1M \sim \triangle OAT$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{OM}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OA}} \Rightarrow \frac{1}{\sec x} = \frac{\cos x}{1} \Rightarrow \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

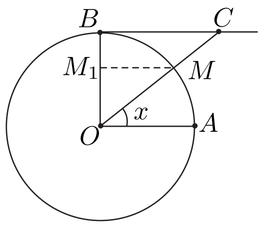
Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, temos que $\sec x = 1 = \cos x$ (k par) ou $\sec x = -1 = \cos x$ (k ímpar).

Logo, $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$.

Teorema 5

Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, vale a relação



$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Prova

a) Se $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ temos

$$\triangle OM_1M \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow\ \frac{\overline{OC}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OM_1}}\ \Rightarrow\ \frac{\csc x}{1} = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\ \Rightarrow\ \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Vale a relação em qualquer quadrante que estiver x.

b) Se $x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$ temos $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = 1$ (k par), $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = -1$ (k ímpar)

<u>Corolário</u> Para todo $x \in \mathbb{R},\ x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, valem as relações:

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \\ \operatorname{tg}^2 x + 1 = \sec^2 x \\ 1 + \operatorname{cotg}^2 x = \csc^2 x \\ \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{gathered}}$$

Prova

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} = \csc^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1}$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x \cdot \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \cos^2 x \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \operatorname{tg}^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

Exercícios resolvidos

1. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, calcular as demais funções circulares de x.

   Solução $\quad \dfrac{\pi}{2} < x < \pi\ \Rightarrow\ \cos x < 0$

Temos

$$\cos x = -\sqrt{1-\text{sen}^2 x} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\text{sen}\, x} = -\frac{4}{3}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

2. Sabendo que $\text{tg}\, x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcular as demais funções circulares de x.

Solução $\quad \text{cotg}\, x = \frac{1}{\text{tg}\, x} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$

Já que $\pi < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sec x < 0$

$$\sec x = -\sqrt{1+\text{tg}^2 x} = -\sqrt{1+\frac{9}{16}} = -\frac{5}{4}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{sen}\, x = \text{tg}\, x \cdot \cos x = \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{5}$$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x} = -\frac{5}{3}$$

3. Sabendo que $\csc x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor da expressão $y = \text{sen}^2 x + 2\text{tg}^2 x$

$$\csc x = \frac{1}{\text{sen}\, x} \Rightarrow \text{sen}\, x = \frac{2}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{4}{18}$$

$$\cos^2 x = 1 - \text{sen}^2 x = 1 - \frac{4}{18} = \frac{14}{18} \Rightarrow \text{tg}^2 x = \frac{\frac{4}{18}}{\frac{14}{18}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

Então

$$y = \frac{4}{18} + 2\cdot\frac{2}{7} = \frac{4}{18} + \frac{4}{7} = \frac{28+72}{126} = \frac{100}{126} = \frac{50}{53}$$

4. Calcular m de modo que $\text{sen}\, x = 2m+1$ e $\cos x = 4m+1$.

Solução $\quad \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow (2m+1)^2 + (4m+1)^2 = 1$

$$\Rightarrow 20m^2 + 12m + 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{-12 \pm \sqrt{144-80}}{40}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ ou } m = -\frac{1}{10}$$

5. Dado que $\text{sen}\,x \cdot \cos x = k$, calcular o valor de $y = \text{sen}^4 x + \cos^4 x$ e $z = \text{sen}^6 x + \cos^6 x$.

Solução

Como $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ temos:

$$y = (\text{sen}^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\text{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - 2k^2$$

Como $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ temos

$$z = (\text{sen}^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = (\text{sen}^2 x + \cos^2 x)(\text{sen}^4 x - \text{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$z = \text{sen}^4 x + \cos^4 x - \text{sen}^2 x \cos^2 x = y - k^2 = 1 - 2k^2 - k^2$$

Logo $z = 1 - 3k^2$

Exercícios propostos

1. Sabendo que $\text{sen}\,x = -\dfrac{7}{25}$ e $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$, calcular o valor da expressão $y = \dfrac{\text{tg}\,x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$.

2. Sendo $\cos x = \dfrac{1}{m}$ e $\text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{m+1}}{m}$, determinar m.

3. Sendo $\text{tg}\,a = \dfrac{1}{2}$, calcular $y = \dfrac{\csc a - \text{sen}\,a}{\text{sen}\,a - \cos a}$.

4. Se $5 \sec x - 3\text{tg}^2 x = 1$, calcular $\cos x$.

5. Se $\text{sen}\,x + \cos x = m$ e $\text{sen}\,x \cdot cosx = n$, obter uma relação entre m e n, independente de x.

Gabarito

1. $-\dfrac{25}{7}$

2. $m = 2$ ou $m = -1$

3. $y = -4$

4. $\cos x = \dfrac{1}{2}$

5. $m^2 = 1 + 2n$

Identidades

Definição

Sejam f e g duas funções de domínios D_1 e D_2, respectivamente. Dizemos que f é idêntica a g, e indicamos $f \equiv g$, se e somente se $f(x) = g(x),\ \forall x$ em que ambas as funções estão definidas.

$$f \equiv g \;\Leftrightarrow\; f(x) = g(x),\ \forall x \in D_1 \cap D_2.$$

Existem basicamente três processos para provar a identidade de $f \equiv g$. Conforme a dificuldade da demonstração escolhemos o método mais adequado entre os seguintes.

1º) Partimos de um dos membros (geralmente o mais complicado) da identidade e o transformamos no outro.

2º) Transformamos o 1º membro (f) e, separadamente, o 2º membro (g), chegando com ambos a mesma expressão (h).

3º) Construimos a função $h = f - g$ e provamos que $h \equiv 0$.

Exercícios resolvidos

1. Provar que $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \csc x$.

   Solução: Vamos aplicar o 1º método.

   $$\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \sec x \cdot \csc x$$
   $$\Rightarrow\ \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \sec x \cdot \csc x$$

2. Provar que $(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{tg}^2 x$.

   Solução

   $$(1 - \cos^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x) = \operatorname{sen}^2 x \cdot \sec^2 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

3. Provar que $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \dfrac{2}{\sec x \cdot \csc x} + 1$

   Solução

   $$(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \operatorname{sen}^2 x + 2 \operatorname{sen} x\ \cos x + \cos^2 x = 1 + 2 \operatorname{sen} x\ \cos x$$
   $$\frac{2}{\sec x\ \csc x} + 1 = \frac{2}{\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}} + 1 = 2 \operatorname{sen} x\ \cos x + 1$$

   Logo, $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = \dfrac{2}{\sec x\ \csc x} + 1$.

Exercícios propostos

1. Provar que

   a) $(1 - \operatorname{sen}^2 x)(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \operatorname{cotg}^2 x$

   b) $\dfrac{(\csc^2 x - \operatorname{cotg}^2 x)(\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x)}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x$

   c) $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = \operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$

Redução ao 1º quadrante

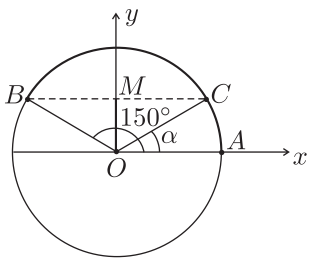
Introdução

Dado um ângulo no círculo trigonométrico é sempre possível fazê-lo corresponder a outro no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Desse modo, funções trigonométricas são calculadas para qualquer valor, reduzindo o ângulo dado ao 1º quadrante.

Ângulo no 2º quadrante

Vamos, por exemplo, calcular $\operatorname{sen} 150°$.

Inicialmente, marcamos o ângulo de 150° no círculo trigonométrico, determinando o arco $\overset{\frown}{AB}$.



Pela extremidade B do arco, traçamos uma paralela ao eixo x, obtendo C. O ângulo α é o correspondente a 150° no 1º quadrante. Como o ângulo α é o suplementar de 150°, então

$$\alpha = 180° - 150° \Rightarrow \alpha = 30°$$

Logo, $\operatorname{sen} 30° = \operatorname{sen} 150° = \overline{OM} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{2} = \operatorname{sen} 150°$.

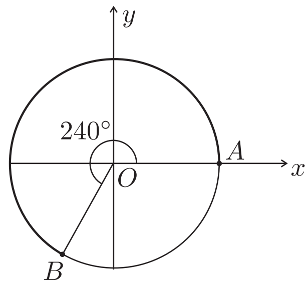
Note que se o ângulo α é o correspondente ao ângulo no 1º quadrante então

$$\operatorname{sen}(180° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha.$$

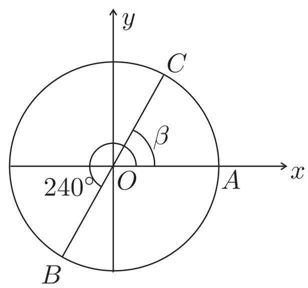
Ângulo no 3º quadrante

Vamos, agora, calcular $\cos 240°$.

Inicialmente, marcamos o ângulo $\alpha = 240°$ no círculo trigonométrico, determinando o arco $\overset{\frown}{AB}$.



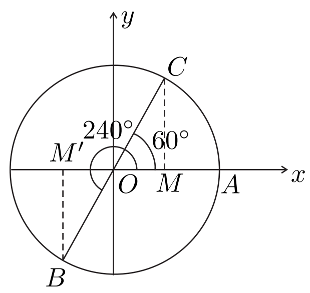
Prolongando o raio $\overline{OB}$, encontramos C e determinamos o correspondente de $240°$ no 1º quadrante.



Como o ângulo β é o explementar de $240°$, então $\beta = 240° - 180° = 60°$.

Considere a figura

Temos que $\triangle OMC \equiv \triangle OM'B$ pois



$$\begin{cases} \overline{OB} = \overline{OC} \\ \text{ângulo de } 90° \text{ nos dois triângulos (caso especial)} \\ M'\widehat{O}B = M\widehat{O}C. \end{cases}$$

Daí $\cos 240° = -\cos 60° = -\dfrac{1}{2}$.

Note que qualquer ângulo no 3º quadrante temos que

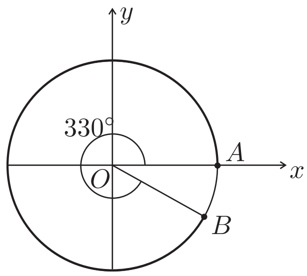
$$\cos(180° + \beta) = -\cos\beta$$

onde β é o correspondente do ângulo dado no 1º quadrante.

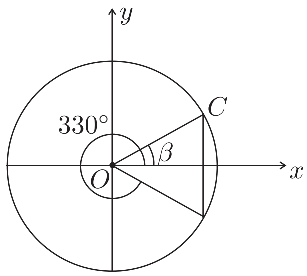
Ângulo no 4º quadrante

Vamos calcular $\operatorname{tg} 330°$.

Inicialmente, marcamos o ângulo $\alpha = 330°$ no círculo trigonométrico, determinando o arco $\overset{\frown}{AB}$.

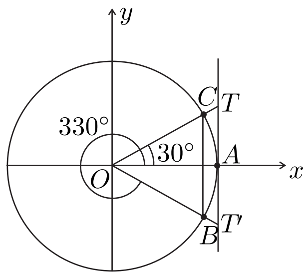


Pela extremidade B do arco, traçamos uma paralela ao eixo y, obtendo C. O ângulo β é o correspondente de 330° na igualdade.



Como β é o replementar de 330° então $\beta = 360° - 330° = 30°$.

Considere a figura



Temos que $\triangle OAT \equiv \triangle OAT'$ pois

$$\left\{\begin{array}{l} \text{ângulo de } 90° \text{ nos dois triângulos} \quad \text{(ALA)} \\ T\widehat{O}A = A\widehat{O}T' \\ OA \ \text{comum} \end{array}\right.$$

Então $|\overline{AT}| = |\overline{AT'}|$.

Logo, $\operatorname{tg} 330° = -\operatorname{tg} 30° = -\dfrac{1}{2}$.

Note que para qualquer ângulo no 4º quadrante temos que

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg}(360° - \alpha),$$

onde α é o correspondente do ângulo dado no 1º quadrante.

Resumindo:

Quadrante do ângulo $\widehat{x}$	Ângulo corresponde na 1ª volta	Procedimento
2º	suplementar a $\widehat{x}$	$180° - \widehat{x}$
3º	explementar a $\widehat{x}$	$\widehat{x} - 180°$
4º	replementar a $\widehat{x}$	$360° - \widehat{x}$

Exercícios resolvidos

1. Calcular

   a) $\operatorname{sen} 135°$ b) $\cos 135°$ c) $\operatorname{tg} 135°$

   Solução

   Como $135° \in 2^{\underline{o}}$ quadrante, vamos calcular o suplemento de $135°$

   $$\alpha = 180° - 135° = 45°$$

   No 2º quadrante o cosseno e a tangente são negativos e o seno é positivo, então

   $$\operatorname{sen} 135° = \operatorname{sen} 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
   $$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   $$\operatorname{tg} 135° = -\operatorname{tg} 45° = -1$$

2. Calcular o valor da expressão $y = \dfrac{\cos 2x + \operatorname{tg}^2 4x}{1 + \operatorname{sen} 3x}$, sabendo que $x = \dfrac{7\pi}{3}$.

   Solução $x = \dfrac{7\pi}{3} = \dfrac{7 \cdot 180°}{3} = 420°$

   Como $420°$ ultrapassa a 1ª volta, vamos reduzí-lo $420° - 360° = 60°$.

   Substituindo o ângulo ($60°$) na expressão, vem:

   $$y = \frac{\cos 120° + \operatorname{tg}^2 240°}{1 + \operatorname{sen} 180°} \qquad (1)$$

   Temos que $\cos 120° = -\cos 60°$, já que $120° \in 2^{\underline{o}}$ quadrante e o cosseno é negativo.

   $\operatorname{tg} 240° = \operatorname{tg}(240° - 180°) = \operatorname{tg} 60°$, já que $240° \in 3^{\underline{o}}$ quadrante e a tangente é positiva.

   $\operatorname{sen} 180° = 0$

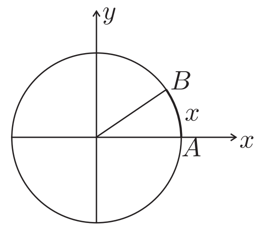
   Substituindo em (1) os valores obtidos, temos

   $$y = \frac{-\frac{1}{2} + (\sqrt{3})^2}{1 + 0} = \frac{5}{2}$$

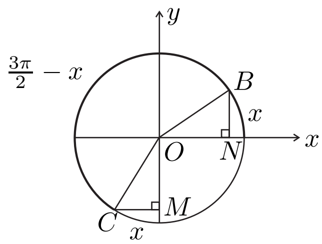
3. Mostre que $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.

Solução

Considere um arco $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.



A partir de x, marcamos $\dfrac{3\pi}{2} - x$.



$\triangle ONB \equiv \triangle OMC$ pois

$$\begin{cases} OC = OB & \text{caso especial} \\ O\widehat{N}B = C\widehat{M}O = 90^\circ \\ B\widehat{O}N = C\widehat{O}M \end{cases}$$

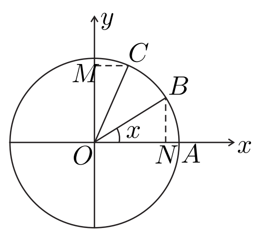
então $\operatorname{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ já que $\overline{OM} = -\overline{ON}$.

4. Simplificar a expressão $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}(-x)}$.

Solução

Vamos simplificar cada uma das funções trigonométricas da expressão, considerando $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.

$\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$



$\overset{\frown}{AC} = \dfrac{\pi}{2} - x$

Temos que $\triangle ONB \equiv \triangle OMC$.

Então $\overline{ON} = \overline{OM}$, daí $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

$\cos(\pi - x) = -\cos x$, já que $\pi - x \in 2^\circ$ quadrante

$\operatorname{tg}(-x) = \operatorname{tg}(360^\circ - x) = -\operatorname{tg} x$, já que $360^\circ - x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante.

Substituindo esses valores na expressão dada vem:

$$\frac{\cos x \cdot (-\cos x)}{-\operatorname{tg} x} = \frac{-\cos^2 x}{-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = +\frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}.$$

Exercícios propostos

1. Calcule:

   a) $\cos 150°$

   b) $\operatorname{tg} 210°$

   c) $\operatorname{sen} 240°$

   d) $\csc 300°$

2. Calcule $\operatorname{sen} 1920°$

3. Se $\cos x = \dfrac{3}{5}$, calcular $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

4. Calcule $x = \cos 20° + \cos 40° + \cos 60° + \ldots + \cos 180°$

5. Calcule o valor das expressões:

   a) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 60° + \operatorname{tg} 315°}{\operatorname{cotg}(-45°) + \cos 210°}$

   b) $y = \dfrac{\operatorname{sen} 45° \cdot \operatorname{tg} 45° \cdot \operatorname{cotg} 45°}{\cos 210° \cdot \sec 240° \cdot \csc 300°}$

6. Simplificar a expressão:

   a) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(2\pi - x) \cdot \cos(\pi - x)}{\operatorname{tg}(\pi - x)\operatorname{cotg}(2\pi - x)}$

   b) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{9\pi}{2}\right) - \cos\left(x + \dfrac{15\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}(7\pi - x)$

Gabarito

1. a) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ d) $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

2. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\dfrac{3}{5}$

4. $x = -1$

5. a) $7 - 4\sqrt{3}$ b) $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

6. a) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$ b) $\cos^2 x$

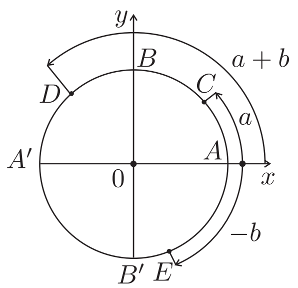
Aula 23 – Transformações

Funções Trigonométricas de arcos: soma; diferença; duplo; triplo; metade. Transformação em produto

Fórmula da Adição

Cosseno da Soma

Sejam C, D e E os pontos do ciclo associados aos números a, $a+b$ e $-b$, respectivamente. Em relação ao eixo cartesiano XOY as coordenadas desses pontos são:



$$C = (\cos a, \operatorname{sen} a)$$
$$D = (\cos(a+b), \operatorname{sen}(a+b))$$
$$E = (\cos b, -\operatorname{sen} b)$$
$$A = (1, 0)$$

Os arcos $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{EC}$ têm a mesma medida, portanto, as cordas AD e CE são iguais, então:

$$\begin{aligned}
d_{AD}^2 &= (x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2 = [\cos(a+b) - 1]^2 + [\operatorname{sen}(a+b) - 0]^2 \\
&= 2 - 2\cos(a+b) \\
d_{EC}^2 &= (x_C - x_E)^2 + (y_C - y_E)^2 = [\cos a - \cos b]^2 + [\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b]^2 \\
&= 2 - 2\cos a \cdot \cos b + 2 \cdot \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

Como $d_{AD} = d_{EC} \Rightarrow 2 - 2\cos a \cos b + 2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = 2 - 2\cos(a+b)$.

Daí $\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$.

Cosseno da Diferença

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos(a + (-b)) = \cos a \cdot \cos(-b) - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen}(-b) \\
&= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b
\end{aligned}$$

então $\boxed{\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$

Seno da Soma

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(a+b)\right) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-a\right)-b\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\cos b + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cdot\operatorname{sen} b\end{aligned}$$

então $\boxed{\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\cdot\cos b + \operatorname{sen} b\cdot\cos a}$

Seno da Diferença

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a+(-b)) = \operatorname{sen} a\cos(-b) + \operatorname{sen}(-b)\cos a$$

Como $\cos(-b) = \cos b$ e $\operatorname{sen}(-b) = -\operatorname{sen} b$ então

$$\boxed{\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a\cos b - \operatorname{sen} b\cos a}.$$

Tangente da Soma

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a}{\cos a\cos b - \operatorname{sen} a\ \operatorname{sen}\ b}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\cos a\cos b \neq 0$, vem

$$\boxed{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}}$$

Observação: a, b e $(a+b)$ devem ser diferentes de $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Tangente da Diferença

$$\operatorname{tg}(a-b) = \operatorname{tg}(a+(-b)) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(-b)}{1-\operatorname{tg} a\cdot\operatorname{tg}(-b)}$$

Como $\operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b$ temos

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a\operatorname{tg} b}}$$

Observação: a, b e $(a-b)$ devem ser diferentes de $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$

Cálculo de $\operatorname{cotg}(a+b)$

$$\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\cos(a+b)}{\operatorname{sen}(a+b)} = \frac{\cos a\cos b - \operatorname{sen} a\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a\cos b + \operatorname{sen} b\cos a}$$

Dividindo o numerador e o denominador por $\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\neq 0$, vem:

$$\boxed{\operatorname{cotg}(a+b) = \frac{\operatorname{cotg} a\operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}}$$

Observação: a, b e $(a+b)$ devem ser diferentes de $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Cotangente da Diferença

$$\operatorname{cotg}(a-b)=\operatorname{cotg}(a+(-b))=\frac{\operatorname{cotg}a\cdot\operatorname{cotg}(-b)-1}{\operatorname{cotg}a+\operatorname{cotg}(-b)}$$

Como $\operatorname{cotg}(-b)=-\operatorname{cotg}b$ temos

$$\boxed{\operatorname{cotg}(a-b)=\frac{\operatorname{cotg}a\cdot\operatorname{cotg}b+1}{\operatorname{cotg}b-\operatorname{cotg}a}}$$

Observação: a, b e $(a-b)$ devem ser diferentes de $k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Exercícios Resolvidos

1. Calcular

   a) $\cos 75°$

   b) $\operatorname{sen} 15°$

   Solução

   a) $$\begin{aligned}\cos 75° &= \cos(45°+30°)=\cos 45°\cos 30°-\operatorname{sen}45°\operatorname{sen}30°=\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\cos 75°=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

   b) $$\begin{aligned}\operatorname{sen}15° &= \operatorname{sen}(45°-30°)=\operatorname{sen}45°\cos 30°-\operatorname{sen}30°\cos 45°\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2. Calcular $\cos(a+b)$, sendo dado $\operatorname{sen}a=-\frac{3}{5}$ e $\cos b=-\frac{1}{3}$, sendo que $a\in 3^{\underline{o}}$ quadrante e $b\in 3^{\underline{o}}$ quadrante.

   Solução

   $1^{\underline{o}}$) Cálculo de $\cos a$

   $$\cos a=-\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 a}=-\frac{4}{5}$$

   $2^{\underline{o}}$) Cálculo de $\operatorname{sen} b$

   $$\operatorname{sen}b=-\sqrt{1-\cos^2 b}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

   $3^{\underline{o}}$) Cálculo de $\cos(a+b)$

   $$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b=-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\\ &=+\frac{4}{15}-\frac{6\sqrt{2}}{15}=\frac{4-6\sqrt{2}}{15}\end{aligned}$$

3. Sabendo que $\operatorname{tg} a = \dfrac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} b = -\dfrac{4}{5}$ com $b \in 4^{\underline{o}}$ quadrante. Calcular $\operatorname{tg}(a+b)$.

   Solução

   $1^{\underline{o}}$) $\cos b = +\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 b} = +\dfrac{3}{5}$

   $2^{\underline{o}}$) $\operatorname{tg} b = \dfrac{-\frac{4}{5}}{+\frac{3}{5}} = -\dfrac{4}{3}$

   $3^{\underline{o}}$) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)} = -\dfrac{6}{17}$

Exercícios Propostos

1. Determine o valor de:

   a) $\operatorname{sen} 75°$ b) $\cos 15°$ c) $\operatorname{tg} 15°$

2. Calcular $y = \operatorname{sen} 105° - \cos 75°$

3. Calcular $\operatorname{sen} x$, sabendo-se que $x+y = \dfrac{\pi}{4}$ e $\operatorname{sen} y = \dfrac{3}{5}$, $x \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.

4. Se $\operatorname{tg}(x+y) = 33$ e $\operatorname{tg} x = 3$, determine $\operatorname{tg} y$.

5. Sabendo que $\operatorname{sen} x = \dfrac{15}{17}$, $\operatorname{sen} y = -\dfrac{3}{5}$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ e $\pi < y < \dfrac{3\pi}{2}$.
   Calcular $\operatorname{sen}(x+y)$, $\cos(x+y)$ e $\operatorname{tg}(x+y)$

6. Se a e b são ângulos agudos e positivos, provar que:
   $$\operatorname{sen}(a+b) < \operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b.$$

Gabarito

1. a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ c) $2 - \sqrt{3}$

2. $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3. $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

4. 0,3

5. $\operatorname{sen}(x+y) = -\dfrac{84}{85}$, $\cos(x+y) = \dfrac{13}{85}$, $\operatorname{tg}(x+y) = -\dfrac{84}{13}$

6. Demonstração

Arco Duplo

Trata-se de obter as expressões das funções trigonométricas dos arcos da forma $2a$. É um caso particular das fórmulas de adição, é suficiente fazer $a = b$.

Cálculo de $\cos 2a$

$$\cos 2a = \cos(a + a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \Rightarrow \cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\boxed{\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

Cálculo de $\operatorname{sen} 2a$

$$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen}(a + a) = \operatorname{sen} a \cos a + \operatorname{sen} a \cos a \Rightarrow \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\boxed{\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a}$$

Cálculo $\operatorname{tg} 2a$

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg}(a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}}\ , \begin{cases} a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{e} \\ a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Arco Triplo

Trata-se de obter as expressões das funções trigonométricas dos arcos da forma $3a$.

Cálculo de $\cos 3a$

Sabemos que:

$$\cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a = \cos 2a \Rightarrow \cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \ \text{ e } \ \operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\begin{aligned} \text{Logo,}\quad \cos 3a &= \cos(2a + a) = \cos 2a \cos a - \operatorname{sen} 2a \operatorname{sen} a \\ &= (2\cos^2 a - 1)\cos a - 2\operatorname{sen}^2 a \cos a \\ &= 2\cos^3 a - \cos a - 2(1 - \cos^2 a)\cos a = 4\cos^3 a - 3\cos a \end{aligned}$$

Temos que $\boxed{\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a}$

Cálculo de $\operatorname{sen} 3a$

Sabemos que $\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$ pois $\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$ e $\cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} 3a &= \operatorname{sen}(2a + a) = \operatorname{sen} 2a \cos a + \operatorname{sen} a \cos 2a \\
&= 2\operatorname{sen} a \cos^2 a + (1 - 2\operatorname{sen}^2 a)\operatorname{sen} a \\
&= 2\operatorname{sen} a(1 - \operatorname{sen}^2 a) + (1 - 2\operatorname{sen}^2 a)\operatorname{sen} a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a
\end{aligned}$$

Temos que: $\boxed{\operatorname{sen} 3a = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a}$

Cálculo de $\operatorname{tg} 3a$

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} 3a &= \operatorname{tg}(2a + a) = \frac{\operatorname{tg} 2a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 2a \operatorname{tg} a} = \frac{\frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a} + \operatorname{tg} a}{1 - \frac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}\operatorname{tg} a} \\
&= \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}
\end{aligned}$$

$$\text{Daí } \boxed{\operatorname{tg} 3a = \frac{3\operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3\operatorname{tg}^2 a}}\,, \begin{cases} a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \text{e} \\ a \neq k\pi + \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Arco Metade

Consiste em relacionar as funções de um arco b com as funções do arco $\frac{b}{2}$.

Destacam-se os seguintes casos:

Dado $\cos b$, obter $\cos \frac{b}{2}$, $\operatorname{sen} \frac{b}{2}$ e $\operatorname{tg} \frac{b}{2}$.

Cálculo de $\cos \frac{b}{2}$

Sendo $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, fazendo $2a = b$ e daí $a = \frac{b}{2}$ temos:

$$\cos b = 2cos^2\frac{b}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{\cos \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos b}{2}}}$$

Cálculo de $\operatorname{sen} \frac{b}{2}$

Sendo $\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a$, fazendo $2a = b$ e daí $a = \frac{b}{2}$ temos:

$$\cos b = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{b}{2} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos b}{2}}}$$

Cálculo de $\operatorname{tg}\dfrac{b}{2}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{2}\right)}{\cos\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Daí $\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos b}{1+\cos b}},\ b\neq 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Observação:

Os sinais $\pm$ das expressões só tem sentido quando se conhece $\cos b$, sem conhecer b.

Dado $\operatorname{tg}\left(\dfrac{b}{2}\right)=t$**, obter** $\operatorname{sen} b$**,** $\cos b$ **e** $\operatorname{tg} b$

Cálculo de $\operatorname{tg} b$

$$\operatorname{tg}2a=\frac{2\operatorname{tg}a}{1-\operatorname{tg}^2 a},\ \text{fazendo } 2a=b\Rightarrow a=\frac{b}{2}.$$

Logo, $\operatorname{tg} b=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}\Rightarrow \operatorname{tg} b=\dfrac{2t}{1-t^2};\ \begin{cases} b\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}\\ \text{e}\\ b\neq 2k\pi+\pi\end{cases}\ (k\in\mathbb{Z})$

Cálculo de $\operatorname{sen} b$

Sendo $\operatorname{sen}2a=2\operatorname{sen}a\cos a$, fazendo $2a=b$ e portanto $a=\dfrac{b}{2}$, concluímos que $\operatorname{sen} b=2\operatorname{sen}\dfrac{b}{2}\cos\dfrac{b}{2}$;

$$\operatorname{sen} b=\frac{2\operatorname{sen}\frac{b}{2}\cos^2\frac{b}{2}}{\cos\frac{b}{2}};\quad (b\neq 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z})$$

$$\operatorname{sen} b=\frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{\sec^2\frac{b}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{b}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{b}{2}}$$

Portanto, $\operatorname{sen} b=\dfrac{2t}{1+t^2};\ (b\neq 2k\pi+\pi,\ k\in\mathbb{Z})$

Cálculo de $\cos b$

$$\cos b=\frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{2t}{1-t^2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\quad \left(b\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right)$$

Exercícios Resolvidos

1. Calcular $\operatorname{sen} 2a$ e $\cos 2a$, sendo dado $\cos a = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, $\quad a \in 1^{\underline{o}}$ quadrante.

Solução

$1^{\underline{o}}$) Cálculo de $\operatorname{sen} a$

$$\operatorname{sen} a = +\sqrt{1-\cos^2 a} = \frac{2}{3}$$

$2^{\underline{o}}$) Cálculo de $\operatorname{sen} 2a$

$$\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$$

$3^{\underline{o}}$) Cálculo de $\cos 2a$

$$\cos 2a = 1 - 2\operatorname{sen}^2 a = 1 - 2 \cdot \frac{4}{9} = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

2. Simplificar a expressão $y = \dfrac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x + \cos 3x}$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Solução

$$\begin{aligned}
y &= \frac{3\operatorname{sen} x - 4\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x - (4\cos^3 x - 3\cos x)} = \frac{3\operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}^3 x}{3\cos x - 3\cos^3 x} \\
y &= \frac{3\operatorname{sen} x(1-\operatorname{sen}^2 x)}{3\cos x(1-\cos^2 x)} = \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow y = \operatorname{cotg} x
\end{aligned}$$

3. Calcular $\cos 2x$, sabendo que $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3}$ e $x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante.

Solução

$$\text{Temos} \begin{cases} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \\[2ex] \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

então $\dfrac{1}{3} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} \Rightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} \Rightarrow \cos x = \dfrac{4}{5}$, já que $x \in 4^{\underline{o}}$ quadrante.

Mas $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 - 1 = \dfrac{7}{25} \Rightarrow \cos 2x = \dfrac{7}{25}$.

4. Calcular $\cos 22°30'$

Solução

Temos que $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

Façamos $\dfrac{x}{2} = 22°30' \Rightarrow x = 45°$.

Então $\cos 22°30' = +\sqrt{\dfrac{1+\cos 45°}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

5. Provar que $\dfrac{2\,\text{sen}\,x}{\cos 3x + \cos x} = \sec 2x \cdot \text{tg}\,x$

   Solução

   De fato,

$$\begin{aligned}\frac{2\,\text{sen}\,x}{\cos 3x + \cos x} &= \frac{2\,\text{sen}\,x}{4\cos^3 x - 3\cos x + \cos x} = \frac{2\,\text{sen}\,x}{4\cos^3 x - 2\cos x}\\ &= \frac{\text{sen}\,x}{2\cos^3 x - \cos x} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x(2\cos^2 x - 1)}\\ &= \frac{\text{sen}\,x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \sec 2x \cdot \text{tg}\,x\end{aligned}$$

6. Calcular $\text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$, sabendo-se que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

   Solução

   Sabemos que $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \dfrac{2t}{1+t^2} + \dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 1$, $t = \text{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

   Vem: $2t + 1 - t^2 = 1 + t^2 \Rightarrow 2t^2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = 1$.

   Daí $\boxed{\text{tg}\,\dfrac{x}{2} = 0 \text{ ou } \text{tg}\,\dfrac{x}{2} = 1}$

Exercícios Propostos

1. Se $\text{sen}\,a = \dfrac{4}{5}$, calcular: a) $\text{sen}\,2a$ b) $\cos 2a$
2. Se $\text{sen}\,a - \cos a = \dfrac{1}{5}$, calcule $\text{sen}\,2a$
3. Se $y = 3 + \text{sen}\,x\cos x$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$. Determine o maior valor que y pode assumir.
4. Calcular $y = \text{sen}^2\dfrac{\pi}{12} - \cos^2\dfrac{\pi}{12} + \text{tg}\,\dfrac{\pi}{3} + \text{tg}\,\dfrac{14\pi}{3}$.
5. Se $\text{tg}\,x = m$ e $\text{tg}\,2x = 3m$, $m > 0$. Determine o ângulo x.
6. Se $\text{tg}\,a = \dfrac{1}{7}$ e $\text{sen}\,b = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$, calcular $\text{tg}(a + 2b)$.
7. Sabendo que $\cos 36° = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, determine $\cos 72°$.
8. Se $\text{sen}\,x \cdot \cos x = 0,04$, determine $\text{cotg}^2\,2x$.
9. Sabendo que $\text{sen}\,\theta = \dfrac{3}{5}$ e $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$, calcule
$$A = 25\,\text{sen}\,\theta + 10\,\text{sen}\,\frac{\theta}{2}$$
10. Simplificar $y = \dfrac{6 + 2\cos 4x}{1 - \cos 4x}$ em função de $\text{tg}\,x = t$.

Gabarito

1. a) $\operatorname{sen} 2a = \pm\dfrac{24}{25}$ b) $\cos 2a = -\dfrac{7}{25}$
2. $\dfrac{24}{25}$
3. $\dfrac{7}{2}$
4. $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
5. $180°k + 30°,\ k \in \mathbb{Z}$
6. 1
7. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
8. $\dfrac{9}{16}$
9. $15 + 3\sqrt{10}$
10. $y = \dfrac{1+t^4}{t^2}$

Transformação em Produto

O problema consiste em transformar certas expressões, que aparecem soma de funções trigonométricas de um ou mais arcos, em expressões onde aparecem apenas produto de funções trigonométricas dos mesmos arcos de outros arcos com eles relacionados.

Já sabemos que

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad &\text{(i)}\\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \quad &\text{(ii)}\\
\operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a \quad &\text{(iii)}\\
\operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a \quad &\text{(iv)}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)+(ii)} & \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a \cos b & \text{(v)}\\
\text{(i)}-\text{(ii)} & \cos(a+b) - \cos(a-b) = -2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b & \text{(vi)}\\
\text{(iii)+(iv)} & \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} a \cos b & \text{(vii)}\\
\text{(iii)}-\text{(iv)} & \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b) = 2\operatorname{sen} b \cos a & \text{(viii)}
\end{array}$$

As expressões assim obtidas chamam-se Fórmulas de Reversão ou Fórmulas de Werner.

Fazendo $\begin{cases} a+b=p \\ a-b=q \end{cases}$ e resolvendo este sistema vem $\begin{aligned} a &= \dfrac{p+q}{2} \\ b &= \dfrac{p-q}{2} \end{aligned}$

Das fórmulas de reversão vem:

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(ix)} \\
\cos p - \cos q &= -2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(x)} \\
\text{sen}\, p + \text{sen}\, q &= 2\,\text{sen}\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(xi)} \\
\text{sen}\, p - \text{sen}\, q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p-q}{2}\right) && \text{(xii)}
\end{aligned}$$

Temos que

$$\text{tg}\, p \pm \text{tg}\, q = \frac{\text{sen}\, p}{\cos p} \pm \frac{\text{sen}\, q}{\cos q} = \frac{\text{sen}\, p \cos q \pm \cos p\, \text{sen}\, q}{\cos p \cdot \cos q}$$

Daí

$$\begin{aligned}
\text{tg}\, p + \text{tg}\, q &= \frac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cos q} && \text{(xiii)} \\
\text{tg}\, p - \text{tg}\, q &= \frac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cos q} && \text{(xiv)}
\end{aligned}$$

De forma similar temos:

$$\begin{aligned}
\text{cotg}\, p + \text{cotg}\, q &= \frac{\text{sen}(p+q)}{\text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q} && \text{(xv)} \\
\text{cotg}\, p - \text{cotg}\, q &= -\frac{\text{sen}(p-q)}{\text{sen}\, p \cdot \text{sen}\, q} && \text{(xvi)}
\end{aligned}$$

As fórmulas de (ix) a (xvi) chamam-se Fórmulas de Transformações em Produto ou Fórmulas de Prostaférese.

Exercícios Resolvidos

1. Transformar em produto: $\text{sen}\, p - \cos p$

Solução

$$\begin{aligned}
\text{sen}\, p - \cos p &= \text{sen}\, p - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - p\right) = 2\cos\left(\frac{p + \frac{\pi}{2} - p}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{p - \left(\frac{\pi}{2} - p\right)}{2}\right) \\
&= 2\cos\frac{\pi}{4} \cdot \text{sen}\left(\frac{2p - \frac{\pi}{2}}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sen}\left(p - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\,\text{sen}\left(p - \frac{\pi}{4}\right)
\end{aligned}$$

2. Transformar em produto: $1 + \operatorname{tg} a$

   Solução

   $$1+\operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos\frac{\pi}{4}\cos a} = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\sqrt{2}\cos a} = \frac{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+a\right)}{\cos a}$$

3. Calcular o valor da expressão $y = 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\cdot\cos\frac{5\pi}{12}$.

   Solução

   Como $2\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$

   $$y = 2\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} = \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{5\pi}{12}\right)$$
   $$= \operatorname{sen}\pi + \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

   Logo, $y = \frac{1}{2}$

4. Simplificar $y = \dfrac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x}{\cos 2x - \cos 4x}$

   Solução

   $$y = \frac{\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x}{\cos 2x - \cos 4x} = \frac{2\operatorname{sen}\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}}{-2\operatorname{sen}\frac{2x+4x}{2}\operatorname{sen}\frac{2x-4x}{2}}$$
   $$y = \frac{2\operatorname{sen} 3x\cos(-x)}{-2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen}(-x)} = \frac{2\operatorname{sen} 3x\cos x}{2\operatorname{sen} 3x\operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x$$
   $$\Rightarrow y = \operatorname{cotg} x$$

5. Determine a soma $\operatorname{sen} 75^\circ - \cos 75^\circ$

   Solução

   $$\operatorname{sen} 75^\circ - \cos 75^\circ = \operatorname{sen} 75^\circ - \operatorname{sen} 15^\circ = 2\cos\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\operatorname{sen}\frac{75^\circ-15^\circ}{2}$$
   $$= 2\cos 45^\circ\cdot\operatorname{sen} 30^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Exercícios Propostos

1. Simplificar $y = \dfrac{\cos 6x + \cos 4x}{\operatorname{sen} 6x - \operatorname{sen} 4x}$
2. Calcular $y = \cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$
3. Simplificar $\dfrac{\cos(a-3b) - \cos(3a-b)}{\operatorname{sen} 2a + \operatorname{sen} 2b}$
4. Transformar em produto: $y = \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x$
5. Calcular $y = \cos\dfrac{\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{8\pi}{12}$

6. Se a e b são ângulos complementares, $0 < a < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < b < \dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{\operatorname{sen} a + \operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} a - \operatorname{sen} b} = \sqrt{3}$, determine $\operatorname{sen} \dfrac{3a}{5} + \cos 3b$

7. Transformar em produto: $y = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 3x$

8. Calcular $y = \operatorname{tg} 9^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ$

Gabarito

1. $y = \operatorname{cotg} x$
2. $y = \dfrac{1}{8}$
3. $2 \operatorname{sen}(a - b)$
4. $y = 2 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos x$
5. $-\left(\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{8}\right)$
6. $\sqrt{2}$
7. $y = -\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{sen} 4x$
8. $y = 4$

Aula 24 – Equações Trigonométricas

Equações Fundamentais

Considere f e g duas funções trigonométricas. Resolver a equação trigonométrica $f(x) = g(x)$ significa determinar o conjunto S, denominado conjunto solução dos números r para os quais $f(r) = g(r)$ é uma sentença verdadeira.

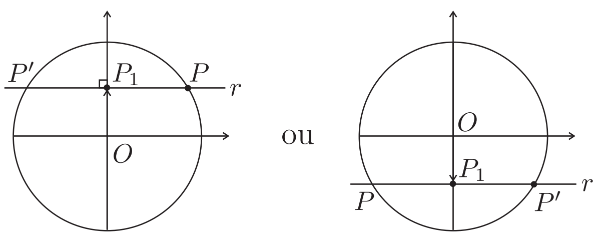
Quase todas as equações trigonométricas reduzem-se a uma das três equações seguintes:

1ª) $\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b$ 2ª) $\cos a = \cos b$ 3ª) $\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} b$

denominadas, por este motivo, equações fundamentais.

Equação do tipo $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$

Se $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta = \overline{OP_1}$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos senos no ponto P_1, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos.

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos senos, isto é, são suplementares.

Portanto

$$\boxed{\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}, \ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$.

   a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{10}$

   b) $\csc x = -2$

   c) $\operatorname{sen} 3x = 1$

   Solução

   a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{10} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{10} + 2k\pi \end{cases}$

   Temos a solução

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = \frac{9\pi}{10} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   b) $\csc x = -2$

   $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} = -2 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2} = \operatorname{sen} \dfrac{7\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

   Daí a solução

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;\text{ ou }\; x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

   c) $\operatorname{sen} 3x = 1 = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3}$

   A solução é

   $$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, que satisfazem a equação $4 \operatorname{sen}^4 x - 11 \operatorname{sen}^2 x + 6 = 0$.

   Solução

   $$4 \operatorname{sen}^4 x - 11 \operatorname{sen}^2 x + 6 = 0$$

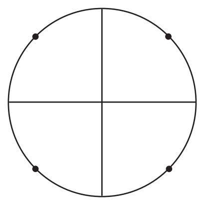
   Considere $\operatorname{sen}^2 x = y$, temos: $4y^2 - 11y + 6 = 0$

   $y = \dfrac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{8} \Rightarrow y = \begin{cases} 2 \\ \frac{3}{4} \end{cases}$

   Se $y = \operatorname{sen}^2 x = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$ (Falso, já que $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$)

   $y = \operatorname{sen}^2 x = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Resolvendo $\operatorname{sen} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, vem:



$$\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{3} \\ \quad \text{ou} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{3} = 2k\pi - \dfrac{2\pi}{3} \end{cases}$$

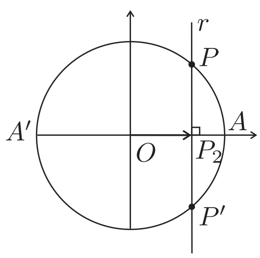
$$\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{4\pi}{3} \\ \quad \text{ou} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{4\pi}{3} = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Podemos escrever então que a solução S é:

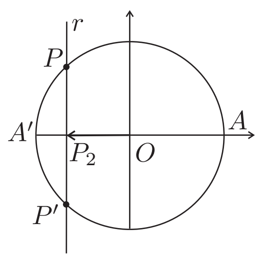
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Equação do Tipo $\cos a = \cos b$

Se $\cos\alpha = \cos\beta = OP_2$, então as imagens de α e β no ciclo estão sobre a reta r que é perpendicular ao eixo dos cossenos no ponto P_2, isto é, estão em P ou P'.



ou



Há portanto duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos.

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao eixo dos cossenos, isto é, são replementares.

Portanto

$$\boxed{\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$

a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{20}$

b) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3}$

c) $\cos 4x = -1$

Solução

a) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{20} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{20}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{20},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \cos x = \cos \dfrac{2\pi}{3}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

c) $\cos 4x = -1 \Rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Resolver a equação $2 - 2\cos x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$ em $\mathbb{R}$

Solução

$2 - 2\cos x = \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$

$2 - 2\cos x = \operatorname{sen} x \cdot \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Rightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$

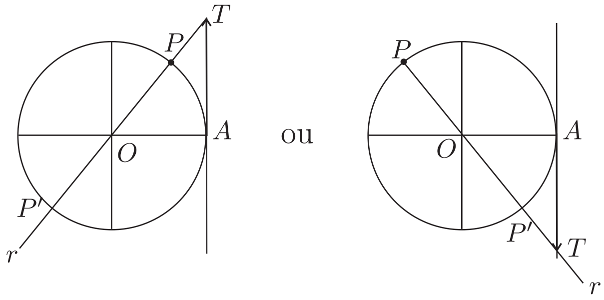
$\Rightarrow 2\cos x - 2\cos^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \cos^2 x - 2\cos x + 1 = 0$

$\cos x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2} \Rightarrow \cos x = \begin{cases} 1 \\ 1 \end{cases}$ Logo, $x = 2k\pi$.

$$S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$$

Equação do tipo $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$

Se $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = \overline{AT}$, então as imagens de α e β estão sobre a reta r determinada por O e T, isto é, estão em P ou P'.



Há, portanto, duas possibilidades:

1ª) α e β têm a mesma imagem, isto é, são côngruos.

2ª) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, isto é, são explementares.

Portanto

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ \alpha = \pi + \beta + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

Exercícios Resolvidos

1. Resolver as seguintes equações:

a) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 4x$

b) $\operatorname{tg} 3x = 1$

c) $\operatorname{tg} 4x = -\sqrt{3}$

Solução

a) $\operatorname{tg} 5x = \operatorname{tg} 4x \Rightarrow 5x = 4x + k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

b) $\operatorname{tg} 3x = 1 = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 3x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\operatorname{tg} 4x = -\sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3} \Rightarrow 4x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{4}$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2. Resolver a equação $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x$.

   Solução

   $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow 1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \operatorname{tg} x \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0$

   $\Rightarrow \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x - 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0$ ou $\operatorname{tg} x = 1$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Soluções de uma equação dentro de um certo intervalo

Quando tivermos resolvendo uma equação pertencente a um determinado intervalo I devemos fazer o seguinte procedimento:

1º) Resolvemos normalmente a equação, não tomando conhecimento do intervalo I até obtermos a solução geral.

2º) Obtida a solução geral, atribuímos a $k \in \mathbb{Z}$ todos os valores inteiros que acarretem as soluções estarem em I.

Exercícios Resolvidos

1. Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} 4x = \dfrac{1}{2}$

   Solução

   $\operatorname{sen} 4x = \dfrac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi]$

$$\operatorname{sen} 4x = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} 4x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ 4x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{24} + \dfrac{2k\pi}{4} \\ \quad \text{ou} \\ x = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{2k\pi}{4} \end{cases}$$

   Vamos calcular as soluções que pertencem ao intervalo $[0, 2\pi]$

   $k = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\pi}{24}, \quad x_2 = \dfrac{5\pi}{24}$

   $k = 1 \Rightarrow x_3 = \dfrac{13\pi}{24}, \quad x_4 = \dfrac{17\pi}{24}$

   $k = 2 \Rightarrow x_5 = \dfrac{25\pi}{24}, \quad x_6 = \dfrac{29\pi}{24}$

   $k = 3 \Rightarrow x_7 = \dfrac{37\pi}{24}, \quad x_8 = \dfrac{41\pi}{24}$

   $k = 4$ vamos achar $\dfrac{49\pi}{24}$ e $\dfrac{53\pi}{24}$

   Estas soluções não pertencem ao intervalo fechado de 0 a π.

$$S = \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}, \frac{41\pi}{24} \right\}$$

2. Achar as soluções de $\text{tg}\, 6x = \text{tg}\, 2x$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

   Solução

   $\text{tg}\, 6x = \text{tg}\, 2x,\ x \in [0, 2\pi]$

   $\Rightarrow 6x = 2x + k\pi \Rightarrow 4x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{4}$

   $$\begin{array}{lll} k = 0 \Rightarrow x = 0 & k = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} & k = 6 \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \\ k = 1 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} & k = 4 \Rightarrow x = \pi & k = 7 \Rightarrow x = \dfrac{7\pi}{4} \\ k = 2 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} & k = 5 \Rightarrow x = \dfrac{5\pi}{4} & k = 8 \Rightarrow x = 2\pi \end{array}$$

   Excluindo os valores $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$ para os quais não existem as tangentes de $6x$ e $2x$, vem:

   $$S = \left\{0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi\right\}$$

3. Encontre a soma das raízes da equação $\cos 2x = 0$ no intervalo $[0, \pi]$.

   Solução

   $\cos 2x = 0$

   Temos que $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2\, x$.

   Daí $\cos^2 x - \text{sen}^2\, x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0$

   Portanto, $2x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$ (Solução Geral).

   No intervalo $[0, \pi]$ temos as soluções:

   $k = 0 \Rightarrow x = 0\pi + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

   $k = 1 \Rightarrow x = \pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$

   Assim, a soma das raízes é $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} = \pi$

Equações Clássicas

Sugestões para resolver a equação: $a\, \text{sen}\, x + b \cos x = c \ \ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$

Método 1

Fazer mudança de variável

$\text{sen}\, x = u$ e $\cos x = v$ e resolvemos o sistema $\begin{cases} au + bv = c \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$

Calculando u e v, determinamos os possíveis valores de x.

Método 2

Fazendo $\dfrac{b}{a} = \operatorname{tg}\theta$, temos:

$a \operatorname{sen} x + b\cos x = c \Rightarrow \operatorname{sen} x + \dfrac{b}{a}\cos x = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} x + \operatorname{tg}\theta \cos x = \dfrac{c}{a}$

$\Rightarrow \operatorname{sen} x + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\cdot\cos x = \dfrac{c}{a} \Rightarrow \operatorname{sen} x\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cos x = \dfrac{c}{a}\cos\theta$

$\Rightarrow \operatorname{sen}(x+\theta) = \dfrac{c}{a}\cos\theta$, e daí calculamos $x+\theta$.

Método 3

Fazendo $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$, temos $\operatorname{sen} x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, então:

$a\operatorname{sen} x + b\cos x = c \Rightarrow a\cdot\dfrac{2t}{1+t^2} + b\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right) = c \Rightarrow 2at + b - bt^2 = c + ct^2$

$\Rightarrow (c+b)t^2 - 2at + c - b = 0$ e recaímos em uma equação de 2º grau em t. Observe que este método falha se $\pi + 2k\pi$ for solução da equação, caso em que a substituição $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2} = t$ não tem sentido.

Exercício Resolvido

1. Resolver a equação $3\cos x + \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 3$.

   Solução

   Vamos resolver esse exercício pelos três métodos.

   Método 1

   Fazendo $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, temos:

$$\begin{cases} 3v + \sqrt{3}u = 3 & (1) \\ u^2 + v^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

   De (1) vem: $u = \dfrac{3-3v}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{3}v$ (3)

   Substituindo (3) em (2) vem: $(\sqrt{3} - \sqrt{3}v)^2 + v^2 = 1$

   $3 - 6v + 3v^2 + v^2 = 1 \Rightarrow 4v^2 - 6v + 2 = 0 \Rightarrow 2v^2 - 3v + 1 = 0$

   $v = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} \qquad \Rightarrow v = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$

   Portanto, $u = 0$ ou $u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Existem, assim, duas possibilidades:

$$\cos x = 1, \quad \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi$$

   ou

$$\cos x = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Método 2

$3\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x=3 \Rightarrow \cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{sen}\,x=1 \Rightarrow \cos x+\mathrm{tg}\,30^{\mathrm{o}}\,\mathrm{sen}\,x=1$

$\Rightarrow \cos x+\dfrac{\mathrm{sen}\,30^{\mathrm{o}}}{\cos 30^{\mathrm{o}}}\,\mathrm{sen}\,x=1 \Rightarrow \cos 30^{\mathrm{o}}\cos x+\mathrm{sen}\,30^{\mathrm{o}}\,\mathrm{sen}\,x=\cos 30^{\mathrm{o}}$

$\Rightarrow \cos(30^{\mathrm{o}}-x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos(x-30^{\mathrm{o}})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow x-30^{\mathrm{o}}=360^{\mathrm{o}}k\pm 30^{\mathrm{o}}$

$x-30^{\mathrm{o}}=360^{\mathrm{o}}k+30^{\mathrm{o}} \Rightarrow x=360^{\mathrm{o}}k+60^{\mathrm{o}}$

ou

$x-30^{\mathrm{o}}=360^{\mathrm{o}}k-30^{\mathrm{o}} \Rightarrow x=360^{\mathrm{o}}k$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=2k\pi \ \text{ ou } \ x=2k\pi+\frac{\pi}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Método 3

Fazendo $tg\dfrac{x}{2}=t$, sabemos que $\mathrm{sen}\,x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ e $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, então:

$3\cos x+\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,x=3 \Rightarrow 3\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\sqrt{3}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}=3$

$\Rightarrow 3(1-t^2)+2\sqrt{3}t=3+3t^2 \Rightarrow 3-3t^2+2\sqrt{3}t=3+3t^2$

$6t^2-2\sqrt{3}t=0 \ \Rightarrow \ t=0 \text{ ou } t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Se $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{x}{2}=k\pi \Rightarrow x=2k\pi$

Se $\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \dfrac{x}{2}=k\pi+\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}$

$$S=\left\{x\in\mathbb{R} \mid x=2k\pi \ \text{ ou } \ x=2k\pi+\frac{x}{3},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Sugestão para resolver as equações

$$\sum_{i=1}^{m}\mathrm{sen}\,f_i(x)=0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{m}\cos f_i(x)=0$$

O método de resolução consiste em transformar a soma em produto e estudar as possibilidades do anulamento de cada fator.

1. Resolver as equações em $\mathbb{R}$

   a) $\mathrm{sen}\,7x+\mathrm{sen}\,5x=0$

   b) $\cos 6x+\cos 4x=0$

Solução

a) $\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 5x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 6x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 6x = 0$ ou $\cos x = 0$.

Se $\operatorname{sen} 6x = 0 \Rightarrow 6x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{6}$

Se $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{6} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) $\cos 6x + \cos 4x = 0 \Rightarrow 2\cos 5x \cdot \cos x = 0 \Rightarrow \cos 5x = 0$ ou $\cos x = 0$.

Se $\cos 5x = 0 \Rightarrow 5x = k\pi + \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{5} + \dfrac{\pi}{10}$

Se $\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \dfrac{\pi}{2}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{5} + \frac{\pi}{10} \text{ ou } x = k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Calcular $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x = 0$.

Solução

Vamos transformar $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x$ em produto

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 5x = 2\operatorname{sen} 3x \cos 2x$$

Daí $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 5x = 0 \Rightarrow 2\operatorname{sen} 3x \cos 2x + \operatorname{sen} 3x = 0$

$\Rightarrow \operatorname{sen} 3x(2\cos 2x + 1) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 3x = 0$ ou $2\cos 2x + 1 = 0$

Se $\operatorname{sen} 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi \Rightarrow x = \dfrac{k\pi}{3}$

Se $\cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow 2x = (2k+1)\pi \pm \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow x = \dfrac{(2k+1)\pi}{2} \pm \dfrac{\pi}{12}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sugestão para resolver a equação do tipo $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

Vamos usar a identidade $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1 - \dfrac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} \qquad (*)$

Vamos provar $(*)$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x &= (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - 2\left(\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} \end{aligned}$$

Temos então:

$$\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = a \Rightarrow 1 - \frac{\operatorname{sen}^2(2x)}{2} = a \Rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = 2 - 2a = 2(1-a)$$

Só existe solução se $0 \leq 2(1-a) \leq 1$, ou seja, $\dfrac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Exercício Resolvido

1. Resolver a equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$

   Solução

   Temos que $\operatorname{sen}^2 2x = 2\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = 1$. Portanto, $\operatorname{sen} 2x = \pm 1$. Então $2x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \pm \frac{\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Sugestão para resolver a equação do tipo $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = a \quad (a \in \mathbb{R})$

Vamos usar a identidade $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3\operatorname{sen}^2 2x}{4} \qquad (**)$

Vamos provar $(**)$

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)(\operatorname{sen}^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) =$$
$$= \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x - \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2 2x}{4} = 1 - \frac{3\operatorname{sen}^2 2x}{4}$$

Temos então

$$\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = a \Rightarrow 1 - \frac{3\operatorname{sen}^2 2x}{4} = a \Rightarrow \operatorname{sen}^2 2x = \frac{4-4a}{3}$$

Note que só existe relação se $0 \leq \dfrac{4-4a}{3} \leq 1$, ou seja, $\dfrac{1}{4} \leq a \leq 1$.

Exercício Resolvido

1. Resolver a equação $\operatorname{sen}^6 x + \cos^6 x = \dfrac{5}{8}$

   Solução

   Temos que $\operatorname{sen}^2 2x = \dfrac{4}{3}(1-a) = \dfrac{4}{3}\left(1 - \dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{2}$.

   Portanto, $\operatorname{sen} 2x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Então $2x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{4}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercícios Propostos

1. Resolva as seguintes equações trigonométricas:

   a) $\sec x = 2$

   b) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{1}{2}$

   c) $\operatorname{sen}(\pi - x) = 0$

   d) $\operatorname{tg}\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

2. Calcule $x \in \mathbb{R}$ nas equações trigonométricas:

   a) $\sec x = \cos x$

   b) $\cos x = \sqrt{3}\operatorname{sen} x$

3. Resolva as seguintes equações:

   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = 0$

   b) $\cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$

   c) $\cos 2x - \cos^2 x = -1$

   d) $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \sec x \cdot \csc x$

   e) $\operatorname{tg}^4 x - 4\operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$

   f) $\cos 2x = 3\operatorname{sen} x + 2$

4. Achar as soluções de $\operatorname{sen} x - \cos x = 1$ para $0 \leq x \leq 2\pi$.

5. Resolva a equação $2^{\operatorname{sen} x} = (4^{\operatorname{sen} x})^{\cos x}$, sabendo que $0^{\circ} < x < 360^{\circ}$.

6. Determine as soluções da equação $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = 1$, satisfazendo a condição $0 \leq x \leq 2\pi$.

7. Sendo $0 \leq x \leq 2\pi$, determine a soma das raízes da equação $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}(-x) = 0$.

8. Resolva as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

   a) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 6x = 0$

   b) $\operatorname{sen} 7x + \cos 3x = \cos 5x - \operatorname{sen} x$

9. Resolva a equação $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2$ em $\mathbb{R}$.

10. Resolva as seguintes equações:

    a) $\cos x + \cos^2 x = \dfrac{3}{4}, \quad -\pi < x < \pi$

    b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^3 x + \cdots = 1, \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2}$

Gabarito

1. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi + \dfrac{4\pi}{3} \text{ ou } x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = \pi(1-k),\ k \in \mathbb{Z}\}$

   d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

2. a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = (2k+1)\pi \pm \dfrac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

   c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi + \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   f) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = k\pi - (-1)^k\dfrac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

4. $S = \left\{\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

5. $S = \{60^{\text{o}},\ 180^{\text{o}},\ 300^{\text{o}}\}$

6. $S = \{0,\ \pi,\ 2\pi\}$

7. $\dfrac{7\pi}{2}$

8. a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = 2k\pi \pm \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\dfrac{(2k+1)}{3}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

   b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{k\pi}{4} \text{ ou } x = \dfrac{k\pi}{2} - \dfrac{\pi}{8},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

9. $\emptyset$

10. a) $S = \left\{-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right\}$

    b) $\dfrac{\pi}{6}$

Aula 25 – Funções Circulares Inversas

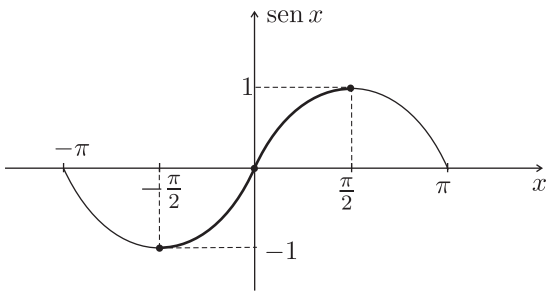
Função Arco-Seno

A função seno, isto é, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{sen} x$ não é sobrejetora, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = 2$, ou seja $f(x) = 2$.

A função seno não é injetora, pois $\dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{3\pi}{4}$ e $\operatorname{sen} \dfrac{\pi}{4} = \operatorname{sen} \dfrac{3\pi}{4}$, ou seja, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ e $\dfrac{\pi}{4} \neq \dfrac{3\pi}{4}$.

Para acharmos a função inversa da função seno, esta deve ser bijetora.

Consideremos então a função seno restrita ao intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ e com contradomínio $[-1,\ 1]$, ou seja, $g : \left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1]$ tal que $g(x) = \operatorname{sen} x$.



Note que :

(1) g é sobrejetora, já que $\forall y,\ y \in [-1,\ 1]$, existe $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que $\operatorname{sen} x = y$

(2) g é injetora, já que no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{sen} x_1 \neq \operatorname{sen} x_2$.

Logo de (1) e (2) g é bijetora, daí g admite inversa que vamos denotar por g^{-1} e vamos denominar de arco-seno.

g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e associa a cada $x \in [-1, 1]$, $\exists y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tal que $y = \operatorname{arcsen} x$.

Portanto $y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$

Gráfico da função arco-seno

Temos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

Gráfico de $g(x) = \operatorname{sen} x$

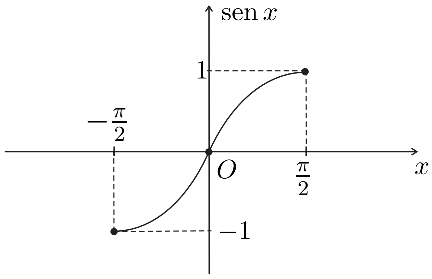
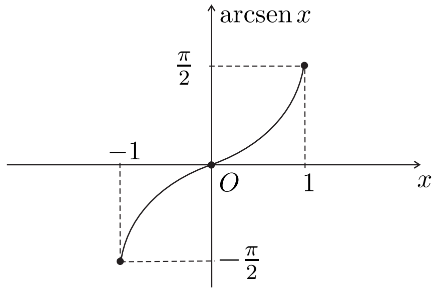


Gráfico de $g^{-1}(x) = \operatorname{arcsen} x$



Exercícios Resolvidos

1. Calcular α tal que $\alpha = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   Solução

   Temos $\alpha = \operatorname{arcsen} \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$

2. Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{1}{4}\right)$

   Solução

   Fazendo $\operatorname{arcsen} \dfrac{1}{4} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{4}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

   Daí $\cos \alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

3. Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{2}{5} + \operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13}\right)$

   Solução

   Considere $\operatorname{arcsen} \dfrac{2}{5} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2}{5}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$

   $\Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$

   Considere $\operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13} = \beta \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \dfrac{12}{13}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \beta \leq \dfrac{\pi}{2}$ então $\cos \beta = \sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \dfrac{5}{13}$

   Temos que $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{2}{5} + \operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13}\right) = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \dfrac{\sqrt{21}}{5} \cdot \dfrac{5}{13} - \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{12}{13} = \dfrac{\sqrt{21}}{13} - \dfrac{24}{65} = \dfrac{5\sqrt{21} - 24}{65}$

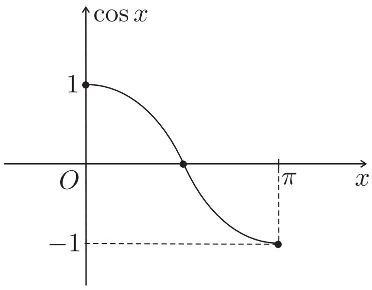
Função arco-cosseno

A função cosseno, isto é, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \cos x$ não é sobrejetora, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 4$, ou seja, $f(x) = 4$.

A função cosseno não é injetora, pois $\dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{5\pi}{3}$ e $\cos\dfrac{\pi}{3} = \cos\dfrac{5\pi}{3}$, ou seja, $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = f\left(\dfrac{5\pi}{3}\right)$ e $\dfrac{\pi}{3} \neq \dfrac{5\pi}{3}$.

Para acharmos a função inversa da função cosseno, esta deve ser bijetora.

Consideremos então a função cosseno restrita ao intervalo $[0, \pi]$ e com contradomínio $[-1, 1]$, ou seja, $g : [0, \pi] \to [-1, 1]$ tal que $g(x) = \cos x$.



Note que:

(1) g é sobrejetora, já que $\forall y,\ y \in [-1, 1]$, existe $x \in [0, \pi]$ tal que $\cos x = y$.

(2) g é injetora, já que no intervalo $[0, \pi]$ se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \cos x_1 \neq \cos x_2$.

Logo de (1) e (2) temos que g é bijetora, daí g admite inversa que vamos denotar por g^{-1} e vamos denominar de arco-cosseno.

g^{-1} tem domínio $[-1, 1]$, contradomínio $[0, \pi]$ e associa a cada $x \in [-1, 1]$, $\exists y \in [0, \pi]$ tal que $y = \arccos x$.

Portanto $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ e $0 \leq\ y \leq \pi$

Gráfico da função arco-cosseno

Temos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

Gráfico de $g(x) = \cos x$

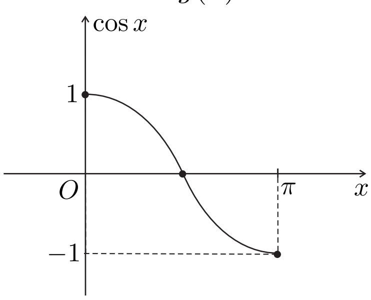
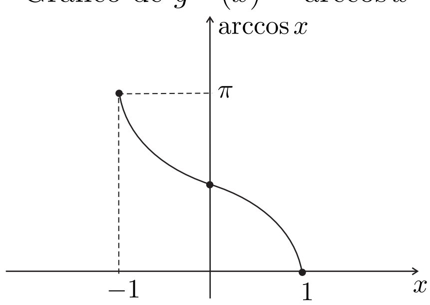


Gráfico de $g^{-1}(x) = \arccos x$



Exercícios Resolvidos

1. Calcular α tal que $\alpha = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Solução

   Temos que $\alpha = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $0 \le \alpha \le \pi$ então $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

2. Calcular $\operatorname{tg}\left(\arccos \dfrac{3}{4}\right)$.

   Solução

   Fazendo $\arccos \dfrac{3}{4} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ e $0 \le \alpha \le \pi$.

   Daí $\operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{1 - \dfrac{9}{16}} = +\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

   $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

   Logo $\operatorname{tg}\left(\arccos \dfrac{3}{4}\right) = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$

3. Calcular $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{7}{25} - \arccos \dfrac{12}{13}\right)$

   Solução

   Considere $\operatorname{arcsen} \dfrac{7}{25} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{7}{25}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

   Considere $\arccos \dfrac{12}{13} = \beta \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{12}{13}$ e $0 \le \beta \le \pi$.

   Temos que $\cos\alpha = +\sqrt{1 - \dfrac{49}{625}} = +\dfrac{24}{25}$ e $\operatorname{sen}\beta = \sqrt{1 - \dfrac{144}{169}} = \dfrac{5}{13}$

   Daí $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \dfrac{24}{25} \cdot \dfrac{12}{13} + \dfrac{7}{25} \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{323}{325}$

   Logo $\cos\left(\operatorname{arcsen} \dfrac{7}{25} - \arccos \dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{323}{325}$

Função arco-tangente

A função tangente, isto é, $f : \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \operatorname{tg} x$ é sobrejetora, pois $\forall y \in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ e $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\operatorname{tg} x = y$.

A função f não é injetora, pois $0 \neq \pi$ e $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg}\pi$.

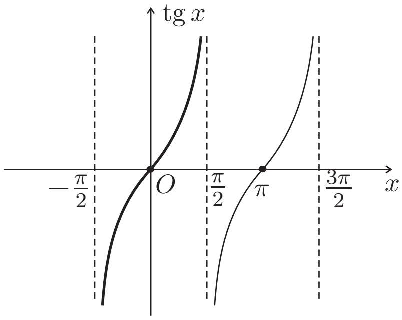
Para acharmos a função inversa da função tangente, esta deve ser bijetora.

Consideremos então a função tangente restrita ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e com contradomínio $\mathbb{R}$, isto é, $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \operatorname{tg} x$.

Note que:

(1) g é sobrejetora

(2) g é injetora, pois no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, a função tangente se $x_1,\ x_2 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow \operatorname{tg} x_1 \neq \operatorname{tg} x_2$.



Logo de (1) e (2) g é bijetora, daí g admite inversa que vamos denotar por g^{-1} e vamos denominar de arco-tangente.

g^{-1} tem domínio $\mathbb{R}$, contradomínio $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e associa a cada $x \in \mathbb{R}$, $\exists y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tal que $y = \operatorname{arctg} x$.

Portanto $y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

Gráfico da função arco-tangente

Temos que os gráficos de duas funções inversas entre si são simétricas em relação à reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º qaudrantes.

Gráfico de $g(x) = \operatorname{tg} x$

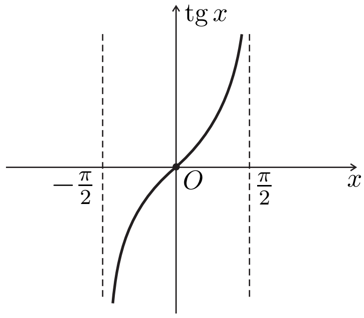
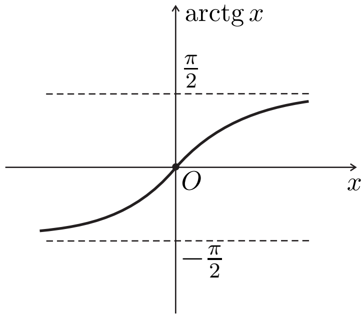


Gráfico de $g^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$



Exercícios Resolvidos

1. Determine α tal que $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3}$

   Solução

   Temos que $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

   Então $\alpha = \frac{\pi}{6}$

2. Calcular $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}\right)$

   Solução

   Fazendo $\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5} = \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5}$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \dfrac{\pi}{2}$.

   Então $\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \dfrac{3}{5}$ e $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$

   Fazendo $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} = \beta \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{4}$ e $\beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   Temos que $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{4}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}\right) = \operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\frac{4}{3}-\frac{1}{4}}{1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \dfrac{13}{16}$

3. Provar a igualdade $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

   Solução

   Consideremos $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2},\ \beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}$

   Então $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{2},\ \alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{3},\ \beta \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

   Temos que $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = \dfrac{\frac{3+2}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{6}{5} = 1$

   Logo $\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$

   Então, $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$

Exercícios Propostos

1. Determinar y tal que $y = \operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

2. Calcular $y = \operatorname{sen}\left[\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2} + \operatorname{arcsen}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

3. Encontre a solução da equação $\operatorname{arcsen}x = 2\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{2}$

4. Resolver a equação: $\operatorname{arcsen}x = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}x\right)$

5. Determine o valor de $\operatorname{arcsen}\left(\cos\dfrac{33\pi}{5}\right)$

6. Calcular $\cos\left(3 \cdot \operatorname{arcsen} \dfrac{12}{13}\right)$

7. Calcular $\cos\left(\dfrac{1}{2} \cdot \arccos \dfrac{7}{25}\right)$

8. Calcular $\operatorname{tg}\left(2 \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{5}\right)$

9. Detemine o número de soluções da equação $\operatorname{arcsen} \sqrt{x} + \arccos \sqrt{x} = \dfrac{\pi}{2}$

10. Calcular $y = \operatorname{tg}[\operatorname{arcsen}(-0,6)]$

Gabarito

1. $-\dfrac{\pi}{6}$

2. $y = 1$

3. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

4. $x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

5. $-\dfrac{\pi}{10}$

6. $-\dfrac{2035}{2197}$

7. $\dfrac{4}{5}$

8. $\dfrac{5}{12}$

9. infinitas soluções

10. $-\dfrac{3}{4}$

Aula 26 – Inequações Trigonométricas

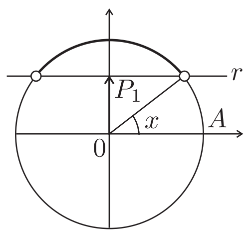
Os casos mais comuns de inequações trigonométricas são:

$$\left.\begin{array}{lll} 1^{\underline{o}})\ \operatorname{sen} x > m & 3^{\underline{o}})\ \cos x > m & 5^{\underline{o}})\ \operatorname{tg} x > m \\ 2^{\underline{o}})\ \operatorname{sen} x < m & 4^{\underline{o}})\ \cos x < m & 6^{\underline{o}})\ \operatorname{tg} x < m \end{array}\right. , \quad m \in \mathbb{R}$$

Esses 6 tipos são denominados inequações fundamentais.

Inequação do tipo $\operatorname{sen} x > m,\ m \in \mathbb{R}$

Para resolver inequação do tipo $\operatorname{sen} x > m$, procedemos da seguinte maneira: marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1 tal que $\overline{OP_1} = m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo dos senos. As imagens dos números reais x tais que $\operatorname{sen} x > m$ estão na interseção do ciclo com o semi plano situado acima de r.



Determinamos então os intervalos que x pode pertencer, tomando o cuidado de partir de A e percorrer o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta, descrevendo assim os intervalos que satisfazem o problema.

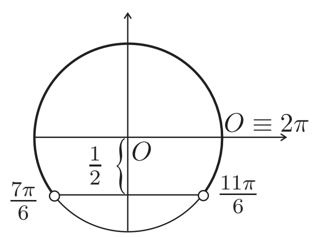
Exercícios resolvidos

1. Resolver a inequação $\operatorname{sen} x > -\dfrac{1}{2}$

   Solução

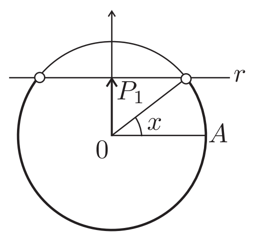
   Temos que

$$\left\{\begin{array}{c} 0 + 2k\pi < x < 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} \\ \text{ou} \\ \dfrac{11\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \end{array}\right. , \ k \in \mathbb{Z}$$



Inequação do tipo $\operatorname{sen} x < m,\ m \in \mathbb{R}$

Para resolver inequação do tipo $\operatorname{sen} x < m$, procedemos da seguinte maneira: marcamos sobre o eixo dos senos o ponto P_1, tal que $\overline{OP_1} = m$. Traçamos por P_1 a reta r perpendicular ao eixo dos senos. As imagens dos números reais x tais que $\operatorname{sen} x < m$ estão na interseção do ciclo com o semi-plano situado abaixo de r.



Determinamos assim os intervalos que x pode pertencer, a partir de A e percorrendo o ciclo no sentido anti-horário até completar uma volta.

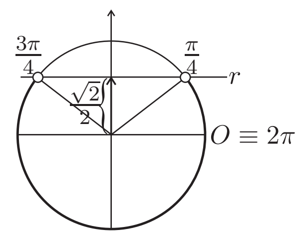
Exercícios resolvidos

1. Resolver a inequação $\operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Solução

   Temos que

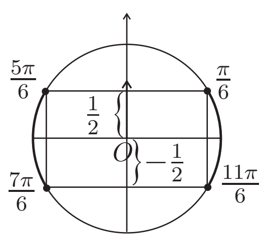
$$\begin{cases} 0 + 2k\pi < x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \qquad\text{ou} \\ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < 2\pi + 2k\pi \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$



2. Resolver a inequação $|\operatorname{sen} x| \leq \dfrac{1}{2}$

   Solução

$$|\operatorname{sen} x| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \operatorname{sen} x \leq \frac{1}{2}$$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + 2\pi \text{ ou } 0 + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. Determinar os valores de $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\operatorname{sen} 3x > 0$

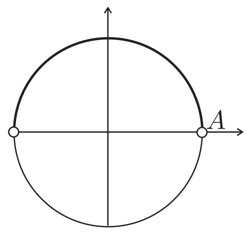
Solução

Fazendo $3x = y$, temos $\operatorname{sen} y > 0$

$\Rightarrow 2k\pi < y < 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$

Como $x = \dfrac{y}{3}$, resulta:

$\dfrac{2k\pi}{3} < x < \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}$



Mas $x \in [0, 2\pi]$ então temos que $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$

$k = 0 \Rightarrow 0 < x < \dfrac{\pi}{3}$

ou

$k = 1 \Rightarrow \dfrac{2\pi}{3} < x < \pi$

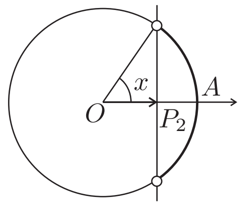
ou

$k = 2 \Rightarrow \dfrac{4\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{2\pi}{3} < x < \pi \text{ ou } \frac{4\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3} \right\}$$

Inequação do tipo $\cos x > m,\ m \in \mathbb{R}$

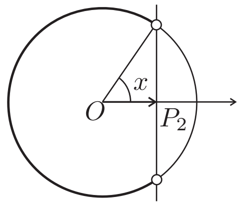
Este tipo de inequação se resolve da seguinte maneira: marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $\overline{OP_2} = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo dos cossenos. As imagens dos reais x tais que $\cos x > m$ estão na interseção do ciclo com o semi-plano situado à direita de r.



Para finalizar, descreveremos os intervalos que convém ao problema.

Inequação do tipo $\cos x < m, \;\; m \in \mathbb{R}$

Este tipo de inequação se resolve da seguinte maneira: marcamos sobre o eixo dos cossenos o ponto P_2 tal que $\overline{OP_2}$ tal que $\overline{OP_2} = m$. Traçamos por P_2 a reta r perpendicular ao eixo dos cossenos. As imagens dos reais x tais que $\cos x < m$ estão na interseção do ciclo com o semi-plano situado à esquerda de r.

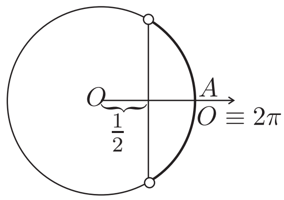


Para finalizar, descreveremos os intervalos que convém ao problema.

Exercícios Resolvidos

1. Resolver a inequação: $\cos x > \dfrac{1}{2}$

   Solução



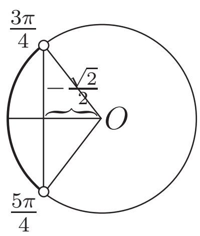
   Temos que $2k\pi \leq x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$ ou $\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi + 2\pi, \;\; k \in \mathbb{Z}$

2. Resolver a inequação $\cos x < -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   Solução

   Temos que

   $$2k\pi + \frac{3\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{4}, \;\; k \in \mathbb{Z}$$



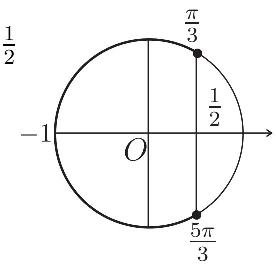
3. Resolver $\cos 2x + \cos x \leq 0$

Solução

$$\cos 2x + \cos x \leq 0 \Rightarrow \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + \cos x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 + \cos x \leq 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 \leq 0$$

$$\cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \quad \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = -1 \\ \frac{-1-3}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3} \right\}$$

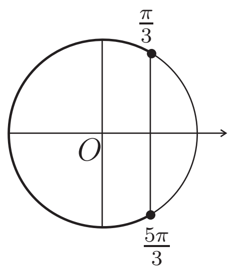
4. Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\cos 4x \leq \dfrac{1}{2}$

Solução

Considere $4x = y \Rightarrow \cos y \leq \dfrac{1}{2}$

Temos que:

$$\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$



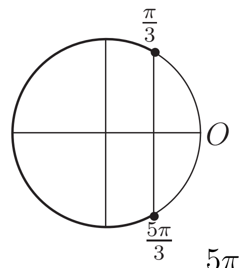
Como $x = \dfrac{y}{4}$, resulta:

$$\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$$

Mas $x \in [0, 2\pi]$ então só interessam as soluções em que $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{5\pi}{12} \\ \text{ou} \\ k = 1 \Rightarrow \dfrac{7\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{11\pi}{12} \\ \text{ou} \\ k = 2 \Rightarrow \dfrac{13\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{17\pi}{12} \\ \text{ou} \\ k = 3 \Rightarrow \dfrac{19\pi}{12} \leq x \leq \dfrac{23\pi}{12} \end{cases}$$

5. Resolver a inequação: $2^{\cos x} \leq \sqrt{2}$ se $x \in [0, \pi]$



Solução

$2^{\cos x} \leq 2^{\frac{1}{2}}$, como $2 > 1 \Rightarrow \cos x \leq \dfrac{1}{2}$

Daí $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \dfrac{5\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Como $x \in [0, \pi]$, temos que $k = 0$ e será $\dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$. Note que $\dfrac{5\pi}{3} > \pi$.

$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \right\}$

6. Resolver a inequação $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\cos x - 1} > 0$ se $x \in [0, \pi]$

Solução

Considere a inequação dada $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{\cos x - 1} > 0$ se $x \in [0, \pi]$.

Seja $\cos x = a$.

Temos: $\dfrac{2a^2 + a - 1}{a - 1} > 0$

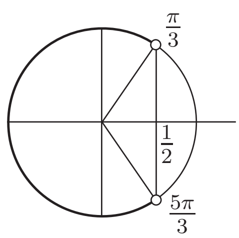
Resolvendo vem: $2a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \begin{cases} \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1-3}{4} = -1 \end{cases}$

$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

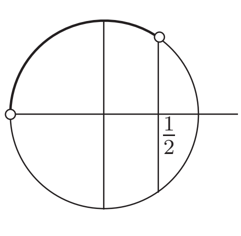
Temos então $-1 < a < +\dfrac{1}{2}$ ou $a > 1$, ou seja, $-1 < \cos x < \dfrac{1}{2}$ ou $\cos x > 1$

Mas não existe $x \notin \mathbb{R} \mid \cos x > 1$

Vamos então resolver a inequação: $-1 < \cos x < \dfrac{1}{2}$



Mas $x \in [0, \pi]$ então a solução no gráfico é:

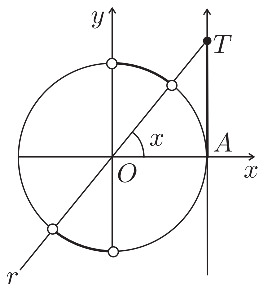


Temos então que a solução é:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \pi \right\}$$

Inequação do tipo $\operatorname{tg} x > m,\ m \in \mathbb{R}$

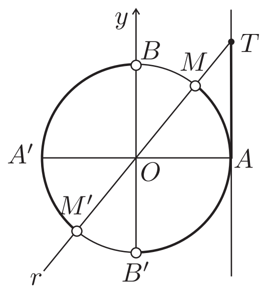
Este tipo de inequação se resolve da seguinte maneira: marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T, tal que $\overline{AT} = m$. Traçamos a reta $r = OT$. As imagens das reais x tais que $\operatorname{tg} x > m$ estão na interseção do ciclo com o ângulo $r\hat{O}y$.



Para finalizar, descreveremos os intervalos que convém ao problema.

Inequação do tipo $\operatorname{tg} x < m,\ m \in \mathbb{R}$

Este tipo de inequação se resolve da seguinte maneira: marcams sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $\overline{AT} = m$. Traçamos a reta $r = OT$. As imagens das reais x , tais que $\operatorname{tg} x < m$, estão na interseção do ciclo com o ângulo $y\hat{O}r$.



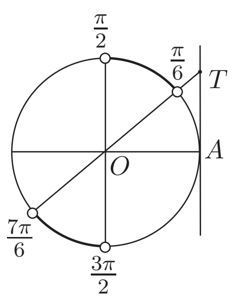
Para finalizar descreveremos os intervalos que convém ao problema.

Exercícios Resolvidos

1. Resolver a inequação $\operatorname{tg} x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Solução

Temos que



$$\begin{cases} 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6} < x < 2k\pi + \dfrac{3\pi}{2} \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}$$

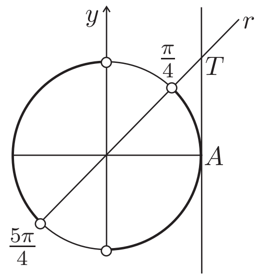
que podem ser escritas:

$$S = \left\{ x \mid k\pi + \frac{\pi}{6} < x < k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Resolver a inequação $\operatorname{tg} x < 1$

   Solução

   Temos que



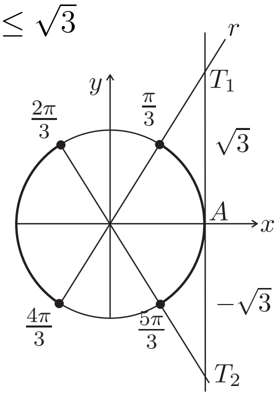
$S = \Big\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + 0 \leq x < 2k\pi + \dfrac{\pi}{4}$ ou $2k\pi + \dfrac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \dfrac{5\pi}{4}$ ou $2k\pi + \dfrac{3\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Big\}$

3. Resolver a inequação $|\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3}$

   Solução

   $|\operatorname{tg} x| \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq \operatorname{tg} x \leq \sqrt{3}$

   Temos então que:



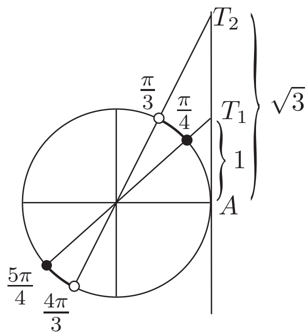
$\Big\{ x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + 0 \leq x \leq 2k\pi + \dfrac{\pi}{3}$ ou $2k\pi + \dfrac{2\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \dfrac{4\pi}{3}$ ou $2k\pi + \dfrac{5\pi}{3} \leq x < 2k\pi + 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Big\}$

4. Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $1 \leq \operatorname{tg} 3x < \sqrt{3}$

   Solução

   Considere $3x = y \Rightarrow 1 \leq \operatorname{tg} y < \sqrt{3}$

   Temos que:



$k\pi + \dfrac{\pi}{4} \leq y < k\pi + \dfrac{\pi}{3}$, como $x = \dfrac{y}{3}$, vem

$\dfrac{k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{12} \leq x < \dfrac{k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}$

Mas $x \in [0, 2\pi]$, então só interessam as soluções em que: $k = 0$ ou $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$ ou $k = 4$ ou $k = 5$.

$k = 0 \Rightarrow \dfrac{\pi}{12} \leq x < \dfrac{\pi}{9}$

$k = 1 \Rightarrow \dfrac{5\pi}{12} \leq x < \dfrac{4\pi}{9}$

$k = 2 \Rightarrow \dfrac{9\pi}{12} \leq x < \dfrac{7\pi}{9}$

$k = 3 \Rightarrow \dfrac{13\pi}{12} \leq x < \dfrac{10\pi}{9}$

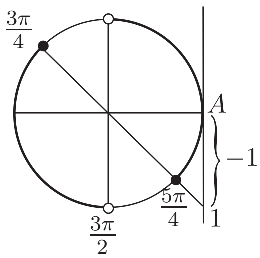
$k = 4 \Rightarrow \dfrac{17\pi}{12} \leq x < \dfrac{13\pi}{9}$

$k = 5 \Rightarrow \dfrac{21\pi}{12} \leq x < \dfrac{16\pi}{9}$

5. Determinar $x \in [0, \pi]$ tal que $\operatorname{tg} x \geq -1$

Solução

Considere a inequação: $\operatorname{tg} x > -1,\ x \in [0, \pi]$



Note que $x \in [0, \pi] \Rightarrow \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \dfrac{3\pi}{4} \leq x \leq \pi \right\}$

Exercícios Propostos

1. Resolver as inequações abaixo:

a) $\operatorname{sen} x \geq 0$

b) $|\operatorname{sen} x| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos x \leq \dfrac{1}{2}$

d) $|\cos x| > \dfrac{5}{3}$

2. Resolver a inequação $\operatorname{sen} 3x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ se $x \in [0, 2\pi]$.

3. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ existe $\log_2(2 \operatorname{sen} x - 1)$?

4. Resolver a inequação em $\mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x + \cos x < 1$.

5. Determinar $x \in [0, 2\pi]$ tal que $\dfrac{\cos x}{\cos 2x} \leq 1$.

6. Determinar no conjunto dos números reais o domínio de $y = \sqrt{\dfrac{4\operatorname{sen}^2 x - 1}{\cos x}}$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

7. Resolver a inequação em $\mathbb{R}$, $-\sqrt{3} < \operatorname{tg} x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

8. Resolver a inequação $\operatorname{tg}^2 2x \leq \operatorname{tg} 2x$, $x \in [0, 2\pi]$.

9. Resolver a inequação $\operatorname{sen} x > \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$.

10. Resolver a inequação em $\mathbb{R}$, $\operatorname{tg}^2 x - (\sqrt{3} - 1)\operatorname{tg} x - \sqrt{3} < 0$.

11. Resolver a inequação $\operatorname{sen}^2 x < 2\operatorname{sen} x$, $x \in [0, 2\pi]$.

12. Resolver a inequação em $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{\cos^2 x} < 2\operatorname{tg} x$.

13. Resolver a inequação $|\cos x| \geq \operatorname{sen} x$, $x \in [0, 2\pi]$.

14. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sen} x > \dfrac{1}{2}$ e $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$.

15. Resolver a inequação $|\operatorname{sen} x| > |\cos x|$, $x \in [0, \pi]$.

16. Resolver a inequação $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 > 1$, $x \in [0, 2\pi]$

17. Resolver a inequação $\operatorname{sen} 2x \cdot \left(\sec^2 x - \dfrac{1}{3}\right) \leq 0$, $x \in [0, 2\pi]$.

18. Se $0 \leq \alpha \leq \pi$, para todo x real, $x^2 + x + \operatorname{tg}\alpha > \dfrac{3}{4}$ então

    a) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$

    b) $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

    c) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{3\pi}{4}$

    d) $\alpha = \dfrac{3\pi}{4}$

    e) não existe α nestas condições

Gabarito

1. a) $\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \pi\}$

   b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \text{ ou } 2k\pi + \frac{5\pi}{4} < x < 2k\pi + \frac{7\pi}{4}\right\}$

   c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ ou } 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \leq x \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{3}\right\}$

   d) $S = \emptyset$

2. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2\pi}{9} \leq x \leq \frac{7\pi}{9} \text{ ou } \frac{8\pi}{9} \leq x \leq \frac{12\pi}{9} \text{ ou } \frac{14\pi}{9} \leq x \leq 2\pi \text{ ou } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{9}\right\}$

3. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}\right\}$

4. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{\pi}{2} < x < 2k\pi + 2\pi\right\}$

5. $\left\{x \mid x = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{4} < x \leq \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} \text{ ou } \frac{4\pi}{3} \leq x < \frac{7\pi}{4} \text{ ou } x = 2\pi\right\}$

6. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{11\pi}{6}\right\}$

7. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi \leq x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ ou } 2k\pi + \frac{2\pi}{3} < x \leq 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{3} + 2k\pi < x < 2k\pi + \pi\right\}$

8. $\left\{x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{8} \text{ ou } \pi \leq x \leq \frac{9\pi}{8} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{13\pi}{8} \text{ ou } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{8}\right\}$

9. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}\right\}$

10. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

11. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \pi\}$

12. $\emptyset$

13. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi\right\}$

14. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 2k\pi + \frac{\pi}{6} < x \leq 2k\pi + \frac{\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

15. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$

16. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right\}$

17. $\left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < \dfrac{\pi}{2} \text{ ou } \pi \leq x < \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

18. b