Matemática Discreta – AD2 – 2007/2

Observações: Caro tutor, aqui estão as soluções comentadas da AD2, referente as aulas 14–20 do Módulo 1.

Ao elaborar a avaliação procurei escolher questões cujas soluções envolvem o cálculo de probabilidades, por aplicação da definição, das técnicas de contagem e das regras básicas.

Nada impede que, ao resolver as questões, o aluno apresente soluções alternativas que você, tutor, considere mais interessantes do que as que eu estou fornecendo. Quando este for o caso, use seu bom senso para redistribuir os pontos, sem ofender o critério de correção, de modo a prestigiar a iniciativa do aluno.

Se você tiver alguma dúvida sobre como proceder ou quizer fazer alguma sugestão ou observação, por favor, entre em contato pelo email petrucio@cos.ufrj.br.

Conteúdo abordado:

Espaço amostral, *Eventos*, *Cálculo de probabilidades*, *Cálculo de probabilidades por meio de técnicas de contagem*, *Probabilidade do evento complementar*, *Regra da adição.*

Soluções comentadas:

1. Um número é escolhido ao acaso no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, de números naturais e os seguintes eventos são considerados: ser múltiplo de 2; ser múltiplo de 3; ser múltiplo de 2 e 3; ser múltiplo de 2 ou 3; não ser múltiplo nem de 2 nem de 3.

   (a) (0,5) Determine o espaço amostral Ω deste experimento;

   (b) (0,5) Defina cada um dos eventos acima na notação $\{x \in \Omega : P(x)\}$;

   (c) (2,5) Calcule a probabilidade de cada um dos eventos definidos ocorrerem.

   Solução:

   (a) O espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

   (b) Os eventos acima podem ser definidos do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
A &= \{x \in \Omega : x \text{ é múltiplo de } 2\};\\
B &= \{x \in \Omega : x \text{ é múltiplo de } 3\};\\
C &= \{x \in \Omega : x \text{ é múltiplo de } 2 \text{ e } x \text{ é múltiplo de } 3\};\\
D &= \{x \in \Omega : x \text{ é múltiplo de } 2 \text{ ou } x \text{ é múltiplo de } 3\};\\
E &= \{x \in \Omega : x \text{ não é múltiplo de } 2 \text{ e } x \text{ não é múltiplo de } 3\}.
\end{aligned}
$$

   (c) Observe que $n(\Omega) = 100$, $C = A \cap B$, $D = A \cup B$ e $E = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$.

   - *Cálculo de* $P(A)$: De cada dois elementos consecutivos de Ω um é múltiplo de 2 e o outro não. Assim, temos que $n(A) = \dfrac{100}{2} = 50$. Logo, $P(A) = \dfrac{50}{100}$.
   - *Cálculo de* $P(B)$: Observe que os múltiplos de 3 em Ω pertencem ao conjunto $\Omega' = \{1, 2, 3, \ldots, 99\}$. De cada três elementos consecutivos de Ω' um é múltiplo de 3 e os outros não. Assim, temos que $n(B) = \dfrac{99}{3} = 33$. Logo, $P(B) = \dfrac{33}{100}$.
   - *Cálculo de* $P(C)$: Observe que x é múltiplo de 2 e x é múltiplo de 3 se, e somente se, x é múltiplo de 6. Os múltiplos de 6 em Ω pertencem ao conjunto $\Omega' = \{1, 2, 3, \ldots, 96\}$. De cada seis elementos consecutivos de Σ' um é múltiplo de 6 e o outro não. Assim, temos que $n(C) = \dfrac{96}{6} = 16$. Logo, $P(C) = \dfrac{16}{100}$.

- *Cálculo de* $P(D)$: Como $A \cap B = \emptyset$, pela Regra dos Eventos Mutuamente Exclusivos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Logo, $P(D) = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100}$.
- *Cálculo de* $P(E)$: Pela Regra da Probabilidade do Evento Complementar, $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$. Logo, $P(E) = 1 - \frac{67}{100} = \frac{33}{100}$.

---

2. Um grupo é constituído de seis homens e quatro mulheres. Três pessoas são selecionadas ao acaso, neste grupo, sem reposição, e os seguintes eventos são considerados: as três pessoas são mulheres; ao menos duas pessoas são mulheres.

(a) (1,0) Determine o espaço amostral Ω deste experimento;

(b) (0,5) Defina cada um dos eventos acima na notação $\{x \in \Omega : P(x)\}$;

(c) (1,0) Calcule a probabilidade de cada um dos eventos definidos ocorrerem.

Solução:

Considere o conjunto $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, m_1, m_2, m_3, m_4\}$ com 10 elementos, sendo seis homens e quatro mulheres.

(a) O espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{X \subseteq U : n(X) = 3\}$, formado pelos subconjuntos de três pessoas selecionadas ao acaso, em U, sem reposição. Note que os elementos de Ω são conjuntos.

(b) Os eventos acima podem ser definidos por:

$$A = \{X \in \Omega : \text{ todos os elementos de } X \text{ são mulheres}\};$$
$$D = \{X \in \Omega : \text{ ao menos dois dos elementos de } X \text{ são mulheres}\}.$$

Note que cada eventos é um conjunto de conjuntos.

(c) Temos que $n(\Omega) = C(10, 3) = 120$.

- *Cálculo de* $P(A)$: Para formar um elemento de A, podemos executar uma única tarefa:

  $$t_1 : \text{ formar um subconjunto com 3 elementos do conjunto} \{m_1, m_2, m_3, m_4\}.$$

  Assim, temos que $n(A) = C(4, 3)$. Logo, a probabilidade de que as três pessoas selecionadas sejam mulheres é $P(A) = \frac{C(4,3)}{C(10,3)}$.
- *Cálculo de* $P(D)$: Considere o evento

  $$B = \{X \in \Omega : \text{ exatamente dois dos elementos de } X \text{ são mulheres}\}.$$

  Observe que $D = A \cup B$. Como $A \cap B = \emptyset$, pela Regra dos Eventos Mutuamente Exclusivos, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Assim, calculando $P(B)$, o problema está resolvido.

  Para formar um elemento de B, podemos executar duas tarefas:

  $$t_1 : \text{ formar um subconjunto com 2 elementos do conjunto} \{m_1, m_2, m_3, m_4\};$$
  $$t_2 : \text{ escolher um elemento do conjunto} \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}.$$

  Assim, temos que $n(B) = C(4, 2)$. Logo, $P(B) = \frac{C(4,2)}{C(10,3)} \times 6$.

  Finalmente, $P(D) = \frac{C(4,3)}{C(10,3)} + 6 \times \frac{C(4,2)}{C(10,3)}$.

---

3. (3,0) Um grupo é constituído de dez pessoas, entre elas Carol e Leo. As pessoas do grupo são dispostas, ao acaso, em uma ordenação linear e os seguintes eventos são considerados: Carol e Leo estão lado a lado, na ordenação; existe ao menos uma pessoa entre Carol e Leo, na ordenação; existe exatamente uma pessoa entre Carol e Leo, na ordenação.

   (a) (0,5) Descreva o espaço amostral Ω deste experimento;

   (b) (3,5) Calcule as probabilidades dos eventos considerados acima ocorrem.

   Solução:

   Considere o conjunto $U = \{P_1, P_2, \ldots, P_8, C, L\}$ com 10 elementos, dentre elas C (Carol) e L (Leo).

   (a) O espaço amostral é o conjunto Ω de todas as permutações dos elementos de U.

   Os eventos acima podem ser definidos por:

$$
\begin{aligned}
A &= \{p \in \Omega : C \text{ e } L \text{ são elementos consecutivos de } p\};\\
B &= \{p \in \Omega : C \text{ e } L \text{ não são elementos consecutivos de } p\};\\
C &= \{p \in \Omega : \text{entre } C \text{ e } L, \text{ em } p, \text{ existe exatamente um elemento de } U\}.
\end{aligned}
$$

   Note que C é um subconjunto próprio de B.

   (b) Temos que $n(\Omega) = 10!$ e $B = A^c$.

   - *Cálculo de* $P(A)$: Para formar um elemento de A, podemos executar duas tarefas:

$$
\begin{aligned}
t_1 &: \text{ formar uma ordenação linear com } C \text{ e } L;\\
t_2 &: \text{ formar uma permutação com as pessoas } P_1, \ldots, P_8\\
& \text{ e a ordenação linear formada em } t_1.
\end{aligned}
$$

     A tarefa t_1 pode ser executada de $P(2) = 2!$ maneiras. A tarefa t_2 pode ser executada de $P(9) = 9!$ maneiras. Logo, pelo PM, temos um total de $2! \times 9!$ elementos em A. Assim, $P(A) = \dfrac{2! \times 9!}{10!}$.

   - *Cálculo de* $P(B)$: Pela Regra da Probabilidade do Evento Complementar, $P(A^c) = 1 - P(A)$. Logo, $P(B) = 1 - \dfrac{2! \times 9!}{10!}$.

   - *Cálculo de* $P(C)$: Para formar um elemento de C, podemos executar quatro tarefas:

$$
\begin{aligned}
t_1 &: \text{ escolher uma das pessoas } P_1, \ldots, P_8;\\
t_2 &: \text{ formar uma ordenação linear com } C \text{ e } L;\\
t_3 &: \text{ formar uma permutação com as pessoas não escolhidas em } t_1\\
& \text{ e a ordenação linear formada em } t_2.\\
t_4 &: \text{ inserir a pessoa escolhida em } t_1 \text{ entre } C_1 \text{ e } C_2, \text{ na ordenação.}
\end{aligned}
$$

     A tarefa t_1 pode ser executada de 8 maneiras. A tarefa t_2 pode ser executada de $P(2) = 2!$ maneiras. A tarefa t_3 pode ser executada de $P(8) = 8!$ maneiras. A tarefa t_4 pode ser executada de 1 maneira. Logo, pelo PM, temos um total de $8 \times 2! \times 8! \times 1$ elementos em C. Assim, $P(C) = \dfrac{8 \times 2! \times 8!}{10!}$.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF