

Observações: Caro aluno, aqui está o EP5, referente as aulas 10 e 11 do Módulo 1. Nestas aulas você continuará o seu aprendizado das *técnicas básicas de contagem*. Como já enfatizamos, o conteúdo apresentado nestas aulas é muito importante, tanto por ser *básico* quanto por ser *útil*, isto é:

estes conteúdos fazem parte do conhecimento básico que todo estudante de matemática deve possuir.

Por isso, se esforce ao máximo para entender as explicações e exemplos e resolva o máximo de exercícios que você puder.

Conteúdo:

Este EP5 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
 - alguns comentários sobre os textos das aulas;
 - alguns comentários sobre os exercícios propostos;
 - alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.
-

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aulas 10 e 11 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O conceito de combinação de n elementos tomados r a r ;
 - Como calcular o número total de combinações de n elementos tomados r a r ;
 - A relação entre combinação e subconjunto;
 - Como calcular o número total de subconjuntos de r elementos de um conjunto com n elementos;
 - Como calcular o número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos.
-

Sobre a Aula 9:

Assim como permutações e arranjos, combinações são configurações básicas que ocorrem na resolução de muitos problemas de contagem. Para compreender bem o conceito de combinação e aprender a contá-las, observe as relações entre permutações, arranjos e combinações que aparecem nas páginas 93 e 94, bem como a relação entre combinação e subconjunto que aparece nas páginas 104 e 105.

- **Página 91:** Quanto as configurações básicas, já estudamos: *arranjos com repetições*, que podem ser contados diretamente pelo uso do PFC; *arranjos sem repetições*, que são simplesmente chamados de *arranjos* e podem ser contados diretamente pelo PFC ou por aplicação da fórmula na Página 74; *permutações sem repetições*, que são simplesmente chamadas *permutações* e podem ser contadas diretamente pelo PFC ou por aplicação da fórmula na Página 68; e *permutações com repetições*, que podem ser contadas pela fórmula na Página 83.

Nas Aulas 10 e 11 vamos estudar *combinações sem repetições*.

- **Página 91:** Em combinatória de contagem, a palavra *combinação* é reservada para referência a configurações que envolvem a seleção de r objetos, dentre n objetos dados, de maneira que nem a ordem nem repetições são levadas em conta.
- **Página 91 e em tudo o que segue:** Nas Aulas 10 e 11, em todas as explicações, enunciados e exemplos, sempre que os autores fazem referência ao fato de que na seleção de objetos considerada a ordem não é levada em conta, deve-se também acrescentar a restrição de que os objetos selecionados são dois a dois distintos.
- **Página 94:** No Exemplo 61, os autores estão assumindo que todos os jogadores são polivalentes, ou seja, que cada jogador do time pode jogar em todas as posições.
- **Página 96:** No parágrafo explicando a correspondência entre resultados e escolhas deveria estar escrito $\{m_1, m_3, m_5\}$ ao invés de $\{x_1, x_3, x_5\}$.

Sobre a Aula 11:

- **Página 101:** $C(n, r)$ denota o número de combinações de n elementos tomados r a r e não as combinações.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 10: todos os exercícios, exceto o 7.
- Aula 11: todos os exercícios.

Alguns exercícios para fixação:

Observações: Estes exercícios propostos envolvem o conceito de combinação, que é o principal assunto tratado nas Aulas 10 e 11. O aspecto mais importante na resolução destes exercícios é que eles servem para você treinar o uso da *especificação de tarefas* na resolução de problemas de contagem. Observe que o Exercício 1 pode ser resolvido de, pelo menos, duas maneiras diferentes.

1. De quantas maneiras dez objetos podem ser separados em dois grupos contendo 4 e 6 objetos, respectivamente?
2. Um comitê consistindo de dois tutores e três coordenadores precisa ser formado de um total de cinco tutores — sendo dois à distância e três presenciais — e sete coordenadores — dentre eles, nosso querido coordenador de Álgebra 1. De quantas maneiras isto pode ser feito, se:
 - (a) Qualquer tutor e qualquer coordenador pode participar do comitê.
 - (b) O coordenador de Álgebra 1 deve fazer parte do comitê.
 - (c) Os tutores a distância fazem parte do comitê.
 - (d) Os tutores a distância não fazem parte do comitê.
 - (e) Nem os tutores a distância nem o coordenador de Análise fazem parte do comitê.

Soluções comentadas:

1. Observe que ao separar 4 objetos do grupo de 10 os outros 6 já estão automaticamente separados. Assim, temos um total de $C(10, 4) = 210$ maneiras de 10 objetos serem separados em dois grupos, um contendo 4 e o outro contendo 6 objetos.
Analogamente, separando inicialmente 6 objetos, obteremos um total de $C(10, 6) = 210$ maneiras.

2. (a) Cada comitê contendo dois tutores e três coordenadores pode ser formado se executamos as seguintes tarefas:

- t_1 : escolher dois tutores para fazer parte do comitê,
- t_2 : escolher três coordenadores para fazer parte do comitê

Escolher dois tutores num total de cinco é, simplesmente, tomar um subconjunto de 2 elementos do conjunto com 5 tutores. Analogamente, escolher três tutores num total de sete é, simplesmente, tomar um subconjunto de 3 elementos do conjunto com 7 coordenadores.

Assim, a primeira tarefa pode ser executada de $C(5, 2)$ maneiras; a segunda de $C(7, 3)$ maneiras. Logo, pelo PM, temos um total de $C(5, 2) \times C(7, 3)$ comitês.

- (b) Cada comitê contendo dois tutores e três coordenadores, sendo que um deles é o coordenador de MD, pode ser formado se executamos as seguintes tarefas:

- t_1 : escolher dois tutores para fazer parte do comitê,
- t_2 : escolher dois coordenadores, distintos do coordenador de MD, para fazer parte do comitê.

Escolher dois tutores num total de cinco é, simplesmente, tomar um subconjunto de 2 elementos do conjunto com 5 tutores.

Como os coordenadores devem ser escolhidos dentre os coordenadores que não são de MD, devemos escolher os dois coordenadores dentre os seis que não são de MD. Mas escolher dois coordenadores num total de seis é, simplesmente, tomar um subconjunto de 2 elementos do conjunto com 6 coordenadores.

Assim, a primeira tarefa pode ser executada de $C(5, 2)$ maneiras; a segunda de $C(6, 2)$ maneiras. Logo, pelo PM, temos um total de $C(5, 2) \times C(6, 2)$ comitês.

- (c) Cada comitê contendo dois tutores e três coordenadores, sendo que os dois tutores são os tutores à distância, pode ser formado se executamos as seguintes tarefas:

- t_1 : escolher dois tutores à distância para fazer parte do comitê,
- t_2 : escolher três coordenadores para fazer parte do comitê.

Como temos apenas dois tutores à distância para formar um comitê, a primeira tarefa consiste em escolher dois tutores no conjunto com dois tutores à distância. Escolher três coordenadores num total de sete é, simplesmente, tomar um subconjunto de 3 elementos do conjunto com 7 coordenadores.

Assim, a primeira tarefa pode ser executada de 1 maneira; a segunda de $C(7, 3)$ maneiras. Logo, pelo PM, temos um total de $1 \times C(7, 3) = C(7, 3)$ comitês.

- (d) e (e) Vamos deixar como um exercício —que *você deve, realmente, resolver*— a tarefa de escrever detalhadamente as soluções destes itens, segundo os modelos acima. As respostas são (d) $C(3, 2) \times C(7, 3)$ e (e) $C(3, 2) \times C(6, 3)$.