Álgebra Linear I

Resolução dos Exercícios Programados 5 – EP5

1. Verifique se os conjuntos de vetores do $\Re^3$ são subespaços vetoriais, justificando suas respostas.
   (a) O conjunto dos vetores u=(x,y,z) tais que z=x+y;
   (b) O conjunto dos vetores u=(x,y,z) tais que $z^2 = x^2 - y^2$;
   (c) O conjunto dos vetores u=(x,y,z) tais que $x \geq 0$;
   Solução.
   (a) S é subespaço. S não é vazio, (0,0, 0) pertence à S, pois,
   0 = 0 + 0.
   E as duas condições abaixo são satisfeitas.
   (i) Se (a, b, c) e (e, f, g) são elementos de S $\Rightarrow$
   c = a + b e g = e + f $\Rightarrow$ c + g = (a + e) + (b + f) $\Rightarrow$
   (a, b, c) + (e, f, g) = (a + e, b + f, c + g) é um elemento de S.
   (ii) Se (a, b, c) é um elemento de S e α um escalar,
   c = a + b e α.c = αa + αb, ou seja, (αa, αb, αc) é um elemento de S.
   (b) S não é subespaço.
   Pois, (1, 1, 0) e (-1, 1, 0) são elementos de S e a soma
   (1, 1, 0) + (-1, 1, 0) = (0, 2, 0) não é um elemento de S.
   (c) S não é subespaço.
   Pois, (1, 0, 0) é um elementos de S e o produto
   -1(1, 0, 0) = (-1, 0, 0) não é um elemento de S.

2. Escreva a matriz $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

   $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   Solução. Escreva E como combinação linear de A,B, C usando as incógnitas x, y e z: E = xA + yB + zC.

   $$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

   $$x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{bmatrix}$$

   Forma o sistema equivalente de equações fazendo os elementos correspondentes iguais entre si x=3, x + y = 1, x + 2z = 1, y – z = -1. Daí, y = -2 e z = -1. Como esses valores satisfazem à última equação, eles formam uma solução do sistema. Portanto, E = 3A - 2B – C.

3. Mostre que o plano xy, $W = \{(a,b,0); a,b \in \Re\}$, é gerado pelos vetores u=(2,-1,0) e v= (1, 3, 0).

Solução.
Faça (a,b,0) = xu + yv;
(a,b,0) = x(2,-1,0) + y(1,3,0)=(2x+y,-x+3y,0)
Temos o sistema $\begin{cases} 2x + y = a \\ -x + 3y = b \end{cases}$. Este sistema é consistente; logo, tem solução. Portanto, W é gerado por u e v.
(Observe que não é necessário resolver em relação a x e y; é apenas necessário saber que uma solução existe.)
Se quizermos expressar teríamos,
(a,b,0) = $\frac{3a-b}{7}$ (2,-1,0) + $\frac{2b+a}{7}$ (1,3,0).

4. Determine um conjunto de geradores para o subespaço $S = \{(x, y, z) \in \Re^3; 2x - 5y + 3z = 0\}$.
Solução.
Observe que um elemento de S é da forma
(x, y, $\frac{5y-2x}{3}$) = (x, 0, $\frac{-2x}{3}$)+(0,y, $\frac{5y}{3}$) = x(1,0, $\frac{-2}{3}$) + y(0,1, $\frac{5}{3}$), ou seja, é combinação linear dos vetores (1,0, $\frac{-2}{3}$) e (0,1, $\frac{5}{3}$). Então esses vetores geram S ou S é gerado pelo conjunto {(1,0, $\frac{-2}{3}$), (0,1, $\frac{5}{3}$)}. Podemos então escrever, S = [(1, 0, $\frac{-2}{3}$), (0,1, $\frac{5}{3}$)].