Matemática Discreta – EP6 – 2007/2

Observações: Observações: Caro aluno, aqui está o EP6, referente as aulas 12 e 13 do Módulo 1. Este EP6 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre o texto das aulas;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 12 e 13 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O Triângulo de Pascal;
- Propriedades básicas do Triângulo de Pascal;
- A relação entre o Triângulo de Pascal e a expansão das potências $(x+y)^n$;
- O Teorema Binomial.

Sobre a Aula 12:

- **Página 111:** No primeiro parágrafo, o que os autores queriam dizer é *sem ter que calcular os números binomiais* $C(n,r)$ *usando a fórmula* $C(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$. **Página 116:** Você não precisa estudar a **Demonstração da propriedade 5**.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Todos os exercícios apresentados nas Aulas 12 e 13 são essenciais. Você deve estudar detalhadamente todo o conteúdo e tentar resolver todos eles.
- Preste a máxima importância no Exemplo 74 da Aula 13 e no respectivo Exercício 8.

Alguns exercícios para fixação:

1. Resolver a equação $A(n,3) = 3C(n,4)$.
2. Calcule a e b, sabendo que
$$a^3 + C(3,1)a^2b + C(3,2)ab^2 + b^3 = 64$$
e que
$$a^5 - C(5,1)a^4b + C(5,2)a^3b^2 - C(5,3)a^2b^3 + C(5,4)ab^4 - b^5 = 32.$$
3. Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de $(x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{x})^{18}$.

4. (a) Desenvolva o binômio $(2-x)^4$.

   (b) Use o desenvolvimento obtido no item (a), fazendo $x = \dfrac{1}{100}$, para calcular $(1,99)^4$ com oito casas decimais.

Soluções comentadas:

1. Como $A(n,3) = \dfrac{n!}{(n-3)!}$ e $C(n,4) = \dfrac{n!}{(n-4)!4!}$, temos que $\dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{3n!}{(n-4)!4!}$. Simplificando temos, $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{3}{4!}$, ou seja, $n-3 = 4\times 2$ e daí $n = 11$.

2. Observe que, pela fórmula do Teorema Binomial:

$$a^3 + C(3,1)a^2b + C(3,2)ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

   e

$$a^5 - C(5,1)a^4b + C(5,2)a^3b^2 - C(5,3)a^2b^3 + C(5,4)ab^4 - b^5 = (a-b)^5.$$

   Assim, temos $(a+b)^3 = 64$ e $(a-b)^5 = 32$. Daí, obtemos $a+b = 4$ e $a-b = 2$. Finalmente, resolvendo o sistema linear, temos $a = 3$ e $b = 1$.

3. O termo geral do desenvolvimento de $(A-B)^n$ é dado por:

$$T_{i+1} = (-1)^i C(n,i) A^{n-i} B^i.$$

   No caso considerado, temos $n = 18$, $A = x^{-\frac{1}{2}}$ e $B = x^{\frac{1}{4}}$. Substituindo, temos:

$$\begin{array}{rcl} T_{i+1} & = & (-1)^i C(18,i)(x^{-\frac{1}{2}})^{18-i}(x^{\frac{1}{4}})^i \\ & = & (-1)^i C(18,i) x^{\frac{3i-36}{4}} \end{array}$$

   Como estamos procurando o termo independente de x, devemos ter $\dfrac{3i-36}{4} = 0$, ou seja $i = 12$. Logo, o termo procurado é $T_{13} = (-1)^{12}C(18,12) = C(18,12)$.

4. Esta caiu na AP3 do semestre passado. O item (a) é fácil. Você saberia resolver o item (b) a partir da dica: *Fazendo* $x = \dfrac{1}{100}$, *em (a), obtemos:* $(1,99)^4 = \left(\dfrac{199}{100}\right)^4 = \left(2 - \dfrac{1}{100}\right)^4 = \ldots$.

Qualquer sugestão ou observação que você queira fazer, por favor, entre em contato pelo email petrucio@cos.ufrj.br.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF