Álgebra Linear I

Resolução dos Exercícios Programados 4 – EP4

1. Dados u e v num espaço vetorial V, seja H = [u,v], o subespaço gerado por u e v. Mostre que H é um subespaço de V.

   Prova: O vetor nulo está em H, já que 0=0u+0v. Para mostrar que H é fechado com relação à soma de vetores, considere dois vetores arbitrários de H, r = au + bv e s = cu + dv. Pelas propriedades para o espaço vetorial V, r + s = (au + bv) + (cu + dv) = (a + c)u + (b + d)v . Portanto r + s está em H. Além disso, se c é um escalar, então mr = m(au + bv) = (ma)u + (mb)v o que mostra que cr está em H e H é fechado com relação à multiplicação por escalar. Portanto, H é um subespaço de V.

2. Para $n \geq 0$, o conjunto Π_n dos polinômios de grau menor ou igual a n consiste de todos os polinômios da forma $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$, onde os coeficientes $a_0, a_1, a_2 ... a_n$ e a variável *t* são números reais. O grau de *p* é a maior potência de *t*, cujo coeficiente seja diferente de zero. Se *p*(*t*) = $a_0 \neq 0$, o grau de *p* é zero. Se todos os coeficientes forem iguais a zero, *p* é chamado de polinômio nulo. Mostre que Π_n é um espaço vetorial.

   Prova: O polinômio nulo pertence a Π_n.

   Se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_n t^n$, então a soma p+q é definida por (p+q)(t) = p(t) + q(t)= $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + ... + (a_n + b_n)t^n$. O múltiplo escalar cp é o polinômio definido por (cp)(t) = cp(t) = $ca_0 + (ca_1)t + (ca_2)t^2 + ... + (ca_n)t^n$. Logo, p + q e cp são polinômios em Π_n, já que são polinômios de grau menor ou igual n. Observe que estas operações satisfazem as condições da definição de espaço vetorial, visto que seguem das propriedades dos números reais. É claro que o polinômio nulo atua como o vetor nulo e (-1)p age como o negativo de p. portanto Π_n é um espaço vetorial.

3. Determine se o conjunto dado é um subespaço vetorial de Π_n para um valor apropriado de n. Justifique sua resposta.

(a) Todos os polinômios da forma p(t) = at^2, com a em $\Re$.
(b) Todos os polinômios p(t) = a + t^2, com a em $\Re$.
(c) Todos os polinômios de com p(0)=0.
(d) Todos os polinômios de grau máximo 3, com os inteiros como coeficientes.

Solução.

(a) Sim, já que este conjunto é gerado por t^2.
(b) Não, pois o polinômio nulo não pertence a este conjunto.
(c) Sim. Este conjunto é não vazio(o polinômio nulo é um de seus elementos) e as operações de soma e multiplicação são fechadas neste conjunto.
(d) Não, o conjunto não é fechado em relação à multiplicação por escalares que não são inteiros.

4. Escreva a matriz $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Solução. Escreva E como combinação linear de A,B, C usando as incógnitas x, y e z: E = xA + yB + zC.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x \\ x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{bmatrix}$$

Forma o sistema equivalente de equações fazendo os elementos correspondentes iguais entre si x=3, x + y = 1, x + 2z = 1, y – z = -1. Daí, y = -2 e z = -1. Como esses valores satisfazem à última equação, eles formam uma solução do sistema. Portanto, E = 3A - 2B – C.

5. Seja *W* a união do primeiro e terceiro quadrantes do plano *xy*. Isto é, seja $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : xy \geq 0 \right\}$.

   (a) Se *v* pertence a W e *c* é um escalar qualquer, será que *cv* pertence a *W*? Por quê?

   (b) Determine vetores *u* e *v* pertencentes a *W* tais que *u* + *v* não pertença a *W*. Isso é suficiente para mostrar que *W* não é um espaço vetorial.

Solução.

(a) Sim. Se v = (x,y) pertence a W, ou ambos x e y são negativos ou ambos são positivos, daí qualquer que seja c real, negativo ou positivo, cv pertencerá a W.

(b) Faça u = (1,3) e v = (-2,-2).