Matemática Discreta – AD1 – 2007/2

Observações: Caro tutor, aqui estão as soluções comentadas da AD1, referente as aulas 2–9 do Módulo 1.

Ao elaborar a avaliação procurei escolher questões cujas soluções são aplicações das técnicas de contagem apresentadas e, ao mesmo tempo, exigem uma extensão dos raciocínios básicos exemplificados.

Nada impede que, ao resolver as questões, o aluno apresente soluções alternativas que você, tutor, considere mais interessantes do que as que eu estou fornecendo. Quando este for o caso, use seu bom senso para redistribuir os pontos, sem ofender o critério de correção, de modo a prestigiar a iniciativa do aluno.

Se você tiver alguma dúvida sobre como proceder ou quizer fazer alguma sugestão ou observação, por favor, entre em contato pelo email petrucio@cos.ufrj.br.

Conteúdo abordado:
Diagramas de Venn, *Princípios aditivo e multiplicativo*, *Arranjos* e *Permutações*.

Soluções comentadas:

1. Uma pesquisa de mercado sobre o consumo de três produtos, A, B e C, resultou nos dados expostos na seguinte tabela:

Produto	n$^{\underline{o}}$ de consumidores
A	150
B	200
C	300
$A \cap B$	70
$A \cap C$	80
$B \cap C$	50
$A \cap B \cap C$	30
$A^c \cap B^c \cap C^c$	60

(a) (1,0) Qual o número total de pessoas consultadas?

(b) (1,0) Quantas pessoas consomem apenas dois produtos?

Solução:

Considere o diagrama de Venn para três conjuntos com os círculos rotulados A, B e C.

Os dados do problema fornecem os seguintes valores para o número de elementos de cada uma das regiões definidas pelo diagrama: $n(A \cap B \cap C) = 30$, $n(A \cap B \cap C^c) = 70 - 30 = 40$, $n(A \cap C \cap B^c) = 80 - 30 = 50$, $(B \cap C \cap A^c) = 50 - 30 = 20$, $n(A \cap B^c \cap C^c) = 150 - 120 = 30$, $n(B \cap A^c \cap C^c) = 200 - 90 = 110$, $n(C \cap B^c \cap C^c) = 300 - 100 = 200$ e $n(A^c \cap B^c \cap C^c) = 60$.

(a) Como as regiões que definem o diagrama formam uma partição do universo, pelo PA, temos que o número total de pessoas consultadas é $30+110+200+40+50+20+30+60 = 540$.

(b) Queremos determinar o número de elementos do conjunto $(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap C \cap B^c) \cup (B \cap C \cap A^c)$. Como esses conjuntos são disjuntos, pelo PA, o número de pessoas que consomem apenas dois produtos é $40 + 50 + 20 = 110$.

2. As letras do Código Morse são seqüências finitas de ocorrências de símbolos, sendo permitidas repetições. Os dois símbolos permitidos são o traço $-$ e o ponto $\cdot$. Quantas letras podem ser formadas:

(a) (1,0) Com exatamente dez ocorrências de símbolos?

(b) (2,0) Com no mínimo três e no máximo cinco ocorrências de símbolos?

Solução:

(a) Para construir uma letra do Código Morse com exatamente dez ocorrências de símbolos, devemos realizar dez tarefas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{escolher um dos símbolos permitidos para ser o primeiro símbolo,} \\ t_2 & : & \text{escolher um dos símbolos permitidos para ser o segundo símbolo,} \\ & \vdots & \\ t_{10} & : & \text{escolher um dos símbolos permitidos para ser o décimo símbolo.} \end{array}$$

Cada uma destas dez tarefas pode ser realizada de duas maneiras: escolha um $-$ ou escolha um $\cdot$.

Assim, pelo PM, existem $2^{10} = 1.024$ letras do Código Morse com exatamente dez ocorrências de símbolos.

(b) O conjunto A das letras do Código Morse com no mínimo três e no máximo cinco ocorrências de símbolos pode ser particionado em três conjuntos:

- O conjunto A_1 das letras do Código Morse com exatamente três ocorrência de símbolos;
- O conjunto A_2 das letras do Código Morse com exatamente quatro ocorrências de símbolos;
- O conjunto A_3 das letras do Código Morse com exatamente cinco ocorrências de símbolos.

Por um racicínio análogo ao utilizado no item (a), temos que $n(A_1) = 2^3 = 8$, $n(A_2) = 2^4 = 16$ e $n(A_3) = 2^5 = 32$.

Assim, pelo PA para três conjuntos, temos que $n(A) = n(A_1)+n(A_2)+n(A_3) = 8+16+32 = 56$, ou seja, existem 56 letras do Código Morse com no mínimo três e no máximo cinco ocorrências de símbolos.

---

3. (3,0) Quantos anagramas existem da palavra pernambuco nos quais as letras p, e e r ocorrem separadas?

Solução:

O conjunto A dos anagramas da palavra pernambuco pode ser particionado em dois conjuntos:

- O conjunto A_1 dos anagramas nos quais p, e e r ocorrem juntas;
- O conjunto A_2 dos anagramas nos quais p, e e r ocorrem separadas.

Pelo PA para dois conjuntos, temos que $n(A) = n(A_1)+n(A_2)$. Logo, $n(A_2) = n(A)-n(A_1)$. Assim, para determinar $n(A_2)$, vamos fazer o seguinte:

(1) contar o número de anagramas da palavra pernambuco;

(2) contar o número de anagramas da palavra pernambuco nos quais p, e e r ocorrem juntas;

(3) Subtrair (2) de (1).

O número de anagramas da palavra pernambuco é $P(10) = 10! = 3.628.800$.

O número de anagramas da palavra pernambuco nos quais p, e e r ocorrem juntas é $3! \times P(8) = 241.920$.

Logo, o número de anagramas da palavra pernambuco nos quais as letras p, e e r ocorrem separadas é $3.628.800 - 241.920 = 3.386.880$.

---

4. (2,0) De quantas formas doze crianças podem formar uma roda, se três delas A, B e C sempre ficam juntas na roda?

Solução:

Para formar uma roda com doze crianças na qual três delas A, B e C sempre ficam juntas, devemos realizar duas tarefas:

t_1 : formar uma permutação das três crianças,
t_2 : formar uma permutação circular com a permutação escolhida e as outras nove crianças.

A tarefa t_1 pode ser realizada de $P(3) = 3! = 6$ maneiras; a tarefa t_2 de $PC(10) = 9! = 362.880$ maneiras.

Logo, pelo PM, existem $6 \times 362.880 = 2.177.280$ rodas formadas por doze crianças nas quais três delas A, B e C sempre ficam juntas.

Jorge Petrúcio Viana
Coordenador da Disciplina MD/IM–UFF