Matemática Discreta – EP3 – Versão aluno de 2009/1

Observações: Caro aluno, aqui está o EP3, referente as Aulas 6 e 7 do Módulo 1. Nestas aulas você inicia uma das partes principais de nosso curso: a solução de problemas de contagem.

Nas Aulas 6 e 7 são apresentados o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) —também chamado *Princípio Multiplicativo* (PM)— e sua aplicação no cálculo do número de *permutações simples*, isto é, sem elementos repetidos.

O PFC é uma das ferramentas básicas da Combinatória de Contagem e quase tudo o que será feito daqui por diante pode ser visto como uma série de aplicações do PFC (juntamente com outros princípios básicos) na resolução de problemas de contagem. O conceito de permutação é um dos conceitos básicos que permeiam toda a Matemática e aparece (quando menos se espera) nas disciplinas mais variadas como a Álgebra e a Geometria. Por estas razões,

> **o domínio dos conteúdos apresentados nas Aulas 6 e 7 faz parte do conhecimento básico que todo estudante de matemática deve possuir**.

Assim, se esforce ao máximo para entender as explicações e exemplos e resolva o máximo de exercícios que você puder, sobre esses conteúdos.

Conteúdo:

Este EP3 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre o texto das aulas;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- uma dica de sítio na internet aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Os alunos, geralmente, apresentam uma enorme dificuldade na redação de soluções adequadas para os problemas de contagem propostos nos EPs, ADs e APs. Neste EP3, formulamos questões que exigem soluções baseadas diretamente nas soluções apresentadas no Módulo. Desta maneira, você tem um modelo a seguir, na hora de redigir as suas soluções.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 6 e 7 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- O princípio fundamental da contagem;
- Permutações;
- Fatorial de um número natural;
- Número de permutações.

O PFC é um princípio básico que será muito usado, em conjunto com outros princípios —a saber, o Princípio da Bijeção e (PB) o Princípio da Divisão (PD) —que são implicitamente utilizados no Módulo de MD. Na verdade, a maioria dos problemas de Combinatória de Contagem básica podem ser resolvidos apenas pelo uso destes princípios. Mais especificamente, as fórmulas para o número de permutações, arranjos, permutações com elementos repetidos, permutações circulares e combinações, que serão vistas nas Aulas 7–11, nada mais são que "abreviações" da aplicação conjunta do PFC, do PB e do PD. Portanto, muita atenção na Aula 6 e nas deduções das fómulas que são apresentadas nas aulas seguintes.

Sobre a Aula 6:

- **Página 58:** No enunciado do PM para duas tarefas, dentro do retângulo em destaque, o texto deve ser:

  Suponha que duas tarefas T_1 e T_2 são dadas, satisfazendo as seguintes condições:
  - T_1 pode ser realizada de N_1 maneiras;
  - T_2 pode ser realizada de N_2 maneiras;
  - N_2 está completamente determinado, dado que a tarefa T_1 já foi realizada;

  então existem $N_1 \times N_2$ maneiras de se realizar as tarefas T_1 e T_2 em seqüência, isto é, realizar a tarefa T_1 e em seguida realizar a tarefa T_2.

- **Página 58:** No enunciado do PM para k tarefas, dentro do retângulo em destaque, o texto deve ser:

  Suponha que k tarefas $T_1, T_2, \ldots, T_k$ são dadas, satisfazendo as seguintes condições:
  - T_1 pode ser realizada de N_1 maneiras;
  - T_2 pode ser realizada de N_2 maneiras;

    $\ldots$
  - T_k pode ser realizada de N_k maneiras;
  - para cada i, $2 \leq i \leq k$, o número N_i, de maneiras de se realizar a tarefa T_i, está completamente determinado, dado que a tarefa anterior T_{i-1} já foi realizada;

  então existem $N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$ maneiras de se realizar as tarefas $T_1, T_2, \ldots, T_k$ em seqüência, isto é, realizar a tarefa T_1, em seguida realizar a tarefa T_2, $\ldots$ e, finalmente, realizar a tarefa T_k. .

- **Página 60:** No Exemplo 34, observe que as chaves numéricas podem ser iniciadas com o algarismo 0. Em problemas envolvendo numerais, você deve sempre verificar, antes de iniciar a contagem, se esta liberdade pode ser tomada, ou não.

Sobre a Aula 7:

- **Página 65:** Na definição de permutação, e em outras partes do texto, a expressão *ordenação de um conjunto* se refere a uma configuração obtida pela *listagem dos elementos do conjunto, um a um, em uma fila vertical, sem repetições.*

- **Página 68:** No Exemplo 40, observe que, implicitamente, os autores estão admitindo que empates não ocorrem em nenhuma das posições finais da prova.

- **Página 69:** O comentário após o Exemplo 41 se estende a todos os problemas de contagem tratados no curso de MD, isto é, *dado um conjunto cujos elementos são usados para formar configurações que são contadas, admite-se (a menos quando não se diz explicitamente o contrário) que os elementos do conjunto são distintos, dois a dois.*

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios mal formulados:

- **Aula 6, Exercício 2:** Certifique-se de que você compreende bem a estrutura de um jogo da Loto e "guarde" o exercício para depois que tiver estudado a Aula 10.
- **Aula 6, Exercício 10:** Certifique-se de que você compreende bem a estrutura do que o autor denomina *mostrador numérico* e troque a palavra "combinações" por "chaves".
- **Aula 7, Exercício 7:** Os autores assumem que não ocorre nenhum tipo de empate em nenhuma das posições finais, ou seja, que os nadadores chegam numa ordenação.
- **Aula 7, Exercício 9(c):** Observe que a restrição imposta é incompatível com a do enunciado geral. Portanto, considere este item como um NOVO exercício.

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Todos os exercícios apresentados nas Aulas 6 e 7 são essenciais. Você deve estudar detalhadamente todo o conteúdo e tentar resolver todos eles.

Se encontrar dificuldades, não desanime: procure os Tutores presenciais e a distância, e converse com outros alunos de MD.

Informações extras:

Para gerar anagramas automaticamente, em várias línguas, inclusive o Português, visite o sítio:

http://wordsmith.org/anagram/index.html

Alguns exercícios para fixação:

1. Em um certo país, as placas de automóveis são formadas por 5 letras do alfabeto $A, B, \ldots, Z$, formado por 23 letras.
   (a) Quantas placas podem ser formadas, no total?
   (b) Quantas placas podem ser formadas, que não possuem ocorrrências de letras repetidas?
   (c) Quantas placas do tipo formado em (b) começam pela letra A?
   (d) Quantas placas do tipo formado em (b) começam ou pela letra A ou pela letra Z?
   (e) Quantas placas do tipo formado em (b) terminam com uma das vogais A, E, I, O, U?
2. Um *anagrama* de uma palavra cujas letras são duas a duas distintas é uma ordenação do conjunto de letras da palavra, i.e., é uma configuração obtida pela listagem das letras, uma a uma, em uma fila vertical, sem repetições. Por exemplo, $IRACEMA$ é um anagrama de $AMERICA$.
   (a) Quantos são os anagramas da palavra $DISCRETA$?
   (b) Quantos são os anagramas da palavra $DISCRETA$ que começam com a letra C?
   (c) Quantos são os anagramas da palavra $DISCRETA$ onde as letras C e R ocorrem juntas e na ordem CR?
   (d) Quantos são os anagramas da palavra $DISCRETA$ onde as letras C e R ocorrem juntas?

Soluções comentadas:

As soluções apresentadas abaixo foram escritas de modo a exemplificar como *o estilo adotado nos Módulos de MD pode ser copiado na redação da solução dos exercícios e questões propostos.* Redigir bem uma solução de um exercício ou questão não é só uma questão de talento mas também uma uma questão de observar os bons exemplos —isto é, as soluções adotadas como padrão— e tentar adaptá-los aos problemas em questão. Pratique o máximo que você puder, sempre que possível, adaptando as redações apresentadas nos Módulos e nos EPs as questões que você está tentando resolver.

1. (Redação baseada no Exemplo 35 da Aula 6).

   (a) Uma placa é uma seqüência $l_1l_2l_3l_4l_5$ de 5 letras escolhidas entre as 23 letras disponíveis. Então, temos 23 possibilidades para l_1, 23 possibilidades para l_2, 23 possibilidades para l_3, 23 possibilidades para l_4 e 23 possibilidades para l_5. Portanto, pelo PFC, há no total $23 \times 23 \times 23 \times 23 \times 23 = 64.364.343$ placas de automóvel.

   (b) Uma placa que não possui ocorrrências de letras repetidas é uma seqüência $l_1l_2l_3l_4l_5$ de 5 letras distintas escolhidas entre as 23 letras disponíveis. Então, temos 23 possibilidades para l_1, 22 possibilidades para l_2, 21 possibilidades para l_3, 20 possibilidades para l_4 e 19 possibilidades para l_5. Portanto, pelo PFC, há no total $23 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 = 4.037.880$ placas de automóvel que não possuem ocorrrências de letras repetidas.

   (c) Uma placa que começa pela letra A é uma seqüência $Al_2l_3l_4l_5$ de 5 letras, onde $l_2l_3l_4l_5$ é uma seqüência de 4 letras distintas escolhidas entre as 22 letras $B, C, \ldots, Y, Z$, disponíveis. Então, temos 22 possibilidades para l_2, 21 possibilidades para l_3, 20 possibilidades para l_4 e 19 possibilidades para l_5. Portanto, pelo PFC, há no total $22 \times 21 \times 20 \times 19 = 175.560$ placas de automóvel do tipo formado em (b) que começam pela letra A.

   (d) Vamos particionar o universo das placas do tipo formado em (b) que começam ou pela letra A ou pela letra Z em 2 subconjuntos. O conjunto das placas que começam pela letra A e o conjunto das placas que começam pela letra Z. Observe duas coisas:

   - Estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos;
   - Um raciocínio análogo ao que foi feito no item (c) garante que cada conjunto tem 175.560 elementos (aqui aplicamos o PFC).

   Portanto, pelo PA, há no total $175.560+175.560 = 2\times175.560 = 351.120$ placas de automóvel do tipo formado em (b) que começam ou pela letra A ou pela letra Z.

   (e) Uma placa do tipo formado em (b) que termina com vogal é uma seqüência $l_1l_2l_3l_4v$ de 5 letras distintas, onde v é uma vogal escolhida entre as 5 vogais disponíveis e $l_1l_2l_3l_4$ é uma seqüência de 4 letras distintas escolhidas entre as 22 letras disponíveis, após a escolha da vogal. Então, temos 5 possibilidades para v, 22 possibilidades para l_1, 21 possibilidades para l_2, 20 possibilidades para l_3 e 19 possibilidades para l_4. Portanto, pelo PFC, há no total $5 \times 22 \times 21 \times 20 \times 19 = 877.800$ placas de automóvel do tipo formado em (a) que terminam com vogal.

2. (Redação baseada no Exemplo 41 da Aula 7).

   (a) Cada anagrama corresponde a uma permutação das oito letras D,I,S,C,R,E,T e A. O número total de permutações de 8 elementos é $8! = 40.320$. Portanto, há no total 40.320 anagramas.

   (b) Cada anagrama que começa com a letra C corresponde a uma permutação das sete letras D,I,S,R,E,T e A. O número total de permutações de 7 elementos é $7! = 5.040$. Portanto, há no total 5.040 anagramas que começa com C.

   (c) Considerando o par de palavras CR como uma única letra, cada anagrama onde as letras C e R ocorrem juntas e na ordem CR corresponde a uma permutação das sete letras D,I,S,CR,E,T e A. *Lembre-se: CR está sendo considerada como uma única letra.* O número total de permutações de 7 elementos é $7! = 5.040$. Portanto, há no total 5.040 anagramas onde as letras C e R ocorrem juntas e na ordem CR.

   (d) Em cada anagrama, as letras C e R podem ocorrer juntas na ordem CR ou na ordem RC. Vamos particionar o universo de anagramas onde as letras C e R ocorrem juntas em 2 subconjuntos. O conjunto dos anagramas nos quais as letras C e R ocorrem na ordem CR e o conjunto dos anagramas nos quais as letras C e R ocorrem na ordem RC. Observe duas coisas:

   - Estes dois conjuntos têm o mesmo número de elementos;
   - Um raciocínio análogo ao que foi feito no item (c) garante que cada conjunto tem 5.040 elementos.

Portanto, pelo PA, há no total $2 \times 7! = 2 \times 5040 = 10.080$ anagramas onde as letras C e R ocorrem juntas.
