Módulo 1

Conjuntos e Técnicas de Contagem

Este é o primeiro volume da coleção que forma o Material Didático impresso da disciplina Matemática Discreta.

Essa disciplina está dividida em 4 módulos:

Módulo 1 - Conjuntos e técnicas de contagem

Módulo 2 - Probabilidade

Módulo 3 - Lógica

Módulo 4 - Grafos

O primeiro volume da coleção contém o Módulo 1 – Conjuntos e Técnicas de contagem, dividido em 13 aulas.

Neste módulo estudaremos conjuntos e operações entre conjuntos, problemas de contagem e técnicas para resolvê-los.

Veremos o princípio multiplicativo, que é o princípio fundamental da contagem e problemas de permutação, arranjos e combinações.

Em seguida, estudaremos o Triângulo de Pascal e o Teorema Binomial.

No final deste módulo, apresentamos respostas e soluções comentadas para alguns exercícios selecionados.

Este Módulo não tem pré-requisitos.

O que é Matemática?

A Matemática é a rainha das ciências
e a Aritmética é a rainha da matemática
Carl Friedrich Gauss

Objetivos

Apresentar a Matemática, enfatizando sua diversidade e riqueza.
Distinguir a Matemática das outras ciências. Isto é, reconhecer como se estabelece a verdade na Matemática.
Apresentar a Matemática como uma ciência que se desenvolveu ao longo da história, ilustrando com alguns episódios e nomes.

Seja bem-vindo à Matemática

Nesta aula você encontrará vários matemáticos e problemas matemáticos importantes e interessantes. Você voltará a encontrá-los em outros momentos ao longo do curso.

Mais informação sobre os matemáticos citados nesta aula pode ser encontrada na maioria dos livros de História da Matemática.

Dois livros clássicos de História da Matemática são o "História da Matemática", de Carl B. Boyer, Editora Edgard Blucher, e o "Introdução à História da Matemática", de Howard Eves, Editora da Unicamp.

Querido aluno ou aluna, parabéns! Você fez uma excelente escolha quando decidiu fazer este curso.

A Matemática é, sem dúvida, uma ciência maravilhosa. Você veio trilhar um caminho que lhe reserva riquezas e alegrias enormes. Estará em excelente companhia. A Matemática tem atraído, ao longo de sua história, muitos dos mais altos intelectos que a humanidade já produziu e tem sido o palco de algumas das maiores façanhas do gênio humano.

Você estará ombro a ombro com personagens como Eudoxus de Cnido, um matemático grego contemporâneo de Platão. No início de sua carreira, era um pobre morador dos arrebaldes de Atenas e percorria a pé uma longa distância para estudar na Academia de Platão, onde acabou tornando-se professor. Eudoxus produziu a chamada "teoria das proporções", apresentada no Livro V dos Elementos de Euclides e resolveu uma das primeiras grandes questões da matemática - o problema da não comensurabilidade dos segmentos.

Descobrirá a engenhosidade de Aristarco que elaborou teorias astronômicas, surpreendentemente corretas, mesmo não dispondo de nenhum artefato especial como um telescópio ou uma luneta. Conhecerá um pouco do trabalho de Arquimedes que resolveu problemas aparentemente impossíveis, como o problema da coroa do rei Hierão.

De alguns grandes matemáticos conhecemos os trabalhos mas não os seus nomes. É o caso de gerações de escribas egípcios e de magos da Babilônia que legaram aos gregos e a toda humanidade uma quantidade enorme de conhecimento matemático. Deles vêm os primeiros passos na questão das triplas pitagóricas assim como o uso do sistema sexagesimal, presente entre nós até hoje, na divisão das horas em minutos e dos minutos em segundos.

Alguns destes personagens viveram em culturas distantes das nossas, como na China, com Sun Tzu, que lidou com o Teorema do Resto Chinês e escreveu o popularíssimo “A Arte da Guerra”, e na Índia, de onde vem o triunfo do uso do zero bem como o sistema posicional para representar os números. O sistema posicional só foi introduzido na nossa cultura pelo excelente matemático Leonardo de Pisa, conhecido pelo apelido de Fibonacci, no início do século XIII. Fibonacci também ficou famoso pela seqüência de números

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

Esta seqüência leva o nome de “seqüência de Fibonacci”e está relacionada ao problema dos coelhos que ele propôs em seu livro “Liber Abaci”e a tantas outras situações da natureza.

Outros grandes nomes da matemática não eram “oficialmente”matemáticos. Pierre de Fermat, por exemplo, era um alto funcionário do poder judiciário francês e veiculou suas idéias e conhecimentos matemáticos através de suas correspondências com os membros da comunidade matemática como o padre Marin Mersenne.

Há aqueles cujos nomes estão inscritos também em outras áreas do conhecimento. É o caso do matemático inglês Isaac Newton, que deu grandes contribuições para a Física, ou Leibniz, grande matemático alemão, que iniciou sua carreira como diplomata e que é também conhecido por suas obras como filósofo. Da França temos Henri Poincaré, que além de excelente matemático, preocupou-se com a divulgação da Matemática.

A Matemática também pode formar uma ponte unindo culturas distantes. É o caso da colaboração profunda e extremamente frutífera entre o inglês Godfrey Hardy e Srinivasa Ramanujan, da Índia. Ramanujan foi um matemático absolutamente genial mas devido ao isolamento em que vivia na Índia demorou a ter seu trabalho reconhecido e apreciado. Ramanujan passou um bom tempo visitando a Inglaterra onde completou a sua formação, produziu muitos trabalhos importantes e ganhou o reconhecimento da comunidade científica.

Durante sua visita ele ficou doente e faleceu logo após seu retorno à Índia, com apenas 33 anos. Hardy relembra uma de suas visitas a Ramanujan quando este estava internado: "Eu havia tomado um táxi com licença número 1729 e comentei que este número me parecia desinteressante e esperava que isto não fosse um mau sinal. Não – foi a resposta de Ramanujan – Este número é muito interessante. Ele é o menor número que pode ser expresso como a soma de dois cubos de duas maneiras diferentes."

As duas maneiras de expressar o número 1729 como soma de 2 cubos são:

$$1729 = 9^3 + 10^3$$

$$1729 = 1^3 + 12^3$$

Não é comum que os matemáticos sejam assunto de jornais, mas recentemente um de nossos pares chegou às manchetes no mundo todo. Foi o inglês Andrew Wiles que ganhou a imortalidade ao provar um resultado matemático conhecido como o "Último Teorema de Fermat". Por mais de 300 anos este resultado havia atraído a atenção dos maiores matemáticos do mundo. Suspeitava-se fortemente que ele fosse verdadeiro. Mesmo usando computadores poderosos não fora possível obter um contra-exemplo, mas nenhum matemático antes de Wiles havia conseguido demonstrá-lo.

O Último Teorema de Fermat afirma que a equação $x^n + y^n = z^n$ não tem solução com números inteiros quando $n > 2$. Veja que se $n = 2$ ela se torna a equação do Teorema de Pitágoras, que tem infinitas soluções nos inteiros. Uma solução é $x = 3$, $y = 4$ e $z = 5$.

O que é Matemática ?

É normal, neste início de caminhada em direção à sua formação, que você tenha algumas dúvidas ou mesmo concepções erradas sobre o ofício dos matemáticos. Uma primeira questão que surge é: o que é Matemática? A pergunta é complicada e não tentaremos respondê-la de imediato. Na verdade, parte de sua formação consistirá em responder a esta pergunta. No entanto, podemos falar um pouco sobre o assunto.

Matemática trabalha com duas idéias ou conceitos fundamentais: multiplicidade e espaço. Desde os primórdios da humanidade os seres humanos lidam com estes conceitos. Contar as reses de um rebanho ou os frutos de uma colheita, avaliar a área de um campo de pastagem ou o volume de um pote contendo grãos, são tarefas que demandam conceitos como números e figuras geométricas.

Números e figuras geométricas, planas ou espaciais, são os elementos fundamentais dos matemáticos. Podemos ensaiar uma resposta à nossa pergunta sobre o que é a Matemática dizendo que a Matemática lida com números e com as relações entre eles.

"Os números governam o universo."
Lema dos pitagóricos

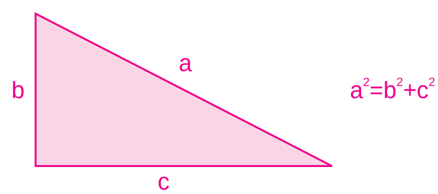
No entanto, há muito mais do que isto. É mais fácil "reconhecer" Matemática. A precisão e o rigor são características próprias da Matemática. Mas há outras. As simetrias e os padrões de repetições usados nas construções e na fabricação de certos objetos revelam uma matemática de alto nível. A Matemática surge em praticamente todas as atividades humanas. Ela está presente na natureza, muitas vezes de maneira elementar, mas, em muitos casos, também de forma rebuscada e profunda.

"Como pode ser que a Matemática, sendo afinal de contas um produto da mente humana independente de experiências, é tão admiravelmente adaptada aos objetos da realidade?" Einstein

Isto leva a uma segunda questão que ajuda a aprofundar nossa reflexão sobre a Matemática: o que distingue a Matemática das outras ciências, tornando-a tão especial? A resposta desta questão surge quando abordamos a questão da verdade científica. O que distingue o matemático dos outros cientistas é o conceito de prova ou demonstração. Aqui está a chave para entender, ou pelo menos entrar no mundo da matemática.

Os egípcios sabiam do teorema de Pitágoras, assim como os babilônios. Um texto babilônico, hoje conhecido pelo nome de Plimpton 322, registra 15 triplas de números inteiros que geram triângulos retângulos. Os chineses e os indianos também conheciam o teorema.

Consideremos, por um minuto, o chamado Teorema de Pitágoras: num triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.



Este teorema era conhecido por várias culturas anteriores aos gregos. Pitágoras, que viajou ao Egito e à Babilônia, teve sua atenção chamada para este resultado estudando com os matemáticos destas culturas.

Ocorre que Pitágoras *demonstrou* o teorema. As culturas que o antecederam sabiam do fato por terem-no experimentado em vários exemplos. Em suma, eram guiados pela experiência mas não podiam ter certeza de que a afirmação seria correta. Isto é, eles sabiam que a afirmação era verdadeira nos casos específicos em que haviam testado. Após Pitágoras, sabemos que a afirmação é verdadeira em toda a sua generalidade. A demonstração matemática estabelece a verdade na Matemática.

É preciso fazer aqui um registro para o fato de que foi a cultura grega, com a sua atitude questionadora que nos legou o conceito de prova matemática.

A demonstração na Matemática

Uma diferença que você logo notará entre a atitude matemática que deve ser adotada por você neste curso e a que você foi levado a adotar no ensino fundamental e médio, é que aqui estabelecemos a verdade das afirmações matemáticas através de *demonstrações matemáticas*.

É como se saíssemos da cultura babilônica e egípcia e entrássemos na cultura helênica.

Infelizmente, o hábito de demonstrar os teoremas tem desaparecido do ensino médio, onde, na maioria das vezes, eles aparecem como fatos prontos, sem demonstrações ou justificativas.

Você já viu uma demonstração do Teorema de Pitágoras?

A prática de não demonstrar os teoremas tem efeitos colaterais terríveis. Em primeiro lugar, as fórmulas matemáticas e os resultados aparecem como que por mágica ou como coisas saídas de empoeiradas bibliotecas. Mas este não é o dano maior. O principal problema é com a *atitude*. Privar os teoremas de suas motivações e de suas demonstrações é como tirar a seiva das plantas. Ao se fazer isto, priva-se o aluno de adotar uma atitude crítica e questionadora.

Axioma (A$\xi\iota\omega\mu\alpha$) é uma palavra grega que originalmente significava *dignidade* ou *valor*, assim como teorema ($\theta\varepsilon\omega\rho\eta\mu\alpha$) que significava espetáculo, portanto algo sujeito à contemplação. Teoria ($\theta\varepsilon\omega\rho\iota\alpha$) significava visão de um espetáculo, visão intelectual, especulação.

No entanto, como dissemos antes, a demonstração matemática, rigorosa, é o que caracteriza a Matemática e a distingue das outras ciências.

Na Matemática aplicamos o chamado *método dedutivo* que usa as regras definidas pela lógica e demonstra as afirmações matemáticas, os teoremas, a partir de afirmações que sabemos serem verdadeiras. Este processo precisa começar em algum lugar. Estes pontos de partida são afirmações aceitas como verdadeiras: são os axiomas.

Na maioria das ciências uma geração destrói o que a outra construiu e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Apenas na Matemática cada geração acrescenta um novo andar na velha estrutura.
Hermann Hankle

O "edifício matemático", isto é, a coleção de axiomas e teoremas matemáticos estabelecidos, permanecerá para sempre. Novas teorias podem ser erguidas sobre este alicerce estabelecido, ele as suportará. A situação é totalmente diferente de outras ciências como a biologia ou a física. Nestas ciências, em geral, novas teorias surgem derrubando as anteriores.

Um bom estoque de exemplos, tão grande quanto possível, é indispensável para um completo entendimento de qualquer conceito, e quando eu quero aprender algo novo, a primeira coisa que eu faço é construir um.
Paul Halmos

Mas também há lugar na Matemática para "experimentos matemáticos". Quando um matemático se depara com uma situação nova, os experimentos podem apontar para novos teoremas, a serem demonstrados posteriormente.

A diversidade na Matemática

A matemática é uma ciência com uma história rica, mas é também uma ciência em plena expansão e atividade. Mencionamos há pouco a solução de um problema de 300 anos, a demonstração do "Último Teorema de Fermat". Este foi demonstrado, mas existe um número enorme de problemas "abertos"(isto é, sem solução conhecida) na Matemática. Novos problemas importantes surgem a cada dia.

A Matemática "de ponta", isto é, aquilo que é assunto dos pesquisadores atuais, impressiona por sua profundidade, dificuldade e principalmente, pela diversidade.

No início da aula, nós mencionamos números e figuras geométricas como sendo os objetos fundamentais com que nós, matemáticos, lidamos. Além disso, a Matemática lida com as relações entre estes objetos. Tal divisão indica que desde o início a Matemática apresentou duas faces: álgebra e geometria. Esta é, digamos assim, a primeira bifurcação da Matemática vista como uma grande árvore.

Os gregos claramente favoreceram a abordagem geométrica. Geometria é uma palavra grega que significa medir a terra. Heródoto, um dos primeiros historiadores gregos, acreditava que a geometria havia sido inventada devido às anuais cheias do rio Nilo: as águas apagavam as delimitações dos terrenos fazendo com que a cada ano eles fossem remarcados. Demócrito chamava os matemáticos egípcios de "esticadores de cordas", algo como agrimensores.

Mas os gregos também produziram grandes algebristas como Apolônio e Diofanto. Os árabes (cultura islâmica) tinham uma queda maior pela álgebra. A própria palavra álgebra é árabe. Foi durante o califado de al-Mamun, no início do século IX d.C., que a Matemática floresceu entre os árabes. Conta-se que al-Mamun teve um sonho onde aparecia o próprio Aristóteles. Ele ordenou então que todos os manuscritos gregos conhecidos fossem traduzidos para o árabe. Entre eles, um compêndio de Ptolomeu, que nós conhecemos pelo nome "Almagesta", corruptela do título árabe *Al Majisti*, e "Os Elementos" de Euclides.

O califa fundou em Bagdá um grande centro de pesquisa, chamado de *Bait al-hikma* que quer dizer *A Casa da Sabedoria*. Um dos matemáticos deste centro chamava-se Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi que escreveu um livro chamado *Hisab al-jabr wa´l muqabalah*. Como al-jabr significa restauração, complementação e muqabalah significa redução ou balanceamento, podemos dizer, então, que o título significava *A Arte de completar e balancear (equações)*.

Ao longo da história, esta grande árvore, que é a Matemática, nunca deixou de florescer nem de se ramificar e dar frutos.

A Matemática é dotada de grande diversidade. É comum dividir os assuntos de Matemática em "puros" ou "aplicados". Os temas da Matemática Aplicada são os que têm aplicações diretas à outras ciências e à engenharia. Todas as áreas da ciência usam a Matemática de maneira fundamental. Os temas da Matemática Pura são os que têm suas motivações intrínsecas à Matemática. Mas, mesmo estes, quando menos se espera tornam-se úteis para resolver questões práticas do dia-a-dia.

A revista "Mathematical Reviews", especializada em publicar resenhas de artigos de pesquisa, é uma ótima fonte de informação para se descobrir o que é conhecido sobre uma determinada questão. Esta revista registra uma subdivisão da matemática em 95 assuntos que vão de 00 - geral, 01 - história e biografias, passando por 05 - combinatória, 19 - k-teoria, 33 - funções especiais, 51 - geometria 55 - topologia algébrica, 16 - mecânica dos fluidos, 94 - informação e comunicação - circuitos.

Modernidade na Matemática significa esquecer rótulos e concentrar-se em resolver problemas. Esta é a grande vocação dos matemáticos. O matemático que se preza vive sempre às voltas com um problema.

Experimente um problema difícil. Você pode não resolvê-lo mas provará alguma outra coisa.
John Littlewood

Os profissionais da matemática têm encontrado uma boa receptividade no mercado de trabalho. O treinamento obtido em sua formação torna-o, em geral, um profissional versátil e hábil resolvedor de problemas.

Resumo

Nesta aula conversamos um pouco sobre o que é a Matemática, o que a caracteriza e sobre sua riqueza e diversidade.

Vimos que na viagem pelo mundo da Matemática, que você inicia aqui, estabelecemos a verdade através de demonstrações matemáticas.

Dos conceitos fundamentais que mencionamos: quantidades e figuras, esta disciplina começará com o primeiro. Começaremos nossa viagem abordando o conceito de conjunto e o problema de contar o número de seus elementos.

A quantidade é medida por *números*. Os sistemas numéricos iniciam a viagem que você fará em outra disciplina deste curso e que também inicia agora: Pré-cálculo.

Não se pode deixar de ter a sensação de que estas fórmulas matemáticas têm uma existência independente e uma inteligência própria delas, de que elas são mais sábias do que nós somos, mais sábias até do que seus descobridores, que nós obtemos delas mais do que nelas nós originalmente colocamos.
Heinrich Hertz

Falamos da organização e do rigor na Matemática. Este tema será aprofundado nas aulas 26–30 quando estudaremos lógica matemática.

Finalmente, o segundo conceito fundamental de que falamos, o conceito de "figura geométrica", é o ponto de partida de outra disciplina, outra viagem que você também inicia agora, na disciplina de Geometria Básica. Nela você reconhecerá, mais do que em qualquer outra, a estrutura que descrevemos de estabelecer axiomas (afirmações fundamentais que são adotadas como verdadeiras sem demonstrações) e provar teoremas a partir de axiomas.

Por fim, novamente parabéns pela escolha do curso de Matemática e boa viagem pelo mundo da "Rainha das Ciências".

Conjuntos

A força que move a invenção matemática não
é o raciocínio, mas sim a imaginação.
Augustus De Morgan

Objetivos

Conceituar conjuntos e subconjuntos.
Estudar as relações de igualdade e inclusão entre conjuntos e de pertinência entre elementos e conjuntos.
Conceituar conjunto universo.

Augustus De Morgan (1806–1871) foi um matemático inglês que deu contribuição importante à lógica matemática.
Foi ele quem introduziu o termo "indução matemática" e deu base ao processo de indução.

De Morgan foi também autor de vários livros de Matemática e de mais de 700 artigos de divulgação.

Estudaremos lógica matemática nas aulas 26 a 30.

A noção de conjunto desempenha um papel central na Matemática, bem como em suas inúmeras aplicações.

O estudo matemático da teoria dos conjuntos foi iniciado por Georg Cantor no século XIX, a partir de suas pesquisas sobre a teoria das séries trigonométricas.

Atribuiremos ao termo conjunto o sentido usual de coleção de objetos ou elementos, sem defini-lo a partir de outros conceitos matemáticos.

Um conjunto é sempre definido por uma *propriedade* que o caracteriza. A recíproca, no entanto, nem sempre é verdadeira. Em outras palavras, é possível enunciar uma propriedade que não determine um conjunto. O famoso "exemplo do barbeiro", a seguir, ilustra essa idéia.

Exemplo 1

Numa cidade, um barbeiro só fazia a barba de quem não fazia a própria barba. Quem fazia a barba do barbeiro?

Se você pensar um pouquinho, irá concluir que ESSE BARBEIRO NÃO EXISTE!!! (Basta considerar o que aconteceria em cada uma das duas únicas alternativas possíveis: ele fazer ou não a própria barba.)

Então, foi dada uma propriedade: "fazer a barba apenas de quem não faz a própria barba" e, no entanto, não conseguimos determinar um conjunto de barbeiros que corresponda a essa propriedade.

Você verá que, para evitar esse tipo de problema, iremos definir *con-*

As idéias fundamentais da teoria dos conjuntos foram desenvolvidas pelo matemático Georg Cantor (1845 –1918).

Muitas de suas idéias geniais não foram aceitas inicialmente por outros matemáticos. No entanto, tiveram uma influência profunda na Matemática do século XX.

junto universo e trabalhar apenas com subconjuntos desse conjunto.

Podemos representar um conjunto listando seus elementos entre chaves, como no exemplo a seguir:

Exemplo 2

A é o conjunto das 3 primeiras letras do alfabeto:

$$A = \{a, b, c\} .$$

Para não listarmos todos os elementos de um conjunto, usamos reticências $\ldots$ para indicar continuação.

Exemplo 3

B é o conjunto dos números pares maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 20:

$$B = \{2, 4, 6, \ldots, 20\} .$$

Exemplo 4

$C = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ é o conjunto de todas as letras do alfabeto.

A expressão $\{x \mid$ satisfaz propriedade $P\}$ deve ser lida: "o conjunto dos elementos x tal que x tem a propriedade P".

Outra maneira de descrevermos um conjunto é, em vez de listar seus elementos, indicar a propriedade que caracteriza aquele conjunto. Neste caso, descrevemos o conjunto por:

$$\{x \mid x \text{ satisfaz propriedade } P\} .$$

Assim, o conjunto $C = \{a, b, c, \ldots, x, y, z\}$ pode ser descrito por:

$$C = \{x \mid x \text{ é letra do alfabeto }\} .$$

Note que muitas vezes sabemos a propriedade que define o conjunto, mas não sabemos quem são todos os elementos do conjunto, como em:

$$\{x \mid x \text{ é primo e } x \geq 1.000.000\} .$$

Exemplo 5

1. $A = \{x \mid x \text{ é dia da semana}\}$ é o mesmo que

$$A = \{\text{segunda-feira}, \text{terça-feira}, \ldots, \text{sábado}, \text{domingo}\} .$$

2. $E = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$ é o mesmo que

$$E = \{x \mid x \text{ é inteiro maior que zero e menor que } 10\} \ .$$

Os elementos de um conjunto são listados apenas uma vez. Desta forma, o conjunto das letras da palavra ARARA é $\{A, R\}$.

> Se x é elemento de um conjunto A, dizemos que x pertence a A, e escrevemos $x \in A$. Se x não é elemento do conjunto A, então dizemos que x não pertence a A e escrevemos $x \notin A$.

A relação entre elementos e conjuntos definida acima é denominada relação de pertinência.

Exemplo 6

$1 \in \{x \mid x \text{ é inteiro}\}$ —— lê-se: "um pertence ao conjunto dos elementos x tal que x é inteiro"

$\text{gato} \in \{x \mid x \text{ é felino}\}$ —— lê-se: "gato pertence ao conjunto dos elementos x tal que x é felino"

$2 \notin \{x \mid x \text{ é inteiro ímpar}\}$ —— lê-se: "dois não pertence ao conjunto dos elementos x tal que x é inteiro ímpar"

> Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm exatamente os mesmos elementos. Quando este é o caso, escrevemos $A = B$. Se A e B não são iguais, escrevemos $A \neq B$.

Exemplo 7

$$\begin{aligned} \text{Sejam} \quad & A = \{1, 2, 3, 4\} \\ & B = \{3, 2, 1, 4\} \\ & C = \{2, 3\} \\ \\ \text{então,} \quad & A = B, \ \text{mas } A \neq C \ . \end{aligned}$$

Subconjuntos

> Se todo elemento de um conjunto A também é elemento de um conjunto B, então dizemos que A é subconjunto de B e escrevemos $A \subset B$.

A relação entre dois conjuntos definida acima é denominada relação de inclusão.

Se $A \subset B$ dizemos também que A está contido em B. Assim, as expressões "A está contido em B" e "A é subconjunto de B" têm o mesmo significado.

Dizer que dois conjuntos A e B são iguais equivale a dizer que $A \subset B$ e $B \subset A$.

Se A não é subconjunto de B, então escrevemos $A \not\subset B$.

Portanto,

> $A \not\subset B$ se o conjunto A possui algum elemento que não pertence ao conjunto B.

Quando $A \not\subset B$ dizemos também que A não está contido em B.

Exemplo 8

1. $\{x \mid x \text{ é inteiro par }\} \subset \{x \mid x \text{ é inteiro}\}$.
2. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \subset \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\} \subset \{x \mid x \text{ é número natural}\}$.
3. $\{\text{gato, leão, pato}\} \not\subset \{\text{felinos}\}$

   pois, embora gato e leão sejam felinos, o pato não é um felino.

Note que todo conjunto é subconjunto de si mesmo, isto é, vale para qualquer conjunto A que $A \subset A$.

Se $A \subset B$, mas $A \neq B$, então dizemos que A é subconjunto próprio de B.

Portanto, A é subconjunto próprio de B se todo elemento de A é também elemento de B ($A \subset B$), mas existe algum elemento de B que não pertence a A.

Assim, A é subconjunto próprio de B se

$$A \subset B \text{ e } A \neq B$$

A noção de subconjunto próprio traduz a idéia de que A é subconjunto de B, mas é "menor" que B.

Exemplo 9

1. O conjunto {segunda-feira, quarta-feira} é subconjunto próprio do conjunto $\{x \mid x$ é dia da semana$\}$.

   Também escrevemos $B \supset A$, que se lê "B contém A", quando $A \subset B$.

Note que quando comparamos conjuntos e subconjuntos, usamos os símbolos $\subset$ e $\supset$, enquanto que quando relacionamos elementos e conjuntos usamos os símbolos $\in$ e $\notin$.

Exemplo 10

Seja $A = \{1, 2, 3\}$, então:

a) $1 \in A$. O número 1 é elemento do conjunto A.

b) $\{1\} \subset A$. O conjunto $\{1\}$ é subconjunto do conjunto A.

Um conjunto que não possui elementos é chamado conjunto vazio e é denotado por $\emptyset$.

Exemplo 11

Os seguintes conjuntos são vazios:

1. $\{x \mid x$ é inteiro maior que 10 e menor que $5\}$.
2. $\{x \mid x$ é um homem com mais de 200 anos$\}$.
3. $\{x \mid x + 3 = 0$ e x é inteiro positivo$\}$.

Um conjunto com apenas um elemento é chamado conjunto unitário.

Exemplo 12

Os seguintes conjuntos são unitários:

1. Conjuntos dos países de língua portuguesa da América do Sul.
2. $\{x \mid x$ é animal mamífero voador$\} = \{$morcego$\}$.

Dado um conjunto A qualquer, quantos subconjuntos ele possui? Quais são eles? Voltaremos a este problema mais tarde. Por ora, vamos observar o seguinte:

- Todo conjunto é subconjunto de si mesmo: para qualquer conjunto A, vale que
$$A \subset A\ .$$

- O conjunto vazio $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto: para qualquer conjunto A, vale que
$$\emptyset \subset A\ .$$

Exemplo 13

Seja $A = \{a, b, c\}$. Os subconjuntos de A são os seguintes:

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \text{ e } \{a, b, c\}\ .$$

Na aula 10 aprenderemos a calcular o número de subconjuntos de um conjunto A.

> O conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto A é chamado conjunto das partes de A e é denotado $\mathcal{P}(A)$.

Portanto,
$$X \in \mathcal{P}(A) \text{ se e somente se } X \subset A$$

Veremos que se o conjunto A tem n elementos, então A possui 2^n subconjuntos, isto é, $\mathcal{P}(A)$ tem 2^n elementos.

No exemplo 13, o conjunto A tem 3 elementos, portanto possui $2^3 = 8$ subconjuntos, isto é $\mathcal{P}(A)$ possui 8 elementos.

Uma maneira simples de definir o subconjunto de um conjunto A que possui certa propriedade P é a seguinte:

$$\{x \in A \mid x \text{ tem propriedade } P\}\ .$$

É o que acontece quando dizemos: o conjunto dos peixes no mar. Não estamos listando todos os elementos deste conjunto, mas indicando uma propriedade que os caracteriza.

Exemplo 14

Seja $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, então:

1. $\{x \in A \mid x \text{ é par}\} = \{2, 4\}\ .$
2. $\{x \in A \mid x \text{ é primo}\} = \{2, 3, 5\}\ .$
3. $\{x \in A \mid x \text{ é maior que } 10\} = \emptyset\ .$

Na verdade, a notação que estamos usando, $\{x \mid x \text{ tem propriedade P}\}$, envolve a noção de conjunto universo, que é o conjunto de todos os elementos interessantes para o problema em questão.

Quando escrevemos $\{x \mid x \text{ tem propriedade P}\}$ estamos realmente definindo o subconjunto de um certo conjunto universo, formado pelos elementos que possuem a propriedade P.

Assim sendo, o conjunto $\{x \mid x \text{ é mamífero}\}$ é o mesmo que:

$$\{x \in \{\text{animais}\} \mid x \text{ é mamífero}\} \ .$$

Neste caso, o conjunto universo U é o conjunto de todos os animais. O conjunto universo varia de problema para problema. Em um determinado problema, o conjunto universo pode ser o conjunto de todos os animais, enquanto que em outro, o conjunto universo pode ser o conjunto dos inteiros positivos.

A idéia de conjunto universo vem de Augustus De Morgan e foi usada por John Venn, que criou diagramas para representar conjuntos.

Na aula seguinte estudaremos a representação de conjuntos por meio dos diagramas de Venn e estudaremos as operações entre conjuntos.

Resumo

Esta foi a primeira aula sobre conjuntos. Nela estudamos conjuntos e subconjuntos, relações de inclusão entre conjuntos e de pertinência entre elementos e conjuntos. Vimos também conjunto universo.

Exercícios

1. Correlacione os conjuntos descritos por enumeração dos elementos com os conjuntos descritos por uma propriedade:

   (a) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
   (b) $\{12, 15, 18, 21, 24, 27\}$
   (c) {África, América, Ásia, Europa, Oceania}
   (d) {Matemática Discreta, Geometria Básica, Pré-Cálculo}
   (e) $\{-3, 3\}$

(1) {continentes}

(2) $\{x|x$ é número natural primo$, x < 20\}$

(3) {disciplinas de matemática do primeiro semestre de Matemática do CEDERJ}

(4) $\{x|x^2 = 9\}$

(5) $\{x \in \mathbb{N}|x$ é múltiplo de $3, 10 < x < 30\}$

2. Escreva os conjuntos abaixo, na forma $\{x \mid x$ tem propriedade $P\}$.

   (a) $\{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

   (b) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\}$

   (c) {Botafogo, Flamengo, Fluminense, Vasco, Bangu, . . . }

   (d) {Niterói, Nova Iguaçu, Nova Friburgo, Nilópolis, . . .}

3. Liste os elementos dos conjuntos abaixo:

   (a) $\{x \mid x$ é letra da palavra CEDERJ$\}$

   (b) $\{x \mid x^2 - 4 = 0\}$

   (c) $\{x \mid x^2 - 2 = 0$ e x é número racional$\}$

   (d) $\{x \mid x^2 - 2 = 0$ e x é número real$\}$

4. Seja $A = \{a, b, c, d, e\}$. Determine se as sentenças, abaixo, são verdadeiras ou falsas:

   (a) $\{a\} \subset A$

   (b) $a \in A$

   (c) $\{a\} \in A$

   (d) $\emptyset \subset A$

   (e) $\{c, d, e\} \subset A$

   (f) $\{c, d, e\} \in A$

   (g) $\{a, c, f\} \subset A$

   (h) $A \subset A$

   (i) $A \subset A$ e $A \neq A$

   (j) $\{e, b, c, a, d\} = A$

5. Determine quais sentenças, abaixo, são verdadeiras para qualquer conjunto A.

   (a) $\emptyset \subset A$

   (b) $A \subset A$

   (c) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$

   (d) $0 \in \emptyset$

6. Liste todos os subconjuntos dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{1\}$ (b) $\{1, 2\}$ (c) $\{1, 2, 3\}$ (d) $\emptyset$

Diagramas de Venn e operações entre conjuntos

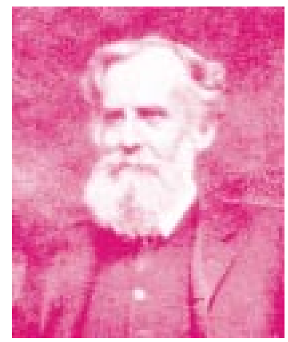
Objetivos

Estudar a representação visual de conjuntos dada pelos diagramas de Venn.
Estudar as operações entre conjuntos.

Diagramas de Venn

Uma ferramenta muito importante para se "entender" as relações entre conjuntos e as operações entre eles é utilizar uma representação visual.

Uma representação visual de conjuntos é dada pelos diagramas de Venn, onde representamos conjuntos por regiões. Normalmente se representa um conjunto universo U por um retângulo e subconjuntos de U por regiões dentro do retângulo.



O matemático inglês John Venn (1834–1923) é mais conhecido pela sua representação de conjuntos por regiões no plano.

Seu trabalho matemático envolve lógica, probabilidade e estatística.

Venn escreveu vários livros importantes em Matemática e História. Além disso, tinha uma habilidade rara em construção de máquinas.

Exemplo 15

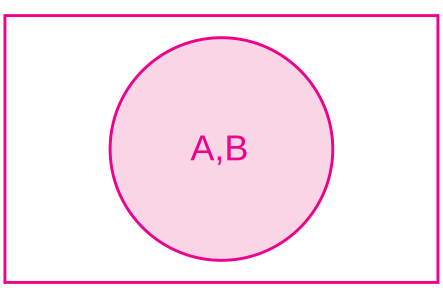
Abaixo, alguns diagramas de Venn representando determinadas situações:

a) Os conjuntos A e B são iguais.

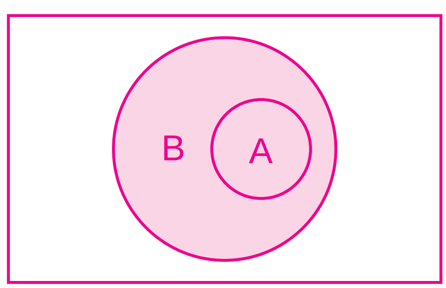
b) A é subconjunto próprio de B.

c) Os conjuntos A e B não são subconjuntos um do outro, mas há elementos que pertencem a ambos.

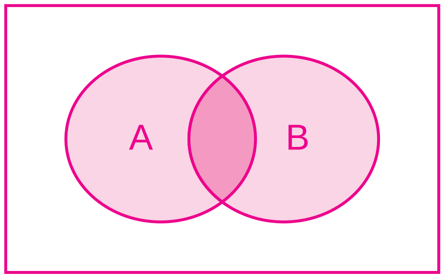
d) Os conjuntos A e B não são subconjuntos um do outro e não possuem elementos comuns.



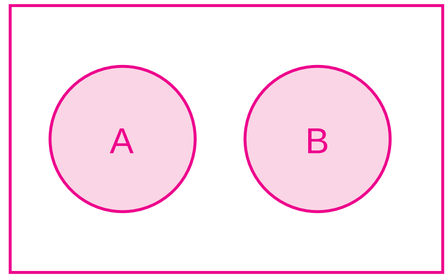
(a) $A = B$



(b) $A \subset B$



(c)



(d)

Operações com conjuntos

Uma operação é uma "regra" ou procedimento que aplicada a dois objetos permite obter um outro objeto do mesmo tipo.

Quando lidamos com números, as operações mais comuns são *adição* e *multiplicação*.

Para conjuntos quaisquer, estudaremos as operações de *união*, *interseção*, *complementar* e *diferença*.

Daqui em diante, assumiremos que todos os conjuntos são subconjuntos de um mesmo conjunto universo.

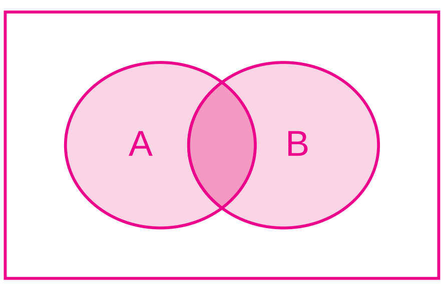
Sejam A e B conjuntos. A união de A e B, que se escreve $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou pertencem a B.

ATENÇÃO!

"Ou" e "e" são dois conectivos lógicos. Estudaremos os conectivos lógicos na Aula 26.

O conectivo "ou", em Matemática, é não exclusivo. Isto é, a sentença $x \in A$ ou $x \in B$ é correta mesmo que o elemento x esteja tanto em A quanto em B.

Isto pode causar confusão porque "ou", na língua portuguesa, é exclusivo. Dizemos : "hoje vou ao teatro ou ao cinema", quando queremos dizer que ou vamos ao teatro ou vamos ao cinema (mas não a ambos).



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Exemplo 16

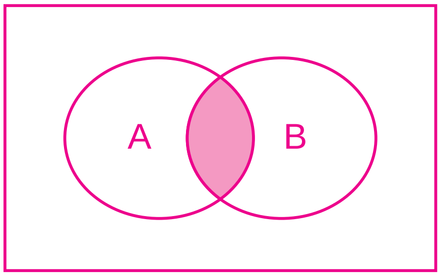
1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, c, d\}$ então $A \cup B = \{a, b, c, d\}$.
2. $\{1, 2, 3, 4\} \cup \{6, 12\} = \{x \mid x \text{ é inteiro positivo divisor de } 12\}$.

Exemplo 17

Para qualquer conjunto A, vale

$$A \cup A = A\ ,$$
$$A \cup \emptyset = A\ .$$

Sejam A e B conjuntos. O conjunto interseção de A e B, que se escreve $A \cap B$, é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Exemplo 18

1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, c, d\}$ então $A \cap B = \{a, c\}$.
2. $\{\text{inteiros pares}\} \cap \{\text{inteiros ímpares}\} = \emptyset$.
3. $\{x \mid x \text{ é inteiro primo}\} \cap \{x \mid x \text{ é inteiro par}\} = \{2\}$.

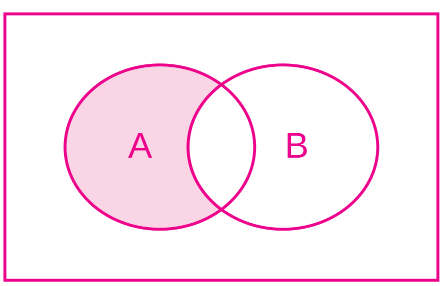
Exemplo 19

Para qualquer conjunto A, vale

$$A \cap A = A\ ,$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset\ .$$

Dois conjuntos são chamados disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Sejam A e B dois conjuntos. O conjunto dos elementos que estão em A, mas não estão em B, é chamado diferença entre A e B e é denotado por $A - B$.



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

Exemplo 20

1. Se $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{a, c, d\}$ então $A - B = \{b\}$.

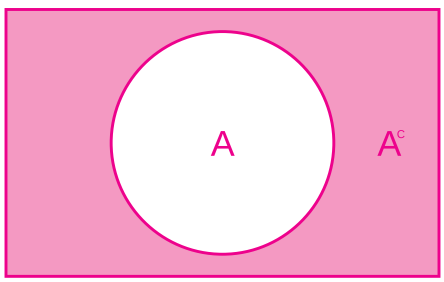
2. $\{$inteiros pares$\} - \{$inteiros ímpares$\} = \{$inteiros pares$\}$.

Exemplo 21

Para qualquer conjunto A, vale

$$A - A = \emptyset \;,$$
$$A - \emptyset = A \;.$$

Se U é o conjunto universo e A é subconjunto de U, então o complemento de A, que denotamos A^c, é o conjunto dos elementos de U que não estão em A, isto é $A^c = U - A$.



$A^c = U - A = \{x \mid x \in U \text{ e } x \notin A\}$.

Na verdade, a operação de passagem ao complementar é uma diferença, não é uma operação "nova". Quando $A \subset B$, chamamos de "complementar de A em relação a B" à diferença $B - A$.

Exemplo 22

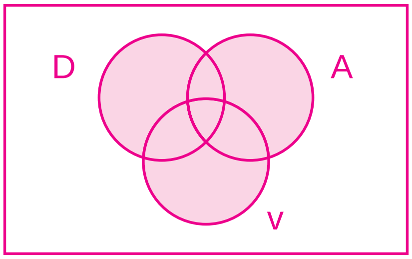
Se $U = \{$números inteiros$\}$ e $A = \{$números inteiros pares$\}$, então $A^c = \{$números inteiros ímpares$\}$.

Exemplo 23

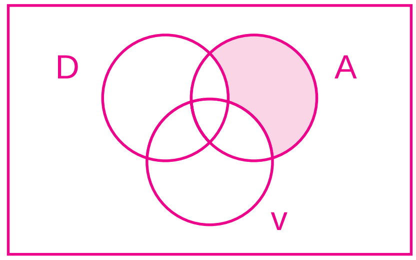
Considere o conjunto de todos os carros vendidos em uma certa concessionária. Um vendedor classificou os carros em três subconjuntos, de acordo com os opcionais de cada carro.

$$D = \{\text{carros com direção hidráulica}\},$$
$$A = \{\text{carros com ar-condicionado}\},$$
$$V = \{\text{carros com vidro elétrico}\}.$$

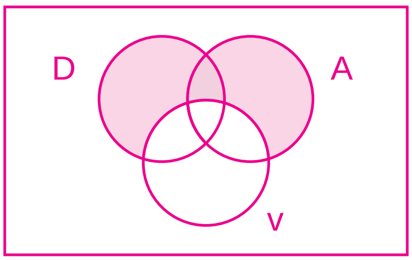
Os diagramas abaixo representam as seguintes situações:



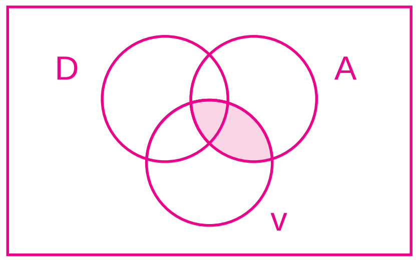
Carros com, pelo menos, alguma das três opções.



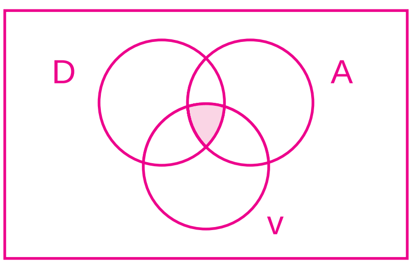
Carros com ar-condicionado, mas sem direção hidráulica e sem vidro elétrico.



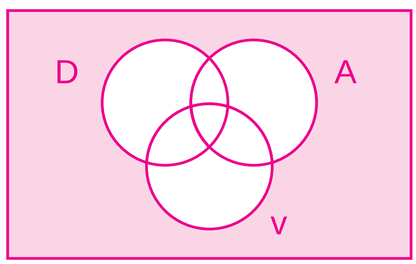
Carros com direção hidráulica ou ar-condicionado, mas sem vidro elétrico.



Carros com vidro elétrico e ar-condicionado.



Carros com vidro elétrico, ar-condicionado e direção hidráulica.



Conjunto dos carros vendidos sem nenhum dos três opcionais.

Exemplo 24

Sejam $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,3,5\}$ e $C = \{3,5,6\}$.

Então,

$A \cap B = \{1,3\}$,
$A \cap C = \{3\}$,
$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,3\}$,
$B \cup C = \{1,3,5,6\}$ e
$A \cap (B \cup C) = \{1,3\}$.

Portanto, para os conjuntos A, B e C do exemplo anterior, vale que:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C) \ .$$

De fato, esta igualdade é sempre verdadeira. Podemos mostrá-la usando diagramas de Venn. Ela faz parte das igualdades a seguir:

Sejam A, B e C subconjuntos de um mesmo conjunto universo U. Vale que:

$$\begin{array}{ll} A \cup B = B \cup A & \text{(comutatividade da união)},\\ A \cap B = B \cap A & \text{(comutatividade da interseção)},\\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & \text{(associatividade da união)},\\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & \text{(associatividade da interseção)},\\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & \text{(distributividade da união)},\\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & \text{(distributividade da interseção)}. \end{array}$$

A palavra lei tem aqui um significado matemático preciso, como veremos na Aula 27.

Por ora, podemos dizer que: uma lei é uma sentença verdadeira, isto é, pode-se provar matematicamente que ela é verdadeira.

Voltaremos a estas leis quando estudarmos mais os conectivos lógicos e tabelas verdades (Aula 27).

Veja o verbete sobre o matemático De Morgan na Aula 2.

Também são válidas as seguintes igualdades, conhecidas como leis de De Morgan.

Sejam A e B conjuntos. Então:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \ ,$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \ .$$

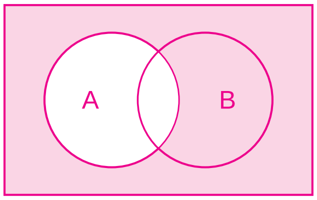
As demonstrações destas leis serão deixadas para a Aula 27. Usando diagramas de Venn, mostraremos a primeira das leis de De Morgan:

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \ .$$

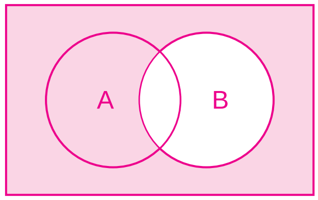
Isto é, mostraremos que o complementar da interseção de dois conjuntos é igual à união dos complementares destes conjuntos.

Note que o uso de diagramas de Venn não pode provar que uma sentença seja verdadeira, apenas dá uma indicação. Uma prova rigorosa requer outros métodos, que serão vistos posteriormente.

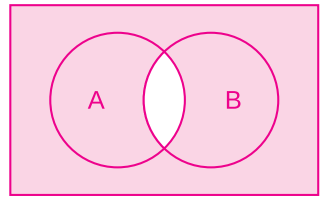
As figuras abaixo representam o complementar de A, B e $A \cap B$:



A^c



B^c



$(A \cap B)^c$

Podemos ver que a união das áreas hachuradas no diagrama que representa A^c (diagrama à esquerda) e no diagrama que representa B^c (diagrama do meio) é a área hachurada no diagrama que representa $(A \cap B)^c$ (diagrama à direita). Portanto:

$$A^c \cup B^c = (A \cap B)^c \ .$$

Resumo

Com isto, terminamos a Aula 3, onde estudamos diagramas de Venn e operações entre conjuntos. Vimos que as principais operações entre conjuntos são as de *união*, *interseção* e *diferença*.

Vimos também que estas operações obedecem a propriedades como comutatividade, associatividade e distributividade. Além disso, as leis de De Morgan relacionam o complementar da união (respectivamente, interseção) de dois conjuntos, com a interseção (respectivamente, união) dos complementares destes conjuntos.

Embora possamos fazer uma indicação da verdade destas propriedades utilizando diagramas de Venn, uma prova rigorosa exige o uso de conectivos lógicos e será feita na Aula 27.

Na introdução dissemos que os temas fundamentais deste Módulo são *conjuntos* e *contagem*. Nestas primeiras aulas nos ocupamos de conjuntos. Na próxima aula, iniciaremos o assunto de contagem, estudando o número de elementos de um conjunto.

Exercícios

Nos exercícios 1 a 6, sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Represente por meio de diagramas de Venn, as seguintes situações:

1. $A \cap B = \emptyset$
2. $A \subset B$ e $B \subset C$
3. $B \subset A$, $C \subset A$ e $B \cap C = \emptyset$
4. $B \subset A$, $C \subset A$ e $B \cap C \neq \emptyset$
5. $A \subset (B \cup C)$
6. $A \subset (B \cap C)$
7. Sejam os conjuntos:

$$\begin{aligned} P &= \{x \mid x \text{ é pintor}\}, \\ M &= \{x \mid x \text{ é matemático}\}, \\ B &= \{x \mid x \text{ é brasileiro}\}. \end{aligned}$$

Determine quais das afirmações, abaixo, são verdadeiras e quais são falsas:

(a) $\{\text{Picasso}\} \subset P$

(b) $\{\text{Portinari}\} = P \cap B$

(c) $M \cap B \neq \emptyset$

(d) $\{\text{Van Gogh}\} \subset P \cap B$

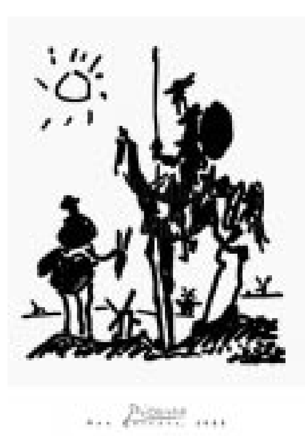
Cândido Portinari (1903–1962) nasceu em Brodósqui, São Paulo. Foi um dos maiores pintores brasileiros e sua obra é conhecida em todo o mundo.

Para saber mais sobre a vida e obra do artista, visite o site do Projeto Portinari em http://www.portinari.org.br

Pablo Picasso (1881–1973) é um dos artistas mais importantes de todos os tempos.

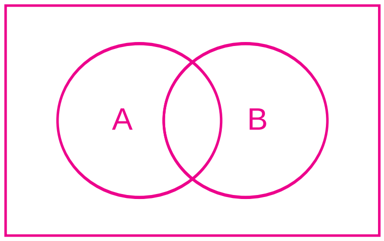
Picasso deixou uma obra genial em pintura, escultura, desenhos, cerâmicas e gravuras.

Para saber um pouco mais, visite o Museu Picasso, em Paris, no endereço http://www.paris.org/musees/picasso/



O grande pintor holandês Vincent van Gogh (1853–1890) não teve reconhecimento em vida. Sua obra foi de extrema importância para a pintura do século XIX, e seus quadros estão hoje nos principais museus do mundo. Para saber um pouco mais, visite o Museu van Gogh, em Amsterdã, no endereço http://www.vangoghmuseum.nl.

Tomando como base o diagrama de Venn,



nos exercícios 8 a 11, represente os seguintes conjuntos:

8. $(A \cup B)^c$
9. $(A \cap B)^c$
10. $A \cap B^c$
11. $A^c \cap B$

12. Verifique, usando diagramas de Venn, que:

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \ .$$

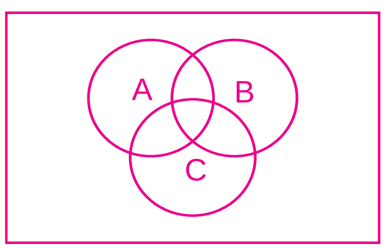
13. Verifique, usando diagramas de Venn, que $(A \cup B) - A = B - A$.

14. Usando diagramas de Venn, mostre que:

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \ .$$

(Esta é uma das leis de De Morgan.)

Tomando como base o diagrama de Venn,



nos exercícios 15 a 22, represente os seguintes conjuntos:

15. $A \cup B \cup C$
16. $A \cap B \cap C$
17. $A \cap B \cap C^c$
18. $A - (B \cup C)$
19. $(A - B) \cup (A - C)$
20. $A^c \cap B$
21. $(A \cup B)^c \cap C$
22. $A \cup (B \cap C)^c$

23. Dê exemplos de conjuntos A, B e C, tais que $A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C$.

24. Verifique que, para quaisquer conjuntos A, B e C, vale que

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C) .$$

25. Verifique que, para quaisquer conjuntos A, B e C, vale que :

    (a) $A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$,

    (b) $A^c \cup B^c \cup C^c = (A \cap B \cap C)^c$.

    (Estas são as leis de De Morgan para três conjuntos.)

Nos exercícios 26 e 27, seja U o conjunto de todas as pessoas que trabalham ou estudam em uma certa escola. E ainda, sejam:

$$\begin{aligned}
P &= \{x \in U \mid x \text{ é professor}\},\\
A &= \{x \in U \mid x \text{ é aluno}\},\\
H &= \{x \in U \mid x \text{ é homem}\},\\
M &= \{x \in U \mid x \text{ é mulher}\},\\
S &= \{x \in U \mid x \text{ é funcionário administrativo}\}.
\end{aligned}$$

Descreva os seguintes conjuntos:

26. *a*) $P \cap M$ *b*) $A \cap H$ *c*) $P^c \cap H$

27. *a*) $(S \cup M)^c$ *b*) $(S \cap M)^c$ *c*) $P \cap S$.

28. Um certo conjunto U de pessoas tem a seguinte preferência por esportes:

$$\begin{aligned}
F &= \{x \in U \mid x \text{ gosta de futebol}\},\\
T &= \{x \in U \mid x \text{ gosta de tênis}\},\\
C &= \{x \in U \mid x \text{ gosta de capoeira}\}.
\end{aligned}$$

    Descreva os seguintes conjuntos:

    (a) Conjunto das pessoas que gostam de futebol e tênis.

    (b) Pessoas que gostam de capoeira, mas não gostam de futebol nem de tênis.

    (c) Pessoas que gostam de futebol ou de tênis, mas não gostam de capoeira.

    (d) Pessoas que não gostam de nenhum dos três esportes.

Número de elementos de um conjunto - I

O infinito! Nenhuma outra questão tem tocado tão profundamente o espírito humano.
David Hilbert

Objetivos

Estudar os problemas que consistem em determinar o número de elementos de um conjunto.

Apresentar o Princípio da Inclusão-Exclusão, que é uma fórmula para o número de elementos da união de dois conjuntos.

A noção de contagem foi fundamental no desenvolvimento do homem. É natural ao ser humano a atitude de agrupar objetos, animais, pessoas etc, e contá-los. Isto é, formar conjuntos e contar seu número de elementos.

A resolução de muitos problemas consiste na contagem do número de elementos de um certo conjunto. Por exemplo, contar o número de soluções de uma equação ou de um problema. Em determinados casos, pode ser difícil até mesmo dizer se um determinado problema tem *alguma* solução.

A frase que inicia nossa aula, do grande matemático David Hilbert, faz uma louvação ao infinito. Isto numa aula onde nos propomos a encontrar o número de elementos de *um* conjunto. Pois bem, realmente, a aula promete.

Antes de mais nada, vamos estabelecer um critério que determina se um conjunto é finito ou infinito. Faremos isto usando a noção de *bijeção*, isto é, uma função $f : X \longrightarrow Y$ entre dois conjuntos X e Y tal que:

- Se a e b são elementos de X tais que $f(a) = f(b)$, então $a = b$. Dito de outra maneira, se $f(a) \neq f(b)$, então $a \neq b$.
- Para todo elemento $b \in Y$, existe algum elemento de $a \in X$ tal que $f(a) = b$.

Ou seja, uma bijeção entre dois conjuntos estabelece uma relação um a um entre os seus elementos.

Por exemplo, a função $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\} \longrightarrow \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$, definida por $f(x) = 2x$, é um bijeção entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares.

Agora podemos dizer que um conjunto X é *infinito* se existe um subconjunto próprio $Y \subset X$ e uma bijeção $f : X \longrightarrow Y$.

O exemplo acima mostra que o conjunto dos números naturais é infinito. Assim, quando um conjunto não é infinito ele é chamado de *finito*.

Isto parece um pouco estranho, começar pelo infinito, mais complicado. Você deve estar se perguntado: por que simplesmente não contamos o número dos elementos? O fato é que contar é uma aplicação da noção de bijeção. Com a noção de bijeção podemos comparar conjuntos sem, necessariamente, contar o número de seus elementos.

Veja a seguinte história:

Existia, há muitos e muitos anos atrás, uma tribo bem primitiva que habitava uma terra maravilhosa, onde não havia terremoto, fazia calor o ano todo, enfim, era um paraíso. Esta tribo tinha uma cultura rica, eram sofisticados em vários setores das atividades humanas, mas não havia desenvolvido a capacidade de contar. Isto é, seus habitantes não conheciam, por assim dizer, números. No entanto, eles tinham muitas noções de Matemática, sendo que o chefe desta tribo era um matemático particularmente sagaz. Foi então que, já bem próximo das grandes festas anuais da tribo, duas famílias rivais se envolveram em uma disputa. Cada uma delas afirmava ser mais forte do que a outra. O chefe, temendo que a disputa tivesse conseqüências mais graves, chamou os representantes das duas famílias e disse que ele colocaria um fim na questão, mas exigia que as famílias aceitassem o seu veredito. Como ambas aceitaram as condições do chefe, ele estabeleceu que todos os membros das duas famílias comparecessem ao pátio de danças tribais naquela noite. Então, à luz das tochas, o chefe traçou um linha que dividia o pátio de um extremo ao outro e, na medida que os membros das famílias chegavam, ele os posicionava, dispondo um membro de cada família em frente a algum outro, da outra família, uma família de um lado da linha, a outra família do outro lado da linha. Assim, quando todos estiveram presentes, o chefe foi capaz de dizer, sem nenhuma dúvida, qual família tinha mais membros do que a outra. Usando esta informação ele deu o seu veredito.

Moral da história: podemos comparar conjuntos sem, necessariamente, contar seus elementos.

Quando contamos o número de elementos de um conjunto finito, estamos estabelecendo uma bijeção entre ele e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, n\}$, onde n é o seu número de elementos.

Note que, na prática, poderemos ter dificuldade em contar o número de elementos de um conjunto. Por exemplo, há um número finito de estrelas na nosso galáxia, mas não há como contá-las.

Um conjunto que não é finito é chamado infinito. São exemplos de conjuntos infinitos o conjunto dos inteiros positivos, o conjunto dos números reais e o conjunto de palavras que podemos formar com nosso alfabeto.

Em alguns casos, não é fácil descobrir se um certo conjunto é finito ou infinito. Vamos a dois exemplos que dizem respeito aos números primos:

— Existem infinitos números primos?

A resposta é sim, e uma prova já aparece no livro Elementos, do matemático grego Euclides, há cerca de 2300 anos.

Por outro lado, dois primos são chamados primos gêmeos, se sua diferença é 2. Por exemplo, 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, são primos gêmeos.

— Existem infinitos primos gêmeos?

A resposta é desconhecida, embora os matemáticos tentem solucionar este problema há vários séculos.

Denotaremos por $n(A)$ o número de elementos de um conjunto finito A.

O conjunto vazio não tem elementos; portanto $n(\emptyset) = 0$.

Números transfinitos e a Hipótese do Contínuo.

Há vários tipos de infinito. Existe mesmo uma aritmética destes diversos infinitos: são os números transfinitos, desenvolvidos por Cantor.

Os conjuntos dos números inteiros e racionais têm a mesma cardinalidade, enquanto que os números reais possuem uma cardinalidade maior.

A Hipótese do Contínuo afirma que não há um conjunto cuja cardinalidade esteja entre a dos números naturais e a dos números reais.

Você conhecerá esta demonstração nesta disciplina. Ela está na aula 29, no módulo de lógica, como um exemplo do método da contradição.

Exemplo 25

Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 5, 6\}$. Então:

$$n(A) = 3, \quad n(B) = 3, \quad n(A \cup B) = 5 \quad \text{e} \quad n(A \cap B) = 1 \ .$$

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, pois se $x \in A \cup B$ então $x \in A$ ou $x \in B$, mas x não pode estar em ambos A e B, já que $A \cap B = \emptyset$.

Por exemplo, o número total de pessoas em uma festa é igual ao número de homens mais o número de mulheres, já que toda pessoa é um homem ou uma mulher, mas não ambos.

No exemplo 25, temos que $n(A \cup B) = 5$ e $n(A) + n(B) = 3 + 3 = 6$. A diferença entre estes dois números é $6 - 5 = 1 = n(A \cap B)$. Assim, neste exemplo vale que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \ .$$

De fato, é sempre verdadeiro o seguinte:

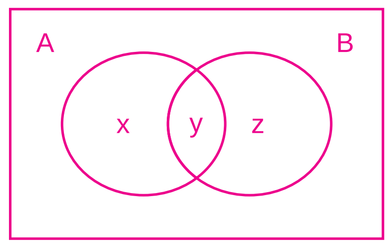
PRINCÍPIO DE INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Se A e B são dois conjuntos finitos, então

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Para entender, observe o diagrama a seguir, onde vemos que $A \cup B$ pode ser visto como a união de três conjuntos disjuntos:

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$$



Portanto, sendo $n(A) = x + y$ e $n(B) = y + z$, temos

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = (x + y) + (y + z) - y = x + y + z\ .$$

Como $n(A \cup B) = x + y + z$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Exemplo 26

Uma pesquisa em uma turma de graduação em Matemática, de 60 alunos, revelou que 40 deles pretendem fazer Licenciatura e 30 deles pretendem fazer Bacharelado.

Supondo que todo aluno da turma queira fazer Bacharelado ou Licenciatura, decida quantos alunos esperam fazer Licenciatura e Bacharelado.

Solução:

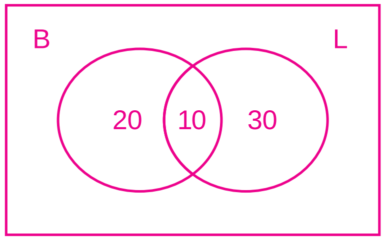
Vamos considerar os seguintes conjuntos:

$$B = \{\text{alunos que querem fazer Bacharelado}\}$$
$$L = \{\text{alunos que querem fazer Licenciatura}\}$$

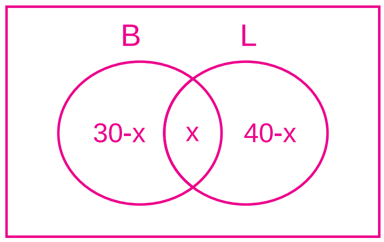
Então, $n(B) = 30$, $n(L) = 40$ e $n(B \cup L) = 60$. Logo, temos

$$n(B \cap L) = n(L) + n(B) - n(L \cup B) = 40 + 30 - 60 = 10.$$

Portanto, 10 alunos nesta turma esperam fazer Bacharelado e Licenciatura. O problema pode ser representado pelo diagrama



Uma outra solução seria usarmos uma variável. Como não sabemos quanto é $n(B \cap L)$, vamos escrever $n(B \cap L) = x$. Agora completamos o diagrama.



Temos $n(B) = 30$, logo,

$$n(B - L) = 30 - x \ .$$

Temos $n(L) = 40$; assim,

$$n(L - B) = 40 - x \ .$$

Somando o número de elementos das partes de $B \cup L$, obtemos:

$$n(B \cup L) = 60 = (30 - x) + x + (40 - x) = 70 - x \ ,$$

que resulta em $x = 10$. Isto é, $n(B \cap L) = 10$.

Substituindo o valor obtido de x no diagrama acima, obtemos o número de elementos de todas as partes de $B \cup L$.

Exemplo 27

Uma pesquisa foi realizada com pessoas que lêem revistas semanais. Entrevistando 200 pessoas, descobriu-se o seguinte:

85 pessoas compram a revista A,
75 pessoas compram a revista B,
65 pessoas compram a revista C,
30 pessoas compram as revistas A e B,
25 pessoas compram as revistas A e C,
20 pessoas compram as revistas B e C,
10 pessoas compram as três revistas.

Com base nestes dados, responda ao seguinte:

a) Quantas pessoas compram pelo menos uma das revistas?

b) Quantas pessoas não compram nenhuma das três revistas?

c) Quantas pessoas compram exatamente uma das revistas?

d) Quantas pessoas compram exatamente duas das revistas?

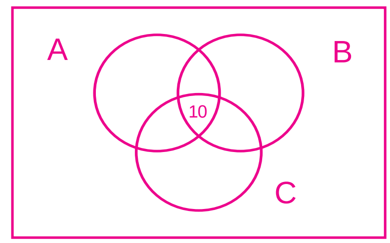
Solução:

Seja U o conjunto das pessoas que foram entrevistadas.
Sejam

$$A = \{x \in U \mid x \text{ compra a revista } A\}$$

$$B = \{x \in U \mid x \text{ compra a revista } B\}$$

$$C = \{x \in U \mid x \text{ compra a revista } C\}$$



O diagrama ao lado representa a situação.

Comecemos com a região que representa o conjunto das pessoas que compram as três revistas. Este é o conjunto $A \cap B \cap C$ e tem 10 elementos.

Em seguida, consideramos as interseções de dois conjuntos. Um total de 30 pessoas compra as revistas A e B, isto é, $n(A \cap B) = 30$. Portanto,

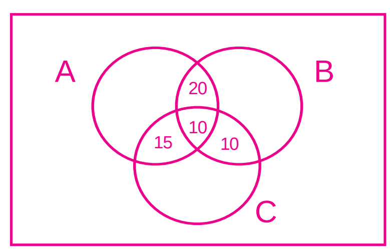
$$30 - 10 = 20$$

compram *apenas* as revistas A e B.

Analogamente, $n(A \cap C) = 25$. Portanto, $25 - 10 = 15$ pessoas compram *apenas* as revistas A e C.

Por último, $n(B \cap C) = 20$. Portanto, $20 - 10 = 10$ pessoas compram *apenas* as revistas B e C.

Com as informações obtidas até agora, temos o diagrama da figura ao lado.



O próximo passo é determinar o número de pessoas que compram *apenas* a revista A, *apenas* a revista B ou *apenas* a revista C.

Vejamos, $n(A) = 85$. Subtraindo o número dos que compram outras revistas, temos:

$$85 - 10 - 20 - 15 = 40 \; .$$

Portanto, 40 pessoas compram apenas a revista A.

Analogamente, $n(B) = 75$. Logo,

$$75 - 10 - 20 - 10 = 35$$

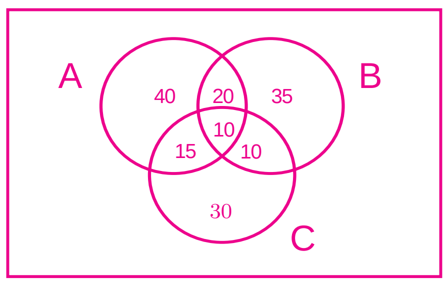
pessoas compram apenas a revista B.

Finalmente $n(C) = 65$. Portanto,

$$65 - 15 - 10 - 10 = 30$$

pessoas compram apenas a revista C.

Agora podemos acabar de preencher o diagrama e passar a responder as perguntas:



a) Somando o número de elementos de todas as partes de $A \cup B \cup C$, obtemos

$$n(A \cup B \cup C) = 30 + 40 + 20 + 15 + 10 + 35 + 10 = 160 \; .$$

Portanto, 160 pessoas compram pelo menos uma das três revistas.

b) Como $n(U) = 200$, então

$$n(U) - n(A \cup B \cup C) = 200 - 160 = 40$$

pessoas não compram nenhuma das três revistas.

c) Temos que 40 pessoas compram apenas revista A, 35 compram apenas revista B e 30 compram apenas revista C. Portanto,

$$40 + 35 + 30 = 105$$

pessoas compram apenas uma das revistas.

d) Temos que 20 pessoas compram revistas A e B, mas não C; 15 pessoas compram revistas A e C, mas não B; 10 pessoas compram revistas B e C, mas não A. Portanto,

$$10 + 15 + 20 = 45$$

pessoas compram exatamente duas revistas.

Vimos nesta aula que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \ .$$

Em particular, se A e B são *disjuntos*, então $n(A \cap B) = 0$ e logo,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A) + n(B) \ .$$

Portanto, se dois conjuntos são disjuntos, o número de elementos de sua união é a soma dos números de elementos destes conjuntos. Isto é,

$$\boxed{\text{Se } A \cap B = \emptyset \text{ então } n(A \cup B) = n(A) + n(B).}$$

Resumo

Nesta aula iniciamos o estudo de problemas que envolvem a determinação do número de elementos de um certo conjunto. Vimos que os conjuntos se dividem em *conjuntos finitos*, que são os que possuem um certo número de elementos, e os conjuntos infinitos.

Para o caso da união de dois conjuntos, vimos a fórmula $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, chamada de "princípio da inclusão-exclusão".

Na próxima aula, continuaremos a discussão da questão do número de elementos da união de conjuntos.

Exercícios

Nos exercícios 1 a 5, calcule $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$ e $n(A \cup B)$. Em todos os itens verifique que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \ .$$

Em particular, verifique que se A e B são disjuntos (isto é, $n(A \cap B) = 0$), vale que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) \ .$$

1. $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{e, f, g, h\}$.

2. $A = \{2, 4, 6, 8\}$ e $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

3. $A = \{x \mid x \text{ é inteiro entre 1 e 5}\}$,
   $B = \{x \mid x \text{ é inteiro entre 3 e 7}\}$.

4. Se $n(A \cup B) = 20$, $n(A) = 10$ e $n(B) = 15$, encontre $n(A \cap B)$. Faça um diagrama.

5. Se $n(A \cup B) = 10$, $n(A) = 8$ e $n(A \cap B) = 4$, quantos elementos tem o conjunto B?

Nos exercícios 6,7 e 8, sejam A e B subconjuntos de um conjunto universo U. Sabendo-se que $n(U) = 60$, $n(A) = 32$, $n(B) = 40$ e $n(A \cap B) = 23$, calcule:

6. (a) $n(A \cup B)$ (b) $n(U - (A \cup B))$

7. (a) $n(A^c)$ (b) $n(B^c)$ (c) $n(A^c \cap B)$

8. (a) $n(A^c \cap B^c)$ (b) $n(A^c \cup B^c)$.

Apêndice: As somas infinitas

A questão finito versus infinito é fundamental e está presente em toda a História da Matemática. Anaximandro (610-540a.C.), que foi contemporâneo de Tales de Mileto, inaugurou esta polêmica posicionando-se a favor do infinito. Para explicar como o Mundo poderia ser construído, ele foi além das idéias correntes da época, de massas elementares, a saber: fogo, ar, terra e água. Ele concebeu algo ainda mais primitivo, que descreveu com o termo grego *ápeiron*, que pode ser traduzido como ilimitado ou infinito.

Tales de Mileto foi o primeiro matemático cujo nome ficou registrado na História. Ele previu o eclipse solar que ocorreu sobre a Grécia e a Mesopotâmia no dia 28 de maio de 585a.C.

Outro debatedor ilustre foi Aristóteles, que era favorável a um modelo finito do universo. Confrontado com a seqüência $1, 2, 3, 4, 5, ...$, o modelo básico de algo infinito, ele responderia com o argumento de que esta seqüência só existe na mente humana, sendo assim um "infinito virtual", por assim dizer.

No entanto, o infinito sempre teve muita força dentro da Matemática. Foi usando estas idéias de maneira engenhosa que Arquimedes atingiu seus maiores triunfos, calculando áreas e volumes de figuras e de sólidos não regulares, tais como áreas delimitadas por trechos de parábolas e o volume da interseção de cilindros de mesmo raio.

Para que o uso pleno destas idéias fosse feito, foi preciso esperar muito tempo, até que as noções de cálculo diferencial e integral fossem estabelecidas.

Você estudará esses tópicos nas disciplinas de Cálculo.

É famoso o fascínio que as somas infinitas exerceram sobre os Matemáticos desde os tempos mais remotos. Este tipo de problema foi o que atraiu a atenção de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), um dos co-inventores do Cálculo, juntamente com Sir Isaac Newton (1642-1727), para a Matemática. Leibniz iniciou sua carreira como diplomata e foi numa de suas missões em Paris, que conheceu o cientista Christian Huygens, assim como a fina flor da intelectualidade francesa. Huygens desafiou Leibniz a calcular a soma da série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \cdots + \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)} + \dots$$

Para saber mais sobre números triangulares, veja a Aula 12 deste módulo de Matemática Discreta.

isto é, a soma dos inversos dos números triangulares. Leibniz encantou-se com estes assuntos e apresentou a solução a seguir:

Primeiro, ele observou que

$$\begin{aligned} 2\left(1-\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{3} \\ 2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{6} \\ 2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ou seja, em geral,

$$2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 2\left(\frac{n+1-n}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

Usando isto, ele reescreveu a série original da seguinte maneira:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+... \;=\; 2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...\right)$$

e conclui que sua soma é $2(1-0) = 2$.

A resposta 2 é correta.

Apesar de engenhosa, uma verdadeira poesia Matemática, a solução de Leibniz está errada. É como acontece, às vezes, na Matemática: chega-se à resposta correta de maneira errada. Na verdade, foi um puro golpe de sorte.

Observe que ele também poderia ter feito o seguinte:

$$\begin{aligned} 2\left(2-\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{4-3}{2}\right) &= 1 \\ 2\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{9-8}{6}\right) &= \frac{1}{3} \\ 2\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right) = 2\left(\frac{16-15}{12}\right) &= \frac{1}{6} \\ 2\left(\frac{5}{4}-\frac{6}{5}\right) = 2\left(\frac{25-24}{20}\right) &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Ou seja, em geral,

$$2\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right) = 2\left(\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

E agora, usando a mesma argumentação, temos

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+... = 2\left(2-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{4}-...\right)$$

concluindo que a soma é $2(2-0)=4$.

Você pode explicar isto? Onde está o erro?

As identidades algébricas certamente estão corretas. O problema está no uso de uma propriedade que sabemos ser verdadeira para somas finitas em uma "soma infinita".

Para fazer estas somas especiais é preciso usar a noção de convergência, que você aprenderá na disciplina chamada Análise.

A razão pela qual sabemos que a resposta de Leibniz é correta é a seguinte: é possível calcular a soma de um número arbitrário de termos da série, porém <u>finito</u>:

$$\begin{aligned}
1 &= 2\left(1-\frac{1}{2}\right)\\
1+\frac{1}{3} &= \frac{4}{3}=2\times\frac{2}{3}=2\left(1-\frac{1}{3}\right)\\
1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} &= \frac{9}{6}=\frac{3}{2}=2\times\frac{3}{4}=2\left(1-\frac{1}{4}\right)\\
1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10} &= \frac{48}{30}=\frac{8}{5}=2\times\frac{4}{5}=2\left(1-\frac{1}{5}\right)\\
1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15} &= \frac{50}{30}=\frac{5}{3}=2\times\frac{5}{6}=2\left(1-\frac{1}{6}\right)
\end{aligned}$$

Você verá a demonstração desta fórmula na Aula 29 desta disciplina, como um exemplo do método de demonstração chamado *indução finita.*

Em geral,

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

É devido a este fato que dizemos que a soma infinita $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{2}n(n+1)}+\ldots$ *converge* para 2.

Bom, você agora já percebe que a passagem de finito para infinito é delicada. Mas este tipo de coisa é que torna a Matemática tão rica e fascinante e você terá muito em breve, a oportunidade de lidar com estes conceitos.

Número de elementos de um conjunto - II

Objetivos

Estudar a determinação do número de elementos de um conjunto envolvendo a união de 3 conjuntos.
Apresentar o Princípio da Inclusão-Exclusão para a união de 3 conjuntos.
Estudar partição de um conjunto.

Vamos começar esta aula com mais um exemplo envolvendo número de elementos de um conjunto. Como sempre, o uso de diagramas de Venn pode ser de grande ajuda.

Exemplo 28

O técnico da seleção brasileira de futebol convocou 22 jogadores para um amistoso. Destes, 2 são goleiros, 10 podem jogar na defesa, 10 podem jogar no meio-de-campo e 9 podem jogar no ataque.

Sabe-se também que 4 jogadores podem jogar na defesa e no meio, 5 jogadores podem jogar no meio ou no ataque e apenas 1 jogador pode jogar na defesa e no ataque.

Os goleiros só podem jogar no gol. Perguntas:

a) Quantos jogadores são tão versáteis que podem jogar na defesa, no meio e no ataque?

b) Quantos podem jogar apenas na defesa?

c) Quantos podem jogar apenas no ataque?

d) Quantos podem jogar no ataque ou no meio, mas nunca na defesa?

Solução:

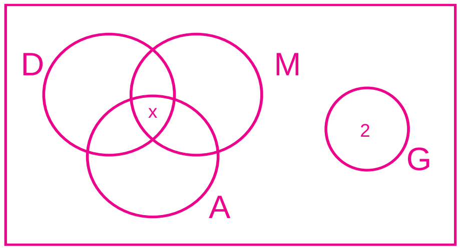
Seja U o conjunto dos 22 jogadores convocados. Representamos este problema por quatro regiões que correspondem aos conjuntos D, A, M e G, dos jogadores que podem jogar na defesa, no ataque, no meio e os goleiros, respectivamente.

A região G é disjunta das demais, isto é, $G \cap (D \cup A \cup M) = \emptyset$. Temos que $n(G) = 2$, portanto:

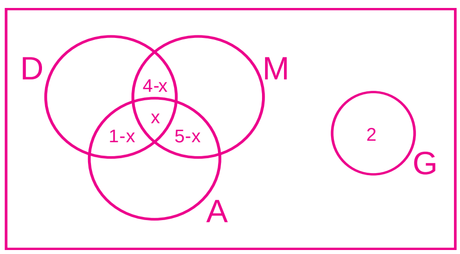
$$n(D \cup A \cup M) = 22 - 2 = 20 \ .$$

Para determinar o número de elementos de cada região, vamos, como no exemplo anterior, começar com a interseção dos três conjuntos. Contudo, não foi dado o número de elementos da interseção dos três conjuntos.

Uma solução é usar uma variável x para representar $n(D \cap M \cap A)$ e determinar o número de elementos das outras regiões em função desta variável.



O número de elementos das interseções de cada par de conjuntos é $n(D \cap M) = 4$, $n(D \cap A) = 1$ e $n(M \cap A) = 5$. Com esta informação, chegamos ao diagrama da figura abaixo.



Para completar o diagrama, calculamos, em função da variável x, o número de jogadores que jogam *apenas* na defesa, *apenas* no meio e *apenas* no ataque.

Temos que $n(D) = 10$. O número de jogadores que atuam apenas na defesa é

$$10 - (1 - x) - (4 - x) - x = 5 + x \ .$$

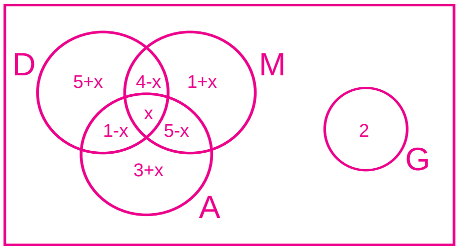
Como $n(M) = 10$, o número de jogadores que atuam apenas no meio é

$$10 - (5 - x) - (4 - x) - x = 1 + x \ .$$

Como $n(A) = 9$, o número de jogadores que atuam apenas no ataque é

$$9 - (1 - x) - (5 - x) - x = 3 + x \ .$$

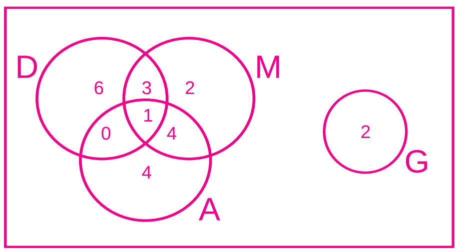
Com esta informação, completamos o diagrama.



Somando as partes de $D \cup M \cup A$, obtemos:

$$\begin{aligned} 20 &= n(D \cup M \cup A) \\ 20 &= (5+x)+(3+x)+(1+x)+(4-x)+(1-x)+(5-x)+x \\ 20 &= 19+x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Substituindo o valor de x, obtemos finalmente o diagrama a seguir. Com ele podemos responder facilmente as questões propostas.



a) Apenas um jogador pode jogar na defesa, no meio e no ataque.

b) Seis jogadores podem jogar apenas na defesa.

c) Quatro jogadores podem jogar apenas no ataque.

d) Os jogadores que não podem jogar na defesa são em número de $4+4+2=10$.

Imagem gentilmente cedida pelo Projeto Portinari / João Cândido Portinari.

Futebol (1940).
Óleo sobre tela de Portinari.

Para saber mais sobre a vida e obra de Portinari, visite o site do Projeto Portinari em http://www.portinari.org.br

Princípio da inclusão-exclusão para 3 conjuntos

Raciocinando como no exemplo anterior, podemos provar o Princípio da inclusão-exclusão para 3 conjuntos:

Dados 3 conjuntos A, B e C, vale que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ -n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\ .$$

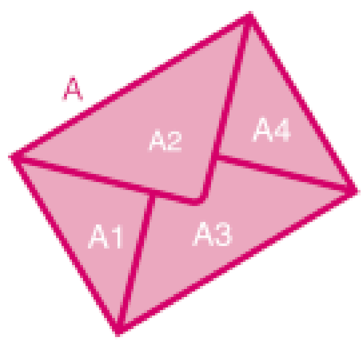
Poderíamos ter usado esta fórmula para resolver o problema do exemplo anterior. Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ &\quad -n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ 20 &= 9 + 10 + 10 - 1 - 5 - 4 + n(A \cap D \cap M) \\ n(A \cap D \cap M) &= 1\ , \end{aligned}$$

que foi o valor encontrado antes. Contudo, saber utilizar variáveis é bastante útil para vários problemas envolvendo três ou mais conjuntos.

Partição de um conjunto

Considere o diagrama abaixo:



A palavra "partição" vem do verbo "partir", significando quebrar, separar. Traz em si a idéia de que o conjunto A foi "partido" em várias partes, que são os conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4.

Por outro lado, a expressão "união disjunta" traduz a idéia de que o conjunto A é a *união* dos conjuntos A_i e que estes subconjuntos são *disjuntos* dois a dois.

Neste diagrama temos um conjunto A e quatro subconjuntos de A que são A_1, A_2, A_3 e A_4. Estes subconjuntos são disjuntos dois a dois, isto é, qualquer um dos A_i's é disjunto de todos os outros. Além disso, a união de todos eles é o conjunto A.

Quando isto acontece, dizemos que os subconjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4 formam uma partição do conjunto A. Dizemos também que o conjunto A é a união disjunta dos conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4.

Na situação do diagrama anterior, o número de elementos de A é a soma do número de elementos dos conjuntos A_1, A_2, A_3 e A_4, ou seja:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) \ .$$

Em geral, vale o seguinte:

Seja A um conjunto. Dizemos que os subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de A formam uma partição de A se:

1. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são disjuntos dois a dois.

2. $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n$.

Neste caso, dizemos também que A é a união disjunta de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e vale que:

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_n) \ .$$

Na próxima aula começaremos o estudo sistemático das técnicas de contagem. Estas são técnicas para determinar o número de elementos de conjuntos em várias situações específicas. Contudo, estas técnicas normalmente não são enunciadas na linguagem de teoria de conjuntos (o que tornaria sua formulação mais complicada).

A afirmação acima de que se A é *união disjunta* de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ então $n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \ldots n(A_n)$, como técnica de contagem, recebe o nome de Princípio Aditivo.

O Princípio Aditivo pode ser formulado da seguinte forma: se algo que estamos contando pode ser separado em várias partes, então a quantidade total deste algo é a soma (daí o nome princípio *aditivo*) das quantidades em cada parte.

Na verdade, estamos acostumados a usar o Princípio Aditivo cotidianamente. Vamos a um exemplo simples, mas que mostra o uso comum do Princípio Aditivo:

Exemplo 29

Quantos inteiros entre 0 e 99 possuem o algarismo 9?

Solução:

Podemos dividir os inteiros entre 0 e 99 em duas partes:

$A_1 = \{0, 1, \ldots, 88, 89\}$

$A_2 = \{90, 91, \ldots, 98, 99\}$

No conjunto A_1 temos 9 inteiros que têm o algarismo 9, a saber:

$$9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 \,.$$

No conjunto A_2 todos os 10 inteiros têm o algarismo 9.

Portanto, no total são

$$n(A_1) + n(A_2) = 9 + 10 = 19$$

inteiros entre 0 e 99 que possuem o algarismo 9.

No exemplo anterior, o uso do Princípio Aditivo está em que separamos o problema em duas partes, contamos cada parte em separado e somamos o resultado no final.

Resumo

Nesta aula vimos mais um exemplo de problemas de número de elementos de um conjunto, desta vez envolvendo a união de 3 conjuntos. Vimos o princípio da inclusão-exclusão para a união de 3 conjuntos.

Retomamos o tópico da união disjunta de conjuntos, iniciado na aula passada, e definimos a partição de um conjunto A.

Por fim, vimos o princípio aditivo.

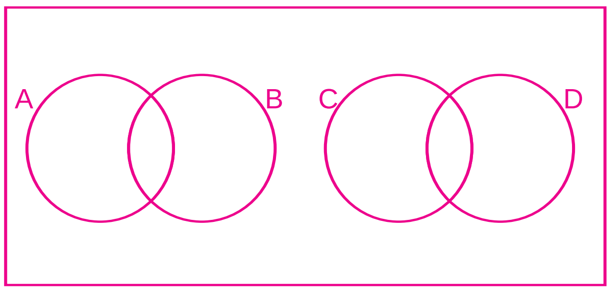
Exercícios

1. Uma pesquisa entre pessoas que moram em Niterói e trabalham no Rio revela que, de 50 pessoas entrevistadas, 20 delas pegam a barca com alguma freqüência, 24 pegam ônibus, enquanto que 10 às vezes pegam barca e às vezes pegam ônibus. Determine:

   (a) Quantos passageiros vão *apenas* de barca?

   (b) Quantos passageiros vão *apenas* de ônibus?

   (c) Quantos passageiros se utilizam de outros meios de transporte?



2. Observe a figura acima. Sabendo-se que:

$$\begin{array}{ll} n(U) = 85 & n(A \cup B) = 40 \\ n(A) = 30 & n(C \cup D) = 35 \\ n(B) = 20 & n(A \cap B) = 2\, n(C \cap D) \\ n(C) = 15 & \end{array}$$

   Determine:

   (a) $n(A \cap B)$

   (b) $n(D)$

   (c) $n(U - (A \cup B \cup C \cup D))$

   Proponha uma situação que possa ser representada por este problema.

Nas questões 3, 4 e 5, sejam A, B e C subconjuntos de um mesmo conjunto universo U. Sabendo-se que: $n(U) = 100$, $n(A) = 30$, $n(B) = 25$, $n(C) = 36$, $n(A \cap B) = 6$, $n(A \cap C) = 10$, $n(B \cap C) = 14$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$, determine:

3. (a) $n(A \cup B \cup C)$

   (b) $n(A^c)$

   (c) $n(B^c)$

4. (a) $n(A^c \cap B \cap C)$
   (b) $n(A \cap (B \cup C))$
   (c) $n\left(A \cap (B \cup C)^c\right)$

5. (a) $n\left(A \cup (B \cap C)\right)$
   (b) $n\left(A^c \cap B^c \cap C^c\right)$
   (c) $n\left((A^c \cap B^c \cap C^c)^c\right)$

6. Uma pesquisa em um supermercado mostrou que, entre 150 consumidores, 60 compram uma marca A de sabão em pó, 40 compram uma marca B e 30 compram uma marca C. Dos entrevistados, 10 compram as três marcas, 20 compram as marcas A e B, 15 compram as marcas A e C e 10 compram as marcas B e C.

   Com base nestes dados, determine:

   (a) Quantos consumidores compram alguma das três marcas.
   (b) Quantos consumidores compram apenas a marca A.
   (c) Quantos consumidores compram as marcas A ou B, mas não a marca C.
   (d) Quantos compram *exatamente* duas das marcas.
   (e) Quantos compram *apenas* uma das marcas.
   (f) Quantos dos consumidores não compram nenhuma das marcas.

7. Foi realizada uma pesquisa sobre preferências partidárias, perguntando aos entrevistados se já haviam votado nos partidos A, B, C ou D. A pesquisa trouxe à luz os seguintes fatos:

   Do total de 130 pessoas entrevistadas, 17 já votaram no partido D. Estas pessoas que já votaram no partido D nunca votaram em outro partido.

   60 pessoas já votaram no partido A

   50 pessoas já votaram no partido B

   70 pessoas já votaram no partido C

   30 pessoas já votaram nos partidos A e C

   25 pessoas já votaram nos partidos B e C

   22 pessoas já votaram nos partidos A e B.

Sabendo que todos os 130 entrevistados já votaram em algum dos 4 partidos mencionados, determine:

(a) Quantas pessoas já votaram nos 3 partidos?

(b) Quantas pessoas só votaram no partido A?

(c) Quantas pessoas só votaram em um partido?

(d) Quantas pessoas já votaram em exatamente dois partidos?

Represente a situação, por meio de um diagrama de Venn.

8. Sejam A, B e C conjuntos. Prove o Princípio da Inclusão-Exclusão:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) \\ -n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\ , \end{aligned}$$

usando o mesmo princípio para dois conjuntos (Aula 4) e também a distributividade da união e da interseção de conjuntos (Aula 3).

Princípio fundamental da contagem

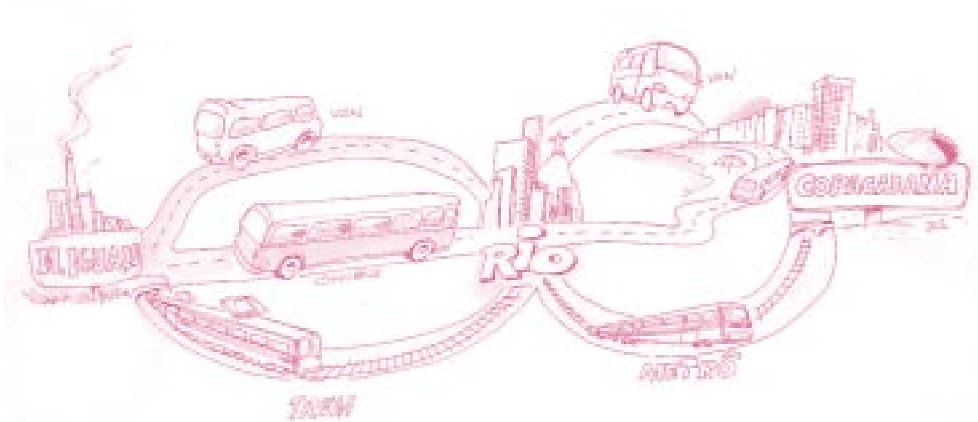
A Matemática está ficando preguiçosa.
A Matemática está deixando os princípios fazerem o trabalho para você de forma que não tenha que fazê-lo você mesmo.
George Pólya

Objetivos

Apresentar o princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem, que é a base para as técnicas de contagem que estudaremos nas aulas seguintes neste módulo.

Neste aula apresentaremos uma técnica de contagem: o princípio multiplicativo. Este princípio lida com situações em que uma tarefa se divide em várias etapas. Vamos começar por um exemplo.

Uma pessoa mora em Nova Iguaçu e trabalha em Copacabana. Ela vai trabalhar todos os dias usando apenas transporte coletivo. Esta pessoa vai de Nova Iguaçu ao Centro do Rio tomando ônibus, van ou trem. Do Centro do Rio, pode ir a Copacabana de ônibus, van ou metrô. Levando em conta apenas estas possibilidades, de quantas maneiras ela poderá ir de casa ao trabalho?



Neste caso podemos contar facilmente todas as 9 possibilidades:

$$\{(V,V),(V,O),(V,M),(O,V),(O,O),(O,M),(T,V),(T,O),(T,M)\}\ ,$$

onde usamos uma notação em que, por exemplo, (T,M) indica que ela toma o trem no primeiro percurso e, em seguida, o metrô.

Em geral, a solução de problemas deste tipo se baseia no princípio multiplicativo, também chamado de princípio fundamental da contagem.

O matemático George Pólya (1887–1985) nasceu na Hungria, mas trabalhou em diversos países. Viveu a maior parte de sua vida nos EUA.

Pólya deu contribuições importantes em várias áreas da Matemática, entre elas teoria dos números, probabilidade, combinatória, análise complexa e equações diferenciais parciais.

Pólya publicou um livro, muito popular entre matemáticos, chamado “a arte de resolver problemas”, que já vendeu mais de um milhão de cópias desde que foi lançado.

Curioso que, inicialmente, nenhuma editora queria publicá-lo. Pólya tentou quatro editoras diferentes para conseguir publicar a versão em inglês do livro.

Suponha que existam N_1 maneiras de se realizar uma tarefa T_1 e N_2 maneiras de se realizar uma tarefa T_2. Então há $N_1 \times N_2$ maneiras de se realizar a tarefa T_1 seguida da tarefa T_2.

Exemplo 30

Na discussão acima, T_1 é a tarefa de ir de Nova Iguaçu ao Centro do Rio e $N_1 = 3$ (há 3 possibilidades de se fazer isto). Da mesma forma, T_2 é a tarefa de ir do Centro do Rio a Copacabana, e há $N_2 = 3$ possibilidades de se realizar esta tarefa. No total, há:

$$N_1 \times N_2 = 3 \times 3 = 9 \text{ possibilidades}$$

Exemplo 31

Um aluno se prepara para ingressar no ensino superior. Ele pode escolher entre 10 universidades. Se cada uma delas tiver 15 cursos, quantas possibilidades de cursos há para este aluno?

Solução:

$$10 \times 15 = 150 \text{ cursos diferentes.}$$

O princípio acima pode ser estendido para a situação em que temos várias tarefas, o que é chamado Princípio da Multiplicação Generalizado.

Se uma tarefa T_1 pode ser feita de N_1 maneiras, uma tarefa T_2 de N_2 maneiras, ..., uma tarefa T_k de N_k maneiras, então o número de maneiras de realizar $T_1, T_2, \ldots, T_k$, em seqüência, é $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_k$.

O índice k no enunciado representa qualquer inteiro maior ou igual a 1. Então, por exemplo, realizar 3 tarefas T_1, T_2 e T_3 em seguida, pode ser feito de $N_1 \times N_2 \times N_3$ maneiras.

Exemplo 32

Um restaurante oferece 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 tipos de sobremesa. Se um freguês deste restaurante decide tentar uma refeição diferente a cada noite, quanto tempo levará para esgotar todas as possibilidades?

Solução:

A questão é, em outras palavras, quantas combinações de pratos há no total. São 4 tipos de entrada, 10 pratos principais e 5 possibilidades de sobremesa. Portanto, o total de possibilidades é:

$$4 \times 10 \times 5 = 200 \ .$$

Este cliente levaria 200 noites para esgotar todas as possibilidades deste restaurante.

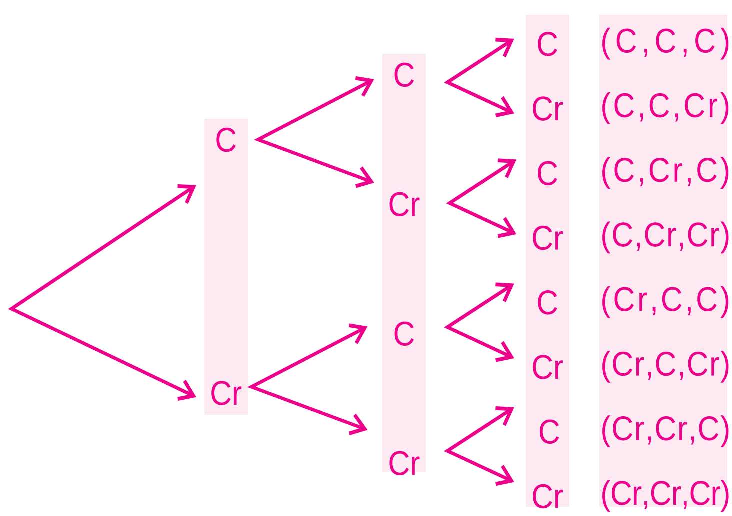
Exemplo 33

Em um jogo de "cara ou coroa", uma moeda é lançada 3 vezes. Qual o número de resultados possíveis?

Solução:

Cada lançamento tem dois resultados possíveis: cara ou coroa, que representaremos por C e Cr, respectivamente.

Como foi lançada 3 vezes, há $2 \times 2 \times 2 = 8$ resultados possíveis. Podemos ver os resultados possíveis no diagrama:



No diagrama anterior foi utilizada uma notação por ternos ordenados em que, por exemplo, (C, Cr, C) indica que os resultados dos 3 lançamentos foram, nesta ordem, cara, coroa e cara.

Quantos resultados têm exatamente 2 caras?

Inspecionando os 8 resultados possíveis, vemos que há 3 resultados com exatamente 2 caras.

Mas, e no caso de um número maior de lançamentos? Não poderemos, em geral, responder a pergunta inspecionando todas os resultados possíveis.

Em qualquer caso, o Princípio Multiplicativo permite dizer quantos resultados possíveis há no total. Se uma moeda for lançada N vezes, temos:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots 2}_{\text{N fatores}} = 2^N \text{ resultados possíveis.}$$

Destes 2^N resultados, quantos deles envolvem exatamente 2 caras? A resposta a esta pergunta envolve técnicas de contagem um pouco mais sofisticadas, que veremos na aula 10.

Em resumo, o princípio multiplicativo nos permite determinar quantos resultados há, mas dizer quantos deles têm exatamente 2 caras depende de outras técnicas.

Exemplo 34

Alguns cadeados usam anéis rotativos numéricos, em vez de chave. Existe um número que deve ser selecionado nos anéis numéricos para abrir o cadeado. Vamos chamar este número de *chave numérica*.

Suponha que um tal cadeado trabalha com números de 5 dígitos (por exemplo, 23478 é uma chave numérica possível). Quantas possibilidades de chave numérica existem?

Solução:

As chaves são números de 5 dígitos. Para cada dígito, temos 10 possibilidades, que são os algarismos $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$.

Portanto, temos

$$10.10.10.10.10 = 10^5 = 100000 \text{ possibilidades de chave.}$$

Só por curiosidade, se esta pessoa conseguisse testar 5 chaves numéricas por minuto, levaria $100000/5 = 20000$ minutos, ou seja, $20000/60 \approx 333$ horas (o símbolo $\approx$ significa "aproximadamente igual a").

Abrir o cadeado requer então um máximo de 100000 tentativas. No entanto, provavelmente a pessoa acharia a chave correta antes de testar todas as chaves possíveis.

Exemplo 35

Quantos inteiros múltiplos de 5 existem entre 1000 (inclusive) e 4999?

Solução:

Um número inteiro é múltiplo de 5 se, e somente se, seu algarismo das unidades for 0 ou 5. Então, se o número é $x_1x_2x_3x_4$, temos 4 possibilidades para x_1, que são os algarismos 1,2,3 e 4; temos 10 possibilidades para x_2 (todos os algarismos de 0 a 9), 10 possibilidades para x_3 e apenas duas possibilidades para x_4, que são os algarismos 0 e 5.

Portanto, há no total:

$$4 \times 10 \times 10 \times 2 = 800$$

múltiplos de 5 entre 1000 e 4999.

Exemplo 36

As palavras de um certo código são formadas por 2 letras e 2 algarismos, de tal forma que não há letras ou algarismos iguais. Assim, a palavra LY45 é palavra deste código, enquanto que AA23 não é palavra deste código, pois repete a letra A. Quantas palavras existem neste código ?

Solução:

Para a primeira letra temos 26 possibilidades (aceitando as letras K,W e Y como letras válidas). Para a segunda letra, temos 25 possibilidades, que são as 26 letras possíveis, menos a letra que já usamos e não podemos repetir.

De maneira análoga, para o primeiro algarismo temos 10 possibilidades e para o segundo algarismo temos 9 possibilidades, pois não podemos repetir o primeiro algarismo.

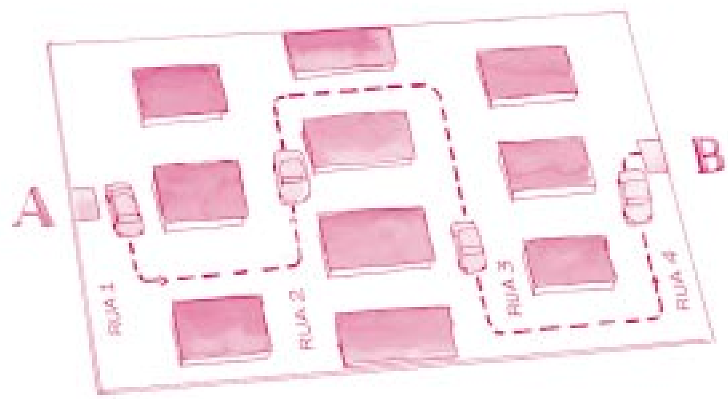
Portanto, há:

$$26 \times 25 \times 10 \times 9 = 58500$$

palavras neste código.

Exemplo 37

Considere o mapa abaixo. Quantos caminhos um carro que sai do ponto A pode tomar para chegar ao ponto B ? Suponha que a mão das ruas é tal que o carro pode ir apenas para a direita, para cima ou para baixo no mapa.



No mapa está indicado, em linha tracejada, um caminho possível que vai do ponto A para o ponto B.

Solução:

Há 4 ruas na direção vertical: são as ruas de 1 a 4, indicadas no mapa. O carro sai do ponto A, que fica na Rua 1 e vai para o ponto B, que fica na Rua 4.

Há 4 caminhos para ir da Rua 1 à Rua 2,
há 3 caminhos para ir da Rua 2 à Rua 3
e há 4 caminhos para ir da Rua 3 à Rua 4.

Portanto, dividimos o percurso do ponto A ao ponto B em 3 etapas. Multiplicando o número de maneiras de realizar cada etapa, temos:

$$4 \times 3 \times 4 = 48$$

caminhos possíveis do ponto A ao ponto B.

Resumo

Na Aula 6 aprendemos o princípio multiplicativo e o aplicamos à solução de diversos problemas. Nas aulas seguintes aprenderemos outras técnicas de contagem, entre elas, permutação, arranjo e combinação.

Exercícios

1. Uma pesquisa de opinião consiste em 6 perguntas, cada uma das quais tem 5 respostas possíveis. Se todas as perguntas devem ser respondidas, quantos resultados possíveis há para esta pesquisa ?

2. No jogo da Loto, cada jogo consiste na escolha de 5 números diferentes entre 0 e 99. Quantas cartelas um jogador deveria preencher para cobrir todas as possibilidades?

3. Uma pessoa deseja ir de avião do Rio de Janeiro para São Paulo e, no dia seguinte, de São Paulo para Brasília. Sabendo-se que uma certa companhia aérea tem 10 vôos diários do Rio para São Paulo e 5 vôos diários de São Paulo para Brasília, quantas possibilidades esta pessoa tem para realizar os dois vôos por esta companhia? Faça um diagrama.

4. Uma moeda é lançada 4 vezes. Quantos resultados possíveis existem? Faça um diagrama e descubra quantos destes resultados têm exatamente 2 caras e 2 coroas.

5. Em uma eleição há 15 candidatos para 2 vagas. Quantos resultados possíveis há para esta eleição ?

6. Na inscrição para um concurso da Receita Federal, os candidatos recebem um número de registro de 5 dígitos. O primeiro candidato a se inscrever recebe o número 00001. Quantos números de registro são possíveis?

7. Os primeiros 4 dígitos do número de telefone de 8 dígitos identificam a central telefônica. Por exemplo, o número 2455-8900 pertence à central telefônica de código 2455.

   Quantos telefones podemos ter em uma mesma central? Quantas centrais podem existir neste sistema? O primeiro dígito da central não pode ser 0.

8. As placas de carro no Brasil usam uma identificação que consta de 3 letras e 4 dígitos. Qual o número máximo de placas que podemos ter no Brasil?

9. Se você tem 5 pares de meias, 3 calças, 6 camisas e um chapéu, de quantas maneiras, usando apenas estas peças de vestuário, você pode se apresentar ao mundo?

10. O cadeado de um cofre usa um mostrador numérico com 20 números. Este mostrador deve ser girado para esquerda até um certo número, depois para a direita e depois para a esquerda novamente. A chave numérica deste cadeado é formada, portanto, por 3 números. Quantas combinações existem no total?

11. Para acessar sua conta bancária através do caixa automático, os clientes de um certo banco têm que digitar um código de 4 dígitos. Se não são permitidos códigos que usem o mesmo dígito 4 vezes (por exemplo, o código 2222 não é permitido), quantos códigos são possíveis?

12. Um pessoa está escolhendo um carro entre os modelos de duas marcas. A primeira tem 3 modelos que a interessa. Cada modelo pode vir em 5 cores diferentes. Enquanto que a segunda marca tem 5 modelos que a interessa, cada um deles podendo vir em 8 cores. Quantas possibilidades há para se escolher o carro?

13. No jogo da Loteria Esportiva, uma cartela é constituída de 13 jogos de futebol. Em cada cartela, o apostador deve escolher o resultado de cada um dos 13 jogos (3 resultados possíveis para cada jogo), podendo marcar 2 resultados em um único jogo. Em um jogo deste, de quantas maneiras podemos preencher uma cartela?

    Sugestão: a primeira tarefa é escolher, dentre os 13 jogos, aquele em que serão marcados 2 resultados.

Permutações

Objetivos

Estudar problemas de permutação.
Definir o fatorial de um número inteiro.

Nas próximas aulas aplicaremos o princípio multiplicativo a vários problemas de contagem, incluindo os problemas de permutações, de arranjos, de permutações com repetição e de combinações.

Estudamos o princípio multiplicativo na Aula 6.

Acompanhe uma discussão sobre os princípios na Matemática na aula 27.

Cada um destes problemas apresenta um tipo de situação típica e uma técnica de solução, derivada do princípio multiplicativo.

Para entender o que é permutação, vamos começar com um exemplo.

Um pai quer tirar uma fotografia de seus 3 filhos, mas não consegue colocar os 3 garotos em ordem: todos querem ficar no meio e ninguém quer ficar nos lados.

O pai poderia obrigá-los à força, mas como é paciente e educador moderno ele decide tirar uma foto de cada ordenação possível dos 3 meninos. Quantas fotos o paciente pai deverá tirar?

Os garotos se chamam André (A), João (J) e Pedro (P). É fácil *listar* todas as ordenações possíveis. Elas são as seguintes:

$$AJP, \quad APJ, \quad JAP, \quad JPA, \quad PAJ \text{ e } PJA$$

São, portanto, 6 ordenações possíveis.

Dado um conjunto de objetos distintos, uma permutação do conjunto é uma ordenação dos elementos deste conjunto.

No exemplo acima, o conjunto

$$\{A, J, P\}$$

possui 6 permutações, que são as listadas acima.

Uma maneira de calcular quantas são as permutações de um conjunto sem ter que listá-las é usar o princípio multiplicativo.

O livro de Jó é um dos livros que compõem o Antigo Testamento. Nele, Jó, um homem justo, bondoso e rico é subitamente arruinado nos bens, na família e na saúde. Na pobreza seus amigos se voltam contra ele.

Jó faz a sua experiência de Deus na pobreza e na marginalização. A confissão final de Jó: "Eu te conhecia só de ouvir. Agora, porém, meus olhos te vêem"(42,5), é o ponto de chegada de todo o livro.

Voltando ao nosso exemplo do pai com paciência de Jó, são 3 posições na foto, as quais representamos com 3 traços:

$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$

De quantas maneiras podemos preencher a primeira posição? De 3 maneiras, pois são 3 crianças. Uma vez escolhido quem fica na primeira posição, temos 2 escolhas possíveis para a segunda posição, pois restaram 2 crianças. Depois disto, resta somente uma criança, o que dá apenas 1 escolha para a terceira posição.

Usando o princípio multiplicativo (e a paciência do pai), o número de ordenações possíveis é:

$$\underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 1\ } = 6$$

O verbo "permutar" quer dizer trocar. Uma permuta é uma troca de alguma coisa. Em Matemática, o verbo "permutar" tem o sentido de ordenar. Permutar objetos é trocar sua ordem.

E se fossem 6 crianças, quantas fotos teriam que ser tiradas para que houvesse uma foto de cada ordenação possível das crianças? Em outras palavras, quantas permutações existem para um conjuntos de 6 crianças?

Vamos novamente representar as 6 posições possíveis na foto por 6 espaços vazios:

$$\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}\quad\underline{\quad}$$

Para preencher a primeira posição temos 6 possibilidades. Uma vez escolhida a criança que vai ficar na primeira posição, restam 5 crianças. Para a segunda posição temos 5 possibilidades. Escolhida a criança da segunda posição, ficam 4 crianças para escolher a próxima posição, e assim por diante...

O número de permutações do conjunto de 6 crianças é:

$$\underline{\ 6\ } \times \underline{\ 5\ } \times \underline{\ 4\ } \times \underline{\ 3\ } \times \underline{\ 2\ } \times \underline{\ 1\ } = 720$$

Com este mesmo raciocínio, podemos deduzir o número de permutações de um conjunto de n elementos. Cada permutação é uma ordenação deste conjunto. Temos n espaços vazios e queremos saber de quantas maneiras podemos preenchê-los com os n elementos do conjunto.

São n possibilidades para o primeiro espaço vazio, $n-1$ possibilidades para o segundo, $n-2$ para o terceiro, e assim por diante até que, para o último espaço vazio, resta apenas uma possibilidade.

Pelo princípio multiplicativo temos que o número total de permutações de um conjunto de n elementos é:

$$n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1\ .$$

É interessante apresentar uma notação para o produto acima.

> Para qualquer inteiro positivo n, definimos $n!$, que se lê "n fatorial", como o produto
> $$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3.2.1$$

Definimos também:

$$0! = 1\ .$$

O valor que escolhemos para $0!$ pode parecer um pouco arbitrário, mas simplifica algumas fórmulas que veremos adiante.

Exemplo 38

$$\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \\ 2! &= 2.1 = 2 \\ 3! &= 3.2.1 = 6 \\ 4! &= 4.3.2.1 = 24 \\ 5! &= 5.4.3.2.1 = 120\ . \end{aligned}$$

Note que:

$$n! = n.(n-1)! = n.(n-1).(n-2)! = \dots = n(n-1)(n-2)\dots(n-r)!\ ,$$

para qualquer inteiro r com $1 \leq r \leq n$.

Quando temos fatoriais no numerador e no denominador de uma fração, podemos simplificar a expressão sem ter que calcular todos os fatoriais, da seguinte forma:

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)\ .$$

Exemplo 39

$$
\begin{aligned}
15! &= 15.14! \\
\frac{14!}{12!} &= \frac{14.13.12!}{12!} = 14.13 \\
\frac{7!}{4!3!} &= \frac{7.6.5.4!}{4!3!} = \frac{7.6.5}{3!} = \frac{7.6.5}{6} = 7.5 = 35
\end{aligned}
$$

Quando aumentamos n, o valor de $n!$ se torna rapidamente astronômico. Por exemplo, usando um computador podemos calcular que 100! é o inteiro:

933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638
952175999932299156089414639761565182862536979208272237582511852
109168640000000000000000000000000 ,

que é um inteiro de 157 dígitos!

Vamos a mais uma notação. Chamaremos de $P(n)$ ao número de permutações de um conjunto de n elementos.

Provamos nesta aula o seguinte:

> O número de permutações de um conjunto de n elementos é:
>
> $$P(n) = n!$$

Exemplo 40

Qual o número de resultados possíveis em uma corrida de carros, onde 6 deles competem e todos chegam ao final ?

Solução:

Cada resultado possível corresponde a uma permutação do conjunto de 6 carros. O número total de permutações de um conjunto de 6 elementos é:

$$6! = 6.5.4.3.2.1 = 720 \ ,$$

que é o número de resultados possíveis da corrida.

Exemplo 41

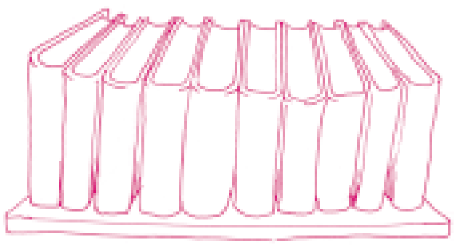
De quantas maneiras 10 livros *distintos* podem ser arrumados em uma prateleira de uma estante ?

Solução:

Cada "arrumação" corresponde a uma ordenação, ou permutação do conjunto dos 10 livros. O número total de permutações de um conjunto de 10 livros é:

$$10! = 10.9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 3628800 \ .$$

Neste exemplo, o fato dos 10 livros serem *distintos* é muito importante! Se alguns livros fossem idênticos, teríamos um problema de contagem diferente, que será abordado mais adiante.



10 livros em uma estante

Exemplo 42

Quando uma Copa do Mundo de futebol chega às semifinais, quantos resultados são possíveis? Logo após os jogos da semifinal, quantos resultados são possíveis?

Solução:

As semifinais de um campeonato mundial de futebol são disputadas por 4 times. Dependendo de seus resultados, qualquer time pode terminar em qualquer das 4 primeiras posições. Se qualquer ordenação dos times fosse possível, o número de resultados possíveis seria o número de permutações de 4 elementos, que é:

$$P(4) = 4! = 24 \ .$$

No entanto, algumas destas permutações não podem acontecer, pois se dois times disputam o mesmo jogo na semifinal, não podem se enfrentar novamente. Há, no total, 8 permutações não permitidas (por quê?), o que resulta em $24 - 8 = 16$ resultados possíveis.

Após os jogos da semifinal, temos dois times na final e dois times que farão um jogo para decidir as $3^{\underline{a}}$ e $4^{\underline{a}}$ colocações.

Usando o princípio multiplicativo, são duas possibilidades para o jogo final e 2 possibilidades para a disputa de $3^{\underline{o}}$ lugar. Logo, há:

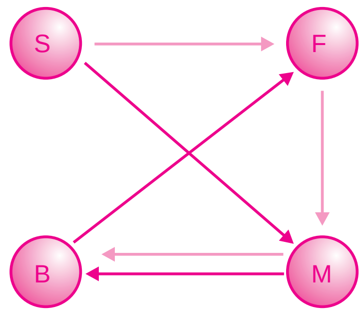
$$2 \times 2 = 4$$

resultados possíveis.

Exemplo 43

Uma pessoa sai de casa com a incumbência de ir ao supermercado (S), ir à feira (F), ir ao Banco (B) e ir ao mecânico de seu carro (M). Esta pessoa pode realizar estas 4 tarefas em qualquer ordem. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Solução:



A ilustração acima mostra duas ordens possíveis. Uma delas é: supermercado, em seguida mecânico, em seguida banco e por último feira. A outra possibilidade é: supermercado, em seguida feira, em seguida mecânico e por último banco.

O número de ordenações das 4 tarefas é o número de permutações de 4 elementos, que é:

$$P(4) = 4! = 24 \,.$$

Observe que cada ordenação corresponde a um caminho que passa pelos 4 pontos e passa por cada ponto apenas uma vez. Reciprocamente, cada caminho que passa pelos 4 pontos e passa por cada ponto apenas uma vez corresponde a uma permutação do conjunto dos 4 pontos.

Temos, portanto:

O número de caminhos que passa por n pontos, passando por cada ponto apenas uma vez e começando em qualquer um dos pontos é $n!$

Exemplo 44

Em campanha para reeleição, o presidente do Brasil quer visitar todas as capitais de todos os estados do país. Ele passará por cada capital apenas uma vez e pode começar de qualquer uma, quantas rotas são possíveis para esta turnê eleitoral?

Solução:

São 26 capitais a serem visitadas. Portanto são $P(26) = 26!$ rotas possíveis. O inteiro 26! é um número enorme com 27 dígitos!

Uma pergunta que este presidente deve se fazer é a seguinte: destas 26! rotas possíveis, qual é a mais curta? Este é um exemplo de um problema de caminho mínimo.

Resumo

Nesta aula estudamos problemas de permutação. Vimos também a definição de fatorial de um número inteiro.

Vimos que o número de permutações de um conjunto de n elementos é $n!$. Aplicamos esta fórmula a diversos exemplos.

Na próxima aula estudaremos outra técnica de contagem: os arranjos.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $3!$ (b) $5!$ (c) $\dfrac{10!}{8!}$ (d) $\dfrac{12!}{10!2!}$

2. Se $12! = 479001600$, calcule $13!$.

3. O que é permutação de n elementos? Crie um exemplo de problema de permutação.

4. De quantas maneiras as letras da palavra $NUVEM$ podem ser permutadas?

5. De quantas maneiras 5 pessoas podem sentar em 5 cadeiras em uma fila?

6. Em um ponto de ônibus, 8 pessoas chegam ao mesmo tempo. De quantas maneiras elas podem formar uma fila?

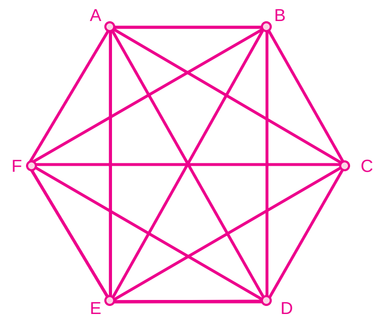
7. Uma prova de natação é disputada por 6 nadadores. Quantos resultados são possíveis?

8. Uma pessoa deve realizar 5 tarefas em um mesmo dia. Se as 5 tarefas podem ser feitas em qualquer ordem, de quantas maneiras pode ordenar as tarefas?

9. A figura abaixo representa 6 cidades: A, B, C, D, E e F. Um vendedor ambulante deve passar pelas seis cidades, passando por cada uma apenas uma vez.

A figura ao lado, em que representamos as cidades por pontos e os caminhos que as ligam por linhas é chamada de grafo.

Estudaremos os grafos nas aulas 31 e 32.



   (a) Se ele pode começar por qualquer cidade e terminar em qualquer cidade, quantos caminhos são possíveis?

   (b) Se o vendedor deve começar pela cidade A, quantos caminhos são possíveis?

   (c) Quantos caminhos possíveis existem se o vendedor deve passar pelas seis cidades uma vez e depois voltar a passar uma vez por cada cidade?

10. Um estudante está planejando ler a trilogia de Machado de Assis, que é formada pelos livros:

   – Memórias Póstumas de Brás Cubas
   – Quincas Borba
   – Dom Casmurro

Se os livros podem ser lidos em qualquer ordem, quantas ordens possíveis há para se ler a trilogia?

Machado de Assis (1839–1908) é considerado um dos maiores talentos literários brasileiros de todos os tempos.

Suas obras possuem um fino humor irônico e grande elegância de estilo. Foi o principal fundador da Academia Brasileira de Letras e o seu primeiro presidente.

Arranjos

Objetivos

Definir arranjo de n elementos tomados r a r.
Apresentar a fórmula para o cálculo de arranjos.

Em muitos problemas devemos determinar o número de maneiras de selecionar r objetos em uma certa ordem dentro de um conjunto de n objetos distintos, onde $n \geq r$.

Estes são chamados problemas de arranjo de n elementos, tomados r a r.

Portanto, o número de arranjos de n elementos, tomados r a r, é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos de um conjunto de n elementos.

Devemos ressaltar que um problema é de arranjo se a *ordem* em que os r elementos são selecionados é importante. Se a ordem não for importante, temos um outro tipo de problema, chamado combinação, que será visto na aula 10.

Um tipo de problema que pode ser considerado de arranjo: queremos saber o número de maneiras de permutar, ou ordenar, ou "arranjar" (aqui são todos sinônimos) r elementos distintos, mas escolhidos em um conjuntos de n elementos.

Vamos a um exemplo.

Exemplo 45

Em uma classe de 10 alunos, deve-se escolher um representante e seu suplente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Trata-se de selecionar 2 dentro de uma turma com 10 alunos. A ordem é importante, pois o primeiro será o representante e o segundo será suplente.

Temos 10 possibilidades para a primeira posição. Uma vez feita a escolha, restam 9 alunos, que são as 9 possibilidades para a segunda posição. Portanto, são:

$$\underline{10} \times \underline{9} = 90$$

possibilidades para formação desta comissão.

Seja A(n,r) o número de arranjos de n elementos, tomados r a r. Em outras palavras, $A(n,r)$ é o número de maneiras de selecionar, em ordem, r elementos em um conjunto de n elementos distintos.

Em geral, se devemos selecionar, em alguma ordem, r objetos de um conjunto de n objetos $(n \geq r)$ distintos, temos n maneiras de preencher a primeira posição, seguido de $n-1$ maneiras de preencher a segunda posição, seguido de $n-2$ maneiras de preencher a terceira posição, e assim por diante. Para a $r-$ésima posição, teremos $n-r+1$ possibilidades de preenchimento.

$$\underline{\text{n}} \times \underline{\text{n-1}} \times \underline{\text{n-2}} \times \ldots \times \underline{\text{n-r+1}}$$

Usando o princípio multiplicativo, temos:

$$A(n,r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \ .$$

Podemos escrever este resultado de uma forma mais compacta usando a notação fatorial:

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{[n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1]}{(n-r)(n-r-1)\ldots 3.2.1} = \frac{n!}{(n-r)!} \ .$$

Temos, portanto, a fórmula:

$$\boxed{A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

Exemplo 46

Em uma reunião de condomínio onde 10 moradores estão presentes, deve-se escolher, entre eles, um síndico, um subsíndico, um secretário e um tesoureiro. De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

Este problema é o de selecionar, em ordem, 4 pessoas dentro de um conjunto de 10 pessoas. Este número é:

$$A(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!} = 10.9.8.7 = 5040 \; .$$

Há, portanto, 5040 possibilidades.

Vamos a mais um exemplo:

Exemplo 47

Um empregador tem 3 tarefas distintas que deve distribuir para 6 empregados. De quantas maneiras pode fazer isto, se cada empregado pode realizar apenas uma tarefa e cada tarefa deve ser dada a apenas um empregado?

Solução:

Trata-se de escolher 3 empregados para dar as 3 tarefas. A ordem da escolha é importante porque as tarefas são distintas. Se as tarefas são T_1, T_2 e T_3, então podemos dar a tarefa T_1 ao primeiro empregado selecionado, a tarefa T_2 ao segundo empregado e a tarefa T_3 ao terceiro empregado selecionado.

O número de soluções é, portanto, o número de arranjos de 6 elementos, tomados 3 a 3. Portanto, são:

$$A(6,3) = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 6.5.4 = 120$$

maneiras de distribuir as tarefas.

Observe que os exemplos descrevem situações muito diferentes umas das outras, mas há um padrão: todos eles envolvem determinar o número de maneiras de selecionar, em ordem, um certo número de elementos de um conjunto. Isto é o que caracteriza o problema de arranjo.

Observações:

Quando $n = r$, temos que o número de arranjos de n elementos, tomados n a n, é o número de maneiras de selecionar, em ordem, n elementos de um conjunto de n elementos. Logo, é o número de maneiras de ordenar n

elementos. Este é o número de permutações de n elementos, que é $P(n)$. Por esta observação, temos:

$$A(n,n) = P(n) \ .$$

Mas, como vimos na aula 7, $P(n) = n!$.

Por outro lado, fazendo $n = r$ na fórmula de arranjo, também obtemos

$$A(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \ .$$

Aqui fica claro porque é interessante definir $0!$ como sendo igual a 1: isto faz com que a fórmula $A(n,r) = \frac{n!}{r!}$ seja válida para $n = r$.

Poderíamos, em princípio, ter definido o "zero fatorial" livremente, ou simplesmente não tê-lo definido. Contudo, a observação acima mostra que a definição $0! = 1$ é útil porque leva a uma harmonia da fórmula para $A(n,r)$ com a fórmula para $P(n)$.

Exemplo 48

O prefeito de uma cidade está trabalhando com sua equipe, decidindo as metas de sua administração. Seus assessores lhe apresentaram uma lista de 30 metas, dividas em 3 grupos:

12 metas de curto prazo;

10 metas de médio prazo;

8 metas de longo prazo.

O prefeito então ordena que seus assessores escolham 5 metas de cada grupo, em uma ordem de prioridade em cada grupo.

De quantas maneiras isto pode ser feito?

Solução:

O problema se divide em três tarefas: escolher 5 metas em cada um dos três grupos. Como deve haver uma ordem de prioridade, a ordem da escolha é importante. Trata-se então de um problema de arranjo.

A escolha das 5 metas de curto prazo pode ser feita de:

$$A(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!} = 95040 \quad \text{maneiras} \ .$$

A escolha das 5 metas de médio prazo pode ser feita de

$$A(10,5) = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10.9.8.7.6.5!}{5!} = 30240 \quad \text{maneiras}\ .$$

A escolha de 5 metas de longo prazo pode ser feita de

$$A(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8.7.6.5.4.3!}{3!} = 6720 \quad \text{maneiras}\ .$$

Usando o princípio multiplicativo, o prefeito tomaria um grande susto ao descobrir que possui

$$95040 \times 30240 \times 6720 = 19313344512000$$

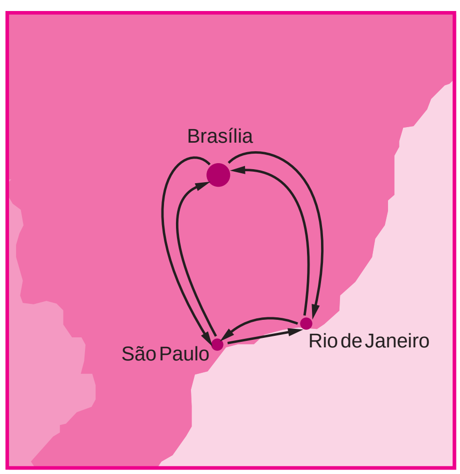
possibilidades para seu plano de administração!

Exemplo 49

Uma companhia aérea tem vôos ligando 5 cidades, interligando cada uma destas cidades a todas as outras. Calcule quantas rotas diferentes esta companhia possui. Considere a ida uma rota diferente da volta. Assim, Rio–Brasília é uma rota enquanto Brasília–Rio é outra.

Solução:

Na figura ao lado representamos as rotas ligando 3 cidades:



Cada rota é formada por duas cidades, sendo que a ordem é importante porque as mesmas duas cidades, em ordem diferente, formam 2 rotas diferentes.

Portanto, o número de rotas é o número de maneiras de selecionar 2 cidades, de um conjunto de 5 cidades, em que a ordem da escolha é importante. É um problema de arranjo.

Na figura anterior, sendo 3 cidades, temos:

$$A(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6 \quad \text{rotas.}$$

Voltando à companhia aérea, a resposta é o número de arranjos de 5, tomados 2 a 2, isto é:

$$A(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{120}{6} = 20\ .$$

Esta companhia aérea possui 20 rotas.

Na figura anterior, representamos as cidades por pontos e as rotas por linhas ligando estes pontos. Este tipo de figura é chamado um grafo, e será estudado nas Aulas 31 e 32. Os pontos (as cidades na figura) são chamados vértices do grafo, enquanto as linhas ligando os vértices são chamadas arestas do grafo.

Quando as arestas têm uma orientação, como é o caso acima, o grafo é chamado de grafo dirigido ou orientado.

Resumo

Nesta aula vimos a definição de arranjo de n elementos, tomados r a r, denotado $A(n,r)$, que é o número de maneiras de selecionar r elementos em um conjunto de n elementos, onde a ordem da escolha é importante.

Mostramos a fórmula $A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ e a aplicamos à solução de alguns exemplos.

Na próxima aula apresentaremos mais uma técnica de contagem: a permutação com elementos repetidos.

Exercícios

1. Calcule:
   (a) $A(5,3)$
   (b) $A(2,1)$
   (c) $A(5,5)$
   (d) $A(20,18)$

2. O que é arranjo de n elementos tomados r a r? Dê um exemplo. Compare arranjo com permutação.

3. De quantas maneiras 4 pessoas em uma família de 10 podem se colocar em uma foto?

4. Um departamento de uma Universidade tem 10 professores. Estes professores devem escolher um chefe e um vice-chefe do departamento. De quantas maneiras podem fazê-lo?

5. (a) Para ganhar em uma corrida de cavalos, um apostador deve acertar o primeiro e o segundo colocados em um páreo em que participam 8 cavalos. Quantos são os resultados possíveis?
   (b) Suponha agora que o apostador deve acertar o primeiro e o segundo colocado nos 2 primeiros páreos. Quantos são os resultados possíveis?

6. A final de um campeonato de futebol termina empatada e deve ir para disputa de pênaltis. Um técnico deve selecionar 5 jogadores, dentro do conjunto de 10 jogadores em campo, para bater os pênaltis. O técnico deve também decidir a ordem em que as penalidades serão cobradas. De quantas maneiras ele pode fazer a escolha?

7. Uma banda de rock deve escolher 10 músicas, dentro de um conjunto de 15 músicas, para formar seu novo CD. A ordem da escolha é importante pois é a seqüência em que as músicas aparecerão no CD. Quantas escolhas são possíveis?

8. Uma companhia aérea A opera em 6 cidades de um país, ligando cada cidade a cada uma das outras cidades. Quantas rotas possui, no total? Para expandir seus negócios, ela compra a companhia aérea B, que opera em 4 cidades de outro país, ligando cada uma delas a cada uma das outras. Para se expandir ainda mais, a agora multinacional companhia A inaugura um vôo ligando duas cidades, uma em cada país. Com quantas rotas ficou, no total?

   Represente a situação por um grafo dirigido.

Permutações com elementos repetidos e permutações circulares

Objetivos

Estudar permutações com elementos repetidos.
Estudar permutações circulares.

Permutações com elementos repetidos

As permutações que estudamos até aqui envolviam conjuntos de objetos *distintos*. Porém, alguns problemas de contagem envolvem permutações com objetos repetidos.

Vamos começar calculando quantas são as permutações das letras da palavra ARARA.

Se passarmos um tempo tentando todas as reordenações possíveis das letras da palavra $ARARA$, encontraremos as 10 palavras abaixo:

$$\begin{array}{lllll} ARARA & ARAAR & ARRAA & AAARR & AARAR \\ AARRA & RARAA & RAARA & RAAAR & RRAAA\,. \end{array}$$

Mas como poderíamos determinar que são 10 permutações, sem ter de listá-las?

Iniciaremos com uma palavra de 5 letras distintas, como em:

$$A_1R_1A_2R_2A_3\ ,$$

onde A_1, A_2 e A_3 simbolizam letras distintas nas posições dos $A's$ e R_1, R_2 letras distintas nas posições dos $R's$ da palavra $ARARA$.

Como são 5 objetos distintos, temos $5! = 120$ permutações. Vamos agora contar estas 120 permutações de outra maneira. Seja x o número de permutações de $ARARA$. Para cada posição dos A's e R's, temos $3! = 6$ maneiras de distribuir os $A_i\,'$s e $2! = 2$ maneiras de distribuir R_1 e R_2. Por exemplo, seja a permutação de $ARARA$ dada por $RARAA$. Então há $3! = 6$ maneiras de colocar os $A_i\,'$s, que são:

$$\begin{array}{cc} RA_1RA_2A_3 & RA_1RA_3A_2 \\ RA_2RA_1A_3 & RA_2RA_3A_1 \\ RA_3RA_1A_2 & RA_3RA_2A_1 \end{array}$$

Uma vez que escolho a posição dos A_i's, por exemplo $RA_1RA_2A_3$, tenho $2! = 2$ maneiras de colocar R_1 e R_2, que são

$$R_1A_1R_2A_2A_3 \quad R_2A_1R_1A_2A_3$$

São x permutações da palavra $ARARA$, para cada uma delas 3! maneiras de colocar os A_i's e 2! maneiras de colocar os R_i's. Pelo princípio multiplicativo, o número total de permutações de $A_1R_1A_2R_2A_3$ é

$$x \times 3! \times 2!\,.$$

Por outro lado, este número é simplesmente o número de permutações de 5 objetos distintos, que é $5! = 120$. Portanto,

$$x \times 3! \times 2! = 120 \implies x = \frac{120}{3!2!} = \frac{120}{6.2} = 10\,,$$

Exemplo 50

Quantas permutações existem para a palavra $BANANA$?

Solução:

Usando o mesmo raciocínio, se fossem 6 letras distintas teríamos $6! = 720$ permutações.

Seja x o número de permutações de $BANANA$. Se os 3 A's e os 2 N's fossem distintos, para cada permutação de $BANANA$, haveria $3! = 6$ maneiras de posicionar os A's e $2! = 2$ maneiras de posicionar os N's.

Portanto, pelo princípio multiplicativo,

$$x \times 3! \times 2! = 6!\,.$$

Logo,

$$x = \frac{6!}{3!2!} = \frac{720}{6.2} = 60\,.$$

Vale, em geral, o seguinte:

Dados N objetos, de modo que
N_1 são de um certo tipo,
N_2 são de tipo diferente dos anteriores,
$\ldots$
N_r são de um tipo diferente dos anteriores e
$N = N_1 + N_2 + \cdots N_r$,
então, o número de permutações destes n objetos é dado pela fórmula

$$\frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!} .$$

Para provar a fórmula acima, basta repetir o raciocínio que fizemos nos exemplos anteriores.

Se fossem N objetos distintos, teríamos $N!$ permutações. Seja x o número de permutações dos objetos. Então, para cada permutação dos objetos, existem
$N_1!$ maneiras de colocar objetos do primeiro tipo,
$N_2!$ maneiras de colocar objetos do segundo tipo,
$\vdots$
$N_r!$ maneiras de colocar objetos do $r-$ésimo tipo.
Pelo princípio multiplicativo, temos:

$$x.N_1!N_2!\ldots N_r! = N! ;$$

logo,

$$x = \frac{N!}{N_1!N_2!\ldots N_r!} .$$

Exemplo 51

Em uma estante de uma loja de discos serão colocados 15 CD's de música popular brasileira, sendo 10 do Chico Buarque, 3 do Gilberto Gil e 2 do Djavan (sendo o mesmo CD de cada compositor). De quantas maneiras estes 15 CD's podem ser arrumados na estante?

Solução:

O número de maneiras de colocar os CD's é:

$$\frac{15!}{10!3!2!} = \frac{15.14.13.12.11.10!}{10!\ 6.2} = \frac{15.14.13.12.11}{12} = 30030$$

Exemplo 52

Uma pessoa tem 6 garrafas de vinho para servir em uma festa em sua casa. Os vinhos são de 3 tipos, 2 garrafas de cada tipo. Esta pessoa está preocupada com a ordem em que deve servir os vinhos. Quantas são as possibilidades?

Solução:

O número de ordenações possíveis para as garrafas são as permutações de 6 objetos, sendo os objetos de 3 tipos, 2 objetos de cada tipo. Usando a fórmula, temos:

$$\frac{6!}{2!2!2!} = \frac{720}{2.2.2} = 90 \; .$$

Portanto, o dono da festa deve decidir entre 90 ordens diferentes em que pode servir os vinhos.

Exemplo 53

Um DJ tem 6 músicas para tocar. A música mais popular deve ser repetida 4 vezes. Outras duas músicas devem ser repetidas 2 vezes. As músicas restantes serão tocadas apenas 1 vez. Determine de quantas maneiras diferentes este DJ pode organizar seu show.

Solução:

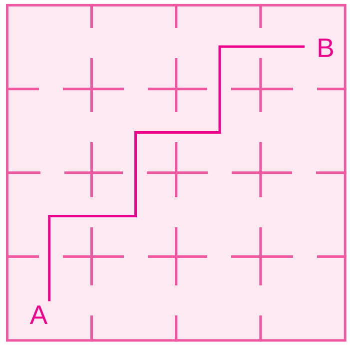
Note que o DJ tocará, com todas as repetições, um total de $4+2+2+1+1+1 = 11$ músicas, sendo que as músicas são de 6 tipos. O número de repetições é $4, 2, 2, 1, 1$ e 1. Portanto, temos no total

$$\frac{11!}{4!2!2!} = 415800$$

ordenações possíveis para estas músicas.

Exemplo 54

Uma experiência de laboratório consiste em colocar um rato no quadrado A do pequeno labirinto da figura a seguir e ver os caminhos que ele escolhe para chegar ao quadrado B, onde há comida. Os quadrados têm pequenas portas que permitem ao rato andar para cima ou para a direita somente. Quantos caminhos possíveis existem?



Solução:

Cada caminho de A para B pode ser representado por uma "palavra" de 6 letras, sendo 3 letras D e 3 letras C, onde um D significa que naquele ponto o ratinho tomou o caminho para a direita enquanto que um C significa que foi para cima.

Por exemplo, o caminho indicado na figura é o caminho:

$$CDCDCD$$

Cada palavra que representa um caminho deve ter exatamente 3 letras $D's$ e 3 letras $C's$, pois, para ir do ponto A ao ponto B, o pequeno roedor deve ir exatamente 3 vezes para a direita e 3 vezes para cima, em alguma ordem.

O problema acima se traduz então na seguinte questão: quantas palavras de 6 letras existem, com exatamente 3 letras C e 3 letras D? Colocando de outra maneira, quantas permutações de 6 objetos existem, sendo os objetos de 2 tipos, 3 objetos para cada tipo? A resposta é:

$$\frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{6.6} = 20\ .$$

Permutações circulares

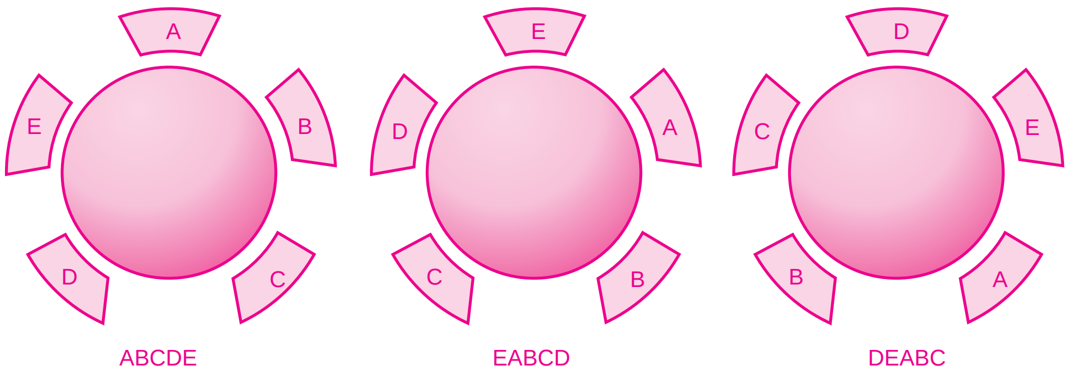
As permutações que estudamos até aqui são permutações lineares, no sentido que são permutações de objetos em linha, isto é, ordenações em fila.

Quando falamos somente "permutação", sem qualificar como "linear" ou "circular", estamos sempre nos referindo a permutações lineares

Vamos estudar agora permutações circulares. Considere o seguinte problema: de quantas maneiras 5 pessoas podem se sentar em torno de uma mesa circular?

Posto desta forma, a questão fica um pouco vaga. Quando duas pessoas estão sentadas da mesma forma?

Vamos chamar as pessoas de A, B, C, D e E. Considere as ordenações dadas pela figura a seguir:



Duas permutações de pessoas são consideradas como a mesma permutação circular se uma pode ser obtida da outra, rodando todas as pessoas em círculo na mesma direção e pela mesma quantidade.

Há dois sentidos possíveis de rotação: para a nossa esquerda, que é o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, e para a nossa direita, que é o sentido dos ponteiros do relógio.

O sentido de rotação para a esquerda é chamado de sentido trigonométrico ou positivo. O sentido contrário, para direita, é chamado sentido anti-trigonométrico ou negativo.

Na figura anterior, da permutação $ABCDE$ (ordenação da esquerda) para a permutação $EABCD$ (ordenação do meio), todas as 5 pessoas pularam exatamente 1 cadeira, no sentido dos ponteiros do relógio.

Da permutação $ABCDE$ para a permutação $DEABC$ (ordenação da direita) todos pularam 2 cadeiras, no mesmo sentido, o dos ponteiros do relógio.

Ainda com relação à figura anterior, se as pessoas pulassem novamente 1 cadeira, teríamos a permutação $CDEAB$. Pulando novamente, teríamos a permutação $BCDEA$. Se pulassem 1 cadeira novamente voltariam à posição inicial.

Logo, vemos que as 5 permutações lineares:

$$ABCDE \quad EABCD \quad DEABC \quad CDEAB \quad BCDEA$$

são idênticas quando vistas como permutações circulares.

Portanto, cada 5 permutações lineares correspondem à mesma permutação circular. O número total de permutações lineares de 5 pessoas é:

$$P(5) = 5!\ .$$

Para obter o número de permutações circulares basta dividir este número por 5. Portanto, são:

$$\frac{5!}{5} = \frac{5.4!}{5} = 4! = 24$$

permutações circulares de 5 pessoas.

Exemplo 55

De quantas maneiras 6 pessoas podem sentar em torno de uma mesa?

Solução:

Raciocinando como no exemplo anterior, podemos ver que cada 6 permutações lineares de 6 pessoas corresponde a uma permutação circular. Por exemplo, se as pessoas são representadas por $ABCDEF$, então as permutações:

$$ABCDEF \quad FABCDE \quad EFABCD \quad DEFABC \quad CDEFAB \quad BCDEFA$$

correspondem à mesma permutação circular. Portanto, são:

$$\frac{P(6)}{6} = \frac{6.5!}{6} = 5! = 120$$

permutações circulares de 6 objetos.

De um modo geral, se forem n objetos, então cada n permutações lineares correspondem à mesma permutação circular. O total de permutações circulares é:

$$\frac{n!}{n} = \frac{n.(n-1)!}{n} = (n-1)!\ .$$

Temos, portanto, o seguinte:

O número de permutações circulares de n objetos é $(n-1)!$.

Exemplo 56

De quantas maneiras podemos colocar 4 homens e 4 mulheres em uma mesa, de forma que os homens sempre estejam entre duas mulheres e vice-versa, isto é, não haja dois homens nem duas mulheres sentados lado a lado.

Solução:

Para resolver este problema, vamos inicialmente determinar o número de permutações lineares com a propriedade desejada (alternar homens e mulheres). Depois, calculamos o número de permutações circulares, sabendo que cada 8 permutações lineares correspondem a uma permutação circular.

O número de permutações lineares que começa com um homem é 576, pois temos 4 maneiras de escolher a primeira posição (são 4 homens), 4 maneiras de escolher a segunda posição (são 4 mulheres), 3 maneiras de escolher a terceira (tem que ser um homem e sobraram 3 homens) etc.

Portanto, há $4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 576$ permutações lineares iniciando com um homem.

Analogamente, há 576 permutações lineares iniciando com uma mulher. Assim, há $576+576 = 1152$ permutações lineares. Cada 8 destas permutações correspondem a uma permutação circular.

Portanto, há: $\frac{1152}{8} = 144$ permutações circulares com a propriedade desejada.

Resumo

Nesta aula, estudamos permutações com elementos repetidos, como é o exemplo das permutações da palavra CEDERJ.

Estudamos também permutações circulares, onde vimos que o número de permutações circulares de n elementos distintos é

$$\frac{P(n)}{n}.$$

As soluções de alguns exercícios exigem a aplicação de mais de uma técnica, como foi o caso do exemplo 56, onde usamos somente o princípio multiplicativo para determinarmos o número de permutações lineares e depois calculamos o número de permutações circulares.

Nas próximas duas aulas, estudaremos uma outra técnica de contagem: as combinações.

Exercícios

1. Quantas permutações existem para a palavra $BICICLETA$?

2. Um professor tem uma lista de 10 problemas, dos quais deve selecionar 3 para um teste. Supondo que a ordem de colocação dos problemas seja importante, de quantas maneiras pode fazer o teste?

3. O mesmo professor tem de elaborar outro teste, sendo que desta vez ele tem uma lista de 6 problemas da unidade I de sua disciplina, 8 problemas da unidade II e 7 problemas da unidade III.

   De quantas maneiras este professor pode elaborar um teste de 5 questões, sabendo-se que a ordem de apresentação dos problemas é importante e que:

   (a) Todas as questões devem ser da unidade I.

   (b) O teste deve ter 3 questões da unidade I, seguido de 2 questões da unidade II.

   (c) O teste deve ter 2 questões da unidade II, seguido de 3 questões da unidade III.

   (d) Não há restrições quanto às questões.

4. Uma pessoa deve cumprir 6 tarefas, sendo 2 delas agradáveis e as demais muito chatas. Um pouco contrariada, esta pessoa se pergunta de quantas maneiras pode ordenar o cumprimento das tarefas. Responda isto por ela, sabendo-se que:

   (a) Ela é do tipo de pessoa que gosta de fazer as coisas agradáveis primeiro.

   (b) Ela não leva em conta se a tarefa é chata ou não quando planeja a ordem de execução.

   (c) Vai realizar uma tarefa interessante, em seguida duas chatas, em seguida a outra tarefa interessante e depois as outras chatas.

5. Uma banda de reggae vai fazer uma turnê por 5 países, dando shows em 4 cidades em cada país. De quantas maneiras esta banda pode escolher seu itinerário, sabendo-se que a única restrição é que os shows em um mesmo país devem ser feitos em seguida (isto é, não pode visitar o mesmo país duas vezes)?

(Sugestão: primeiramente eles devem escolher a ordem em que visitarão os países, e depois a ordem das cidades em cada país.)

6. (a) Um trabalhador anda de casa para o trabalho. Para fazê-lo, ele percorre 5 quadras de leste para oeste e 6 quadras de norte para sul. Supondo que ele ande sempre para o oeste ou para o sul, quantos caminhos possíveis existem?

   (b) Suponha agora que, no caminho, ele sempre passa por uma banca de jornal, que fica exatamente a 3 quadras para o oeste e 3 quadras para o sul de sua casa. Quantos caminhos para o trabalho existem que passam pela banca de jornal?

7. De quantas maneiras podemos dispor 10 pessoas em uma mesa circular?

8. Na questão anterior, se as 10 pessoas são 5 homens e 5 mulheres, quantas permutações circulares existem tais que não haja 2 homens e nem 2 mulheres em lugares adjacentes?

9. Um anfitrião vai receber 5 pessoas para jantar em sua casa. Como poderá dispor as pessoas na mesa, se dois de seus convidados não se falam e, portanto, não deverão sentar em cadeiras adjacentes?

10. Considere um motor a explosão de 6 cilindros. Os cilindros são acionados sempre na mesma ordem. Por exemplo, se os cilindros são numerados $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, uma possível ordem de explosão é $1, 4, 5, 2, 3, 6$. Note que uma permutação que corresponda à mesma permutação circular, dá a mesma ordem de explosão, por exemplo $6, 1, 4, 5, 2, 3$ é a mesma ordem de explosão de antes. Quantas ordens de explosão possíveis existem para um motor de 6 cilindros?

Combinação - I

Meu trabalho tem sempre tentado unir o verdadeiro ao belo
e quando eu tive que escolher por um deles,
geralmente escolhi o belo.
Hermann Weyl

Hermann Weyl (1885–1955) foi um dos matemáticos mais importantes do séc. XX.

Sua frase destacada acima pode causar alguma estranheza, mas demonstra uma das faces do trabalho matemático: a estética, a busca da beleza e da simetria.

A Matemática reflete fortemente a busca pela perfeição estética.

Objetivos

Estudar os problemas de combinacão de n elementos tomados r a r.

Em aulas anteriores, estudamos permutações de objetos distintos, permutações com objetos repetidos e arranjos.

Uma permutação de um conjunto é uma ordenação dos elementos deste conjunto. Vimos que há $n!$ permutações de todos os n objetos de um conjunto.

Vimos também que o número de arranjos de n objetos distintos tomados r a r, denotado $A(n, r)$, é o número de maneiras de selecionar, *em ordem*, r objetos em um conjunto de n objetos.

No entanto, em muitas situações estamos interessados em selecionar r objetos em um conjunto de n objetos, *sem nenhuma preocupação com a ordem*. Este tipo de problema é chamado de Combinação.

Exemplo 57

Um jogo de pôquer utiliza as 52 cartas de um baralho. Cada "mão" é formada por 5 cartas. Quantas "mãos" diferentes são possíveis?

Evidentemente esta pergunta assume grande importância para jogadores de pôquer, mas, mesmo não o sendo, vamos tentar entender o problema combinatório envolvido.

Note que neste caso a ordem da seleção das cartas não é importante, pois as mesmas 5 cartas, independentemente da ordem, farão sempre o mesmo jogo.

O problema pode ser formulado da seguinte maneira:

"dado um conjunto de 52 objetos, de quantas maneiras podemos selecionar 5 objetos deste conjunto, sem levar em conta a ordem?"

Resolveremos este problema um pouco mais tarde, mas ainda nesta aula.

> Sejam n e r inteiros, com $n \geq 0$ e $0 \leq r \leq n$. O número de combinações de n elementos tomados r a r, denotado por $C(n, r)$, é o número de maneiras de selecionarmos r objetos de um conjunto de n objetos distintos, não importando a ordem em que os objetos são retirados.

A notação $C(n, r)$ para número de combinações de n elementos tomados r a r é consistente com a notação $A(n, r)$ para número de arranjos. Contudo, usa-se também bastante a notação $\binom{n}{r}$, com o mesmo significado que $C(n, r)$.

Não há uma maneira padrão de ler o símbolo $\binom{n}{r}$. É comum ler-se "n, r a r". Em inglês este símbolo é lido "n choose r", que pode ser traduzido por "n escolhe r".

Usaremos mais a notação $C(n, r)$ durante o estudo de problemas combinatórios e mais a notação $\binom{n}{r}$ quando estudarmos o teorema binomial na Aula 13.

Exemplo 58

De quantas maneiras podemos selecionar 3 objetos de um conjunto de 4 objetos distintos?

Solução:

Seja $X = \{a, b, c, d\}$ um conjunto de 4 objetos distintos. Podemos escolher 3 objetos de 4 formas distintas:

$$abc \quad acd \quad abd \quad bcd$$

Concluímos que $C(4, 3) = 4$.

Observe que cada uma destas escolhas corresponde a subconjuntos diferentes de X.

Desta forma, o conjunto X possui 4 subconjuntos com 3 elementos, que são:

$$\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\} \text{ e } \{b, c, d\} .$$

Assim, selecionar r objetos de um conjunto de n objetos é o mesmo que escolher um subconjunto de r elementos de um conjunto de n elementos, o que resulta em:

> Sejam n, r inteiros não negativos, com $0 \leq r \leq n$. Qualquer conjunto de n elementos possui $C(n, r)$ subconjuntos.

Vimos acima que qualquer conjunto de 4 elementos possui 4 subconjuntos de 3 elementos. Logo sabemos que $C(4,3) = 4$. Mas, em geral, ainda não sabemos como calcular $C(n,r)$.

Exemplo 59

Um grupo de 5 pessoas precisa escolher 2 delas para formar uma comissão. Quantas escolhas são possíveis?

Solução:

Vamos representar por $X = \{a,b,c,d,e\}$ o conjunto de 5 pessoas. As possibilidades para uma comissão de 2 pessoas (sem importar a ordem da escolha) são:

$$\begin{array}{llll} \{a,b\}, & \{a,c\}, & \{a,d\}, & \{a,e\} \\ \{b,c\}, & \{b,d\}, & \{b,e\} & \\ \{c,d\}, & \{c,e\} & & \\ \{d,e\} & & & \end{array}$$

No total, 10 comissões de 2 pessoas podem ser formadas.

No exemplo acima, concluímos que $C(5,2) = 10$. Equivalentemente, todo conjunto de 5 elementos possui 10 subconjuntos de 2 elementos.

Assim, deduzimos o valor de $C(n,r)$ simplesmente listando todas as escolhas possíveis de r elementos a partir de um conjunto de n elementos. Vamos agora deduzir uma fórmula geral para $C(n,r)$.

Observe que, para cada escolha de r objetos de um conjunto de n objetos distintos, estes r objetos podem ser permutados de $r!$ maneiras.

Portanto, podemos relacionar o número de combinações de n elementos tomados r a r com o número de arranjos de n objetos tomados r a r da seguinte maneira: cada combinação corresponde a $r!$ arranjos.

Explicando um pouco melhor: considere um conjunto de n elementos. Cada combinação de r elementos é uma escolha de r elementos, sem importar a ordem. Cada arranjo de r elementos é uma escolha de r elementos, mas com uma ordem. Cada r elementos pode ser ordenado de $r!$ maneiras; logo cada r elementos fornece uma combinação e fornece $r!$ arranjos.

Isto é, temos $r!$ arranjos para cada combinação de r elementos. O número total de arranjos de n objetos tomados r a r é $A(n,r)$. Logo,

$$C(n,r) \times r! = A(n,r), \text{ isto é, } C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!}$$

Mas vimos que

$$A(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}\,;$$

logo,

$$C(n,r) = \frac{A(n,r)}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.$$

O que resulta em

$$\boxed{C(n,r) = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}\,.}$$

Exemplo 60

Um técnico convocou 12 jogadores para um time de basquete. Para armar o time que vai começar o jogo, deve selecionar 5 jogadores. De quantas maneiras pode fazê-lo?

Solução:

O número de combinações de 12 jogadores, tomados 5 a 5, é

$$C(12,5) = \frac{12!}{(12-5)!5!} = \frac{12!}{7!5!} = \frac{12.11.10.9.8.7!}{7!.120} = 11.9.8 = 792\,.$$

O técnico pode, portanto, formar 792 times de 5 jogadores utilizando os 12 jogadores convocados.

Exemplo 61

Voltemos ao exemplo das cartas do jogo de pôquer. Com um baralho de 52 cartas, quantas mãos de 5 cartas são possíveis?

Solução:

São possíveis

$$C(52,5) = \frac{52!}{(52-5)!5!} = \frac{52!}{47!5!} = \frac{52.51.50.49.48.47!}{47!.120} = 2598960$$

jogos diferentes. De todas estas possibilidades, apenas 4 formam um "Royal Flush", um dos jogos mais fortes do pôquer, que é quando as 5 cartas são o dez, valete, dama, rei e ás do mesmo naipe.

Exemplo 62

Uma pessoa sai para comprar CDs. Dez CDs a interessam, mas ela tem dinheiro somente para 4 deles. Qual o número de escolhas possíveis?

Solução:

Como não importa a ordem de escolha dos CDs, estamos diante de um problema de combinação. Trata-se do número de combinações de 10 objetos, tomados 4 a 4. São, portanto,

$$C(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.24} = \frac{10.9.8.7}{24} = 210$$

escolhas possíveis.

Exemplo 63

Uma turma possui 5 alunos e 6 alunas. Uma comissão deve ser formada entre todos os alunos, devendo ter 2 meninos e 2 meninas. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução:

Podemos dividir a seleção de uma comissão como esta em duas etapas:

1. Escolher 2 alunos de um conjunto de 5 alunos.

2. Escolher 2 alunas de um conjunto de 6 alunas.

A primeira tarefa pode ser feita de

$$C(5,2) = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5.4.3!}{3!.2} = 10 \quad \text{maneiras},$$

enquanto a segunda etapa pode ser feita de

$$C(6,2) = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6.5.4!}{4!.2} = 15 \quad \text{maneiras},$$

Pelo princípio multiplicativo, temos um total de

$$10 \times 15 = 150$$

comissões possíveis.

Exemplo 64

Uma moeda é jogada 6 vezes. Quantos são os resultados possíveis? Quantos destes resultados têm 3 caras e 3 coroas?

Solução:

Já vimos anteriormente a solução da primeira parte. Temos 6 tarefas, sendo cada tarefa o lançamento de uma moeda. Cada tarefa tem 2 resultados possíveis (cara ou coroa). Portanto são

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$$

resultados possíveis.

Para responder à segunda pergunta, quantos resultados têm 3 caras e 3 coroas, podemos pensar nos lançamentos como 6 objetos de um conjunto

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6\}\ ,$$

onde m_1 representa o resultado do primeiro lançamento, m_2 o do segundo lançamento etc.

Cada resultado com exatamente 3 caras corresponde à escolha de 3 elementos no conjunto M. Por exemplo, a escolha $\{x_1, x_3, x_5\}$ corresponde ao resultado de obtermos cara no primeiro, terceiro e quinto lançamentos e coroa nos demais.

Portanto, o número de resultados com exatamente 3 caras corresponde ao número de maneiras de selecionar 3 elementos de um conjunto de 6 elementos.

A solução é:

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!3!} = \frac{6.5.4}{6} = 20\ .$$

Seguindo o mesmo raciocínio do exemplo anterior, obtemos a seguinte tabela, que mostra o número de resultados em que ocorrem os eventos listados na coluna da esquerda.

Evento	Nº de resultados favoráveis
6 coroas	1
1 cara e 5 coroas	$C(6,1) = 6$
2 caras e 4 coroas	$C(6,2) = 15$
3 caras e 3 coroas	$C(6,3) = 20$
4 caras e 2 coroas	$C(6,4) = 15$
5 caras e 1 coroa	$C(6,5) = 6$
6 caras	1
Total dos resultados possíveis	64

Na tabela acima usamos a palavra evento para descrever um resultado, como "2 caras e 4 coroas", por exemplo. Usamos também a expressão "número de resultados favoráveis" para descrever o número de maneiras em que o evento ocorre. Isto é, entre todos os resultados possíveis, o número de resultados "favoráveis" àquele evento.

A expressão "resultados favoráveis" é muito utilizada na teoria das probabilidades, que estudaremos no Módulo 2 desta disciplina.

Resumo

Nesta aula estudamos o que são problemas de combinação.
Encontramos a fórmula

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!},$$

que fornece o número de combinações de n elementos tomados r a r.
Aplicamos esta fórmula a diversos exemplos.

Na próxima aula veremos mais alguns problemas de combinação, e resolveremos o problema de determinar o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.

Exercícios

1. Calcule:

   (a) $C(5,2)$

   (b) $C(3,3)$

   (c) $C(10,10)$

   (d) $C(10,0)$

2. Prove que
$$C(n,n) = C(n,0) = 1\ ,$$
para qualquer n inteiro não negativo.

3. Prove que
$$C(n,r) = C(n,n-r)\,,$$
para quaisquer inteiros não-negativos n, r, $0 \leq r \leq n$.

4. Quantos subconjuntos de quatro elementos tem um conjunto de dez elementos?

5. Uma comissão do Senado tem 12 senadores. Destes, serão escolhidos 4 para formar uma subcomissão. De quantas maneiras isto pode ser feito?

6. Um estudante recebe uma prova contendo 6 questões. Ele deve escolher 4 para resolver. De quantas maneiras ele pode fazer sua escolha?

7. Quantos inteiros de 3 dígitos podem ser formados, usando-se apenas os algarismos $\{2,4,5,8,9\}$, se não pode haver repetição? (Por exemplo, 552 não é válido).

8. Uma pessoa deseja comprar 2 presentes de uma lista de casamento onde restam 12 presentes. Quantas escolhas são possíveis?

9. Uma moeda é lançada 5 vezes. Encontre o número de maneiras de se obter:

   (a) 5 caras,

   (b) 2 caras e 3 coroas,

   (c) exatamente 1 cara.

10. Uma turma de formandos tem 7 mulheres e 5 homens. Uma comissão de formatura deve ser formada, sendo que a comissão deve ter 2 homens e 2 mulheres. Quantas comissões são possíveis?

11. Um quarteto de cordas é formado por 2 violinistas, um violista e 1 violoncelista. Estes devem ser escolhidos de um grupo contendo 6 violinistas, 5 violistas e 4 violoncelistas. De quantas maneiras o quarteto pode ser formado?

Um quarteto de cordas é um gênero musical que surgiu no período clássico. Um quarteto de cordas é formado por dois violinos, uma viola e um violoncelo. Esta formação é um sucesso, pois, apesar de pequena, permite uma expressividade sonora muito rica.

Combinação - II

Objetivos

Continuar o estudo de problemas de combinação.
Calcular o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos.

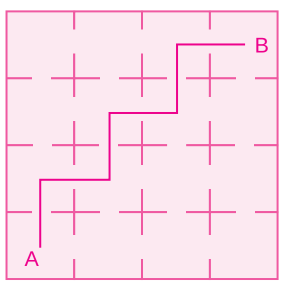
Na aula anterior estudamos combinações de n elementos tomados r a r, denotado por $C(n, r)$.

Nesta aula, veremos mais alguns exemplos de problemas envolvendo combinação. Estudaremos também um pouco mais das propriedades do número $C(n, r)$.

Vamos aos exemplos.

Exemplo 65

Voltaremos ao exemplo 54, visto na Aula 9: encontre o número de caminhos possíveis entre os pontos A e B no labirinto da figura abaixo, levando-se em conta que pode-se ir somente para a direita e para cima.



Os matemáticos muitas vezes resolvem um problema de várias maneiras diferentes.
Algumas vezes o fazem procurando uma solução mais simples e elegante. Outras vezes porque cada solução apresenta um aspecto diferente do mesmo problema.

Solução:

Vimos que cada caminho pode ser representado por uma palavra de 6 letras contendo 3 letras "C" (ir para cima) e 3 letras "D" (ir para a direita). Assim, o caminho da figura é representado pela palavra CDCDCD.

Na Aula 9 usamos permutações com objetos repetidos para este problema. Resolveremos o problema novamente, desta vez usando combinação.

Podemos dividir a tarefa de escolher um caminho em duas etapas:

1. Escolher as 3 posições para as 3 letras "C", dentre as 6 posições disponíveis em uma palavra de 6 letras.

2. Completar as outras 3 posições com letras "D"s.

A primeira etapa pode ser realizada de

$$C(6,3) = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

maneiras diferentes.

Depois de completar a primeira etapa, a segunda pode ser feita de apenas uma maneira.

O número total de caminhos é:

$$20 \times 1 = 20\,,$$

o que concorda com o resultado obtido anteriormente.

Exemplo 66

Uma caixa de ovos contém 12 ovos, dos quais 2 estão rachados. Determine o seguinte:

1. De quantas maneiras pode-se selecionar 4 ovos da caixa?
2. Quantas das escolhas do item 1 contêm 2 ovos rachados?
3. Quantas das escolhas do item 1 contêm apenas 1 ovo rachado?
4. Quantas das escolhas do item 1 contêm apenas ovos bons?

Solução:

1. São 12 ovos e devemos selecionar 4 deles, onde a ordem não é importante. Portanto, são
$$C(12,4) = \frac{12!}{8!4!} = \frac{12.11.10.9.8!}{8!.24} = 495$$
escolhas possíveis.

2. Para determinarmos o número das escolhas que contêm 2 ovos rachados, podemos dividir a tarefa em duas partes:
   (a) Escolher 2 ovos rachados. Como há no total exatamente 2 ovos rachados, esta parte pode ser feita de apenas 1 maneira.
   (b) Escolher 2 ovos bons em um conjunto de $12 - 2 = 10$ ovos bons. Isto pode ser feito de
   $$C(10,2) = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10.9.8!}{2.8!} = 45$$
   maneiras.

Assim, há $1 \times 45 = 45$ escolhas com exatamente 2 ovos rachados.

3. Podemos dividir a tarefa de realizar uma escolha com 3 ovos bons e 1 rachado em duas partes:

   (a) Escolher 1 ovo rachado no conjunto de 2 ovos rachados. Isto pode ser feito de 2 maneiras distintas.

   (b) Escolher 3 ovos bons em um conjunto de 10 ovos bons. Isto pode ser feito de
   $$C(10,3) = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10.9.8.7!}{6.7!} = 120$$
   maneiras distintas.

   Usando o princípio multiplicativo, o número total de escolhas com 3 ovos bons e 1 rachado é
   $$2 \times 120 = 240\,.$$

4. Usando as informações já obtidas, temos o seguinte: são 495 escolhas possíveis de 4 ovos. Entre essas, 45 escolhas têm 2 ovos rachados, 240 escolhas têm apenas 1 ovo rachado. Subtraindo, temos
   $$495 - 240 - 45 = 210$$
   escolhas com os 4 ovos bons.

   Outra maneira de resolver: o número de escolhas de 4 ovos bons no conjunto de 10 ovos bons é
   $$C(10,4) = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10.9.8.7.6!}{6!.24} = 210\,.$$

Número de subconjuntos de um conjunto

Queremos agora responder a seguinte pergunta: quantos subconjuntos tem um conjunto de n elementos?

Resolveremos este problema de duas maneiras diferentes, e com isto obteremos uma fórmula muito bonita, envolvendo números binomiais.

Seja

$$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$$

um conjunto de n elementos.

Para formar um subconjunto de X devemos decidir, para cada elemento x_i, se ele pertence ou não ao subconjunto. Podemos então dividir a tarefa de formar um subconjunto em n etapas:

1. Decidir se x_1 pertence ao subconjunto.
2. Decidir se x_2 pertence ao subconjunto.

$\vdots \qquad \qquad \vdots$

n. Decidir se x_n pertence ao subconjunto.

Cada uma destas n etapas tem 2 resultados possíveis: para cada etapa, os resultados possíveis são "está" ou "não está" no conjunto. São n etapas, 2 maneiras de realizar cada etapa. Logo, pelo princípio multiplicativo, há

$$\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fatores}} = 2^n$$

subconjuntos de X.

Provamos assim que:

$$\boxed{\text{Um conjunto de } n \text{ elementos possui } 2^n \text{ subconjuntos}}$$

Com isto já obtivemos a resposta que procurávamos, que é a fórmula para o número de elementos de um conjunto. Porém, não satisfeitos ainda, vamos atacar o mesmo problema de outra maneira.

Vimos, na aula passada, que um conjunto de n elementos possui $C(n, r)$ subconjuntos de r elementos.

O número mínimo de elementos de um subconjunto de X é 0 (conjunto vazio) e o número máximo é n (o próprio conjunto X).

O número total de subconjuntos de X é a soma do número de subconjuntos com 0 elementos, mais o número de subconjuntos com 1 elemento, mais o número de subconjuntos com 2 elementos etc. até n elementos.

Esta soma é

$$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)\,.$$

Mas sabemos que o número total de subconjuntos de X é 2^n. Comparando os dois, concluímos:

> Para todo inteiro n não negativo, vale que:
>
> $$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\ldots+C(n,n)=2^n$$

Existe um princípio fundamental que rege a linha de pensamento acima. É um princípio que raramente é mencionado, mas que se encontra implícito em muito do que fazemos em Matemática. O princípio é o seguinte:

"se um conjunto é contado de duas maneiras diferentes, o resultado obtido é o mesmo".

Exemplo 67

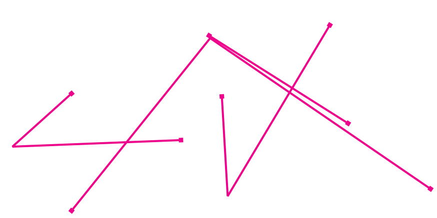
Verifique a fórmula acima para $n = 6$.

$$\begin{aligned}C(6,0)+C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)+C(6,4)+C(6,5)+C(6,6)\\ =1+6+15+20+15+6+1=64=2^6\end{aligned}$$

Daremos agora uma aplicação geométrica da fórmula para $C(n,r)$. Vamos voltar a um problema mencionado na introdução:

Exemplo 68

Considere dez pontos no plano. Se eu traçar um segmento de reta ligando cada par de pontos, quantos segmentos terei traçado? A figura abaixo mostra alguns dos segmentos que posso traçar.



Cada segmento de reta liga 2 pontos (a ordem não importa). O número de segmentos de reta que podemos traçar é o número de pares de pontos que posso escolher, isto é, o número de combinações de 10 pontos, tomados 2 a 2.

Portanto, o número de segmentos que posso traçar é

$$C(10,2) = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = \frac{10.9.8!}{2!\,8!} = \frac{90}{2} = 45\,.$$

Estudamos partições de um conjunto na Aula 5

No último exemplo desta aula, vamos retornar ao tema da partição de um conjunto.

Exemplo 69

Seja X um conjunto de 13 elementos. De quantas maneiras podemos escrever X como a união de 3 subconjuntos, o primeiro tendo 6 elementos, o segundo 4 elementos e o terceiro 3 elementos?

Solução:

Os três subconjuntos acima devem ser *disjuntos*, pois a soma de seus elementos é o número de elementos da união. Portanto, estes três subconjuntos formam uma partição do conjunto X.

De quantas maneiras podemos obter esta partição de X? Vamos dividir a tarefa em três partes: formar o primeiro subconjunto, com os elementos restantes formar o segundo subconjunto e com os elementos ainda restantes formar o terceiro subconjunto.

A primeira tarefa pode ser feita de $C(13,6)$ maneiras, pois são 13 elementos e temos de escolher 6 deles.

Para o segundo subconjunto restam $13-6=7$ elementos, dos quais devemos escolher 4 para formar o segundo subconjunto, o que pode ser feito de $C(7,4)$ maneiras.

Para o terceiro subconjunto restam apenas $7-4=3$ elementos. Estes formaram o terceiro subconjunto. Há aqui apenas uma possibilidade.

Pelo princípio multiplicativo, o número de maneiras de obter a partição desejada do conjunto X é

$$C(13,6)\times C(7,4)\times 1 = 1716\times 35 = 60060\,.$$

Resumo

Nesta aula aplicamos a fórmula de $C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$ para resolver mais alguns exemplos de problemas de combinação.

Também vimos nesta aula que o número de subconjuntos de um conjunto de n elementos é 2^n. Resolvemos este problema de duas maneiras diferentes, o que permitiu deduzir a fórmula

$$C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = 2^n \,.$$

Exercícios

1. Uma caixa contém 10 bolas numeradas de 1 a 10, sendo 4 azuis e 6 brancas. São retiradas 4 bolas. De quantas maneiras podemos ter os seguintes resultados:

   (a) Todas as bolas retiradas são brancas?

   (b) São retiradas 2 bolas brancas e 2 bolas azuis?

   (c) São retiradas 3 bolas brancas e 1 bola azul?

   (d) Todas as bolas retiradas são azuis?

2. Uma empresa está selecionando 6 novos funcionários a partir de uma lista de 10 candidatos pré-selecionados. Os candidatos são 5 homens e 5 mulheres. De quantas maneiras esta empresa pode fazer a seleção, sabendo-se que:

   (a) O sexo dos candidatos não será levado em conta para a escolha?

   (b) As vagas devem ser preenchidas com 3 homens e 3 mulheres?

3. Um investidor decide comprar ações na bolsa de valores. Ele decide formar uma carteira comprando ações de:

   5 empresas da área de energia,

   4 empresas do ramo eletrônico e

   2 empresas do setor bancário.

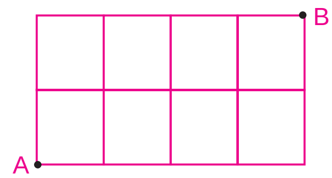
   De quantas maneiras este investidor pode formar sua carteira, a partir de uma lista de empresas composta por:

10 empresas da área de energia,

7 empresas do ramo eletrônico e

5 empresas do setor bancário?

4. O diagrama a seguir representa um mapa esquemático de uma cidade. Uma empresa de ônibus está selecionando uma rota entre os pontos A e B do mapa. A empresa deseja manter a rota mais curta possível. Quantas rotas devem ser consideradas?



5. Quantos subconjuntos tem o conjunto X, sabendo-se que

   (a) X possui 5 elementos?

   (b) X possui apenas 1 elemento?

   (c) X é um conjunto vazio?

6. Dados 8 pontos, quantos segmentos de reta posso traçar ligando estes pontos?

Observe que os problemas 6 e 7 são matematicamente idênticos.

Compare com o exemplo 68.

7. Considere 8 cidades em um mapa. Se um governador deseja construir estradas ligando cada par de cidades, quantas estradas deverá construir? (Considere cada trecho entre cidades diferentes como uma estrada).

Compare com o exemplo 69.

8. Um conjunto tem 12 elementos. De quantas formas podemos escrever este conjunto como união de 4 subconjuntos disjuntos, sendo que 2 destes subconjuntos têm 4 elementos e 2 deles têm 2 elementos?

9. Um grupo de 9 cientistas monitora 3 experimentos de uma pesquisa. Para maior eficiência, eles resolvem se dividir em três grupos, sendo que 5 deles devem acompanhar uma experiência, 2 deles acompanharão uma segunda experiência e os 2 restantes ficarão com a terceira experiência. De quantas maneiras eles podem fazer esta divisão?

Triângulo de Pascal

Objetivos

Descrever o triângulo de Pascal.
Estudar algumas de suas propriedades.
Apresentar a seqüência de Fibonacci e mostrar sua relação com o triângulo de Pascal.

O Matemático francês Blaise Pascal (1623–1662) foi uma criança prodígio que descobriu sozinha, sem auxílio de livros, muitas das idéias fundamentais da Geometria Euclideana.

Pascal foi um dos pioneiros no estudo da probabilidade, e também tem o crédito de ter inventado e construído a primeira calculadora digital: uma máquina de somar mecânica parecida com as máquinas da década de 40 deste século.

O triângulo de Pascal é uma seqüência de números binomiais, isto é, inteiros da forma $C(n,r)$, dispostos em uma tabela em forma de triângulo, como na figura abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

O nome “triângulo de Pascal” vem do fato de Pascal ter escrito, em 1653, um tratado estudando, entre outras coisas, este triângulo. Contudo, o triângulo de Pascal é conhecido desde muitos séculos antes de Pascal, tendo sido estudado na China e na Índia desde 1100.

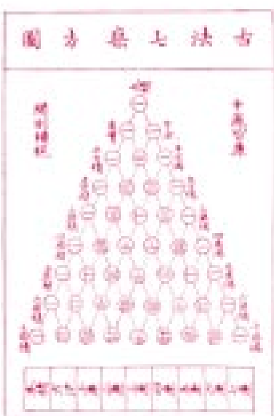
Vamos começar escrevendo os números binomiais em forma de tabela. A “linha n” desta tabela será formada pelos inteiros $C(n,r)$, onde r varia de 0 até n. Começamos a tabela com a linha 0, formada apenas pelo $C(0,0) = 1$.

Por exemplo, a linha 4 é formada pelos inteiros $C(4,r)$, com $0 \leq r \leq 4$, isto é, formada pelos cinco inteiros

$$\begin{array}{ccccc}
C(4,0) & C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) \\
\| & \| & \| & \| & \| \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Note que, como começamos na linha 0, a linha 4 é na verdade a quinta linha da tabela. Usado a regra de formação explicada acima, construímos a tabela:

$n\diagdown r$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$								



A ilustração acima aparece em um texto de 1303, escrito por um matemático chinês. O texto chama-se Szu-Yuen Yu-chien (o espelho precioso dos 4 elementos).

Escrevemos a tabela acima até a linha 6. No entanto, a tabela continua indefinidamente.

Observando a tabela, podemos perceber várias propriedades que podem ser facilmente provadas usando-se a definição do triângulo da Pascal dada acima.

Vamos a estas propriedades:

Propriedade 1

Propriedade 1. Toda linha começa e termina com o inteiro 1.

Demonstração: o primeiro número da linha n é

$$C(n,0)=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{1.n!}=1\ ,$$

enquanto que o último número da linha n é

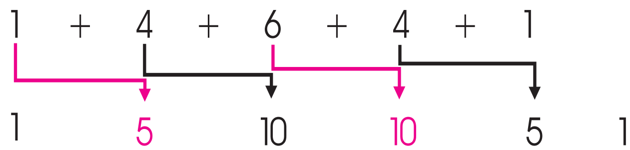
$$C(n,n)=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!0!}=1\ .$$

Propriedade 2

Propriedade 2. Com exceção do primeiro e último números da linha (que, como vimos, são iguais a 1), cada número é igual à soma do número que está diretamente acima dele, com o número que está acima e à esquerda.

Desta forma, começando com a primeira linha, obtemos o triângulo até a linha que quisermos, obtendo uma linha a partir da linha anterior, sem realmente ter que calcular os números binomiais $C(n, r)$.

Como exemplo, vejamos como a linha 5 é obtida da linha 4:



Obtemos um número somando-se dois números, os que estão acima e acima à esquerda dele.

Verifique esta propriedade, até a linha 6, no triângulo da figura anterior.

Exemplo 70

Usando a propriedade 2, construir o triângulo de Pascal até a linha 4:

Começamos com as duas primeiras linhas, que são:

n		
0	1	
1	1	1

Para a linha 2, usamos a propriedade:

n			
0	1		
1	1	1	
2	1	2	1

Acrescentamos a terceira linha:

n				
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

E agora a quarta linha:

n					
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

Demostração da propriedade 2

Agora devemos provar a propriedade 2. Para isto, vamos expressá-la em termos de números binomiais. A propriedade diz respeito aos números $C(n,r)$, com as restrições $n \neq 0$ e $1 \leq r \leq n-1$. Estas restrições são devidas a que a propriedade não se refere a

- Linha 0 (linha com $n = 0$)
- Primeira ($r = 0$) e última ($r = n$) colunas de cada linha. Como vimos, estas sempre valem 1.

Este número $C(n,r)$ é a soma do número acima dele no triângulo, que é o $C(n-1,r)$ (linha anterior, mesma coluna), com o número acima e à esquerda dele, que é o $C(n-1,r-1)$ (linha anterior, coluna anterior).

Podemos então enunciar a propriedade da seguinte forma:

Fórmula de Pascal. Se n e r são inteiros positivos, com $1 \leq r \leq n-1$, então

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

Demonstração

Basta usar a fórmula para $C(n,r)$ e fazer um pouco de conta.

O denominador comum é $r!(n-r)!$

Colocamos o $(n-1)!$ em evidência no numerador

$$\begin{aligned} C(n-1,r)+C(n-1,r-1) &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!.\,((n-1)-(r-1))!} \\ &= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-r)(n-1)!+r.(n-1)!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= C(n,r) \end{aligned}$$

Propriedade 3

Vamos agora observar uma terceira propriedade do triângulo de Pascal, a saber:

> *Propriedade 3.* A soma dos elementos da linha n no triângulo de Pascal é 2^n.

No diagrama a seguir, apresentamos este resultado para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4.

n	linha n	Soma
0	1	$1 = 2^0$
1	1 1	$2 = 2^1$
2	1 2 1	$4 = 2^2$
3	1 3 3 1	$8 = 2^3$
4	1 4 6 4 1	$16 = 2^4$

Isto corresponde, em termos de números binomiais, à afirmação

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \ldots + C(n,n) = 2^n \ ,$$

que já foi provada na Aula 11.

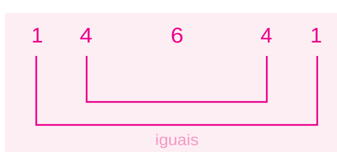
Como exercício, verifique esta propriedade, somando os inteiros de cada linha do triângulo de Pascal, até a linha 6.

Propriedade 4

A *simetria* tem um papel fundamental na Matemática. Simetria está relacionada à estética, ao que é belo. Uma construção matemática deve ser verdadeira e bela.

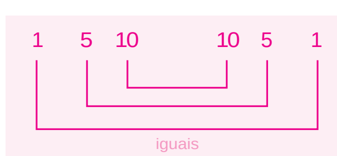
Há ainda mais uma propriedade que gostaríamos de descrever. Ela se refere à *simetria* das linhas do triângulo.

Observe a linha 4:



O número 6 está no meio e a linha é simétrica em relação ao meio.

Observe agora a linha 5:

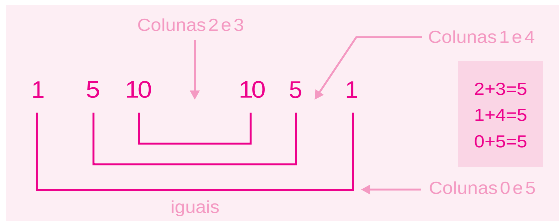


Na linha 5, o meio está entre os dois números 10. A linha é simétrica em relação ao meio.

Podemos afirmar que:

Propriedade 4. As linhas do triângulo de Pascal são simétricas em relação ao meio.

Uma outra maneira de expressar esta simetria é dizer que dois números em uma linha são iguais se a soma dos números de suas colunas é n. Por exemplo, na linha 5 a soma dos números das colunas que são iguais é sempre igual a 5.



Em termos de números binomiais, escrevemos esta propriedade da seguinte forma:

Sejam n e r inteiros, com $n \geq 1$ e $0 \leq r \leq n$, então

$$C(n,r) = C(n, n-r)$$

Demonstração

Temos que

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \ ,$$

enquanto que

$$C(n, n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \ .$$

Portanto,

$$C(n,r) = C(n, n-r) \ .$$

Podemos, então, afirmar que

$$C(n,r) = C(n,p) \Leftrightarrow \begin{cases} r = p \\ \text{ou} \\ r + p = n \end{cases}$$

Quando $r + p = n$ dizemos que os números binomiais $C(n,r)$ e $C(n,p)$ são *complementares*.

Propriedade 5

Descrevemos agora mais uma propriedade interessantíssima do triângulo de Pascal: quando somamos os números em uma mesma coluna, do início da coluna até uma certa linha, obtemos o número na coluna seguinte e na linha seguinte à última que entrou na soma.

Observe a figura:

Vamos agora escrever esta propriedade em termos de números binomiais. Se estamos somando os inteiros da coluna r, então a soma começa pelo número 1, que está na r-ésima linha (o inteiro $C(r,r) = 1$). A soma continua então na linha seguinte com o $C(r+1,r)$, indo até uma linha que escolhemos, digamos a n-ésima linha com o inteiro $C(n,r)$.

O valor obtido com esta soma é o inteiro da coluna seguinte e linha seguinte à última, isto é, o valor da soma é $C(n+1, r+1)$.

Em termos de números binomiais, podemos assim escrever esta propriedade como:

Propriedade 5.
Seja um inteiro $r \geq 0$. Então para todo inteiro $n \geq r$,

$$C(r,r) + C(r+1,r) + \cdots + C(n,r) = C(n+1, r+1)\,.$$

Demonstração da propriedade 5

Vamos demonstrar a propriedade 5 pelo método de Indução Matemática. Apresentaremos esse método com mais detalhes no Módulo 3.

Devemos provar que:

(i) A propriedade é verdadeira para $n = r$.

(ii) Se a propriedade é verdadeira para n, então também é verdadeira para $n+1$, para qualquer inteiro $n \geq r$.

Vamos iniciar provando a afirmação (i).

Fazendo $n = r$, temos que $C(r,r) = C(r+1, r+1) = 1$. Logo, a afirmação é verdadeira para $n = r$.

Para a prova da segunda afirmação, vamos considerar um inteiro $n \geq r$ e tomar como hipótese que:

$$C(r,r) + C(r+1,r) + ... + C(n,r) = C(n+1, r+1).$$

Somando $C(n+1,r)$ aos dois lados da igualdade, temos que

$$C(r,r)+C(r+1,r)+...+C(n,r)+C(n+1,r) = C(n+1,r+1)+C(n+1,r).$$

Mas, pela fórmula de Pascal,

$$C(n+1,r+1) + C(n+1,r) = C(n+2,r+1).$$

Substituindo na equação acima, obtemos

$$C(r,r) + C(r+1,r) + ... + C(n,r) + C(n+1,r) = C(n+2,r+1),$$

o que garante que a propriedade é verdadeira para $n+1$. Isto completa a demonstração, por indução, da propriedade 5.

O Triângulo de Pascal e a seqüência de Fibonacci

O triângulo de Pascal apresenta algumas características que encantam os matemáticos. Em primeiro lugar, nele convivem em harmonia números e formas geométricas. Ele é repleto de simetrias e é possível construí-lo usando uma maneira fácil de se lembrar, como foi explicado no comentário da propriedade 2. Veremos agora como este triângulo de números se relaciona com uma seqüência muito famosa: a seqüência de Fibonacci.

O triângulo de Pascal também está relacionado com outra seqüência famosa, que é a dos números triangulares, mas não a apresentaremos neste texto.

Seqüência de Fibonacci

Além de Leonardo da Vinci, a Itália deu ao mundo outro Leonardo, este chamado Leonardo de Pisa (1180 - 1250), que é mais conhecido pelo seu apelido: Fibonacci. Ele teve um papel importante no desenvolvimento da Matemática. Foi Fibonacci que introduziu na Europa os algarismos arábicos. Ele viveu na Algéria, a capital da Argélia, que fica na África, onde estudou e aprendeu a matemática dos árabes.

Um dos problemas pelo qual ele é lembrado é o Problema dos Coelhos, que ele formulou em seu *Liber Abaci*, de 1202:

"Suponha que o tempo de gestação das coelhas seja de um mês e que cada coelha fique prenha no início de cada mês, iniciando no seu primeiro mês de vida. Suponha também que cada coelha gere sempre dois coelhinhos, um macho e uma fêmea. Quantos casais de coelhos você terá em 2 de janeiro de 1203 se você começou com um casal de recém-nascidos no dia primeiro de janeiro de 1202?"

A resposta para este problema está relacionada com uma seqüência de números que ficou conhecida como a *seqüência de Fibonacci*.

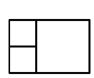
O número de casais de coelhos cresce da seguinte maneira:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

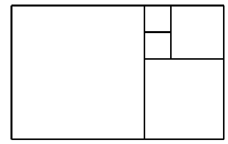
Podemos construir a seqüência de Fibonacci a partir das seguintes informações: Se F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci, então

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{e} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

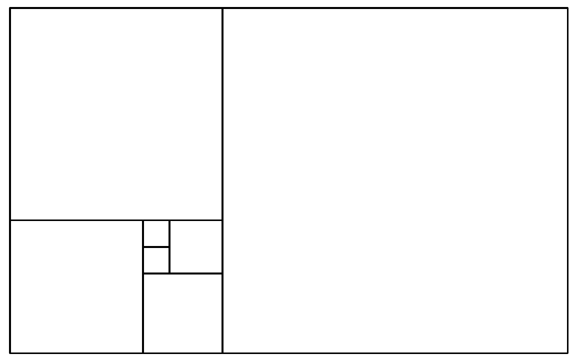
Os números de Fibonacci estão relacionados com o chamado *retângulo áureo* que é conhecido desde a antiga Grécia. A idéia é a seguinte: comece com dois quadrados de lados 1 e anexe um quadrado de lado 2:



Acrescente um quadrado de lado 3 e depois outro, de lado 5:



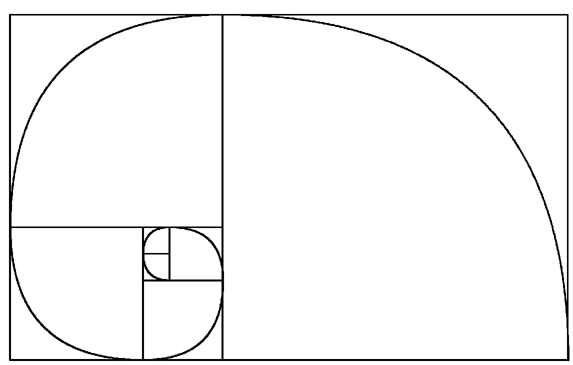
Mais uma rodada com mais dois quadrados, de lados 8 e 13:



Você pode continuar aumentando este retângulo usando para o comprimento dos lados dos novos quadrados exatamente os números de Fibonacci.

A seqüência de Fibonacci aparece em vários fenômenos da natureza, como veremos no exemplo seguinte:

Usando um compasso passamos a traçar semi-circunferências nos quadrados que agrupamos anteriormente, de forma a obter uma curva contínua. Esta curva é uma espiral:



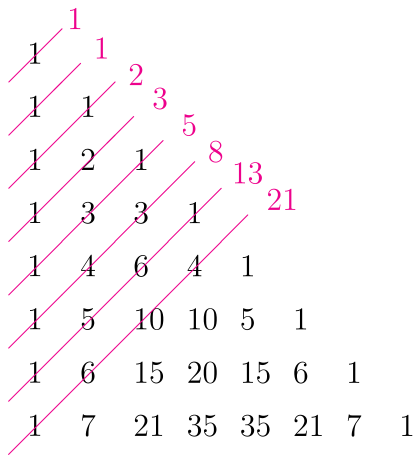
Esta espiral aparece na natureza, no perfil do casco de um crustáceo chamado *nautilus marinho*.

Se você gostou deste tema, há muita informação disponível e você pode, caso tenha tempo e disposição, aprender muitas outras coisas interessantes. Além de material disponível na Internet (use um aplicativo de busca com a palavra chave "Fibonacci"), você pode consultar livros, como "A Divina Proporção: Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática", de H. E. Huntley, foi editado em 1985 pela Editora Universidade de Brasília.

Relação com o triângulo de Pascal

Agora que você já tem alguma intimidade com os números de Fibonacci, veja como eles se relacionam com o triângulo de Pascal.

As somas dos números dispostos nas diagonais do triângulo de Pascal formam, precisamente, a seqüência de Fibonacci, como você pode ver no seguinte diagrama:



Este fato foi notado pelo próprio Fibonacci quando estudava o triângulo de Pascal, que era conhecido como o triângulo chinês. Isto pela simples razão de ter Pascal nascido algo como 400 anos depois de Fibonacci!

Resumo

Nesta aula descrevemos o triângulo de Pascal e estudamos algumas de suas propriedades. Cada uma destas propriedades foram observadas no triângulo e demostradas utilizando propriedades conhecidas dos números binomiais $C(n, r)$.

Há ainda outras propriedades interessantíssimas do triângulo de Pascal. Uma delas, que será vista na próxima aula, é sua relação com os coeficientes da expansão $(x + y)^n$.

Exercícios

1. Construa, sem usar uma fórmula para $C(n,r)$, um triângulo de Pascal com 10 linhas. Verifique, para este triângulo, todas as propriedades estudadas nesta aula.

2. Determine x para que se tenha:

   (a) $C(12,x) = C(12,7)$
   (b) $C(14,x-2) = C(14,2x+1)$
   (c) $C(18,6) = C(18,4x-1)$

3. Determine n tal que $C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+C(n,4)+C(n,5)+C(n,6) = 63$

4. Qual é a resposta do Problema dos Coelhos?

5. Um jardineiro planta um arbusto e notou que nasce um broto de um galho a cada mês, sendo que um broto leva dois meses para produzir seu primeiro broto.

   Calcule o número de galhos do arbusto após 7 meses.

Teorema binomial

Objetivos

Relacionar os coeficientes da expansão de $(x+y)^n$ com as linhas do triângulo de Pascal.
Enunciar e provar o teorema binomial.

Uma soma algébrica de duas parcelas envolvendo símbolos distintos, como $x+y$, é chamada binômio. Também são exemplos de binômios $a+3bc$, $x-y$ e x^2-z^2.

O teorema binomial fornece uma fórmula para a potência de um binômio, isto é, uma fórmula que permite calcular diretamente uma expressão do tipo $(x+y)^n$, onde n é um inteiro positivo.

Vamos começar com algumas potências de $x+y$.

$$\begin{array}{rcl}
(x+y)^0 & = & 1 \\
(x+y)^1 & = & x+y \\
(x+y)^2 & = & x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 & = & x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 & = & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 & = & x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5
\end{array}$$

Vamos agora construir uma tabela em forma de triângulo formada pelos coeficientes das expansões de $(x+y)^n$, colocando na linha n os coeficientes do polinômio $(x+y)^n$.

n	coeficientes de $(x+y)^n$				
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

O triângulo formado é, pelo menos até a linha 5, exatamente igual ao triângulo de Pascal (veja a Aula 12).

No que se segue, provaremos que o triângulo formado pelos coeficientes de $(x+y)^n$ é exatamente o triângulo de Pascal.

Isto quer dizer que os coeficientes de $(x+y)^n$ são os inteiros que formam a linha n do triângulo de Pascal, que são os números binomiais $C(n,r)$.

Em resumo, provaremos o

Binômio de Newton

Teorema Binomial. Seja n um inteiro positivo. Então

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \cdots + C(n,n)y^n$$

É muito comum, quando se estuda o teorema binomial, utilizar a notação $\binom{n}{j}$, ao invés de $C(n,j)$. Utilizando esta notação, o teorema binomial pode ser escrito como

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{j}x^{n-j}y^j + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n\,.$$

Exemplo 71

Usando o teorema binomial para $n=5$, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4y + C(5,2)x^3y^2 + C(5,3)x^2y^3 \\ &\quad + C(5,4)x^1y^4 + C(5,5)y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

Veremos, ainda nesta aula, mais alguns exemplos envolvendo o teorema binomial. Mas antes, devemos provar este teorema.

Prova do teorema binomial

Observe a expansão

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

O produto acima é uma soma de 4 termos: ac, ad, bc e bd. Cada termo é o produto de 2 variáveis, uma em cada parênteses. Por exemplo, o termo ac é o produto de a, que está no parênteses $(a+b)$, por c, que está no parênteses $(c+d)$.

Observe agora:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= (a+b)(ce+cf+de+df)\\ &= ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf.\end{aligned}$$

A expansão de $(a+b)(c+d)(e+f)$ é uma soma de 8 termos, sendo cada termo um produto de 3 variáveis, uma em cada parênteses.

Quantos termos terá a expansão de

$$(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)\ ?$$

Esta expansão é uma soma em que cada termo é produto de 4 variáveis, uma em cada parênteses. Como em cada parênteses há 2 possibilidades de escolha, temos, pelo princípio multiplicativo,

$$2\times2\times2\times2=2^4=16$$

maneiras de formar produtos de 4 variáveis, uma em cada parênteses.

Portanto, a expansão de $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$ é composta de uma soma de 16 termos.

Analogamente, a expansão de

$$(a+b)((c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$$

é uma soma de $2^5=32$ termos. Cada termo é o produto de 5 variáveis, uma em cada parênteses. Note que os 32 termos são distintos.

Agora, o que acontece com a expansão de

$$(x+y)^5=(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\ ?$$

Neste caso, também temos que a expansão é formada pela soma de 32 termos, cada um formado pelo produto de 5 variáveis, uma tomada em cada parênteses.

Por exemplo, um termo é $xyxxy=x^3y^2$. É o termo formado pelo produto das variáveis marcadas abaixo:

$$(x+y)^5=(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\ .$$

A diferença aqui é que *vários destes termos são iguais e podem ser agrupados*.

Por exemplo, os termos

$$xxyxx \quad yxxxx \quad xyxxx \quad xxxyx \quad xxxxy$$

são todos iguais a x^4y.

Da mesma forma, todos os termos que têm 3 variáveis x e 2 variáveis y (tais como $xxyxy$), são iguais a x^3y^2. Mas quantos destes termos existem na expansão de $(x+y)^5$?

Este é um problema de contagem, e para resolvê-lo usaremos as combinações, estudadas nas Aulas 10 e 11.

Para formarmos um termo igual a x^3y^2, temos 5 posições

$$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$$

e temos de escolher 2 posições para a variável y. As 3 posições restantes serão preenchidas com a variável x. Como *a ordem da escolha não é importante*, trata-se de um problema de combinação.

Há

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2.3!} = \frac{120}{2.6} = 10$$

maneiras de escolher as 2 posições para a variável y. Resulta que há 10 termos iguais a x^3y^2 na expansão de $(x+y)^5$.

Fazendo o mesmo para todos os 32 termos da expansão de $(x+y)^5$, podemos dividi-los da seguinte forma:

Termo	possui	quantos existem
$x^5y^0 = x^5$	5 variáveis x e 0 variáveis y	$C(5,0) = 1$
$x^4y^1 = x^4y$	4 variáveis x e 1 variável y	$C(5,1) = 5$
x^3y^2	3 variáveis x e 2 variáveis y	$C(5,2) = 10$
x^2y^3	2 variáveis x e 3 variáveis y	$C(5,3) = 10$
$x^1y^4 = xy^4$	1 variável x e 4 variáveis y	$C(5,4) = 5$
x^0y^5	0 variáveis x e 5 variáveis y	$C(5,5) = 1$

Resulta que a expansão de $(x+y)^5$ é

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\,.$$

Vamos agora generalizar o raciocínio acima. De maneira mais geral, a expansão de

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y) \quad (n \text{ fatores})$$

é a soma de 2^n termos, cada termo formado pelo produto de x's e y's, tomando-se um em cada parênteses.

Cada termo é da forma $x^i y^j$, onde $i+j=n$ (o grau total de cada termo é n), pois cada termo é o produto de n variáveis x ou y.

Como cada termo é da forma $x^i y^j$, com $i+j=n$ ($\Rightarrow i=n-j$), podemos então escrever cada termo como $x^{n-j}y^j$.

O coeficiente de $x^{n-j}y^j$ é o número de maneiras de escolher j posições para pôr j variáveis y dentro de n posições possíveis. Como a ordem da escolha não é importante, então é um problema de combinação e o número de maneiras de fazermos esta escolha é $C(n,j)$.

Disto resulta que o coeficiente de $x^{n-j}y^j$ em $(x+y)^n$ é $C(n,j)$ e que a fórmula geral para a expansão de $(x+y)^n$ é

$$\begin{aligned}(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y \quad &+ \quad \cdots + \\ C(n,j)x^{n-j}y^j + \cdots \quad &+ \quad C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n\,,\end{aligned}$$

como havíamos afirmado.

Exemplo 72

Determine a expansão de $(x+2)^5$.

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4 2^1 + C(5,2)x^3 2^2 + C(5,3)x^2 2^3 \\ &\qquad + C(5,4)x^1 2^4 + C(5,5)2^5 \\ &= 1.x^5 + 5.x^4.2 + 10.x^3.4 + 10.x^2.8 + 5.x.16 + 32 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32\,.\end{aligned}$$

Exemplo 73

Determine $(a-1)^4$.

$$\begin{aligned}(a-1)^4 &= C(4,0)a^4 + C(4,1)a^3.(-1)^1 + C(4,2)a^2.(-1)^2 \\ &\qquad + C(4,3)a^1.(-1)^3 + C(4,4)(-1)^4 \\ &= a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1\,.\end{aligned}$$

Note que, no exemplo anterior, podemos tratar o caso $(x-y)^n$ como $(x+(-y))^n$. Mas,

$$(-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad j \text{ é par} \\ -1 & \text{se} \quad j \text{ é ímpar;} \end{cases}$$

portanto,

$$(-y)^n = (-1)^n . y^j = \begin{cases} y^j & \text{se} \quad n \text{ é par} \\ -y^j & \text{se} \quad n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Resulta que

$$(x-y)^n = x^n - C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 - \cdots$$

(sinais alternados).

Exemplo 74

Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+2)^5$.

Vimos, no Exemplo 72, que $(x+2)^5 = x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$.

Observe que a soma dos coeficientes é a soma das parcelas, tomando-se $x=1$. Isto é, a soma é $1+10+40+80+80+32$. Ora, podemos, então, obter a soma procurada, fazendo $x=1$ no binômio de Newton $(x+2)^5$. Assim, a resposta é $(1+2)^5 = 3^5 = 243$.

Resumo

Nesta aula estudamos o teorema binomial, que fornece os coeficientes da expansão de $(x+y)^n$.

Exercícios

1. Escreva um triângulo de Pascal até a linha 10. Use este triângulo para escrever a expansão de
   (a) $(x+y)^6$.
   (b) $(x+y)^{10}$.
   (c) $(y+3)^4$.
2. Substituindo y por (-1) na questão anterior, escreva a expansão de $(x-1)^6$.
3. Substituindo x por (-1) na expansão de $(x+1)^6$ prove que

$$C(6,0) - C(6,1) + C(6,2) - C(6,3) + C(6,4) - C(6,5) + C(6,6) = 0$$

4. Generalize o resultado da questão 3.

5. Mostre que a expansão de $(x+y)^{10}$ pode ser escrita como a soma de

$$\frac{10!}{a!b!}x^a y^b\,,$$

onde $a+b=10$.

6. Obtenha a igualdade

$$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)=2^n\,,$$

provada na aula 10, a partir do teorema binomial.

7. Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de cada binômio de Newton abaixo:

   a) $(2x+y)^5$
   b) $\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^4$
   c) $(3x-5)^7$
   d) $(a-1)^4$

8. Determine m sabendo que a soma dos coeficientes no desenvolvimento de $(2x+3y)^m$ é 625.

9. Desenvolva

   a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$
   b) $\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{x^2}\right)^5$

10. Calcule $(2+\sqrt{2})^4$.

11. Quantos termos existem no desenvolvimento de $(x^3+1)^6$? Qual o termo em x^6?

Apêndice: A notação de Somatório

Uma notação muito usada para indicar uma soma é o somatório, simbolizado pela letra grega sigma (em maiúsculo):

$$\sum$$

Geralmente, usamos uma variável para indicar os limites da soma e quais os termos que estão sendo somados, como em

$$\sum_{i=1}^{5} x^i = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \, .$$

Esta expressão se lê: "somatório de x elevado a i, com i variando de 1 a 5". Outro exemplo:

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14,$$

que é o somatório de i ao quadrado, com i variando de 1 a 3.

A notação de somatório permite escrever de maneira mais compacta uma expressão que envolve a soma. Isto torna bem mais legíveis expressões que envolvem várias somas.

Por exemplo, usando esta notação, podemos escrever o teorema binomial na forma

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j) x^{n-j} y^j \ .$$

Esta é a mesma fórmula de antes, apenas escrita de uma maneira um pouco mais compacta.

A expressão $C(n,j)x^{n-j}y^j$ representa o termo geral da expansão do binômio de Newton $(x+y)^n$.

Exemplo 75

Determine o termo em x^4 no desenvolvimento de $(x+2)^7$.

Sabemos que o termo geral desse desenvolvimento é dado por $C(n,j)x^{n-j}y^j$, onde $n = 7, y = 2$. Queremos que o expoente de x seja 4, isto é, $n - j = 4$, ou seja, $j = n - 4 = 7 - 4 = 3$. Substituindo na expressão do termo geral, temos: $C(7,3)x^4.2^3 = \frac{7!}{4!3!}.8x^4 = 280x^4$.

Exercícios

1. Determine o valor de :

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(i-1)^2.$ (b) $\displaystyle\sum_{s=1}^{3}\frac{1}{s}.$

2. Determine o coeficiente de x^4 em $(2x+1)^8$.

3. Calcule o termo independente de x (isto é, o termo em x^0) no desenvolvimento de cada binômio de Newton abaixo:

   a) $\left(\frac{1}{x^2}-\sqrt[4]{x}\right)^{18}$.
   b) $\left(3x+\frac{2}{x}\right)^{6}$.
   c) $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

4. Calcule $\sum_{k=0}^{10}\left(\begin{array}{c}10\\k\end{array}\right)3^{10-k}2^k$.

5. Determine m tal que $\sum_{p=0}^{m}\left(\begin{array}{c}m\\p\end{array}\right)2^p=729$.

Soluções de exercícios selecionados

Aula 5

Exercício 1.

a) 10 b) 14 c) 16

Exercício 2.

a) 10 b) 25 c) 10

Exercício 3.

a) 65 b) 70 c) 75

Exercício 4.

a) 10 b) 12 c) 18

Exercício 5.

a) 40 b) 35 c) 65

Exercício 6.

a) 95 b) 35 c) 65 d) 15 e) 70

Exercício 7.

a) 10 b) 18 c) 73 d) 47

Aula 6

Exercício 1. Há 5 respostas possíveis para a primeira pergunta, outras 5 respostas para a segunda pergunta e assim por diante. Usando o Princípio Multiplicativo obtemos

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 = 15\,625$$

resultados possíveis.

Exercício 2. Para a escolha do primeiro número temos 100 possíbilidades. Para a escolha do segundo número temos 99 possibilidades. Para o terceiro restam 98 escolhas e assim por diante. Para sabermos a resposta do exercício usamos o Princípio Multiplicativo:

$$100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 = 9\,034\,502\,400.$$

Isto é, nove bilhões, trinta e quatro milhões, quinhentas e duas mil e quatrocentas cartelas...

Exercício 3. Usando o Princípio Multiplicativo você deverá obter a resposta 50.

Exercício 4. Para saber quantos resultados possíveis existem, basta usar o Princípio Multiplicativo — quatro tarefas com dois possíveis resultados em cada uma delas:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16.$$

Fazendo um diagrama destas dezesseis possibilidades você deverá encontrar seis resultados com exatamente duas caras e duas coroas: KKCC, KCKC, KCCK, CCKK, CKCK, CKKC.

Exercício 5. A resposta é 210.

Exercício 6. Usando o Princípio Multiplicativo descobrimos que há uma lista com 10^5 números, uma vez que dispomos de 10 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e $9)$ para preencher cada uma das cinco posições. No entanto, a resposta do problema é

$$10^5 - 1 = 99\,999$$

pois entre os 10^5 números estamos considerando também o 00000, que devemos excluir.

Exercício 7. Note que cada central pode ter $10^4 = 10\,000$ telefones, pois podemos preencher os quatro últimos campos (2455_ _ _ _) e cada campo pode ser preenchido de dez diferentes maneiras.

Agora, o número de centrais. Podemos ter $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ centrais. Isto porque o primeiro digito da central não pode ser 0.

Exercício 8. A resposta é 175 760 000.

Exercício 9. Supondo que estarei usando sempre o mesmo par de sapatos, um de meus cinco pares de meias, uma das minhas três calças, uma de minhas seis camisas e que posso usar ou não o meu chapéu, a resposta é

$$1 \times 5 \times 3 \times 6 \times 2 = 180$$

diferentes maneiras de me apresentar ao mundo.

Exercício 10. A resposta é $20^3 = 8\,000$.

Exercício 11. A resposta é $10^4 - 10 = 9\,990$ pois devemos subtrair os dez códigos 0000, 1111, . . . , 9999.

Exercício 12. Aqui é preciso ter cuidado. Caso a primeira marca seja escolhida, há $3 \times 5 = 15$ possibilidades. Caso a segunda marca seja escolhida, há

$$15 + 40 = 55$$

diferentes maneiras de escolher o carro.

De quantas maneiras ela poderia fazer isto, caso a pessoa estivesse escolhendo dois carros, um de cada marca.

Exercício 13. Este é um exercício bonito. Seguindo a sugestão, vamos começar escolhendo um dos jogos para marcar o duplo. (Podemos fazer isto de 13 maneiras diferentes.) Agora, temos 3 diferentes maneiras para marcar um duplo:

X	X	

X		X

	X	X

A primeira etapa de nossa tarefa, portanto, pode ser feita de $13 \times 3 = 39$ diferentes maneiras.

Agora temos mais 12 etapas de marcação com 3 possíveis escolhas em cada uma delas. Usando o Princípio Multiplicativo, a resposta do problema é

$$13 \times 3 \times 3^{12} = 20\,726\,199.$$

Para ter certeza que você entendeu a solução, explique por que há 6 908 733 diferentes maneiras de preencher a cartela se, em vez de marcar um duplo, o jogador marcar um triplo:

X	X	X

Aula 7

Exercício 9 a . Quaisquer duas cidades estão ligadas por um único caminho. Portanto, o vendedor ambulante tem seis opções para escolher de qual cidade partirá, seguido de cinco opções para a escolha da próxima cidade, quatro para a terceira e assim por diante. A resposta deste item é:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Exercício 9 b. A idéia é a mesma, mas a primeira escolha já está feita. A resposta é $5! = 120$.

Exercício 9 c. Neste caso o vendedor ambulante passará por cada cidade duas vezes. Portanto, usaremos o Princípio Multiplicativo com doze etapas. As seis primeiras etapas são idênticas às seis etapas do item a. Após ter cumprido a sexta etapa o vendedor estará em uma determinada cidade e terá, portanto, cinco escolhas para cumprir a sétima etapa. Uma vez que ele tenha feito isto, ele segue para a oitava etapa com, novamente, cinco opções, uma vez que a cidade que ele visitou na sexta etapa está no rol das cidades a visitar. Prosseguindo assim ele terá quatro escolhas para cumprir a nona etapa, três para a décima, e assim por diante, até a última etapa:

Etapas	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	9ª	10ª	11ª	12ª
Escolhas	6	5	4	3	2	1	5	5	4	3	2	1

A resposta é $6! \times 5 \times 5! = 432\,000$.

Aula 8

Exercício 5 a. $A(8, 2) = 8 \times 7 = 56$.

Exercício 5 b. Usando o item anterior sabemos que há 56 diferentes possíveis resultados para cada páreo. Usando o Princípio Multiplicativo obtemos a resposta deste item: $56^2 = 3\,136$.

Exercício 7. A banda ficaria realmente surpresa ao saber que há $A(15, 10) = 10\,897\,286\,400$ diferentes maneiras de gravar o CD.

Exercício 8. Veja o exemplo 49. A companhia A tem $A(6, 2) = 30$ rotas e a companhia B tem $A(4, 2) = 12$ rotas.

Para ligar os dois países são necessárias duas novas rotas ligando uma cidade de um dos países a outra cidade no outro país. Isto dá um total de $30 + 2 + 12 = 44$ rotas.

Aula 9

Exercício 1. A resposta é 90 720.

Exercício 2. A ordem é importante. A resposta é 720.

Exercício 3 a. O mesmo que o exercício anterior.

Exercício 3 b. Vamos usar o Princípio Multiplicativo. Para a primeira parte do teste temos $A(6,3)$ diferentes maneiras e $A(8,2)$ para a segunda parte.

A solução é $A(6,3) \times A(8,2) = 6 \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 = 6\,720$.

Exercício 3 c. A solução é similar ao item anterior. A resposta é 11 670.

Exercício 3 d. Há um total de $6+8+7 = 21$ questões. A resposta é $A(21,5) = 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 2\,441\,880$.

Exercício 4 a. Usando o Princípio Multiplicativo: $2 \times 1 \times 4! = 48$ diferentes maneiras de cumprir as tarefas.

Exercício 4 c. Como antes. A resposta é: $2 \times A(4,2) \times 1 \times A(2,2) = 2 \times 12 \times 1 \times 2 = 48$.

Exercício 5. Vamos dividir o problema em etapas e usar o Princípio Multiplicativo.

De quantas maneiras a banda pode escolher a ordem em que visitarão os cinco países? Este é um problema de permutação simples e a resposta é $5! = 120$.

Suponha agora que a banda tenha feito sua escolha da ordem em que visitarão os países. Em cada um deles, eles visitarão 4 cidades. Portanto, em cada país, eles podem organizar sua turnê de $4! = 24$ maneiras diferentes. Logo, a cada uma das 120 escolhas da ordem dos países ela terá $24 \times 24 \times 24 \times 24 \times 24 = 24^5 = 7\,962\,624$ maneiras de escolher a seqüência das cidades.

Assim, a resposta do problema é $120 \times 7\,962\,624 = 955\,514\,880$ maneiras de escolher o itinerário.

Exercício 6 a. Veja exemplo 54. O problema é equivalente a saber de quantas maneiras podemos arranjar cinco letras L e seis letras S. A resposta é: permutações de $5+6=11$ letras com 5 e 6 repetições. Isto dá

$$\frac{P(11)}{5!6!} = 426.$$

Exercício 6 b. O problema agora divide-se em duas etapas: de casa até a banca de jornal e da banca de jornal até o trabalho. O número de caminhos em cada etapa é calculado como no item anterior. Depois, usamos o Princípio Multiplicativo. A resposta é:

$$\frac{5!}{2!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = 20 \times 10 = 200.$$

Exercício 8. Primeiro calculamos o número de permutações lineares que começam com um homem: $5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 14\,400$.

Da mesma forma, há 14 400 permutações lineares que começam com uma mulher.

Há, portanto, um total de 28 800 permutações lineares. Como há uma permutação circular para cada 10 permutações lineares, a resposta do exercício é 2 880.

Exercício 9. Vamos considerar a questão de acomodar seis pessoas (o anfitrião e seus cinco convidados) em torno de uma mesa considerando que duas delas não poderão sentar-se uma ao lado da outra.

Usaremos a seguinte estratégia:

- Primeiro calcularemos de quantas maneiras podemos dispor as pessoas em torno da mesa sem fazer qualquer restrição do tipo alguém não pode sentar- se ao lado de outro alguém.

- Agora calculamos o número de maneiras que podemos dispor as pessoas em torno da mesa mas com a condição que duas delas estarão sempre uma ao lado da outra.

- A resposta do nosso problema será o primeiro número menos o segundo.

Para saber de quantas maneiras podemos dispor seis pessoas em torno de uma mesa usamos permutações cíclicas de seis elementos e obtemos $(6-1)! = 120$.

Agora consideramos duas das seis pessoas como sendo apenas uma e obtemos o número de permutações circulares de cinco elementos: $(5-1)! = 24$. Mas devemos observar que para cada uma dessas permutações, as pessoas que estão sentadas uma ao lado da outra podem alternar suas posições. Isto é, há 48 diferentes maneiras de dispor seis pessoas em torno de uma mesa considerando que duas delas estarão, sempre, uma ao lado da outra.

A resposta do nosso problema é, portanto, $120 - 48 = 72$.

Exercício 10. O motor tem $5! = 120$ ordens de explosão possíveis. Isto é o número de permutações circulares de seis elementos.

Aula 10

Exercício 6. Veja, a nota do aluno independe da ordem em que ele apresenta as questões. Portanto, a solução do problema é

$$C(6,4) = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Exercício 7. Aqui a ordem é importante. Por exemplo, o número 245 é diferente do número 254. Este é um problema simples de arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3. A resposta é

$$A(5,3) = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Exercício 8. Aqui a ordem não importa. Há 66 escolhas possíveis.

Exercício 9. Este problema é semelhante ao exemplo 64. As respostas são: (a) 1; (b) 10; (c) 5.

Exercício 10. Veja o exemplo 63. A resposta é 210.

Exercício 11. Novamente, o procedimento é o mesmo. Usa-se o Princípio Multiplicativo com 3 etapas: 2 violinistas de um conjunto de 6, 1 violista de um conjunto de 5 e 1 violoncelista de um conjunto de 4. O número de maneiras que o quarteto pode ser formado é

$$C(6,2) \times 5 \times 4 = 300.$$

Aula 11

Exercício 1. Veja que o total de maneiras de retirar 4 bolas em 10, sem levar em conta as diferentes cores, é $C(10,4) = 210$.

a) Há seis bolas brancas. A resposta é $C(6,4) = 15$.

b) Usamos o Princípio Multiplicativo: Primeiro, sabemos que há $C(6,2) = 15$ diferentes maneiras de tirar 2 bolas brancas de um conjunto de 6. Analogamente, há $C(4,2) = 6$ maneiras de retirar 2 bolas azuis de um conjunto de 4. Portanto, há $15 \times 6 = 90$ maneiras de retirar 2 bolas brancas e 2 bolas azuis.

c) Primeiro, sabemos que há $C(6,3) = 20$ diferentes maneiras de retirar 3 bolas brancas de um conjunto de 6. Como há 4 bolas azuis, a solução é: há $20 \times 4 = 80$ diferentes maneiras de retirar 3 bolas brancas e 1 azul.

d) Há uma única maneira de retirar 4 bolas azuis.

Finalmente, observe que há $6 \times C(4,3) = 6 \times 4 = 24$ diferentes maneiras de retirar 1 bola branca e 3 bolas azuis.

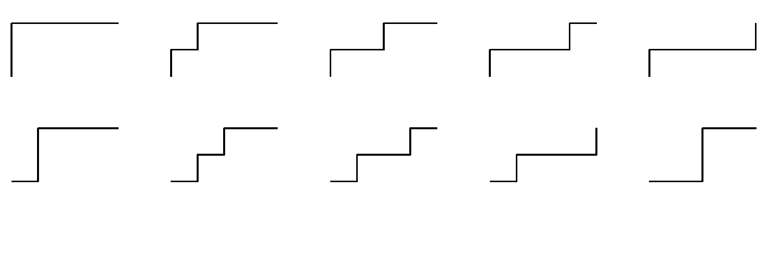
A soma deste resultados parciais totalizam as 210 maneiras de retirar 4 bolas em 10: $15 + 90 + 80 + 1 + 24 = 210$.

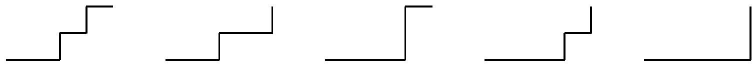
Exercício 2. A resposta do item (a) é $C(10,6) = 210$. O item (b) tem resposta $C(5,3) \times C(5,3) = 10 \times 10 = 100$.

Exercício 3. A resposta é $C(10,5) \times C(7,4) \times C(5,2) = 252 \times 35 \times 10 = 88\,200$.

Exercício 4. Podemos indicar o deslocamento do ônibus usando duas letras: N e L, imaginando que os pontos estão dispostos em um mapa que tem o Norte no alto da folha. Dessa forma, o ponto A está a sudeste do ponto B. O ônibus deverá deslocar-se duas quadras para o norte e quatro quadras para o leste.

Os possíveis caminhos podem ser indicados usando uma seqüência de 6 letras: duas letras N e quatro letras L. Você já resolveu problemas deste tipo antes. Agora faremos o seguinte. Devemos escolher 2 posições para as 2 letras N em 6 posições possíveis, uma vez que as outras 4 posições serão preenchidas com letras L. A resposta é $C(6,2) = 15$.





Exercício 6. A resposta do problema é 28.

Exercício 7. A resposta do problema também é 28.

Exercício 8. Vamos usar o Princípio Multiplicativo. A primeira etapa consiste em calcular o número de subconjuntos com 4 elementos do conjunto original, com 12 elementos. Isto pode ser feito de $C(12, 4) = 495$ maneiras.

A segunda etapa consiste em encontrar quantos subconjuntos de 4 elementos tem o complementar do conjunto escolhido na primeira etapa. Isto é $C(8, 4) = 70$.

Vamos para a terceira etapa. Já escolhemos dois subconjuntos de 4 elementos, ambos disjuntos. Restam, portanto, 4 elementos. Temos de escolher mais um subconjunto, agora com 2 elementos. Seu complementar também terá 2 elementos. Isto pode ser feito de $C(4, 2) = 6$ maneiras. O conjunto original será igual à união disjunta destes quatro subconjuntos: um obtido na primeira etapa, outro na segunda e mais dois na terceira.

A resposta do problema é $495 \times 70 \times 6 = 207\,900$.

Exercício 9. Use a mesma tática que foi usada no exercício anterior para encontrar a resposta $126 \times 6 = 756$.