§1. Vetores, matrizes e sistemas lineares

O que é Álgebra Linear? Por que estudá-la?

A Álgebra Linear é a área da Matemática que estuda todos os aspectos relacionados com uma estrutura chamada Espaço Vetorial.

Estrutura matemática é um conjunto no qual são definidas operações. As propriedades dessas operações "estruturam"o conjunto. Talvez você já tenha ouvido falar em alguma das principais estruturas matemáticas, como grupo, anel e corpo. Você estudará essas estruturas nas disciplinas de Álgebra.

Devido às suas características, essa estrutura permite um tratamento algébrico bastante simples, admitindo, inclusive, uma abordagem computacional. A Álgebra Linear tem aplicações em inúmeras áreas, tanto da matemática quanto de outros campos de conhecimento, como Computação Gráfica, Genética, Criptografia, Redes Elétricas etc.

Nas primeiras aulas deste módulo estudaremos algumas ferramentas para o estudo dos Espaços Vetoriais: as matrizes, suas operações e propriedades; aprenderemos a calcular determinantes e, finalmente, aplicaremos esse conhecimento para discutir e resolver sistemas de equações lineares. Muitos dos principais problemas da física, engenharia, química e, é claro, da matemática, recaem (ou procuramos fazer com que recaiam) num sistema de equações lineares. A partir da aula 8, estaremos envolvidos com Álgebra Linear propriamente dita e esperamos que você se aperceba, ao longo do curso, de que se trata de uma das áreas mais lúdicas da Matemática!!.

Aula 1 – Matrizes

Objetivos

Reconhecer matrizes reais;
Identificar matrizes especiais e seus principais elementos;
Estabelecer a igualdade entre matrizes.

Consideremos o conjunto de alunos do CEDERJ, ligados ao pólo Lugar Lindo, cursando a disciplina Álgebra Linear 1. Digamos que sejam 5 alunos (claro que esperamos que sejam muitos mais!). Ao longo do semestre, eles farão 2 avaliações a distância e 2 presenciais, num total de 4 notas parciais. Para representar esses dados de maneira organizada, podemos fazer uso de uma tabela:

aluno	AD1	AD2	AP1	AP2
1. Ana	4,5	6,2	7,0	5,5
2. Beatriz	7,2	6,8	8,0	10,0
3. Carlos	8,0	7,5	5,9	7,2
4. Daniela	9,2	8,5	7,0	8,0
5. Edson	6,8	7,2	6,8	7,5

Se quisermos ver as notas obtidas por um determinado aluno, digamos, o Carlos, para calcular sua nota final, basta atentarmos para a *linha* correspondente (8,0; 7,5; 5,9; 7,2); por outro lado, se estivermos interessados nas notas obtidas pelos alunos na segunda verificação a distância, para calcular a média da turma, devemos olhar para a *coluna* correspondente (6,2; 6,8; 7,5; 8,5; 7,2). Também podemos ir diretamente ao local da tabela em que se encontra, por exemplo, a nota de Carlos na segunda avaliação a distância (7,5).

É esse tipo de tratamento que as matrizes possibilitam (por linhas, por colunas, por elemento) que fazem desses objetos matemáticos instrumentos valiosos na organização e manipulação de dados.

Vamos, então, à definição de matrizes.

Definição

Uma *matriz real* A de ordem $m \times n$ é uma tabela de mn números reais, dispostos em m linhas e n colunas, onde m e n são números inteiros positivos.

Os elementos de uma matriz podem ser outras entidades, que não números reais. Podem ser, por exemplo, números complexos, polinômios, outras matrizes etc.

Uma matriz real de m linhas e n colunas pode ser representada por $A_{m\times n}(\mathbb{R})$. Neste curso, como só trabalharemos com matrizes reais, usaremos a notação simplificada $A_{m\times n}$, que se lê "A m por n". Também podemos escrever $A = (a_{ij})$, onde $i \in \{1, ..., m\}$ é o índice de linha e $j \in \{1, ..., n\}$ é o índice de coluna do termo genérico da matriz. Representamos o conjunto de todas as matrizes reais "m por n"por $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Escrevemos os elementos de uma matriz limitados por parênteses, colchetes ou barras duplas.

As barras simples são usadas para representar determinantes, como veremos na aula 5.

Exemplo **1**

1. Uma matriz 3×2 : $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 17 \end{bmatrix}$

2. Uma matriz 2×2 : $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1/2 \end{pmatrix}$

3. Uma matriz 3×1 : $\begin{Vmatrix} -4 \\ 0 \\ 11 \end{Vmatrix}$

De acordo com o número de linhas e colunas de uma matriz, podemos destacar os seguintes casos particulares:

- $m = 1$: matriz linha
- $n = 1$: matriz coluna
- $m = n$: matriz quadrada. Neste caso, escrevemos apenas A_n e dizemos que "A é uma matriz quadrada de ordem n". Representamos o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n por $M_n(\mathbb{R})$ (ou, simplesmente, por M_n).

Exemplo **2**

1. matriz linha 1×4: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 1/5 \end{bmatrix}$

2. matriz coluna 3×1: $\begin{bmatrix} 4 \\ 17 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. matriz quadrada de ordem 2: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$

Os elementos de uma matriz podem ser dados também por fórmulas, como ilustra o próximo exemplo.

Exemplo 3

Vamos construir a matriz $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R}),\ A = (a_{ij})$, tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} i^2 + j, \text{ se } i = j \\ i - 2j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

A matriz procurada é do tipo $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$.

Seguindo a regra de formação dessa matriz, temos:

$$\begin{array}{ll} a_{11} = 1^2 + 1 = 2 & a_{12} = 1 - 2(2) = -3 \\ a_{22} = 2^2 + 2 = 6 & a_{13} = 1 - 2(3) = -5 \\ & a_{14} = 1 - 2(4) = -7 \\ & a_{21} = 2 - 2(1) = 0 \\ & a_{23} = 2 - 2(3) = -4 \\ & a_{24} = 2 - 2(4) = -6 \end{array}.$$

Logo, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 & -7 \\ 0 & 6 & -4 & -6 \end{bmatrix}$.

Igualdade de matrizes

O próximo passo é estabelecer um critério que nos permita decidir se duas matrizes são ou não iguais. Temos a seguinte definição:

Duas matrizes $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$, são *iguais* quando $a_{ij} = b_{ij}, \forall i \in \{1, ..., m\},\ \forall j \in \{1, ..., n\}$.

Exemplo 4

Vamos determinar a, b, c e d para que as matrizes $\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ c+d & 6 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 2c \end{bmatrix}$ sejam iguais. Pela definição de igualdade de matrizes, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} 2a & 3b \\ c+d & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 1 & 2c \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 4 \\ 3b = -9 \\ c + d = 1 \\ 6 = 2c \end{cases}$$

Daí, obtemos $a = 2, b = -3, c = 3$ e $d = -2$.

Numa matriz quadrada $A = (a_{ij}),\ i, j \in \{1, ...n\}$, destacamos os seguintes elementos:

- *diagonal principal*: formada pelos termos a_{ii} (isto é, pelos termos com índices de linha e de coluna iguais).
- *diagonal secundária*: formada pelos termos a_{ij} tais que $i + j = n$.

Exemplo 5

Seja

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -2 & 7 \\ 1/2 & -3 & \pi & 14 \\ -5 & 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

A diagonal principal de A é formada por: $3, 3, \pi, 6$
A diagonal secundária de A é formada por: $1, -2, -3, -5$

Matrizes quadradas especiais

No conjunto das matrizes quadradas de ordem n podemos destacar alguns tipos especiais. Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é uma matriz

- *triangular superior*, quando $a_{ij} = 0$ se $i > j$ (isto é, possui todos os elementos abaixo da diagonal principal nulos).
- *triangular inferior*, quando $a_{ij} = 0$ se $i < j$ (isto é, possui todos os elementos acima da diagonal principal nulos).
- *diagonal*, quando $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ (isto é, possui todos os elementos fora da diagonal principal nulos). Uma matriz diagonal é, ao mesmo tempo, triangular superior e triangular inferior.

No nosso curso nos referimos aos números reais como *escalares*. Essa denominação é específica da Álgebra Linear.

- *escalar*, quando $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ k, & \text{se } i = j \end{cases}$, para algum $k \in \mathbb{R}$. Isto é, uma matriz escalar é diagonal e possui todos os elementos da diagonal principal iguais a um certo escalar k.

- *identidade*, quando $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 1, & \text{se } i = j \end{cases}$. Isto é, a identidade é uma matriz escalar e possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1. Representamos a matriz identidade de ordem n por I_n.

Exemplo **6**

matriz	classificação
$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$	triangular superior
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	triangular superior
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	triangular superior, triangular inferior, diagonal
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$	triangular inferior
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	triangular superior, triangular inferior, diagonal, escalar
$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$	triangular superior, triangular inferior, diagonal, escalar

Exemplo **7**

São matrizes identidade:

$$I_1 = [1]; \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De modo geral, sendo n um número natural maior que 1, a matriz identidade de ordem n é

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição

A matriz *nula* em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é a matriz de ordem $m \times n$ que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo 8

Matriz nula 2×3: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriz nula 5×2: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Definição

Dada $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, a *oposta* de A é a matriz $B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $b_{ij} = -a_{ij}$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Ou seja, os elementos da matriz oposta de A são os elementos opostos aos elementos de A. Representamos a oposta de A por $-A$.

Exemplo 9

A oposta da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ -6 & 10 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$-A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & -\sqrt{3} & -4 \\ -1 & 0 & 8 \\ 6 & -10 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resumo

Nesta aula vimos o conceito de matriz e conhecemos seus tipos especiais. Aprendemos a comparar duas matrizes, a identificar a matriz nula e a obter a oposta de uma matriz. Também vimos algumas matrizes quadradas que se destacam por suas características e que serão especialmente úteis no desenvolvimento da teoria.

Exercícios

1. Escreva a matriz $A = (a_{ij})$ em cada caso:

   (a) A é do tipo 2×3, e $a_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & \text{se } i = j \\ i - 2j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

   (b) A é quadrada de ordem 4 e $a_{ij} = \begin{cases} 2i, & \text{se } i < j \\ i - j, & \text{se } i = j \\ 2j, & \text{se } i > j \end{cases}$

   (c) A é do tipo 4×2, e $a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{se } i \neq j \\ 3, & \text{se } i = j \end{cases}$

   (d) A é quadrada terceira ordem e $a_{ij} = 3i - j + 2$.

2. Determine x e y tais que

   (a) $\begin{bmatrix} 2x + y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 9 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} x^2 & y \\ x & y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Respostas dos exercícios

1. (a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -5 \\ 0 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 7 & 6 & 5 \\ 10 & 9 & 8 \end{bmatrix}$

2. (a) $x = 5;\ y = 1$

   (b) $x = y = -1$

Auto-avaliação

Você não deve ter sentido qualquer dificuldade para acompanhar esta primeira aula. São apenas definiões e exemplos. Se achar conveniente, antes de prosseguir, faça uma segunda leitura, com calma, da teoria e dos exemplos. De qualquer maneira, você sabe que, sentindo necessidade, pode (e deve!) entrar em contato com o tutor da disciplina.

Até a próxima aula!!

Aula 2 – Operações com matrizes: transposição, adição e multiplicação por número real

Objetivos

Obter a matriz transposta de uma matriz dada;
Identificar matrizes simétricas e anti-simétricas;
Obter a matriz soma de duas matrizes;
Obter o produto de uma matriz por um número real;
Aplicar as propriedades das operações nos cálculos envolvendo matrizes.

Na aula passada, definimos matrizes e vimos como verificar se duas matrizes são ou não iguais. Nesta aula iniciamos o estudo das operações com matrizes. É através de operações que podemos obter outras matrizes, a partir de matrizes dadas. A primeira operação com matrizes que estudaremos - a transposição - é *unária*, isto é, aplicada a uma única matriz. A seguir, veremos a adição, que é uma operação *binária*, ou seja, é aplicada a duas matrizes. Finalmente, veremos como multiplicar uma matriz por um número real. Por envolver um elemento externo ao conjunto das matrizes, essa operação é dita ser *externa*.

Transposição

Dada uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, a *transposta* de A é a matriz $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B = (b_{ji})$ tal que $b_{ji} = a_{ij}, \forall i \in \{1, ..., m\}, \forall j \in \{1, ..., n\}$. Representamos a matriz transposta de A por A^T.

Note que para obter a transposta de uma matriz A, basta escrever as linhas de A como sendo as colunas da nova matriz (ou, equivalentemente, escrever as colunas de A como as linhas da nova matriz.)

Exemplo **10**

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}$. A transposta de A é a matriz $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Se $M = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$, então $M^T = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = M$.

Comparando uma matriz com sua transposta, podemos definir matrizes simétricas e anti-simétricas, como segue:

Definição

Uma matriz A é:

- *simétrica*, se $A^T = A$
- *anti-simétrica*, se $A^T = -A$

Segue da definição acima, que matrizes simétricas ou anti-simétricas são, necessariamente, quadradas.

Exemplo 11

1. As matrizes

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & \sqrt{3} \\ -2 & 5 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 19 & 3/2 \\ 3/2 & -7 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1/5 & 0 \\ -2 & 7 & 9 & -1 \\ 1/5 & 9 & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

são simétricas.

2. A matriz M, do exemplo 10, é simétrica.

Note que, numa matriz simétrica, os elementos em posições simétricas em relação à diagonal principal são iguais.

Exemplo 12

As matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1/2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1/2 & -5 & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1/5 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & -1 \\ -1/5 & -9 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

são anti-simétricas.

Note que uma matriz anti-simétrica tem, necessariamente, todos os elementos da diagonal principal iguais a zero.

Adição

Você se lembra do exemplo que demos, na aula 1, com a relação de nomes e notas da turma de Lugar Lindo? Cada aluno tem seu nome associado a um número (o número da linha). Assim, sem perder qualquer informação sobre os alunos, podemos representar apenas as notas das avaliações numa matriz 5 por 4:

$$A = \begin{bmatrix} 4,5 & 6,2 & 7,0 & 5,5 \\ 7,2 & 6,8 & 8,0 & 10,0 \\ 8,0 & 7,5 & 5,9 & 7,2 \\ 9,2 & 8,5 & 7,0 & 8,0 \\ 6,8 & 7,2 & 6,8 & 7,5 \end{bmatrix}$$

Vamos supor que as provas tenham sido submetidas a uma revisão e que as seguintes alterações sejam propostas para as notas:

$$R = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,0 & 0,0 & 0,2 \\ -0,2 & 0,5 & 0,5 & 0,0 \\ 0,0 & 0,2 & 0,6 & -0,1 \\ 0,0 & 0,5 & 0,0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,0 & 0,0 & 0,3 \end{bmatrix}$$

A matriz N, com as notas definitivas, é a matriz soma das matrizes A e R, formada pelas somas de cada nota com seu fator de correção, isto é, cada termo de A com seu elemento correspondente em R:

$$N = A + R = \begin{bmatrix} 4,5+0,5 & 6,2+0,0 & 7,0+0,0 & 5,5+0,2 \\ 7,2+(-0,2) & 6,8+0,5 & 8,0+0,5 & 10,0+0,0 \\ 8,0+0,0 & 7,5+0,2 & 5,9+0,6 & 7,2+(-0,1) \\ 9,2+0,0 & 8,5+0,5 & 7,0+0,0 & 8,0+0,2 \\ 6,8+0,2 & 7,2+0,0 & 6,8+0,0 & 7,5+0,3 \end{bmatrix}$$

Logo, $N = \begin{bmatrix} 5,0 & 6,2 & 7,0 & 5,7 \\ 7,0 & 7,3 & 8,5 & 10,0 \\ 8,0 & 7,7 & 6,5 & 7,1 \\ 9,2 & 9,0 & 7,0 & 8,2 \\ 7,0 & 7,2 & 6,8 & 7,8 \end{bmatrix}$

Definição

Dadas as matrizes $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, a matriz *soma de A e B* é a matriz $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i \in \{1, ..., m\}, \ \forall j \in \{1, ..., n\}$$

Representamos a matriz soma de A e B por $A+B$. Em palavras, cada elemento de $A+B$ é a soma dos elementos correspondentes das matrizes A e B. A *diferença de* A *e* B, indicada por $A-B$, é a soma de A com a oposta de B, isto é: $A-B=A+(-B)$.

Exemplo **13**

1. $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -1 & 4 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -7 & -2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -8 & 2 \\ 10 & -4 \end{bmatrix}$

Multiplicação por um número real

Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$. Queremos obter $2A$:

$$2A = A + A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 \\ 2\times 2 & 2\times(-4) \end{bmatrix}$$

.

Em palavras, o *produto* da matriz A pelo número real 2 é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por 2.

Voltemos à nossa tabela de notas dos alunos do CEDERJ. Suponhamos que, para facilitar o cálculo das médias, queiramos trabalhar numa escala de 0 a 100 (em vez de 0 a 10, como agora). Para isso, cada nota deverá ser multiplicada por 10. Teremos, então, a seguinte matriz:

$$10N = \begin{bmatrix} 50 & 62 & 70 & 57 \\ 70 & 73 & 85 & 100 \\ 80 & 77 & 65 & 71 \\ 92 & 90 & 70 & 82 \\ 70 & 72 & 68 & 78 \end{bmatrix}$$

Você verá que, em Álgebra Linear, lidamos com dois tipos de objeto matemático: os escalares (que, neste curso, serão os números reais) e os vetores.

Podemos, então, definir a multiplicação de uma matriz por um número real (ou, como é usual dizer no âmbito da Álgebra Linear, por um *escalar*).

Definição

Dada $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, a matriz *produto de* A *por* α é a matriz $C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$c_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \quad \forall i \in \{1, ..., m\}, \ \ \forall j \in \{1, ...n\}$$

Representamos a matriz produto de A por α por $\alpha\, A$.

Exemplo **14**
Dadas $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

1. $2A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{3}B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 8/3 \end{bmatrix}$

3. $A+2B-3C = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ -6 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -18 & 3 \\ -9 & -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -23 & 17 \\ -14 & 5 \end{bmatrix}$

Propriedades das operações com matrizes

Você talvez já tenha se questionado quanto à necessidade ou utilidade de se listar e provar as propriedades de uma dada operação. Comutatividade, associatividade... aparentemente sempre as mesmas palavras, propriedades sempre válidas... No entanto, são as propriedades que nos permitem estender uma operação que foi definida para duas matrizes, para o caso de somar três ou mais. Ela também flexibilizam e facilitam os cálculos, de modo que quanto mais as dominamos, menos trabalho "mecânico" temos que desenvolver. Veremos agora as propriedades válidas para as operações já estudadas.

Propriedade da transposição de matrizes

(t1) Para toda matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, vale que $A^{T^T} = A$.

A validade dessa propriedade é clara, uma vez que escrevemos as linhas de A como colunas e, a seguir, tornamos a escrever essas colunas como linhas, retornando à configuração original. Segue abaixo a demonstração formal dessa propriedade:

Seja $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Então $A^T = B = (b_{ji}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ tal que $b_{ji} = a_{ij}$, (ou, equivalentemente, $b_{ij} = a_{ji}$), $\forall i \in \{1, ...m\}$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$.

Daí, $A^{T^T} = B^T = C = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}, \forall i \in \{1, ...m\}$, $\forall j \in \{1, ..., n\}$. Logo, $C = B^T = A^{T^T} = A$.

Propriedades da adição de matrizes

Para demonstrar as propriedades da adição de matrizes, usaremos as propriedades correspondentes, válidas para a adição de números reais.

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ e $C = (c_{ij})$ matrizes quaisquer em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Valem as seguintes propriedades.

(a1) *Comutativa*: $A + B = B + A$

De fato, sabemos que $A + B = (s_{ij})$ é também uma matriz $m \times n$ cujo elemento genérico é dado por: $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Como a adição de números reais é comutativa, podemos escrever $s_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Isto é, $A + B = B + A$. Em palavras: a ordem como consideramos as parcelas não altera a soma de duas matrizes.

(a2) *Associativa*: $(A + B) + C = A + (B + C)$

De fato, o termo geral s_{ij} de $(A+B)+C$ é dado por $s_{ij} = (a+b)_{ij} + c_{ij} = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Como a adição de números reais é associativa, podemos escrever $s_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = a_{ij} + (b+c)_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Ou seja, s_{ij} é também o termo geral da matriz obtida de $A+(B+C)$. Isto é, $(A+B)+C = A+(B+C)$. Em palavras: podemos estender a adição de matrizes para o caso de três parcelas, associando duas delas. A partir dessa propriedade, podemos agora somar três ou mais matrizes.

(a3) *Existência do elemento neutro*: Existe $O \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A+O = A$.

De fato, seja O a matriz nula de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, isto é, $O = (o_{ij})$, onde $o_{ij} = 0$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Sendo s_{ij} o termo geral de $A + O$, temos $s_{ij} = a_{ij} + o_{ij} = a_{ij} + 0 = a_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Ou seja, $A + O = A$.
Em palavras: na adição de matrizes a matriz nula desempenha o mesmo papel que o zero desempenha na adição de números reais.

O elemento oposto é também chamado elemento *simétrico* ou *inverso aditivo*.

(a4) *Da existência do elemento oposto* : Existe $(-A) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A + (-A) = O$.

De fato, sabemos que cada elemento de $-A$ é o oposto do elemento correspondente de A. Então, sendo s_{ij} o termo geral de $A + (-A)$, temos

$s_{ij} = a_{ij} + (-a_{ij}) = 0 = o_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Isto é, $A + (-A) = O$.
Em palavras: Cada matriz possui, em correspondência, uma matriz de mesma ordem tal que a soma das duas é a matriz nula dessa ordem.

(a5) *Da soma de transpostas*: $A^T + B^T = (A + B)^T$

De fato, seja s_{ij} o termo geral de $A^T + B^T$. Então, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$, $s_{ij} = a_{ji} + b_{ji} = (a+b)ji$, que é o termo geral de $(A+B)^T$. Ou seja, $A^T + B^T = (A + B)^T$.
Em palavras: A soma das transpostas é a transposta da soma. Ou, vendo sob outro ângulo: a transposição de matrizes é distributiva em relação à adição.

Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar

Você verá que, também neste caso, provaremos a validade dessas propriedades usando as propriedades correspondentes da multiplicação de números reais.

Sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Valem as seguintes propriedades:

(mn1) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

De fato, seja p_{ij} o termo geral de $(\alpha\beta)A$, isto é, $p_{ij} = ((\alpha\beta)a)_{ij} = (\alpha\beta)a_{ij} = \alpha(\beta a_{ij}) = (\alpha(\beta a))_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Ou seja, p_{ij} é também o termo geral de $\alpha(\beta A)$. Logo, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

Exemplo 15
Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ 12A = 3(4A) = 2(6A)$.

(mn2) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

De fato, seja p_{ij} o termo geral de $(\alpha + \beta)A$, isto é, $p_{ij} = ((\alpha + \beta)a)_{ij} = (\alpha + \beta)a_{ij} = \alpha a_{ij} + \beta a_{ij} = (\alpha a)_{ij} + (\beta a)_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Ou seja, p_{ij} é também o termo geral de $\alpha A + \beta A$. Logo, $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Exemplo 16
Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ 12A = 7A + 5A = 8A + 4A$.

(mn3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

De fato, seja p_{ij} o termo geral de $\alpha(A+B)$. Então, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$, temos $p_{ij} = (\alpha(a + b))_{ij} = \alpha(a + b)_{ij} = \alpha(a_{ij} + b_{ij}) =$

$\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij} = (\alpha a)_{ij}+(\alpha b)_{ij}$. Ou seja, p_{ij} é também o termo geral de $\alpha A+\alpha B$. Logo, $\alpha(A+B) = \alpha A+\alpha B$.

Exemplo **17**

Dadas $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $5(A+B) = 5A+5B$.

(mn4) $1A = A$

De fato, sendo p_{ij} o termo geral de $1A$, temos $p_{ij} = (1a)_{ij} = 1a_{ij} = a_{ij}$, para todo $i = 1, ..., m$ e todo $j = 1, ..., n$. Isto é, $1A = A$.

(mn5) $\alpha A^T = (\alpha A)^T$

De fato, seja p_{ij} o termo geral de αA^T. Então $p_{ij} = \alpha a_{ji} = (\alpha a)_{ji}$, ou seja, p_{ij} é também o termo geral de $(\alpha A)^T$.

Exemplo **18**

Dadas $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$, vamos determinar $3\left(2A^T - \frac{1}{2}B\right)^T$. Para isso, vamos usar as propriedades vistas nesta aula e detalhar cada passo, indicando qual a propriedade utilizada.

$$
\begin{aligned}
3\left(2A^T - \frac{1}{2}B\right)^T &\overset{a5}{=} 3\left[\left(2A^T\right)^T - \left(\frac{1}{2}B\right)^T\right] \\
&\overset{mn5}{=} 3\left[2\left(A^T\right)^T - \frac{1}{2}B^T\right] \\
&\overset{t1}{=} 3\left(2A - \frac{1}{2}B^T\right) \\
&\overset{mn3}{=} 3(2A) - 3\left(\frac{1}{2}B^T\right) \\
&\overset{mn1}{=} (3.2)A - \left(3.\frac{1}{2}\right)B^T \\
&= 6A - \frac{3}{2}B^T \\
&= 6\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Observação. É claro que você, ao efetuar operações com matrizes, não precisará explicitar cada propriedade utilizada (a não ser que o enunciado da questão assim o exija!) e nem resolver a questão passo-a-passo. O importante é constatar que são as propriedades das operações que nos possibilitam reescrever a matriz pedida numa forma que nos pareça mais "simpática".

Resumo

Nesta aula começamos a operar com as matrizes. Vimos como obter a transposta de uma matriz e a reconhecer matrizes simétricas e anti-simétricas. A seguir, aprendemos a somar duas matrizes e a multiplicar uma matriz por um escalar. Finalizamos com o estudo das propriedades das operações vistas. A aula ficou um pouco longa, mas é importante conhecer as propriedades válidas para cada operação estudada.

Exercícios

1. Obtenha a transposta da matriz $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2i + j, & \text{se } i = j \\ i^2 - j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

2. Determine a e b para que a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2a - b \\ a + b & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ seja simétrica.

3. Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é uma matriz simétrica.

4. Determine a, b, c, x, y, z para que a matriz $\begin{bmatrix} 2x & a + b & a - 2b \\ -6 & y^2 & 2c \\ 5 & 8 & z - 1 \end{bmatrix}$ seja anti-simétrica.

5. Sendo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 7 & 3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$, determine $A + B$.

6. Determine $a, b,$ e c para que $\begin{bmatrix} a & 3 & 2a \\ c & 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

7. Dada $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$, determine a matriz B tal que $A+B$ é a matriz nula de $M_2(\mathbb{R})$.

8. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X em cada caso:

   (a) $X = 2A - 3B$

   (b) $X + A = B - C^T - 2X$

   (c) $X + B^T = 3A^T + \frac{1}{2}C$

9. Sendo $A = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 11 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -8 & 7 & -9 \\ -12 & -19 & -2 \end{bmatrix}$, determine as matrizes X e Y tais que $\begin{cases} 2X + Y & = & A \\ X - 2Y & = & B \end{cases}$

10. Sendo $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, use as propriedades vistas nesta aula para simplificar a expressão $3\left(2A^T - B\right)^T + 5\left(\frac{1}{5}B^T - A^T + \frac{3}{5}B\right)^T$.

Auto-avaliação

Você deve se sentir à vontade para operar com matrizes nas formas vistas nesta aula: transpor, somar e multiplicar por um escalar. São operações de realização simples, que seguem a nossa intuição. Além disso, é importante que você reconheça a utilidade das propriedades no sentido de nos dar mobilidade na hora de operarmos com matrizes. Propriedades de operações não são para serem decoradas, mas apreendidas, assimiladas, utilizadas ao pôr a teoria em prática!

Se você sentiu qualquer dificuldade ao acompanhar a aula ou ao resolver os exercícios propostos, peça auxílio ao tutor da teoria. O importante é que caminhemos juntos nesta jornada!

Até a próxima aula!!

Respostas dos exercícios

1. $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 5 \\ -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

2. $a = 1;\ \ b = 3$

4. $a = \frac{7}{3};\ b = \frac{11}{3};\ c = -4;\ x = 0;\ y = 0;\ z = 1$

5. $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 2 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

6. $a = 3;\ b = -1;\ c = 2$

7. $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

8. $(a) \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 14 & -6 & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$

9. $X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix};\ \ Y = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 6 & 10 & 3 \end{bmatrix}$

10. $A + B$

Aula 3 – Operações com matrizes: multiplicação

Objetivos

Reconhecer quando é possível multiplicar duas matrizes;
Obter a matriz produto de duas matrizes;
Aplicar as propriedades da multiplição de matrizes;
Identificar matrizes inversíveis.

Se você já foi "apresentado" à multiplicação de matrizes, pode ter se perguntado por que a definição foge tanto daquilo que nos pareceria mais fácil e "natural": simplesmente multiplicar os termos correspondentes das duas matrizes (que, para isso, deveriam ser de mesma ordem).

Poderia ser assim? Poderia!

Então, por que não é?

Em Matemática, cada definição é feita de modo a possibilitar o desenvolvimento da teoria de forma contínua e coerente. É por essa razão que definimos, por exemplo, $0! = 1$ e $a^0 = 1, (a \neq 0)$.

O caso 0^0 é mais delicado do que parece. Se você tem interesse nesse problema, vai gostar de ler o artigo de Elon Lages Lima, na Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 7.

Não iríamos muito longe, no estudo das matrizes, caso a multiplicação fosse definida "nos moldes" da adição. Você verá, nesta aula, o significado dessa operação, no modo como é definida. Mais tarde, quando estudarmos transformações lineares (no módulo 2), ficará ainda mais evidente a importância de multiplicarmos matrizes da maneira como veremos a seguir.

Venha conosco!

Vamos voltar aos nossos alunos de Lugar Lindo. Já é tempo de calcular suas notas finais!

A última matriz obtida (na aula 2) fornecia as notas numa escala de 0 a 100:

$$N' = \begin{bmatrix} 50 & 62 & 70 & 57 \\ 70 & 73 & 85 & 100 \\ 80 & 77 & 65 & 71 \\ 92 & 90 & 70 & 82 \\ 70 & 72 & 68 & 78 \end{bmatrix}$$

Lembrando: as duas primeiras colunas indicam as notas das avaliações à distância e as duas últimas, as notas das avaliações presenciais dos alunos Ana, Beatriz, Carlos, Daniela e Edson, nessa ordem.

Vamos supor que as avaliações à distância tenham, cada uma, peso 1, num total de 10. Isto é, cada uma colabora com $\frac{1}{10}$ (ou 10%) da nota final.

Para completar, cada avaliação presencial terá peso 4, ou seja, representará $\frac{4}{10}$ (ou 40%) da nota final.

Então, a nota final de cada aluno será dada por:

$$NF = \frac{10}{100}AD1 + \frac{10}{100}AD2 + \frac{40}{100}AP1 + \frac{40}{100}AP2$$

Em vez de escrever uma expressão como essa para cada um dos 5 alunos, podemos construir uma matriz-coluna P contendo os pesos das notas, na ordem como aparecem no cálculo de NF:

$$P = \begin{bmatrix} 10/100 \\ 10/100 \\ 40/100 \\ 40/100 \end{bmatrix}$$

e efetuar a seguinte operação:

$$N'.P = \begin{bmatrix} 50 & 62 & 70 & 57 \\ 70 & 73 & 85 & 100 \\ 80 & 77 & 65 & 71 \\ 92 & 90 & 70 & 82 \\ 70 & 72 & 68 & 78 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10/100 \\ 10/100 \\ 40/100 \\ 40/100 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{10}{100}.50 + \frac{10}{100}.62 + \frac{40}{100}.70 + \frac{40}{100}.57 \\ \frac{10}{100}.70 + \frac{10}{100}.73 + \frac{40}{100}.85 + \frac{40}{100}.100 \\ \frac{10}{100}.80 + \frac{10}{100}.77 + \frac{40}{100}.65 + \frac{40}{100}.71 \\ \frac{10}{100}.92 + \frac{10}{100}.90 + \frac{40}{100}.70 + \frac{40}{100}.82 \\ \frac{10}{100}.70 + \frac{10}{100}.72 + \frac{40}{100}.68 + \frac{40}{100}.78 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62 \\ 88 \\ 70 \\ 79 \\ 73 \end{bmatrix}$$

O que fizemos: tomamos duas matrizes tais que o número de termos em cada linha da primeira é igual ao número de termos de cada coluna da segunda. Ou seja, o número de colunas da primeira coincide com o número de linhas da segunda (4, no nosso exemplo).

Dessa forma, podemos multiplicar os pares de elementos, "varrendo", simultaneamente, uma linha da $1^{a.}$ matriz e uma coluna da $2^{a.}$. Depois, somamos os produtos obtidos.

Note que, ao considerarmos a i-ésima linha (da $1^{a\cdot}$ matriz) e a j-´ésima coluna (da $2^{a\cdot}$), geramos o elemento na posição ij da matriz produto.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Multiplicação de matrizes

Sejam $A = (a_{ik}) \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ e $B = (b_{kj}) \in M_{p\times n}(\mathbb{R})$. A *matriz produto* de A por B é a matriz $AB = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}, \quad i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n$$

Exemplo **19**
Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$. Como A é do tipo 2×3 e B é do tipo 3×4, <u>existe</u> a matriz AB e é do tipo 2×4:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 10 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3-2-2 & 9+10-6 & 30+0-4 & 6+10+2 \\ 4+0+14 & 12+0+42 & 40+0+28 & 8+0-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 13 & 26 & 18 \\ 18 & 54 & 68 & -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, não é possível efetuar BA.

A seguir, veremos alguns exemplos e, a partir deles, tiraremos algumas conclusões interessantes a respeito da multiplicação de matrizes.

Exemplo **20**
Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. Então

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+20 & 4+24 \\ 9-5 & 6-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 28 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+6 & 12-2 \\ 10+18 & 20-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 28 & 14 \end{bmatrix}.$$

Note que o produto de duas matrizes quadradas de mesma ordem n existe e é também uma matriz quadrada de ordem n. Assim, a multiplicação pôde ser efetuada nos dois casos, isto é, nas duas ordens possíveis, mas as matrizes AB e BA são diferentes.

Exemplo 21

Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$. Temos que:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+12 & 4+14 \\ 3+24 & 12+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 27 & 40 \end{pmatrix}$$

e

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+12 & 2+16 \\ 6+21 & 12+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 27 & 40 \end{pmatrix}$$

Neste caso, $AB = BA$. Quando isso ocorre, dizemos que as matrizes A e B *comutam*.

Exemplo 22

Consideremos as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 \\ -19 \\ 26 \end{bmatrix}$.

Efetuando AB, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Note que, diferentemente do que ocorre com os números reais, quando multiplicamos matrizes, o produto pode ser a matriz nula, sem que qualquer dos fatores seja a matriz nula.

Exemplo 23

Vamos calcular AB, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Temos que $AB = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Matrizes inversíveis também são chamadas de invertíveis ou de não-singulares.

Quando isso ocorre, isto é, quando o produto de duas matrizes A e B quadradas, é a identidade (obviamente, de mesma ordem das matrizes), dizemos que A é *inversível* e que B é a sua *inversa*. Uma matriz inversível sempre comuta com sua inversa. Você pode verificar isso, calculando BA. Na próxima aula, estudaremos um método bastante eficiente para determinar, caso exista, a matriz inversa de uma matriz dada.

Propriedades da multiplicação de matrizes

i $(AB)C = A(BC)$, $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p\times q}(\mathbb{R})$. Isto é, a multiplicação de matrizes é associativa.

De fato, sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$ e $C = (c_{kl})$. O termo de índices ik da matriz AB é dado pela expressão $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$. Então o termo de índices il da matriz $(AB)C$ é dado por $\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right)c_{kl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}\right)$, que é o termo de índices il da matriz $A(BC)$, pois $\sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}$ é o termo de índices jl da matriz BC. Logo, $(AB)C = A(BC)$.

ii $A(B+C) = AB + AC,\ \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B, C \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.
Isto é, a multiplicação de matrizes é distributiva em relação à adição de matrizes.

De fato, sejam $A = (a_{ij}), B = (b_{jk})$ e $C = (c_{jk})$. O termo de índices jk de $B+C$ é dado por $(b_{jk}+c_{jk})$. Então o de índices ik da matriz $A(B+C)$ é $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk}) = \sum_{j=1}^{n}[(a_{ij}b_{jk}) + (a_{ij}c_{jk})] = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk}) + \sum_{j=1}^{n}(a_{ij}c_{jk})$, que é o termo de índices ik da matriz dada por $AB+AC$. Isto é, $A(B+C) = AB + AC$.

De forma análoga, prova-se que $(A+B)C = AC + BC$.

iii $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \forall B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$.

De fato, sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$. O termo de índices ik de $\lambda(AB)$ é dado por $\lambda\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(a_{ij}b_{jk}) = \sum_{j=1}^{n}(\lambda a_{ij})b_{jk}$, que é o termo de índices ik de $(\lambda A)B$. Isto é, $\lambda(AB) = (\lambda A)B$. De forma análoga, prova-se que $\lambda(AB) = A(\lambda B)$. Logo, $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

iv Dada $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ I_mA = AI_n = A$.

De fato, sejam $A = (a_{ij})$ e $I_m = \delta_{ij}$, onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. Então o termo de índices ij de I_mA é dado por $\sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = \delta_{i1}a_{1j} + \delta_{i2}a_{2j} + ... + \delta_{ii}a_{ij} + ... + \delta_{in}a_{nj} = 0.a_{1j} + 0.a_{2j} + ... + 1.a_{ij} + ... + 0a_{nj} = a_{ij}$, que é o termo de índices ij de A. Logo, $I_mA = A$. Analogamente, prova-se que $AI_n = A$. Isto é, $I_mA = AI_n = A$.

A função δ_{ij} assim definida é chamada *delta de Kronecker nos índices i e j.*

v Dadas $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),\ B \in M_{n\times p}(\mathbb{R}),\ (AB)^T = B^TA^T$.

De fato, sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{jk})$. O termo de índices ik de AB é dado por $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$, que é, também, o termo de índices ki da matriz $(AB)^T$. Sendo $B^T = (b'_{kj})$ e $A^T = (a'_{ji})$, onde $b'_{kj} = b_{jk}$ e $a'_{ji} = a_{ij}$, $\forall i = 1, ..., m; j = 1, ..., n$, podemos escrever $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^{n} b'_{kj} a'_{ji}$, que é o termo de índices ki da matriz $B^T A^T$. Logo, $(AB)^T = B^T A^T$.

Potências de matrizes

Quando multiplicamos um número real por ele mesmo, efetuamos uma potenciação. Se a é um número real, indicamos por a^n o produto $a \times a \times ... \times a$, onde consideramos n fatores iguais a a.

Analogamente, quando lidamos com matrizes, definimos a *potência de expoente n* (ou a n-ésima potência) de uma matriz quadrada A como sendo o produto $A \times A \times ... \times A$, onde há n fatores iguais a A.

Exemplo 24

Dada $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, temos

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ 18 & -11 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 13 & -24 \\ 18 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -76 \\ 57 & -83 \end{bmatrix}$$

Quando calculamos sucessivas potências de uma matriz, podem ocorrer os seguintes casos especiais:

- $A^n = A$, para algum n natural.
  Nesse caso, dizemos que a matriz A é *periódica*. Se p é o menor natural para o qual $A^p = A$, dizemos que A é *periódica de período p*. Particularmente, se $p = 2$, a matriz A é chamada *idempotente*.

- $A^n = O$, para algum n natural.
  Nesse caso, dizemos que a matriz A é *nihilpotente*. Se p é o menor natural para o qual $A^p = O$, a matriz A é dita ser *nihilpotente de índice p*.

Lê-se *nilpotente*. A palavra *nihil* significa *nada*, em latim.

Exemplo 25

Efetuando a multiplicação de A por ela mesma, você poderá constatar que a matriz A, em cada caso, é idempotente:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo **26**

Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 25 & -5 \end{bmatrix}$. Calculando A^2, temos $A \times A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 25 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 25 & -5 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ou seja, A é nihilpotente de índice 2.

Resumo

Nesta aula vimos como multiplicar duas matrizes. Trata-se de uma operação que se distingue das que vimos anteriormente, tanto pela maneira pouco intuitiva pela qual é definida, quanto pelo fato de não ser comutativa. Ela representa um papel muito importante no desenvolvimento de toda a Álgebra Linear, permitindo, por exemplo, uma representação simples da composição de funções especiais, que estudaremos no módulo 2. Além disso, fomos apresentados às matrizes inversíveis e vimos que estas sempre comutam com suas matrizes inversas.

Exercícios

1. Calcule AB, em cada caso abaixo:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

2. Determine $AB^T - 2C$, dadas $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$,

   $C = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ -8 & -10 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Verifique, em caso, se B é a matriz inversa de A:

   a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/9 & 2/9 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

4. Resolva a equação matricial $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$.

5. Determine a e b para que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & -1 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ comutem.

6. Determine todas as matrizes que comutam com A, em cada caso:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

   b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

7. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, calcule:

   a) A^2

   b) B^3

   c) A^2B^3

8. As matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ são nihilpotentes.
   Determine o índice de cada uma.

Auto-avaliação

É muito importante que você se sinta bem à vontade diante de duas matrizes a multiplicar. Assimilada a definição, repita os exemplos e os exercícios que tenham deixado alguma dúvida. Caso haja alguma pendência, não hesite em contactar o tutor da disciplina. É essencial que caminhemos juntos!! Até a próxima aula.

Respostas dos exercícios

1. a) $AB = \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \end{bmatrix}$ b)$AB = \begin{bmatrix} 14 & -24 \\ -7 & 12 \end{bmatrix}$ c)$AB = \begin{bmatrix} 18 & 15 & -9 \\ -6 & -5 & 3 \\ 12 & 10 & -6 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} -6 & -14 & 11 \\ 6 & 1 & 29 \\ 10 & 17 & -27 \end{bmatrix}$

3. a) sim (pois $AB = I_2$); b) não

4. $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

5. $a = 1$; $b = 0$

6. a) $\begin{bmatrix} x & z/2 \\ z & x-z \end{bmatrix}, x, z \in \mathbb{R}$ b) $\begin{bmatrix} x & y \\ 3y & x+y \end{bmatrix}, x, y \in \mathbb{R}$.

7. a) $\begin{bmatrix} -5 & -18 \\ 12 & 19 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 28 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

8. a) 3; b) 2

Aula 4 – Operações com matrizes: inversão

Objetivos

Obter a matriz inversa (caso exista), pela definição;
Aplicar operações elementares às linhas de uma matriz;
Obter a matriz inversa (caso exista), por operações elementares;
Reconhecer matrizes ortogonais.

Na aula 3 vimos que, dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, se existe uma matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $AB = I_n$, a matriz A é dita *inversível* e a matriz B é a sua *inversa*, e podemos escrever $B = A^{-1}$. Uma matriz inversível sempre comuta com sua inversa; logo, se $AB = I_n$ então $BA = I_n$ e A é a inversa de B.

Dada uma matriz quadrada A, não sabemos se ela é ou não inversível até procurar determinar sua inversa e isso não ser possível. Para descobrir se uma matriz é ou não inversível e, em caso afirmativo, determinar sua inversa, só contamos, até o momento, com a definição. Assim, dada uma matriz A de ordem n, escrevemos uma matriz também de ordem n, cujos elementos são incógnitas a determinar, de modo que o produto de ambas seja a identidade de ordem n. Vamos a um exemplo:

Exemplo 27

Em cada caso, vamos determinar, caso exista, a matriz inversa de A:

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Seja $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ a matriz inversa de inversa de A, então

$$AB = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x+5z & 2y+5t \\ x+3z & y+3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Essa igualdade gera um sistema de 4 equações e 4 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x+5z=1 \\ 2y+5t=0 \\ x+3z=0 \\ y+3t=1 \end{cases}$$

Note que esse sistema admite dois subsistemas de 2 equações e 2 incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 5z = 1 \\ x + 3z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 2y + 5t = 0 \\ y + 3t = 1 \end{cases}$$

Resolvendo cada um deles, obtemos $x = 3, y = -5, z = -1, t = 2$. Logo, a matriz A é inversível e sua inversa é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$. Procedendo com no item anterior, escrevemos:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6x + 3z & 6y + 3t \\ 8x + 4z & 8y + 4t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos então os sistemas

$$\begin{cases} 6x + 3z = 1 \\ 8x + 4z = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} 6y + 3t = 1 \\ 8y + 4t = 1 \end{cases}$$

Ao resolver esses sistemas, porém, vemos que não admitem solução (tente resolvê-los, por qualquer método!). Concluímos, então, que a matriz A não é inversível.

Você viu que, ao tentar inverter uma matriz de ordem 2, recaimos em dois sistemas, cada um de duas equações e duas incógnitas. Se a matriz a ser invertida for de ordem 3, então o problema recairá em três sistemas, cada um com três equações e três incógnitas. Já dá pra perceber o trabalho que teríamos para inverter uma matriz de ordem superior (nem precisamos pensar numa ordem muito grande: para inverter uma matriz 5×5, teríamos que resolver 5 sistemas, cada um de 5 equações e 5 incógnitas!).

Temos, então, que determinar uma outra maneira de abordar o problema. Isso será feito com o uso de operações que serão realizadas com as linhas da matriz a ser invertida. Essas operaçõs também poderiam ser definidas, de forma análoga, sobre as colunas da matriz. Neste curso, como só usaremos operações elementares aplicadas às linhas, nós nos referiremos a elas, simplesmente, como operações elementares (e não operações elementares *sobre as linhas da matriz*). Vamos à caracterização dessas operações.

Operações elementares

Dada $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, chamam-se *operações elementares* as seguintes ações:

1. Permutar duas linhas de A.
   Indicamos a troca das linhas L_i e L_j por $L_i \leftrightarrow L_j$.

2. Multiplicar uma linha de A por um número real não nulo.
   Indicamos que multiplicamos a linha L_i de A pelo número real λ escrevendo $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

3. Somamos a uma linha de A uma outra linha, multiplicada por um número real.
   Indicamos que somamos à linha L_i a linha L_j multiplicada pelo número real λ por: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Exemplo **28**
Vamos aplicar algumas operações elementares às linhas da matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$:

1. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \; L_1 \leftrightarrow L_3 \; \Rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow -3L_2 \; \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & -18 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix} \; L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \; \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ 16 & 9 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Consideremos o conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Se, ao aplicar uma seqüência de operações elementares a uma matriz A, obtemos a matriz B, dizemos que B é *equivalente* a A e indicamos por $B \sim A$. Fica definida, assim, uma relação no conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, que é:

1. reflexiva: $A \sim A$

2. simétrica: se $A \sim B$ então $B \sim A$

3. transitiva: se $A \sim B$ e $B \sim C$ então $A \sim C$

Isto é, a relação $\sim$ é uma relação de equivalência no conjunto $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. Assim, se $A \sim B$ ou se $B \sim A$ podemos dizer, simplesmente, que *A e B são equivalentes*.

Lembremos que nosso objetivo é determinar um método para encontrar a inversa de uma matriz, caso ela exista, que seja mais rápido e simples do que o uso da definição. Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Teorema 1
Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. Então A é inversível se, e somente se, $A \sim I_n$. Se A é inversível, a mesma sucessão de operações elementares que transformam A em I_n, transformam I_n na inversa de A.

Você poderá encontrar a demonstração desse teorema no livro *Álgebra Linear e Aplicações*, de Carlos Callioli, Hygino Domingues e Roberto Costa, da Atual Editora, (Apêndice do Capítulo 1).

Este método permite determinar, durante sua aplicação, se a matriz é ou não inversível. A idéia é a seguinte:

1. Escrevemos, lado-a-lado, a matriz que queremos inverter e a matriz identidade de mesma ordem, segundo o esquema:

$$A \;\Big|\; I$$

2. Por meio de alguma operação elementar, obtemos o número 1 na posição 11.

3. Usando a linha 1 como linha-pivô, obtemos zeros nas outras posições da coluna 1 (para isso, fazemos uso da terceira operação elementar).

4. Por meio de uma operação elementar, obtemos o número 1 na posição 22.

5. Usando a linha 2 como linha-pivô, obtemos zeros nas outras posições da coluna 2 (para isso, fazemos uso da terceira operação elementar).

6. Passamos para a terceira coluna e assim por diante.

7. Se, em alguma etapa do procedimento, uma linha toda se anula, podemos concluir que a matriz em questão não é inversível - nesse caso, nenhuma operação elementar igualaria essa linha a uma linha da matriz identidade!

8. Se chegarmos à matriz identidade, então a matriz à direita, no esquema, será a matriz inversa procurada.

Veja os dois exemplos a seguir:

Exemplo **29**

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$. Escrevemos na forma esquemática:

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow -L_2 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & L_1 \leftrightarrow L_2 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ 4 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 & \\ 0 & 2 & 7 & 0 & 4 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 & \\ 0 & 0 & -15 & -2 & -2 & 1 & L_3 \leftarrow -\frac{1}{15}L_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ 0 & 1 & 11 & 1 & 3 & 0 & Ł_2 \leftarrow L_2 - 11L_3 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 6/15 & -9/15 & -3/15 \\ 0 & 1 & 0 & -7/15 & 23/15 & 11/15 \\ 0 & 0 & 1 & 2/15 & 2/15 & -1/15 \end{array}$$

Logo, a matriz A é inversível e $A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 6 & -9 & -3 \\ -7 & 23 & 11 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Você poderá verificar que essa é, realmente, a inversa de A, efetuando a multiplicação dela por A e constatando que o produto é I_3.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 4 & 11 & -4 \end{bmatrix}$. Escrevendo na forma esquemática:

$$\begin{array}{rrr|rrrl} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 & L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ 4 & 11 & -4 & 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & \\ 4 & 11 & -4 & | & 0 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 & \\ 0 & -3 & 2 & | & 0 & 1 & 0 & L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2 \\ 0 & 3 & -2 & | & -2 & 0 & 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrrrl} 1 & 2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ 0 & 1 & -2/3 & | & 0 & -1/3 & 0 & \\ 0 & 3 & -2 & | & -2 & 0 & 1 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1 & 2 & -1/2 & | & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & | & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & 1 \end{array}$$

Como a terceira linha se anulou, podemos parar o processo e concluir que a matriz A não é inversível.

Propriedades da inversão de matrizes

1. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então $(A^{-1})^{-1} = A$

   De fato, como $A^{-1}A = I_n$, temos que A é a inversa de A^{-1}.

2. Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são inversíveis, então AB é inversível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

   De fato, temos $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Logo, $B^{-1}A^{-1}$ é a inversa de AB.

3. Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   De fato, como $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = (I_n)^T = I_n$, temos que $(A^{-1})^T$ é a inversa de A^T.

Exemplo 30

Supondo as matrizes A e B inversíveis, vamos obter a matriz X nas equações abaixo:

1. $AX = B$

   Multiplicando os dois membros da igualdade, à esquerda, por A^{-1}, temos:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

ou:

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B,$$

$$IX = A^{-1}B$$

Logo, $X = A^{-1}B$.

2. $(AX)^T = B$
   Temos:
   $(AX)^T = B \Rightarrow [(AX)^T]^T = B^T \Rightarrow AX = B^T \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B^T \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B^T \Rightarrow IX = A^{-1}B^T \Rightarrow X = A^{-1}B^T$.

Para finalizar esta aula, vamos definir um tipo especial de matriz quadrada inversível, que é aquela cuja inversa coincide com sua transposta.

Matrizes ortogonais

Dizemos que uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, é *ortogonal*, quando $A^{-1} = A^T$.

Para verificar se uma matriz A é ortogonal, multiplicamos A por A^T e vemos se o produto é a identidade.

Exemplo 31

A matriz $\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ é ortogonal. De fato, multiplicando essa matriz pela sua transposta, temos:

$$\begin{bmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Veremos mais tarde que as matrizes ortogonais representam um papel importante na representação de funções especiais, chamadas operadores ortogonais. Chegaremos lá!!!!

Resumo

O ponto central desta aula é inverter matrizes, quando isso é possível. Como a definição, embora simples, não fornece um método prático para a inversão de matrizes, definimos as operações elementares, que permitem "passar", gradativamente, da matriz inicial, a ser invertida, para outras, numa sucessão que nos leva à matriz identidade. Trata-se de um método rápido e eficiente, que resolve tanto o problema de decidir se a inversa existe ou não, como de obtê-la, no caso de existir. Esse é o método implementado pelos "pacotes" computacionais - aqueles programas de computador que nos dão, em questão de segundos, a inversa de uma matriz.

Exercícios

1. Em cada caso, verifique se a matriz B é a inversa de A.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -28 \\ -2 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Dadas $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, determine: A^{-1}, B^{-1} e $(AB)^{-1}$.

3. Supondo as matrizes A, B e C inversíveis, determine X em cada equação.

   (a) $AXB = C$

   (b) $AB = CX$

   (c) $(AX)^{-1}B = BC$

   (d) $[(AX)^{-1}B]^T = C$

4. Determine, caso exista, a inversa da matriz A, em cada caso:

   (a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 10 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. Que condições $\lambda \in \mathbb{R}$ deve satisfazer para que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$ seja inversível?

Auto-avaliação

Você deverá treinar bastante a aplicação do método estudado. Faça todos os exercícios e, se possível, resolva outros mais - você mesmo(a) poderá criar matrizes a inverter e descobrir se são ou não inversíveis. É fácil, ao final do processo, verificar se a matriz obtida é, de fato, a inversa procurada (isto é, se não houve erros nas contas efetuadas): o produto dela pela matriz dada tem que ser a identidade. Caso haja alguma dúvida, em relação à teoria ou aos exercícios, entre em contato com o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. (a) sim

   (b) sim

   (c) não

2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 39 & -23 \\ -22 & 13 \end{bmatrix}$.

3. (a) $X = A^{-1}CB^{-1}$

   (b) $X = C^{-1}AB$

   (c) $X = A^{-1}BC^{-1}B^{-1}$

   (d) $X = A^{-1}B(C^T)^{-1}$

4. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2/7 & 1/7 \\ -1/14 & 3/14 \end{bmatrix}$

   (b) Não existe a inversa de A

   (c) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 7 & -3 & -1 \end{bmatrix}$

   (d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\lambda \neq 1$

Aula 5 – Determinantes

Objetivo

Pré-requisitos: aulas 1 a 4.

Calcular determinantes pelo método da triangularização.

Determinante é um número associado a uma matriz quadrada. Como estamos lidando, neste curso, apenas com matrizes reais, os determinantes que calcularemos serão todos números reais. Os determinantes têm inúmeras aplicações, na Matemática e em outras áreas. Veremos, por exemplo, que o determinante fornece uma informação segura a respeito da inversibilidade ou não de uma matriz. A ênfase desta aula está na aplicação de um método rápido para calcular determinantes, fazendo uso de algumas das suas propriedades e de operações elementares, já estudadas na aula 4. Antes, porém, de nos convencermos de quanto o método que estudaremos é mais eficiente do que o uso direto da definição, vamos recordar a definição de determinante, devida a Laplace.

Determinante

Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, representamos o determinante de A por $\det A$ ou escrevendo os elementos de A limitados por barras simples:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

representamos o determinante de A por:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

.

A definição de determinante é dada de maneira recorrente, em relação à ordem da matriz. Assim, definimos o determinante de ordem 1, a seguir, o de ordem 2 e, a partir da ordem 3, recaímos em cálculos de determinantes de ordens menores. Vamos ver como isso é feito:

Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

n=1

Neste caso, $A = [a_{11}]$ e $\det A = a_{11}$.

Note que o determinante de uma matriz de ordem 2 é a diferença entre o produto dos termos da diagonal principal e o produto dos termos da diagonal secundária. Esses produtos se chamam, respectivamente, *termo principal* e *termo secundário* da matriz.

n=2

Neste caso, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ e seu determinante é dado por:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 32

Vamos calcular os determinantes das matrizes abaixo:

1. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 3.8 - 4.6 = 24 - 24 = 0$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 8 - (-15) = 23$

3. $A = \begin{bmatrix} sen\,\alpha & -cos\,\alpha \\ cos\,\alpha & sen\,\alpha \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = sen^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

4. $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 6 - 12 = -6$

n=3

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Neste caso, escolhemos uma linha (ou uma coluna) para desenvolver o determinante.

Desenvolvendo o determinante pela $1^{a.}$ linha, obtemos:

$$\det A = a_{11}.(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}.(-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}.(-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Exemplo **33**

$$
\begin{aligned}
& \det \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \\
= \; & 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 5(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
= \; & 2(-8-5) - 5(0-15) - 3(0-12) = 85 \; .
\end{aligned}
$$

Observação: Existe uma regra prática para o cálculo do determinante de ordem 3, conhecida como **Regra de Sarrus**. Ela afirma que:

Lê-se "Sarrí".

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =
$$

$$
= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).
$$

Desenvolvendo os produtos indicados na definição de determinante de ordem 3, você poderá ver que as expressões coincidem.

Exemplo **34**

Vamos calcular, novamente, o determinante do exemplo anterior, agora usando a Regra de Sarrus:

$$
\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = [2.4.(-2) + (5.5.3) + (-3.0.1)] - [(-3.4.3) + (2.5.1) + (5.0.(-2))] =
$$
$$
= (-16+75) - (-36+10) = 85.
$$

n=4

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$.

Desenvolvendo o determinante pela $1^{a.}$ linha, obtemos:

$$\begin{aligned}\det A = \ & a_{11}.(-1)^{1+1}.\det A_{-1,-1}+\\ & a_{12}.(-1)^{1+2}.\det A_{-1,-2}+\\ & a_{13}.(-1)^{1+3}.\det A_{-1,-3}+\\ & a_{14}.(-1)^{1+4}.\det A_{-1,-4},\end{aligned}$$

onde $A_{-i,-j}$ representa a matriz obtida a partir de A, com a retirada da i-ésima linha e da j-ésima coluna. Observe que recaímos no cálculo de 4 determinantes, cada um de ordem 3.

Para $\mathbf{n = 5}$, a definição é análoga: iremos recair no cálculo de 5 determinantes, cada um de ordem 4. Logo, teremos que calcular $5 \times 4 = 20$ determinantes de ordem 3. Como você pode ver, os cálculos envolvidos na obtenção de determinantes crescem rapidamente, à medida que a ordem do determinante aumenta.

Um determinante de ordem 10 exige a realização de 9.234.099 operações!

Temos, então, que encontar um método alternativo para calcular determinantes: a definição não fornece uma saída rápida para isso. Antes, porém, de estudarmos um método mais eficiente para aplicar, usando as propriedades dos determinantes e, mais uma vez, operações elementares, damos a definição do determinante de ordem n, desenvolvido pela i-ésima linha:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}.\det A_{-i,-j}$$

Propriedades dos determinantes

Na medida do possível, daremos uma idéia da demonstração dessas propriedades. Para verificar a validade de cada uma delas, precisaríamos definir determinantes pelo uso de permutações, o que alongaria demais a nossa aula. Caso você tenha interesse em conhecer essa abordagem, irá encontrá-la em *Álgebra Linear e Aplicações*, de Carlos Callioli, Hygino Domingues e Roberto Costa.

D1 O determinante de uma matriz é único. Isto é, não importa por qual linha ou coluna o determinante seja desenvolvido, o resultado final é sempre o mesmo.

D2 Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\det A = \det A^T$

Em palavras: o determinante da transposta é igual ao determinante da matriz.

De fato, a expressão do determinante de A, desenvolvido pela i-ésima linha, coincidirá, termo a termo, com a expressão de $\det A^T$, desenvolvido pela i-ésima coluna.

D3 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ possui uma linha (ou uma coluna) nula, então $\det A = 0$.

De fato, basta desenvolver $\det A$ por essa linha (ou coluna) nula.

D4 Se escrevemos cada elemento de uma linha (ou coluna) de $A \in M_n(\mathbb{R})$ como soma de 2 parcelas, então $\det A$ é a soma de dois determinantes de ordem n, cada um considerando como elemento daquela linha (ou coluna) uma das parcelas, e repetindo as demais linhas (ou colunas).

D5 O determinante de uma matriz triangular é o seu termo principal.

Lembrando: o termo principal de uma matriz quadrada é o produto dos elementos de sua diagonal principal.

D6 Se multiplicamos uma linha (ou coluna) de $A \in M_n(\mathbb{R})$ por um número real λ, o determinante de A fica multiplicado por λ.

D7 Se permutamos duas linhas (ou colunas) de $A \in M_n(\mathbb{R})$, então o determinante de A fica multiplicado por -1.

D8 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ tem duas linhas (ou colunas) iguais então $\det A = 0$.

D9 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ possui uma linha (ou coluna) que é soma de múltiplos de outras linhas (ou colunas), então $\det A = 0$.

D10 Se somamos a uma linha (ou coluna) de $A \in M_n(\mathbb{R})$ um múltiplo de outra linha (ou coluna), o determinante de A não se altera.

D11 Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, então $\det(AB) = \det A . \det B$.

D12 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é inversível, então $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

De fato, se A é inversível, existe A^{-1} tal que $A.A^{-1} = I$.

Então $\det(A.A^{-1}) = \det\, I$.

Pela propriedade D11, $\det A \,.\, \det A^{-1} = \det\, I$, e pela propriedade D5, temos que $\det\, I = 1$. Logo, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} = (\det A)^{-1}$.

Uma conclusão importante pode ser tirada a partir da propriedade D12: uma matriz é inversível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero. Destaquemos esse resultado:

> Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$.
>
> $$A \text{ é inversível } \Leftrightarrow \det A \neq 0$$

D13 Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal, então $\det A^{-1} = 1$ ou -1.

De fato, se A é ortogonal, $A^{-1} = A^T$. Pela propriedade D2, $\det A = \det A^T = \det A^{-1}$. Então, pela propriedade D12, $\det A. \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A. \det A^T = 1 \Rightarrow \det A. \det A = 1 \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Cálculo de determinantes por triangularização

Observe o que diz a propriedade D5. Calcular o determinante de uma matriz triangular é, praticamente, imediato. Dado um determinante, a idéia, então, é aplicar operações elementares sobre suas linhas, de modo a triangularizá-lo. Para isso, temos que observar os efeitos que cada operação elementar pode ou não causar no valor do determinante procurado. Vejamos:

1. Permutar duas linhas.

   Pela propriedade D7, essa operação troca o sinal do determinante.

2. Multiplicar uma linha por um número real λ não nulo.

   A propriedade D6 nos diz que essa operação multiplica o determinante por λ.

3. Somar a uma linha um múltiplo de outra.

   Pela propriedade D10, essa operação não altera o determinante.

Diante disso, para triangularizar um determinante, basta que fiquemos atentos para "compensar" possíveis alterações provocadas pelas operações elementares utilizadas. Vamos a um exemplo.

Exemplo 35

Calcular, por triangularização, $\det \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 6 & -2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \end{matrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -20 & 23 & 1 \\ 0 & -1 & 7 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 20L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -57 & -39 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 \leftarrow -1/57 L_3 \\ \end{matrix} =$$

$$= -(-57)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 39/57 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}_{L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3} = -(-57)\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 39/57 \\ 0 & 0 & 0 & -20/19 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-57).1.(-1).1.(-20/19) = 60.$$

Observações.

1. Não há uma única maneira de se triangularizar um determinante: as operações elementares escolhidas podem diferir, mas o resultado é único.

2. O método de triangularização é algorítmico, ou seja, é constituído de um número finito de passos simples: a cada coluna, da primeira à penúltima, devemos obter zeros nas posições abaixo da diagonal principal.

Calcule o determinante do próximo exemplo e compare com a nossa resolução: dificilmente você optará pela mesma seqüência de operações elementares, mas (se todos tivermos acertado!) o resultado será o mesmo.

Exemplo **36**
Vamos calcular $\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ por triangularização:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} = 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & 6 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 14 & -14 \\ 0 & -6 & 14 \end{vmatrix}_{L_2 \leftarrow \frac{1}{14}L_2} = 2.14\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -6 & 14 \end{vmatrix}_{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2} =$$

$$= 2.14\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2.14.1.1.8 = 224.$$

Exemplo **37**
Vamos aplicar as propriedades estudadas nesta aula para dar os determinantes de A^T, A^{-1} e $3A$, sabendo que A é uma matriz quadrada inversível de ordem 2 e que $\det A = D$.

1. $\det A^T = D$, pois o determinante da matriz transposta é igual ao determinante da matriz dada.

2. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{D}$, pois o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante da matriz dada.

3. $\det 3A = 3^2 D = 9D$, pois A possui 2 linhas e cada linha multiplicada por 3 implica multiplicar o determinante por 3.

Exemplo 38
Determine x tal que $\begin{vmatrix} 2x & x+2 \\ -4 & x \end{vmatrix} = 14$

Temos $2x.x-(-4)(x+2) = 14 \Rightarrow 2x^2+4x-6 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -3$.

Exemplo 39
Determine x para que a matriz $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 20-x & x \end{bmatrix}$ seja inversível.

Sabemos que A é inversível se, e somente se, $\det A \neq 0$. Queremos, então, $x^2 - (20-x) \neq 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$ e $x \neq -5$.

Resumo

Nesta aula recordamos a definição de determinante e vimos que não se trata de um método prático para calcular determinantes de ordens altas. Vimos as propriedades dos determinantes e, com o uso de quatro delas, pudemos facilitar o cálculo de determinantes, aplicando operações elementares e “transformando”o determinante original num triangular. Tal método, chamado *triangularização*, permite que determinantes de ordens altas sejam obtidos sem que tenhamos que recair numa seqüência enorme de determinantes de ordens menores a serem calculados. Veja que esta aula não apresentou nenhuma grande novidade em termos de teoria: foi uma aula mais prática, que apresentou uma técnica útil de cálculo.

Exercícios

1. Calcule, por triangularização, os seguintes determinantes:

$a)\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} \quad b)\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & 4 \\ -1 & 5 & 4 & -3 \\ 2 & 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} \quad c)\begin{vmatrix} 10 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

2. Dada $A \in M_n(\mathbb{R})$, tal que $\det A = D$, determine:

   a) $\det A^T$

   b) $\det A^{-1}$

   c) $\det 2A$

3. Seja $\det A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = 10$. Calcule, usando as propriedades dos determinantes:

   $a) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ $b) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ $c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d/2 & e/2 & f/2 \\ g & h & i \end{vmatrix}$

   $d) \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$ $e) \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}$ $f) \begin{vmatrix} a & b & c \\ g+d & h+e & i+f \\ d & e & f \end{vmatrix}$

4. Calcule x para que $\begin{vmatrix} x+2 & 2 & -x \\ 4 & 0 & 5 \\ 6 & 2x & x \end{vmatrix} = 14$

5. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 4$ e $det\, B = 5$. Determine:

   a) $\det AB$

   b) $\det 3A$

   c) $\det(AB)^{-1}$

   d) $\det(-A)$

   e) $\det A^{-1}B$

6. Determine x para que a matriz $A = \begin{bmatrix} x & x+2 \\ 1 & x \end{bmatrix}$ seja inversível.

Auto-avaliação

Você deve estar bem treinado para calcular determinantes pelo método da triangularização. Veja que se trata de um cálculo “ingrato”: não há como verificar se estamos certos, a não ser refazendo e comparando os resultados. Por isso, embora se trate de uma técnica simples, algorítmica, exige atenção. Caso você tenha sentido dúvidas, procure o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. $a) - 84 \quad b)1.099 \quad c) - 266$

2. $a)D \quad b)1/D \quad c)2^n.D$

3. $a) - 10 \;\; b) - 10 \;\; c)5 \;\; d)10 \;\; e) - 20 \;\; f)10$

4. $x = 1$ ou $x = -\frac{23}{9}$

5. Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tais que $\det A = 4$ e $\det B = 5$. Determine:

   a) $\det AB = \det A . \det B = 4 \times 5 = 20$

   b) $\det 3A = 3^4 . \det A = 3^n \times 4 = 4.3^n$

   c) $\det(AB)^{-1} = [\det(AB)]^{-1} = 20^{-1} = 1/20$

   d) $\det(-A) = (-1)^n \times 4$ (será 4, se n for par e -4, se n for ímpar)

   e) $\det A^{-1}B = \det A^{-1} . \det B = 1/4 \times 5 = 5/4$

6. $x \neq -1$ e $x \neq 2$

Aula 6 – Sistemas Lineares

Objetivo

Resolver e classificar sistemas lineares, usando o método do escalonamento.

Pré-requisitos: aulas 1 a 4.

Grande parte dos problemas estudados em Álgebra Linear recaem na resolução ou discussão de sistemas de equações lineares. O mesmo acontece com muitos problemas das demais áreas da Matemática, da Física e da Engenharia. Você, com certeza, já tomou conhecimento de diferentes técnicas de resolução desses sistemas - substituição, adição, comparação, entre outras. Nesta aula e na próxima estudaremos um método que permite um tratamento eficiente de sistemas de equações lineares, seja para obter seu conjunto-solução, seja para classificá-lo ou mesmo para impor condições quanto à existência ou quantidade de soluções.

Equações lineares

Uma *equação linear* é uma equação do tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

Uma equação é uma sentença matemática aberta, isto é, com variáveis, onde duas expressões são ligadas pelo sinal "=".
Ex: $2x - 1 = 0; x^2 - 2x = 6$ etc.

O grau de um termo - ou monômio - é a soma dos expoentes das variáveis.
Ex: xy tem grau 2; x^2y^3 tem grau 5; 16 tem grau zero.

Isto é, trata-se de uma equação na qual cada termo tem grau, no máximo, igual a 1. Os elementos de uma equação linear são:

- variáveis (ou incógnitas): $x_1, ..., x_n$
- coeficientes: $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$
- termo independente: $b \in \mathbb{R}$

Exemplo 40

São equações lineares:

- $3x_1 - 2x_2 + 17 = 0$
- $2x - 3y + 4z = 1$
- $4a - 5b + 4c - d = 10$

- $x = 2$

São equações não-lineares:

- $x^2 - 5x + 6 = 0$
- $3xy - x + 4 = 0$
- $2\sqrt{x} - 3y = 1$
- $\dfrac{3}{x} - 9 = 0$

Uma *solução* de uma equação com n variáveis é uma n-upla ordenada de números reais os quais, quando substituídos no lugar das variáveis respectivas na equação, fornecem uma sentença matemática verdadeira.

Resolver uma equação é encontrar o conjunto de todas as suas soluções, chamado *conjunto-solução* da equação.

Exemplo 41

1. O par ordenado $(3, 2)$ é uma solução da equação (não linear) $x^2 - 4y = 1$, pois $3^2 - 4(2) = 9 - 8 = 1$.
2. O conjunto-solução da equação linear $3x - 1 = 5$ é $\{2\}$.
3. A equação linear $x + y = 10$ possui infinitas soluções. Os pares ordenados $(2, 8), (-3, 13), (0, 10), (1/5, 49/5)$ são apenas algumas delas.

Sistemas de equações lineares

Um *sistema de equações lineares* (ou, simplesmente, um *sistema linear*) é um conjunto de equações lineares que devem ser resolvidas *simultaneamente*. Isto é, uma solução do sistema é solução *de cada* equação linear que o compõe. *Resolver* um sistema de equações lineares é determinar o conjunto formado por todas as suas soluções, chamado *conjunto-solução* do sistema.

Um sistema linear, com m equações e n incógnitas, tem a seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Exemplo 42

São sistemas de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ -2x + 5y - z = 5 \\ 3x - 6y = 10 \\ 4x - y + 2z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ a + b = 5 \\ 5a - 2b = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

Classificação de um sistema linear quanto à solução

Um sistema linear pode ter ou não solução. Se tem solução, pode ter uma só ou mais de uma. Podemos, então, classificar um sistema linear, quanto à existência e quantidade de soluções, em três tipos:

- Compatível (ou possível) e determinado: quando possui uma única solução.
- Compatível e indeterminado: quando possui mais de uma solução.
- Incompatível (ou impossível): quando não possui solução.

Podemos pensar num sistema de equações lineares como sendo um conjunto de perguntas a responder (qual o valor de cada incógnita?). Cada equação fornece uma informação, uma "dica" a respeito dessas incógnitas. Se tivermos informações coerentes e em quantidade suficiente, encontraremos uma solução, que será única. Se essas informações forem coerentes entre si, mas em quantidade insuficiente, não conseguiremos determinar, uma-a-uma, cada solução, mas poderemos caracterizar o conjunto delas. Finalmente, se as informações não forem coerentes entre si, ou seja, se forem incompatíveis, o sistema não terá solução.

Resolver um sistema é um pouco como brincar de detetive...

Exemplo 43

Sem ter que aplicar regras de resolução, podemos ver que

1. O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$ possui uma única solução: o par $(2, 1)$;
2. O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ possui mais de uma solução; os pares $(1, 2), (0, 3), (3, 0), (2, 1), (3/2, 3/2)$ são algumas delas;
3. O sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 4 \end{cases}$ não possui solução (A soma de dois números reais é única!).

Sistemas lineares homogêneos

Dizemos que um sistema linear é *homogêneo* quando os termos independentes de todas as equações que o compõem são iguais a zero.

Exemplo 44

São sistemas lineares homogêneos:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ x + 5y = 0 \\ -x + 4y = 0 \end{cases}$$

Observe que um sistema linear homogêneo em n incógnitas sempre admite a solução

$$\underbrace{(0, 0, ..., 0)}_{n \text{ elementos}},$$

chamada *solução trivial*. Logo, um sistema linear homogêneo é sempre compatível. Quando é determinado, possui somente a solução trivial. Quando é indeterminado, possui outras soluções, além da trivial, chamadas (obviamente!) soluções *não-triviais*.

A solução trivial também é conhecida como solução *nula* ou ainda solução *imprópria*.

Já é hora de resolvermos sistemas lineares. Dissemos, no início da aula, que faríamos isso usando um método eficiente. Esse método lida com matrizes asociadas ao sistema a ser tratado. Vamos, então, caracterizar essas matrizes.

Matrizes associadas a um sistema linear

Dado um sistema linear com m equações e n incógnitas:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

destacamos as seguintes matrizes:

- matriz $(m \times n)$ dos coeficientes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- matriz (ou vetor) $(m \times 1)$ dos termos independentes:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- matriz aumentada (ou ampliada) $(m \times (n+1))$ do sistema:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Exemplo 45
O sistema linear $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 18 \\ x + y - 2z = -5 \\ -x + 3z = 4 \end{cases}$ possui

matriz de coeficientes: matriz de termos independentes: matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 18 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 & 18 \\ 1 & 1 & -2 & -5 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Resolução de sistemas lineares por escalonamento

Observe o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} 2x & +y & -z & = & 3 \\ & +3y & +z & = & -1 \\ & & 2z & = & 4 \end{cases}$$

Note que, para resolvê-lo, basta:

- determinar o valor de z na terceira equação
- substituir o valor de z na segunda equação e obter y
- substituir y e z na primeira equação e obter x

num processo chamado *método das substituições regressivas*.

A resolução do sistema ficou bastante facilitada. Vejamos a matriz aumentada desse sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Observe que, a partir da segunda linha, o número de zeros iniciais sempre aumenta. Quando isso acontece, dizemos que a matriz está *escalonada*. Sistemas com matrizes associadas na forma escalonada podem ser resolvidos pelo método das substituições regressivas, como vimos acima. O problema, então, é:

Dado um sistema linear, como transformar sua matriz associada em uma escalonada?

E como fazer isso sem alterar seu conjunto-solução?

Dizemos que dois sistemas lineares são *equivalentes* quando possuem o mesmo conjunto-solução. Nosso objetivo, portanto, é migrar de um sistema para outro que lhe seja equivalente, e de resolução mais simples.

Nós já estudamos, na aula 4, as operações elementares que podemos efetuar sobre as linhas de uma matriz. Vamos recordar quais são elas:

1. Permutar duas linhas.

   Notação: $L_i \leftrightarrow L_j$

2. Multiplicar uma linha por um número real não nulo.

   Notação: $L_i \leftarrow \lambda L_i$

3. Somar a uma linha um múltiplo de uma outra.

   Notação: $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Neste caso, dizemos que L_j é a linha *pivô*.

Pode-se mostrar que:

Seja S um sistema linear com matriz aumentada A. Se aplicamos às linhas de A operações elementares, obtemos uma matriz A', tal que o sistema linear S', de matriz aumentada A', é equivalente a S.

Você pode encontrar essas passagens, em detalhes, no livro *Álgebra Linear e Aplicaçõs*, de Collioli, Domingues e Costa, da Atual Editora.

A idéia, então é: dado um sistema S de matriz aumentada A, aplicar operações elementares às linhas de A, obtendo uma matriz escalonada A', e resolver o sistema associado S', conforme mostra o esquema a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Sistema linear } S & \overset{\text{equivalentes}}{\leftrightarrow} & \text{Sistema linear } S' \\
\downarrow & & \uparrow \\
\text{matriz } A & \overset{\text{operações elementares}}{\leftrightarrow} & \text{matriz escalonada } A'
\end{array}$$

Vamos ver uma série de exemplos para você se familiarizar com o método. Em vez de, simplesmente, ler o exemplo, efetue cada operação elementar indicada, para depois comparar com a matriz apresentada na seqüência:

Exemplo 46

Vamos resolver, por escalonamento, o sistema linear

$$S : \begin{cases} x & +2y & +5z & = 28 \\ 2x & +3y & -z & = -1 \\ & 4y & +z & = 13 \end{cases}$$

Vamos escrever a matriz aumentada desse sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

Vamos obter "zeros"na primeira coluna, da segunda linha em diante. Para isso, aplicaremos a terceira operação elementar, usando a primeira linha como pivô. Note que, neste caso, como o elemento da terceira linha já é zero, precisamos apenas obter zero na segunda linha. Para isso, vamos multiplicar a primeira linha por -2 e somar o resultado com a segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix}$$

Passemos, agora, para a segunda coluna (não usaremos mais a primeira linha - ela está "pronta"). Queremos obter zero abaixo da segunda linha. Para isso, multiplicamos a segunda linha por 4 e somamos à terceira:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 4 & 1 & 13 \end{bmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 28 \\ 0 & -1 & -11 & -57 \\ 0 & 0 & -43 & -215 \end{bmatrix}$$

Pronto: a matriz está escalonada. Vamos, agora, escrever o sistema S', associado a ela:

$$S' : \begin{cases} x \; +2y \; +5z = 28 \\ \quad -y \; -11z = -57 \\ \quad\quad -43z = -215 \end{cases}$$

Da terceira equação, obtemos $z = (-215)/(-43) = 5$.

Substituindo na segunda, obtemos $y = 2$.

Finalmente, substituindo os valores já obtidos na primeira equação, temos $x = -1$.

Como S' e S são sistemas lineares equivalentes, essa também é a solução do sistema S dado. Logo, o conjunto-solução procurado é $\{(-1, 2, 5)\}$. Além disso, podemos classificar o sistema S: ele é compatível e determinado.

Exemplo 47

Vamos resolver o sistema linear:

$$S : \begin{cases} 2x \; +y \; +5z = 1 \\ x \; +3y \; +4z = -7 \\ 5y \; -z = -15 \\ -x \; +2y \; +3z = -8 \end{cases}$$

Sua matriz aumentada é:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Você deve ter notado que, quando o elemento na linha pivô, na coluna em que estamos trabalhando, é 1 (ou -1), os cálculos ficam facilitados. Então, vamos aproveitar o fato de ter 1 na primeira posição da segunda linha, e permutar as linhas 1 e 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix}$$

Vamos obter zeros na primeira coluna, abaixo da primeira linha, usando a primeira linha como pivô:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ -1 & 2 & 3 & -8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & -5 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ 0 & 5 & 7 & -15 \end{bmatrix}$$

Passemos para a segunda coluna. Para obter 1 na posição pivô, dividimos toda a segunda linha por -5:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & -5 & -3 & 15 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ 0 & 5 & 7 & -15 \end{bmatrix} \quad L_2 \leftarrow -1/5L_2 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3/5 & -3 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ 0 & 5 & 7 & -15 \end{bmatrix}$$

Agora, usando a linha 2 como liha pivô, vamos obter zeros na segunda coluna, abaixo da segunda linha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3/5 & -3 \\ 0 & 5 & -1 & -15 \\ 0 & 5 & 7 & -15 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3/5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Para finalizar o escalonamento, precisamos obter três zeros inicias na quarta linha, ou seja, obter um zero na posição $i = 4, j = 3$. Nas passagens acima, usamos a segunda operação elementar par obter 1 na posição pivô e, com isso, ter os cálculos facilitados na obtenção dos zeros. Devemos, porém, estar atentos à posssíveis vantagens que um sistema em particular pode oferecer. Neste exemplo, se simplesmente somarmos a linha 3 à linha 4, já obteremos o zero procurado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3/5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \Rightarrow \\ \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 3/5 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz está escalonada. Vamos escrever o sistema associado:

$$S' : \begin{cases} x & +3y & +4z & = -7 \\ & y & +3z/5 & = -3 \\ & & -4z & = 0 \end{cases}$$

Resolvendo por substituições regressivas, obtemos: $z = 0,\ y = -3,\ x = 2$. Logo, o sistema S é compatível e determinado e seu conjunto-solução é $\{(2, -3, 0)\}$.

Exemplo 48

Vamos resolver o sistema linear $S : \begin{cases} 3a & +2b & +c & +2d & = 3 \\ a & & -3c & +2d & = -1 \\ -a & +5b & +4c & & = 4 \end{cases}$

Acompanhe a seqüência de operações elementares que aplicremos para escalonar a matriz aumentada de S:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \\ \Rightarrow \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 10 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow 1/2L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Rightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -24 & 12 & -12 \end{bmatrix} \Rightarrow S' : \begin{cases} a & & -3c & +2d & = -1 \\ & b & +5c & -2d & = 3 \\ & & -24c & +12d & = 12 \end{cases}$$

Na terceira equação, vamos escrever d em função de $c : d = -1 + 2c$. Substituindo na segunda equação, obtemos $b = 1 - c$. E na primeira equação: $a = 1 - c$. Temos, neste caso, um sistema compatível, porém indeterminado: ele possui infinitas soluções.

Fazendo $c = k$, seu conjunto-solução é $\{(1-k, 1-k, k, -1+2k); k \in \mathbb{R}\}$.

Exemplo 49

Vamos resolver o sistema $S : \begin{cases} 2x & +y & -3z & = 3 \\ x & -y & +z & = 1 \\ 3x & +3y & -7z & = 2 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \\ \Rightarrow \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \Rightarrow \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -10 & -1 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Observe que, ao escrever o sistema associado a essa matriz, a terceira equação será: $0x+0y+0z = -3$, ou seja, $0 = -3$, o que é falso, para quaisquer valores de x, y e z. Logo, o sistema S é impossível e seu conjunto-solução é $\emptyset$.

Exemplo 50

Vamos resolver o sistema linear homogêneo $S : \begin{cases} a & -b & +c & = 0 \\ a & +b & & = 0 \\ & 2b & -c & = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow S' : \begin{cases} a \quad -b \quad +c \quad = 0 \\ \qquad 2b \quad -c \quad = 0 \end{cases}$$

O sistema é compatível (TODO SISTEMA HOMOGÊNEO É COMPATÍVEL!!) e indeterminado. Resolvendo a segunda equação para c, substituindo na primeira, e fazendo $b = k$, você poderá conferir que o conjunto-solução é $\{(-k, k, 2k)k \in \mathbb{R}\}$.

Resumo

Nesta aula estudamos o método de escalonamento para resolver e classificar sistemas lineares. Trata-se de um método seguro, que "revela"a estrutura do sistema, explicitando as redundâncias ou incongruências das equações. Após o escalonamento, as equações que não acrescentam informação ao sistema, têm seus termos todos anulados e auqelas que são incompatíveis com as demais se transformam numa sentença matemática falsa (algo como $0 = a$, com a diferente de zero). Continuaremos a usar esse método, na próxima aula, para <u>discutir</u> sistemas lineares, isto é, para impor ou identificar condições sobre seu conjunto-solução.

Exercícios

1. (Provão - MEC - 2001)

   O número de soluções do sistema de equações $\begin{cases} x & +y & -z & =1 \\ 2x & +2y & -2z & =2 \\ 5x & +5y & -5z & =7 \end{cases}$

   é (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) infinito

2. Classifique e resolva os seguintes sistemas lineares:

   a) $\begin{cases} 2x & -y & =-7 \\ -3x & +4y & =13 \\ x & +2y & =-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x & -y & & & =1 \\ & 2y & -5z & & =-11 \\ & & z & -t & =-1 \\ x & +y & +z & +t & =10 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2a & -b & -c & =-4 \\ a & +b & -2c & =1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x & +y & -z & =-6 \\ x & -y & +3z & =21 \\ 3x & & +2z & =15 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} x & -y & =3 \\ 2x & +3y & =16 \\ x & +2y & =9 \\ 5x & -4y & =17 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x & -y & =3 \\ 2x & +3y & =16 \\ x & +2y & =8 \\ 5x & -4y & =17 \end{cases}$

   g) $\begin{cases} 3x & -y & +z & =0 \\ x & +y & -2z & =0 \\ 5x & -3y & +4z & =0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} a & +2b & =0 \\ 3a & -b & =0 \\ 5a & +3b & =0 \end{cases}$

Auto-avaliação

Não se preocupe se você ainda hesita sobre qual operação linear usar, no processo de escalonamento. A familiarização vem com a prática. Se necessário, refaça os exemplos e exercícios. Se sentir dúvidas, procure a tutoria. Os sistemas lineares aparecerão ao longo de todo o curso e é bom que você esteja ágil no processo de escalonamento, para não perder muito tempo com eles!!

Respostas dos exercícios

1. (A) 0 (Ao escalonar, concluímos que o sistema é incompatível)

2. a) Sistema compatível determinado. Conjunto-solução = $\{(-3, 1)\}$
   b) Sistema compatível determinado. Conjunto-solução = $\{(1, 2, 3, 4)\}$
   c) Sistema compatível indeterminado.
   Conjunto-solução = $\{(-1 + k, 2 + k, k); k \in \mathbb{R}\}$
   d) Sistema compatível indeterminado.
   Conjunto-solução = $\{(5 - 2k/3, -16 + 7k/3, k); k \in \mathbb{R}\}$
   e) Sistema compatível determinado. Conjunto-solução = $\{(5, 2)\}$
   f) Sistema incompatível. Conjunto-solução = $\emptyset$
   g) Sistema compatível indeterminado.
   Conjunto-solução = $\{(k/4, 7k/4, k); k \in \mathbb{R}\}$.
   h) Sistema compatível determinado. Conjunto-solução = $\{(0, 0)\}$

Aula 7 – Discussão de Sistemas Lineares

Objetivo

Discutir sistemas lineares, usando o método do escalonamento.

Pré-requisito: aula 6.

Discutir um sistema é analisar sob quais condições ele admite soluções e, quando estas existem, quantas são. Na aula passada vimos que, ao final do processo de escalonamento da matriz associada a um sistema linear, excluindo as equações do tipo $0 = 0$, chegamos a uma entre três situações possíveis:

1. Existe alguma equação do tipo $0 = a$, com $a \neq 0$. Isto é, uma equação impossível de ser satisfeita.

   Nesse caso, o sistema é incompatível e, portanto, seu conjunto solução é vazio.

2. Não há equações impossíveis mas obtemos uma quantidade de equações menor do que o número de incógnitas.

   Nesse caso, o sistema é compatível e indeterminado e seu conjunto-solução admite infinitas soluções.

3. Não há equações impossíveis e obtemos uma quantidade de equações igual ao de incógnitas.

   Nesse caso, o sistema é compatível e determinado e seu conjunto-solução é unitário.

Pode-se provar que um sistema linear que possui mais de uma solução possui, de fato, infinitas soluções. Note que o mesmo pode não ocorrer com um sistema não linear. Por exemplo, o sistema $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases}$ possui exatamente duas soluções, a saber, os pares ordenados $(2, 2)$ e $(-2, -2)$.

Nesta aula, iremos analisar sistemas lineares segundo os valores assumidos por parâmetros presentes nas equações, assim como impor valores a esses parâmetros para que uma desejada situação ocorra.

A seguir, para formalizar os procedimentos explorados ao longo dos exercícios, definiremos a característica de uma matriz e apresentaremos o Teorema de Rouché-Capelli.

Finalmente, veremos a Regra de Cramer, que se aplica a sistemas lineares com quantidade de equações igual à de incógnitas.

Acompanhe os exemplos a seguir.

Exemplo 51

Vamos discutir o o sistema $\begin{cases} x + y + z & = & 6 \\ x + 2y - z & = & -4 \\ x + 3z & = & a \end{cases}$, segundo os valores do parâmetro a.

Escalonando sua matriz aumentada, obtemos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & a \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & -1 & 2 & a-6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & a-16 \end{array}\right]$$

Assim, o sistema dado é equivalente ao sistema $\begin{cases} x+y+z = 6 \\ y-2z = -10 \\ 0 = a-16 \end{cases}$, cuja terceira equação só será satisfeita se o segundo membro também for igual a zero. Logo, temos:

- $a \neq 16 \Rightarrow$ sistema incompatível.
- $a = 16 \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado, pois possui três incógnitas e apenas duas equações.

Exemplo 52

Vamos discutir o sistema $\begin{cases} x+ay = 2 \\ ax+2ay = 4 \end{cases}$.

Temos: $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ a & 2a & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & a & 2 \\ 0 & 2a-a^2 & 4-2a \end{array}\right]$.

Vamos determinar os valores de a para os quais o primeiro lado da segunda equação se anula:

$2a - a^2 = 0 \Rightarrow a(2-a) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 2$. Então há as seguintes possibilidades:

- $a = 0 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x = 2 \\ 0 = 4 \end{cases} \Rightarrow$ incompatível.
- $a = 2 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x+2y = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$ compatível e indeterminado.
- $a \neq 0$ e $a \neq 2 \Rightarrow$ o sistema fica $\begin{cases} x+ay = 2 \\ by = c \end{cases}$, com $b = 2a-a^2 \neq 0$ e $c = 4-2a \Rightarrow$ compatível e indeterminado.

Exemplo 53

Vamos analisar o sistema $\begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ x+2y+kz & = & 2 \\ kx+2y+z & = & -2 \end{cases}$, segundo os valores do parâmetro k:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 2 & k & | & 2 \\ k & 2 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & | & 2 \\ 0 & 2-k & 1-k & | & -2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & | & 2 \\ 0 & 2-k & (1-k)-(k-1)(2-k) & | & -2-2(2-k) \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & k-1 & | & 2 \\ 0 & 0 & (k-1)(k-3) & | & 2(k-3) \end{bmatrix}.$$

Daí, temos $(k-1)(k-3) = 0 \Rightarrow k = 1$ ou $k = 3$. Há, então, as seguintes possibilidades:

- $k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ y & = & 2 \\ 0 & = & -4 \end{cases} \Rightarrow$ sistema incompatível.

- $k = 3 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ y+2z & = & 2 \\ 0 & = & 0 \end{cases} \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado.

- $k \neq 1$ e $k \neq 3 \Rightarrow \begin{cases} x+y+z & = & 0 \\ -y+az & = & 2 \\ b & = & c \end{cases}$, com $a = k-1$, $b = (k-1)(k-3) \neq 0$ e $c = 2(k-3) \Rightarrow$ sistema compatível e determinado.

Exemplo 54

Vamos determinar para que valores de a e b o sistema $\begin{cases} x-y+z & = & a \\ 2x-y+3z & = & 2 \\ x+y+bz & = & 0 \end{cases}$ admite infinitas soluções. Temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & a \\ 2 & -1 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & b & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & 2-2a \\ 0 & 2 & b-1 & | & -a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & a \\ 0 & 1 & 1 & | & 2-2a \\ 0 & 0 & b-3 & | & 3a-4 \end{bmatrix}.$$

Para que o sistema admita infinitas soluções (isto é, seja compatível e indeterminado), devemos ter $b-3 = 0$ e $3a-4 = 0$. Isto é, $b = 3$ e $a = 4/3$.

Exemplo 55

Que condições a, b e c devem satisfazer para que o sistema $\begin{cases} 3x-2y &= a \\ 4x+y &= b \\ x &= c \end{cases}$ admita solução?

Solução: $\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & a \\ 4 & 1 & | & b \\ 1 & 0 & | & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & c \\ 4 & 1 & | & b \\ 3 & -2 & | & a \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & c \\ 0 & 1 & | & b-4c \\ 0 & -2 & | & a-3c \end{bmatrix} \sim$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & c \\ 0 & 1 & | & b-4c \\ 0 & 0 & | & (a-3c)+2(b-4c) \end{bmatrix}$.

Logo, o sistema terá solução apenas se $(a-3c)+2(b-4c)=0$, isto é, se $a+2b-11c=0$.

Exemplo 56

Vamos discutir o sistema homogêneo $\begin{cases} x+2y &= 0 \\ 3x+ky &= 0 \end{cases}$, segundo o parâmetro k.

Temos: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 3 & k & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & k-6 & | & 0 \end{bmatrix}$.

Então:

- $k=6 \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado.
- $k \neq 6 \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado.

Vamos, agora, formalizar o procedimento que vimos adotando para resolver e discutir sistemas lineares. Para isso, precisamos da seguinte definição:

Característica de uma matriz

Na aula 4 vimos que, ao passar de uma matriz para outra, por meio de uma seqüência de operações elementares, definimos uma relação de equivalência no conjunto dessas matrizes. Assim, se podemos obter a matriz B, a partir da matriz A, pela aplicação de uma seqüência de operações elementares, dizemos que A e B são matrizes *equivalentes*. Nos exemplos anteriores usamos esse fato e indicamos que A e B são equivalentes escrevendo $A \sim B$ (ou $B \sim A$).

Seja A uma matriz qualquer e A' uma matriz escalonada, equivalente a A. Chamamos de *característica* de A, e indicamos por $c(A)$, ao número de linhas não nulas de A'.

Exemplo 57

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Então $A' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$ e $c(A) = 2$.

2. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 6 & 13 & -2 \end{bmatrix}$, então $A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $c(A) = 2$.

3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$, temos $A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $c(A) = 1$.

O raciocínio que usamos para resolver ou classificar os sistemas lineares se constitui num resultado conhecido como Teorema de Rouché-Capelli. Nós o enunciamos a seguir.

Teorema 2 (Teorema de Rouché-Capelli)
Seja um sistema linear S de representação matricial $AX = b$, com $A \in M_{m\times n}$. Indiquemos por $A|b$ a matriz aumentada de S. Então S será compatível se, e somente se, $c(A) = c(A|b)$. Quando for compatível, será determinado se $c(A) = n$ e indetermindado, se $c(A) < n$.

Quando um sistema linear $S : AX = b$ possui número de equações igual ao número de incógnitas, a matriz A é quadrada e podemos calcular seu determinante, que vamos representar por D. Neste caso, vale o seguinte teorema:

Teorema 3 (Teorema de Cramer)
Seja S um sistema linear com número de equações igual ao de incógnitas. Se $D \neq 0$ então o sistema é compatível e determinado e sua única solução $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ é dada por

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, ..., n,$$

onde D_i é o determinante da matriz que se obtém, a partir de A, substituindo-se a i-ésima coluna pela coluna dos termos independentes do sistema.

As demonstrações dos teoremas de Rouché-Capelli e de Cramer podem ser encontradas, por exemplo, em *Fundamentos de Matemática Elementar*, vol. 4, dos autores Gelson Iezzi e Samuel Hazzan, editado pela Atual.

Quando $D \neq 0$ (isto é, quando a matriz A é inversível), o sistema é chamado *sistema de Cramer*.

Exemplo 58
Seja o sistema $\begin{cases} x + 2y - 3z & = & -15 \\ 2x - y + z & = & 10 \\ 3x - z & = & 1 \end{cases}$.

Temos $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Logo, o sistema tem solução única.
Vamos determinar essa solução.

$D_1 = \begin{vmatrix} -15 & 2 & -3 \\ 10 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -15 & -3 \\ 2 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -15 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 10.$

Logo,

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{2} = 2, \quad y = \frac{D_2}{D} = \frac{-2}{2} = -1, \quad z = \frac{D_3}{D} = \frac{10}{2} = 5$$

Portanto, a única solução do sistema é $(2, -1, 5)$.

Do teorema de Cramer, podemos concluir que:

- $D \neq 0 \Rightarrow$ sistema compatível determinado.
- $D = 0 \Rightarrow$ sistema incompatível ou compatível indeterminado.

Já vimos que um sistema linear homogêneo sempre admite solução, isto é, é sempre compatível. No caso particular de S ser homogêneo, podemos concluir, então, que:

- $D \neq 0 \Rightarrow$ sistema compatível determinado.
- $D = 0 \Rightarrow$ sistema compatível indeterminado.

Exemplo 59

Vamos discutir o sistema $\begin{cases} ax + 2ay & = & 0 \\ 4x + ay & = & 12 \end{cases}$, usando o teorema de Cramer.

Sabemos que se $D = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 4 & a \end{vmatrix} \neq 0$, o sistema tem solução única. Assim, os valores de a para os quais $D = 0$ tornam o sistema indeterminado ou impossível. Esses valores são:
$D = 0 \Rightarrow a^2 - 8a = 0 \Rightarrow a(a-8) = 0 \Rightarrow a = 0$ ou $a = 8$.

- Se $a = 0$, o sistema fica: $\begin{cases} 0 & = & 0 \\ 4x & = & 12 \end{cases}$ $\Rightarrow x = 3$ e y pode assumir qualquer valor real. Logo, o sistema admite infinitas soluções.

- Se $a = 8$, o sistema fica: $\begin{cases} 8x + 16y & = & 0 \\ 4x + 8y & = & 12 \end{cases}$. Escalonando, obtemos o sistema $\begin{cases} 4x + 8y & = & 12 \\ 0 & = & -24 \end{cases}$, que é incompatível.

Resumindo, temos:

- $a \neq 0$ e $a \neq 8 \Rightarrow$ sistema compatível e determinado.

- $a = 0 \Rightarrow$ sistema compatível indeterminado.

- $a = 8 \Rightarrow$ sistema incompatível.

Exemplo **60**

Vamos determinar o valor de k para o qual o sistema

$\begin{cases} x - y - z & = & 0 \\ 2x + ky + z & = & 0 \\ x - 2y - 2z & = & 0 \end{cases}$ admite solução própria.

Trata-se de um sistema homogêneo, de matriz de coeficientes quadrada. Pelo teorema de Cramer, para que existam soluções não-triviais (ou seja, para que o sistema seja indeterminado), o determinante dessa matriz deve ser igual a zero. Isto é,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Resumo

Esta foi uma aula prática: discutimos sistemas lineares usando os resultados dos teoremas de Rouché-Capelli e de Cramer. Note que a regra de Cramer só se aplica a sistemas lineares cuja matriz dos coeficientes é quadrada e inversível. (Você se lembra? Uma matriz quadrada é inversível se, e somente se, seu determinante é diferente de zero.) Com esta aula, encerramos a parte introdutória do curso. Você aplicará os conceitos e técnicas vistos até aqui ao longo das próximas aulas. A partir da aula 8, você estará em contato com os conceitos da Álgebra Linear, propriamende dita. Seja bem-vindo!!!

Exercícios

1. (Provão - MEC - 1998)

   O sistema $\begin{cases} ax + 3y &= a \\ 3x + ay &= -a \end{cases}$ não tem solução se e só se

   (A) $a \neq -3$ (B) $a \neq 3$ (C) $a = 0$ (D) $a = -3$ (E) $a = 3$

2. Discuta o sistema $\begin{cases} x + ky &= 2 \\ kx + y &= 2 \end{cases}$, segundo os valores de k.

3. Para que valores de m o sistema $\begin{cases} x + y + mz &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= m \\ 2x + 3y + z &= 1 \end{cases}$ admite solução?

4. Determine os valores de a e b que tornam o sistema $\begin{cases} 3x - 7y &= a \\ x + y &= b \\ x + 2y &= a + b - 1 \\ 5x + 3y &= 5a + 2b \end{cases}$ compatível e determinado. Em seguida, resolva o sistema.

5. Determine os valores de a e b que tornam o sistema $\begin{cases} 6x + ay &= 12 \\ 4x + 4y &= b \end{cases}$ indeterminado.

6. Discuta o sistema $\begin{cases} mx + y - z &= 4 \\ x + my + z &= 0 \\ x - y &= 2 \end{cases}$

7. Para que valores de k o sistema $\begin{cases} x + ky + 2z &= 0 \\ -2x + my - 4z &= 0 \\ x - 3y - kz &= 0 \end{cases}$ admite soluções não triviais (ou seja, é indeterminado)?

8. Determine k, para que o sistema $\begin{cases} -4x + 3y &= 2 \\ 5x - 4y &= 0 \\ 2x - y &= k \end{cases}$ admita solução.

9. Encontre os valores de $p \in \mathbb{R}$ tais que o sistema homogêneo $\begin{cases} 2x - 5y + 2z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ 2x + pz &= 0 \end{cases}$ tenha soluções distintas da solução trivial.

10. Que condições a e b devem satisfazer para que o sistema abaixo seja de Cramer?

$$\begin{cases} ax + by & = & 0 \\ a^2x + b^2y & = & 0 \end{cases}$$

Auto-avaliação

Embora a teoria usada resolver e discutir sistemas lineares seja simples e pouca extensa, cada sistema é um sistema! Quanto mais exercícios você puder resolver, melhor será, no sentido de deixá-lo mais seguro e rápido nesse tipo de operação. Se possível, consulte outros livros de Álgebra Linear para obter mais opções de exercícios. E não deixe de trazer suas dúvidas para o tutor da disciplina.

Respostas dos exercícios

1. (E) $a = 3$
2. $k \neq 1$ e $k \neq -1 \Rightarrow$ sistema compatível e determinado;

   $k = 1 \Rightarrow$ sistema compatível e indeterminado;

   $k = -1 \Rightarrow$ sistema incompatível.
3. Para $m \neq 1$. Neste caso, o sistema é compatível e determinado.
4. $a = 2, b = 4; \{(3, 1)\}$
5. $a = 6$ e $b = 8$
6. $m \neq -1 \Rightarrow$ sistema compatível e determinado;

   $m = -1 \Rightarrow$ sistema incompatível.
7. $k = -2$ ou $k = 0$
8. $k = -6$
9. $p = 2$
10. $ab \neq 0$ e $a \neq b$