Triângulo de Pascal

O Matemático francês Blaise Pascal (1623–1662) foi uma criança prodígio que descobriu sozinha, sem auxílio de livros, muitas das idéias fundamentais da Geometria Euclideana.

Pascal foi um dos pioneiros no estudo da probabilidade, e também tem o crédito de ter inventado e construído a primeira calculadora digital: uma máquina de somar mecânica parecida com as máquinas da década de 40 deste século.

Objetivos

Descrever o triângulo de Pascal.

Estudar algumas de suas propriedades.

Apresentar a seqüência de Fibonacci e mostrar sua relação com o triângulo de Pascal.

O triângulo de Pascal é uma seqüência de números binomiais, isto é, inteiros da forma $C(n, r)$, dispostos em uma tabela em forma de triângulo, como na figura abaixo.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

O nome "triângulo de Pascal" vem do fato de Pascal ter escrito, em 1653, um tratado estudando, entre outras coisas, este triângulo. Contudo, o triângulo de Pascal é conhecido desde muitos séculos antes de Pascal, tendo sido estudado na China e na Índia desde 1100.

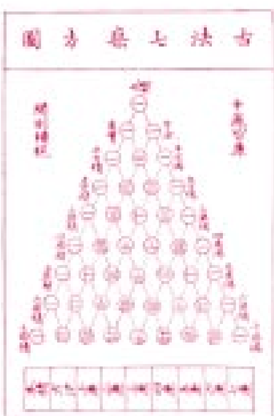
Vamos começar escrevendo os números binomiais em forma de tabela. A "linha n" desta tabela será formada pelos inteiros $C(n, r)$, onde r varia de 0 até n. Começamos a tabela com a linha 0, formada apenas pelo $C(0, 0) = 1$.

Por exemplo, a linha 4 é formada pelos inteiros $C(4, r)$, com $0 \leq r \leq 4$, isto é, formada pelos cinco inteiros

$$\begin{array}{ccccc}
C(4,0) & C(4,1) & C(4,2) & C(4,3) & C(4,4) \\
\| & \| & \| & \| & \| \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

Note que, como começamos na linha 0, a linha 4 é na verdade a quinta linha da tabela. Usado a regra de formação explicada acima, construímos a tabela:

$n\diagdown r$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
$\vdots$								



A ilustração acima aparece em um texto de 1303, escrito por um matemático chinês. O texto chama-se Szu-Yuen Yu-chien (o espelho precioso dos 4 elementos).

Escrevemos a tabela acima até a linha 6. No entanto, a tabela continua indefinidamente.

Observando a tabela, podemos perceber várias propriedades que podem ser facilmente provadas usando-se a definição do triângulo da Pascal dada acima.

Vamos a estas propriedades:

Propriedade 1

Propriedade 1. Toda linha começa e termina com o inteiro 1.

Demonstração: o primeiro número da linha n é

$$C(n,0) = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1.n!} = 1 \ ,$$

enquanto que o último número da linha n é

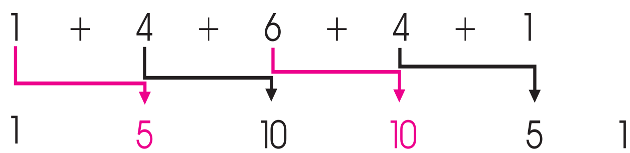
$$C(n,n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1 \ .$$

Propriedade 2

Propriedade 2. Com exceção do primeiro e último números da linha (que, como vimos, são iguais a 1), cada número é igual à soma do número que está diretamente acima dele, com o número que está acima e à esquerda.

Desta forma, começando com a primeira linha, obtemos o triângulo até a linha que quisermos, obtendo uma linha a partir da linha anterior, sem realmente ter que calcular os números binomiais $C(n, r)$.

Como exemplo, vejamos como a linha 5 é obtida da linha 4:



Obtemos um número somando-se dois números, os que estão acima e acima à esquerda dele.

Verifique esta propriedade, até a linha 6, no triângulo da figura anterior.

Exemplo 70

Usando a propriedade 2, construir o triângulo de Pascal até a linha 4:

Começamos com as duas primeiras linhas, que são:

n		
0	1	
1	1	1

Para a linha 2, usamos a propriedade:

n			
0	1		
1	1	1	
2	1	2	1

Acrescentamos a terceira linha:

n				
0	1			
1	1	1		
2	1	2	1	
3	1	3	3	1

E agora a quarta linha:

n	
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

Demostração da propriedade 2

Agora devemos provar a propriedade 2. Para isto, vamos expressá-la em termos de números binomiais. A propriedade diz respeito aos números $C(n,r)$, com as restrições $n \neq 0$ e $1 \leq r \leq n-1$. Estas restrições são devidas a que a propriedade não se refere a

- Linha 0 (linha com $n = 0$)
- Primeira ($r = 0$) e última ($r = n$) colunas de cada linha. Como vimos, estas sempre valem 1.

Este número $C(n,r)$ é a soma do número acima dele no triângulo, que é o $C(n-1,r)$ (linha anterior, mesma coluna), com o número acima e à esquerda dele, que é o $C(n-1,r-1)$ (linha anterior, coluna anterior).

Podemos então enunciar a propriedade da seguinte forma:

Fórmula de Pascal. Se n e r são inteiros positivos, com $1 \leq r \leq n-1$, então

$$C(n,r) = C(n-1,r) + C(n-1,r-1)$$

Demonstração

Basta usar a fórmula para $C(n,r)$ e fazer um pouco de conta.

$$\begin{aligned}
C(n-1,r) + C(n-1,r-1) &= \frac{(n-1)!}{r!((n-1)-r)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!.\,((n-1)-(r-1))!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-r)(n-1)! + r.(n-1)!}{r!(n-r)!} \\
&= \frac{(n-1)!(n-r+r)}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= C(n,r)
\end{aligned}$$

O denominador comum é $r!(n-r)!$

Colocamos o $(n-1)!$ em evidência no numerador

Propriedade 3

Vamos agora observar uma terceira propriedade do triângulo de Pascal, a saber:

Propriedade 3. A soma dos elementos da linha n no triângulo de Pascal é 2^n.

No diagrama a seguir, apresentamos este resultado para $n = 0, 1, 2, 3$ e 4.

n	linha n	Soma
0	1	$1 = 2^0$
1	1 1	$2 = 2^1$
2	1 2 1	$4 = 2^2$
3	1 3 3 1	$8 = 2^3$
4	1 4 6 4 1	$16 = 2^4$

Isto corresponde, em termos de números binomiais, à afirmação

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \ldots + C(n,n) = 2^n \ ,$$

que já foi provada na Aula 11.

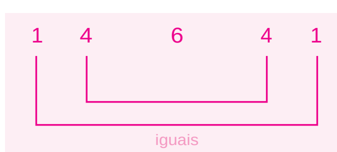
Como exercício, verifique esta propriedade, somando os inteiros de cada linha do triângulo de Pascal, até a linha 6.

Propriedade 4

A *simetria* tem um papel fundamental na Matemática. Simetria está relacionada à estética, ao que é belo. Uma construção matemática deve ser verdadeira e bela.

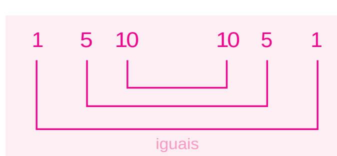
Há ainda mais uma propriedade que gostaríamos de descrever. Ela se refere à *simetria* das linhas do triângulo.

Observe a linha 4:



O número 6 está no meio e a linha é simétrica em relação ao meio.

Observe agora a linha 5:

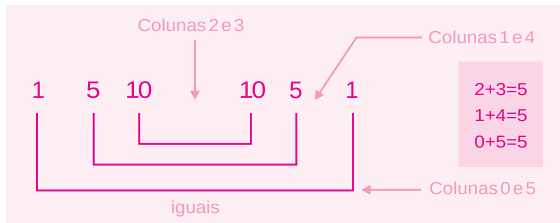


Na linha 5, o meio está entre os dois números 10. A linha é simétrica em relação ao meio.

Podemos afirmar que:

Propriedade 4. As linhas do triângulo de Pascal são simétricas em relação ao meio.

Uma outra maneira de expressar esta simetria é dizer que dois números em uma linha são iguais se a soma dos números de suas colunas é n. Por exemplo, na linha 5 a soma dos números das colunas que são iguais é sempre igual a 5.



Em termos de números binomiais, escrevemos esta propriedade da seguinte forma:

Sejam n e r inteiros, com $n \geq 1$ e $0 \leq r \leq n$, então

$$C(n,r) = C(n,n-r)$$

Demonstração

Temos que

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!} \ ,$$

enquanto que

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \ .$$

Portanto,

$$C(n,r) = C(n,n-r) \ .$$

Podemos, então, afirmar que

$$C(n,r) = C(n,p) \Leftrightarrow \begin{cases} r = p \\ \text{ou} \\ r + p = n \end{cases}$$

Quando $r+p=n$ dizemos que os números binomiais $C(n,r)$ e $C(n,p)$ são *complementares*.

Propriedade 5

Descrevemos agora mais uma propriedade interessantíssima do triângulo de Pascal: quando somamos os números em uma mesma coluna, do início da coluna até uma certa linha, obtemos o número na coluna seguinte e na linha seguinte à última que entrou na soma.

Observe a figura:

Vamos agora escrever esta propriedade em termos de números binomiais. Se estamos somando os inteiros da coluna r, então a soma começa pelo número 1, que está na r-ésima linha (o inteiro $C(r,r) = 1$). A soma continua então na linha seguinte com o $C(r+1,r)$, indo até uma linha que escolhemos, digamos a n-ésima linha com o inteiro $C(n,r)$.

O valor obtido com esta soma é o inteiro da coluna seguinte e linha seguinte à última, isto é, o valor da soma é $C(n+1,r+1)$.

Em termos de números binomiais, podemos assim escrever esta propriedade como:

Propriedade 5.
Seja um inteiro $r \geq 0$. Então para todo inteiro $n \geq r$,

$$C(r,r) + C(r+1,r) + \cdots + C(n,r) = C(n+1,r+1)\,.$$

Demonstração da propriedade 5

Vamos demonstrar a propriedade 5 pelo método de Indução Matemática. Apresentaremos esse método com mais detalhes no Módulo 3.

Devemos provar que:

(i) A propriedade é verdadeira para $n = r$.

(ii) Se a propriedade é verdadeira para n, então também é verdadeira para $n + 1$, para qualquer inteiro $n \geq r$.

Vamos iniciar provando a afirmação (i).

Fazendo $n = r$, temos que $C(r, r) = C(r + 1, r + 1) = 1$. Logo, a afirmação é verdadeira para $n = r$.

Para a prova da segunda afirmação, vamos considerar um inteiro $n \geq r$ e tomar como hipótese que:

$$C(r, r) + C(r + 1, r) + ... + C(n, r) = C(n + 1, r + 1).$$

Somando $C(n + 1, r)$ aos dois lados da igualdade, temos que

$$C(r, r) + C(r + 1, r) + ... + C(n, r) + C(n + 1, r) = C(n + 1, r + 1) + C(n + 1, r).$$

Mas, pela fórmula de Pascal,

$$C(n + 1, r + 1) + C(n + 1, r) = C(n + 2, r + 1).$$

Substituindo na equação acima, obtemos

$$C(r, r) + C(r + 1, r) + ... + C(n, r) + C(n + 1, r) = C(n + 2, r + 1),$$

o que garante que a propriedade é verdadeira para $n + 1$. Isto completa a demonstração, por indução, da propriedade 5.

O Triângulo de Pascal e a seqüência de Fibonacci

O triângulo de Pascal apresenta algumas características que encantam os matemáticos. Em primeiro lugar, nele convivem em harmonia números e formas geométricas. Ele é repleto de simetrias e é possível construí-lo usando uma maneira fácil de se lembrar, como foi explicado no comentário da propriedade 2. Veremos agora como este triângulo de números se relaciona com uma seqüência muito famosa: a seqüência de Fibonacci.

O triângulo de Pascal também está relacionado com outra seqüência famosa, que é a dos números triangulares, mas não a apresentaremos neste texto.

Seqüência de Fibonacci

Além de Leonardo da Vinci, a Itália deu ao mundo outro Leonardo, este chamado Leonardo de Pisa (1180 - 1250), que é mais conhecido pelo seu apelido: Fibonacci. Ele teve um papel importante no desenvolvimento da Matemática. Foi Fibonacci que introduziu na Europa os algarismos arábicos. Ele viveu na Algéria, a capital da Argélia, que fica na África, onde estudou e aprendeu a matemática dos árabes.

Um dos problemas pelo qual ele é lembrado é o Problema dos Coelhos, que ele formulou em seu *Liber Abaci*, de 1202:

"Suponha que o tempo de gestação das coelhas seja de um mês e que cada coelha fique prenha no início de cada mês, iniciando no seu primeiro mês de vida. Suponha também que cada coelha gere sempre dois coelhinhos, um macho e uma fêmea. Quantos casais de coelhos você terá em 2 de janeiro de 1203 se você começou com um casal de recém-nascidos no dia primeiro de janeiro de 1202?"

A resposta para este problema está relacionada com uma seqüência de números que ficou conhecida como a *seqüência de Fibonacci*.

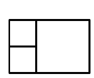
O número de casais de coelhos cresce da seguinte maneira:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55, \ldots$$

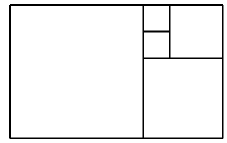
Podemos construir a seqüência de Fibonacci a partir das seguintes informações: Se F_n denota o n-ésimo número de Fibonacci, então

$$F_1 = 1, \quad F_2 = 1, \quad \text{e} \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$

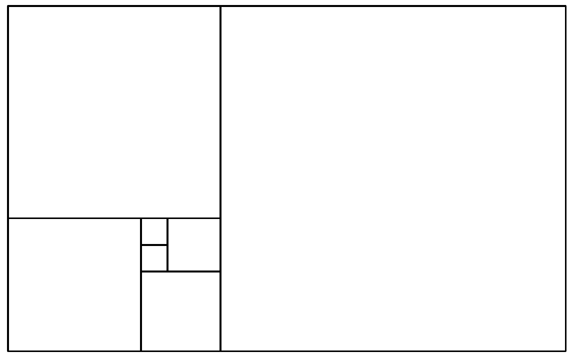
Os números de Fibonacci estão relacionados com o chamado *retângulo áureo* que é conhecido desde a antiga Grécia. A idéia é a seguinte: comece com dois quadrados de lados 1 e anexe um quadrado de lado 2:



Acrescente um quadrado de lado 3 e depois outro, de lado 5:



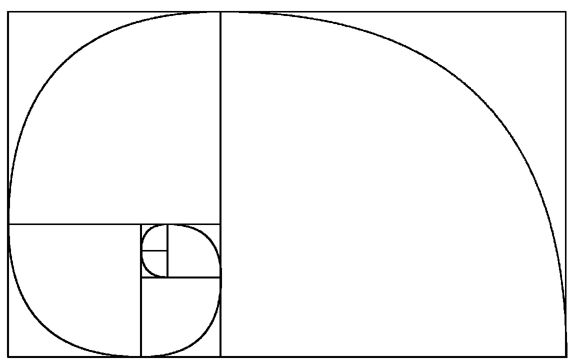
Mais uma rodada com mais dois quadrados, de lados 8 e 13:



Você pode continuar aumentando este retângulo usando para o comprimento dos lados dos novos quadrados exatamente os números de Fibonacci.

A seqüência de Fibonacci aparece em vários fenômenos da natureza, como veremos no exemplo seguinte:

Usando um compasso passamos a traçar semi-circunferências nos quadrados que agrupamos anteriormente, de forma a obter uma curva contínua. Esta curva é uma espiral:



Esta espiral aparece na natureza, no perfil do casco de um crustáceo chamado *nautilus marinho*.

Se você gostou deste tema, há muita informação disponível e você pode, caso tenha tempo e disposição, aprender muitas outras coisas interessantes. Além de material disponível na Internet (use um aplicativo de busca com a palavra chave “Fibonacci”), você pode consultar livros, como “A Divina Proporção: Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática”, de H. E. Huntley, foi editado em 1985 pela Editora Universidade de Brasília.

Relação com o triângulo de Pascal

Agora que você já tem alguma intimidade com os números de Fibonacci, veja como eles se relacionam com o triângulo de Pascal.

As somas dos números dispostos nas diagonais do triângulo de Pascal formam, precisamente, a seqüência de Fibonacci, como você pode ver no seguinte diagrama:

1 1 2 3 5 8 13 21

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Este fato foi notado pelo próprio Fibonacci quando estudava o triângulo de Pascal, que era conhecido como o triângulo chinês. Isto pela simples razão de ter Pascal nascido algo como 400 anos depois de Fibonacci!

Resumo

Nesta aula descrevemos o triângulo de Pascal e estudamos algumas de suas propriedades. Cada uma destas propriedades foram observadas no triângulo e demostradas utilizando propriedades conhecidas dos números binomiais $C(n, r)$.

Há ainda outras propriedades interessantíssimas do triângulo de Pascal. Uma delas, que será vista na próxima aula, é sua relação com os coeficientes da expansão $(x + y)^n$.

Exercícios

1. Construa, sem usar uma fórmula para $C(n,r)$, um triângulo de Pascal com 10 linhas. Verifique, para este triângulo, todas as propriedades estudadas nesta aula.

2. Determine x para que se tenha:

   (a) $C(12,x) = C(12,7)$
   (b) $C(14,x-2) = C(14,2x+1)$
   (c) $C(18,6) = C(18,4x-1)$

3. Determine n tal que $C(n,1)+C(n,2)+C(n,3)+C(n,4)+C(n,5)+C(n,6) = 63$

4. Qual é a resposta do Problema dos Coelhos?

5. Um jardineiro planta um arbusto e notou que nasce um broto de um galho a cada mês, sendo que um broto leva dois meses para produzir seu primeiro broto.

   Calcule o número de galhos do arbusto após 7 meses.

Teorema binomial

Objetivos

Relacionar os coeficientes da expansão de $(x+y)^n$ com as linhas do triângulo de Pascal.
Enunciar e provar o teorema binomial.

Uma soma algébrica de duas parcelas envolvendo símbolos distintos, como $x+y$, é chamada binômio. Também são exemplos de binômios $a+3bc$, $x-y$ e x^2-z^2.

O teorema binomial fornece uma fórmula para a potência de um binômio, isto é, uma fórmula que permite calcular diretamente uma expressão do tipo $(x+y)^n$, onde n é um inteiro positivo.

Vamos começar com algumas potências de $x+y$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= x+y\\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5
\end{aligned}$$

Vamos agora construir uma tabela em forma de triângulo formada pelos coeficientes das expansões de $(x+y)^n$, colocando na linha n os coeficientes do polinômio $(x+y)^n$.

n	coeficientes de $(x+y)^n$					
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

O triângulo formado é, pelo menos até a linha 5, exatamente igual ao triângulo de Pascal (veja a Aula 12).

No que se segue, provaremos que o triângulo formado pelos coeficientes de $(x+y)^n$ é exatamente o triângulo de Pascal.

Isto quer dizer que os coeficientes de $(x+y)^n$ são os inteiros que formam a linha n do triângulo de Pascal, que são os números binomiais $C(n,r)$.

Em resumo, provaremos o

Binômio de Newton

Teorema Binomial. Seja n um inteiro positivo. Então

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 + \cdots + C(n,n)y^n$$

É muito comum, quando se estuda o teorema binomial, utilizar a notação $\binom{n}{j}$, ao invés de $C(n,j)$. Utilizando esta notação, o teorema binomial pode ser escrito como

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \cdots + \binom{n}{j}x^{n-j}y^j + \cdots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n\,.$$

Exemplo 71

Usando o teorema binomial para $n=5$, obtemos:

$$\begin{aligned}(x+y)^5 &= C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4y + C(5,2)x^3y^2 + C(5,3)x^2y^3 \\ &\qquad + C(5,4)x^1y^4 + C(5,5)y^5 \\ &= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\end{aligned}$$

Veremos, ainda nesta aula, mais alguns exemplos envolvendo o teorema binomial. Mas antes, devemos provar este teorema.

Prova do teorema binomial

Observe a expansão

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd\,.$$

O produto acima é uma soma de 4 termos: ac, ad, bc e bd. Cada termo é o produto de 2 variáveis, uma em cada parênteses. Por exemplo, o termo ac é o produto de a, que está no parênteses $(a+b)$, por c, que está no parênteses $(c+d)$.

Observe agora:

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d)(e+f) &= (a+b)(ce+cf+de+df)\\ &= ace+acf+ade+adf+bce+bcf+bde+bdf.\end{aligned}$$

A expansão de $(a+b)(c+d)(e+f)$ é uma soma de 8 termos, sendo cada termo um produto de 3 variáveis, uma em cada parênteses.

Quantos termos terá a expansão de

$$(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)\ ?$$

Esta expansão é uma soma em que cada termo é produto de 4 variáveis, uma em cada parênteses. Como em cada parênteses há 2 possibilidades de escolha, temos, pelo princípio multiplicativo,

$$2\times 2\times 2\times 2 = 2^4 = 16$$

maneiras de formar produtos de 4 variáveis, uma em cada parênteses.

Portanto, a expansão de $(a+b)(c+d)(e+f)(g+h)$ é composta de uma soma de 16 termos.

Analogamente, a expansão de

$$(a+b)((c+d)(e+f)(g+h)(i+j)$$

é uma soma de $2^5 = 32$ termos. Cada termo é o produto de 5 variáveis, uma em cada parênteses. Note que os 32 termos são distintos.

Agora, o que acontece com a expansão de

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\ ?$$

Neste caso, também temos que a expansão é formada pela soma de 32 termos, cada um formado pelo produto de 5 variáveis, uma tomada em cada parênteses.

Por exemplo, um termo é $xyxxy = x^3y^2$. É o termo formado pelo produto das variáveis marcadas abaixo:

$$(x+y)^5 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)(x+y)\ .$$

A diferença aqui é que *vários destes termos são iguais e podem ser agrupados.*

Por exemplo, os termos

$$xxyxx \quad yxxxx \quad xyxxx \quad xxxyx \quad xxxxy$$

são todos iguais a x^4y.

Da mesma forma, todos os termos que têm 3 variáveis x e 2 variáveis y (tais como $xxyxy$), são iguais a x^3y^2. Mas quantos destes termos existem na expansão de $(x+y)^5$?

Este é um problema de contagem, e para resolvê-lo usaremos as combinações, estudadas nas Aulas 10 e 11.

Para formarmos um termo igual a x^3y^2, temos 5 posições

$$\_\_ \quad \_\_ \quad \_\_ \quad \_\_ \quad \_\_$$

e temos de escolher 2 posições para a variável y. As 3 posições restantes serão preenchidas com a variável x. Como *a ordem da escolha não é importante*, trata-se de um problema de combinação.

Há

$$C(5,2) = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2.3!} = \frac{120}{2.6} = 10$$

maneiras de escolher as 2 posições para a variável y. Resulta que há 10 termos iguais a x^3y^2 na expansão de $(x+y)^5$.

Fazendo o mesmo para todos os 32 termos da expansão de $(x+y)^5$, podemos dividi-los da seguinte forma:

Termo	possui	quantos existem
$x^5y^0 = x^5$	5 variáveis x e 0 variáveis y	$C(5,0) = 1$
$x^4y^1 = x^4y$	4 variáveis x e 1 variável y	$C(5,1) = 5$
x^3y^2	3 variáveis x e 2 variáveis y	$C(5,2) = 10$
x^2y^3	2 variáveis x e 3 variáveis y	$C(5,3) = 10$
$x^1y^4 = xy^4$	1 variável x e 4 variáveis y	$C(5,4) = 5$
x^0y^5	0 variáveis x e 5 variáveis y	$C(5,5) = 1$

Resulta que a expansão de $(x+y)^5$ é

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5\,.$$

Vamos agora generalizar o raciocínio acima. De maneira mais geral, a expansão de

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y) \quad (n \text{ fatores})$$

é a soma de 2^n termos, cada termo formado pelo produto de x's e y's, tomando-se um em cada parênteses.

Cada termo é da forma $x^i y^j$, onde $i+j=n$ (o grau total de cada termo é n), pois cada termo é o produto de n variáveis x ou y.

Como cada termo é da forma $x^i y^j$, com $i+j=n$ ($\Rightarrow i=n-j$), podemos então escrever cada termo como $x^{n-j}y^j$.

O coeficiente de $x^{n-j}y^j$ é o número de maneiras de escolher j posições para pôr j variáveis y dentro de n posições possíveis. Como a ordem da escolha não é importante, então é um problema de combinação e o número de maneiras de fazermos esta escolha é $C(n,j)$.

Disto resulta que o coeficiente de $x^{n-j}y^j$ em $(x+y)^n$ é $C(n,j)$ e que a fórmula geral para a expansão de $(x+y)^n$ é

$$\begin{aligned}(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y &+ \cdots + \\ C(n,j)x^{n-j}y^j + \cdots &+ C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n\,,\end{aligned}$$

como havíamos afirmado.

Exemplo 72

Determine a expansão de $(x+2)^5$.

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= C(5,0)x^5 + C(5,1)x^4 2^1 + C(5,2)x^3 2^2 + C(5,3)x^2 2^3 \\ &\qquad + C(5,4)x^1 2^4 + C(5,5)2^5 \\ &= 1.x^5 + 5.x^4.2 + 10.x^3.4 + 10.x^2.8 + 5.x.16 + 32 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32\,.\end{aligned}$$

Exemplo 73

Determine $(a-1)^4$.

$$\begin{aligned}(a-1)^4 &= C(4,0)a^4 + C(4,1)a^3.(-1)^1 + C(4,2)a^2.(-1)^2 \\ &\qquad + C(4,3)a^1.(-1)^3 + C(4,4)(-1)^4 \\ &= a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1\,.\end{aligned}$$

Note que, no exemplo anterior, podemos tratar o caso $(x-y)^n$ como $(x+(-y))^n$. Mas,

$$(-1)^j = \begin{cases} 1 & \text{se } \; j \text{ é par} \\ -1 & \text{se } \; j \text{ é ímpar;} \end{cases}$$

portanto,

$$(-y)^n = (-1)^n . y^j = \begin{cases} y^j & \text{se } \; n \text{ é par} \\ -y^j & \text{se } \; n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Resulta que

$$(x-y)^n = x^n - C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 - \cdots$$

(sinais alternados).

Exemplo 74

Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de $(x+2)^5$.

Vimos, no Exemplo 72, que $(x+2)^5 = x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$.

Observe que a soma dos coeficientes é a soma das parcelas, tomando-se $x = 1$. Isto é, a soma é $1+10+40+80+80+32$. Ora, podemos, então, obter a soma procurada, fazendo $x = 1$ no binômio de Newton $(x+2)^5$. Assim, a resposta é $(1+2)^5 = 3^5 = 243$.

Resumo

Nesta aula estudamos o teorema binomial, que fornece os coeficientes da expansão de $(x+y)^n$.

Exercícios

1. Escreva um triângulo de Pascal até a linha 10. Use este triângulo para escrever a expansão de

   (a) $(x+y)^6$.

   (b) $(x+y)^{10}$.

   (c) $(y+3)^4$.

2. Substituindo y por (-1) na questão anterior, escreva a expansão de $(x-1)^6$.

3. Substituindo x por (-1) na expansão de $(x+1)^6$ prove que

$$C(6,0) - C(6,1) + C(6,2) - C(6,3) + C(6,4) - C(6,5) + C(6,6) = 0$$

4. Generalize o resultado da questão 3.

5. Mostre que a expansão de $(x+y)^{10}$ pode ser escrita como a soma de

$$\frac{10!}{a!b!}x^a y^b\,,$$

onde $a+b=10$.

6. Obtenha a igualdade

$$C(n,0)+C(n,1)+C(n,2)+\cdots+C(n,n)=2^n\,,$$

provada na aula 10, a partir do teorema binomial.

7. Determine a soma dos coeficientes do desenvolvimento de cada binômio de Newton abaixo:

a) $(2x+y)^5$
b) $\left(\frac{x^2}{2}-3\right)^4$
c) $(3x-5)^7$
d) $(a-1)^4$

8. Determine m sabendo que a soma dos coeficientes no desenvolvimento de $(2x+3y)^m$ é 625.

9. Desenvolva

a) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$
b) $\left(\frac{x}{2}-\frac{4}{x^2}\right)^5$

10. Calcule $(2+\sqrt{2})^4$.

11. Quantos termos existem no desenvolvimento de $(x^3+1)^6$? Qual o termo em x^6?

Apêndice: A notação de Somatório

Uma notação muito usada para indicar uma soma é o somatório, simbolizado pela letra grega sigma (em maiúsculo):

$$\sum$$

Geralmente, usamos uma variável para indicar os limites da soma e quais os termos que estão sendo somados, como em

$$\sum_{i=1}^{5} x^i = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \,.$$

Esta expressão se lê: "somatório de x elevado a i, com i variando de 1 a 5". Outro exemplo:

$$\sum_{i=1}^{3} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14,$$

que é o somatório de i ao quadrado, com i variando de 1 a 3.

A notação de somatório permite escrever de maneira mais compacta uma expressão que envolve a soma. Isto torna bem mais legíveis expressões que envolvem várias somas.

Por exemplo, usando esta notação, podemos escrever o teorema binomial na forma

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j)x^{n-j}y^j \;.$$

Esta é a mesma fórmula de antes, apenas escrita de uma maneira um pouco mais compacta.

A expressão $C(n,j)x^{n-j}y^j$ representa o termo geral da expansão do binômio de Newton $(x+y)^n$.

Exemplo 75

Determine o termo em x^4 no desenvolvimento de $(x+2)^7$.

Sabemos que o termo geral desse desenvolvimento é dado por $C(n,j)x^{n-j}y^j$, onde $n = 7, y = 2$. Queremos que o expoente de x seja 4, isto é, $n - j = 4$, ou seja, $j = n - 4 = 7 - 4 = 3$. Substituindo na expressão do termo geral, temos: $C(7,3)x^4.2^3 = \frac{7!}{4!3!}.8x^4 = 280x^4$.

Exercícios

1. Determine o valor de :

   (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4}(i-1)^2.$ (b) $\displaystyle\sum_{s=1}^{3}\frac{1}{s}.$

2. Determine o coeficiente de x^4 em $(2x+1)^8$.

3. Calcule o termo independente de x (isto é, o termo em x^0) no desenvolvimento de cada binômio de Newton abaixo:

   a) $\left(\frac{1}{x^2}-\sqrt[4]{x}\right)^{18}$.
   b) $\left(3x+\frac{2}{x}\right)^{6}$.
   c) $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

4. Calcule $\sum_{k=0}^{10}\begin{pmatrix}10\\k\end{pmatrix}3^{10-k}2^k$.

5. Determine m tal que $\sum_{p=0}^{m}\begin{pmatrix}m\\p\end{pmatrix}2^p=729$.

Soluções de exercícios selecionados

Aula 5

Exercício 1.

a) 10 b) 14 c) 16

Exercício 2.

a) 10 b) 25 c) 10

Exercício 3.

a) 65 b) 70 c) 75

Exercício 4.

a) 10 b) 12 c) 18

Exercício 5.

a) 40 b) 35 c) 65

Exercício 6.

a) 95 b) 35 c) 65 d) 15 e) 70

Exercício 7.

a) 10 b) 18 c) 73 d) 47

Aula 6

Exercício 1. Há 5 respostas possíveis para a primeira pergunta, outras 5 respostas para a segunda pergunta e assim por diante. Usando o Princípio Multiplicativo obtemos

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^6 = 15\,625$$

resultados possíveis.

Exercício 2. Para a escolha do primeiro número temos 100 possíbilidades. Para a escolha do segundo número temos 99 possibilidades. Para o terceiro restam 98 escolhas e assim por diante. Para sabermos a resposta do exercício usamos o Princípio Multiplicativo:

$$100 \times 99 \times 98 \times 97 \times 96 = 9\,034\,502\,400.$$

Isto é, nove bilhões, trinta e quatro milhões, quinhentas e duas mil e quatrocentas cartelas...

Exercício 3. Usando o Princípio Multiplicativo você deverá obter a resposta 50.

Exercício 4. Para saber quantos resultados possíveis existem, basta usar o Princípio Multiplicativo — quatro tarefas com dois possíveis resultados em cada uma delas:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 = 16.$$

Fazendo um diagrama destas dezesseis possibilidades você deverá encontrar seis resultados com exatamente duas caras e duas coroas: KKCC, KCKC, KCCK, CCKK, CKCK, CKKC.

Exercício 5. A resposta é 210.

Exercício 6. Usando o Princípio Multiplicativo descobrimos que há uma lista com 10^5 números, uma vez que dispomos de 10 dígitos $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e $9)$ para preencher cada uma das cinco posições. No entanto, a resposta do problema é

$$10^5 - 1 = 99\,999$$

pois entre os 10^5 números estamos considerando também o 00000, que devemos excluir.

Exercício 7. Note que cada central pode ter $10^4 = 10\,000$ telefones, pois podemos preencher os quatro últimos campos (2455_ _ _ _) e cada campo pode ser preenchido de dez diferentes maneiras.

Agora, o número de centrais. Podemos ter $9 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,000$ centrais. Isto porque o primeiro digito da central não pode ser 0.

Exercício 8. A resposta é 175 760 000.

Exercício 9. Supondo que estarei usando sempre o mesmo par de sapatos, um de meus cinco pares de meias, uma das minhas três calças, uma de minhas seis camisas e que posso usar ou não o meu chapéu, a resposta é

$$1 \times 5 \times 3 \times 6 \times 2 = 180$$

diferentes maneiras de me apresentar ao mundo.

Exercício 10. A resposta é $20^3 = 8\,000$.

Exercício 11. A resposta é $10^4 - 10 = 9\,990$ pois devemos subtrair os dez códigos 0000, $1111, \ldots, 9999$.

Exercício 12. Aqui é preciso ter cuidado. Caso a primeira marca seja escolhida, há $3 \times 5 = 15$ possibilidades. Caso a segunda marca seja escolhida, há

$$15 + 40 = 55$$

diferentes maneiras de escolher o carro.

De quantas maneiras ela poderia fazer isto, caso a pessoa estivesse escolhendo dois carros, um de cada marca.

Exercício 13. Este é um exercício bonito. Seguindo a sugestão, vamos começar escolhendo um dos jogos para marcar o duplo. (Podemos fazer isto de 13 maneiras diferentes.) Agora, temos 3 diferentes maneiras para marcar um duplo:

X	X	

X		X

	X	X

A primeira etapa de nossa tarefa, portanto, pode ser feita de $13 \times 3 = 39$ diferentes maneiras.

Agora temos mais 12 etapas de marcação com 3 possíveis escolhas em cada uma delas. Usando o Princípio Multiplicativo, a resposta do problema é

$$13 \times 3 \times 3^{12} = 20\,726\,199.$$

Para ter certeza que você entendeu a solução, explique por que há 6 908 733 diferentes maneiras de preencher a cartela se, em vez de marcar um duplo, o jogador marcar um triplo:

X	X	X

Aula 7

Exercício 9 a . Quaisquer duas cidades estão ligadas por um único caminho. Portanto, o vendedor ambulante tem seis opções para escolher de qual cidade partirá, seguido de cinco opções para a escolha da próxima cidade, quatro para a terceira e assim por diante. A resposta deste item é:

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720.$$

Exercício 9 b. A idéia é a mesma, mas a primeira escolha já está feita. A resposta é $5! = 120$.

Exercício 9 c. Neste caso o vendedor ambulante passará por cada cidade duas vezes. Portanto, usaremos o Princípio Multiplicativo com doze etapas. As seis primeiras etapas são idênticas às seis etapas do item a. Após ter cumprido a sexta etapa o vendedor estará em uma determinada cidade e terá, portanto, cinco escolhas para cumprir a sétima etapa. Uma vez que ele tenha feito isto, ele segue para a oitava etapa com, novamente, cinco opções, uma vez que a cidade que ele visitou na sexta etapa está no rol das cidades a visitar. Prosseguindo assim ele terá quatro escolhas para cumprir a nona etapa, três para a décima, e assim por diante, até a última etapa:

Etapas	$1^{\underline{a}}$	$2^{\underline{a}}$	$3^{\underline{a}}$	$4^{\underline{a}}$	$5^{\underline{a}}$	$6^{\underline{a}}$	$7^{\underline{a}}$	$8^{\underline{a}}$	$9^{\underline{a}}$	$10^{\underline{a}}$	$11^{\underline{a}}$	$12^{\underline{a}}$
Escolhas	6	5	4	3	2	1	5	5	4	3	2	1

A resposta é $6! \times 5 \times 5! = 432\,000$.

Aula 8

Exercício 5 a. $A(8, 2) = 8 \times 7 = 56$.

Exercício 5 b. Usando o item anterior sabemos que há 56 diferentes possíveis resultados para cada páreo. Usando o Princípio Multiplicativo obtemos a resposta deste item: $56^2 = 3\,136$.

Exercício 7. A banda ficaria realmente surpresa ao saber que há $A(15, 10) = 10\,897\,286\,400$ diferentes maneiras de gravar o CD.

Exercício 8. Veja o exemplo 49. A companhia A tem $A(6, 2) = 30$ rotas e a companhia B tem $A(4, 2) = 12$ rotas.

Para ligar os dois países são necessárias duas novas rotas ligando uma cidade de um dos países a outra cidade no outro país. Isto dá um total de $30 + 2 + 12 = 44$ rotas.

Aula 9

Exercício 1. A resposta é 90 720.

Exercício 2. A ordem é importante. A resposta é 720.

Exercício 3 a. O mesmo que o exercício anterior.

Exercício 3 b. Vamos usar o Princípio Multiplicativo. Para a primeira parte do teste temos $A(6,3)$ diferentes maneiras e $A(8,2)$ para a segunda parte.

A solução é $A(6,3) \times A(8,2) = 6 \times 5 \times 4 \times 8 \times 7 = 6\,720$.

Exercício 3 c. A solução é similar ao item anterior. A resposta é 11 670.

Exercício 3 d. Há um total de $6+8+7 = 21$ questões. A resposta é $A(21,5) = 21 \times 20 \times 19 \times 18 \times 17 = 2\,441\,880$.

Exercício 4 a. Usando o Princípio Multiplicativo: $2 \times 1 \times 4! = 48$ diferentes maneiras de cumprir as tarefas.

Exercício 4 c. Como antes. A resposta é: $2 \times A(4,2) \times 1 \times A(2,2) = 2 \times 12 \times 1 \times 2 = 48$.

Exercício 5. Vamos dividir o problema em etapas e usar o Princípio Multiplicativo.

De quantas maneiras a banda pode escolher a ordem em que visitarão os cinco países? Este é um problema de permutação simples e a resposta é $5! = 120$.

Suponha agora que a banda tenha feito sua escolha da ordem em que visitarão os países. Em cada um deles, eles visitarão 4 cidades. Portanto, em cada país, eles podem organizar sua turnê de $4! = 24$ maneiras diferentes. Logo, a cada uma das 120 escolhas da ordem dos países ela terá $24 \times 24 \times 24 \times 24 \times 24 = 24^5 = 7\,962\,624$ maneiras de escolher a seqüência das cidades.

Assim, a resposta do problema é $120 \times 7\,962\,624 = 955\,514\,880$ maneiras de escolher o itinerário.

Exercício 6 a. Veja exemplo 54. O problema é equivalente a saber de quantas maneiras podemos arranjar cinco letras L e seis letras S. A resposta é: permutações de $5+6=11$ letras com 5 e 6 repetições. Isto dá

$$\frac{P(11)}{5!6!} = 426.$$

Exercício 6 b. O problema agora divide-se em duas etapas: de casa até a banca de jornal e da banca de jornal até o trabalho. O número de caminhos em cada etapa é calculado como no item anterior. Depois, usamos o Princípio Multiplicativo. A resposta é:

$$\frac{5!}{2!3!} \times \frac{6!}{3!3!} = 20 \times 10 = 200.$$

Exercício 8. Primeiro calculamos o número de permutações lineares que começam com um homem: $5 \times 5 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 14\,400$.

Da mesma forma, há 14 400 permutações lineares que começam com uma mulher.

Há, portanto, um total de 28 800 permutações lineares. Como há uma permutação circular para cada 10 permutações lineares, a resposta do exercício é 2 880.

Exercício 9. Vamos considerar a questão de acomodar seis pessoas (o anfitrião e seus cinco convidados) em torno de uma mesa considerando que duas delas não poderão sentar-se uma ao lado da outra.

Usaremos a seguinte estratégia:

- Primeiro calcularemos de quantas maneiras podemos dispor as pessoas em torno da mesa sem fazer qualquer restrição do tipo alguém não pode sentar- se ao lado de outro alguém.
- Agora calculamos o número de maneiras que podemos dispor as pessoas em torno da mesa mas com a condição que duas delas estarão sempre uma ao lado da outra.
- A resposta do nosso problema será o primeiro número menos o segundo.

Para saber de quantas maneiras podemos dispor seis pessoas em torno de uma mesa usamos permutações cíclicas de seis elementos e obtemos $(6-1)! = 120$.

Agora consideramos duas das seis pessoas como sendo apenas uma e obtemos o número de permutações circulares de cinco elementos: $(5-1)! = 24$. Mas devemos observar que para cada uma dessas permutações, as pessoas que estão sentadas uma ao lado da outra podem alternar suas posições. Isto é, há 48 diferentes maneiras de dispor seis pessoas em torno de uma mesa considerando que duas delas estarão, sempre, uma ao lado da outra.

A resposta do nosso problema é, portanto, $120 - 48 = 72$.

Exercício 10. O motor tem $5! = 120$ ordens de explosão possíveis. Isto é o número de permutações circulares de seis elementos.

Aula 10

Exercício 6. Veja, a nota do aluno independe da ordem em que ele apresenta as questões. Portanto, a solução do problema é

$$C(6,4) = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15.$$

Exercício 7. Aqui a ordem é importante. Por exemplo, o número 245 é diferente do número 254. Este é um problema simples de arranjo de 5 elementos tomados 3 a 3. A resposta é

$$A(5,3) = \frac{5!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Exercício 8. Aqui a ordem não importa. Há 66 escolhas possíveis.

Exercício 9. Este problema é semelhante ao exemplo 64. As respostas são: (a) 1; (b) 10; (c) 5.

Exercício 10. Veja o exemplo 63. A resposta é 210.

Exercício 11. Novamente, o procedimento é o mesmo. Usa-se o Princípio Multiplicativo com 3 etapas: 2 violinistas de um conjunto de 6, 1 violista de um conjunto de 5 e 1 violoncelista de um conjunto de 4. O número de maneiras que o quarteto pode ser formado é

$$C(6,2) \times 5 \times 4 = 300.$$

Aula 11

Exercício 1. Veja que o total de maneiras de retirar 4 bolas em 10, sem levar em conta as diferentes cores, é $C(10, 4) = 210$.

a) Há seis bolas brancas. A resposta é $C(6, 4) = 15$.

b) Usamos o Princípio Multiplicativo: Primeiro, sabemos que há $C(6, 2) = 15$ diferentes maneiras de tirar 2 bolas brancas de um conjunto de 6. Analogamente, há $C(4, 2) = 6$ maneiras de retirar 2 bolas azuis de um conjunto de 4. Portanto, há $15 \times 6 = 90$ maneiras de retirar 2 bolas brancas e 2 bolas azuis.

c) Primeiro, sabemos que há $C(6, 3) = 20$ diferentes maneiras de retirar 3 bolas brancas de um conjunto de 6. Como há 4 bolas azuis, a solução é: há $20 \times 4 = 80$ diferentes maneiras de retirar 3 bolas brancas e 1 azul.

d) Há uma única maneira de retirar 4 bolas azuis.

Finalmente, observe que há $6 \times C(4, 3) = 6 \times 4 = 24$ diferentes maneiras de retirar 1 bola branca e 3 bolas azuis.

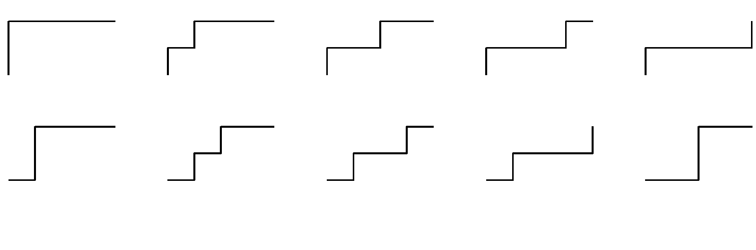
A soma deste resultados parciais totalizam as 210 maneiras de retirar 4 bolas em 10: $15 + 90 + 80 + 1 + 24 = 210$.

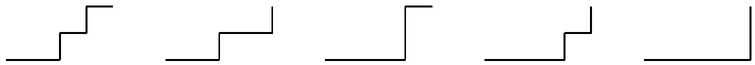
Exercício 2. A resposta do item (a) é $C(10, 6) = 210$. O item (b) tem resposta $C(5, 3) \times C(5, 3) = 10 \times 10 = 100$.

Exercício 3. A resposta é $C(10, 5) \times C(7, 4) \times C(5, 2) = 252 \times 35 \times 10 = 88\,200$.

Exercício 4. Podemos indicar o deslocamento do ônibus usando duas letras: N e L, imaginando que os pontos estão dispostos em um mapa que tem o Norte no alto da folha. Dessa forma, o ponto A está a sudeste do ponto B. O ônibus deverá deslocar-se duas quadras para o norte e quatro quadras para o leste.

Os possíveis caminhos podem ser indicados usando uma seqüência de 6 letras: duas letras N e quatro letras L. Você já resolveu problemas deste tipo antes. Agora faremos o seguinte. Devemos escolher 2 posições para as 2 letras N em 6 posições possíveis, uma vez que as outras 4 posições serão preenchidas com letras L. A resposta é $C(6, 2) = 15$.





Exercício 6. A resposta do problema é 28.

Exercício 7. A resposta do problema também é 28.

Exercício 8. Vamos usar o Princípio Multiplicativo. A primeira etapa consiste em calcular o número de subconjuntos com 4 elementos do conjunto original, com 12 elementos. Isto pode ser feito de $C(12, 4) = 495$ maneiras.

A segunda etapa consiste em encontrar quantos subconjuntos de 4 elementos tem o complementar do conjunto escolhido na primeira etapa. Isto é $C(8, 4) = 70$.

Vamos para a terceira etapa. Já escolhemos dois subconjuntos de 4 elementos, ambos disjuntos. Restam, portanto, 4 elementos. Temos de escolher mais um subconjunto, agora com 2 elementos. Seu complementar também terá 2 elementos. Isto pode ser feito de $C(4, 2) = 6$ maneiras. O conjunto original será igual à união disjunta destes quatro subconjuntos: um obtido na primeira etapa, outro na segunda e mais dois na terceira.

A resposta do problema é $495 \times 70 \times 6 = 207\,900$.

Exercício 9. Use a mesma tática que foi usada no exercício anterior para encontrar a resposta $126 \times 6 = 756$.