Álgebra Linear I

Resolução dos Exercícios Programados 1 – EP1

Caro aluno, esta é a primeira lista de exercícios programados (EP1). Ela contém exercícios referentes às aulas 1, 2 e 3 do seu módulo. O seu objetivo é que você possa testar sua compreensão e aplicação dos conceitos. O EP não é um resumo e nem suficiente para o entendimento dos conteúdos a serem assimilados. Antes de fazê-lo é muito importante que você assimile as definições, repita as soluções dos exemplos, reescreva as definições, refaça as demonstrações e resolva os exercícios propostos. Consulte a bibliografia recomendada e leia abordagens diferentes do mesmo conteúdo para melhorar sua cultura e adquirir uma melhor visão do assunto. Antes de passar para uma nova aula esclareça suas dúvidas, procurando os tutores. Não acumule dúvidas. Organize seu tempo e seja disciplinado no estudo. Bons estudos e até a próxima semana!

Marina Tebet

1. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Encontre, se possível, $A + B$, $A + C$, $3A - 4B$ e C^T.

Solução.

$A + B = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, $A + C$ não definido, $3A - 4B = \begin{bmatrix} -13 & -3 & 18 \\ 4 & 17 & 0 \end{bmatrix}$,

$$C^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Uma matriz quadrada A se diz simétrica se $A^T = A$ e anti-simétrica se $A^T = -A$. Mostre que a soma de duas matrizes simétricas é também simétrica e que o mesmo ocorre para matrizes anti-simétricas.

Solução.

Sejam A e B duas matrizes anti-simétricas de mesma ordem n.

Desse modo $A^T = -A$ e $B^T = -B$.

$(A + B)^T = A^T + B^T = -A + (-B) = -(A + B)$, logo $A + B$ é também anti-simétrica.

Analogamente, sejam A e B matrizes simétricas de ordem n.
Temos, assim: $(A + B)^T = A^T + B^T = A + B$, logo $A + B$ é uma matriz simétrica de ordem n.

3. Determine a e b para que a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2a-b \\ a+b & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ seja simétrica.

Solução.

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & a+b & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2a-b & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Para que A seja simétrica,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2a-b \\ a+b & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & a+b & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2a-b & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$\begin{cases} a+b=4 \\ 2a-b=-1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}.$$

4. Se A é uma matriz simétrica, calcule $A - A^T$.

Solução.

Supondo A uma matriz simétrica, $A = A^T$. Então, $A - A^T$ é uma matriz nula.

5. Se A é uma matriz diagonal, calcule A^T.

Solução.

Se A é uma matriz diagonal ela é simétrica. Logo, pelo exercício anterior $A^T = A$.