Aula 13 – Teoremas de Limites de Funções

Metas da aula: Estabelecer as propriedades fundamentais dos limites de funções face às operações de soma, subtração, produto e quociente de funções, bem como em relação às desigualdades envolvendo funções.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber as propriedades dos limites de funções no que diz respeito às operações de soma, subtração, produto e quociente de funções, assim como em relação às desigualdades envolvendo funções, e suas aplicações no estabelecimento de limites de funções.

Nesta aula vamos estabelecer as principais propriedades dos limites de funções relativas às operações e às desigualdades envolvendo funções. Os resultados aqui obtidos serão extremamente úteis no cálculo de limites de funções. Esses resultados são análogos aos teoremas de limites de seqüências vistos na Aula . De fato, na maioria dos casos eles podem ser provados usando-se o Critério Seqüencial (Teorema 12.4) juntamente com os resultados da Aula . Claramente, eles também podem ser provados por meio de argumentos do tipo ε, δ que são muito semelhantes aos utilizados na Aula .

Operações com Limites de Funções

Inicialmente vamos estabelecer um resultado sobre a limitação de funções na vizinhança de pontos nos quais elas possuam limites. Antes porém vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 13.1
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x}$ um ponto de acumulação de X. Dizemos que f é **limitada numa vizinhança de** $\bar{x}$ se existe uma δ-vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ e uma constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \le M$ para todo $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$.

Teorema 13.1
Se $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x}$ é ponto de acumulação de X e $f : X \to \mathbb{R}$ possui um limite em $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então f é limitada em alguma vizinhança de $\bar{x}$.

Prova: Seja $L := \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$. Tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x-\bar{x}| < \delta$, então $|f(x) - L| < 1$ e, portanto,

$$|f(x)| = |(f(x) - L) + L| \le |f(x) - L| + |L| < |L| + 1.$$

Logo, se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$ e $x \neq \bar{x}$, então $|f(x)| \leq |L|+1$. Façamos $M := |L|+1$, caso $\bar{x} \notin X$, ou então $M := \max\{|f(\bar{x})|, |L|+1\}$, caso $\bar{x} \in X$. Segue que se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$, então $|f(x)| \leq M$, o que mostra que f é limitada numa vizinhança de $\bar{x}$.

□

Dadas duas funções $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definimos sua **soma** $f+g$, **diferença** $f-g$ e **produto** fg de modo natural pondo

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f-g)(x) := f(x) - g(x),$$
$$(fg)(x) := f(x)g(x),$$

respectivamente, para todo $x \in X$. Se $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, definimos o quociente f/g também de modo natural pondo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Finalmente, se $c \in \mathbb{R}$, definimos a função cf de maneira óbvia pondo

$$(cf)(x) := cf(x) \qquad \text{para todo } x \in X.$$

A seguir estabelecemos o principal resultado sobre operações com limites de funções.

Teorema 13.2

Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que existam $L_f := \lim_{x \to \bar{x}} f$ e $L_g := \lim_{x \to \bar{x}} g$. Então existem

$$L_{f+g} := \lim_{x \to \bar{x}} (f+g), \qquad L_{f-g} := \lim_{x \to \bar{x}} (f-g),$$
$$L_{fg} := \lim_{x \to \bar{x}} (fg), \qquad L_{cf} := \lim_{x \to \bar{x}} (cf),$$

e valem as seguintes igualdades

$$L_{f+g} = L_f + L_g, \qquad L_{f-g} = L_f - L_g,$$
$$L_{fg} = L_f L_g, \qquad L_{cf} = cL_f.$$

Além disso, se $L_g \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, então existe

$$L_{\frac{f}{g}} := \lim_{x \to \bar{x}} \left(\frac{f}{g}\right)$$

e vale

$$L_{\frac{f}{g}} = \frac{L_f}{L_g}.$$

Prova: A prova desse teorema pode ser feita com argumentos do tipo ε, δ inteiramente análogos àqueles usados na prova do Teorema 7.2. De modo alternativo, podemos usar o Teorema 7.2 e o Teorema 12.4 (Critério Seqüencial). De fato, seja (x_n) uma seqüência qualquer em X com $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e tal que $x_n \to \bar{x}$. Segue do Teorema 12.4 que

$$\lim f(x_n) = L_f, \qquad \lim g(x_n) = L_g.$$

Assim, pelo Teorema 7.2 temos que

$$\begin{aligned}
\lim(f+g)(x_n) &= \lim(f(x_n)+g(x_n)) = L_f + L_g,\\
\lim(f-g)(x_n) &= \lim(f(x_n)-g(x_n)) = L_f - L_g,\\
\lim(fg)(x_n) &= \lim(f(x_n)g(x_n)) = L_f L_g,\\
\lim(cf)(x_n) &= \lim cf(x_n) = cL_f.
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, se $L_g \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, temos pelo Teorema 7.2 que

$$\lim \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{L_f}{L_g}.$$

□

Observação 13.1

(i) Observemos que a hipótese $L_g \neq 0$ é essencial para que valha a regra para o limite do quociente f/g no Teorema 13.2. Se essa hipótese não é satisfeita, o limite pode existir ou não. Porém, mesmo no caso em que ele existe, não podemos usar o Teorema 13.2 para calculá-lo.

(ii) Seja $X \subset \mathbb{R}$, sejam $f_1, f_2, \dots, f_n : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$L_k := \lim_{x\to\bar{x}} f_k \qquad \text{para } k = 1, 2, \dots, n,$$

então segue do Teorema 13.2 por Indução Matemática que

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n) = L_1 + L_2 + \cdots + L_n,$$

e

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f_1 f_2 \cdots f_n) = L_1 L_2 \cdots L_n.$$

Em particular, deduzimos que se $L := \lim_{x\to\bar{x}} f$ e $n \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}}(f(x))^n = L^n.$$

Exemplos 13.1

(a) $\lim_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De fato, como $\lim_{x\to\bar{x}} x = \bar{x}$, então pela Observação 13.1 (ii) segue que $\lim_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ como afirmado.

(b) $\lim_{x\to 1}(x^2+3)(2x^3-5) = -12$.

Segue do Teorema 13.2 que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(x^2+3)(2x^3-5) &= \Big(\lim_{x\to 1}(x^2+3)\Big)\Big(\lim_{x\to 1}(2x^3-5)\Big)\\ &= 4\cdot(-3) = -12.\end{aligned}$$

(c) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^3-2}{x^2+3}\right) = 2$.

Como $\lim(x^3+3) = 7 \neq 0$, podemos aplicar o Teorema 13.2 obtendo

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3-2}{x^2+3} = \frac{\lim_{x\to 2}(2x^3-2)}{\lim_{x\to 2}(x^2+3)} = \frac{14}{7} = 2.$$

(d) $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}\right) = -12$.

Observe que não é possível aplicar diretamente o Teorema 13.2 já que

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6) = \lim_{x\to 2} x^2 - 5\lim_{x\to 2} x + 6 = 4 - 5\cdot 2 + 6 = 0.$$

No entanto, para calcular o limite proposto basta considerar $x \in X := (1,3)$ com $x \neq 2$. Para $x \in X\setminus\{2\}$, temos que $x^2-5x+6 = (x-2)(x-3) \neq 0$ e, como $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^3-8}{x^2-5x+6}\right) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x-3}\\ &\frac{\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)}{\lim_{x\to 2}(x-3)} = \frac{12}{-1} = -12.\end{aligned}$$

(e) Se p é uma função polinomial, então $\lim_{x\to\bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$.

Seja p uma função polinomial em $\mathbb{R}$ de modo que $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Segue do Teorema 13.2 e do fato que $\lim_{x\to\bar{x}} x^k = \bar{x}^k$ que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\bar{x}} p(x) &= \lim_{x\to\bar{x}}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0)\\ &= a_n \lim_{x\to\bar{x}} x^n + a_{n-1}\lim_{x\to\bar{x}} x^{n-1} + \cdots + a_1 \lim_{x\to\bar{x}} x + \lim_{x\to\bar{x}} a_0\\ &= a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + \cdots + a_1\bar{x} + a_0\\ &= p(\bar{x}).\end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x\to\bar{x}} p(x) = p(\bar{x})$ para qualquer função polinomial p.

(f) Se p e q são funções polinomiais em $\mathbb{R}$ e se $q(\bar{x}) \neq 0$, então

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})}.$$

Como q é uma função polinomial, segue de um teorema bastante conhecido em Álgebra que existem no máximo um número finito de valores $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tais que $q(\alpha_j) = 0$ e tais que $q(x) \neq 0$ se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Portanto, se $x \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$, podemos definir

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Pelo item (e) temos que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} q(x) = q(\bar{x}) \neq 0$. Logo, podemos aplicar o Teorema 13.2 para concluir que

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\bar{x}} p(x)}{\lim\limits_{x\to\bar{x}} q(x)} = \frac{p(\bar{x})}{q(\bar{x})},$$

como afirmado.

Desigualdades e Limites de Funções

O próximo resultado é o análogo do Teorema 7.5.

Teorema 13.3
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$a \leq f(x) \leq b \qquad \text{para todo } x \in X,\ x \neq \bar{x},$$

e se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe, então $a \leq \lim\limits_{x\to\bar{x}} f \leq b$.

Prova: De fato, se $L := \lim\limits_{x\to\bar{x}} f$, então segue do Teorema 12.4 que se (x_n) é qualquer seqüência em $\mathbb{R}$ tal que $x_n \neq \bar{x}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e se $x_n \to \bar{x}$, então a seqüência $(f(x_n))$ converge a L. Como $a \leq f(x_n) \leq b$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue do Teorema 7.5 que $a \leq L \leq b$.

□

A seguir estabelecemos o análogo do Teorema do Sanduíche 7.6. A prova é uma aplicação imediata do Teorema 12.4 combinado com o Teorema 7.6. Deixamos os detalhes da prova para você como exercício.

Teorema 13.4
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad \text{para todo } x \in X,\ x \neq \bar{x},$$

e se $\lim_{x\to\bar{x}} f = \lim_{x\to\bar{x}} h =: L$, então $\lim_{x\to\bar{x}} g = L$.

O próximo resultado é às vezes chamado de Princípio da Preservação do Sinal pois ele afirma que se o limite de uma função num certo ponto é positivo (negativo), então a função é positiva (negativa) em toda uma vizinhança do ponto com exceção possivelmente do seu valor no próprio ponto.

Teorema 13.5
Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Se

$$\lim_{x\to\bar{x}} f > 0 \qquad (\text{respectivamente, } \lim_{x\to\bar{x}} f < 0),$$

então existe uma vizinhança $V_\delta(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que $f(x) > 0$ (respectivamente, $f(x) < 0$) para todo $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$.

Prova: Seja $L := \lim_{x\to\bar{x}} f$ e suponhamos que $L > 0$. Tomemos $\varepsilon = \frac{1}{2}L$ na Definição 12.2 para obter $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in X$, então $|f(x) - L| < \frac{1}{2}L$. Segue daí que $f(x) > \frac{1}{2}L > 0$ (por quê?) se $x \in X \cap V_\delta(\bar{x})$ e $x \neq \bar{x}$.

Argumento inteiramente semelhante se aplica no caso em que $L < 0$.

□

Exemplos 13.2

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^{5/4}}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} = 0$ $(x > 0)$.

Se $0 < x \leq 1$, então $1 < x^{3/2} + x^{1/2} + 1 \leq 3$ e $x^2 \leq x^{5/4} \leq x$ (por quê?). Portanto, temos

$$\frac{1}{3}x^2 \leq \frac{x^{5/4}}{x^{3/2} + x^{1/2} + 1} \leq x.$$

Como $\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{x\to 0} x = 0$, a afirmação segue do Teorema 13.4.

(b) $\lim_{x\to 0}(x \operatorname{sen}(1/x)) = 0$.

Seja $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$. Como $-1 \leq \operatorname{sen} u \leq 1$ para todo $u \in \mathbb{R}$, temos a desigualdade $|f(x)| \leq |x|$, ou seja,

$$-|x| \leq f(x) = x \operatorname{sen}(1/x) \leq |x|$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Como $\lim_{x\to 0} |x| = 0$, segue do Teorema 13.4 que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Veja o gráfico de f na Figura **13.1**.

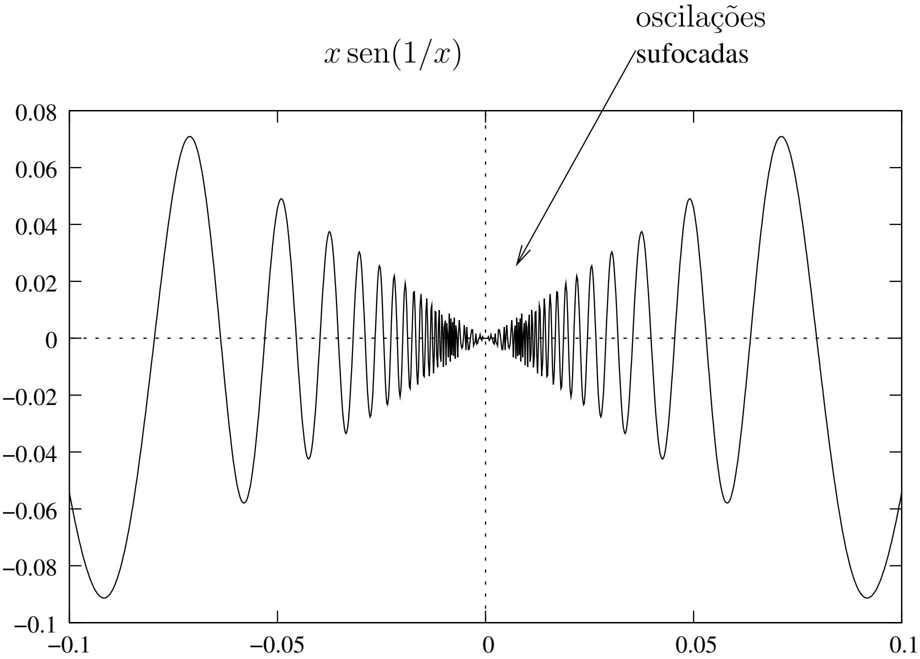

Figura **13.1**: A função $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$.

Exercícios 13.1

1. Aplique o Teorema 13.2 para determinar os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)(4x^3-3)$ $(x \in \mathbb{R})$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2}{x^2-1}$ $(x > 1)$;

   (c) $\lim\limits_{x\to 5}\left(\dfrac{1}{2x-3}-\dfrac{1}{x-4}\right)$ $(x > 4)$;

   (d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-5}{x^2+3}$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X.

   (a) Se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe e se $|f|$ é a função definida em X por $|f|(x) := |f(x)|$, prove que
   $$\lim_{x\to\bar{x}} |f| = |\lim_{x\to\bar{x}} f|.$$

   (b) Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, se $\lim\limits_{x\to\bar{x}} f$ existe e se $\sqrt{f}$ é a função definida em X por $\sqrt{f}(x) := \sqrt{f(x)}$, prove que
   $$\lim_{x\to\bar{x}} \sqrt{f} = \sqrt{\lim_{x\to\bar{x}} f}.$$

3. Determine os seguintes limites e diga que teoremas são usados em cada caso. (Você pode usar também o exercício anterior.)

   (a) $\lim_{x\to 3} \sqrt{\dfrac{5x+1}{2x+3}}$ $(x>0)$;

   (b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ $(2<x<3)$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x}$ $(x>0)$;

   (d) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$ $(0<x<2)$.

4. Encontre $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2+x}}{x+3x^2}$ onde $x>0$.

5. Prove que $\lim_{x\to 0} \cos(1/x)$ não existe mas que $\lim_{x\to 0} x\cos(1/x)=0$.

6. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Suponhamos que f é limitada numa vizinhança de $\bar{x}$ e que $\lim_{x\to\bar{x}} g = 0$. Prove que $\lim_{x\to\bar{x}} fg = 0$.

7. Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulaçào de X.

   (a) Mostre que se ambos $\lim_{x\to\bar{x}} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}} (f+g)$ existem, então $\lim_{x\to\bar{x}} g$ existe.

   (b) Se $\lim_{x\to\bar{x}} f$ e $\lim_{x\to\bar{x}} fg$ existem, segue que $\lim_{x\to\bar{x}} g$ existe?

8. Determine se os seguintes limites existem em $\mathbb{R}$.

   (a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x\neq 0)$;

   (b) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x\neq 0)$;

   (c) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn} \operatorname{sen}(1/x)$ $(x\neq 0)$;

   (d) $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} \operatorname{sen}(1/x^2)$ $(x>0)$.