Matemática Discreta – AD2 – 2006/2

Observações: Caro tutor, aqui está a AD2, referente as aulas 14—22 do Módulo 2. Ela cobre, praticamente, todos so conteúdos abordados no Módulo mas a ênfase é dada nos conceitos básicos de probabilidade e no uso de técnicas de contagem para o cálculo de probabilidades.

Na resolução das questões, eu assumi que todos os eventos simples são equiprováveis, ou seja, que todos os objetos (tais como bolas, dados e baralhos) não são viciados.

Para finalizar: tenha sempre em mente que *em nossa disciplina, freqëntemente os alunos elaboram soluções, corretas ou parcialmente corretas, diferentes daquelas propostas no gabarito. Quando isso acontecer, você pode agir com autonomia e redefinir o critério para contemplar aquela solução ou, se achar necessário, entra em contato comigo para que possamos discutir a melhor maneira de proceder.*

Soluções comentadas:

1. Uma caixa contém bolas, sendo 8 vermelhas, 3 brancas e 9 azuis. Se três bolas são retiradas ao acaso, sem reposição, determine a probabilidade que:
   (a) (0,5) todas as três sejam vermelhas;
   (b) (0,5) duas sejam vermelhas e uma seja azul;
   (c) (0,5) ao menos uma seja branca;
   (d) (0,5) cada uma seja de uma cor distinta.

Solução:

Considere o espaço amostral Ω de todos os subconjuntos de 3 bolas formados com bolas retiradas da caixa, que contém 20 bolas.

(a) Considere o evento:

$$A: \text{as três bolas retiradas são vermelhas.}$$

O evento A contém $C(8,3)$ elementos. O espaço amostral contém $C(20,3)$ elementos.

Logo, a probabilidade procurada é $P(A) = \dfrac{C(8,3)}{C(20,3)} = \dfrac{14}{285}$.

(b) Considere o evento:

$$B: \text{são retiradas duas bolas vermelhas e uma bola azul.}$$

Cada elemento de B é um subconjunto formados por duas bolas vermelhas e uma bola azul. Assim, o evento B contém $C(8,2) \times C(3,1)$ elementos.

O espaço amostral contém $C(20,3)$ elementos.

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento B é $P(E) = \dfrac{C(8,2) \times C((3,1)}{C(20,3)} = \dfrac{7}{95}$.

(c) Considere o evento:

$$C : \text{nenhuma das três bolas retiradas são brancas}$$

que é o complementar do evento

$$D : \text{ao menos uma das bolas retiradas é branca.}$$

O evento C contém $C(17,3)$ elementos. O espaço amostral contém $C(20,3)$ elementos.

Logo, a probabilidade de ocorrer o evento C é $P(C) = \dfrac{C(17,3)}{C(20,3)} = \dfrac{34}{57}$.

Assim, a probabilidade procurada é $P(D) = 1 - \dfrac{C(17,3)}{C(20,3)} = \dfrac{23}{57}$.

(d) Considere o evento:

$$E : \text{uma bolas de cada cor é retirada.}$$

Cada elemento de E é um subconjunto formado por uma bola vermelha, uma bola branca e uma bola azul. Assim, o evento E contém $C(8,1) \times C(3,1) \times C(9,1)$ elementos.

O espaço amostral contém $C(20,3)$ elementos.

Assim, a probabilidade procurada é $P(E) = \dfrac{C(8,1) \times C(3,1) \times C(9,1)}{C(20,3)} = \dfrac{18}{95}$.

---

2. (2,0) Determine a probabilidade de obter exatamente 3 ocorrências da face seis em 5 arremessos de um dado.

Solução:

Considere o espaço amostral Ω de todas quíntuplas ordenadas de números pertencentes ao conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$, dos resultados possíveis para os arremessos de um dado.

Considere o evento:

$$A : \text{exatamente três ocorrências de } 6.$$

Para formar um elemento de A devemos executar três tarefas:

$$T_1 : \text{escolher três posições para colocar as ocorrências de } 6,$$

$$T_2 : \text{escolher } 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5 \text{ para ocupar uma posição restante},$$

$$T_3 : \text{escolher } 1, 2, 3, 4 \text{ ou } 5 \text{ para ocupar a posição restante}.$$

Assim, o evento A contém $C(5,3) \times 5 \times 5$ elementos. O espaço amostral contém 6^5 elementos.

Logo, a probabilidade procurada é $P(A) = \dfrac{C(5,3) \times 5 \times 5}{6^5} = \dfrac{125}{3.888}$.

---

3. (2,0) Uma prateleira de uma biblioteca tem 6 livros distintos de matemática e 4 livros distintos de física. Determine a probabilidade de que ela esteja arrumada de maneira que 3 livros, previamente determinados, de matemática estejam lado a lado.

Solução:

Os livros podem ser arrumados de 10! maneiras diferentes, sem restrições.

Para arrumar os livros de modo que os 3 livros, previamente determinados, de matemática estejam lado a lado, devemos executar duas tarefas:

T_1 : escolher uma ordem para arrumar os 3 livros previamente determinados,

T_2 : arrumar os livros, considerando os 3 livros já ordenados como 1 só.

Assim, existem $3! \times 8!$ maneiras de arrumar os livros de modo que os 3 livros, previamente determinados, de matemática estejam lado a lado.

Logo, a probabilidade procurada é $\dfrac{3! \times 8!}{10!} = \dfrac{1}{15}$.

---

4. Uma urna contém 4 bolas brancas e 2 bolas pretas. Uma outra urna contém 3 bolas brancas e 5 bolas pretas. Se uma bola é retirada aleatoriamente de cada urna, encontrar a probabilidade de que:

(a) (0,5) ambas sejam brancas;

(b) (1,5) uma seja branca e a outra seja preta.

Solução:

Considere os eventos:

$$A: \text{a bola retirada da primeira urna é branca,}$$

$$B: \text{a bola retirada da segunda urna é branca,}$$

que são os complementares dos eventos:

$$C: \text{a bola retirada da primeira urna é preta,}$$

$$D: \text{a bola retirada da segunda urna é preta.}$$

(a) Considere o evento:

$$A \cap B: \text{ambas as bolas retiradas são brancas.}$$

Temos que $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B)$, dado que A e B são independentes. Assim, $P(A \cap B) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$.

(b) Considere o evento:

$$(A \cap D) \cup (C \cap B): \text{uma bola retirada é branca e a outra é preta.}$$

Temos que $P(A \cap D) \cup (C \cap B) = P(A \cap D) + P(C \cap B)$, dado que $A \cap D$ e $C \cap B$ são mutuamente exclusivos. Também, temos que $= P(A \cap D) = P(A)P(B)$, pois A e D são independentes e $P(C \cap B) = P(C)P(B)$, pois B e C são independentes.

Assim, $P(A \cap D) \cup (C \cap B) = P(A)P(D) + P(C)P(B) = \frac{4}{6} \times \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{13}{24}$.

---

5. (2,0) Uma caixa I contém 3 cubos vermelhos e 2 cubos azuis enquanto que uma caixa II contém 2 cubos vermelhos e 8 cubos azuis. Uma moeda honesta é arremessada e sua face superior é observada. Se o resultado do arremesso for cara, um cubo é escolhido da caixa I; se o resultado for coroa, um cubo é escolhido da caixa II. Determine a probabilidade de uma bola vermelha ser escolhida.

Solução:

Considere os eventos:

$$A: \text{uma bola vermelha é escolhida,}$$

$$K: \text{o resultado do lançamento da moeda é cara,}$$

$$C : \text{o resultado do lançamento da moeda é coroa,}$$
$$V_1 : \text{uma bola vermelha é escolhida da caixa I,}$$
$$V_2 : \text{uma bola vermelha é escolhida da caixa II,}$$

O evento A pode ser particionado nos eventos $K \cap V_1$ e $C \cap V_2$. Assim, $P(A) = P(K)P(V_1|K) + P(C)P(V_2|C) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{2}{5}$.