Aula 1 – Conceitos Básicos

A Geometria Elementar, também chamada *Geometria Euclidiana*, fundamenta-se em três entes geométricos aceitos sem definição: ponto, reta e plano.

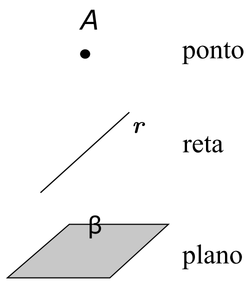
Representação

pontos: $A, B, C, \ldots$

retas: $a, b, c, \ldots$

planos: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

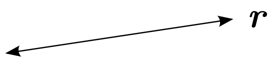
Notação:



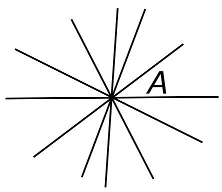
Indicaremos por $\overleftrightarrow{AB}$ uma reta que passa pelo pontos A e B.

Postulado ou axioma é uma proposição aceita como verdadeira, sem demonstração.
Vamos dar exemplos de axiomas ou postulados.

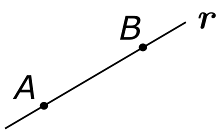
1. A reta é ilimitada nos dois sentidos.



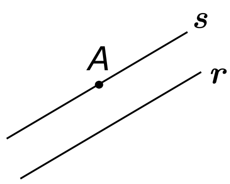
2. Por um ponto passam infinitas retas.



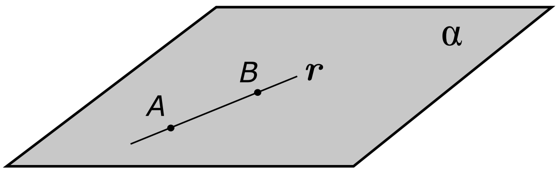
3. Por dois pontos distintos passa uma e somente uma reta.



4. Por um ponto, não pertencente a uma reta r, é possível traçar uma e somente uma reta paralela s. Este postulado é chamado de Postulado de Euclides.



5. Toda reta que passa por dois pontos distintos de um plano está contida nesse plano.



6. Um ponto O, de uma reta, divide-a em duas regiões denominadas semi-retas. O é denominado origem das duas semi-retas.

Notação: $\overrightarrow{OA}$

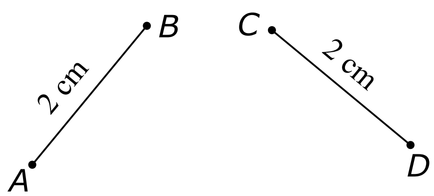
Definição: Dados dois pontos A e B de uma reta r, denomina-se segmento de reta AB a todos os pontos de r entre A e B. A e B são chamados de extremos.

Notação: $\overline{AB}$

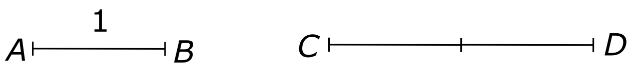
medida de um segmento $AB = m$(AB)

Definição: Segmentos congruentes tem medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que tem medidas iguais são congruentes.

$$AB \equiv CDsem(AB) = m(CD)$$

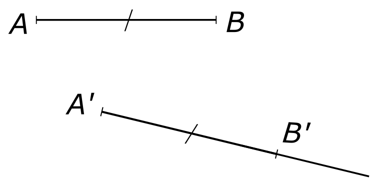


Medida de um Segmento: Para medir segmentos, tomamos um segmento como unidade e a partir daí, podemos medir qualquer outro segmento.

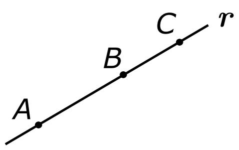


$\overline{CD} = 2\ m(\text{AB})$

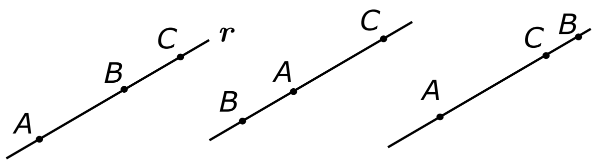
7. Postulado do Transporte de Segmentos: Dados um segmento AB e uma semi-reta de origem A', existe sobre essa semi-reta um único B' tal que $A'B' \equiv AB$.



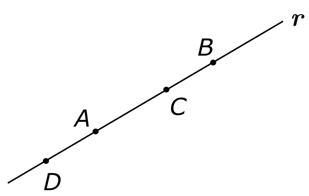
Definição: Pontos colineares são pontos que pertencem à uma mesma reta.



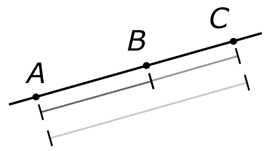
8. Dados três pontos colineares e distintos dois a dois, um deles, e apenas um, está entre os outros dois.



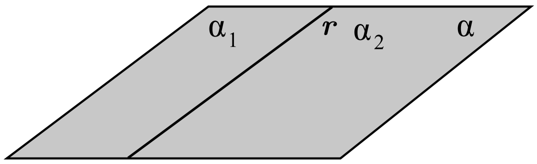
9. Dados dois pontos distintos A e B de uma reta r, existe sempre um ponto C que está entre A e B, e um ponto D tal que A está entre D e B.



10. Se B está entre A e C, então $m(\mathrm{AC}) = \mathrm{m(AB)} + \mathrm{m(BC)}$



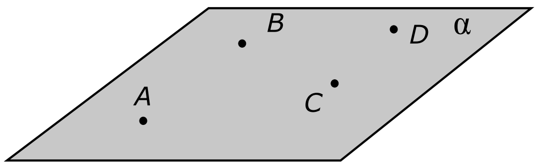
11. Uma reta pertencente a um plano, divide-o em duas regiões chamadas semiplanos sendo r a reta origem dos dois semiplanos.



*T*eorema é uma proposição aceita como verdadeira mediante demonstração.

*C*orolário é um resultado imediato de um teorema.

Pontos *c*oplanares são pontos que pertencem a um mesmo plano.



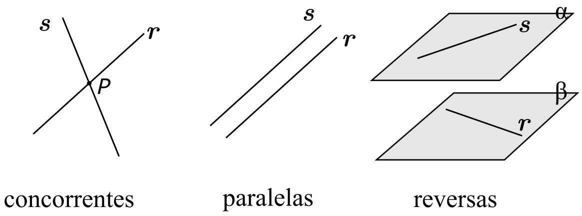
12. Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

Posições relativas entre duas retas distintas: Duas retas r e s são:

1) concorrentes se sua interseção é um ponto.

2) paralelas se são coplanares e não tem ponto em comum.

3) reversas se não são coplanares.



Exercícios Resolvidos

1. Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).

a) Por um ponto passam infinitas retas.( )

b) Por três pontos dados passa uma só reta.( )

c) Três pontos distintos são colineares.( )

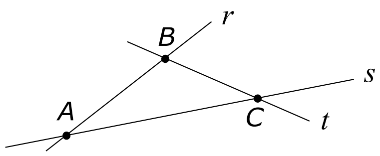
d) Duas retas coplanares e distintas são concorrentes ou paralelas.( )

e) Duas retas que não têm ponto em comum são paralelas.( )

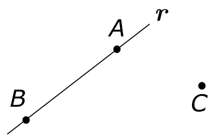
Solução:

a) (V), axioma.

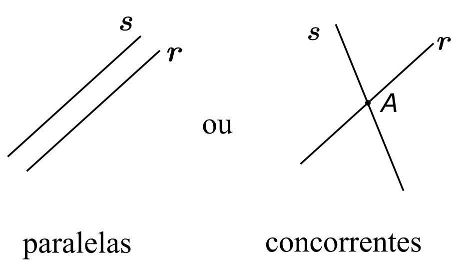
b) (F), por três pontos passam três retas.



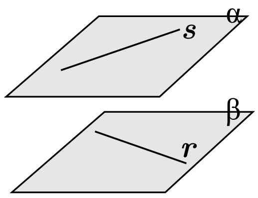
c) (F), três pontos distintos não são colineares.



d) (V),



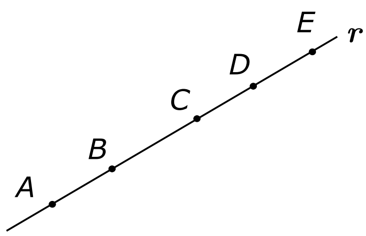
e) (F), pois elas podem ser reversas e nessa caso não são paralelas.



reversas

2. Quantas semi-retas há em uma reta com origem nos cinco pontos A, B, C, D e E?

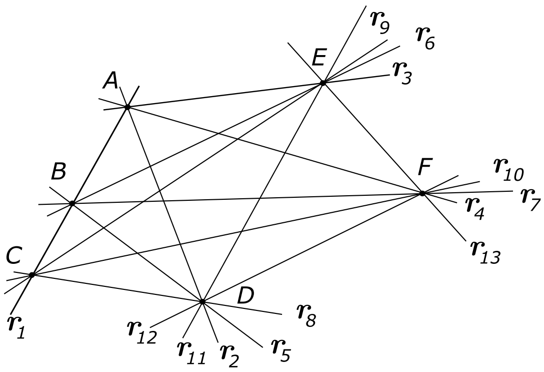
Solução:
Seja r a reta, e A, B, C, D, E pontos pertencentes a esta reta r.



Pelo axioma 6, cada ponto determina duas semi-retas, então 5 pontos determinam 10 semi-retas.

3. Por seis pontos todos distintos, sendo três deles colineares, quantas retas podemos construir?

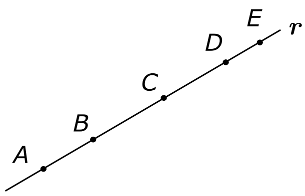
Solução:
Considere seis pontos A, B, C, D, E, F distintos, sendo três deles (A, B e C) colineares, vamos construir todas as retas possíveis, usando o axioma 3.



São 13 retas.

Exercícios Propostos

1. Quantos segmentos há em uma reta, com origem nos cinco pontos distintos, dada na figura a seguir?



2. A, B e C são três pontos distintos numa reta. Se $\overline{AB}$ é igual ao dobro de $\overline{BC}$ e $\overline{AC} = 18$ cm, determine $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$.

3. O segmento $\overline{AB}$ de uma reta é igual ao quíntuplo do segmento $\overline{CD}$ dessa mesma reta. Determine a medida do segmento $\overline{AB}$, considerando-se como unidade de medida a sexta parte do segmento $\overline{CD}$.

Gabarito

1. 10.

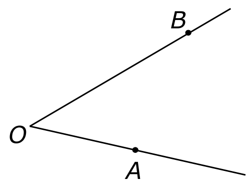
2. $\overline{AB} = 12$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm ou $\overline{AB} = 36$ cm e $\overline{BC} = 18$ cm.

3. 30.

Ângulos

Definição: Ângulo geométrico é a reunião de duas semi-retas de mesma origem e não colineares.

Notação: $A\widehat{O}B$, onde O é o vértice.

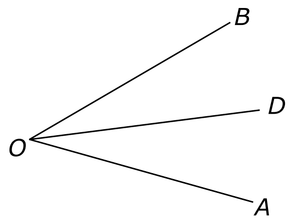


As semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.

Axioma 13: Um ângulo pode ser medido por meio de um instrumento chamado transferidor, que tem o grau como unidade. O número de graus de um ângulo é a sua medida. A medida de um ângulo geométrico é um número real α, tal que $0 < \alpha < 180^{\underline{o}}$.

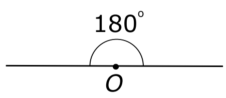
Notação: $A\widehat{O}B$: ângulo geométrico
$m(A\widehat{O}B)$: medida do ângulo $A\widehat{O}B$

Se $\overrightarrow{OD}$ é uma semi-reta que divide $A\widehat{O}B$, então $m(A\widehat{O}D) + m(D\widehat{O}B) = m(A\widehat{O}B)$.

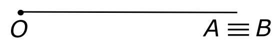


Nota:

1) O ângulo de $180^{\underline{o}}$ é chamado *raso* e é quando os lados são semi-retas opostas.

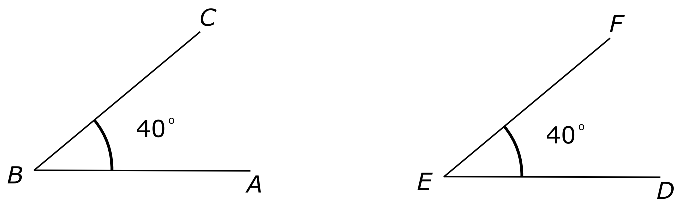


2) O ângulo de $0^{\underline{o}}$ é quando os lados coincidem.



3) Toda vez que houver referência a ângulo, entenda-se ângulo geométrico.

4) Dois ângulos são chamados *c*ongruentes se têm a mesma medida, na mesma unidade.
Exemplo:



Os ângulos $A\widehat{B}$C e DÊF na figura são congruentes.
Notação: $A\widehat{B}$C $\equiv$ DÊF.

Setor angular, interior de um ângulo, exterior de um ângulo

Definição: Seja um ângulo $A\widehat{O}$B num plano α e consideremos os semiplanos α_1 de origem na reta $\overleftrightarrow{OA}$ que contém o lado $\overrightarrow{OB}$ e α_2, de origem na reta $\overrightarrow{OB}$ e que contém $\overrightarrow{OA}$ conforme a Figura 1. O conjunto dos pontos comuns aos semiplanos α_1 e α_2 denominamos de *s*etor angular. A Figura 2 mostra um setor angular.

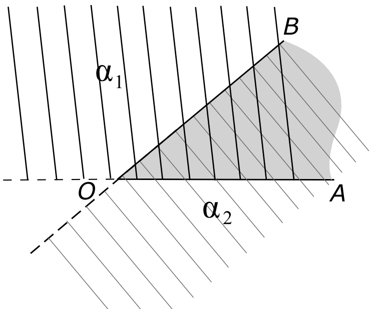


Fig. 1

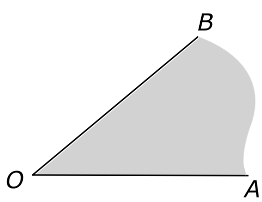
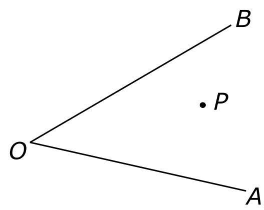
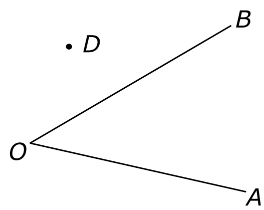


Fig. 2

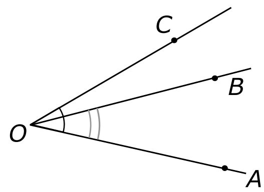
Definição: Um ponto que pertence ao setor angular e não pertence ao ângulo diz-se *p*onto interior ao ângulo A$\widehat{O}$B.



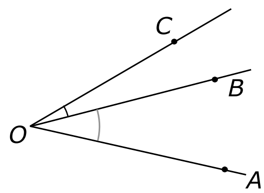
Definição: Um ponto do plano do ângulo que não pertence ao setor angular diz-se *p*onto exterior ao ângulo. O ponto D, na figura, é exterior ao ângulo $A\widehat{O}$B.



Definição: Ângulos que possuem o mesmo vértice e um lado comum são denominados ângulos consecutivos. Os ângulos $A\widehat{O}$B e $A\widehat{O}$C são consecutivos.

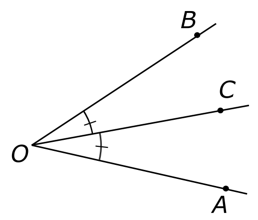


Definição: Dois ângulos consecutivos que não possuem ponto interior comum são denominados ângulos adjacentes.

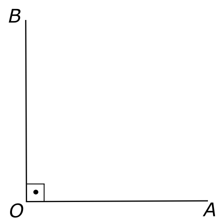


Os ângulos $A\widehat{O}$B e $B\widehat{O}$C são adjacentes.

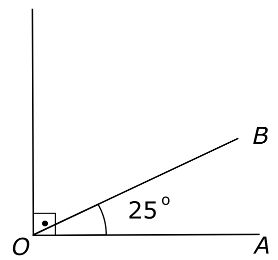
Definição: Bissetriz de um ângulo é a semi-reta interior ao ângulo, que determina com os seus lados, dois ângulos adjacentes e congruentes. Na figura, $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$.



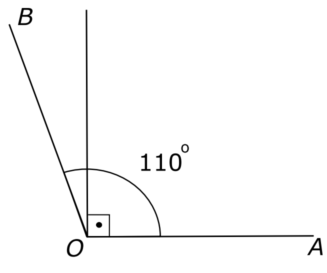
Definição: Ângulo reto é um ângulo cuja medida é $90^{\underline{o}}$. Na figura $A\widehat{O}B$ é reto, o símbolo ⊡ representa um ângulo reto.



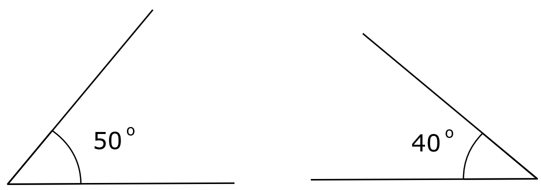
Definição: Ângulo agudo é um ângulo cuja medida é menor que $90^{\underline{o}}$. Na figura, $A\widehat{O}B$ é ângulo agudo.



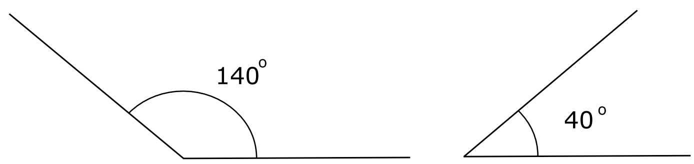
Definição: Ângulo obtuso é um ângulo cuja medida é maior que $90^{\underline{o}}$. Na figura, $A\widehat{O}B$ é ângulo obtuso.



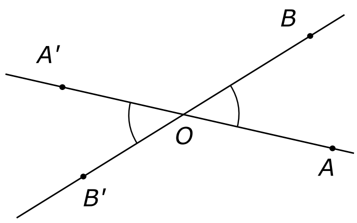
Definição: Dois ângulos são *c*omplementares se a soma de suas medidas é igual a $90^{\underline{o}}$.
Exemplo:



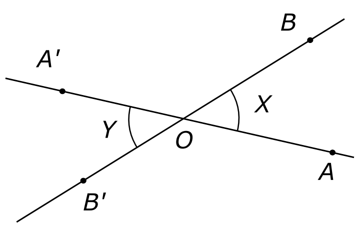
Definição: Dois ângulos são *s*uplementares se a soma de suas medidas é igual a $180^{\underline{o}}$.
Exemplo:



Definição: Dois ângulos são denominados *o*postos pelo vértice, se os lados de um são as semi-retas opostas dos lados do outro. Na figura, os ângulos $A\widehat{O}B$ e $A'\widehat{O}B'$ são opostos pelo vértice.



Teorema: Os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.
Prova:
Seja $A\widehat{O}$B e A'$\widehat{O}$B' dois ângulos opostos pelo vértice.

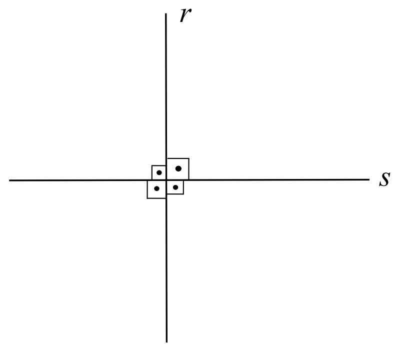


Denominamos $m(\text{A}\widehat{O}\text{B}) = \text{X}$ e $m(\text{A'}\widehat{O}\text{B'}) = \text{Y}$.
Temos que:
$m(\text{A}\widehat{O}\text{A'}) = 180^{\text{o}} \Rightarrow m(\text{B}\widehat{O}\text{A'}) = 180 - \text{X}$ (1)
$m(\text{B}\widehat{O}\text{B'}) = 180^{\text{o}} \Rightarrow m(\text{B}\widehat{O}\text{A'}) = 180 - \text{Y}$ (2)
De (1) e (2) vem:

$$180 - X = 180 - Y \Rightarrow \text{X} = \text{Y}$$

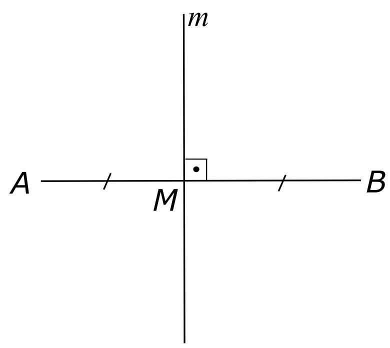
Logo, $A\widehat{O}\text{B} = \text{A'}\widehat{O}\text{B'}$.

Definição: Duas retas são perpendiculares se são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes. Na figura a seguir, r e s são perpendiculares.

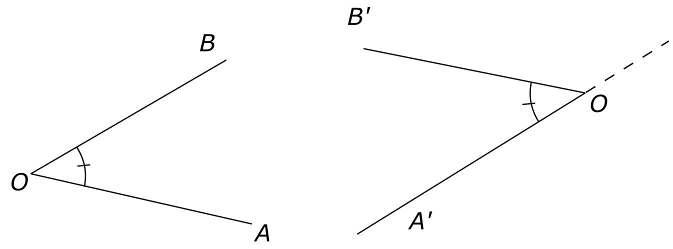


Decorre da definição que duas retas perpendiculares formam 4 ângulos retos.

Definição: Mediatriz de um segmento de reta é a reta perpendicular a este segmento que passa pelo ponto médio desse segmento. A figura mostra a reta m, mediatriz do segmento AB.



Axioma 14: *P*ostulado de transporte de ângulos. Dado um ângulo $A\widehat{O}$B e uma semi-reta $\overline{O'A'}$ de um plano, existe sobre esse plano e num dos semi-planos que $\overrightarrow{OA'}$ permite determinar, uma única semi-reta $\overrightarrow{OB'}$ que forma com $\overrightarrow{OA'}$ um ângulo A'$\widehat{O}$B' congruente ao ângulo $A\widehat{O}$B.



Sistema de unidades angulares

a. *S*istema sexagesimal
   Unidade: grau, notação: $m^{\underline{o}} \rightarrow m$ graus.
   Definição: Um grau é $\frac{1}{90}$ de um ângulo reto.
   Submúltiplos do grau são o minuto e o segundo.
   $1 = 60'$ e $1' = 60''$.

b. *S*istema decimal
   Unidade: grado, notação: $m\ gr \rightarrow m$ grados.
   Definição: Um grado é $\frac{1}{100}$ de um ângulo reto.

- *R*elação entre esses dois sistemas
  Temos que:
  $1° = \frac{1}{90}$ do ângulo reto
  $1gr = \frac{1}{100}$ do ângulo reto
  $\Rightarrow 90° \longleftrightarrow 100gr$

Exercícios Resolvidos

1. Estabeleça a correspondência dos itens a seguir com as figuras de 1 a 5.

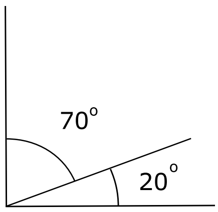
a) bissetriz de um ângulo;

b) ângulos complementares;

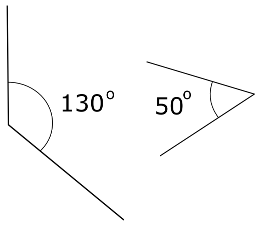
c) ângulos suplementares;

d) ângulos adjacentes e complementares;

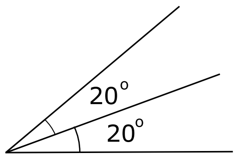
e) ângulos adjacentes e suplementares.



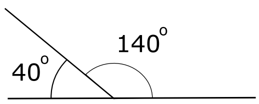
(1)



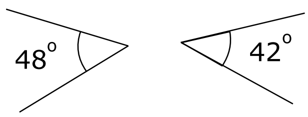
(2)



(3)



(4)

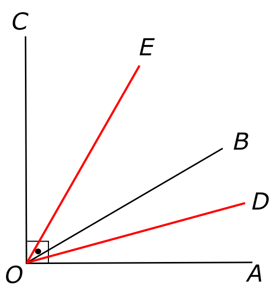


(5)

Resposta: a) 3; b) 5, c) 2; d) 1; e) 4.

2. Determine o ângulo entre as bissetrizes de dois ângulos adjacentes e complementares.

Solução: Considere dois ângulos $A\widehat{O}B$ e $B\widehat{O}C$ adjacentes e complementares.



Tracemos as bissetrizes OD e OE desses ângulos, respectivamente. Denote $m(\text{A}\widehat{O}\text{B}) = \text{X}$ e $m(\text{B}\widehat{O}\text{C}) = \text{Y}$, vem que:

$$X + \text{Y} = 90^\circ$$

Temos que:
$m(\text{A}\widehat{O}\text{D}) = \dfrac{X}{2}$ e $m(\text{B}\widehat{O}\text{E}) = \dfrac{Y}{2}$

$\Rightarrow m(\text{D}\widehat{O}\text{E}) = \dfrac{X}{2} + \dfrac{Y}{2} = \dfrac{X\text{+Y}}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$

Logo, o ângulo entre as bissetrizes é 45°.

3. Calcule o complemento dos ângulos:

a) 27° b) $32^\circ 38'$

Solução:

a) $90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$

b) $90^\circ - 32^\circ 38' = 89^\circ 60' - 32^\circ 38' = 57^\circ 22'$

4. Calcule o suplemento do complemento de 72°.

Solução: O complemento de 72° é $90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.
Daí, o suplemento do complemento de 72° é $180^\circ - 18^\circ = 162^\circ$.

5. Calcule a medida de um ângulo cuja medida é igual a $\dfrac{3}{5}$ do seu suplemento.

Solução: Seja X a medida do ângulo procurado.
$180^\circ - X$ é a medida do suplemento do ângulo procurado, temos:

$$X = \frac{3}{5}(180 - X)$$

Resolvendo a equação vem:

$$5X = 540 - 3X \Rightarrow 8X = 540 \Rightarrow X = 67^\circ 30'$$

6. Dois ângulos opostos pelo vértice tem medidas expressas em graus por $4X - 20°$ e $2X + 15°$. Calcule as medidas desses ângulos.

Solução: Como os ângulos são opostos pelo vértice, então eles têm a mesma medida, ou seja:

$$4X - 20° = 2X + 15° \Rightarrow 2X = 35° \Rightarrow X = \frac{35°}{2} = 17°30'.$$

Assim, a medida de um deles é:

$$4X - 20° = 4 \cdot 17°30' - 20° = 50°$$

Logo, os ângulos medem 50°.

Exercícios Propostos

1. Calcule o suplemento dos ângulos:
   a) $47°$ b) $34°20'$

2. Dado um ângulo agudo de medida α, represente:

   a) A quinta parte do seu complemento.

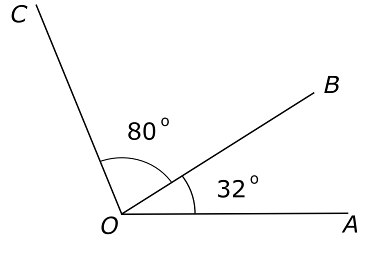
   b) A décima parte do seu suplemento.

3. Qual é a medida de um ângulo que excede o seu complemento de 69°?

4. As medidas de dois ângulos opostos pelo vértice são $34\theta - 8°$ e $14\theta + 2°$. Calcule θ.

5. Prove que dois ângulos que têm o mesmo suplemento são congruentes.

6. Na figura $m(A\widehat{O}B) = 32°$ e $B\widehat{O}C = m(B\widehat{O}C) = 80°$. Se OM é a bissetriz de $A\widehat{O}B$, ON é a bissetriz de $B\widehat{O}C$ e OX é a bissetriz de $M\widehat{O}N$, determine a medida do ângulo $X\widehat{O}C$.



Gabarito

1. a) $133°$, b) $145°40'$.

2. a) $\dfrac{1}{5}(90° - \alpha)$, b)$\dfrac{1}{10}(180° - \alpha)$.

3. $79°30'$.

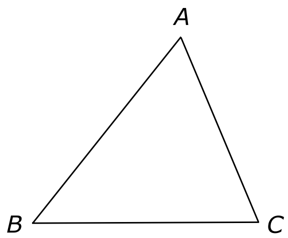
4. $30'$.

5. Demonstração.

6. $68°$.

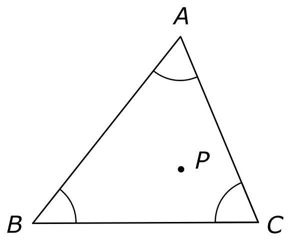
Triângulos

Definição: Triângulo é a união de três segmentos cujas extremidades são três pontos não colineares. A figura ao lado mostra um triângulo. Os pontos A, B e C são os vértices, e os segmentos AB, AC e BC são os lados do triângulo. Denotamos por ΔABC um triângulo de vértices A, B e C.

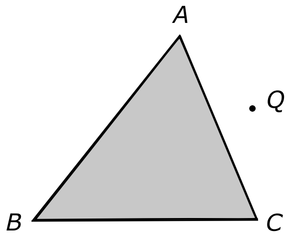


Definição: Chama-se $p$erímetro de um triângulo o número que exprime a soma das medidas dos três lados.
Notação: $2p$.

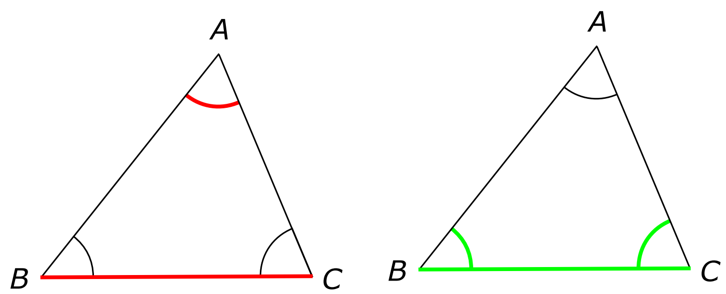
Definição: Os pontos comuns aos interiores dos ângulo $B\hat{A}$C, A$\widehat{B}$C e $A\widehat{C}$B são pontos interiores ao triângulo ABC. Na figura,o ponto P é interior ao triângulo. Os ângulos $B\hat{A}$C, A$\widehat{B}$C e $A\widehat{C}$B são os ângulos internos do triângulo.



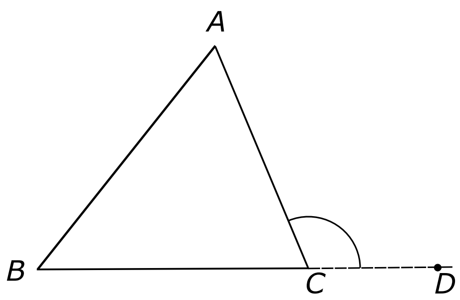
Definição: A união de um triângulo com o seu interior é chamada *região triangular*. Os pontos que não pertencem à região triangular são os pontos exteriores ao triângulo. Na figura, Q é um ponto exterior ao triângulo.



Definição: Num triângulo, *lado oposto* a um ângulo é o lado que une os vértices dos dois outros ângulos, *lado adjacente* a dois ângulos é o lado que une os vértices desses dois ângulos. Na figura, o lado BC é oposto ao ângulo $B\hat{A}C$, e o lado BC é adjacente aos ângulos $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$.



Definição: Ângulo externo a um triângulo é aquele que é adjacente e suplementar a um de seus ângulos internos. Na figura ao lado, o ângulo $A\widehat{C}D$ é um ângulo externo ao triângulo ABC.

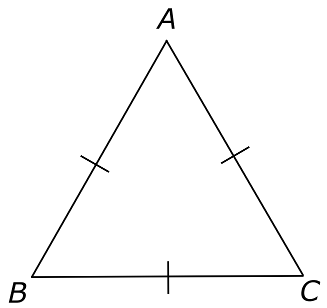


Classificação dos triângulos

Podemos classificar os triângulos de dois modos:

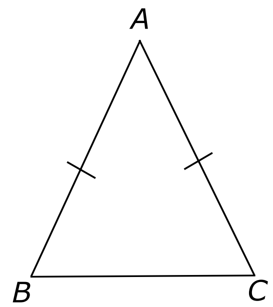
$1^{\underline{o}}$ Quanto aos lados:

- Equilátero: os que têm os três lados congruentes.



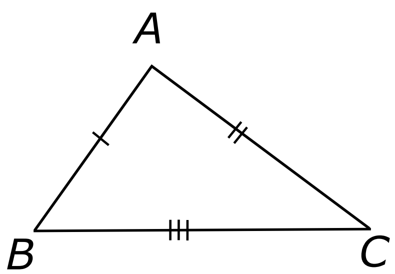
$\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$

- Isósceles: os que têm dois lados congruentes.



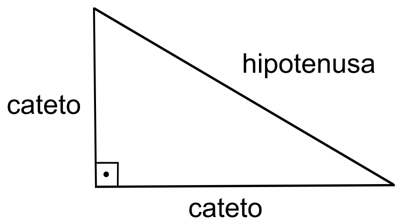
$\overline{AB}=\overline{AC}$

- Escaleno: os que têm os três lados não congruentes entre si.

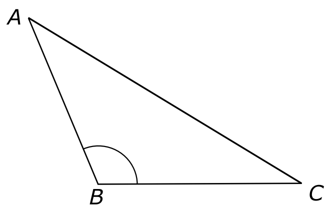


$2^{\underline{o}}$ Quanto aos ângulos:

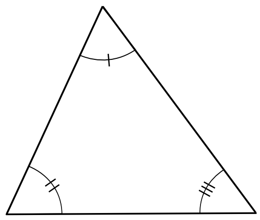
– Retângulos: quando têm um ângulo reto.



– Obtusângulos: quando têm um ângulo obtuso.

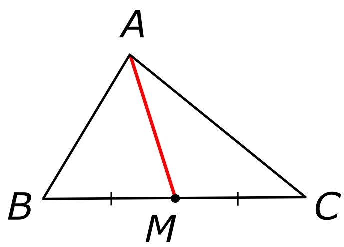


– Acutângulos: quando têm os três ângulos agudos.

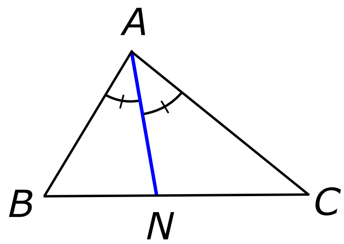


Elementos notáveis de um triângulo

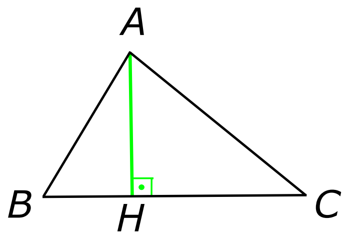
Mediana de um triângulo é o segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto. Na figura, AM é uma mediana do triângulo ABC.



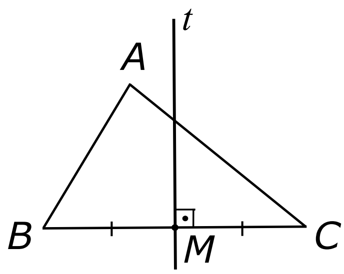
Bissetriz de um triângulo é o segmento da bissetriz de um ângulo interno que tem por extremidades o vértice desse ângulo e o ponto de encontro com o lado oposto. Na figura, AN é uma bissetriz do triângulo ABC.



*A*ltura de um triângulo é o segmento da perpendicular traçada de um vértice à reta suporte do lado oposto, cujos extremos são esse vértice e o ponto de encontro com essa reta. Na figura, AH é uma altura do triângulo ABC.



*M*ediatriz de um triângulo é a mediatriz de um de seus lados. Na figura, a reta t é a mediatriz do lado BC do triângulo ABC.



Exercício Resolvido

Assinale Verdadeiro (V) ou Falso (F).

a) Um triângulo possui três ângulos externos. ( )

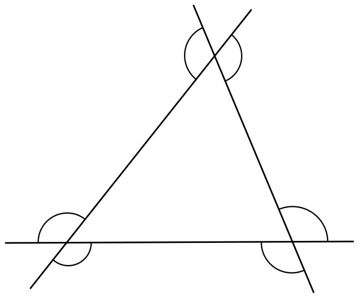
b) Um triângulo isósceles é sempre acutângulo. ( )

c) Um triângulo obtusângulo pode ser isósceles. ( )

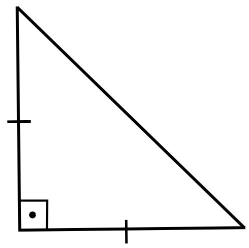
d) Um triângulo isósceles pode ser equilátero. ( )

Solução:

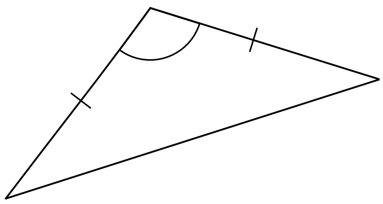
a) (F), pois possui seis ângulos externos.



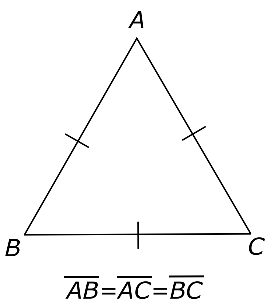
b) (F), pois existe triângulo isósceles que é triângulo retângulo, por exemplo.



c) (V), basta que o ângulo formado pelos lados congruentes seja obtuso.



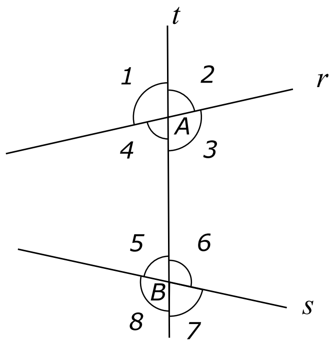
d) (V), basta que possua os três lados congruentes.



Retas paralelas

Lembre-se de que já vimos a definição de retas paralelas em posições relativas entre duas retas distintas e também o postulado 4. (Postulado de Euclides).

Definição: Duas retas r e s de um mesmo plano interceptados pela transversal t formam oito ângulos. Os pares de ângulos, um com vértice em A e o outro em B, conforme figura, são denominados:



ângulos correspondentes: $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{4} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$

ângulos alternos internos $\begin{cases} \hat{4} \text{ e } \hat{6} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{5} \end{cases}$

ângulos alternos externos $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{7} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{8} \end{cases}$

ângulos colaterais externos $\begin{cases} \hat{1} \text{ e } \hat{8} \\ \hat{2} \text{ e } \hat{7} \end{cases}$

ângulos colaterais internos $\begin{cases} \hat{4} \text{ e } \hat{5} \\ \hat{3} \text{ e } \hat{6} \end{cases}$

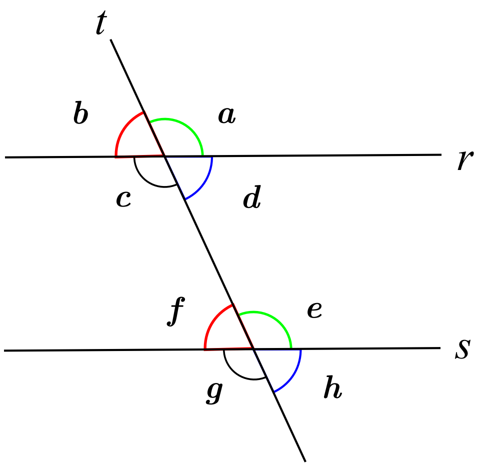
Vamos considerar verdadeira a propriedade a seguir, mas depois que estudarmos congruência, podemos demonstrar tal propriedade.

Propriedade: Uma reta transversal a duas retas paralelas formam ângulos que obedecem às relações seguintes:

1º Os ângulos correspondentes e os ângulos alternos são congruentes.

2º Os ângulos colaterais são suplementares.

Seja t uma transversal as retas r e s e $r \parallel s$.



$a = e, b = f, c = g, d = h$ (correspondentes)

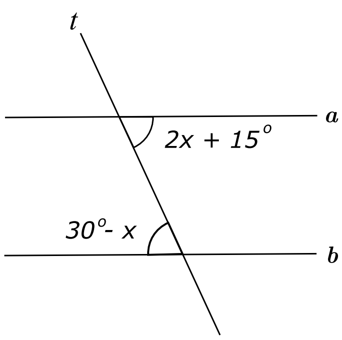
$c = e, d = f, a = g, b = h$ (alternos internos e alternos externos)

$c + f = d + e = b + g = a + h = 180°$ (colaterais)

Nota: As recíprocas das propriedades 1ºe 2º são verdadeiras.

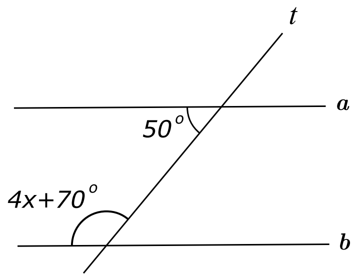
Exercícios Resolvidos

1. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x.



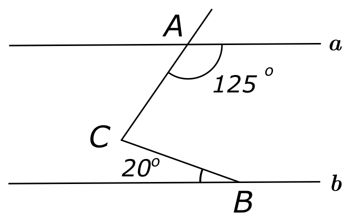
Solução:
Sendo $2x + 15°$ e $30° - x$ as medidas de dois ângulos alternos internos, temos:
$30° - x = 2x + 15° \Rightarrow -x - 2x = 15° - 30° \Rightarrow 3x = 15° \Rightarrow x = 5°$

2. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule o valor de x.

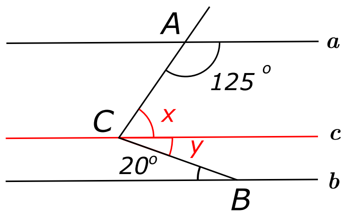


Solução:
Sendo $4x + 70°$ e $50°$ as medidas de dois ângulos colaterais internos, temos:
$4x + 70° + 50° = 180° \Rightarrow 4x = 180° - 120° \Rightarrow 4x = 60° \Rightarrow x = 15°$

3. Na figura, as retas a e b são paralelas. Calcule a medida do ângulo $A\widehat{C}$B.



Solução:
Seja a figura dada. Trace por C uma reta $c \parallel a$, e seja $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{B}) = X+Y$ conforme a figura.
Logo $125° + X = 180°$ (ângulos colaterais internos) $\Rightarrow X = 55°$.
$Y = 20°$ (ângulos alternos internos).
Logo, $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{B}) = 55° + 20° = 75°$.

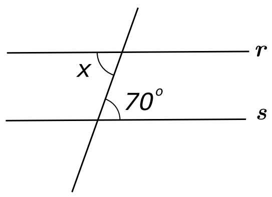


4. Duas retas distintas a e b de um plano, cortados por uma transversal t, formam ângulos colaterais internos, cujas medidas em graus são, respectivamente, $6X - 30°$ e $2X + 34°$. Determine X de modo que as retas a e b sejam paralelas.

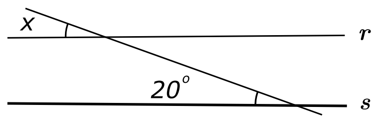
Solução:
Queremos que as retas a e b sejam paralelas, então $6X - 30° + 2X + 34° = 180°$ (ângulos colaterais internos) $\Rightarrow 8X = 176° \Rightarrow X = 22°$.

Exercícios Propostos

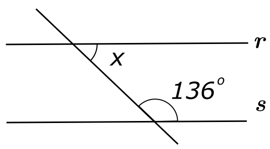
1. Em cada figura a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x.



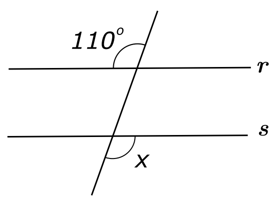
(a)



(b)

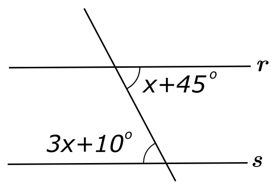


(c)

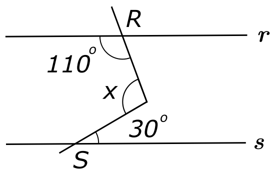


(d)

2. Em cada figura, a seguir, as retas r e s são paralelas. Calcule o valor de x.

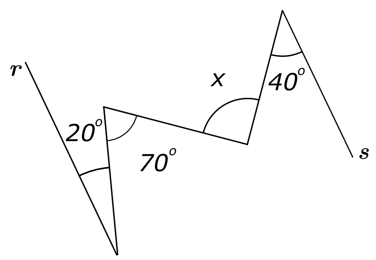


(a)



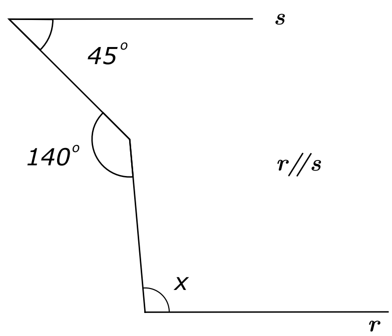
(b)

3. Seja na figura $r \parallel s$, calcule o valor de x.

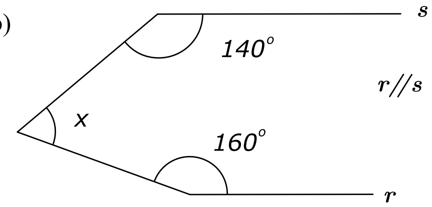


4. Na figura a seguir, calcule x.

(a)



(b)



Gabarito

1. a) $x = 70°$, b) $x = 20°$, c) $x = 44°$, d) $x = 110°$.

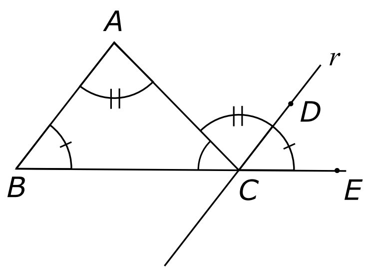
2. a) $17°30'$, b) $100°$.

3. $x = 90°$.

4. a) $x = 95°$, b) $x = 60°$.

Ângulos no triângulo

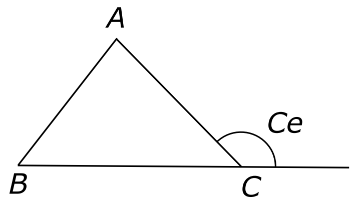
Teorema Angular de Tales: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.
Prova:
Seja ΔABC e considere uma reta $r \parallel AB$ passando por C.



Daí, $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{D}) = \mathrm{m}(\mathrm{B\hat{A}C})$ (ângulo alterno interno)
$m(\mathrm{E}\widehat{C}\mathrm{D}) = \mathrm{m}(\mathrm{C}\widehat{B}\mathrm{A})$ (ângulo correspondente)
Como um ângulo raso tem 180°, vem:

$$\widehat{C} + \hat{\mathrm{A}} + \widehat{B} = 180°$$

Corolário: Em todo triângulo, qualquer ângulo externo tem medida igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.
Prova:
Seja o ΔABC, considere $\widehat{C}$e ângulo externo em relação ao vértice C.



Temos que:

$$\begin{cases} \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ & (1) \\ \widehat{C}e + \widehat{C} = 180^\circ & (2) \end{cases}$$

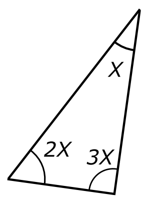
Subtraindo (1) de (2) vem:

$$\widehat{A} + \widehat{B} - \widehat{C}e = 0 \Rightarrow \widehat{C}e = \widehat{A} + \widehat{B}$$

De forma similar $\widehat{B}e = \widehat{A} + \widehat{C}$, onde $\widehat{B}e$ é o ângulo externo em relação ao vértice B e $\widehat{A}e = \widehat{B} + \widehat{C}$, onde $\widehat{A}e$ é o ângulo externo em relação ao vértice A.

Exercícios Resolvidos

1. No triângulo ABC da figura, calcule o valor de X.

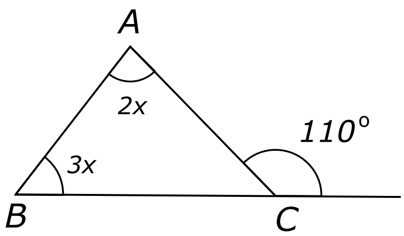


Solução:

Temos por Tales que: X + 2X + 3X $= 180^\circ \Rightarrow 6$X $= 180^\circ \Rightarrow X = 30^\circ$

2. No triângulo ABC da figura, calcule o valor de x.

Solução:



Pelo resultado do ângulo externo, vem:

$$2\text{x}+3\text{x} = 110^\circ \Rightarrow 5\text{x} = 110^\circ \Rightarrow \text{x} = 22^\circ$$

3. Dada a figura 1 a seguir, calcule o valor de x.

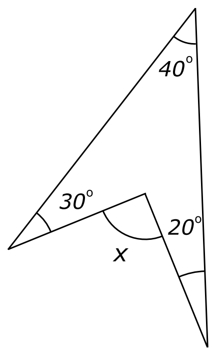


Fig. 1

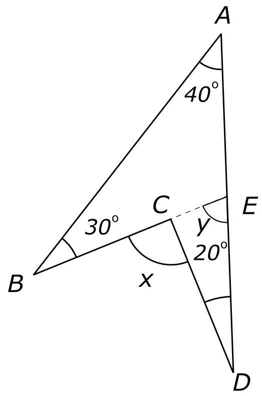


Fig. 2

Solução:

Considere A, B, C e D os vértices da figura dada. Prolongue BC até AD e denomine de E a interseção da reta BC com a reta AD.

Daí denominando $m(\mathrm{C\hat{E}D}) = \mathrm{Y}$ vem usando o resultado do ângulo externo no ΔABE,

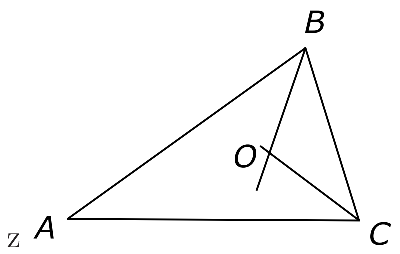
$$Y = 30^\circ + 40^\circ$$

e no ΔCED,

$$X = Y + 20^\circ \Rightarrow \ X \ = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$$

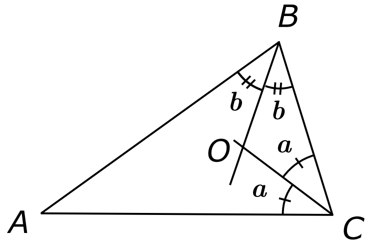
4. Na figura a seguir, O é o ponto de encontro das bissetrizes internas do triângulo ABC e a medida do ângulo $\mathrm{B\widehat{O}C}$ é o triplo da medida do ângulo $\widehat{\mathrm{A}}$. Calcule a medida do ângulo $\widehat{\mathrm{A}}$.

Solução:



Seja o Δ ABC, O o ponto de encontro das bissetrizes internas desse triângulo e $m(\mathrm{B}\widehat{O}\mathrm{C}) = 3\ m(\widehat{A})$.

Considere $m(\mathrm{A}\widehat{C}\mathrm{O}) = \mathrm{m}(\mathrm{B}\widehat{C}\mathrm{O}) = a$ e $m(\mathrm{A}\widehat{B}\mathrm{O}) = \mathrm{m}(\mathrm{C}\widehat{B}\mathrm{O}) = b$.



Daí

$$\begin{cases} 2b + 2a + m(\text{A}) = 180^\circ \\ b + a + 3m(\text{A}) = 180^\circ \quad (\text{x } 2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2b + 2a + m(\text{A}) = 180^\circ \quad (1) \\ 2b + 2a + 6m(\text{A}) = 360^\circ \quad (2) \end{cases}$$

Fazendo (2) - (1) vem:
6 m(A) - m(A) = 180° $\Rightarrow$ 5 m(A)= 180° $\Rightarrow$ m(A)= 36°

5. Na figura 1 a seguir, P é a interseção das bissetrizes externas em $\widehat{\text{B}}$ e $\widehat{\text{C}}$. Calcule a medida do ângulo $B\widehat{P}\text{C}$ sabendo que a medida do ângulo $\widehat{\text{A}}$ é 70°.

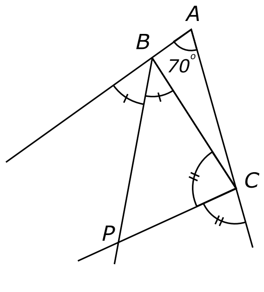


Fig. 1

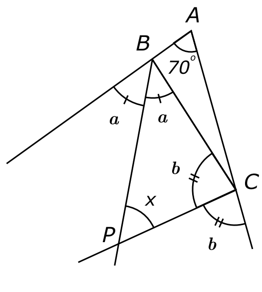


Fig. 2

Solução:
Seja a figura 1 dada, com P sendo a interseção das bissetrizes externas em $\widehat{\text{B}}$ e $\widehat{\text{C}}$ e $\text{m}(\widehat{\text{A}}) = 70^\circ$. Denote $\text{m}(\text{B}\widehat{\text{P}}\text{C}) = \text{X}, \text{m}(\text{C}\widehat{\text{B}}\text{P}) = \text{a}$ e $\text{m}(\text{B}\widehat{\text{C}}\text{P}) = b$.
Temos que:

$$m(\text{A}\widehat{B}\text{C}) = 180^\circ - 2a$$

$$m(\text{B}\widehat{C}\text{A}) = 180^\circ - 2b$$

Por Tales no Δ BCP vem: $a + b + X = 180^\circ$

Por Tales no Δ ABC vem:

$$180^\circ - 2a + 180^\circ - 2b + 70^\circ = 180^\circ$$

Logo,

$$\begin{cases} a+b+X = 180^\circ \\ 180^\circ - 2a + 180^\circ - 2b + 70^\circ = 180^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b+X = 180^\circ & (1) \\ -2a-2b = -250^\circ & (2) \end{cases}$$

De (2) temos que

$$2a + 2b = 250^\circ \Rightarrow a + b = 125^\circ \qquad (3)$$

Substituindo (3) em (1) vem:

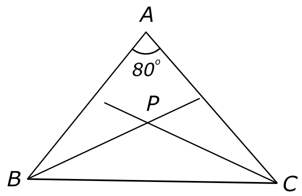
$$125^\circ + X = 180^\circ \Rightarrow X = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

Logo,

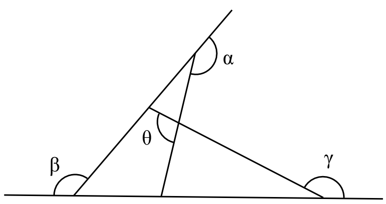
$$m(\mathrm{B}\widehat{P}\mathrm{C}) = 55^\circ$$

Exercícios Propostos

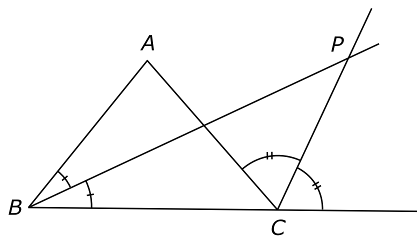
1. Na figura a seguir, P é a interseção das bissetrizes internas em $\widehat{\mathrm{B}}$ e $\widehat{\mathrm{C}}$. Calcule a medida do ângulo $\mathrm{B\widehat{P}C}$ sabendo que o ângulo $\widehat{\mathrm{A}}$ mede 80°.



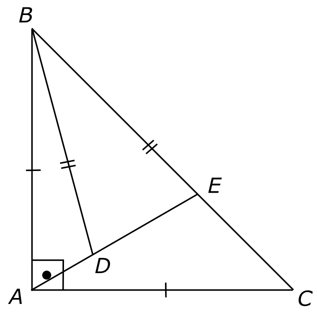
2. Na figura a seguir, calcule a soma dos quatro ângulos $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$ e $\widehat{\theta}$.



3. Na figura a seguir, P é a interseção da bissetriz interna de $\widehat{\mathrm{B}}$ com a externa de $\widehat{\mathrm{C}}$. Calcule o ângulo $\mathrm{B\widehat{P}C}$ em função de $\widehat{\mathrm{A}}$.

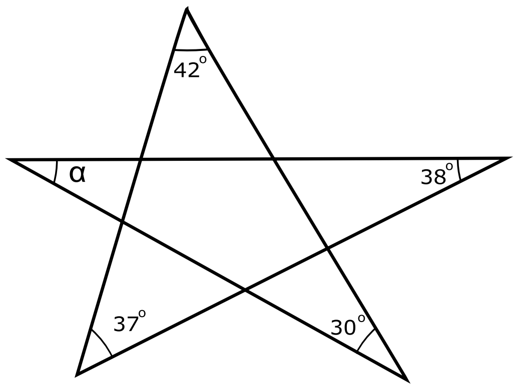


4. Na figura a seguir, o triângulo ABC é retângulo em $\widehat{\text{A}}$ e isósceles. Sendo $\overline{BD} = \overline{BE}$ e D$\widehat{\text{A}}$C $= 30°$, calcule a medida do ângulo A$\widehat{\text{B}}$D.



Nota: Nesta questão use o fato de que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes. Este fato será provado na Aula 2.

5. Na figura a seguir, calcule o ângulo $\widehat{\alpha}$. **Dica**: Use o resultado do ângulo externo de um triângulo.



Gabarito

1. $m(\mathrm{B}\widehat{P}\mathrm{C}) = 130^\circ$.
2. A soma pedida é 540°.
3. $m(\mathrm{B}\widehat{P}\mathrm{C}) = \dfrac{m(\widehat{A})}{2}$.
4. $m(\mathrm{A}\widehat{B}\mathrm{D}) = 15^\circ$.
5. $m(\widehat{\alpha}) = 33^\circ$.