# Aula 9 – Critério de Cauchy e Limites Infinitos

**Metas da aula:** Enunciar e provar o critério de Cauchy e apresentar algumas de suas aplicações no estabelecimento da convergência e da divergência de seqüências. Apresentar o conceito de seqüências propriamente divergentes com limites infinitos bem como alguns resultados relacionados com esse conceito.

**Objetivos:** Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o enunciado do critério de Cauchy e o uso desse resultado para estabelecer a convergência e da divergência de seqüências.
- Saber o conceito de seqüências propriamente divergentes com limites infinitos bem como a resolução de questões simples envolvendo essa noção.

Nesta aula vamos concluir nosso estudo sobre seqüências de números reais com a apresentação do célebre critério de Cauchy. Esse critério permite determinar a convergência de uma seqüência sem o conhecimento prévio do limite ou a divergência da mesma. O nome do critério é uma referência ao matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), sem dúvida, um dos maiores contribuidores para o desenvolvimento da Análise Matemática no século XIX, que foi quem primeiro o publicou. Vamos também apresentar o conceito de seqüêcias propriamente divergentes com limite mais infinito ou menos infinito.

## O Critério de Cauchy

Apesar da freqüência com que nos deparamos com seqüências monótonas e, portanto, da enorme importância do Teorema da Seqëncia Monótona, é importante que tenhamos uma condição implicando a convergência de uma seqüência que não nos requeira conhecer de antemão o limite, e que não seja restrita a seqüências monótonas. O critério de Cauchy é uma tal condição. Ele se baseia no conceito de seqüência de Cauchy que apresentamos a seguir.

**Definição 9.1**
Diz-se que uma seqüência de números reais $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma **seqüência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $m, n \in \mathbb{N}$ se

$m > N_0$ e $n > N_0$, então $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Em símbolos, escrevemos

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})\left((m > N_0 \text{ e } n > N_0) \Rightarrow |x_n - x_m| < \varepsilon\right).$$

Assim como na Definição 6.2, aqui também $N_0$ depende em geral de $\varepsilon$. Para enfatizar esse fato é usual escrever-se $N_0 = N_0(\varepsilon)$.

Observe que dizer que $\mathbf{x} = (x_n)$ **não é** uma seqüência de Cauchy significa dizer que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existem $m_k, n_k \in \mathbb{N}$ tais que $m_k > N_0$, $n_k > N_0$ e $|x_{m_k} - x_{n_k}| \geq \varepsilon_0$. Em símbolos, escrevemos

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall k \in \mathbb{N})(\exists m_k, n_k \in \mathbb{N})\left((m_k > N_0 \text{ e } n_k > N_0) \text{ e } |x_n - x_m| \geq \varepsilon\right).$$

Notemos que, apenas por conveniência, na fórmula da negação as variáveis $\varepsilon, N_0, m, n$ foram trocadas por $\varepsilon_0, k, m_k, n_k$, o que é de nosso pleno direito fazer.

**Exemplos 9.1**

(a) A seqüência $(1/n)$ é uma seqüência de Cauchy.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $N_0 > 2/\varepsilon$. Então se $m, n > N_0$, temos $1/n < 1/N_0 < \varepsilon/2$ e, do mesmo modo, $1/m < \varepsilon/2$ Daí segue que se $m, n > N_0$, então

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < frac\varepsilon 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

o que demonstra que $(1/n)$ é seqüência de Cauchy, uma vez que $\varepsilon > 0$ é arbitrário.

(b) A seqüência $(1 + (-1)^n)$ não é uma seqüência de Cauchy.

Com efeito, seja $\varepsilon_0 = 2$. Então, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$ podemos tomar $m_k := 2k > k$ e $n_k := 2k + 1 > k$. Como $x_{2k} = 2$ e $x_{2k+1} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$|x_{m_k} - x_{n_k}| = |x_{2k} - x_{2k+1}| = |2 - 0| = 2 = \varepsilon_0,$$

o que demonstra que $(1 + (-1)^n)$ não é uma seqüência de Cauchy.

O seguinte resultado constitui a parte mais imediata do critério de Cauchy, estabelecendo uma condição necessária para que uma seqüência seja convergente.

**Lema 9.1**

Se $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência convergente de números reais, então $\mathbf{x}$ é uma seqüência de Cauchy.

**Prova:** Seja $\bar{x} = \lim \mathbf{x}$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$. Logo, para todos $m, n \in \mathbb{N}$, satisfazendo $m > N_0$, $n > N_0$, temos

$$|x_m - x_n| = |(x_n - \bar{x}) + (\bar{x} - x_m)| \leq |x_n - \bar{x}| + |x_m - \bar{x}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, fica provado que $\mathbf{x}$ é uma seqüência de Cauchy.

□

Para provar a recíproca do Lema 9.1, que juntamente com este constitui o referido critério de Cauchy, precisaremos do seguinte resultado.

**Lema 9.2**
Toda seqüência de Cauchy é limitada.

**Prova:** Seja $\mathbf{x} := (x_n)$ uma seqüência de Cauchy e $\varepsilon := 1$. Se $N_0 = N_0(1)$ e $n > N_0$, então $|x_n - x_{N_0+1}| < 1$. Logo, pela deiguadade triangular, temos $|x_n| \leq |x_{N_0+1}| + 1$ para todo $n > N_0$. Seja

$$M := \sup\{|x_1|,\ |x_2|, \dots, |x_{N_0}|,\ |x_{N_0+1}| + 1\}.$$

Então temos que $|x_n| \leq M$ [para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Apresentamos agora o importante critério de Cauchy.

**Teorema 9.1 (Critério de Cauchy)**
Uma seqüência de números reais é convergente se e somente se ela é uma seqüência de Cauchy.

**Prova:** Vimos no Lema 9.1 que toda seqüência convergente é uma seqüência de Cauchy.

Reciprocamente, seja $\mathbf{x} = (x_n)$ uma seqüência de Cauchy; vamos mostrar que $\mathbf{x}$ é uma seqüência convergente. Inicialmente, observemos que, pelo Lema 9.2, $\mathbf{x}$ é limitada. Portanto, pelo Teorema 8.6 de Bolzano-Weierstrass, existe uma subseqüência $\mathbf{x}' = (x_{n_k})$ de $\mathbf{x}$ que converge para algum $x^* \in \mathbb{R}$. Vamos mostrar que toda a seqüência $\mathbf{x}$ converge para $x^*$.

Como $(x_n)$ é uma seqüência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N_0 = N_0(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m > N_0$ então

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2. \tag{9.1}$$

Por outro lado, como $\mathbf{x}'$ converge a $x^*$, existe $N_1 > N_0$ pertencente ao conjunto $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$|x_{N_1} - x^*| < \varepsilon/2.$$

Como $N_1 > N_0$, segue de (9.1) com $m = N_1$ que

$$|x_n - x_{N_1}| < \varepsilon/2 \qquad \text{para } n > N_0.$$

Daí segue que se $n > N_0$, então

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |(x_n - x_{N_1}) + (x_{N_1} - x^*)| \\ &\leq |x_n - x_{N_1}| + |x_{N_1} - x^*| \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\lim x_n = x^*$.

□

A seguir damos alguns exemplos de aplicação do critério de Cauchy.

**Exemplos 9.2**

(a) Seja $\mathbf{x} = (x_n)$ definida por

$$x_1 := 1, \quad x_2 := 2 \quad e \quad x_n := \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1}) \quad \text{para } n > 2.$$

Geometricamente essa seqüência é formada tomando-se o ponto médio de sucessivos intervalos, cujos extremos são os dois últimos termos da seqüência até então definidos, a começar pelo intervalo $[1, 2]$. Fica claro então que $1 \leq x_n \leq 2$, fato que pode ser provado rigorosamente usando-se Indução Matemática. Com efeito, a afirmação vale para $n = 1$ e $n = 2$, por definição, e supondo que seja válida para $j = 1, 2, \dots, k$, com $k > 2$, vemos facilmente que

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (x_k + x_{k-1})/2 \geq (1 + 1)/2 = 1, \\ x_{k+1} &= (x_k + x_{k-1})/2 \leq (2 + 2)/2 = 2. \end{aligned}$$

Provemos também por indução que vale

$$|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

De fato, a afirmação é verdadeira para $n = 1$, e supondo que $|x_k - x_{k+1}| = 1/2^{k-1}$ temos

$$|x_{k+1} - x_{k+2}| = |x_{k+1} - \frac{x_k + x_{k+1}}{2}| = \frac{1}{2}|x_k - x_{k+1}| = \frac{1}{2^k},$$

o que conclui a prova por indução da afirmação.

Assim, dados $m > n$, temos

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &\le |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{m-1} - x_m| \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{m-2}} \\ &= \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$ qualquer, tomando-se $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^{N_0-2} < \varepsilon$, se $m > N_0$, $n > N_0$ e supondo sem nenhuma perda de generalidade que $m \ge n$, obtemos que $|x_n - x_m| < 1/2^{n-2} < 1/2^{N_0-2} < \varepsilon$. Logo, $\mathbf{x}$ é uma seqüência de Cauchy. Pelo critério de Cauchy concluímos que $\mathbf{x}$ converge para algum $\bar{x} \in \mathbb{R}$, o qual, pelo Teorema 7.5, deve satisfazer $1 \le x \le 2$.

Observe que não adiantará usar a regra de formação $x_n := (x_{n-1} + x_{n-2})/2$ para tentar saber o valor de $\bar{x}$, já que tomando-se o limite nessa relação obtemos $\bar{x} = (\bar{x} + \bar{x})/2$, o que é uma identidade trivialmente verdadeira porém inútil.

Para se conhecer o valor de $\bar{x}$ é necessário observar que vale

$$x_{2n-1} < x_{2n+1} < x_{2n+2} < x_{2n} \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

que pode ser facilmente provado por indução (Exercício!). Em particular, a subseqüência $\mathbf{x}' = (x_{2n-1})$ é crescente e a subseqüência $\mathbf{x}'' = (x_{2n})$ é decrescente. Segue daí que, para a subseqüência $\mathbf{x}' = (x_{2n-1})$ temos

$$x_{2n+1} - x_{2n-1} = (x_{2n} - x_{2n-1}) - (x_{2n} - x_{2n+1}) = \frac{1}{2^{2n-2}} - \frac{1}{2^{2n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

ou seja, $x_{2n+1} = x_{2n-1} + 1/2^{2n-1}$, e assim

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2n-1}} \\ &= 1 + \frac{1/2 - 1/2^{2n+1}}{1 - 1/2^2} = 1 + \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \to \frac{5}{3}, \end{aligned}$$

onde foi usada a conhecida fórmula para a soma de uma progressão geométrica.

Portanto, temos que $\bar{x} = \lim \mathbf{x} = \lim \mathbf{x}' = 5/3$.

(b) A seqüência do exemplo anterior pertence a uma classe especial de seqüências que vamos definir agora.

Dizemos que uma seqüência de números reais $\mathbf{x} = (x_n)$ é **contrativa** se existe uma constante $\lambda$, com $0 < \lambda < 1$, tal que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda |x_{n+1} - x_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O número $\lambda$ é chamado a **constante de contração** da seqüência.

Toda seqüência contrativa $\mathbf{x} = (x_n)$ é uma seqüência de Cauchy e, portanto, convergente para algum $x^* \in \mathbb{R}$. Além disso, temos

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \tag{9.2}$$

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9.3}$$

Com efeito, é fácil provar por indução que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \lambda^n |x_2 - x_1| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9.4}$$

De fato, a desigualdade (9.4) vale para $n = 1$ pela definição. Suponhamos que a desigualdade vale para $n = k$. Então temos

$$|x_{k+3} - x_{k+2}| \leq \lambda |x_{k+2} - x_{k+1}| \leq \lambda \left(\lambda^k |x_2 - x_1|\right) = \lambda^{k+1}|x_2 - x_1|,$$

o que prova (9.4) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $m > n$, aplicamos a desigualdade triangular e a fórmula da soma de uma progressão geométrica para obter

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\lambda^{m-2} + \lambda^{m-3} + \cdots + \lambda^{n-1})|x_2 - x_1| \\ &= \lambda^{n-1}\left(\frac{1-\lambda^{m-n}}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1| \\ &\leq \lambda^{n-1}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

Como $0 < \lambda < 1$, sabemos que $\lim \lambda^n = 0$. Portanto, deduzimos que $(x_n)$ é uma seqüência de Cauchy. Pelo critério de Cauchy, segue que $(x_n)$ converge para algum $x^* \in \mathbb{R}$.

Agora, fazendo $m \to \infty$ na desigualdade

$$|x_m - x_n| \leq \lambda^{n-1}\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)|x_2 - x_1|,$$

obtemos

$$|x^* - x_n| \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|x_2 - x_1| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Quanto à desigualdade (9.3), notemos que

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &\leq (\lambda^{m-n} + \cdots + \lambda^2 + \lambda)|x_n - x_{n-1}| \\ &\leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}|.\end{aligned}$$

Fazendo $m \to \infty$ obtemos a desigualdade (9.3).

(c) Considere a equação $p(x) := x^3 - 5x + 3 = 0$. Como $p(0) = 3 > 0$ e $p(1) = -1 < 0$ somos levados a conjecturar que existe uma solução $x_*$ da equação satisfazendo $0 < x_* < 1$. Seja $x_1$ um número qualquer satisfazendo $0 < x_1 < 1$. Definimos a seqüência $(x_n)$ indutivamente por

$$x_{n+1} := \frac{1}{5}(x_n^3 + 3) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por indução provamos sem dificuldade que vale $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (Exercício!). Além disso, usando a fórmula $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, obtemos

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| &= |\frac{1}{5}(x_{n+1}^3 + 3) - \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)| = \frac{1}{5}|x_{n+1}^3 - x_n^3| \\ &= \frac{1}{5}|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2||x_{n+1} - x_n| \leq \frac{3}{5}|x_{n+1} - x_n|.\end{aligned}$$

Portanto, $(x_n)$ é uma seqüência contrativa e, sendo assim, converge para algum $x_* \in \mathbb{R}$. Tomando o limite na equação $x_{n+1} := \frac{1}{5}(x_n^3 + 3)$ obtemos $x_* = \frac{1}{5}(x_*^3 + 3)$. Logo, $x_*$ é raiz da equação $x^3 - 5x + 3 = 0$.

As relações (9.2) e (9.3) podem ser usadas para se estimar o erro cometido ao se aproximar o valor de $x_*$ pelo de $x_n$.

(d) Seja $\mathbf{y} = (y_n)$ a seqüência de números reais dada por

$$y_1 := \frac{1}{1!}, \quad y_2 := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}, \ldots, \quad y_n := \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}, \ldots$$

Claramente, $\mathbf{y}$ não é uma seqüência monótona. Porém, se $m > n$, então

$$y_m - y_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}.$$

Como $2^{r-1} \leq r!$ para todo $r \in \mathbb{N}$, segue que se $m > n$, então

$$\begin{aligned}|y_m - y_n| &\leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Portanto, temos que $(y_n)$ é uma seqüência de Cauchy. Logo, ela converge para algum $\bar{y} \in \mathbb{R}$. Não temos ainda elementos para saber o valor de $\bar{y}$. Passando ao limite quando $m \to \infty$ na desigualdade anterior obtemos

$$|\bar{y} - y_n| \leq \frac{1}{2^{n-1}},$$

o que nos permite estimar o erro cometido ao aproximarmos o valor de $\bar{y}$ pelo valor de $y_n$. Apenas por curiosidade, podemos adiantar que o valor exato de $\bar{y}$ é $1 - 1/e$.

## Limites Infinitos

Em alguns casos é conveniente termos uma definição para o significado de uma seqüência $(x_n)$ de números reais "tender a $\pm\infty$".

**Definição 9.2**
Seja $(x_n)$ uma seqüência de números reais.

(i) Dizemos que $(x_n)$ tende a $+\infty$, e escrevemos $\lim x_n = +\infty$, se para todo $M > 0$ existe $N_0 = N_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $x_n > M$.

(ii) Dizemos que $(x_n)$ tende a $-\infty$, e escrevemos $\lim x_n = -\infty$, se para todo $M > 0$ existe $N_0 = N_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $x_n < -M$.

Dizemos que $(x_n)$ é **propriamente divergente** no caso em que temos ou $\lim x_n = +\infty$ ou $\lim x_n = -\infty$.

Observe que $\lim x_n = -\infty$ se, e somente se, $\lim(-x_n) = -\infty$.

**Exemplos 9.3**

(a) $\lim n = +\infty$.

De fato, dado $M > 0$, existe um $N_0 \in \mathbb{N}$ com $N_0 > M$, pela Propriedade Arquimediana, e, assim, $n > M$ para todo $n > N_0$.

(b) Se $b > 1$, então $\lim b^n = +\infty$.

Escrevamos $b = 1+c$, com $c = b-1 > 0$. Pela desigualdade de Bernoulli temos

$$b^n = (1 + c)^n \geq 1 + nc.$$

Portando, dado $M > 0$, tomando $N_0 > M/c$, obtemos $b^n \geq 1 + nc > 1 + M > M$ para todo $n > N_0$.

Chamamos sua atenção para o fato de que seqüências propriamente divergentes constituem um caso particular de seqüências divergentes. As propriedades válidas para o limite de seqüências convergentes que vimos em aulas anteriores podem não valer quando alguma das seqüências envolvidas tem limite $\pm\infty$. No entanto, temos o seguinte resultado.

**Teorema 9.2**

(i) Se $\lim x_n = +\infty$ e $(y_n)$ é uma seqüência limitada inferiormente, então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(ii) Se $\lim x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(iii) Se $x_n > c > 0$, $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim y_n = 0$, então $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$.

**Prova:** (i) Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $y_n \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $M > 0$ qualquer, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M - c$ para todo $n > N_0$. Logo, se $n > N_0$, então $x_n + y_n > (M - c) + c = M$, o que mostra que $\lim(x_n + y_n) = +\infty$.

(ii) Analogamente, dado $M >)$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > M/c$ para todo $n > N_0$. Logo, se $n > N_0$, então $x_n y_n > (M/c)c = M$, o que demonstra que $\lim(x_n y_n) = +\infty$.

(iii) Dado $M > 0$, existe $N_0 = N_0(M/c) \in \mathbb{N}$ tal que se $n > N_0$, então $y_n = |y_n| < c/M$. Logo, se $n > N_0$, então $x_n/y_n > c/(c/M) = M$, o que mostra que $\lim(x_n/y_n) = +\infty$.

$\square$

Observe que se $\lim x_n = +\infty$ e $\lim y_n = -\infty$, então nada pode ser afirmado sobre a divergência ou convergência da seqüência $(x_n + y_n)$. Por exemplo, se $x_n = n + 1/n$ e $y_n = -n$, então $(x_n + y_n)$ é convergente e $\lim(x_n + y_n) = 0$. Se $x_n = 2n$ e $y_n = -n$, então $\lim(x_n + y_n) = +\infty$. Finalmente, se $x_n = n + (-1)^n$ e $y_n = -n$, então $(x_n + y_n)$ é divergente, mas não propriamente divergente.

O seguinte resultado é uma reformulação do Teorema da Seqüência Monótona.

**Teorema 9.3**

Uma seqüência monótona de números reais é propriamente divergente se, e somente se, é ilimitada.

(i) Se $(x_n)$ é uma seqüência ilimitada não-decrescente, então $\lim x_n = +\infty$.

(ii) Se $(x_n)$ é uma seqüência ilimitada não-crescente, então $\lim x_n = -\infty$.

**Prova:** Suponhamos que $(x_n)$ é uma seqüência não-decrescente. Sabemos que se $(x_n)$ é limitada então ela é convergente. Portanto, se ela é propriamente divergente, então tem que ser ilimitada. Se $(x_n)$ é ilimitada, ela não é limitada superiormente, já que é limitada inferiormente por ser não-decrescente. Então dado $M > 0$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{N_0} > M$. Como $(x_n)$ é não-decrescente, se $n > N_0$, então $x_n \geq x_{N_0} > M$. Logo, $\lim x_n = +\infty$.

A afirmação (ii) se reduz a (i) considerando-se a seqüência $(-x_n)$.

□

O seguinte "critério de comparação" é freqüentemente utilizado para demonstrar que uma seqüência é propriamente divergente.

**Teorema 9.4**
Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ seqüências satisfazendo

$$x_n \leq y_n \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{9.5}$$

(i) Se $\lim x_n = +\infty$, então $\lim y_n = +\infty$.

(ii) Se $\lim y_n = -\infty$, então $\lim x_n = -\infty$.

**Prova:** (i) Se $\lim x_n = +\infty$, dado $M > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > N_0$ implica $x_n > M$. Mas então, se $n > N_0$, de (9.5) segue que temos $y_n > M$, o que mostra que $\lim y_n = +\infty$.

A afirmação (ii) se reduz a (i) considerando-se as seqüências $(-x_n)$ e $(-y_n)$.

□

**Observação 9.1**
O Teorema 9.4 continua verdadeiro se a condição (9.5) é ultimadamente verdadeira: isto é, se existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leq y_n$ para todo $n \geq M_0$.

O seguinte resultado também serve como um "critério de comparação" e é bastante útil nos casos em que não se tem a condição (9.5).

**Teorema 9.5**
Sejam $(x_n)$ e $(y_n)$ duas seqüências de números reais positivos e suponhamos que para algum $L > 0$ tenhamos

$$\lim \frac{x_n}{y_n} = L. \tag{9.6}$$

Então $\lim x_n = +\infty$ se, e somente se, $\lim y_n = +\infty$.

**Prova:** Se a condição (9.6) vale, então existe $M_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2}L < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}L \qquad \text{para todo } n \geq M_0.$$

Portanto, temos $(L/2)y_n < x_n < (3L/2)y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A conclusão segue então do Teorema 9.4.

□

**Exercícios 9.1**

1. Mostre diretamente da definição que as seguintes seqüências são seqüências de Cauchy.

   (a) $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

   (b) $\left(1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

2. Mostre diretamente da definição que as seguintes seqüências não são seqüências de Cauchy.

   (a) $((-1)^n)$.

   (b) $(n + \dfrac{(-1)^n}{n})$.

3. Mostre diretamente da definição que se $(x_n)$ e $(y_n)$ são seqüências de Cauchy, então $(x_n + y_n)$ e $(x_n y_n)$ são seqüências de Cauchy.

4. Seja $p \in \mathbb{N}$. Mostre que a seqüência $(x_n)$, com $x_n := \sqrt{n}$, satisfaz $\lim |x_{n+p} - x_n| = 0$, mas ela não é uma seqüência de Cauchy.

5. Seja $(x_n)$ uma seqüência de Cauchy satisfazendo $x_n \in \mathbb{Z}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $(x_n)$ é ultimadamente constante.

6. Se $C > 0$, $0 < r < 1$ e $|x_{n+1} - x_n| < Cr^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostre que $(x_n)$ é uma seqüência de Cauchy.

7. Se $x_1 < x_2$ são números reais arbitrários e $x_n := \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2}{3}x_{n-2}$ para $n > 2$, mostre que $(x_n)$ é uma seqüência de Cauchy e encontre $\lim x_n$.

8. Mostre que as seguintes seqüências são contrativas e encontre seus limites.

   (a) $x_1 := 1$ e $x_{n+1} := 1/(2 + x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) $x_1 := 2$ e $x_{n+1} := 2 + 1/x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Defina uma seqüência contrativa para aproximar uma raíz $r$ da equação polinomial $x^3 - 3x + 1 = 0$ satisfazendo $0 < r < 1$. Encontre um valor aproximado de $r$ com erro menor que $10^{-4}$.

10. Mostre que se $(x_n)$ é uma seqüência ilimitada, então ela possui uma subseqüência propriamente divergente.

11. Dê exemplos de seqüência propriamente divergentes $(x_n)$ e $(y_n)$ com $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tais que:

    (a) $(x_n/y_n)$ é convergente;

    (b) $(x_n/y_n)$ é propriamente divergente.

12. Mostre que as seqüências $(\sqrt{n})$ e $(n/\sqrt{n+1})$ são propriamente divergentes.

13. Mostre que se $\lim x_n = 0$ e $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim(1/x_n) = +\infty$.

14. Mostre que se $\lim(x_n/n) = L$, onde $L > 0$, então $\lim x_n = +\infty$.

15. Suponha que $(x_n)$ é uma seqüência propriamente divergente e $(y_n)$ é uma seqüência tal que existe $\lim(x_n y_n) \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim y_n = 0$.