Matemática Discreta – EP6 – Versão aluno, de 2009/1

Observações: Caro aluno, aqui está o EP6, referente as aulas 12 e 13 do Módulo 1. Nestas aulas, terminamos os nossos estudos das *Técnicas Básicas da Combinatória de Contagem*, explorando dois conteúdos que estão diretamente associados aos *números binomiais*, $C(n, r)$, introduzidos na Aula 10: o *Triângulo de Pascal* e o *Teorema Binomial.* Nossa abordagem a esses conteúdos está direcionada para a resolução das questões mais usuais envolvendo estes conceitos, as quais aparecem nas listas de exercícios ao final de cada aula. Como sempre, se esforce ao máximo para entender as explicações e exemplos e resolva o máximo de exercícios que você puder, sobre esses conteúdos.

Conteúdo:

Este EP7 contém:

- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- uma dica de textos e sítios na internet aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- alguns exercícios que apareceram em avaliações passadas, para você testar os seus conhecimentos.

Sobre o conteúdo:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 12 e 13 —os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática— são:

- A construção do Triângulo de Pascal;
- Propriedades básicas do TP.
- O Teorema Binomial.
- Uso do TP na expansão do TB.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 12: todos os exercícios, exceto 4 e 5.
- Aula 13: todos os exercícios.

Informações extras:

Para visualizar o Triângulo de Pascal, visite o sítio:

http://oldweb.cecm.sfu.ca/organics/papers/granville/support/pascalform.html

---

Alguns exercícios para fixação:

1. Calcule o termo independente de x no desenvolvimento de:

   (a) $\left(x^2 + \dfrac{1}{x}\right)^6$.

   (b) $(x^{-\frac{1}{2}} - \sqrt[4]{x})^{18}$.

2. Calcule a e b, sabendo que

$$a^3 + C(3,1)a^2b + C(3,2)ab^2 + b^3 = 64$$

   e que

$$a^5 - C(5,1)a^4b + C(5,2)a^3b^2 - C(5,3)a^2b^3 + C(5,4)ab^4 - b^5 = 32.$$

3. Resolver a equação $A(n,3) = 3C(n,4)$.

4. Determinar a soma

$$1 + C(4n,1) + C(4n,2) + \ldots + C(4n,4n-2) + C(4n,4n-1) + 1,$$

   onde $n \in \mathbb{N}$.

5. (a) (1,0) Desenvolva o binômio $(2-x)^4$.

   (b) (1,0) Use o desenvolvimento obtido no item (a), fazendo $x = \dfrac{1}{100}$, para calcular $(1,99)^4$ com oito casas decimais.

Soluções comentadas:

1. (a) O termo geral de $(X+Y)^n$ é dado pela fórmula $\binom{n}{j} X^{n-j}Y^j$. Substituindo os valores de X, Y e n dados no binômio, temos $\binom{6}{j}(x^2)^{6-j}(x^{-1})^j = \binom{6}{j}x^{12-2j}x^{-j} = \binom{6}{j}x^{12-3j}$. Como o termo é independente de x, devemos ter $12 - 3j = 0$, o que acarreta $j = 4$. Assim, o termo procurado é $\binom{6}{4} = 15$.

   (b) O termo geral do desenvolvimento de $(A-B)^n$ é dado por:

$$T_{i+1} = (-1)^i C(n,i) A^{n-i} B^i.$$

   No caso considerado, temos $n = 18$, $A = x^{-\frac{1}{2}}$ e $B = x^{\frac{1}{4}}$. Substituindo, temos:

$$\begin{aligned} T_{i+1} &= (-1)^i C(18,i)(x^{-\frac{1}{2}})^{18-i}(x^{\frac{1}{4}})^i \\ &= (-1)^i C(18,i) x^{\frac{3i-36}{4}} \end{aligned}$$

   Como estamos procurando o termo independente de x, devemos ter $\dfrac{3i-36}{4} = 0$, ou seja $i = 12$. Logo, o termo procurado é $T_{13} = (-1)^{12}C(18,12) = C(18,12)$.

2. Observe que, pela fórmula do Teorema Binomial:

$$a^3 + C(3,1)a^2b + C(3,2)ab^2 + b^3 = (a+b)^3$$

   e

$$a^5 - C(5,1)a^4b + C(5,2)a^3b^2 - C(5,3)a^2b^3 + C(5,4)ab^4 - b^5 = (a-b)^5.$$

   Assim, temos $(a+b)^3 = 64$ e $(a-b)^5 = 32$. Daí, obtemos $a+b = 4$ e $a-b = 2$. Finalmente, resolvendo o sistema linear, temos $a = 3$ e $b = 1$.

3. Como $A(n,3) = \dfrac{n!}{(n-3)!}$ e $C(n,4) = \dfrac{n!}{(n-4)!4!}$, temos que $\dfrac{n!}{(n-3)!} = \dfrac{3n!}{(n-4)!4!}$. Simplificando temos, $\dfrac{1}{n-3} = \dfrac{3}{4!}$, ou seja, $n-3 = 4 \times 2$ e daí $n = 11$.

4. Basta observar que

$$\begin{array}{l}
1 + C(4n,1) + C(4n,2) + \ldots + C(4n,4n-2) + C(4n,4n-1) + 1 = \\
C(4n,0) + C(4n,1) + C(4n,2) + \ldots + C(4n,4n-2) + C(4n,4n-1) + C(4n,4n) = \\
(1+1)^{4n} = \\
2^{4n}.
\end{array}$$

5. (a) Pelo TB, temos:

$$\begin{array}{rcl}
(2-x)^4 & = & (2+(-x))^4 \\
& = & 2^4 + 4 \times 2^3(-x) + 6 \times 2^2(-x)^2 + 4 \times 2(-x)^3 + (-x)^4 \\
& = & 16 - 32x + 24x^2 - 8x^3 + x^4.
\end{array}$$

(b) Fazendo $x = \dfrac{1}{100}$, em (a), obtemos:

$$\begin{array}{rcl}
(1,99)^4 & = & \left(\dfrac{199}{100}\right)^4 \\
& = & \left(2 - \dfrac{1}{100}\right)^4 \\
& = & 16 - 32\frac{1}{100} + 24\left(\dfrac{1}{100}\right)^2 - 8\left(\dfrac{1}{100}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{100}\right)^4 \\
& = & 16 - 32\frac{1}{100} + 24\left(\dfrac{1}{10000}\right) - 8\left(\dfrac{1}{1000000}\right) + \left(\dfrac{1}{100000000}\right) \\
& = & 16 - 0,32 + 0,0024 - 0,000008 + 0,00000001 \\
& = & 16,00240001 - 0,320008 \\
& = & 15,68239201.
\end{array}$$
