Matemática Discreta – EP1 – Versão aluno, de 2009/1

Observações: Caro aluno, aqui está o EP1, referente as aulas 2 e 3 do Módulo 1. Nestas aulas você está entrando em contato com a linguagem básica da *Teoria dos Conjuntos* que será utilizada nos estudos posteriores de *Combinatória de Contagem* e *Probabilidade Discreta*.

Atualmente, a Teoria dos Conjuntos é um dos ramos mais importantes da Matemática (cf. A.S. Sant'Anna. Conjuntos: a necessidade do supérfluo. *Scientific American Brasil*, **46**, 66-72, 2006). Em nossa disciplina, ela será usada apenas como uma ferramenta auxiliar para expressarmos e raciocinarmos sobre certos fatos básicos da Combinatória de Contagem e da Probabilidade Discreta. Por isso, muita atenção quando usar as notações e os conceitos apresentados nas Aulas 2 e 3: eles são de vital importância para que você consiga se comunicar e raciocinar adequadamente em nosso curso.

Conteúdo:

Este EP1 contém:

- algumas dicas de como estudar as aulas;
- algumas dicas de como resolver os exercícios;
- um sumário dos conteúdos mais importantes;
- alguns comentários sobre o texto das aulas;
- alguns comentários sobre os exercícios propostos;
- uma bibliografia contendo textos recomendados, sobre Teoria dos Conjuntos;
- algumas dicas de sítios na Internet aonde você pode conseguir informações extras sobre os conteúdos abordados;
- alguns exercícios extras para você fixar a sua aprendizagem.

Como estudar as aulas:

Para o estudo das Aulas 2 e 3 do Módulo 1, sugerimos que você efetue os passos a seguir (estes passos também podem ser aplicados no estudo de todas as outras aulas que estão por vir):

1. Estude o texto, acompanhando os comentários que são feitos sobre cada aula, em cada EP.
2. Leia o texto atentamente, procurando compreender cada conceito e propriedade, através dos exemplos que são apresentados.
3. Após compreeder a informação contida neles, memorize todos os textos dentro dos retângulos, que estão em destaque.
4. Anote todas as suas dúvidas num caderno, da maneira mais clara possível, e entre em contato com o(s) tutor(es) presencial(is) ou à distância ou, ainda, com outros alunos, na tentativa de esclarecê-las. Tenha sempre em mente que *Matemática é uma atividade coletiva que pressupõe estudo individual e é apoiada na troca de informações entre aqueles que a estudam.*
5. Se um conteúdo parecer um pouco mais difícil, em um primeiro (ou segundo) contato, não desanime: descanse um pouco a cabeça e volte a estudá-lo mais tarde. Tenha sempre em mente que, usualmente, *a maioria dos conteúdos matemáticos não são assimilados em uma primeira abordagem e só são compreendidos adequadamente após várias investidas.*

Como resolver os exercícios:

Para a resolução de cada exercício das Aulas 2 e 3 do Módulo 1, sugerimos que você efetue os passos a seguir (estes passos também podem ser aplicados na resolução de todos os outros EPs e ADs que estão por vir):

1. Faça uma revisão detalhada dos conteúdos apresentados nas aulas em questão. Esclareça as dúvidas que ainda persistam com o(s) tutor(es).
2. Para cada questão: leia seu enunciado, procure entendê-lo completamente e faça uma lista preliminar dos conteúdos que você acha que serão usados na sua resolução.
3. Antes de tentar resolver cada questão, use a lista obtida no passo anterior para certificar-se de que você domina os conceitos, notações e resultados envolvidos.
4. Agora, sim, comece a resolver a questão, respondendo cada item proposto de forma clara e objetiva, utilizando, se possível, a linguagem e o estilo dos módulos e dos EPs.
5. Se durante a resolução das questões você tiver dúvidas, discuta-as com os tutores ou com outros alunos.

Sobre o conteúdo das Aulas 2 e 3:

Os conteúdos mais importantes tratados nas Aula 2 e 3 do Módulo 1 — os quais você deve dominar tanto conceitualmente quanto na prática — são:

- A representação de conjuntos: pela listagem dos elementos, por meio de uma propriedade característica dos elementos e por meio de diagramas de Venn.
- As relações fundamentais: pertinência, igualdade e inclusão.
- Os conjuntos especiais: vazio, unitários e universo.
- As operações com conjuntos: união, interseção, diferença e complementação.
- A álgebra dos conjuntos: as propriedades básicas das operações e sua verificação por meio de diagramas.

Sobre a Aula 2:

- **Página 17:** No Exemplo 1, também é assumido que o barbeiro faz a barba de *todos* os que não fazem a própria barba.
- Vamos mostrar que *o barbeiro descrito no Exemplo 1 da página 17 não existe.*

  Para isto, vamos aplicar um raciocínio bastante comum em Matemática mas que não será muito usado em MD:

  (a) Primeiro, vamos supor que o tal barbeiro existe.

  (b) Depois, vamos apresentar duas possibilidades excludentes e complementares: ou vale uma, ou vale a outra, mas não valem ambas.

  (c) Em seguida, vamos mostrar, usando a hipótese da existência do barbeiro, que cada uma destas possibilidades não pode acontecer.

  (d) Finalmente, vamos concluir que o tal barbeiro não pode existir, já que a sua existência leva a contradições.

  Vamos lá

  (a) Suponhamos que existe um barbeiro que faz a barba de todos os que não fazem a própria barbar, e somente destes.

  (b) Temos as duas seguintes possibilidades excludentes e complementares:

o barbeiro faz a própria barba
ou
o barbeiro não faz a própria barba.

(c) Vamos, agora, analisar cada uma destas possibilidades:

(c_1) A primeira possibilidade não pode acontecer pois o barbeiro não faz a barba de quem faz a própria barba.

(c_2) A segunda possibilidade também não pode acontecer pois o barbeiro tem que fazer a barba de quem não faz a própria barba.

(d) Assim, um tal barbeiro não pode existir.

- **Página 17:** No Exemplo 1, observe que, como o barbeiro especificado não existe, o conjunto que foi determinado é o conjunto vazio. Assim, a frase *não conseguimos determinar um conjunto de barbeiros que correspondem a essa propriedade* está errada. Uma frase correta é: *não conseguimos determinar um ser que corresponda a essa propriedade.*

- **Página 18:** Nos Exemplos 2 e 4, e em outras partes do texto, estamos listando *letras minúsculas do alfabeto latino.*

- **Página 18:** Compare o comentário após o Exemplo 4 com o comentário que finaliza esta aula e observe que, em qualquer contexto, a maneira mais adequada de se descrever um conjunto por meio de uma propriedade é descrever o conjunto como:

$$\{x \in U \mid x \text{ satisfaz a propriedade } P\},$$

  explicitando um *conjunto universo*, que contém todos os seres considerados naquele contexto.

- **Página 18:** No comentário anterior ao Exemplo 5, o que está se querendo dizer é que, às vezes, não sabemos *listar* todos os elementos de um conjunto determinado por uma propriedade e não que não *sabemos* quem eles são. Eles são exatamente os seres que possuem a dita propriedade.

- **Página 19:** No Exemplo 6, desconsidere o item referente a gatos e felinos.

- **Página 20:** Na definição de $A \not\subset B$, e em outras partes do texto, a expressão *algum* significa *ao menos um.* Por exemplo, é verdade que algum elemento do conjunto $\{1, 2, 3\}$ não pertence ao conjunto $\{3, 4, 5\}$. De fato, $1, 2 \in \{1, 2, 3\}$ mas $1, 2 \notin \{3, 4, 5\}$.

- **Página 20:** No Exemplo 8, desconsidere o item referente a gatos, leões, patos e felinos.

- **Página 21:** Considere o Exemplo 11 observando que o vazio é o *único* conjunto que não possui elementos. Isto é, todos os conjuntos vazio são iguais, não importando como eles são determinados. Assim, no Exemplo 11 o mesmo conjunto é determinado de três maneiras diferentes.

- **Página 21:** No Exemplo 12, desconsidere o item referente a animais mamíferos voadores e morcegos.

- **Página 21:** No comentário após o Exemplo 12, e em outras partes do texto, sempre que nos referimos ao número de elementos de um conjunto, estamos admitindo que ele é *finito.*

Sobre a Aula 3:

- **Página 28:** No Exemplo 20, e em outras partes do texto, aparecem conjuntos descritos como

$$\{\text{inteiros pares}\}.$$

  Observe que, esta notação não é adequada e estes conjuntos devem ser reescritos seguindo um modelo como

$$\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ é par}\}.$$

- **Página 28:** No comentário anterior ao Exemplo 22 o que se está querendo dizer é que, *fixado um conjunto B como universo e dado um subconjunto A de B, o complementar de A é a diferença $B - A$.*
- **Página 30:** No comentário ao final da página, está escrito que *o uso de diagramas não pode provar que uma sentença é verdadeira, apenas dar uma indicação.* Na verdade, esta afirmação não tem fundamento, nem matemático, nem filosófico. Atualmente, se considera, seriamente, tanto do ponto de vista lógico, quanto do matemático e, também, do filosófico, o uso de diagramas na prova de proposições.
- **Página 31:** No penúltimo parágrafo, desconsidere o comentário sobre a proibição do uso de diagramas na prova de proposições.

Sobre os exercícios do Módulo:

Exercícios que merecem uma atenção especial:

- Aula 2: exercícios 2, 3 (reescreva os conjuntos na forma

$$\{x \in U \mid x \text{ tem a propriedade } P\},$$

ou seja, em cada caso, especifique um conjunto universo adequado) e exercícios 4, 6.
- Aula 3: exercícios 8–11, 12–14, 15–22, 23–25 e 26–28.

Bibliografia sobre Teoria dos Conjuntos:

Para mais informações sobre a Teoria dos Conjuntos, sua importância para a matemática e as ciências em geral, bem como suas aplicações, você pode consultar os seguintes textos:

- M.A. Abe e N. Papavero. *Teoria intuitiva dos conjuntos.* São Paulo, Makron Books, 1992.
- E. Alencar. *Teoria elementar dos conjuntos.* São Paulo, Nobel, 1971.
- B. Castrucci. *Elementos da Teoria de Conjuntos.* São Paulo, GEEM, s.d.
- P.R. Halmos. *Teoria Ingênua dos Conjuntos.* Rio de Janeiro, Ciência Moderna, 2001.
- D. Krause. *Introdução aos Fundamentos Axiomáticos da Ciência.* São Paulo, EPU, 2002.
- S. Lipschutz. *Teoria de Conjuntos.* São Paulo, McGraw-Hill, 1972.
- F. Miraglia. *Teoria dos Conjuntos: um Mínimo.* São Paulo, EDUSP, 1991.
- A.S. Sant'Anna. Conjuntos: a necessidade do supérfluo. *Scientific American Brasil*, **46**, 66-72, 2006.

Sítios sobre Teoria dos Conjuntos:

Se você tem acesso fácil a Internet, visite os sítios:

http://mathfire.sites.uol.com.br/Conjunto.htm

http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_dos_Conjuntos

que contém uma exposição detalhada dos conceitos básicos da Teoria dos Conjuntos e

http://pt.wikipedia.org/wiki/Diagrama_de_Venn

http://www.pucsp.br/ abarcaap/Lista5-DiagramasdeVenn.html

http://www.venndiagram.tk/

http://www.cut-the-knot.org/LewisCarroll/Venn.shtml

http://www.cut-the-knot.org/LewisCarroll/VennClick.shtml que contém algumas informações extras sobre os Diagramas de Venn e, também, programas para manipulá-los.

Finalmente, visite a nossa plataforma no endereço:

http://www.cederj.edu.br

e estude as aulas de MD que estão disponíveis na WEB. Elas são um complemento, contendo ilustrações, para os conteúdos dos Módulos.

Alguns exercícios para fixação:

1. Classificar como V (verdadeira) ou F (falsa) cada uma das sentenças abaixo:

   (a) $\{3\} \in \{1,2,3\}$; (b) $3 \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (c) $3 \in \{1,2,3\}$

   (d) $\{1,2\} \notin \{1,2,3\}$; (e) $\{1,2,3\} = \{3,2,1\}$; (f) $\{a,b,c,a,b\} = \{b,c,a,a\}$;

   (g) $\{x \in \mathbb{N} \mid x+1 = x\} = \{x \in U \mid x \text{ é um quadrado com três lados}\}$,

   (h) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\} \neq \{0,1\}$; (i) $\{1,2,3\} = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$ (j) $\emptyset \subset \{a\}$

   (l) $\{a,b,c\} \subset \{a,b,c,\{a,b,c\}\}$; (m) $\{a,b,c\} \subset \{a,b,\{c\}\}$ (n) $\{\{a\},\{b\}\} \subset \{\{a\},\{b\}\}$.

2. Descreva os conjuntos A, B e C dos Exemplos 2, 3 e 4 da página 18 por meio de propriedades, explicitando conjuntos universos adequados, em cada caso.
3. Listar o conjunto dos números primos que ocorrem na fatoração do número 44.100.
4. Considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ é múltiplo de } 2\}; \\ B &= \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ é múltiplo de } 3\}; \\ C &= \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ é múltiplo de } 4\}; \\ D &= \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ é múltiplo de } 5\}; \\ E &= \{x \in \mathbb{N} \mid \ x \text{ é múltiplo de } 6\}. \end{aligned}$$

   (a) Represente $A \cap B$, $A \cap C$ e $B \cap C$ por meio de propriedades;
   (b) Determine $A \cap B \cap C$ e $A \cap C \cap E$ por meio de propriedades.

5. Resolva *todos* os exercícios das Aulas 2 e 3 do Módulo 1 de MD e confira as suas soluções com outros alunos e/ou com tutores de MD.

Soluções comentadas:

1. (a) F, pois $\{3\}$ não é um dos elementos de $\{1,2,3\}$;
   (b) F, pois 3 não é um dos elementos de $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
   (c) V, pois 3 é um dos elementos de $\{1,2,3\}$;
   (d) V, pois $\{1,2\}$ não é um dos elementos de $\{1,2,3\}$;
   (e) V, pois ambos os conjuntos possuem os mesmos elementos;
   (f) V, pois ambos os conjuntos possuem os mesmos elementos;
   (g) V, pois ambos os conjuntos são vazios;
   (h) F, pois 0 e 1 são os únicos números inteiros que satisfazem a equação $x^2 = x$;
   (i) F, pois, por exemplo, $1 \in \{1,2,3\}$ mas $1 \notin \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$;
   (j) V, pois $\emptyset$ é um subconjunto de *qualquer* conjunto;
   (l) V, pois todos os elementos de $\{a,b,c\}$ também são elementos de $\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$;
   (m) F, pois $c \in \{a,b,c\}$ mas $c \notin \{a,b,\{c\}\}$;
   (n) V, pois *qualquer* conjunto está contido em si mesmo.

2. (a) Considere como universo o conjunto U de todas as letras minúsculas do alfabeto latino. Podemos descrever $A = \{x \in U \mid x$ é uma das três primeiras letras$\}$.

   (b) Considere como universo o conjunto $\mathbb{N}$ de todos os números naturais. Podemos descrever $B = \{x \in U \mid x$ é par e $2 \leq x \leq 20\}$.

   (c) Considere como universo o conjunto U de todas as letras do alfabeto latino. Podemos descrever $C = \{x \in U \mid x$ é letra minúscula$\}$.

3. Temos que $44.100 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2$. Assim, o conjunto procurado é $D = \{2, 3, 5, 7\}$. Observe que cada elemento de D ocorre duas vezes na fatoração mas é listado uma única vez no conjunto.

4. (a) Observe que para um número natural qualquer, x, vale: $x \in A \cap B$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in B$ se, e somente se, x é múltiplo de 2 e x é múltiplo de 3 se, e somente se, x é múltiplo de 6. Assim, $A \cap B = \{x \in \mathbb{N} \mid\ x$ é múltiplo de $6\}$.

   Observe que para um número natural qualquer, x, vale: $x \in A \cap C$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in C$ se, e somente se, x é múltiplo de 2 e x é múltiplo de 4 se, e somente se, x é múltiplo de 4. Assim, $A \cap C = \{x \in \mathbb{N} \mid\ x$ é múltiplo de $4\}$.

   Observe que para um número natural qualquer, x, vale: $x \in B \cap C$ se, e somente se, $x \in B$ e $x \in C$ se, e somente se, x é múltiplo de 3 e x é múltiplo de 4 se, e somente se, x é múltiplo de 12. Assim, $B \cap C = \{x \in \mathbb{N} \mid\ x$ é múltiplo de $12\}$.

   (b) Observe que para um número natural qualquer, x, vale: $x \in A \cap B \cap C$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in B$ e $x \in C$ se, e somente se, x é múltiplo de 2 e x é múltiplo de 3 e x é múltiplo de 4 se, somente se, x é múltiplo de 12 (que é o mínimo múltiplo comum de $2, 3$ e 4). Assim, $A \cap B \cap C = \{x \in \mathbb{N} \mid\ x$ é múltiplo de $12\}$.

   Observe que para um número natural qualquer, x, vale: $x \in A \cap C \cap E$ se, e somente se, $x \in A$ e $x \in C$ e $x \in E$ se, e somente se, x é múltiplo de 2 e x é múltiplo de 4 e x é múltiplo de 6 se, somente se, x é múltiplo de 12 (que é o mínimo múltiplo comum de $2, 4$ e 6). Assim, $A \cap C \cap E = \{x \in \mathbb{N} \mid\ x$ é múltiplo de $12\}$.
