Aula 19 – Fuções Monótonas e Inversas

Metas da aula: Estudar as funções monótonas e suas propriedades. Estabelecer a existência, em todos os pontos do domínio, de limites laterais de funções monótonas definidas em intervalos. Estabelecer o Teorema da Inversa Contínua.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Conhecer o conceito de função monótona não-decrescente, crescente, não-crescente e decrescente, e suas propriedades. Saber o significado da existência de limites laterais de funções monótonas definidas em intervalos.

- Conhecer o conceito de função inversa. Saber o significado do Teorema da Inversa Contínua e como aplicá-lo em exemplos específicos.

Introdução

Nesta aula estudaremos as funções monótonas em geral, definidas em intervalos de $\mathbb{R}$, e, em particular, as funções estritamente monótonas: crescentes e decrescentes. Estas últimas são injetivas e portanto possuem funções inversas. Vamos mostrar que as funções monótonas definidas em intervalos possuem limites laterais em todos os pontos do intervalo de definição, embora possam ser descontínuas em alguns pontos desse intervalo. Veremos também que o conjunto dos pontos de descontinuidade das funções monótonas definidas em intervalos é um conjunto enumerável (finito ou infinito). Recordaremos o conceito de função inversa e estabeleceremos o Teorema da Inversa Contínua, que afirma que toda função estritamente monótona contínua num intervalo possui uma inversa (estritamente monótona) contínua. Finalmente, analisaremos o exemplo concreto das raízes n-ésimas e das potências racionais.

Funções Monótonas

Comecemos recordando a definição de função monótona.

Definição 19.1
Se $X \subset \mathbb{R}$, então diz-se que $f : X \to \mathbb{R}$ é **não-decrescente em** X se vale a propriedade de que $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \leq f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$. A função

f é dita **crescente em** X se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$. Similarmente, $f : X \to \mathbb{R}$ é **não-crescente em** X se vale a propriedade de que $x_1 \leq x_2$ implica $f(x_1) \geq f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$. A função f é dita **decrescente em** X se $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1, x_2 \in X$.

Se $f : X \to \mathbb{R}$ é não-decrescente ou não-crescente dizemos que ela é **monótona**. Se f é crescente ou decrescente dizemos que ela é **estritamente monótona**.

Notemos que se $f : X \to \mathbb{R}$ é não-decrescente, então $g := -f$ é não-crescente. Da mesma forma, se $f : X \to \mathbb{R}$ é não-crescente, então $g := -f$ é crescente. Portanto, em nossa discussão a seguir, para evitar repetições em excesso, enunciaremos os resultados apenas para funções não-decrescentes. Ficará subentendido que todos esses resultados possuem um análogo para funções não-crescentes, cuja prova pode também ser obtida diretamente da observação que acabamos de fazer, ou usando argumentos semelhantes aos da prova do resultado correspondente para funções não decrescentes.

Claramente, nem toda função monótona é contínua, como mostra o exemplo da função $f(x) := \operatorname{sgn}(x)$ em $\mathbb{R}$, que é descontínua em $\bar{x} = 0$. Porém, o seguinte resultado mostra que essas funções, quando definidas em intervalos, sempre possuem ambos os limites laterais (finitos) em todos os pontos do intervalo de definição, que não sejam os extremos do intervalo. Nestes últimos sempre existem os limites unilaterais correspondentes.

Teorema 19.1

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ não-decrescente em I. Suponhamos que $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I. Então

(i) $\lim\limits_{x \to \bar{x}-} f = \sup\{f(x) \,:\, x \in I,\ x > \bar{x}\}$,

(ii) $\lim\limits_{x \to \bar{x}+} f = \inf\{f(x) \,:\, x \in I,\ x < \bar{x}\}$.

No caso em que $\bar{x} \in I$ é um extremo de I então existe o limite unilateral correspondente: à direita, se $\bar{x}$ é um extremo à esquerda, e à esquerda, se $\bar{x}$ é um extremo à direita.

Prova: (i) Inicialmente lembremos que se $x \in I$ e $x < \bar{x}$, então $f(x) \leq f(\bar{x})$. Portanto, o conjunto $A := \{f(x) \,:\, x \in I,\ x < \bar{x}\}$ é limitado superiormente por $f(\bar{x})$, e não-vazio já que $\bar{x}$ não é um extremo (à esquerda) de I. Logo, existe $L := \sup\{f(x) \,:\, x \in I,\ x > \bar{x}\}$. Se $\varepsilon > 0$ é dado, então $L - \varepsilon$ não é quota superior de A. Então, existe $x_\varepsilon \in I$, com $x_\varepsilon < \bar{x}$, tal que $L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq L$. Como f é não-decrescente, deduzimos que se $\delta := \bar{x} - x_\varepsilon$

e se $0 < \bar{x} - x < \delta$, então $x_\varepsilon < x < \bar{x}$, de modo que

$$L - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq L.$$

Portanto, $|f(x) - L| < \varepsilon$ quando $0 < \bar{x} - x < \delta$ e, como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que (i) vale.

A demonstração de (ii) bem como a do caso em que $\bar{x}$ é um extremo de I são inteiramente semelhantes.

□

O próximo resultado é um corolário do anterior e fornece um critério de continuidade para uma função não-decrescente f num ponto $\bar{x}$ de seu intervalo de definição.

Teorema 19.2

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ não-decrescente em I. Suponhamos que $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) f é contínua em $\bar{x}$.

(ii) $\lim\limits_{x \to \bar{x}-} f = f(\bar{x}) = \lim\limits_{x \to \bar{x}+} f$.

(iii) $\sup\{f(x) \,:\, x \in I,\ x < \bar{x}\} = f(\bar{x}) = \inf\{f(x) \,:\, x \in I,\ x > \bar{x}\}$.

Prova: Segue facilmente do Teorema 19.1 combinado com o Teorema 18.2. Deixamos os detalhes para você como exercício.

□

Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente. Se a é o extremo à esquerda de I, é um exercício fácil mostrar que f é contínua em a se, e somente se,

$$f(a) = \inf\{f(x) \,:\, x \in I,\ a < x\}$$

ou se, e somente se, $f(a) = \lim\limits_{x \to a+} f$. Um fato análogo vale para $b \in I$ se b é um extremo à direita de I. Você deve ser capaz também, em todos os casos, de estabelecer os resultados análogos para funções não-crescentes.

Definição 19.2

Se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente e $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I, definimos o **salto de f em $\bar{x}$** como (veja Figura **19.1**)

$$s_f(\bar{x}) := \lim_{x \to \bar{x}+} f - \lim_{x \to \bar{x}-} f.$$

Se $a \in I$ é um extremo à esquerda de I, então definimos o **salto de f em a** por

$$s_f(a) := \lim_{x \to a+} f - f(a),$$

ao passo que se $b \in I$ é um extremo à direita de I, definimos o **salto de f em b** por

$$s_f(b) := f(b) - \lim_{x \to b-} f.$$

Segue do Teorema 19.1 que se $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I,

$$s_f(\bar{x}) = \inf\{f(x) : x \in I, \ x > \bar{x}\} - \sup\{f(x) : x \in I, \ x < \bar{x}\}, \qquad (19.1)$$

quando f é uma função não-decrescente. Como um fácil exercício, você deve estabelecer as definições de salto, num ponto não extremo e nos pontos extremos de I, no caso de uma função não-crescente em I, bem como os análogos da fórmula (19.1) nos diversos casos.

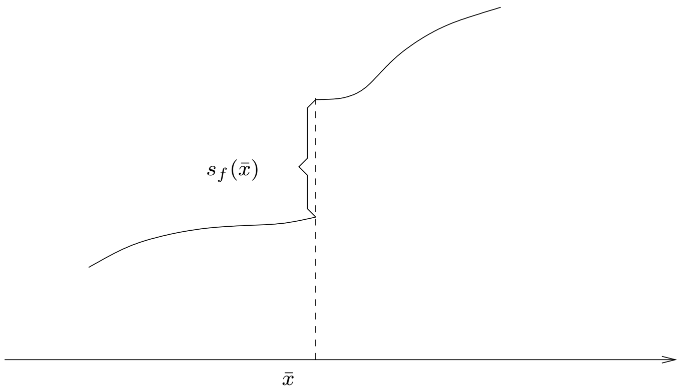

Figura **19.1**: O salto de f em $\bar{x}$.

Teorema 19.3
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente em I. Se $\bar{x} \in I$, então f é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, $s_f(\bar{x}) = 0$.

Prova: Se $\bar{x}$ não é um extremo de I, o resultado segue do Teorema 19.2. Se $\bar{x} \in I$ é um extremo à esquerda de I, então f é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, $f(c) = \lim_{x \to \bar{x}+} f$, o que é equivalente a $s_f(\bar{x}) = 0$. Argumentos semelhantes se aplicam ao caso em que $\bar{x}$ é um extremo à direita de I.

□

Mostraremos a seguir que o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é sempre enumerável.

Teorema 19.4
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função monótona em I. Então o conjunto de pontos $D \subset I$ nos quais f é descontínua é um conjunto enumerável.

Prova: Vamos supor que f é não-decrescente. Segue do Teorema 19.3 que $D = \{x \in I \,:\, s_f(x) > 0\}$. Consideraremos o caso em que $I = [a, b]$ é um intervalo fechado e limitado, deixando como exrecício para você o caso de um intervalo arbitrário.

Primeiro, notemos que como f é não-decrescente, então $s_f(x) \geq 0$ para todo $x \in I$. Além disso, se $a \leq x_1 < \cdots < x_n \leq b$, então temos (por quê?)

$$f(a) \leq f(a) + s_f(x_1) + \cdots + s_f(x_n) \leq f(b), \tag{19.2}$$

donde segue que (veja Figura **19.2**)

$$s_f(x_1) + \cdots + s_f(x_n) \leq f(b) - f(a).$$

Consequentemente, dado qualquer $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$D_k := \{x \in I = [a, b] \,:\, s_f(x) \geq (f(b) - f(a))/k\}$$

pode possuir no máximo k pontos. Como

$$D = \cup_{k\in\mathbb{N}} D_k,$$

(por quê?) concluímos que D é enumerável (por quê?).

□

Exemplos 19.1

(a) Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz a identidade

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}, \tag{19.3}$$

e f é contínua num único ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então f é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$. A demontração deste fato não requer as noções aprendidas nesta aula, mas vamos usá-las no ítem seguinte.

Com efeito, dados $x, y \in \mathbb{R}$, qualquer seqüência (z_n) convergindo a $x+y$ pode ser escrita na forma $z_n = x_n + y$, onde (x_n) é uma seqüência convergindo a x. Logo, se f satisfaz (19.3) e f é contínua em $\bar{x} \in \mathbb{R}$, temos

$$\lim_{z\to\bar{x}+y} f = \lim_{x\to\bar{x}} f + f(y) = f(\bar{x}) + f(y) \qquad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Como todo ponto $z \in \mathbb{R}$ pode ser escrito na forma $z = \bar{x}+y$, tomando-se $y = z - \bar{x}$, segue que f é contínua em $\mathbb{R}$.

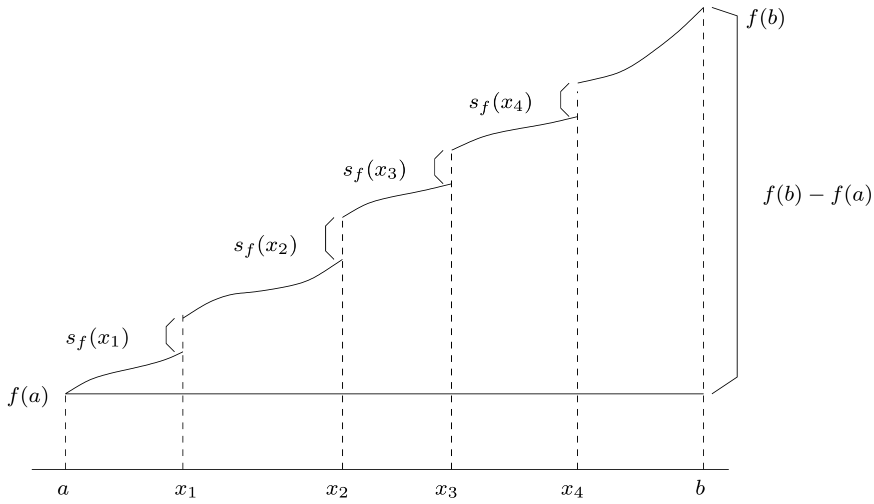

Figura **19.2**: $s_f(x_1) + \cdots + s_f(x_n) \leq f(b) - f(a)$.

(b) Portanto, se f é monótona e satisfaz (19.3), então f é contínua e, nesse caso, $f(x) = cx$ com $c = f(1)$.

De fato, pelo Teorema 19.3, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f é enumerável. Como $\mathbb{R}$ é não-enumerável, o conjunto dos pontos onde f é contínua é não-vazio (na verdade, é infinito, não-enumerável). Pelo ítem anterior, f é contínua em $\mathbb{R}$. Agora, segue de (19.3) que

$$f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$
$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x),$$

e (por quê?)

$$f(m) = f(1)m \qquad \text{para todo } m \in \mathbb{Z}.$$

Dado $r = m/n \in \mathbb{Q}$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, temos

$$mf(1) = f(m) = f(nr) = nf(r) \Rightarrow f(r) = f(1)r.$$

Logo, vale $f(x) = cx$, com $c = f(1)$, para todo $x \in \mathbb{Q}$. Dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x = \lim x_n$, com $x_n \in \mathbb{Q}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, se f é contínua, temos

$$f(x) = \lim f(x_n) = \lim cx_n = c \lim x_n = cx.$$

Funções Inversas

Notemos que se $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona, então, em particular, $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$ para todo $x, y \in X$. Logo, f é injetiva.

Portanto, se $f : X \to \mathbb{R}$ é estritamente monótona e $Y = f(X)$, então existe uma função inversa $g : Y \to \mathbb{R}$, isto é, g satisfaz

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \in X, \text{ e} \quad f(g(y)) = y \quad \text{para todo } y \in Y.$$

No teorema a seguir mostraremos que se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função *contínua* estritamente monótona, então a função inversa $g : J = f(I) \to \mathbb{R}$ é contínua em J e também é estritamente monótona. Se f é crescente, então g é crescente; se f é decrescente, então g é decrescente.

Teorema 19.5 (da Inversa Contínua)
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função estritamente monótona e contínua em I. Então a função g inversa de f é estritamente monótona e contínua em $J = f(I)$.

Prova: Consideraremos o caso em que f é crescente. O caso em que f é decrescente fica para você como exercício.

Seja $J = f(I)$. Como f é contínua, o Teorema 16.5 garante que J é um intervalo. Como f é injetiva em I, existe a função inversa $g := f^{-1} : J \to \mathbb{R}$. Mais ainda, como $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in I$, então $y_1 < y_2$ implica $g(y_1) < g(y_2)$ para todos $y_1, y_2 \in J$. De fato, caso valesse $y_1 < y_2$ e $g(y_1) \geq g(y_2)$ para algum par de pontos $y_1, y_2 \in J$, então, fazendo $x_1 = g(y_1)$ e $x_2 = g(y_2)$, teríamos $x_1 \geq x_2$ e $f(x_1) = y_1 < y_2 = f(x_2)$, contrariando o fato de que f é crescente. Logo, g é crescente em J.

Resta mostrar que g é contínua. No entanto, isso é uma conseqüência do fato que J é um intervalo. De fato, se g fosse descontínua num ponto $\bar{y} \in J$, então o $s_g(\bar{y}) > 0$, de modo que $\lim\limits_{y \to \bar{y}-} g < \lim\limits_{y \to \bar{y}+}$. Assim, se tomássemos um ponto $x \neq g(\bar{y})$ satisfazendo $\lim\limits_{y \to \bar{y}-} g < x < \lim\limits_{y \to \bar{y}+}$, então x teria a propriedade de que $x \neq g(y)$ para todo $y \in J$ (veja Figura **19.3**). Logo, $x \notin I$, o que contradiz o fato de que I é um intervalo. Portanto, concluímos que g é contínua em J.

$\square$

A Função Raiz n-ésima

Aplicaremos o Teorema da Inversa Contínua 19.5 à função potência n-ésima $x \mapsto x^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Precisaremos distinguir dois casos: (i) n par; (ii) n ímpar.

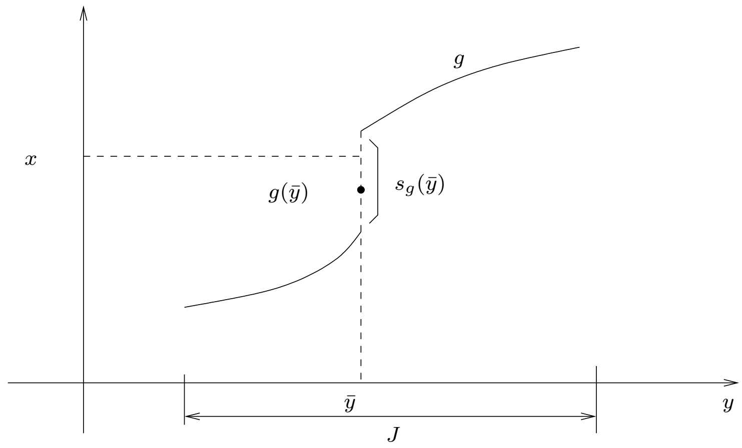

Figura **19.3**: $g(y) \neq x$ para $y \in J$.

(i) n **par**. Neste caso, para obter uma função estritamente monótona, temos que restringir a função $x \mapsto x^n$ ao intervalo $I := [0, \infty)$. Assim, seja $f(x) = x^n$ para $x \in I$ (veja Figura **19.4** à esquerda).

Sabemos que se $0 \leq x_1 < x_2$, então $f(x_1) = x_1^n < x_2^n = f(x_2)$. Portanto, f é crescente em I. Mais ainda, segue do Exemplo 15.1 (a) que f é contínua em I. Logo, pelo Teorema 16.5 temos que $J := f(I)$ é um intervalo. Mostraremos que $J = [0, \infty)$. Seja $y \geq 0$ arbitrário. Pela Propriedade Arquimediana, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq y < k$. Como

$$f(0) = 0 \leq y < k < k^n = f(k),$$

segue do Teorema do Valor Intermediário 16.3 que $y \in J$. Como $y \geq 0$ é arbitrário, inferimos que $J = [0, \infty)$.

Concluímos do Teorema da Inversa Contínua 19.5 que a função g que é inversa de $f(x) = x^n$ em $I = [0, \infty)$ é crescente e contínua em $J = [0, \infty)$. É comum denotar-se

$$g(x) = x^{1/n} \quad \text{ou} \quad g(x) = \sqrt[n]{x}$$

para $x \geq 0$, n par, e chamar $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ a **raiz n-ésima de** $x \geq 0$, n par (veja Figura **19.4** à direita). Portanto, temos

$$(x^n)^{1/n} = x \quad \text{e} \quad (x^{1/n})^n = x$$

para todo $x \in [0, \infty)$ e n par.

(ii) n **ímpar**. Nesse caso fazemos $f(x) := x^n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De novo, pelo Exemplo 15.1 (a) f é contínua em $\mathbb{R}$. Da mesma forma que para

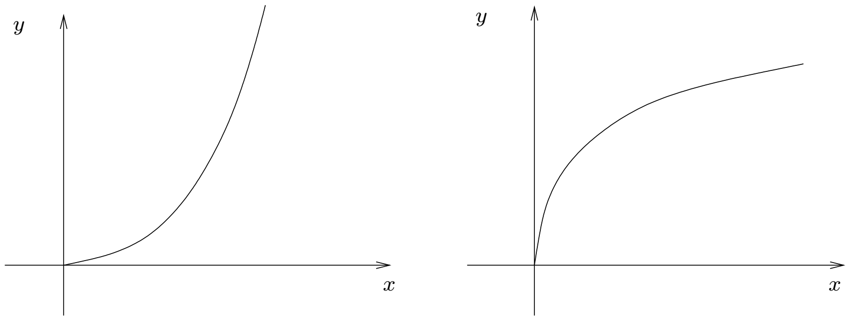

Figura **19.4**: À esquerda o gráfico de $f(x) = x^n$, $x \geq 0$, n par.
À direita o gráfico de $g(x) = x^{1/n}$, $x \geq 0$, n par.

n par, verificamos facilmente que f é crescente e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, o que deixamos para você como exercício (veja Figura **19.5** à esquerda).

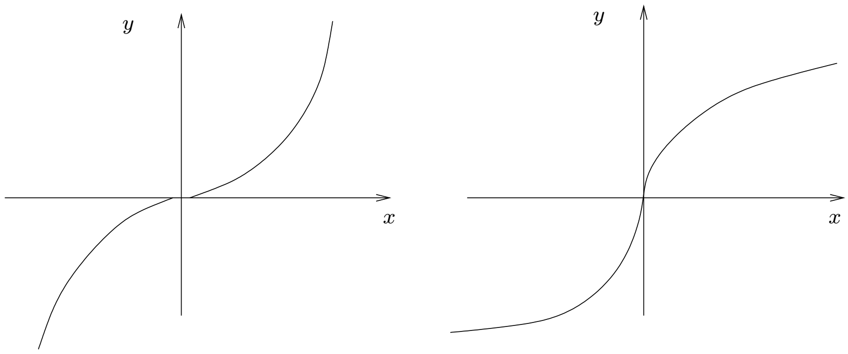

Figura **19.5**: À esquerda o gráfico de $f(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$, n ímpar.
À direita o gráfico de $g(x) = x^{1/n}$, $x \in \mathbb{R}$, n ímpar.

Segue do Teorema da Inversa Contínua 19.5 que a função g, que é inversa de $f(x) = x^n$ para $x \in \mathbb{R}$, é crescente e contínua em $\mathbb{R}$. É comum denotar-se

$$g(x) = x^{1/n} \quad \text{ou} \quad g(x) = \sqrt[n]{x} \quad \text{para } x \in \mathbb{R},\ n \text{ ímpar},$$

e chamar $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ a **raiz n-ésima de** $x \in \mathbb{R}$. Também nesse caso temos

$$(x^n)^{1/n} = x \quad \text{ou} \quad (x^{1/n})^n = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ e } n \text{ ímpar}.$$

Potências Racionais

Uma vez definida a raiz n-ésima para $n \in \mathbb{N}$, é fácil definir potências racionais.

Definição 19.3
(i) Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \geq 0$, definimos $x^{m/n} := (x^{1/n})^m$.
(ii) Se $m, n \in \mathbb{N}$ e $x > 0$, definimos $x^{-m/n} := (x^{1/n})^{-m}$.

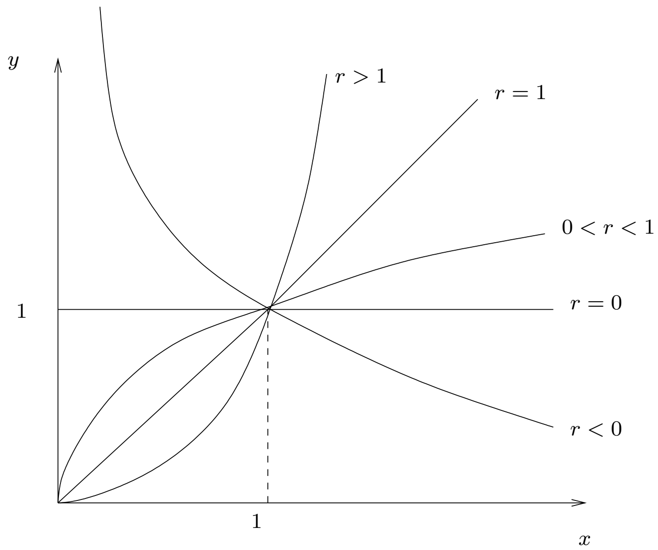

Figura **19.6**: Gráficos de $x \mapsto x^r$, $x \geq 0$, $r \in \mathbb{Q}$.

Portanto, fica assim definido x^r quando r é um racional qualquer e $x > 0$. Os gráficos de $x \mapsto x^r$ assumem formas diferentes se $r > 1$, $r = 1$, $0 < r < 1$, $r = 0$, ou $r < 0$ (veja Figura **19.6**). Como um número racional $r \in \mathbb{Q}$ pode ser escrito na forma $r = m/n$, com $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, de várias maneiras, é preciso mostrar que a Definição 19.3 não é ambígua. Isto é, se $r = m/n = p/q$ com $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$ e se $x > 0$, então $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$. Deixamos para você como exercício a verificação deste fato.

Teorema 19.6
Se $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, e $x > 0$, então $x^{m/n} = (x^m)^{1/n}$.

Prova: Se $x > 0$ e $m, n \in \mathbb{Z}$, então $(x^m)^n = x^{mn} = (x^n)^m$. Agora, seja $y := x^{m/n} = (x^{1/n})^m$, de modo que $y^n = ((x^{1/n})^m)^n = ((x^{1/n})^n)^m = x^m$. Portanto, segue que $y = (x^m)^{1/n}$.

$\square$

Como um exercício, você deve mostrar também que se $x > 0$ e $r, s \in \mathbb{Q}$, então

$$x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r \quad \text{e} \quad (x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r.$$

Exercícios 19.1

1. Se $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente, então o ponto a (respectivamente, b) é um ponto de mínimo (respectivamente, máximo) absoluto para f em I. Se f é crescente, então a (respectivamente, b) é o único ponto de mínimo (respectivamente, máximo) absoluto.

2. Se f e g são funções não-decrescentes num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, mostre que $f + g$ é uma função não-decrescente em I. Se f e g são crescentes em I, então $f + g$ é crescente em I.

3. Verifique que ambas as funções $f(x) := x$ e $g(x) := x - 1$ são crescentes em $[0, 1]$, mas seu produto fg não é sequer uma função monótona em $[0, 1]$.

4. Mostre que se f e g são funções positivas e não-decrescentes num intervalo I, então seu produto fg é não-decrescente em I.

5. Mostre que se $I := [a, b]$ e $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente em I, então f é contínua em a se, e somente se, $f(a) = \inf\{f(x) : x \in (a, b]\}$.

6. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente em I. Suponhamos que $\bar{x} \in I$ não é um ponto extremo de I. Mostre que f é contínua em $\bar{x}$ se, e somente se, existe uma seqüência (x_n) em I tal que $x_n < \bar{x}$ se n é ímpar, $x_n > \bar{x}$ se n é par, $\lim x_n = \bar{x}$, e $f(\bar{x}) = \lim f(x_n)$.

7. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente em I. Se $\bar{x} \in I$ não é um extremo de I, mostre que o salto $s_f(\bar{x})$ de f em $\bar{x}$ é dado por
$$s_f(\bar{x}) = \inf\{f(x_2) - f(x_1) : x_1 < \bar{x} < x_2,\ x_1, x_2 \in I\}.$$

8. Sejam f, g funções não-decrescentes num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e seja $f(x) > g(x)$ para todo $x \in I$. Se $y \in f(I) \cap g(I)$, mostre que $f^{-1}(y) < g^{-1}(y)$. [Dica: Primeiro faça o esboço de uma representação gráfica para essa situação.]

9. Seja $I := [0, 1]$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x$ se x é racional, e $f(x) := 1 - x$ se x é irracional. Mostre que f é injetiva em I e que $f(f(x)) = x$ para todo $x \in I$. Portanto, f é inversa de si mesma!. Mostre que f é contínua somente em $\bar{x} = \dfrac{1}{2}$.

10. Seja $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Mostre que se $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{N}$, e $mq = np$, então $(x^{1/n})^m = (x^{1/q})^p$.

11. Se $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$, e se $r, s \in \mathbb{Q}$, mostre que $x^r x^s = x^{r+s} = x^s x^r$ e $(x^r)^s = x^{rs} = (x^s)^r$.