Aula 1 – Preliminares: Conjuntos e Funções

Metas da aula: Fazer uma breve recordação dos fatos básicos sobre conjuntos e funções. Apresentar uma introdução à prática de demonstração de proposições matemáticas, ponto central em todo o curso.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado matemático e o uso dos principais símbolos e das operações da teoria elementar dos conjuntos;
- Saber os conceitos básicos relacionados à noção de função entre dois conjuntos bem como as operações de composição, inversão e restrição;
- Demonstrar proposições simples envolvendo conjuntos e funções.

Introdução

Iniciamos nosso curso de Análise Real recordando as noções de conjunto e função. Esta aula deve portanto ser vista como uma aula de recapitulação de fatos já aprendidos em cursos anteriores. Vamos aproveitar para introduzir algumas notações que serão utilizadas ao longo de todo curso.

Conjuntos

Admitimos como familiares o conceito (intuitivo) de *conjunto*, significando coleção, família etc., assim como as operações elementares entre conjuntos, nomeadamente, a união $A \cup B$, a interseção $A \cap B$ e a diferença, $A \setminus B$, entre dois conjuntos quaisquer A e B. O conjunto $A \setminus B$ também é chamado o *complementar de* B *em relação a* A. Lembremos as notações usuais:

$$x \in A, \quad \text{significa que } x \text{ é um elemento ou membro de } A,$$

e

$$A \subset B, \quad \text{significa que todo elemento do conjunto } A \text{ é também um elemento do conjunto } B,$$

ou seja, que o conjunto A é um *subconjunto* do conjunto B. A negação de $x \in A$ se denota por $x \notin A$, que se lê x não pertence a A ou x não é um elemento (ou membro) de A. Outrossim, é importante ressaltar o significado da igualdade entre dois conjuntos:

$$A = B, \quad \text{significa } A \subset B \text{ e } B \subset A,$$

isto é, A e B possuem exatamente os mesmos elementos.

Assim, para provarmos que o conjunto A está contido no conjunto B, isto é, $A \subset B$, devemos provar que para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$. Por outro lado, para provarmos que $A = B$, devemos provar que para todo x, se $x \in A$, então $x \in B$ e, reciprocamente, se $x \in B$ então $x \in A$, ou seja, $x \in A$ se e somente se $x \in B$.

Ao longo do curso de Análise Real estaremos sempre lidando com conjuntos que são subconjuntos do conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, cujas propriedades fundamentais serão estudadas de modo sistemático mais adiante. Dentre esses subconjuntos de $\mathbb{R}$, cabe destacar o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros e o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais. De modo um tanto informal, podemos descrever esses conjuntos assim:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \cdots\},\\
&\mathbb{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\},\\
&\mathbb{Q} := \{r \,:\, r = \frac{p}{q},\ \ p, q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Aqui usamos a notação $:=$ que deve ser lida 'igual, por definição'. Temos, portanto,

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Denotamos por $\emptyset$ o *conjunto vazio*, isto é, o conjunto que não possui nenhum elemento. Temos que, para todo conjunto A, $\emptyset \subset A$.

No que segue, usaremos a palavra *proposição* no sentido de *sentença matemática*, que pode ser expressa através de uma fórmula matemática ou uma declaração textual, ou ainda uma combinação dessas duas formas, e que, em geral, poderá depender de uma ou mais variáveis. Como exemplos citamos: $x \in A$ ou $x \in B$; $x > 2$ e $x < 3$; $x \in \mathbb{N}$ e $x = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ etc. Usaremos a letra P para denotar uma proposição qualquer e, quando quisermos enfatizar o fato dessa proposição depender de uma variável x, denotaremos $P[x]$.

Grosso modo, as regras para a formação de conjuntos são as seguintes:

1. A descrição explícita dos membros do conjunto na forma de uma lista delimitada à esquerda e à direita pelas chaves { e }, respectivamente. Por exemplo, $\{a, b, c, d\}$, $\{1, 2, 3\}$ etc. Nem sempre é possível descrever um conjunto listando-se seus elementos e por isso frequentemente utilizamos os modos alternativos a seguir.

2. A formação de novos conjuntos a partir de conjuntos já previamente definidos. Em geral, para essa construção usamos uma expressão da forma $\{x : P\}$, que se lê "o conjunto dos x tais que P", onde P é uma proposição envolvendo x e os conjuntos previamente definidos. Por exemplo, se A e B são conjuntos, então podemos definir os seguintes conjuntos:

   (a)
   $$A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\},$$
   o membro à direita lê-se: conjunto dos x tal que x pertence a A ou x pertence a B;

   (b)
   $$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\},$$
   o membro à direita lê-se: conjunto dos x tal que x pertence a A e x pertence a B;

   (c)
   $$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ e } x \notin B\},$$
   o membro à direita lê-se: conjunto dos x tal que x pertence a A e x não pertence a B;

   (d)
   $$A \times B = \{(a, b) : \ a \in A \text{ e } b \in B\},$$
   o membro à esquerda é chamado o produto cartesiano do conjunto A pelo conjunto B e o membro à direita lê-se: conjunto dos pares ordenados (a, b) com a pertencente a A, e b pertencente a B. A rigor, para mantermos o padrão de descrição estabelecido acima, $\{x : P\}$, deveríamos escrever $A \times B = \{x : x = (a, b), \text{ com } a \in A \text{ e } b \in B\}$. A primeira forma, mais concisa, deve ser entendida como uma abreviatura desta última.

(e) Dado o conjunto A, podemos definir o conjunto $\mathcal{P}(A)$, cujos elementos são exatamente todos os subconjuntos de A, incluindo $\emptyset$ e o próprio A. Assim, temos

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subset A\}.$$

Por exemplo,

$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

(f) Um caso particular importante dessa forma de se obter novos conjuntos a partir de conjuntos já previamente definidos é a descrição de um novo conjunto como subconjunto de um conjunto conhecido, através de uma proposição ou fórmula P que deve ser satisfeita por todos os elementos do novo conjunto. Por exemplo, o conjunto $\mathbf{P}$ dos números naturais pares pode ser definido por

$$\mathbf{P} := \{x : x \in \mathbb{N} \text{ e existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2k\}.$$

A forma geral para a definição de um subconjunto A de um conjunto previamente definido B por meio de uma proposição P é: $\{x : x \in A \text{ e } x \text{ satisfaz } P\}$. Em geral, usa-se de fato a notação mais concisa $\{x \in A : \ x \text{ satisfaz } P\}$ ou $\{x \in A : P[x]\}$. No caso dos números naturais pares, P é "existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2k$". Assim, na forma concisa, temos

$$\mathbf{P} = \{x \in \mathbb{N} : x = 2k, \ \text{para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

De modo mais informal e mais conciso ainda, poderíamos escrever também $\mathbf{P} = \{2k : k \in \mathbb{N}\}$. Analogamente, o conjunto $\mathbf{I}$ dos números naturais ímpares é definido por $\mathbf{I} := \{x \in \mathbb{N} : x = 2k-1, \ \text{para algum } k \in \mathbb{N}\}$, ou ainda $\mathbf{I} = \{2k-1 : k \in \mathbb{N}\}$.

3. Ainda uma outra forma, muito particular, de definir conjuntos, é através da introdução de um axioma que estabeleça a existência de um conjunto satifazendo determinadas propriedades bem especificadas. Por exemplo, o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ pode ser definido dessa forma, como veremos na próxima aula. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais também pode ser definido seguindo esse método, chamado *método axiomático*, como veremos mais adiante. É claro que o recurso a esse procedimento envolve uma discussão bastante delicada, de caráter lógico,

sobre a consistência do axioma introduzido com os demais previamente admitidos na teoria; é, portanto, utilizado apenas em casos excepcionais e somente por especialistas muito experientes. Os dois exemplos de (possível) adoção desse procedimento que acabamos de dar, para a construção de $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, pertencem à História da Matemática.

O curso de Análise Real constitui uma ótima oportunidade de se aprender, através de leitura e muitos exercícios, a entender e, principalmente, a produzir as chamadas *demonstrações* ou *provas matemáticas.* A teoria rigorosa do que venha a ser uma autêntica prova matemática pertence ao domínio da Lógica, a qual escapa dos objetivos do presente curso.

No entanto, não é em absoluto necessário um profundo conhecimento de Lógica Matemática para ser capaz de entender e de produzir provas matemáticas. Para tanto, uma introdução elementar como a oferecida pelo curso de Matemática Discreta é mais do que suficiente.

Como um primeiro exemplo de demonstração, vamos agora enunciar e provar as famosas regras de De Morgan da teoria elementar dos conjuntos.

Exemplo 1.1
(*Identidades de De Morgan*) Sejam A, B e C conjuntos. Então valem as igualdades

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad \text{e} \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Prova: Provemos a primeira igualdade. Para tanto, temos de mostrar que $A \setminus (B \cup C)$ e $(A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ possuem os mesmos elementos, ou seja, que para um x qualquer, se $x \in A \setminus (B \cup C)$, então $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ e, reciprocamente, se $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, então $x \in A \setminus (B \cup C)$.

Em outras palavras, temos de mostrar que, para qualquer que seja x, vale que $x \in A \setminus (B \cup C)$ se, e somente se, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Com efeito, suponhamos que $x \in A \setminus (B \cup C)$. Então, $x \in A$ e $x \notin B \cup C$ (por quê?). Assim, vale $x \in A$ e vale $x \notin B$ e $x \notin C$ (por quê?).

Portanto, vale $x \in A$ e $x \notin B$ e vale $x \in A$ e $x \notin C$, ou seja, $x \in A \setminus B$ e $x \in A \setminus C$.

Por conseguinte, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ (por quê?), e assim fica provada a implicação (lembremos que "$p \Rightarrow q$" se lê "se p, então q")

$$x \in A \setminus (B \cup C) \Longrightarrow x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$

que mostra que

$$A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cap (A \setminus C). \qquad \text{(por quê?)}$$

Para provar a recíproca, suponhamos que $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Então, $x \in (A \setminus B)$ e $x \in (A \setminus C)$. Segue daí que vale $x \in A$ e $x \notin B$ e vale $x \in A$ e $x \notin C$, isto é, vale $x \in A$ e não vale $x \in B$ ou $x \in C$ (por quê?).

Portanto, vale $x \in A$ e não vale $x \in B \cup C$, isto é, vale $x \in A$ e $x \notin B \cup C$. Segue que $x \in A \setminus (B \cup C)$ e fica provada a implicação recíproca

$$x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \Longrightarrow x \in A \setminus (B \cup C),$$

que mostra que

$$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cup C),$$

e com isto fica provada a primeira igualdade.

A prova da segunda igualdade se faz de maneira inteiramente análoga; mesmo assim vamos fornecê-la para que você vá se habituando com o modo de proceder.

Provemos então inicialmente que se $x \in A \setminus (B \cap C)$, então $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Com efeito, suponhamos que $x \in A \setminus (B \cap C)$.

Então, $x \in A$ e $x \notin B \cap C$, ou seja, vale $x \in A$ e não vale $x \in B$ e $x \in C$.

Assim, vale $x \in A$ e vale $x \notin B$ ou $x \notin C$.

Portanto, ou vale $x \in A$ e $x \notin B$, ou temos $x \in A$ e $x \notin C$, isto é, ou $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \setminus C$.

Segue daí que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, o que prova a implicação

$$x \in A \setminus (B \cap C) \Longrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

que equivale a dizer que

$$A \setminus (B \cap C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Para provar a inclusão oposta, suponhamos que $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Então, ou vale $x \in (A \setminus B)$, ou vale $x \in (A \setminus C)$.

No primeiro caso, $x \in A$ e $x \notin B$; no segundo, $x \in A$ e $x \notin C$. Juntando os dois casos, temos que vale $x \in A$ e vale $x \notin B$ ou $x \notin C$, isto é, vale $x \in A$ e não vale $x \in B$ e $x \in C$.

Portanto, vale $x \in A$ e vale $x \notin (B \cap C)$, ou seja, $x \in A \setminus (B \cap C)$, o que prova a implicação recíproca

$$x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \Longrightarrow x \in A \setminus (B \cap C)$$

e, por conseguinte, mostra que também vale a inclusão oposta

$$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subset A \setminus (B \cap C).$$

Isto conclui a demonstração da segunda igualdade. □

A demonstração que acabamos de ver está escrita de um modo bem mais extenso do que o necessário. A razão é que procuramos enfatizar os detalhes de cada passagem sem saltar mesmo os passos mais óbvios. Em geral, no que segue, não perderemos tanto tempo com as inferências mais imediatas, deixando que você mesmo preencha as lacunas francamente mais evidentes.

Num contexto em que todos os conjuntos com os quais se trabalha são subconjuntos de um mesmo conjunto U (por exemplo, no curso de Análise Real, $U = \mathbb{R}$), é costume se usar uma notação mais simples para o complementar de um conjunto qualquer A, contido em U, em relação ao conjunto U (às vezes chamado *conjunto-base* ou *conjunto-universo*). Nesse caso, em vez de $U \setminus A$, denotamos o complementar de A em relação a U simplesmente por A^c. Podemos então tomar como definição $A^c := \{x : x \notin A\}$, omitindo o fato, subentendido, de que $x \in U$.

Exercícios 1.1

1. Prove que $(A^c)^c = A$. De modo mais geral, prove que

$$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B.$$

2. Dê a demonstração para as seguintes relações básicas envolvendo as operações de união e interseção de conjuntos, descritas abaixo:

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$,
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
5) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
6) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

3. Prove as proposições

$$
\begin{aligned}
&1) \quad A \subset B \text{ e } C \subset D \Longrightarrow A \cup C \subset B \cup D\\
&2) \quad A \subset B \text{ e } C \subset D \Longrightarrow A \cap C \subset B \cap D.
\end{aligned}
$$

4. As relações 3) e 4) do exercício (2), chamadas propriedades associativas da união e da interseção de conjuntos, respectivamente, permitem que escrevamos simplesmente $A \cup B \cup C$, assim como $A \cap B \cap C$, para denotar a união e a interseção de três conjuntos quaisquer. De modo mais geral, podemos considerar a união e a interseção de um número qualquer, n, de conjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nesse caso, é comum usarmos a notação

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n, \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

Mais precisamente, a definição para essas uniões e interseções de n conjuntos seria:

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{n} A_k &:= \{x \,:\, x \in A_k, \text{ para algum } k \in \{1, \dots, n\}\,\},\\
\bigcap_{k=1}^{n} A_k &:= \{x \,:\, x \in A_k, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, n\}\,\}.
\end{aligned}
$$

Prove as seguintes generalizações das identidades de De Morgan:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k)^c,\\
&2) \quad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)^c = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k)^c,
\end{aligned}
$$

5. Baseando-se no exposto no exercício anterior, dê as definições para $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ e prove as generalizações correspondentes para as identidades de De Morgan.

Sugestões e Respostas:

À guisa de incentivo, vamos dar um esboço da solução do exercício (1), primeira parte, do exercício (2), item 5, e da primeira parte do exercício (6). Você está convidado a fornecer os detalhes para as soluções a seguir.

Comecemos pelo exercício (1).

Temos $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow$ não é verdade que $x \notin A \Leftrightarrow x \in A$. Assim, concluímos que $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \in A$, que é o que teríamos que demonstrar (por quê?).

Quanto ao exercício (2), item 5, temos $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \cup C \Leftrightarrow$ vale $x \in A$ e vale $x \in B$ ou $x \in C \Leftrightarrow$ vale $x \in A$ e $x \in B$ ou vale $x \in A$ e $x \in B$ (por quê?) $\Leftrightarrow$ vale $x \in A \cap B$ ou vale $x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Assim, concluímos $x \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, que é o que precisavámos demonstrar.

Finalmente, em relação ao exercício (6), quanto às questões relativas à união dos conjuntos, temos o seguinte. Primeiramente, a definição de $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ é dada, naturalmente, por

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k := \{x \,:\, x \in A_k, \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}.$$

A identidade de De Morgan (6), item 1, se prova do modo seguinte. Antes de mais nada, lembre que a negação de uma sentença da forma "existe x para o qual vale $P[x]$" ou "para algum x, vale $P[x]$" é dada por "qualquer que seja x, não vale $P[x]$" ou "para todo x, não vale $P[x]$".

Analogamente, a negação de uma sentença da forma "qualquer que seja x, vale $P[x]$" ou "para todo x, vale $P[x]$" é dada por "existe x para o qual não vale $P[x]$" ou "para algum x, não vale $P[x]$".

Apenas por curiosidade, mencionamos que, em símbolos matemáticos, essas afirmações se traduzem por

$$\sim (\exists x)\, P[x] \Leftrightarrow (\forall x) \sim P[x],$$
$$\sim (\forall x)\, P[x] \Leftrightarrow (\exists x) \sim P[x].$$

Aqui, $P[x]$ denota uma proposição ou fórmula dependendo da variável x, e $\sim P$ denota a negação da proposição P.

Passemos à solução do exercício em questão. Temos que $x \in \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)^c$ $\Leftrightarrow$ não é verdade que $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \Leftrightarrow$ não é verdade que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_k \Leftrightarrow$ qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$, $x \notin A_k \Leftrightarrow x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (A_k)^c$ (por quê?), que é o que precisávamos demonstrar.

Sobre Quantificadores

A propósito da solução do exercício (6), descrita anteriormente, cabe lembrar que os quantificadores $\forall$ (“para todo” ou “qualquer que seja”) e $\exists$ (“para algum” ou “existe um”) podem aparecer juntos numa mesma sentença aplicados a variáveis distintas. As seguintes sentenças servem de exemplo:

para todo x e para todo y vale $P[x,y]$,	$((\forall x)(\forall y)\, P[x,y])$
para todo x existe um y tal que vale $P[x,y]$,	$((\forall x)(\exists y)\, P[x,y])$
existe um x tal que para todo y vale $P[x,y]$,	$((\exists x)(\forall y)\, P[x,y])$
existe um x e existe um y tal que vale $P[x,y]$,	$((\exists x)(\exists y)\, P[x,y])$

Aqui, $P[x,y]$ denota uma fórmula ou proposição dependendo das variáveis x e y. Por exemplo, $P[x,y]$ poderia ser $x^2+y^2=1$, ou $|x-y|<5$, etc.

A negação da primeira das sentenças anteriores seria

existe um x e existe um y tal que não vale $P[x,y]$,

$$((\exists x)(\exists y) \sim P[x,y])$$

e a negação da segunda seria

existe um x tal que para todo y não vale $P[x,y]$,

$$((\exists x)(\forall y) \sim P[x,y]).$$

Você está convidado a fornecer a negação para as outras duas sentenças anteriores.

Uma sentença da forma “qualquer que seja x, se $x \in A$ então vale $P[x]$”, que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\forall x)\, x \in A \Rightarrow P[x],$$

em geral é expressa na forma contraída “qualquer que seja $x \in A$, vale $P[x]$”, que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\forall x \in A)\, P[x].$$

Da mesma forma, uma sentença do tipo “existe um x, $x \in A$ e vale $P[x]$”, que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\exists x)\, x \in A \text{ e } P[x],$$

em geral é expressa na forma contraída “existe um $x \in A$ para o qual vale $P[x]$”, que em símbolos matemáticos se escreve

$$(\exists x \in A)\, P[x].$$

Sendo assim, a negação de uma sentença da forma “qualquer que seja $x \in A$, vale $P[x]$” é simplesmente dada por “existe um $x \in A$ para o qual não vale $P[x]$” (lembre-se de que a negação de “se p, então q” é “p e não q”) . Em símbolos matemáticos isso se expressa da forma

$$\sim (\forall x \in A)\, P[x] \Leftrightarrow (\exists x \in A) \sim P[x].$$

As mesmas observações se aplicam a sentenças iniciadas por vários quantificadores aplicados a diversas variáveis distintas, sendo uma para cada quantificador. Por exemplo, considere a sentença matemática “para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, se $|x-1| < \delta$ então $|x^2-1| < \varepsilon$”, que em símbolos se escreve

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(|x-1| < \delta \Rightarrow |x^2-1| < \varepsilon).$$

A propósito, δ e ϵ são letras gregas chamadas “delta” e “epsilon”, respectivamente. A negação desta sentença seria “existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, existe um $x \in \mathbb{R}$ para o qual $|x-1| < \delta$ e $|x^2-1| \geq \varepsilon$. Em símbolos teríamos

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R})(|x-1| < \delta \text{ e } |x^2-1| \geq \varepsilon).$$

Como ficaria a negação da sentença matemática “qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se $n > N_0$, então $\frac{1}{n} < \varepsilon$”? Você saberia escrever esta sentença, assim como a sua negação, em símbolos matemáticos?

Sobre letras gregas

Por tradição ou pelas necessidades da notação, é habitual em cursos de matemática mais avançados, incluindo o de Análise Real, o uso de letras do alfabeto grego, além das do alfabeto latino. Acima, introduzimos duas delas, δ (delta) e ε (epsilon) que reaparecerão com muita frequência ao longo do curso. Outras letras gregas que também poderão aparecer são as seguintes:

- α (alpha), lê-se “alfa”;

- β (beta), lê-se "beta";
- γ (gamma), lê-se "gama";
- Γ (Gamma), lê-se "gama maiúsculo";
- Δ (Delta), lê-se "delta maiúsculo";
- η (eta), lê-se "eta";
- ϕ (phi, de imprensa), lê-se "fi";
- φ (phi, cursivo), lê-se "fi";
- ψ (psi), lê-se "psi";
- κ (kappa), lê-se "capa";
- λ (lambda), lê-se "lambda";
- μ (mu), lê-se "mu";
- ν (nu), lê-se "nu";
- ω (omega), lê-se "ômega";
- Ω (Omega), lê-se "ômega maiúsculo";
- π (pi), lê-se "pi";
- Π (Pi), lê-se "pi maiúsculo";
- ρ (rho), lê-se "rô";
- σ (sigma), lê-se "sigma";
- Σ (Sigma), lê-se "sigma maiúsculo" (utilizado como símbolo para somatório);
- τ (tau), lê-se "tau";
- ξ (xi), lê-se "csi";
- ζ (zeta), lê-se "zeta".

Funções

Uma função f de um conjunto A num conjunto B, que denotamos $f : A \to B$, é uma regra de correspondência que a cada $x \in A$ associa um único elemento $y \in B$, que denotamos por $f(x)$. Costuma-se representar pictoricamente uma função genérica como na figura **1.1**.

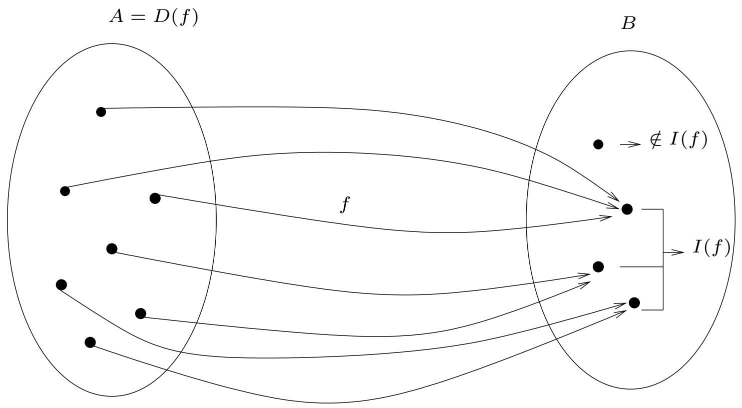

Figura 1.1: Função $f : A \to B$.

Assim, uma função $f : A \to B$ determina um subconjunto em $A \times B$, chamado o gráfico de f, que também denotaremos por f, com a propriedade que, para todo $x \in A$, existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ e denotamos $y = f(x)$. Em particular, se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, então $y = y' = f(x)$.

A expressão "regra de correspondência" utilizada na definição de função dada acima, embora bastante intuitiva, carece de uma formulação matemática mais precisa.

A maneira de expressar essa noção intuitiva de um modo matematicamente rigoroso é fornecida pelo gráfico $f \subset A \times B$. Assim, podemos definir, de modo matemático preciso, uma função como sendo o seu gráfico.

Mais claramente, temos a seguinte definição.

Definição 1.1
Uma função f de um conjunto A num conjunto B é um subconjunto de $A \times B$ com a propriedade que, para todo $x \in A$, existe um e somente um $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$, e denotamos $y = f(x)$.

O *domínio* da função $f : A \to B$, denotado por $D(f)$, é o conjunto A. Assim, $D(f) = A$. O conjunto B é algumas vezes chamado *contra-domínio* da função f. Chamamos *imagem* de f, e denotamos $I(f)$, o subconjunto de

B constituído pelos valores $f(x)$, com $x \in A$. Assim temos,

$$I(f) = \{y \in B : \text{ existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Dado um subconjunto $X \subset A$, definimos a *imagem de X pela função $f : A \to B$*, denotada por $f(X)$, por

$$f(X) = \{y \in B : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } y = f(x)\}.$$

Em particular, $I(f) = f(A)$ e, para todo $X \subset A$, temos $f(X) \subset B$. O conjunto $f(X)$ também é chamado *imagem direta do conjunto X por f*.

Em geral, teremos $I(f) \subsetneq B$, onde a notação $E \subsetneq F$ significa que E está estritamente ou propriamente contido em F, ou seja, E está contido em F mas existe pelo menos um elemento de F que não é membro de E.

Dado um subconjunto $Y \subset B$, definimos a *pré-imagem (ou imagem inversa) de Y pela função f*, denotada por $f^{-1}(Y)$, por

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : \ f(x) \in Y\}.$$

Exemplo 1.2

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ tem domínio $D(f) = \mathbb{R}$ e imagem $I(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Neste caso, temos $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$ e $I(f) \subsetneq B = \mathbb{R}$. A imagem do intervalo $[-2, 2]$ é o intervalo $[0, 4]$. Assim, $f([-2, 2]) = [0, 4]$, como você mesmo pode verificar desenhando uma porção adequada do gráfico de f.

Exemplo 1.3

Sejam E, H subconjuntos de A e f uma função de A em B. Provemos a identidade

$$f(E \cup H) = f(E) \cup f(H).$$

Com efeito, temos que $y \in f(E \cup H) \Leftrightarrow y = f(x)$ para algum $x \in E \cup H \Leftrightarrow y = f(x)$ para algum $x \in E$ ou $y = f(x)$ para algum $x \in H \Leftrightarrow y \in f(E)$ ou $y \in f(H) \Leftrightarrow y \in f(E) \cup f(H)$.

Exemplo 1.4

Você seria capaz de demonstrar a validade da relação

$$f(E \cap H) \subset f(E) \cap f(H) \quad ?$$

Observe que para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$, $E = [-2, 0]$, $H = [1, 2]$, temos $f(E) \cap f(H) = [1, 4]$ e $f(E \cap H) = f(\emptyset) = \emptyset$. Portanto, é possível acontecer que $f(E \cap H) \subsetneq f(E) \cap f(H)$.

Exemplo 1.5
Dada uma função $f : A \to B$ e conjuntos $C, D \subset B$, pedimos a você que demonstre a validade das relações:

1. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$,

2. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

Portanto, a operação de tomada da pré-imagem de subconjuntos do contra-domínio se comporta bem tanto em relação à união quanto em relação à interseção.

Definição 1.2
Dizemos que uma função $f : A \to B$ é *injetiva*, ou que f é uma *injeção*, se, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, vale $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dizemos que f é *sobrejetiva*, ou que f é uma *sobrejeção* de A sobre B, se $I(f) = B$, isto é, se para todo $y \in B$ existe ao menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Se $f : A \to B$ é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva, dizemos que f é *bijetiva* ou que f é uma *bijeção de A sobre B*.

Assim, para provar que uma função $f : A \to B$ é injetiva, devemos mostrar que a hipótese de que $f(x_1) = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in A$, leva à conclusão que $x_1 = x_2$.

Exemplo 1.6
Seja $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x/(x-2)$. Então f é injetiva. Com efeito, se $f(x_1) = f(x_2)$, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, então $x_1/(x_1-2) = x_2/(x_2-2)$, de onde segue, multiplicando-se ambos os membros por $(x_1-2)(x_2-2)$, que $x_1(x_2-2) = x_2(x_1-2)$. Daí temos, $x_1x_2 - 2x_1 = x_2x_1 - 2x_2$, ou seja, $-2x_1 = -2x_2$, de onde se conclui que $x_1 = x_2$.

Definição 1.3 (Composição de funções)
Dada uma função $f : A \to B$ e uma função $g : B \to C$, definimos a *função composta* $g \circ f : A \to C$ pondo, para todo $x \in A$, $g \circ f(x) = g(f(x))$. Observe que só é possível definir a função composta $g \circ f$ quando $I(f) \subset D(g)$!

Exemplo 1.7
Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \sqrt{x}$, e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x^2 - 1$. Então podemos definir $g \circ f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que, para $x \in [0, \infty)$, é dada por $g \circ f(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (\sqrt{x})^2 - 1 = x - 1$. Observe

que, embora a expressão $x - 1$ esteja bem definida para qualquer $x \in \mathbb{R}$, o domínio da função $g \circ f$ é o intervalo $[0, \infty)$, já que f não está definida em $(-\infty, 0)$.

Exemplo 1.8
Se f e g são as funções definidas no exemplo anterior, então não é possível definir a composta $f \circ g$ já que $I(g) \not\subset D(f)$. No entanto, se $h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ é definida por $h(x) = x^2 - 1$ (observe que h e g são definidas pela mesma fórmula mas $D(h) \neq D(g)$), então podemos definir $f \circ h : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ que é dada por $f \circ h(x) = f(h(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$, que está bem definido para $x \in [-1, 1]$.

No exemplo que acabamos de dar, vemos uma situação em que é interessante considerar a restrição de uma determinada função (g, no referido exemplo) a um subconjunto do seu domínio ($[-1, 1]$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, no exemplo mencionado).

Em outras circunstâncias, torna-se interessante considerar a restrição de uma determinada função não injetiva a um intervalo onde a mesma é injetiva, como no caso da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, com $f(x) = \cos(x)$, que restrita ao intervalo $[0, \pi]$ se torna injetiva. Esses fatos motivam a definição a seguir.

Definição 1.4
Dada a função $f : A \to B$ e $E \subset A$, definimos a *restrição* de f a E, denotada por $f|E$, como a função de E em B definida por $f|E(x) = f(x)$, para todo $x \in E$.

Quando $f : A \to B$ é uma bijeção, é possível definir uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f(x) = x$, para todo $x \in A$. A função g que satisfaz essa propriedade é chamada a *função inversa* de f e denotada por f^{-1}. Podemos definir a inversa de uma bijeção $f : A \to B$ de modo mais preciso recorrendo ao gráfico de f.

Definição 1.5
Seja $f : A \to B$ uma bijeção, isto é, para todo $x \in A$ existe um único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$ e para todo $y \in B$ existe um único $x \in A$ tal que $(x, y) \in f$. Definimos a *função inversa* de f, que denotamos $f^{-1} : B \to A$, por

$$f^{-1} := \{(y, x) \in B \times A \, : \, (x, y) \in f\}.$$

Exemplo 1.9
A função $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ dada por $f(x) = 2x/(x-3)$ é bijetiva (prove!). Sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ é dada por $f^{-1}(y) = 3y/(y - 2)$. Basta

verificar que, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, temos $3f(x)/(f(x)-2) = x$. De fato, temos

$$\frac{3f(x)}{f(x)-2} = \frac{3\frac{2x}{x-3}}{\frac{2x}{x-3}-2} = \frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{2x-2(x-3)}{x-3}} = \frac{\frac{6x}{x-3}}{\frac{2x-2x+6}{x-3}} = \frac{6x}{x-3}\frac{x-3}{6} = x.$$

A fórmula $f^{-1}(y) = 3y/(y-2)$ é facilmente obtida escrevendo-se $y = 2x/(x-3)$ e, a partir dessa equação, determinando-se x como função de y. Assim, multiplicando-se ambos os lados da equação $y = 2x/(x-3)$ por $(x-3)$, obtemos $y(x-3) = 2x$, ou seja, $yx - 3y = 2x$, e daí, somando-se $3y - 2x$ a ambos os membros da última equação, segue que $yx - 2x = 3y$, isto é, $x(y-2) = 3y$, donde se conclui que $x = 3y/(y-2)$.

O resultado seguinte fornece uma fórmula para a pré-imagem de um conjunto pela função composta de duas funções.

Teorema 1.1
Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções e seja H um subconjunto de C. Então temos

$$(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H)).$$

Prova: A prova ficará como um ótimo exercício que você não deve deixar de fazer (veja, exercício 11 a seguir). Observe a troca na ordem das funções. □

Exercícios 1.2

1. Seja $f(x) := 1/x^2$, $x \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Determine a imagem direta $f(E)$ onde $E := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$.
   (b) Determine a imagem inversa $f^{-1}(G)$ onde $G := \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 4\}$.
2. Seja $g(x) := x^2$ e $f(x) := x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$, e seja h a função composta $h := g \circ f$.
   (a) Encontre a imagem direta $h(E)$ de $E := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.
   (b) Encontre a imagem inversa $h^{-1}(G)$ de $G := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$.
3. Seja $f(x) = x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, e seja $E := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 0\}$ e $F := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$. Encontre os conjuntos $E \setminus F$ e $f(E) \setminus f(F)$ e mostre que *não* é verdade que $f(E \setminus F) \subset f(E) \setminus f(F)$.
4. Mostre que a função f definida por $f(x) := x/\sqrt{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre $\{y : -1 < y < 1\}$.

5. Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, dê um exemplo explícito de uma bijeção de $A := \{x : a < x < b\}$ sobre $B := \{y : 0 < y < 1\}$.

6. Dê um exemplo de duas funções f, g de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ tais que $f \neq g$ e vale:

   (a) $f \circ g \neq g \circ f$;

   (b) $f \circ g = g \circ f$.

7. (a) Mostre que se $f : A \to B$ é injetiva e $E \subset A$, então $f^{-1}(f(E)) = E$. Dê um exemplo para mostrar que a igualdade não precisa ser válida se f não é injetiva.

   (b) Mostre que se $f : A \to B$ é sobrejetiva e $H \subset B$, então $f(f^{-1}(H)) = H$. Dê um exemplo para mostrar que a igualdade não precisa valer se f não é sobrejetiva.

8. Mostre que se f é uma bijeção de A sobre B, então f^{-1} é uma bijeção de B sobre A.

9. Prove que se $f : A \to B$ é bijetiva e $g : B \to C$ é bijetiva, então a composta $g \circ f$ é uma bijeção de A sobre C.

10. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções.

    (a) Mostre que se $g \circ f$ é injetiva então f é injetiva.

    (b) Mostre que se $g \circ f$ é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

11. Prove o Teorema 1.1.

Prossiga: Nota sobre a Teoria dos Conjuntos

Um dos grandes feitos da Matemática do final do século XIX e início do século XX foi a fundamentação lógica rigorosa para a teoria dos conjuntos, isto é, a formulação de um sistema de axiomas a partir dos quais se tornou possível desenvolver, de modo aparentemente consistente, toda a teoria dos conjuntos.

Uma das sérias dificuldades encontradas na realização de tal obra residiu na própria definição do que venha a ser um conjunto, a qual se mostrou necessária. O fato é que qualquer tentativa de se deixar completamente a cargo da intuição o conceito de conjunto, ou de se dar a esta entidade uma definição simples, próxima da intuição, esbarra invariavelmente no risco de dar origem imediata ao surgimento de paradoxos. Isto ficou demonstrado claramente pelo filósofo e matemático inglês BERTRAND RUSSEL (1872-1970), em 1902, ao comentar a forma livre como o conceito havia sido deixado por outro grande filósofo-matemático da época, o alemão GOTTLOB FREGE (1848-1925), numa obra importante sobre os fundamentos da aritmética, publicada havia pouco tempo.

Em resumo, a forma proposta por Frege admitia a possibilidade de se definir um conjunto R através da proposição: "R é o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmo". Em notação matemática, essa definição se escreveria $R := \{x : x \notin x\}$. O resultado de tal especificação para R é a conclusão paradoxal de que $R \in R$ se e somente se $R \notin R$.

Para evitar situações semelhantes, entre outras providências, grandes matemáticos da época, dentre os quais citamos, em especial, DAVID HILBERT (1862-1943), concluíram ser necessária a distinção entre o que se pode chamar *classe* ou coleção, que em geral não se define, deixando-se como uma noção meramente intuitiva, e o conceito de *conjunto*, que passou a ser definido rigorosamente como qualquer classe que pertença a uma outra classe. Assim, por definição, a classe x é um conjunto se, e somente se, existe uma classe y tal que $x \in y$.

Além disso, outra medida que se mostrou conveniente, nesse sentido, foi a introdução de um axioma-esquema (isto é, um esquema de formação de axiomas) que, grosso modo, estabelece que é sempre verdade uma afirmação da forma

$$\forall y,\ y \in \{x : P[x]\} \textit{ se e somente se } y \textit{ é um conjunto e } P[y].$$

Lembre-se de que o símbolo "$\forall$" significa "para todo" ou "qualquer que seja". Aqui, $P[y]$ denota a fórmula obtida substituindo-se em $P[x]$ toda ocorrência da letra x pela letra y. Por exemplo, se $P[x]$ é a fórmula $x \notin x$, então $P[R]$ é a expressão $R \notin R$. O fato nada óbvio no axioma acima é o aparecimento da sentença "*y é um conjunto*", cuja importância pode se constatar a partir da própria classe R, proposta por Russel, mencionada acima, como explicamos a seguir.

De fato, esse axioma-esquema implica, em particular, que $R \in R(= \{x : x \notin x\})$ se e somente se R é um conjunto e $R \notin R$. Desta equivalência resulta simplesmente que R *não* é um conjunto, já que, do contrário, valeria $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$ o que é impossível. Assim, conclui-se que a classe R não é um conjunto e o paradoxo de Russel deixa de existir. Apenas a título de curiosidade, mencionamos que o fato de que R não é um conjunto também decorre de um outro axioma da teoria dos conjuntos, chamado axioma da regularidade, cujo enunciado omitiremos por ser muito técnico, do qual decorre diretamente o fato de que, para toda classe x, vale que $x \notin x$, o qual é, na verdade, uma das principais razões para a introdução de tal axioma. Portanto, pelo mencionado axioma da regularidade, R coincide com a coleção de todas as classes e, em particular, não pertence a nenhuma outra classe.

Essas e outras providências, nos fundamentos da teoria dos conjuntos, eliminaram paradoxos mais evidentes como o de Russel e, a bem da verdade, até os dias de hoje, não se tem notícias de descoberta de paradoxos na teoria. Contudo, isto não significa que a possibilidade de que algum paradoxo venha a ser encontrado no futuro esteja definitivamente descartada ... Um tal achado não seria nem um pouco bem-vindo já que a teoria dos conjuntos serve de base para todas as demais teorias da Matemática.

A propósito, gostaríamos de mencionar brevemente aqui um fato absolutamente surpreendente provado pelo genial matemático austríaco Kurt Goedel (1906-1978), num célebre artigo publicado em 1931, quando tinha apenas 25 anos (!). Goedel provou que um sistema de axiomas qualquer, que possibilite a construção dos números naturais com suas propriedades usuais, e que não admita contradições (isto é, não contenha proposição que seja verdadeira juntamente com sua negação), dará sempre origem a proposições cujo valor-verdade não é possível de ser determinado. Isto é, haverá sempre alguma proposição cuja validade ou falsidade não se pode provar com um número finito de passos, partindo dos axiomas do sistema. Esse resultado de Goedel foi, sem dúvida, um marco fundamental da Matemática do século XX.