Aula 21 – A Regra da Cadeia

Metas da aula: Justificar rigorosamente a Regra da Cadeia para derivação de funções compostas. Estabelecer a fórmula para derivação da função inversa.

Objetivos: Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

- Saber o significado e algumas aplicações da Regra da Cadeia para derivação de funções compostas.
- Saber a fórmula para derivação da função inversa e algumas de suas aplicações.

Introdução

Nesta aula vamos justificar rigorosamente a importantíssima Regra da Cadeia, a qual você já conhece de cursos anteriores de Cálculo. Também estabeleceremos a fórmula para derivação de funções inversas.

O Lema de Carathéodory

Iniciaremos nossa discussão apresentando um singelo resultado devido ao importante matemático grego C. Carathéodory (1873–1950), que será útil na demonstração da Regra da Cadeia, que veremos a seguir, bem como na demonstração da fórmula para derivação de funções inversas. Trata-se, na verdade, de uma reformulação do Teorema 20.1.

Lema 21.1 (Lema de Carathéodory)
Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $\bar{x} \in I$, e $f : I \to \mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\bar{x}$ se, e somente se, existe uma função φ em I que é contínua em $\bar{x}$ e satisfaz

$$f(x) - f(\bar{x}) = \varphi(x)(x - \bar{x}) \qquad x \in I. \tag{21.1}$$

Neste caso, temos $\varphi(\bar{x}) = f'(\bar{x})$.

Prova: ($\Rightarrow$) Se $f'(\bar{x})$ existe, podemos definir φ por

$$\varphi := \begin{cases} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}} & \text{para } x \neq \bar{x},\ x \in I, \\ f'(\bar{x}) & \text{para } x = \bar{x}. \end{cases}$$

A continuidade de φ segue do fato que $\lim\limits_{x\to\bar{x}} \varphi(x) = f'(\bar{x})$. Se $x = \bar{x}$, então os dois membros de (21.1) são iguais a 0, ao passo que se $x \neq \bar{x}$, então multiplicando $\varphi(x)$ por $x - \bar{x}$ nos dá (21.1) para todo $x \in I \setminus \bar{x}$.

($\Leftarrow$) Suponhamos agora que exista uma função φ contínua em $\bar{x}$ e satisfazendo (21.1). Se dividirmos (21.1) por $x - \bar{x} \neq 0$, então a continuidade de φ em $\bar{x}$ implica que

$$\varphi(\bar{x}) = \lim_{x\to\bar{x}} \varphi(x) = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

existe. Portanto, f é diferenciável em $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$.

□

Exemplos 21.1

1. Para ilustrar o Lema de Carathéodory, consideremos a função f definida por $f(x) = \sqrt{x}$, para $x \geq 0$. Para $\bar{x} > 0$, vale

   $$\sqrt{x} - \sqrt{\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{\bar{x}}}(x - \bar{x}).$$

   Logo, para todo $\bar{x} > 0$, podemos aplicar o Lema de Carathéodory com $\varphi(x) = 1/(\sqrt{x} + \sqrt{\bar{x}})$ para concluir que f é diferenciável em $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = 1/(2\sqrt{\bar{x}})$.

2. Por outro lado, f definida no ítem anterior não é diferenciável em $\bar{x} = 0$. De fato, se f fosse diferenciável em 0, então existiria φ contínua em 0 tal que $\sqrt{x} = \varphi(x)x$. Mas então, para $x \neq 0$, teríamos $1/\sqrt{x} = \varphi(x)$, o que daria uma contradição com o fato de φ ser contínua em 0.

A Regra da Cadeia

Em seguida aplicamos o Lema de Carathéodory para provar a famosa Regra da Cadeia para derivação de funções compostas.

Teorema 21.1 (Regra da Cadeia)
Sejam I, J intervalos em $\mathbb{R}$, sejam $g : I \to \mathbb{R}$ e $f : J \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(J) \subset I$, e seja $\bar{x} \in J$. Se f é diferenciável em $\bar{x}$ e se g é diferenciável em $f(\bar{x})$, então a função composta $g \circ f$ é diferenciável em $\bar{x}$ e

$$(g \circ f)'(\bar{x}) = g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x}). \tag{21.2}$$

Prova: Como $f'(\bar{x})$ existe, o Lema de Carathéodory 21.1 implica que existe uma função φ definida em J tal que φ é contínua em $\bar{x}$ e $f(x) - f(\bar{x}) =$

$\varphi(x)(x-\bar{x})$ para $x \in J$, e $\varphi(\bar{x}) = f'(\bar{x})$. Por outro lado, como g é diferenciável em $f(\bar{x})$, existe uma função ψ definida sobre I tal que ψ é contínua em $\bar{y} := f(\bar{x})$ e $g(y)-g(\bar{y}) = \psi(y)(y-\bar{y})$ para $y \in I$, e $\psi(\bar{y}) = g'(\bar{y})$. Substituindo $y = f(x)$ e $\bar{y} = f(\bar{x})$, obtemos

$$g(f(x)) - g(f(\bar{x})) = \psi(f(x))(f(x) - f(\bar{x})) = ((\psi \circ f(x) \cdot \varphi(x))\,(x - \bar{x})$$

para todo $x \in J$. Como a função $(\psi \circ f) \cdot \varphi$, definida em J, é contínua em $\bar{x}$ e seu valor em $\bar{x}$ é $g'(f(\bar{x})) \cdot f'(\bar{x})$, o Lema de Carathéodory nos dá (21.2).

□

Exemplos 21.2

(a) Se $f : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em I e $g(y) = y^n$ para $y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, então, como $g'(y) = ny^{n-1}$, segue da Regra da Cadeia 21.1 que

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) \qquad \text{para } x \in I.$$

Portanto, temos $(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1}f'(x)$ para todo $x \in I$, como havíamos visto na aula passada.

(b) Suponhamos que $f : I \to \mathbb{R}$ seja diferenciável em I e que $f(x) \neq 0$ para $x \in I$. Se $g(y) := 1/y$ para $y \neq 0$, então, pelo que foi visto na aula passada, $g'(y) = -1/y^2$ para $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = (g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \qquad \text{para } x \in I.$$

(c) Consideremos as funções $S(x) := \operatorname{sen} x$, $C(x) := \cos x$, $E(x) := e^x$ e $L(x) := \log x$, $x \in \mathbb{R}$. Nos cursos de Cálculo você aprendeu as fórmulas para as derivadas dessas funções, nomeadamente,

$$S'(x) = \cos x = C(x),\ C'(x) = -\operatorname{sen} x = -S(x),$$
$$E'(x) = e^x = E(x),\ L'(x) = \frac{1}{x},$$

que serão justificadas em aulas futuras deste curso. Assumindo como válidas tais fórmulas, podemos aplicar a Regra da cadeia para calcular derivadas de funções bastante complexas.

Como exemplo, vimos na aula passada que a função $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x)$, $x \neq 0$, e $f(0) := 0$, é diferenciável em $x = 0$ com $f'(0) = 0$. Para $x \neq 0$, a Regra da Cadeia, combinada com a Regra do Produto, nos dá

$$f'(x) = 2x \operatorname{sen}(1/x) + x^2(\frac{-1}{x^2} \cos(1/x)) = 2x \operatorname{sen}(1/x) - \cos(1/x).$$

Em particular, vê-se claramente que $f'(x)$ é descontínua em $x = 0$.

(d) Calcular $f'(x)$ se $f(x) = \log(1 + (\operatorname{sen} x)^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Usando as fórmulas para as derivadas de $S(x)$ e $L(x)$ no ítem anterior e aplicando duas vezes a Regra da Cadeia, obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\operatorname{sen} x)^2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + (\operatorname{sen} x)^2},$$

onde também utilizamos a conhecida fórmula $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.

Funções Inversas

A seguir vamos estabelecer a fórmula da derivada para a função inversa de uma dada função estritamente monótona. Se f é uma função contínua estritamente monótona definida num intervalo I, então sua função inversa $g = f^{-1}$ está definida no intervalo $J := f(I)$ e satisfaz a relação

$$g(f(x)) = x \qquad \text{para } x \in I. \tag{21.3}$$

Pelo Teorema da Inversa Contínua 19.5, a função g é contíniua em J. Se $\bar{x} \in I$ e $\bar{y} := f(\bar{x})$, e se $f'(\bar{x})$ existe e $f'(\bar{x}) \neq 0$, o teorema que veremos a seguir garante a existência de $g'(\bar{y})$. Neste caso, derivando (21.3) em $x = \bar{x}$ com o auxílio da Regra da Cadeia, segue que $g'(f(\bar{x}))f'(\bar{x}) = 1$, donde concluímos que $g'(\bar{y}) = 1/f'(\bar{x})$. Passemos ao enunciado e prova do resultado.

Teorema 21.2 (Fórmula da Derivada da Função Inversa)
Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$ estritamente monótona e contínua em I. Seja $J := f(I)$ e $g : J \to \mathbb{R}$ a função estritamente monótona e contínua inversa de f. Se f é diferenciável em $\bar{x} \in I$ e $f'(\bar{x}) \neq 0$, então g é diferenciável em $\bar{y} := f(\bar{x})$ e

$$g'(\bar{y}) = \frac{1}{f'(\bar{x})} = \frac{1}{f'(g(\bar{y}))} \tag{21.4}$$

Prova: Pelo Lema de Carathéodory 21.1 obtemos uma função φ em I contínua em $\bar{x}$ satisfazendo $f(x) - f(\bar{x}) = \varphi(x)(x - \bar{x})$, $x \in I$, com $\varphi(\bar{x}) = f'(\bar{x})$. Como $\varphi(\bar{x}) \neq 0$ por hipótese, existe uma vizinhança $V := (c - \delta, c + \delta)$ tal que $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in V \cap I$. Se $U := f(V \cap I)$, então a função inversa g satisfaz $f(g(y)) = y$ para todo $y \in U$, de modo que

$$y - \bar{y} = f(g(y)) - f(\bar{x}) = \varphi(g(y))(g(y) - g(\bar{y})).$$

Como $\varphi(g(y)) \neq 0$ para $y \in U$, podemos dividir a equação anterior por $\varphi(g(y))$ e obter

$$g(y) - g(\bar{y}) = \frac{1}{\varphi(g(y))}(y - \bar{y}).$$

Sendo a função $1/(\varphi \circ g)$ contínua em $\bar{y}$, aplicamos o Lema de Carathéodory para concluir que $g'(\bar{y})$ existe e $g'(\bar{y}) = 1/\varphi(g(\bar{y})) = 1/\varphi(\bar{x}) = 1/f'(\bar{x})$.

□

Observação 21.1
No Teorema 21.2, a hipótese $f'(\bar{x}) \neq 0$ é essencial. De fato, se $f'(\bar{x}) = 0$, então a função inversa g *nunca* é diferenciável em $\bar{y} = f(\bar{x})$, já que a hipótese da existência de $g'(\bar{y})$ nos levaria a $1 = f'(\bar{x})g'(\bar{y}) = 0$, o que é absurdo. A função $f(x) := x^3$ em $\bar{x} = 0$ é um exemplo dessa situação.

O resultado seguinte é um corolário do Teorema 21.2 combinado com resultados anteriores.

Teorema 21.3
Seja I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ estritamente monótona em I. Seja $J := f(I)$ e seja $g : J \to \mathbb{R}$ a função inversa de f. Se f é diferenciável em I e $f'(x) \neq 0$ para $x \in I$, então g é diferenciável em J e

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}. \tag{21.5}$$

Prova: Se f é diferenciável em I, então o Teorema 20.2 implica que f é contínua em I, e pelo Teorema da Inversa Contínua 19.5, a função inversa g é contínua em J. A equação (21.5) agora segue do Teorema 21.2.

□

Se f e g são as funções no enunciado do Teorema 21.3 então a relação (21.5) pode ser escrita na forma

$$g'(y) = \frac{1}{(f' \circ g)(y)},\ y \in J, \qquad \text{ou} \qquad (g' \circ f)(x) = \frac{1}{f'(x)},\ x \in I.$$

Exemplos 21.3

(a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^3 + x + 1$ é contínua e estritamente monótona crescente, pois é a soma de duas funções crescentes, $f_1(x) = x^3$ e $f_2(x) = x + 1$. Além disso, $f'(x) = 3x^2 + 1$ nunca se anula. Portanto, pelo Teorema 21.2, a função inversa $g = f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em todo ponto. Se tomarmos $\bar{x} = 2$, então como $f(2) = 10$, obtemos $g'(10) = g'(f(2)) = 1/f'(2) = 1/13$.

(b) Seja $n \in \mathbb{N}$ par, $I := [0, \infty)$, e $f(x) := x^n$ para $x \in I$. Vimos na Aula 19 que f é crescente e contínua em I, de modo que sua inversa $g(y) := y^{1/n}$ para $y \in J := [0, \infty)$ também é crescente e contínua em

J. Mais ainda, temos $f'(x) = nx^{n-1}$ para $x \in I$. Logo, segue que se $y > 0$, então $g'(y)$ existe e

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} = \frac{1}{n(g(y))^{n-1}} = \frac{1}{ny^{(n-1)/n}}.$$

Assim deduzimos que

$$g'(y) = \frac{1}{n}y^{(1/n)-1} \quad \text{para } y > 0.$$

No entanto, g não é diferenciável em 0. Veja os gráficos de f e g na Figura **19.4**.

(c) Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, ímpar, seja $f(x) := x^n$ para $x \in \mathbb{R}$, e $g(y) := y^{1/n}$ sua inversa definida para todo $y \in \mathbb{R}$. Como em (b) concluímos que g é diferenciável para $y \neq 0$ e que $g'(y) = (1/n)y^{(1/n)-1}$ para $y \neq 0$. Aqui também g não é diferenciável em $y = 0$. Os gráficos de f e g aparecem na Figura **19.5**.

(d) Seja $r := m/n$ um número racional positivo, $I = [0, \infty)$, e seja $h(x) = x^r$ para $x \in I$ (lembre da Definição 19.3). A função h é a composição das funções $f(x) := x^m$ e $g(x) = x^{1/n}$, $x \in I$: $h(x) = f(g(x))$, $x \in I$. Se aplicarmos a Regra da Cadeia 21.1 e osresultados de (b) e (c), então obtemos

$$\begin{aligned} h'(x) = f'(g(x))g'(x) &= m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{(1/n)-1} \\ &= \frac{m}{n}x^{(m/n)-1} = rx^{r-1} \end{aligned}$$

para todo $x > 0$. Se $r > 1$, é um exercício mostrar diretamente da definição que a derivada também existe em $x = 0$ e $h'(0) = 0$.

(e) A função seno é crescente no intervalo $I := [-\pi/2, \pi/2]$ e $\operatorname{sen}(I) = [-1, 1]$. Portanto, sua função inversa, que será denotada por arc sen, está definida em $J := [-1, 1]$. Como foi dito no Exemplo 21.2(c), a função seno é diferenciável em $\mathbb{R}$ (em particular em I) e $D \operatorname{sen} x = \cos x$ para $x \in I$. Como $\cos x \neq 0$ para $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ segue do Teorema 21.2 que

$$\begin{aligned} D \operatorname{arc\,sen} y &= \frac{1}{D \operatorname{sen} x} = \frac{1}{\cos x} \\ &\frac{1}{\sqrt{1 - (\operatorname{sen} x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

para todo $y \in (-1, 1)$. A derivada de arc sen não existe nos pontos -1 e 1.

Exercícios 21.1

1. Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

   (a) $f(x) := e^{x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

   (b) $f(x) := \log \operatorname{sen} x$, $x \in (0, \pi)$.

   (c) $\cos \log(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Prove que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma **função par**, isto é, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e é diferenciável em todo ponto, então a derivada f' é uma **função ímpar**, ou seja, $f'(-x) = -f'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De modo semelhante, se f é ímpar f' é par.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)$ para $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Mostre que f é diferenciável em todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre também que a derivada f' não é limitada em nenhum intervalo contendo 0.

4. Se $r > 0$ é um número racional, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := |x|^r$. Mostre que se $r > 1$, então $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathbb{R}$, inclusive $x = 0$.

5. Dado que a função $f(x) := x^5 + x + 2$ para $x \in \mathbb{R}$ possui uma inversa $g := f^{-1}$ definida em $\mathbb{R}$, encontre $g'(y)$ nos pontos correspondentes a $x = 0,\ 1,\ -1$.

6. Dado que a restrição da função cosseno a $I := [0, \pi]$ é estritamente decrescente e $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$, seja $J := [-1, 1]$ e $\operatorname{arccos} : J \to \mathbb{R}$ a função inversa da restrição de cos a I. Mostre que arccos é diferenciável em $(-1, 1)$ e
$$D \operatorname{arccos} y = \frac{-1}{(1 - y^2)^{1/2}}, \qquad \text{para } y \in (-1, 1).$$
Mostre que arccos não é diferenciável em -1 e 1.

7. Dado que a restrição ao intervalo $I := (-\pi/2, \pi/2)$ da função tangente, $\tan x := \operatorname{sen} x / \cos x$, é crescente e que $\tan(I) = \mathbb{R}$, seja $\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função inversa de tan em I. Mostre que arctan é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que
$$D \arctan(y) = \frac{1}{(1 + y^2)}, \qquad \text{para } y \in \mathbb{R}.$$

8. Seja $r > 0$ um número racional e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := |x|^r \operatorname{sen}(1/x)$ para $x \neq 0$ e $f(0) := 0$. Determine os valores de r para os quais f é diferenciável para todo $x \in \mathbb{R}$, inclusive $x = 0$.