

УДК 621.396.677.012.12

СТАТИСТИКА КОММУТАЦИОННОЙ АНТЕННЫ

В. С. Рабинович

Рассматриваются искажения диаграммы направленности коммутационной антенной решетки, вызываемые случайными фазовыми ошибками, возникающими из-за неточной реализации дискретных фазовых состояний.

Показано, что в этом случае диаграмма направленности может быть так же как и в отсутствие случайных ошибок представлена в виде суммы парциальных диаграмм. При условии, что случайные ошибки являются нормально распределенными величинами со статистическими параметрами, зависящими от номера реализуемого дискретного фазового состояния, определены средние значения диаграммы направленности по полю и по мощности.

Показано, что флуктуационные фазовые ошибки могут привести не только к появлению статистического фона, но и к возникновению (в дополнение к лепесткам дискретного фазирования) паразитных лепестков, значительно превышающих фон диаграммы. Оценки по расчетным формулам подтверждаются результатами численного моделирования.

Изучению диаграммы направленности антенной решетки с непрерывной регулировкой фазы при наличии фазовых флуктуаций на раскрые посвящен ряд работ (см., например, [1]).

В настоящей работе рассматриваются статистические параметры диаграммы направленности антенной решетки с дискретным фазированием.

Известно [2], что такое фазирование приводит к падению уровня основного лепестка, а также к появлению так называемых паразитных лепестков. Как будет показано ниже, дискретное значение фазы, реализующееся с некоторой ошибкой, может привести не только к дополнительному падению уровня основного лепестка и появлению статистического фона, но также и к возникновению дополнительных (к лепесткам дискретного фазирования) паразитных лепестков, превышающих средний уровень бокового излучения.

Итак, рассмотрим линейку из N изотропных излучателей, в которой каждое дискретное фазовое состояние реализуется с определенной ошибкой, зависящей, вообще говоря, от величины набираемого фазового сдвига. Диаграмма направленности такой антенны имеет вид *

$$(1) \quad F(\theta, \theta_0) = \left\{ \sum_{n=1}^N A_n e^{i(\varphi_n - \varphi_{n0} + \xi_n + \psi_n)} \right\} / \left\{ \sum_{n=1}^N A_n \right\},$$

A_n — амплитудное распределение на раскрые антенного полотна; $-\varphi_{n0} = -kd_n \sin \theta_0$ — фазовый сдвиг, необходимый для отклонения луча антенны на угол θ_0 от нормали; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; d_n — расстояние от выбранного начала координат до n -го излучателя; $\varphi_n = kd_n \sin \theta$; θ — угол

* Результаты без труда обобщаются на случай плоской решетки заменой однократного суммирования в (1) двойным.

наблюдения;

$$\psi_n = \varphi_{n0} - \Delta \left[\frac{\varphi_{n0}}{\Delta} + 0,5 \right]$$

— фазовая ошибка, обусловленная дискретностью фазирования. Квадратные скобки означают взятие целой части числа; $\Delta = 2\pi/2^l$ — дискрет фазирования; l — произвольное целое число; 2^l — общее число различных дискретных фаз, реализуемых на каждом элементе решетки, при условии, что значение фазы может изменяться в пределах от 0 до 2π радиан.

Заметим, что ψ_n является периодической функцией фазового сдвига φ_{n0} с периодом Δ , ξ_n — фазовая ошибка, обусловленная неточностью в дискретной регулировке фазы на n -м элементе.

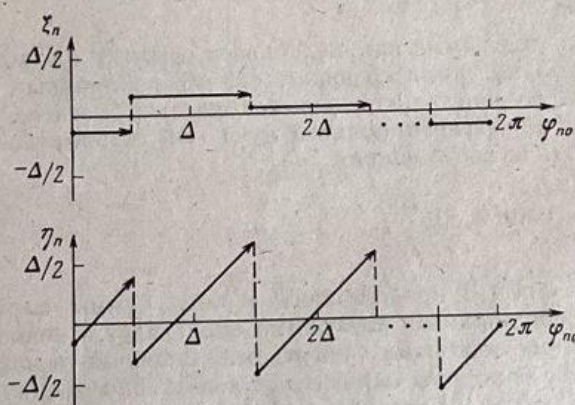


Рис. 1

Отметим, что $\xi_n = \xi_n(\varphi_{n0})$ является периодической функцией фазового сдвига φ_{n0} с периодом 2π , поскольку набираемое дискретное значение фазы зависит от величины φ_{n0} , изменяющейся лишь в пределах от 0 до 2π . Тогда, очевидно, $\eta_n = \psi_n + \xi_n$ также является периодической функцией с периодом 2π .

На рис. 1 приведена одна из возможных реализаций функций ξ_n , η_n на периоде.

Разлагая периодическую функцию $e^{i\eta_n}$ в ряд Фурье по переменной φ_{n0} , имеем

$$(2) \quad e^{i\eta_n} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{vn} e^{i v \varphi_{n0}},$$

где

$$B_{vn} = \frac{\sin \frac{\Delta}{2}(1-v)}{\frac{\Delta}{2}(1-v)} \frac{1}{2^l} \sum_{r=0}^{2^l-1} \exp \left\{ i \xi_{nr} - \frac{i \pi v r}{2^{l-1}} \right\};$$

$\xi_{nr} = \xi_n(\varphi_{n0})$ — фазовая ошибка, возникающая на n -м элементе решетки при реализации r -го дискретного фазового сдвига (величина r указывает на номер реализуемого дискрета фазы).

Как видим, каждому излучающему элементу антенны соответствует свой набор комплексных спектральных гармоник $\{B_{vn}\}$.

Используя выражение (2), диаграмму направленности по полю представим в виде

$$(3) \quad F(\theta, \theta_0) = \sum_{n=1}^N \sum_{v=-\infty}^{\infty} B_{vn} A_n e^{i(\varphi_n - \varphi_{n0} + v\varphi_{n0})} / \left\{ \sum_{n=1}^N A_n \right\} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} F_v(\theta, \theta_0),$$

где

$$F_v(\theta, \theta_0) = \sum_{n=1}^N A_n B_{vn} e^{i(\varphi_n - \varphi_{n0} + v\varphi_{n0})} / \left\{ \sum_{n=1}^N A_n \right\};$$

угол θ_v удовлетворяет соотношению

$$(4) \quad \sin \theta_v = (1-v) \sin \theta_0.$$

Отметим, что диаграмма направленности решетки с эквидистантно расположенными излучателями содержит интерференционные лучи, положение которых в пространстве определяется шагом решетки d . В этом случае координату j -го интерференционного луча v -й парциальной диаграммы можно определить из соотношения

$$(5) \quad \sin \theta_{j,v} = \sin \theta_v + \frac{\lambda}{d} j.$$

Итак, диаграмма (3) представлена в виде суммы парциальных диаграмм. Нулевая парциальная диаграмма определяет основной луч, остальные называются паразитными лепестками. Значение основного лепестка при $\theta = \theta_0$, а также величины паразитных лепестков в точках с координатами $\theta_v = \arcsin \{(1-v) \sin \theta_0\}$ имеют вид

$$(6) \quad G_v = \frac{\left| \sum_{n=1}^N A_n B_{vn} \right|}{\left| \sum_{n=1}^N A_n \right|}.$$

Когда

$$\xi_{nr} = 0, \quad G_0 = \frac{\sin \frac{\Delta}{2}}{\frac{\Delta}{2}},$$

а $G_v = 0$ при $v \neq p \cdot 2^l$ (p — любое целое положительное или отрицательное число). Для всех $v = p \cdot 2^l$ $G_v \neq 0$. При этом G_v представляет собой уровень паразитных лепестков, вызванных дискретностью фазирования.

Таким образом, амплитуду основного луча можно оценить, зная нулевые спектральные гармоники излучающих элементов решетки. Уровни паразитных лепестков определяются по величинам B_{vn} при $v \neq 0$.

Когда фазовые ошибки ξ_{nr} зависят лишь от номера реализуемого дискрета, но не от номера излучателя ($\xi_{nr} = \alpha_r$), всем излучателям решетки соответствует один и тот же набор спектральных коэффициентов $\{B_{vn}\}$.

Соотношение (6) при $B_{vn} = B_v$ упрощается:

$$G_v = |B_v|.$$

Отметим, что в этом случае выражение (2) может быть получено как разложение в ряд Фурье функции, периодической по переменной координате раскрыва, а не по φ_{n0} . Оба подхода, конечно, приводят к одинаковому результату (см. [3]). Определим теперь вид диаграммы (3) при условии, что величины ξ_{nr} случайны, распределены по нормальному закону и независимы на различных излучателях. Предположим также, что параметры нормального закона распределения величины ξ_{nr} зависят от номера реализуемого дискрета, но не от номера излучателя. Обозначая чертой сверху операцию усреднения, имеем

$$(7) \quad \overline{\xi_{nr}} = \beta_r, \quad \overline{\xi_{nr}^2} - \beta_r^2 = \sigma_r^2.$$

Определим сначала среднее значение случайной диаграммы (3). Усреднение проведем по ансамблю однотипных решеток:

$$(8) \quad \overline{F(\theta, \theta_0)} = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \overline{B_v} f_0(\theta, \theta_v),$$

$$f_0(\theta, \theta_v) = \frac{\sum_{n=1}^N A_n e^{i(\varphi_n - \varphi_{n0} + v\varphi_{n0})}}{\sum_{n=1}^N A_n},$$

$$(9) \quad \overline{B_v} = \frac{\sin \frac{\Delta}{2}(1-v)}{\frac{\Delta}{2}(1-v)} \frac{1}{2^l} \left\{ \sum_{r=0}^{2^l-1} \exp \left\{ i\beta_r - \frac{\sigma_r^2}{2} - \frac{i\pi v r}{2^{l-1}} \right\} \right\},$$

$\overline{B_v}$ — усредненные комплексные коэффициенты, модуль которых характеризует амплитуду v -го паразитного лепестка в (8).

Последний сомножитель в (9) для всех $v = p \cdot 2^l$ не зависит от v , поэтому рассматриваемые случайные фазовые ошибки не приводят к разрушению паразитных лепестков дискретного фазирования, полученных в [2]. $|\overline{B_0}|$ определяет среднее значение амплитуды основного лепестка. В том случае, когда статистические параметры нормального закона распределения не зависят от номера набираемого дискрета, т. е. $\beta_r = \beta$, $\sigma_r^2 = \sigma^2$ ($r = 0, 1, 2, \dots, 2^l-1$), выражение для коэффициентов (9) значительно упрощается:

$$(10) \quad \overline{B_{p \cdot 2^l}} = \frac{(-1)^p \sin \frac{\Delta}{2}}{\frac{\Delta}{2} - \pi p} \exp \left\{ i\beta - \frac{\sigma^2}{2} \right\},$$

$$\overline{B_v} |_{v \neq p \cdot 2^l} = 0$$

$$\sin \theta_{p \cdot 2^l} = (1 - 2^l \cdot p) \sin \theta_0.$$

Формула для спектра (10) лишь множителем $e^{-\sigma^2/2}$ отличается от коэффициентов, полученных в работе [2].

Величина $e^{-\sigma^2/2}$ указывает на дополнительное падение усредненной амплитуды v -й парциальной диаграммы из-за случайных фазовых ошибок. Как видим, спектр паразитных лепестков, обусловленных неидентичными

статистическими параметрами случайной фазовой ошибки при реализации различных дискретных фазовых сдвигов, в этом случае исчезает. В общем случае между соседними паразитными лепестками спектра, полученного при $\beta_r = \beta$, $\sigma_r^2 = \sigma^2$, располагается $2^i - 1$ лепестков спектра (9). Появление дополнительного спектра лепестков в усредненной диаграмме направленности обусловлено увеличением периода фазовой ошибки (в отсутствие случайных искажений период ошибки равен дискрету фазирования, при наличии ошибок -2π). Из формулы (9) также следует, что амплитуда лепестков с номерами $v = 2^i \cdot p$, а также амплитуда основного луча ($v = 0$) уменьшаются в соответствии с коэффициентом

$$(11) \quad \bar{G}_{p, 2^i} = \frac{\sin \frac{\Delta}{2}}{\frac{\Delta}{2} - \pi p} \frac{1}{2^i} \sum_{r=0}^{2^i-1} \exp \left\{ i\beta_r - \frac{\sigma_r^2}{2} \right\}.$$

Определим теперь среднюю диаграмму направленности по мощности

$$(12) \quad \bar{P} = \overline{F(\theta, \theta_0) F^*(\theta, \theta_0)} = \overline{|F(\theta, \theta_0)|^2} + \delta^2 F,$$

звездочка означает комплексное сопряжение.

Выражение (12) состоит из двух слагаемых. Первое определяет квадрат модуля средней диаграммы направленности по полю, рассмотренной выше, второе является дисперсией, характеризующей флуктуации диаграммы относительно своего среднего значения.

Нетрудно показать, что

$$(13) \quad \delta^2 F \simeq \frac{\{1 - |\bar{B}_0|^2\} \sum_{n=1}^N A_n^2}{\left(\sum_{n=1}^N A_n \right)^2}.$$

Из формулы (13) видно, что с увеличением числа элементов, используемых в решетке, величина статистического фона уменьшается, в то время как мощность паразитных лепестков первого слагаемого выражения (12) определяется видом статистических параметров случайных фазовых ошибок, возникающих при реализации того или иного дискретного фазового сдвига, и не зависит от числа элементов. При выполнении (для некоторых значений v) условия

$$(14) \quad |\bar{B}_v|^2 \gg \delta^2 F$$

в усредненной диаграмме направленности по мощности будут присутствовать паразитные лепестки спектра (9). Очевидно различные случайные реализации диаграммы направленности будут отличаться друг от друга, однако для решеток с большим числом элементов величина лепестков, удовлетворяющих условию (14), слабо зависит от конкретной реализации диаграммы.

Пусть, например, случайные флуктуации нарастают с увеличением реализуемого дискретного фазового сдвига, т. е.

$$(15) \quad \beta_r = \beta \quad (r = 0, 1, 2, \dots, 2^i - 1),$$

$$\frac{\sigma_r^2}{2} = \gamma r.$$

Тогда амплитуды паразитных лепестков имеют вид

$$(16) \quad \bar{G}_v = |\bar{B}_v| = \frac{\left| \sin \frac{\Delta}{2} (1-v) \right|}{\left| \frac{\Delta}{2} (1-v) \right|} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} (2^l - 1) \right\} \frac{1}{2^l} \frac{\text{sh}(\gamma \cdot 2^{l-1})}{\sqrt{\text{sh}^2 \frac{\gamma}{2} + \sin^2 \frac{\pi v}{2^l}}}$$

Средний уровень основного луча ($v=0$) и паразитных лепестков, обусловленных дискретным фазированием ($v=p \cdot 2^l$), уменьшается в соответствии с коэффициентом

$$(17) \quad \bar{G}_{p \cdot 2^l} = \left| \frac{\sin \frac{\Delta}{2}}{\frac{\Delta}{2} - \pi p} \right| \exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} (2^l - 1) \right\} \frac{1}{2^l} \frac{\text{sh}(\gamma \cdot 2^{l-1})}{\text{sh} \frac{\gamma}{2}}$$

или при малых γ

$$(18) \quad \bar{G}_{p \cdot 2^l} \approx \left| \frac{\sin \frac{\Delta}{2}}{\frac{\Delta}{2} - \pi p} \right| \left\{ 1 - \frac{\gamma}{2} (2^l - 1) \right\}.$$

Амплитуды наибольших лепестков спектра, обусловленного случайными фазовыми искажениями ($v=1, v=-1$), имеют вид

$$(19) \quad \bar{G}_1 \approx \frac{\gamma}{2} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2^l}}, \quad \bar{G}_{-1} = \frac{\sin \Delta}{\Delta} \bar{G}_1.$$

Так, для случая $l=3$ ($\Delta=\pi/4$) и $\gamma=\pi/64$

$$\bar{G}_1 \approx -24 \text{ дБ}, \quad \bar{G}_3 \approx -19 \text{ дБ};$$

при $\gamma=\pi/128$

$$\bar{G}_1 \approx -30 \text{ дБ}, \quad \bar{G}_3 \approx -18 \text{ дБ}.$$

Для подтверждения полученных результатов на ЭВМ была рассчитана диаграмма направленности плоской антенной решетки, изотропные излучатели которой расположены в узлах прямоугольной сетки. Расстояние между элементами в каждом ряду (обычно называемом строкой или столбцом решетки), так же, как расстояние между рядами, постоянно и равно $d/\lambda=0,5$. Раскрыв решетки ограничен кругом, амплитудное распределение — спадающее к краям антенны до 0,3 от своего максимального значения. Общее число элементов $N \approx 3500$, дискрет фазирования $\Delta=\pi/4$.

Фазовые ошибки имитировались датчиком случайных чисел. Закон изменения ошибок выбран в форме (15) ($\gamma=\pi/64$). На рис. 2 представлена одна из реализаций сечения диаграммы плоскостью, перпендикулярной к антенному полотну и проходящей через направляющую строк (столбцов) решетки. Луч отклонен на угол $\theta_0=12^\circ$ в плоскости сечения. Сплошная кривая — диаграмма с паразитными лепестками, полученная в отсутствие случайных фазовых ошибок. При наличии случайных фазовых искажений

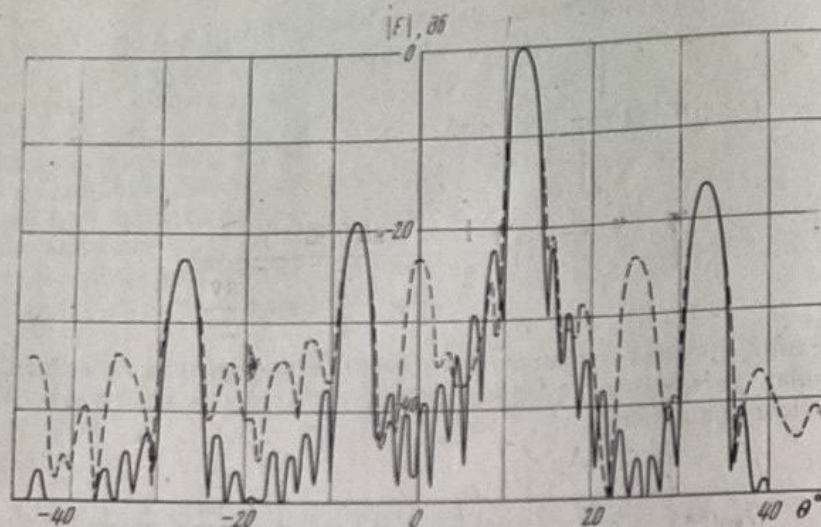


Рис. 2

диаграмма (пунктир) имеет статистический фон, а также, в дополнение к лепесткам дискретного фазирования, два значительных паразитных лепестка, порожденных видом (см. (15)) флуктуационных ошибок. Положение лепестков дискретного фазирования в этом случае определяется из соотношения (5) при $\nu = p \cdot 2^i$. Координаты наибольших лепестков спектра, обусловленного случайными фазовыми искажениями, могут быть найдены из выражений

$$(20) \quad \theta_{0,1} = 0; \quad \theta_{j,-1} = \arcsin(2 \sin \theta_0 + 2j).$$

Уровень этих лепестков хорошо согласуется с расчетным по формуле (19).

В заключение выражаю благодарность В. Г. Соколову за полезное обсуждение полученных результатов

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. С. Шифрин, Вопросы статистической теории антенн, Изд. Советское радио, 1970.
2. А. А. Долженков, Д. Б. Зимин, Радиотехника, 1968, 23, 7, 14.
3. В. С. Рабинович, Радиотехника и электроника, 1974, 16, 12, 2188.

Поступила в редакцию
27 VI 1973
После переработки
22 V 1974