复旦大学力学与工程科学系

2011 ～ 2012 学年第二学期期末考试试卷

❒ A 卷　　❒ B 卷

课程名称：数学分析（II）　　课程代码：MATH120009.09

开课院系：力学与工程科学系　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：____________ 学号：____________ 专业：____________

题 号	1/(1)	1/(2)	2/(1)	2/(2)	2/(3)	2/(4)	2/(5)	3/(1)	3/(2)	3/(3)
得 分										
题 号	3/(4)	3/(5)	3/(6)	4/(1)	4/(2)	5/(1)	5/(2)	6/(1)	6/(2)	7/(1)
得 分										
题 号	7/(2)	7/(3)	7/(4)							总 分
得 分										

问题 1 (极限基本概念). 有二维函数：

$$f(x,y) \triangleq \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y} & \text{当 } xy \neq 0 \\ 0 & \text{当 } xy = 0 \end{cases}$$

1. (10) 计算：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$
2. (10) 计算：$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$

解答 1.　1. 根据偏导数的定义，可有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \triangleq \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0$$

当 $xy \neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) \triangleq \lim_{y\to 0} \frac{f(x,y)-f(x,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{x^2\left(\frac{y}{x} + o(y)\right) - y^2 \arctan \frac{y}{x}}{y} = x$$

此处考虑到 $y \to 0$ 时，有 $\arctan \dfrac{x}{y} \to \pm\dfrac{\pi}{2}$，故局部有界。因此有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \triangleq \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

2. 利用与 1 中类似的方法，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \triangleq \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &\triangleq \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\arctan\frac{x}{y}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\arctan\frac{y}{x}-y^2\left(\frac{x}{y}+o(x)\right)}{x} = -y\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \triangleq \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = -1$$

问题 2 (导数基本计算)**.** 设有方程：

$$\begin{cases} e^x+e^y+e^\xi+e^\eta=4 \\ e^x+e^{2y}+e^{3\xi}+e^{4\eta}=4 \end{cases}$$

1. (10) 基于隐映照定理说明：在 $(x,y)=(0,0)$ 点附近，(x,y) 可由 (ξ,η) 确定。
2. (10) 在 $(\xi,\eta)=(0,0)$ 点附近，计算 (x,y) 关于 (ξ,η) 的 Jacobi 矩阵。注：要求给出具体结果。
3. (10) 在 $(\xi,\eta)=(0,0)$ 点附近，计算 $\dfrac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)$ 的一阶展开式。注：要求给出具体结果。
4. (10) 在 $(\xi,\eta)=(0,0)$ 点附近，计算 $\dfrac{\partial^2 x}{\partial\eta\partial\xi}(\xi,\eta)$。注：仅需明确具体处理过程。
5. (10) 基于上述方程，构建 $\mathbb{R}^4$ 中的集合

$$\Sigma = \left\{ \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ x\\ y\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \boldsymbol{f}(\xi,\eta,x,y) = \begin{bmatrix} e^x+e^y+e^\xi+e^\eta-4 \\ e^x+e^{2y}+e^{3\xi}+e^{4\eta}-4\end{bmatrix} = \mathbf{0}\in\mathbb{R}^2 \right\}$$

另考虑限制于 Σ 上的目标函数

$$\theta=\theta(\xi,\eta,x,y)$$

利用隐映照定理，给出：在原点 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^4$ 附近，此目标函数的临界点控制方程。

解答 2. 1. 按隐映照定理，构造

$$\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^x+e^y+e^\xi+e^\eta-4 \\ e^x+e^{2y}+e^{3\xi}+e^{4\eta}-4\end{bmatrix}$$

满足

$$\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

$$D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} e^x & e^y \\ e^x & 2e^{2y}\end{bmatrix}$$

因此有 $D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ 非奇异。故 $\exists B_\lambda\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)\subset\mathbb{R}^2$，$B_\mu\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)\subset\mathbb{R}^2$ 使得

$$\forall\begin{bmatrix}\xi\\\eta\end{bmatrix}\in B_\lambda\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right),\exists!\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\in B_\mu\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)$$

2. 由 $\begin{bmatrix}F\\G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\xi\\\eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\right)=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2,\ \forall\begin{bmatrix}\xi\\\eta\end{bmatrix}\in B_\lambda\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)$ 有

$$\begin{aligned}&D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\\eta\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\xi\\\eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\right)+D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\G\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\xi\\\eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\right)D\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\\&\quad=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{2\times2}\end{aligned}$$

具体为

$$\begin{bmatrix}e^\xi&e^\eta\\3e^{3\xi}&4e^{4\eta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^x&e^y\\e^x&2e^{2y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi}&\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\\dfrac{\partial y}{\partial\xi}&\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}(\xi,\eta)=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{2\times2}$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi}&\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\\dfrac{\partial y}{\partial\xi}&\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}(\xi,\eta)&=-\begin{bmatrix}e^x&e^y\\e^x&2e^{2y}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^\xi&e^\eta\\3e^{3\xi}&4e^{4\eta}\end{bmatrix}\\&=-\frac{1}{2e^{x+2y}-e^{x+y}}\begin{bmatrix}2e^{2y}&-e^y\\-e^x&e^x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^\xi&e^\eta\\3e^{3\xi}&4e^{4\eta}\end{bmatrix}\\&=-\frac{1}{2e^{x+2y}-e^{x+y}}\begin{bmatrix}2e^{2y+\xi}-3e^{y+3\xi}&2e^{2y+\eta}-4e^{y+4\eta}\\-e^{x+\xi}+4e^{x+4\eta}&-e^{x+\eta}+4e^{x+4\eta}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

此处 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(\xi,\eta)$。

3. 现有

$$\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}(0,0)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi}&\dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\\dfrac{\partial y}{\partial\xi}&\dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}(0,0)=-\begin{bmatrix}-1&-2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\-2&-3\end{bmatrix}$$

此处已考虑到 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}(0,0)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$。且有

$$\frac{\partial y}{\partial\eta}(\xi,\eta)=-\frac{1}{2e^{x+2y}-e^{x+y}}\left(4e^{x+4\eta}-e^{x+\eta}\right)$$

此处 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(\xi,\eta)$。先考虑

$$\begin{aligned} x(\xi,\eta) &= x(0,0) + \frac{\partial x}{\partial \xi}(0,0)\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}(0,0)\eta + o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \\ &= \xi + 2\eta + o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \\ y(\xi,\eta) &= y(0,0) + \frac{\partial y}{\partial \xi}(0,0)\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}(0,0)\eta + o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \\ &= -2\xi - 3\eta + o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} 2e^{x+2y} - e^{x+y} &= 2e^{-3\xi-4\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})} - e^{-\xi-\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})} \\ &= 2\left(1-3\xi-4\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right) - \left(1-\xi-\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right) \\ &= 1-5\xi-7\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \\ 4e^{x+4\eta} - e^{x+\eta} &= 4e^{\xi+6\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})} - e^{\xi+3\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})} \\ &= 4\left(1+\xi+6\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right) - \left(1+\xi+3\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right) \\ &= 3+3\xi+21\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta) &= -\left(1-5\xi-7\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right)^{-1}\left(3+3\xi+21\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right) \\ &= -\left(1+5\xi+7\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right)\left(3+3\xi+21\eta+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2})\right) \\ &= -3\left(1+6\xi+7\eta\right)+o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}) \end{aligned}$$

上面的估计中利用了 $o(\xi) = o(\eta) = o(\sqrt{\xi^2+\eta^2}), o(\xi\eta) = o(\xi^2+\eta^2)$ 等估计，由于 $\dfrac{o(\xi)}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}} = \dfrac{o(\xi)}{\xi}\dfrac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$。

4. 计算 $\dfrac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta}(\xi,\eta) \triangleq \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)(\xi,\eta)$，考虑到

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) = -\frac{2e^{2y+\xi} - 3e^{y+3\xi}}{2e^{x+2y} - e^{x+y}}$$

根据链式求导法则可有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi}(\xi,\eta) = -\frac{1}{(2e^{x+2y}-e^{x+y})^2}\Bigg\{ &\left[2e^{2y+\xi}\left(2\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right) - 3e^{y+3\xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)\right]\left(2e^{x+2y}-e^{x+y}\right) \\ &- \left[2e^{x+2y}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} + 2\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)(\xi,\eta) - e^{x+y}\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\right)(\xi,\eta)\right]\left(2e^{2y+\xi} - 3e^{y+3\xi}\right)\Bigg\} \end{aligned}$$

式中 $\dfrac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta)$，$\dfrac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta)$ 均先已获得。

5. 由于

$$\theta(\xi,\eta,x,y)=\theta\left(\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\right)=:\hat{\theta}(\xi,\eta)$$

故有

$$D\hat{\theta}(\xi,\eta)=D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\theta\left(\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\right)+D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\theta\left(\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}(\xi,\eta)\right)D\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}(\xi,\eta)$$

已有

$$D\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}(\xi,\eta)=-D^{-1}_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}$$

故临界点方程（关于 (ξ,η)）为

$$D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\theta-D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\theta D^{-1}_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{1\times 2}$$

注：如果考虑 Lagrange 函数，即

$$L(\xi,\eta,x,y;\lambda,\mu)\triangleq\theta(\xi,\eta,x,y)+\lambda F(\xi,\eta,x,y)+\mu G(\xi,\eta,x,y)$$

有

$$\begin{aligned}
&D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}L=D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\theta+[\lambda,\mu]D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{1\times 2}\\
&D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}L=D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\theta+[\lambda,\mu]D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{1\times 2}\\
&D_{\left[\begin{smallmatrix}\lambda\\ \mu\end{smallmatrix}\right]}L=[F,G]=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{1\times 2}
\end{aligned}$$

可得

$$D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\theta-D_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\theta D^{-1}_{\left[\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}D_{\left[\begin{smallmatrix}\xi\\ \eta\end{smallmatrix}\right]}\begin{bmatrix}F\\ G\end{bmatrix}=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{1\times 2}$$

与上面的结果一致。

问题 3 (积分计算——“类球形星体上的积分”)**.** 对于一般实际的星体往往并非规则的球形，某些研究需要考虑其真实的表面形态。由于，星体表面为一封闭曲面，可考虑利用经度－纬度刻画：极径方程为 $R=R(\theta,\phi)$，其中 $\theta\in[0,\pi]$，$\phi\in[0,2\pi]$.

1. (10) 基于上述极径信息，可构造星体表面曲面的向量值映照表示：

$$\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi):\mathscr{D}_{\theta\phi}\ni\begin{bmatrix}\theta\\ \phi\end{bmatrix}\mapsto\mathbf{\Sigma}(\theta,\Phi)=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}(\theta,\phi)\triangleq\begin{bmatrix}R(\theta,\phi)\sin\theta\cos\phi\\ R(\theta,\phi)\sin\theta\sin\phi\\ R(\theta,\phi)\cos\theta\end{bmatrix}$$

计算：$\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi)$ 的 Jacobi 矩阵，并说明每列的几何意义。

2. (10) 推导：星体表面上某一经线的弧长计算式。经线指沿此曲线仅有 θ 变化，而 $\phi=\phi_0$ 固定于某一定值。注：需要给出参数域上的被积函数表达式。

3. (10) 推导：星体表面积的积分表达式。注：需要给出参数域上的被积函数表达式。

4. (10) 如考虑木星表面著名的“大红斑”（实际为局部的气旋）。设想“大红斑”对应参数域上的区域为：

$$\mathscr{A} := \left\{[\theta,\phi]^T|\theta\in[a,b],\,\phi\in[c,d]\right\}$$

另此设区域上测量得速度分布为：

$$\boldsymbol{V} := u(\theta,\phi)\boldsymbol{i}+v(\theta,\phi)\boldsymbol{j}+w(\theta,\phi)\boldsymbol{k}$$

利用一般曲线积分的计算方法推导：此速度场沿区域 $\mathscr{A}$ 边界的一边 $\theta=b$ 的通量

$$\int_L \boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}l$$

的表达式。注：需要给出参数域上的被积函数表达式。

5. (10) 设大红斑区域上的速度分布表示为：

$$\boldsymbol{V} := P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

利用 Stokes 公式推导：此速度场沿区域 $\mathscr{A}$ 边界的环量 $\oint_{\partial\mathscr{A}}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$ 的表达式。注：需要给出参数域上的被积函数表达式。

6. (10) 推导：星体体积的积分表达式。注：需要计算至累次积分。

解答 3. 1. Jacobi 矩阵为

$$D\boldsymbol{\Sigma}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix}(R_\theta\sin\theta+R\cos\theta)\cos\phi & (R_\phi\cos\phi-R\sin\phi)\sin\theta\\ (R_\theta\sin\theta+R\cos\theta)\sin\phi & (R_\phi\sin\phi+R\cos\Phi)\sin\theta\\ R_\theta\cos\theta-R\sin\theta & R_\phi\cos\theta\end{bmatrix}=[\boldsymbol{g}_\theta,\boldsymbol{g}_\phi](\theta,\phi)$$

此处 $\boldsymbol{g}_\theta(\theta,\phi),\boldsymbol{g}_\phi(\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3$ 分别对应星体表面上 θ-曲线及 ϕ-曲线的切向量。

2. 星体表面的经线具有以下的向量值映照形式

$$\boldsymbol{\gamma}(\theta):\theta\mapsto\boldsymbol{\gamma}(\theta)\triangleq\boldsymbol{\Sigma}(\theta,\phi_0)=\begin{bmatrix}R(\theta,\phi_0)\sin\theta\cos\phi_0\\ R(\theta,\phi_0)\sin\theta\sin\phi_0\\ R(\theta,\phi_0)\cos\theta\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

因此有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)=D\boldsymbol{\gamma}(\theta)=\begin{bmatrix}(R_\theta(\theta,\phi_0)\sin\theta+R(\theta,\phi_0)\cos\theta)\cos\phi_0\\ (R_\theta(\theta,\phi_0)\sin\theta+R(\theta,\phi_0)\cos\phi)\sin\phi_0\\ R_\theta(\theta,\phi_0)\cos\theta-R(\theta,\phi_0)\sin\theta\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

由此可有

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\right|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{R_\theta^2(\theta,\phi_0)+R^2(\theta,\phi_0)}$$

故弧长可以计算为

$$L=\int_\alpha^\beta \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\gamma}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\right|_{\mathbb{R}^3}\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{R_\theta^2(\theta,\phi_0)+R^2(\theta,\phi_0)}\mathrm{d}\theta$$

此处 α 和 β 为 θ 的取值范围。

3. 星体表面积可以计算为

$$S=\int_{D_{\theta\phi}}\left|\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\theta}\times\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial\phi}\right|_{\mathbb{R}^3}(\theta,\phi)\mathrm{d}\sigma=\int_{D_{\theta\phi}}\left|\boldsymbol{g}_\theta\times\boldsymbol{g}_\phi\right|_{\mathbb{R}^3}(\theta,\phi)\mathrm{d}\sigma$$

而 $\left|\boldsymbol{g}_\theta\times\boldsymbol{g}_\phi\right|_{\mathbb{R}^3}(\theta,\phi)=\sqrt{|\boldsymbol{g}_\theta|_{\mathbb{R}^3}^2\left|\boldsymbol{g}_\phi\right|_{\mathbb{R}^3}^2-\left|\boldsymbol{g}_\theta\cdot\boldsymbol{g}_\phi\right|_{\mathbb{R}^3}^2}(\theta,\phi)$，其中

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{g}_\theta|_{\mathbb{R}^3}&=\sqrt{R_\theta^2+R^2}(\theta,\phi)\\
\left|\boldsymbol{g}_\phi\right|_{\mathbb{R}^3}&=\sqrt{R_\phi^2+R^2\sin^2\theta}(\theta,\phi)\\
\boldsymbol{g}_\theta\cdot\boldsymbol{g}_\phi&=R_\theta R_\phi
\end{aligned}$$

故有

$$\left|\boldsymbol{g}_\theta\times\boldsymbol{g}_\phi\right|_{\mathbb{R}^3}(\theta,\phi)=R\sqrt{R_\phi^2+(R_\theta^2+R^2)\sin^2\theta}(\theta,\phi)$$

因此星体的表面积可以表示为

$$S=\int_{D_{\theta\phi}}R\sqrt{R_\phi^2+(R_\theta^2+R^2)\sin^2\theta}(\theta,\phi)\mathrm{d}\sigma$$

4. 将积分曲线记作如下向量值映照

$$\boldsymbol{L}(\phi):[c,d]\ni\phi\mapsto\boldsymbol{L}(\phi)=\boldsymbol{\Sigma}(b,\phi)\in\mathbb{R}^3$$

由此则有

$$\begin{aligned}
\int_L\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{\tau}\times\boldsymbol{n})\mathrm{d}l&=\int_L\tau\cdot(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{V})\mathrm{d}l=\int_c^d(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{V})\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}\phi}(\phi)\mathrm{d}\phi\\
&=\int_c^d(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{V})\cdot\begin{bmatrix}(R_\phi(b,\phi)\cos\phi-R(b,\phi)\sin\phi)\sin b\\(R_\phi(b,\phi)\sin\phi+R(b,\phi)\cos\phi)\sin b\\R_\phi(b,\phi)\cos b\end{bmatrix}\mathrm{d}\phi
\end{aligned}$$

注：对 3 和 4 仅需表现正确的处理，无需至最终结果。

5. 根据 Stokes 公式，有

$$\oint_{\partial\mathscr{A}}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l=\int_{\mathscr{A}}\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V})\mathrm{d}\sigma=\int_{D_{\theta\phi}}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V})(\boldsymbol{X}(\theta,\phi))\cdot\left(\frac{\partial\Sigma}{\partial\theta}\times\frac{\partial\Sigma}{\partial\phi}\right)(\theta,\phi)\mathrm{d}\sigma$$

此处，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$，而

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}(x,y,z)=\begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix}(x,y,z)$$

6. 方法 1：利用球坐标变换，即

$$D_{r\theta\phi}\ni\begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}(r,\theta,\phi)=\begin{bmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{bmatrix}$$

则曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 包围的区域 Ω 可以在球坐标下表示为

$$D_{r\theta\phi}=\{[r,\theta,\phi]^T|0\leqslant r\leqslant R(\theta,\phi),0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\phi\leqslant 2\pi\}$$

由此体积可以表示为

$$\begin{aligned} V&=\int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{D_{r\theta\phi}}\det\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_{D_{r\theta\phi}}r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta,\phi)}r^2\mathrm{d}r \\ &=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi R^3(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

方法 2：引入坐标变换

$$D_{\lambda\theta\phi}\ni\begin{bmatrix} \lambda \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}(\lambda,\theta,\phi)=\begin{bmatrix} \lambda R(\theta,\phi)\sin\theta\cos\phi \\ \lambda R(\theta,\phi)\sin\theta\sin\phi \\ \lambda R(\theta,\phi)\cos\theta \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

则曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$ 包围的区域 Ω 可以在此坐标变化下表示为

$$D_{\lambda\theta\phi}=\{[\lambda,\theta,\phi]^T|0\leqslant\lambda\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\pi,0\leqslant\phi\leqslant 2\pi\}$$

由此可计算得

$$\det\frac{D(x,y,z)}{D(\lambda,\theta,\phi)}=\lambda^2R^3(\theta,\phi)\sin\theta$$

由此体积可以表示为

$$\begin{aligned} V&=\int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{D_{\lambda\theta\phi}}\lambda^2R^3(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi\mathrm{d}\theta\int_0^1\lambda^2R^3(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\lambda \\ &=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^\pi R^3(\theta,\phi)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

问题 4 (Fourier 级数基本概念). 现有区间 $[0,3]$ 上的函数：

$$f(x) \triangleq \begin{cases} x^2 & x \in [0,1) \\ 0 & x \in [1,3] \\ \dfrac{1}{x} & x \in (3,4] \end{cases}$$

1. (10) 按点收敛的意义，将 $f(x), x \in [0,4]$ 表示成 Fourier 余弦级数的形式。要求写出具体的表达形式，其中相关系数仅需给出具体计算式。

2. (10) 示意性绘出 Fourier 级数对应的和函数（极限函数）的图像。

解答 4. 1. 为获得余弦级数表示，首先将函数作偶延拓，即可有

$$\begin{aligned} \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \end{aligned}$$

现情况 $l=4$，所以

$$a_n = \frac{1}{4} \int_0^4 f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

2. 图像如下：

待补。

问题 5 (正项级数敛散性研究的“比较思想”). “比较思想”包括比较的对象以及比较的方式。

1. (10) 考虑直接比较，则有结论：如有估计式

$$a_n = b_n + o(b_n)$$

则：正项级数 $\sum a_n$ 同 $\sum b_n$ 具有相同的敛散性。

2. (10) 研究级数

$$\sum \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right)$$

的敛散性。

解答 5. 1. 证明：由极限的定义，在 n 足够大时，可有

$$a_n = b_n + o(b_n) \sim \begin{cases} < b_n + \varepsilon b_n = (1+\varepsilon) b_n \\ > b_n - \varepsilon b_n = (1-\varepsilon) b_n \end{cases}$$

此处 ε 为任意小于 1 的正实数。按级数的 Cauchy 收敛原理即得结论。

2.

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\frac{n+1}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\end{aligned}$$

由于 $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，因此由 1 中结论，$\sum a_n$ 也收敛。

问题 6 (幂级数基本分析性质)**.** 幂级数基本分析性质源于一般函数项级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理以及函数项序列的基本分析性质。

1. (10) 证明：幂级数内闭一致收敛性。
2. (10) 证明：以下函数的幂级数表示

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad \forall x\in[-1,1]$$

解答 6. 1. 证明：现有幂级数 $\sum a_n(x_*-x_0)^n$ 收敛，考虑

$$\sum a_n(x-x_0)^n = \sum a_n(x_*-x_0)^n\left(\frac{x-x_0}{x_*-x_0}\right)^n, \quad \forall x\in[x_0,x_*]$$

现有

$$\begin{cases}\sum a_n(x_*-x_0)^n\text{收敛} \\ \left(\dfrac{x-x_0}{x_*-x_0}\right)^n\text{在}[x_0,x_*]\text{上一致单调减少，且有界}\end{cases}$$

故有 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0,x_*]$ 上一致收敛。（按级数一致收敛的 Cauchy 收敛原理）

2. 考虑函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，有

$$f'(x) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

函数 $(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 有幂级数展开

$$\begin{aligned}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^{2k} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-(k-1)\right)}{k!}x^{2k} \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^{2k}, \quad \forall x\in[-1,1]\end{aligned}$$

故有

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = \int_0^x(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}\xi = x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \quad \forall x\in(-1,1)$$

又由 $\exists\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{(\pm1)^{2k+1}}{2k+1}\in\mathbb{R}$，故有

$$\exists\, S(x):=x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{x^{2k+1}}{2k+1},\quad \forall x\in[-1,1]$$

且有 $S(x)\in[-1,1]$。故可有

$$\begin{cases} S(-1)=\lim\limits_{x\to-1+0}S(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}f(x)=f(-1)\\ S(1)=\lim\limits_{x\to1+0}S(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=f(1)\end{cases}$$

故有

$$\ln(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \forall x\in[-1,1]$$

问题 7 (微积分在数学物理方程中的应用)**.** 设 $f(x,y,z)$ 在由分块光滑曲面 S 所围城的有界闭区域 Ω 上调和，亦即其满足 Laplcae 方程

$$\Delta f(x,y,z)\triangleq\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)(x,y,z)=0$$

1. (10) 证明：对任意标量场 $\phi(x,y,z)$ 和 $\psi(x,y,z)$，有场论恒等式

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)=\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi+\psi\Delta\phi$$

2. (10) 设 $M=(\xi,\eta,\zeta)$ 为 Ω 内任一点，$S_\rho(M)$ 是以 M 为中心，ρ 为半径的球面，$S_\rho(M)\subset\mathring{\Omega}$。可基于上述等式，证明：

$$\begin{aligned}&\int_S\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\right)\right]\mathrm{d}\sigma\\ &\quad=-\int_{S_\rho(M)}\left[\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\frac{\partial f}{\partial n}-f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\right)\right]\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为外法向量，$|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$。

3. (10) 证明：对任意 $S_R(M)$，成立所谓的“平均值公式”

$$f(M)\equiv f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R(M)}f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma$$

4. (10) 证明：$f(x,y,z)$ 除恒为常数外，不可能在 Ω 内部（亦即 $\mathring{\Omega}$）上取得最大值和最小值。

解答 7. 1. 证明：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)&=\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\psi\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\psi\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)(x,y,z)\\ &=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right](x,y,z)\\ &=\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\psi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\right](x,y,z)\\ &=\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi+\psi\Delta\phi\end{aligned}$$

2. 证明：由

$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{n}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)\mathrm{d}\sigma=\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)\mathrm{d}\tau=\int_V\left(\boldsymbol{\nabla}\psi\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi+\psi\Delta\phi\right)\mathrm{d}\tau$$
$$\oint_{\partial V} \boldsymbol{n}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\psi)\mathrm{d}\sigma=\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\psi)\mathrm{d}\tau=\int_V\left(\boldsymbol{\nabla}\phi\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi+\phi\Delta\psi\right)\mathrm{d}\tau$$

两式相减，可得

$$\begin{aligned}\int_V\left(\psi\Delta\phi-\phi\Delta\psi\right)\mathrm{d}\tau&=\oint_{\partial V}\left(\boldsymbol{n}\cdot(\psi\boldsymbol{\nabla}\phi)-\boldsymbol{n}\cdot(\phi\boldsymbol{\nabla}\psi)\right)\mathrm{d}\sigma\\&=\oint_{\partial V}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

由于 ϕ 和 ψ 均为 V 内的调和函数，亦即有 $\Delta\phi=\Delta\psi=0$，所以

$$\oint_{\partial V}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=0$$

现 $\partial V=S\cup S_p(M)$。对函数 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$ 首先有

$$\frac{\partial}{\partial x}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}(x,y,z)=\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=\frac{x-\xi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}(x,y,z)&=\frac{-1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^2}\frac{\partial}{\partial x}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}=-\frac{x-\xi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^3}\\\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}(x,y,z)&=\frac{3(x-\xi)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^4}\frac{x-\xi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}-\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^3}\\&=\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^2-3(x-\xi)^2}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^5}\end{aligned}$$

故可有

$$\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}(x,y,z)=0,\quad\forall\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\Omega\backslash B_\rho(M)$$

即函数 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}$ 和 $f(x,y,z)$ 都是调和的，令 $\phi=f,\psi=\dfrac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}$，带入方程

$$\oint_{\partial V}\left(\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=0$$

并注意到此时 $\partial V=S\cup S_p(M)$，即得证结论。

3. 考虑

$$\int_{S(R)}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{R}\int_{S(R)}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}f\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{R}\int_{B(R)}\Delta f\mathrm{d}\sigma=0$$

$$\begin{aligned}\int_{S(R)}f\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\right)\mathrm{d}\sigma&=\int_{S(R)}f\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\right)\mathrm{d}\sigma\\&=-\int_{S(R)}f\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}^3}\mathrm{d}\sigma=-\frac{1}{R^2}\int_{S(R)}f\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

另考虑

$$\int_{S(\varepsilon)} \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}} \frac{\partial f}{\partial n} \mathrm{d}\sigma \to 0 \quad (\varepsilon \to 0+0)$$

$$\int_{S(R)} f \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_M|_{\mathbb{R}^3}}\right) \mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{S(\varepsilon)} f \mathrm{d}\sigma \to -4\pi f(M) \quad (\varepsilon \to 0+0)$$

综上即可得平均值公式。

4. 利用反证法。假设 f 可以在 $M \in \overset{\circ}{\Omega}$ 处取最值，则按平均值公式，必然有

$$f(M) = \frac{1}{4\pi R^2}\int_{S_R(M)} f \mathrm{d} > (<) f(M)$$

产生矛盾。由此得证。