（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学大类《数学分析》

2022-2023 学年第二学期期中考试试卷

姓　　名：________________　　　学　　号：________________

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

年　　月　　日

题号	一	二	三	四	总分
得分					

一．严格叙述定义和定理（每题 4 分，共 16 分）.

1. “光滑曲面”的定义.

2. “二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微” 的定义.

3. 隐函数定理 (写出任意一种情形即可).

4. Stokes 公式.

二. **计算题.** 请写出计算与推导过程（每题 8 分，共 40 分）

1. 已知方程 $z^3 - 3xyz = 1$ 在 $(x_0, y_0) = (1,0)$ 的某个邻域上确定了 z 关于 (x, y) 的隐函数. 请计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在 $(1,0)$ 处的值.

2. 设 $D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. 计算函数

$$f(x,y,z) = x^2 - 6xy + 12y^2 - 2yz + z^2$$

在 D 上的最大值和最小值.

3. 设 $D=\{(x,y,z)|\ 0\le z\le x^2+y^2\le 1\}$. 计算反常重积分

$$\iiint_D \frac{dxdydz}{x^2+y^2+z^2}.$$

4. 计算第一类曲线积分:

$$\int_L |x|\, ds,$$

其中 L 是双纽线 $(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$.

5. 计算第二类曲面积分:

$$\iint_S \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

其中 S 为椭球面 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$.

三. **判断题.** 请判断以下说法是否正确，并说明理由（每题 5 分，共 20 分，每题判断正确得 1 分）.

1. 设 $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ 是一个可微的向量值函数，那么对任意两点 (x_0, y_0) 和 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，都存在至少一个 $\theta \in (0,1)$，使得

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$
$$= f_x(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)\Delta y.$$

2. 设曲面 S 的方程为 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ $(x \neq 0)$，其中函数 f 具有连续的导数. 那么 S 上任一点处的切平面都经过一个定点.

3. 设

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3},$$

那么累次积分 $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dx \right) dy$ 和 $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)dy \right) dx$ 相等.

4. 设

$$P(x,y) = x^2 + 4y - \cos x, \quad Q(x,y) = 3x - 6y^2 + \sin y.$$

那么不存在$\mathbf{R}^2$ 上的可微函数 $R(x,y)$, 使得 $\nabla R = (P,Q)$.

四. 证明题（每题 12 分. 无论是否做出某一小题，在做后面的小题时均可直接使用之前小题的结果. 本大题共 24 分.）

1. (每小题 6 分) 设 $D \subset \mathbf{R}^2$ 为开集.

   (1) 举例说明：存在定义在 D 上的函数 $f(x,y)$ 处处可偏导，但并非处处可微.

   (2) 证明：如果定义在 D 上的函数 $f(x,y)$ 处处可偏导并且偏导数处处连续，那么 $f(x,y)$ 处处可微.

2. (每小题 3 分) 设 $D=\{(x,y)|1<\sqrt{x^2+y^2}<4\}$.

(1) 证明:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=42\pi.$$

(2) 考虑映射 $T(u,v)=(x(u,v),y(u,v))$，其中

$$x(u,v)=u^2-v^2,\quad y(u,v)=2uv.$$

设 $E=\{(u,v)|1<\sqrt{u^2+v^2}<2\}$，证明 $T(E)=D$.

(3) 证明:

$$\iint_E \sqrt{x(u,v)^2+y(u,v)^2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv=84\pi.$$

(4) 如果重积分的变量代换公式对于映射 T 成立，那么 (1) 和 (3) 中的重积分应该相等，但实际上并非如此. 请说明这两个重积分的关系并给出解释.