

复旦大学技术科学试验班

2022-2023 第一学期《线性代数》期末考试试卷

A 卷

2023 年 1 月 5 日

课程名称: 《线性代数》 课程代码: COMP120004.01-10

开课院系: 计算机科学技术学院、信息科学与工程学院 考试形式: 闭卷

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

(装订线内不要答题)

一、(12 分) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $AX = 2X + A$, 求 X 。

二、(12 分) 已知齐次线性方程组(I)为

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

另一个齐次线性方程组(II)的一个基础解系为 $\alpha_1 = [2 \quad -1 \quad a+2 \quad 1]^T$,

$$\alpha_2 = [-1 \quad 2 \quad 4 \quad a+8]^T.$$

(1) 求方程组(I)的一个基础解系;

(2) 当 a 为何值时, 方程组(I)和(II)有非零公共解? 当有非零公共解时, 求出全部非零公共解。

三、(12 分) 若 $AB = BA$, 请证明 $\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)$ 。

四、(12 分) 已知 $M_{2 \times 2}(R)$ 是指实二阶矩阵构成的线性空间, 其一组基为

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

在其上有一个线性变换 $\varphi: M_{2 \times 2}(R) \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$, 满足

$$\varphi(\alpha_1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \varphi(\alpha_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \varphi(\alpha_3) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}, \varphi(\alpha_4) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 13 & -1 \end{bmatrix}$$

- (1) 求出 φ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ 下的表示矩阵 A
- (2) 令 $\ker \varphi = \{\alpha \in M_{2 \times 2}(R) | \varphi(\alpha) = 0\}$, 称 $\ker \varphi$ 为 φ 的核, 试求 $\ker \varphi$ 。