复旦大学技术科学实验班

2016～2017 学年第二学期期末考试试卷

☑A 卷　　□B 卷

课程名称：数学分析BII　　课程代码：MATH120017

开课院系：计算机科学技术学院等　　考试形式：闭卷

姓　名：　　　　学　号：　　　　专　业：

声明：我已知悉学校对于考试纪律的严肃规定，将秉持诚实守信宗旨，严守考试纪律，不作弊，不剽窃；若有违反学校考试纪律的行为，自愿接受学校严肃处理。

学生（签名）：

年　　月　　日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

（装订线内不要答题）

（装订线内不要答题）

一、严格表述题（每题 2 分，共 3 题 ，共 6 分）

1. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 的 Cauchy 收敛原理。

96

2. 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微。

3. Green 公式（严格表述条件与结论）

二、填空题（每题 4 分，共 6 题，共 24 分）

1. 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ 的和等于________________。

2. 曲面 $z=y+\ln\frac{x}{z}$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的切平面方程为________________。

3. 设隐函数方程为$3xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$，其中$z=z(x,y)$，则在点$P(1,0,-1)$处的全微分$dz=$__________。

4. $f(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{1}{2} & x=\dfrac{\pi}{2} \\ 0 & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]\end{cases}$ 的 Fourier 余弦级数是__________。

5. 二元函数$z=\ln(e^{-y}+\dfrac{x^2}{y})$在点$P(1,1)$处沿非零向量$v=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$的方向导数为__________。

6. 向量场$\mathbf{a}(x,y,z)=xyz(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$在点$P(1,2,3)$的旋度为__________。

三、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予简要证明；如果错误的，请回答“否”，并举反例或说明理由。）（每题 6 分，共 4 题，共 24 分）

1. 假设$\{u_n\}$是单调减少数列，且$u_n>0,n=1,2,3,\cdots$，数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\dfrac{u_{n+1}}{u_n})$收敛。

2. 假设对于任意给定的正数ε和任意正整数p，存在自然数$N(\varepsilon,p)$，使得当$n>N$时，成立$\left|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}\right|<\varepsilon$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛。

3. 假设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某个去心邻域内有定义的二元函数，两个二次极限存在相等，即$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$，则二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$也存在。

4. $\iint\limits_{D} f(x+y)dxdy = \int_{-1}^{1} f(u)du$，其中函数 f 在有限区间 $[-1,1]$ 上黎曼可积，

$D = \{(x,y) \mid |x|+|y| \le 1\}$。

四、计算题（每题 8 分，共 4 题，共 32 分）

1. 假设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数为 $S(x)$，

（1）求此函数项级数的收敛半径与收敛域；（2）求和函数 $S(x)$。

2. 假设 $u=f(x+y+z,x^2+y^2+z^2)$，其中 $f(s,t)$ 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

3. 假设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，计算第二类曲面积分：$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{\cos z^2}(1+\dfrac{1}{z})dxdy$。

4. 设 $S_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$，其中 α 是参数，分别求 α 的取值范围，使得函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在[0, 1]上：

(1) 一致收敛；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)dx=\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)dx$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d}{dx}S_n(x)=\dfrac{d}{dx}\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$，对于 $\forall x\in[0,1]$ 成立。

五、证明题（共 2 题，共 14 分）

1. 证明定理：如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个混合偏导数 f_{xy} 和 f_{yx} 都在点 (x_0,y_0) 连续，那么，

$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$。(6 分)

2. 证明：在光滑曲面 $F(x,y,z)=0$ 上离原点最近的点处的法线必过原点。(8 分)