

复旦大学工程技术类平台课程

《线性代数》期中考试试卷

共 10 页

课程代码: COMP120004

考试形式: 闭卷 2015 年 11 月 13 日 9:50-11:50

(本试卷答卷时间为 120 分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

专业_____ 学号_____ 姓名_____ 成绩_____

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、 n 阶行列式计算: (每小题 12 分, 共 24 分)

(装
订
线
内
不
要
答
题
)

$$1. \quad B_n = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b & ab \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解: 将 B_n 按第 1 列展开, 得

$$\begin{aligned} B_n &= (a+b)B_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & & \\ 1 & a+b & ab \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & a+b & ab \\ & & & 1 & a+b & ab \end{vmatrix} \\ &= (a+b)B_{n-1} - abB_{n-2} \end{aligned} \tag{1}$$

下面求解递推关系 (1)。

(1) 式可化为 $B_n - aB_{n-1} = b(B_{n-1} - aB_{n-2})$, 重复应用此式, 得

$$\begin{aligned}
B_n - aB_{n-1} &= b(B_{n-1} - aB_{n-2}) \\
&= b^2(B_{n-2} - aB_{n-3}) \\
&\quad \dots \\
&= b^{n-2}(B_2 - B_1) \\
&= b^{n-2}(a^2 + ab + b^2 - (a+b))
\end{aligned} \tag{2}$$

类似地，由(1)式又可得

$$\begin{aligned}
B_n - bB_{n-1} &= a(B_{n-1} - bB_{n-2}) \\
&\quad \dots \\
&= a^{n-2}(B_2 - B_1) \\
&= a^{n-2}(a^2 + ab + b^2 - a - b)
\end{aligned} \tag{3}$$

联立(2)(3)，消去 B_{n-1} 项，解得 $B_n = \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i$

也可以观察出 $B_n = \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i$ ，然后用归纳法证明；或者用特征方程求解递推关系。

$$2. \quad A_n = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2}y_1 & x_2^{n-2}y_2 & \cdots & x_n^{n-2}y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解：

(1) $x_i \neq 0, i=1,2,\dots,n$

$$\begin{aligned} A_n &= x_1^{n-1}x_2^{n-1}\cdots x_n^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{y_1}{x_1} & \frac{y_2}{x_2} & \cdots & \frac{y_n}{x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^{n-1} & \cdots & \left(\frac{y_n}{x_n}\right)^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (x_1x_2\cdots x_n)^{n-1} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{y_j}{x_j} - \frac{y_i}{x_i} \right) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i) \end{aligned}$$

(右边为 Vandermonde 行列式)

(2) x_1, \dots, x_n 中至少两个为零。此时 A_n 有两列成比例， $A_n = 0 = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)$ 。

(3) x_1, \dots, x_n 中有且仅有一个为零。设 $x_k = 0$ ，则

$$\begin{aligned} A_n &= \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & 0 & \cdots & x_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_k^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+k} y_k^{n-1} \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & \cdots & x_{k-1}^{n-1} & x_{k+1}^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2}y_1 & \cdots & x_{k-1}^{n-2}y_{k-1} & x_{k+1}^{n-2}y_{k+1} & \cdots & x_n^{n-2}y_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1} & \cdots & y_{k-1}^{n-1} & y_{k+1}^{n-1} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{n+k} y_k^{n-1} (x_1 \cdots x_{k-1} x_{k+1} \cdots x_n)^{n-1} \prod_{i,j \in \{1,2,\dots,k-1,k+1,\dots,n\}, i < j} \left(\frac{y_j}{x_j} - \frac{y_i}{x_i} \right) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i) \end{aligned}$$

$$\text{综上所述, } A_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)$$

二、设 A 为 n 阶方阵， A^* 为 A 的伴随矩阵。已知 $|A|=3$ ，求 $\left| \left(\frac{1}{4} A \right)^{-1} - 2A^* \right|$ (8 分)

解：

$$\begin{aligned}\left| \left(\frac{1}{4} A \right)^{-1} - 2A^* \right| &= \left| 4A^{-1} - 2|A|A^{-1} \right| \\&= \left| (4 - 2|A|)A^{-1} \right| \\&= \left| (4 - 2 \times 3)A^{-1} \right| \\&= \left| -2A^{-1} \right| \\&= (-2)^n |A^{-1}| \\&= (-2)^n \frac{1}{|A|} \\&= \frac{(-2)^n}{3}\end{aligned}$$

(装订线内不要答题)

三、设 $\alpha_1 = (1, 2, -1, 1, 1)$, $\alpha_2 = (4, 3, 0, -2, 5)$, $\alpha_3 = (2, -1, 2, -4, 3)$, $\alpha_4 = (1, -3, 3, -5, 2)$ 。求它们的极大线性无关组。(10 分)

解：对矩阵 $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]$ 做初等行变换，化为最简阶梯形

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -4 & -5 \\ 1 & 5 & 3 & 2 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & -6 & -6 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \\ \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

可见向量组的秩为 2，且两两不成比例，其中任意两个向量都能构成一个极大线性无关组。

(装订线内不要答题)

四、求下列方程组的通解：(10分)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 10 \end{cases}$$

解：对方程组的增广矩阵做初等行变换，化为阶梯形

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccccc} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 10 \end{array} \right] \\ \longrightarrow & \left[\begin{array}{cccccc} 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & -2 & 10 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & -3 & 15 \end{array} \right] \\ \longrightarrow & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \longrightarrow & \left[\begin{array}{cccccc} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ \text{令 } x_3 = x_4 = x_5 = 0, \text{ 求得方程组的一个特解为 } & \left[\begin{array}{c} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

分别令 $\begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 1 \end{cases}$ ，求得对应的齐次线性方程组的解 $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right], \left[\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right]$ 。

方程组的通解为

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

五、试证明：(1) 如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_t$ 线性表示，且 $s > t$ ，

则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 一定线性相关。(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 均为 n 元列向量， A 为 $m \times n$ 的矩阵。

如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, \dots, A\alpha_s$ 也一定是线性相关的。

(共 14 分，每小题 7 分)

证：

(1) \because 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表示，

\therefore 存在矩阵 $C_{t \times s}$ ，使得 $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_s] = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_t]C$ 。

考虑方程组 $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_s]X = 0$ ，其中 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{bmatrix}$ 。

显然， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关当且仅当方程组有非零解，即 $[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_t]CX = 0$ 有非零解。

而 $CX = 0$ 必有非零解（因为系数矩阵 C 的行数小于列数），且 $CX = 0$ 的解显然一定是 $[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_t]CX = 0$ 的解，所以 $[\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_t]CX = 0$ 有非零解，即

$[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_s]X = 0$ 有非零解， $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关。

(2) 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ 线性相关，

则 $[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_s]X = 0$ 有非零解，

则 $A[\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_s]X = 0$ 有非零解，

即 $[A\alpha_1 \ A\alpha_2 \ \dots \ A\alpha_s]X = 0$ 有非零解，

所以 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3, \dots, A\alpha_s$ 线性相关。

证毕。

六、试证明：

(1) 设 A, B 均为 $m \times n$ 阶矩阵，则 $r_{(A \pm B)} \leq r_A + r_B$ 。

(2) 设 A, B 均为 n 阶方阵，则 $r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ 。其中 r_A 或 $r(A)$ 表示 A 的秩。

(3) 设 A 为 n 阶可逆矩阵，则 $r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = r(A) + r(B)$ 。

(共 14 分，其中第 1、3 小题各 5 分)

证：

(1) 因为 $\begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_m & E_m \\ 0 & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$ ，且 $\begin{bmatrix} E_m & E_m \\ 0 & E_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix}$ 均为可逆矩阵，

$$\text{所以 } \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right),$$

$$\text{rank}(A+B) \leq \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & A+B \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right).$$

$$(2) \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_n & E_n \\ 0 & E_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

$$(3) \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_n & A^{-1}C \\ 0 & E_{\#column(B)} \end{bmatrix},$$

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

证毕。

七、设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, $r_A = r$ 。试证明: (1) A 可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和; (2) 若 $r_A = n$,

则存在一个秩也为 r 的 $n \times m$ 阶矩阵 B , 使得 $BA = E_n$, 其中 E_n 为 n 阶单位阵。

(共 10 分, 每小题 5 分)

证:

(1) $\because r_A = r$,

$$\therefore A = P \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q, P, Q \text{ 分别为 } m \text{ 阶、 } n \text{ 阶可逆矩阵。}$$

而 $\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = M_1 + M_2 + \cdots + M_r$, 设 M_i 表示只有第 i 行第 i 列元素为 1、其他元素都为零的

$m \times n$ 阶矩阵。则

$$\begin{aligned} A &= P(M_1 + M_2 + \cdots + M_r)Q \\ &= PM_1Q + PM_2Q + \cdots + PM_rQ \end{aligned}$$

$r_{M_1} = r_{M_2} = \cdots = r_{M_r} = 1$, 左乘与右乘可逆矩阵不改变原矩阵的秩, 所以

$$\text{rank}(PM_1Q) = \cdots = \text{rank}(PM_rQ) = 1$$
 。

(2) $\because r_A = n$,

$$\therefore A = P \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} Q, P, Q \text{ 分别为 } m \text{ 阶、 } n \text{ 阶可逆矩阵。}$$

令 $B = Q^{-1} \begin{bmatrix} E_n & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$, 代入验证:

$$BA = Q^{-1} \begin{bmatrix} E_n & 0 \end{bmatrix} P^{-1} P \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} Q = E_n$$

证毕。

八、设 e_1, e_2, \dots, e_n 是线性无关的向量，问 $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_n + e_1$ 是否线性无关？并说明理由。

(10 分)

解： $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_n + e_1$ 线性无关当且仅当此方程只有零解

$$[e_1 + e_2 \quad e_2 + e_3 \quad \cdots \quad e_n + e_1] X_{n \times 1} = 0$$

$$\because [e_1 + e_2 \quad e_2 + e_3 \quad \cdots \quad e_n + e_1] = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{即讨论 } [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix} X = 0 \text{ 是否只有零解。}$$

$$\text{设 } A = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$\because e_1, e_2, \dots, e_n$ 线性无关，

$\therefore [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] A X = 0$ 成立当且仅当 $A X = 0$ 成立。

而 $|A| = 1 + (-1)^{n+1} = \begin{cases} 2, & n = 2k+1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}, k \in \mathbb{N}$ ，所以

当 n 为奇数时， $|A| \neq 0$ ， $A X = 0$ 只有零解， $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_n + e_1$ 线性无关；

当 n 为偶数时， $|A| = 0$ ， $A X = 0$ 有非零解， $e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_n + e_1$ 线性相关。