（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学大类

2022-2023学年第一学期期末网上考核试卷

课程名称： 数学分析BII　　　　课程代码： MATH120017

卷　　别：■ A卷　□ B卷　□ C卷

姓　　名：＿＿＿＿＿＿＿＿　　　　学　　号：＿＿＿＿＿＿＿＿

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生（签名）：

年　　月　　日

注意！请务必将答案写在答题纸上！

题号	一	二	三	四	总分
得分					

试卷一共**四道大题**, 共 100 分. 考试时间 **120 分钟**.

（装订线内不要答题）

一. 定义和定理叙述题 (包含 **3** **道题**, 每题 3 分, 共 9 分).

1. 定义在 D 上的函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛的定义.

解 存在函数 $S(x)$, 使得对任意 $\varepsilon > 0$, 存在只与 ε 有关的 $N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 对任意 $x \in D$ 都有 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

2. n 元函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 在 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 处可微的定义.

解 存在常数 $A_1, \cdots, A_n$, 使得

$$\begin{aligned}&|f(x_1, \cdots, x_n) - f(x_1^0, \cdots, x_n^0) - A_1(x_1 - x_1^0) - \cdots - A_n(x_n - x_n^0)|\\ =\,& o\left(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \cdots + (x_n - x_n^0)^2}\right), \quad (x_1, \cdots, x_n) \to (x_1^0, \cdots, x_n^0).\end{aligned}$$

3. $\mathbf{R}^3$ 中的向量场的散度的定义.

解 设 $\mathbf{a} = P(x,y,z)\mathbf{i} + Q(x,y,z)\mathbf{j} + R(x,y,z)\mathbf{k}$ 是一个向量场, 它的散度定义为

$$\mathrm{div}\mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

（装订线内不要答题）

二. 判断题 (判断以下说法是否正确, 若认为正确请给出证明, 若认为错误请给出反例. 包含 **4 道题**, 每题 4 分, 共 16 分. 每道题判断 1 分, 证明或给反例 3 分).

1. 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 那么 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln n$ 也收敛.

解 不正确. 比如 $a_n = \frac{1}{n \ln^2 n}$.

2. 设函数 $f(x,y) = \arctan \frac{x+y}{1-xy} - \arctan x - \arctan y$. 因为在定义域内处处有 $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, 并且 $f(0,0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 恒等于 0.

解 不正确. 比如 $x=y=2$ 时, $\arctan \frac{x+y}{1-xy} < 0$, 但是 $\arctan x = \arctan y > 0$. 事实上, 在 $xy<1$ 时, $f(x,y)=0$; 在 $xy>1$ 且 $x>0$ 时, $f(x,y)=-\pi$; 在 $xy>1$ 且 $x<0$ 时, $f(x,y)=\pi$.

3. 设 $D = \{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$, 函数 $f(x,y)$ 满足 $f(-x,y) = -f(x,y)$, 那么 $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$.

解 正确.

(方法一) 我们将重积分改写成累次积分:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx \right) dy.$$

因为 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数, 所以内层积分为 0, 从而重积分为 0.

(方法二) 考虑变量代换 $u=-x, v=y$. 那么

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(-u,v)dudv = -\iint_D f(u,v)dudv = -\iint_D f(x,y)dxdy.$$

于是 $\iint_D f(x,y)dxdy = 0$.

4. 设 Σ 为半球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ $(z \le 1)$, 定向取下侧. 根据 Gauss 公式. 第二类曲面积分

$$\iint_\Sigma xdydz - 2ydzdx + zdxdy = 0.$$

解 不正确. 这里的 Σ 不是封闭曲面. 我们考虑另一个曲面 $\Sigma_1 = \{(x,y,z);\ z=1, x^2+y^2 \le 1\}$, 定向取上侧. 那么 $\Sigma \cup \Sigma_1$ 是一个封闭曲面, 并且定向为外侧. 根据 Gauss 公式, 我们知道

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma xdydz - 2ydzdx + zdxdy &= -\iint_{\Sigma_1} xdydz - 2ydzdx + zdxdy \\ &= -\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy \\ &= -\pi.\end{aligned}$$

（装订线内不要答题）

三. 计算题 (请写出计算与推导过程. 包含 **6 道题**, 共 50 分).

1. (本题 8 分) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的函数, 并且在 $[-\pi,\pi]$ 上

$$f(x)=x,$$

将 $f(x)$ 展开为 Fourier 级数.

解 记

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $a_n=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$. 另一方面

$$\begin{aligned} b_n &=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx \\ &=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xd\cos nx \\ &=-\frac{1}{n\pi}(x\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx \\ &=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

因此

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

（装订线内不要答题）

2. (本题 8 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ 的收敛域以及和函数.

解 收敛半径 R 满足

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n}{n}\right)^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}.$$

所以 $R = 1/\sqrt{2}$. $x = \pm 1/\sqrt{2}$ 时级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, 是发散的. 因此, 幂级数收敛域为 $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

令 $y = 2x^2$. 我们先来计算

$$S(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}.$$

我们有

$$S'(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y^{n-1} = \frac{1}{1-y},$$

所以

$$S(y) = S(0) + \int_0^y S'(u)du = -\ln(1-y).$$

那么

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n} = S(2x^2) = -\ln(1-2x^2).$$

（装订线内不要答题）

3. (本题 8 分) 已知圆锥面 $z^2=2x^2+2y^2$ 与平面 $x+y+2z=1$ 的交线是一椭圆, 用 C 表示, 求 C 上的点到 z 轴的距离的最小值和最大值.

解 (方法一) 记 $f(x,y,z)=x^2+y^2$, 那么这是 C 上的连续函数. 因为 C 是紧集, 所以 f 有最大值和最小值, 而最值恰好为约束条件

$$z^2=2x^2+2y^2,\quad x+y+2z=1$$

下的条件极值.

记

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y)-\lambda(2x^2+2y^2-z^2)-\mu(x+y+2z-1).$$

我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial x}=(2-4\lambda)x-\mu=0,\\
&\frac{\partial L}{\partial y}=(2-4\lambda)y-\mu=0,\\
&\frac{\partial L}{\partial z}=2\lambda z-2\mu=0,\\
&z^2=2x^2+2y^2,\quad x+y+2z-1=0.
\end{aligned}$$

从而

$$x=\frac{\mu}{2-4\lambda},\quad y=\frac{\mu}{2-4\lambda},\quad z=\frac{\mu}{\lambda}.$$

代入圆锥面和平面的方程, 解得

$$\begin{cases}x=-\frac{1}{2},\\ y=-\frac{1}{2},\\ z=1,\\ \lambda=1,\\ \mu=1,\end{cases}\qquad \text{或}\qquad \begin{cases}x=\frac{1}{6},\\ y=\frac{1}{6},\\ z=\frac{1}{3},\\ \lambda=\frac{1}{3},\\ \mu=\frac{1}{9}.\end{cases}$$

对于第一组解, 我们有 $f(x,y,z)=\frac{1}{2}$; 对于第二组解, 我们有 $f(x,y,z)=\frac{1}{18}$. 这分别是 f 在 C 上的最大值和最小值. 因此 C 上的点到 z 轴的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(方法二) 设 $(x,y,z)\in C$. 因为 $|1-2z|=|x+y|\le\sqrt{2(x^2+y^2)}$, 所以 $(1-2z)^2\le z^2$. 这意味着 $3z^2-4z+1\le 0$, 从而 $1/3\le z\le 1$. 注意到以上不等式等号成立时 $x=y$. 于是可以算出当 $x=y=1/6$ 时, $z=1/3$; 当 $x=y=1/2$ 时, $z=1$. 因此对于 C 上的点, z 的最大值为 1, 最小值为 1/3. 又因为 $z=\sqrt{2x^2+2y^2}$, 所以 C 上的点到 z 轴的距离

$\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

(方法三) 记 $f(x,y,z)=x^2+y^2$, 那么这是 C 上的连续函数. 因为 C 是紧集, 所以 f 有最大值和最小值. 在最大值和最小值处, C 的切线应当垂直于 z 轴. 在 C 上一点 (x_0,y_0,z_0) 处, C 的切线为圆锥面的切平面 $2x_0x+2y_0y-z-0z=0$ 与平面 $x+y+2z=1$ 的交线, 切向量

$$\mathbf{t}=(2x_0,2y_0,-z_0)\times(1,1,2)=(4y_0+z_0,-4x_0-z_0,2x_0-2y_0).$$

因为 $\mathbf{t}$ 垂直于 z 轴, 所以 $x_0=y_0$. 代入圆锥面和平面的方程就可以解得

$$\begin{cases} x=-\frac{1}{2}, \\ y=-\frac{1}{2}, \\ z=1, \end{cases} \qquad \text{或} \qquad \begin{cases} x=\frac{1}{6}, \\ y=\frac{1}{6}, \\ z=\frac{1}{3}. \end{cases}$$

所以 C 上的点到 z 轴的距离 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{6}$.

（装订线内不要答题）

（装订线内不要答题）

4. (本题 8 分) 设 p 是一个正实数, 讨论反常重积分

$$\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p}$$

的敛散性, 其中

$$\Omega = \{(x,y,z); x^2+y^2+z^2 \le 1, 0 \le z \le x^2+y^2\}.$$

解 我们采用球坐标

$$x = r\cos\theta\sin\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\varphi,$$

其中 $r \ge 0$, $0 \le \theta < 2\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$. 记区域 Ω 在球坐标下对应的区域为 Ω_1. 那么, Ω_1 中的点满足条件

$$0 \le r \le 1, \quad 0 \le r\cos\varphi \le r^2\sin^2\varphi. \tag{*}$$

从 (*) 中的第二个不等式, 我们知道对每个 $r \in [0,1]$, φ 的范围是 $[\varphi(r), \pi/2]$, 其中 $\varphi(r)$ 满足方程 $r\cos\varphi(r) = r^2\sin^2\varphi(r)$, 即

$$\cos\varphi(r) = \frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{2r},$$

而 θ 的范围总是 $[0, 2\pi)$. 注意到 $dxdydz = r^2\sin\varphi drd\theta d\varphi$, 我们有

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p} &= 2\pi\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}\int_{\varphi(r)}^{\pi/2}\sin\varphi d\varphi \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{\cos\varphi(r)}{r^{2p-2}}dr \\
&= \pi\int_0^1 \frac{-1+\sqrt{1+4r^2}}{r^{2p-1}}dr \\
&= 4\pi\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-3}(1+\sqrt{1+4r^2})}dr.
\end{aligned}$$

因此, 这个反常重积分收敛当且仅当 $2p-3<1$, 即 $p<2$.

（装订线内不要答题）

5. (本题 8 分) 设 Σ 为曲面 $z = xy$ 上满足 $|x| + |y| \leq 1$ 的部分, 计算第一类曲面积分

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS.$$

解　首先, 在参数表示 (x, y, xy) 下, 我们有 $EG - F^2 = 1 + x^2 + y^2$, 所以

$$\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dS = \iint_{|x|+|y|\leq 1} (1 + x^2 + y^2) dxdy.$$

考虑变量代换 $u = x + y$, $v = x - y$, 于是 $-1 \leq u, v \leq 1$, $|\frac{\partial x, y}{\partial u, v}| = \frac{1}{2}$, 且 $x^2 + y^2 = \frac{u^2+v^2}{2}$. 因此

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\leq 1} (1 + x^2 + y^2) dxdy &= \frac{1}{4} \iint_{-1\leq u,v\leq 1} (2 + u^2 + v^2) dudv \\ &= 2 + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u^2 du + \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} v^2 dv \\ &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

（装订线内不要答题）

6. (本题 10 分, 第 (1) 小题 4 分, 第 (2) 小题 6 分) 设 C 是一条定向简单闭曲线.

(1) 计算第二类曲线积分

$$\int_C e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)dx - e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)dy.$$

(2) 取 C 为从 $(0,0)$ 出发, 经过 $(R,0)$, (R,R), 并回到 $(0,0)$ 的三角形曲线, 并取逆时针方向. 计算反常积分

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx.$$

解 (1) 记 $P(x,y)=e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)$, $Q(x,y)=-e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)$. 所以

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2xe^{-2xy}\cos(x^2-y^2)+2ye^{-2xy}\sin(x^2-y^2)=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

根据 Green 公式, 我们知道

$$\int_C Pdx+Qdy=0,$$

从而

$$\int_C e^{-2xy}\cos(x^2-y^2)dx - e^{-2xy}\sin(x^2-y^2)dy=0.$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned} 0 &= \int_C Pdx+Qdy \\ &= \int_0^R P(x,0)dx+\int_0^R Q(R,y)dy+\int_0^R (P(t,t)+Q(t,t))dt \\ &= \int_0^R \cos(x^2)dx-\int_0^R e^{-2Ry}\sin(R^2-y^2)dy+\int_0^R e^{-2t^2}dt. \end{aligned}$$

令 $R\to\infty$, 注意到

$$\left|\int_0^R e^{-2Ry}\sin(R^2-y^2)dy\right| \le \int_0^R e^{-2Ry}dy=\frac{1-e^{-2R^2}}{2R}\to 0,$$

所以我们得到

$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx=\int_0^\infty e^{-2t^2}dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\infty e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

四. 证明题 (包含 **3 道题**, 共 25 分).

1. (本题 7 分) 设 $\mathbb{R}^2$ 上的函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 并且 $f(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$. 证明函数列

$$S_n(\theta)=n\cdot f\left(\frac{\cos\theta}{n},\frac{\sin\theta}{n}\right)$$

在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛, 并求出它的极限.

证明 因为 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 我们有

$$\left|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial}{x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right|=o(\sqrt{x^2+y^2}),\quad (x,y)\to(0,0).$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|f(x,y)-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

因此, 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 当 $\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 有

$$\frac{|f(x,y)-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}<\varepsilon.$$

代入 $x=\frac{\cos\theta}{n}$, $y=\frac{\sin\theta}{n}$, 我们就知道当 $n>1/\delta$ 时, 对任意 $\theta\in[0,2\pi]$ 都有

$$\left|n\cdot f\left(\frac{\cos\theta}{n},\frac{\sin\theta}{n}\right)-\sin\theta\right|<\varepsilon.$$

这表明 $S_n(\theta)$ 在 $[0,2\pi]$ 上一致收敛于 $\sin\theta$.

（装订线内不要答题）

2. (本题 8 分, 共 2 小题, 每小题 4 分) 设曲线 C 为双纽线

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

在第一象限的部分.

(1) 记 r 为 C 上的点到原点的距离, 请以 r 为参数, 写出曲线 C 的参数表示 (需要写出 r 的范围), 并证明 C 的弧长 $L(C)$ 满足

$$L(C) = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

(2) 证明:

$$L(C) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{4n+1}.$$

证明 (1) 注意到 $r^2 = x^2+y^2$. 因此在双纽线上, $r^4 = x^2 - y^2$. 由此可得

$$x^2 = \frac{r^2+r^4}{2}, \quad y^2 = \frac{r^2-r^4}{2}.$$

又因为 $x, y > 0$, 所以我们有

$$x = x(r) = \sqrt{\frac{r^2+r^4}{2}}, \quad y = y(r) = \sqrt{\frac{r^2-r^4}{2}}.$$

另一方面, 利用极坐标可以将曲线写作 $r^2 = \cos 2\theta$. 由此可知 r 的范围是 $[0,1]$.

我们有

$$x'(r) = \frac{r+2r^3}{\sqrt{2(r^2+r^4)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1+2r^2}{\sqrt{1+r^2}}, \quad y'(r) = \frac{r-2r^3}{\sqrt{2(r^2-r^4)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1-2r^2}{1-r^2}$$

直接的计算表明

$$x'(r)^2 + y'(r)^2 = \frac{1}{1-r^4}.$$

所以

$$L(C) = \int_0^1 \sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}dr = \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

(2) 利用

$$\frac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/2}{n}u^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}u^n,$$

代入 $u=-r^4$, 我们就有

$$\frac{1}{\sqrt{1-r^4}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}r^{4n}.$$

对右边的幂级数逐项积分, 就得到

$$\int_0^1\frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^1 r^{4n}dr=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{1}{4n+1}$$

（装订线内不要答题）

3. (本题 10 分, 共 3 小题, 前两小题每题 3 分, 第三小题 4 分) 考虑函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha},$$

其中参数 $\alpha > 0$.

(1) 证明: 当 $\alpha > 0$ 时, 该级数在 $(-\infty, \infty)$ 上点态收敛, 极限 $S(x)$ 是一个周期为 2π 的函数.

(2) 证明: 当 $\alpha > 2$ 时, $S(x)$ 处处可导.

(3) 证明: 当 $\alpha = 2$ 时, $S(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上处处可导, 但在 $x = 0$ 处不可导.

证明 (1) 注意到

$$\sum_{n=1}^{N} \sin nx = \frac{\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{2N+1}{2}x)}{2\sin(\frac{x}{2})}.$$

因此, 当 $x \neq 2k\pi$ 时, $\sum_{n=1}^{N} \sin nx$ 有界. 又因为在 $\alpha > 0$ 时, $1/n^\alpha$ 单调递减且收敛于 0. 根据 Dirichlet 判别法, 我们知道级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ 收敛. 而当 $x = 2k\pi$ 时, 级数的每一项都是 0, 级数也收敛. 因为级数的通项均以 2π 为周期, 所以和函数也以 2π 为周期.

(2) 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha-1}}.$$

注意到

$$\left|\frac{\cos nx}{n^{\alpha-1}}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

而当 $\alpha > 2$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ 收敛. 根据 Weierstrass 判别法, 我们知道 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right)'$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上一致收敛. 根据逐项求导定理, 我们知道函数 $S(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上可导.

(3) 类似于 (1), 我们可以用 Dirichelet 判别法证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{\alpha-1}}$$

在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛. 逐项求导定理表明 $S(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可导.

下面来证明 $S(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导. 注意到 $S(0) = 0$, 所以

$$\frac{S(x) - S(0)}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

设 $x > 0$. 我们把求和分为两部分:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} = \sum_{n \leq \frac{\pi}{2x}} \frac{\sin nx}{n^2} + \sum_{n > \frac{\pi}{2x}} \frac{\sin nx}{n^2}.$$

对于第一部分, 我们有 $nx \le \pi/2$, 利用不等式 $\sin t \ge 2t/\pi$ $(0 \le t \le \pi/2)$, 我们有

$$\frac{1}{x}\sum_{n\le \frac{\pi}{2x}} \frac{\sin nx}{n^2} \ge \frac{2}{\pi}\sum_{n\le \frac{\pi}{2x}} \frac{1}{n}.$$

对于第二部分, 我们有

$$\left|\frac{1}{x}\sum_{n> \frac{\pi}{2x}} \frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{x}\sum_{n> \frac{\pi}{2x}} \frac{1}{n^2} \le \frac{2}{x}\sum_{n> \frac{\pi}{2x}} \frac{1}{n(n+1)} \le \frac{2}{x}\cdot\frac{2x}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

因此

$$\left|\frac{S(x)-S(0)}{x}\right| \ge \frac{2}{\pi}\sum_{n\le \frac{\pi}{2x}} \frac{1}{n} - \frac{4}{\pi}.$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以 $x \to 0+$ 时, $\sum_{n\le\frac{\pi}{2x}}\frac{1}{n} \to +\infty$. 这意味着 $S(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

（装订线内不要答题）