（装订线内不要答题）

课程代码：MATH120017

考试形式：□开卷 √闭卷

2013 年 9 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业__________ 学号__________ 姓名__________ 成绩__________

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

一、严格表述题（每题 3 分，共 3 题 ，共 9 分）

1. 请用 $\varepsilon - N$ 语言表述：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = h$ 。

2. n 元函数的中值定理。

3. 第二类曲面积分。

二、填空题（每题 4 分，共 7 题，共 28 分）

1. 曲面 $z = e^z + xy$ 在点 $(1,-1,0)$ 处的法线方程为_____。

2. 设方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \arctan\dfrac{y}{x}$ 确定函数 $y(x)$,则 $\dfrac{dy}{dx} =$

3. $z = y\ln(xy)$，则 $d^2 z =$_____。

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x\in[0,\pi) \\ 0, & x\in[-\pi,0) \end{cases}$ 的 Fourier 级数为__________________。

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+1)^n}{n^2}$ 的收敛域为___________。

6. 向量场$\mathbf{a}(x,y,z)=xy^2\mathbf{i}+ye^z\mathbf{j}+x\ln(1+z^2)\mathbf{k}$在点$(1,1,0)$的散度为$\mathrm{div}\,\mathbf{a}$=___。

7. 已知$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=4\dfrac{dy}{dx}$，则$y(x)$=____________。

三、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予简要证明；如果错误的，请回答“否”，并举反例。）（每题 5 分，共 3 题，共 15 分）

1. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$收敛。

2. 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$在实数域上一致收敛。

3. 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处的所有方向导数均存在,则$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)处可微。

四、计算题（每题 6 分，共 5 题，共 30 分）

1. 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$的收敛域，并写出其和函数。

2. 设$z=u^v$，其中$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求dz 。

3. 计算$\iint\limits_{D}(2x-y)dxdy$，其中 D 为直线$y=1, 2x-y+3=0$与$x+y-3=0$所围成的闭区域。

4. 求$\int\limits_{L}(2x-y+4)dx+(3x+5y-6)dy$，其中 L 是顶点为$(0,0)$，$(3,0)$和$(3,2)$的三角形正向边界。

（装订线内不要答题）

5. 求 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上 $z\geq h(0<h<a)$ 的部分。

五、证明题（共 3 题，共 18 分）

1.（6 分）已知 $x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{x_n}{x_{n+1}}-1)>0$，试证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 收敛。

2.（6 分）设 $0<x<1$，$0<y<+\infty$，证明：$yx^y(1-x)<\dfrac{1}{e}$。

3.（6 分）设立体 Ω 由旋转抛物面 $\Sigma: z=x^2+y^2$ 与 Σ 在点 (a,b,a^2+b^2) $(a>0,b>0)$ 处的切平面以及圆柱面 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ 所围成，证明 Ω 的体积仅与圆柱面的半径 r 相关，而与点 (a,b) 的位置无关。