复 旦 大 学 技 术 试 验 班

《线性代数》期中考试

(2015年10月29日)

COMP120004.06　　□开卷　　■ 闭卷　　共4页

(本试卷答卷时间为100分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效)

班级 ______________ 学号 ____________ 姓名 ____________ 成绩 ________

题号	一(10)	二(18)	三(10)	四(10)	五(12)	六(10)	七(10)	八(10)	九(10)	总分
得分										

符号说明:

$\mathbf{I}$:	单位矩阵.	$\det(\bullet)$:	矩阵 “$\bullet$”的行列式.
$\mathbf{I}_n$:	n 阶单位矩阵.	$(\bullet)^*$:	矩阵 “$\bullet$” 的伴随矩阵.

一. 判断下列命题是否正确(正确的填“T”, 错误的填“F”, 每题1分)

(1) [T] 设 $\mathbf{P}_1,\mathbf{P}_2$ 为初等矩阵, $\mathbf{G}=\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$, 则 $\mathbf{G}$ 是非奇异的.
(**理由**: $\because$ 初等矩阵可逆, $\therefore$ $\mathbf{G}$可逆.)

(2) [F] $\det(c\mathbf{A})=c\det(\mathbf{A})$
(**理由**: 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵, $\det(c\mathbf{A})=c^n\det(\mathbf{A})$, 因从每一行(列)提出参数 c, 共 n 行(列), 提出的参数为: c^n.)

(3) [F] 若 $\mathbf{A}$ 的行阶梯形中含有自由变量(非主元列), 则方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 将有无穷多解.
(**理由**: 含自由变量(非主元列), 并不表示增广阵 $\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$ 的秩等于 $\mathbf{A}$ 的秩, 方程组可能无解.)

(4) [F] 矩阵 $\mathbf{A}$ 经一系列初等行变换后等价于矩阵 $\mathbf{B}$, 则称矩阵 $\mathbf{A}$ 行等价于 $\mathbf{B}$, 若 $\mathbf{A}$ 又行等价于 $\mathbf{C}$, 则 $\mathbf{A}$ 行等价于 $\mathbf{B}+\mathbf{C}$.
(**理由**: 由前提可知, $\operatorname{rank}(\mathbf{A})=\operatorname{rank}(\mathbf{B})=\operatorname{rank}(\mathbf{C})$, 但 $\operatorname{rank}(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ 不一定等于 $\operatorname{rank}(\mathbf{B})$(或$\operatorname{rank}(\mathbf{C})$).)

(5) [F] 若 $n\times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 非奇异, 则 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 也是非奇异的, 且 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}+\mathbf{B}^{-1}$.
(**理由**: $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 非奇异, 并不能得出 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 也非奇异. 反例: $\mathbf{B}=-\mathbf{A}$, $\mathbf{A},\mathbf{B}$非奇异, 但 $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{0}$.)

(6) [F] 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$, 则 $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$.
(**理由**: $\mathbf{AB}=\mathbf{0}$, 说明 $\mathbf{B}$ 的列是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的阶; 反之, $\mathbf{BA}=\mathbf{0}$, 需要 $\mathbf{A}$ 的列是 $\mathbf{By}=\mathbf{0}$ 的解, 两者完全不同..)

(7) [T] 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 $n\times n$ 矩阵, 若 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}$ 且 $\mathbf{B}\neq\mathbf{I}_n$, 则 $\mathbf{A}$ 必奇异(不可逆).
(**理由**: $\mathbf{AB}=\mathbf{A}\Longrightarrow\mathbf{A}(\mathbf{B}-\mathbf{I}_n)=\mathbf{0}$, 而 $\mathbf{B}\neq\mathbf{I}\Longrightarrow\mathbf{B}-\mathbf{I}_n\neq\mathbf{0}\Longrightarrow\operatorname{rank}(\mathbf{A})<n$, 即 $\mathbf{A}$ 必奇异.)

(8) [T] 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的非零向量且 $\mathbf{A}=\mathbf{xy}^T$, 则 $\mathbf{A}$ 的行最简形将包含一个非零行.

(9) [T] 设 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$, $\mathbf{E}=\begin{bmatrix} 0 & \alpha\\ \beta & 0\end{bmatrix}$,
若 $\mathbf{B}=\mathbf{EA}$, 则 $\det(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\det(\mathbf{A})+\det(\mathbf{B})$.

(10) [T] $n+1$ 个 $n\times 1$ 向量构成的向量组必线性相关.

二、 填空题(每空2分,共18分)

(1) 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 3×3 矩阵, 且 $\det(\mathbf{A})=4$, $\det(\mathbf{B})=6$, $\mathbf{E}$ 为交换第1,3两行对应的初等矩阵, 则 $\det\left(\dfrac{1}{2}\mathbf{A}\right)=$ $\underline{\dfrac{1}{2}}$, $\det\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^T\right)=$ $\underline{\dfrac{2}{3}}$, $\det\left(\mathbf{EA}^2\right)=$ $\underline{-16}$.

(2) 设 α,β 为 $n(\geq 2)$ 维非零列向量, $\mathbf{A}=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 则 $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$ $\underline{\leq 2}$.

(3) 矩阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$(幂等矩阵), 设 $\mathbf{I}+\mathbf{A}$ 非奇异, 则 $(\mathbf{I}+\mathbf{A})^{-1}=$ $\underline{\mathbf{I}-\dfrac{1}{2}\mathbf{A}}$.

(4) 令 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_{11},\mathbf{A}_{22}$ 为非奇异方阵, 则 $\mathbf{A}^{-1}=$ $\underline{\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{A}_{22}^{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22}^{-1}\end{bmatrix}}$.

(5) 设 $n(\geq 3)$ 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的秩为 $n-2$, 则 $\mathbf{A}^* = \underline{\mathbf{0}}$.

(6) 设线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 对应的增广矩阵为 $\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 12 & 0 & 4 & 20 \\ -1 & 0 & 3 & 5 & 4 \end{array}\right]$, 则方程组的特解为:

$\underline{\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$, 通解为 $\underline{t_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

三. 计算 $n+1$ 阶行列式 $\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

解: 行列式类似 Vandermonde 行列式, 仅需将第一行移至最后一行,第二行移至倒数第二行,...

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= (-1)^n \begin{vmatrix} a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^{n-2} & (a-1)^{n-2} & (a-2)^{n-2} & \cdots & (a-n)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} = \cdots \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & a-2 & \cdots & a-n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & (a-2)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & (a-2)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n+1} [(a-j+1)-(a-i+1)] \\
&= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n+1} (i-j)
\end{aligned}$$

四. 设 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中两个不同的向量, 即 $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, 其中 $n>1$. 若 $\mathbf{Ax}=\mathbf{Ay}$, 证明 $\det(\mathbf{A})=0$.

证: 由 $\mathbf{Ax}=\mathbf{Ay}$ 可得

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{0} \tag{1}$$

又 $\because \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$,

$$\mathbf{x}-\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \tag{2}$$

即式(1)有非零解, 由齐次线性方程组的解理论可知: $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) < n \Longrightarrow \det(\mathbf{A}) = 0$.

五. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶可逆方阵, 证明 $(\mathbf{A}^*)^* = \det(\mathbf{A})^{n-2}\mathbf{A}$, 并求 $\det(\mathbf{A}^*)^*$.

证: 因 $\mathbf{A}$ 可逆, 有

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \det(\mathbf{A})\mathbf{I}_n \tag{3}$$

及 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{A}^*$, 并且 $\mathbf{A}^*$ 也可逆:

$$(\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{A}$$

由 $\mathbf{A}^*(\mathbf{A}^*)^* = \det(\mathbf{A}^*)\mathbf{I}$, 可得:

$$(\mathbf{A}^*)^* = \det(\mathbf{A}^*)(\mathbf{A}^*)^{-1} = \frac{\det(\mathbf{A}^*)}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{A} \tag{4}$$

对等式(3)两端取行列式, 得 $\det(\mathbf{A}^*) = \det(\mathbf{A})^{n-1}$, 代入式(4) 后得: $(\mathbf{A}^*)^* = \det(\mathbf{A})^{n-2}\mathbf{A}$.

六. 设 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $a_i \neq 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$, 求 $\mathbf{X}^{-1}$.

解: 利用分块矩阵求逆, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{(n-1)\times 1} & \mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)} \\ a_n & \mathbf{0}^T_{1\times(n-1)} \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_{(n-1)\times(n-1)}$ 可逆, 另设 $\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}^T_{1\times(n-1)} & c \\ \mathbf{B}_{(n-1)\times(n-1)} & \mathbf{d}_{(n-1)\times 1} \end{bmatrix}$, 得 $\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$ 的分块形式

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}\mathbf{b}^T + \mathbf{A}\mathbf{B} & c\mathbf{0} + \mathbf{A}\mathbf{d} \\ a_n\mathbf{b}^T + \mathbf{0}^T\mathbf{B} & a_n c + \mathbf{0}^T\mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}_{n-1} \\ \mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0} \\ a_n\mathbf{b}^T = \mathbf{0}^T \\ a_n c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{d} = \mathbf{0}, & (\text{因}\mathbf{A}\text{可逆.}) \\ \mathbf{b}^T = \mathbf{0}^T, & (\text{因}a_n \neq 0.) \\ c = a_n^{-1} \end{cases}$$

七. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是 n 阶方阵, 满足 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$.

(a) 证明 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 可逆.

(b) 若 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, 求矩阵 $\mathbf{B}$.

(a) **证**: 由 $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ 得 $\mathbf{A}\mathbf{B} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{I}$. 因此,

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

即 $(\mathbf{A} - \mathbf{I})$ 可逆.

(b) 由 (a) 可得:

$$\mathbf{B}-\mathbf{I}=(\mathbf{A}-\mathbf{I})^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

八. 讨论 λ 取何值时, 下列线性方程组无解、有解, 在有解的情况下求其一般解.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & - & x_4 & = & \lambda \end{array}$$

解: 线性方程组的增广矩阵为:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & \lambda \end{array}\right] \xrightarrow{R_2+(-2)*R_1;R_3+(-3)*R_1} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & \lambda \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3+(-1)*R_2} \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{array}\right]$$

(1) 当 $\lambda \neq 1$ 时, 方程组不相容(无解);

(2) 当 $\lambda = 1$ 时, 方程组有无穷多解:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix} 3/5 \\ 1/5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (t_1,t_2\in\mathbb{R})$$

九. 设向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 分别为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $\mathscr{L}_A=\{\mathbf{x}\,|\,\mathbf{Ax}=\mathbf{0}\}$, $\mathscr{L}_B=\{\mathbf{y}\,|\,\mathbf{By}=\mathbf{0}\}$, 求集合 $\mathscr{L}_A\cap\mathscr{L}_B$.

解: 求集合 $\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B$ 等价于求下列齐次线性方程组的解:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+R_1; \\ R_4+(-0.5)*R_1; \\ R_5+(-0.5)*R_1; \\ R_6+(-0.5)*R_1}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

得

$$\mathscr{L}_A \cap \mathscr{L}_B = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$