复旦大学力学与工程科学系

2008～2009学年第二学期期末考试试卷

□A卷　　□B卷

课程名称：数学分析（II）　　课程代码：MATH120009.09

开课院系：力学与工程科学系　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：______________　学号：______________　专业：______________

题 号	1	2/(1)	2/(2)	3/(1)	3/(2)	4/(1)	4/(2)	5/(1)	5/(2)
得 分									
题 号	6/(1)	6/(2)	6/(3)	6/(4)	7/(1)	7/(2)			总 分
得 分									

Problem 1 (*Fourier* **级数基本概念)** *现有有限区间上定义的分段函数：*

$$f(x) \triangleq \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x \in [1,2] \\ 0 & x \in (2,3] \end{cases}$$

1. (10%) *按点收敛的概念，将* $f(x)$, $x \in [0,3]$ *表示成Fourier 级数的形式。要求写出具体的表达形式，但相关系数仅需给出具体计算式。*

2. (05%) *示意性绘出Fourier 级数对应的和函数（极限函数）的图像。*

Problem 2 (关于正项或负项级数的判别法) *正项或负项级数的判别法可归结为"比较"的思想。源于直接比较的判别法可归结如下：*

$$\text{如有：} a_n = b_n + o(b_n)$$

则 $\sum a_n$ *同* $\sum b_n$ *具有相同的敛散性。*

1. (10%) *证明上述结论。*

2. (10%) *基于上述结论，研究级数*

$$\sum_{n=3}^{+\infty} (\ln\cos\frac{1}{n})^p, \quad p \in \mathbb{R}$$

的敛散性（按 p *的取值，给出充分性结论）。*

Problem 3 (关于幂级数的基本性质) 对于幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$，有如下基本性质：

$$\forall[\alpha,\beta]\subset]x_0-\rho,x_0+\rho[$$

有：$S(x):=\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，且 $S(x)\in C[\alpha,\beta]$。

1. (15%) 证明上述结论（连续性证明可直接利用函数项级数的有关分析性质）。

2. (15%) 基于幂级数相关分析性质，研究下列级数的和

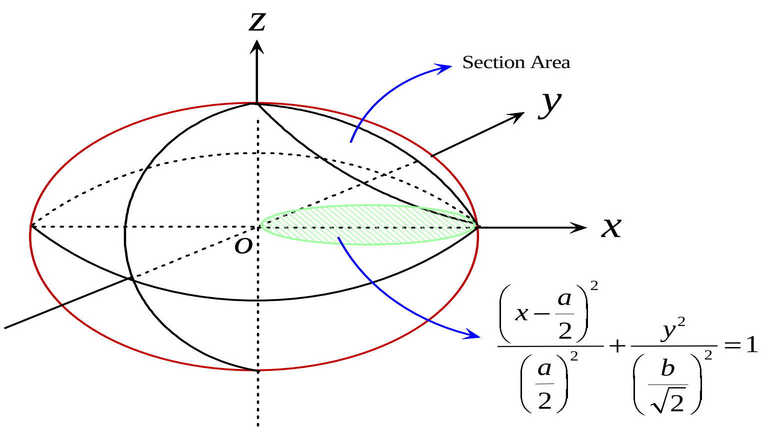
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(2n+1)}$$

Problem 4 (关于隐映照定理) 设有向量值映照：

$$\Phi(X,Y):=\Phi\left(\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right):\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^2\ni\{X,Y\}\mapsto\Phi(X,Y)\triangleq\begin{bmatrix}uy+vx+w+x^2\\uvw+x+y+1\end{bmatrix}$$

1. (10%) 说明：在 $\{X_0,Y_0\}=\{[2,1,0]^T,[-1,0]^T\}$ 点，上述向量值映照满足隐映照定理的要求，并基于图示表达隐映照定理所给出的结论。

2. (10%) 计算所确定的隐映照的 Jacobian 矩阵。



Problem 5 (关于曲线积分计算) 如上图所示，计算曲线积分：

$$\int_L ydx+zdy+xdz\equiv\int_L(y\mathbf{i}+z\mathbf{j}+x\mathbf{k})\cdot\tau dl$$

此处曲线 L 为

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1\end{cases},\quad x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$$

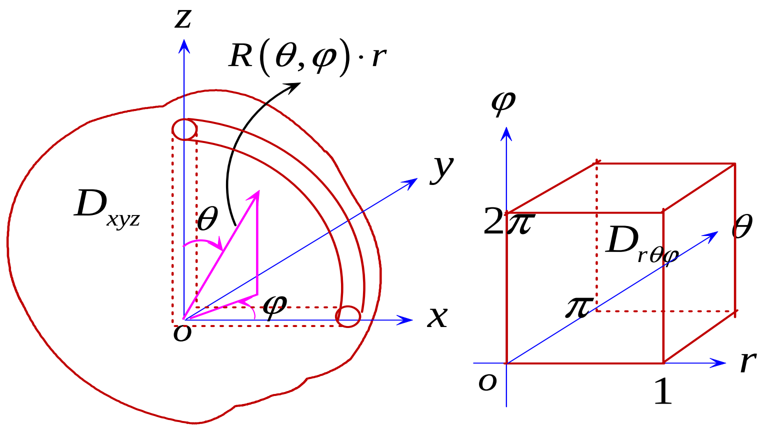
（$a>0,\ b>0,\ c>0$）的交线；积分指向为从 $(a,0,0)$ 至 $(0,0,c)$。本问题可有以下两种解法：

1. (10%) 消去 z，易得交线 L 在 xy 平面的投影为：

$$\frac{(x-\frac{a}{2})^2}{(\frac{a}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{b}{\sqrt{2}})^2}=1$$

籍此构造 L 的参数表示（向量值映照），并直接计算上述积分。

2. (10%) 基于 Stokes 公式计算上述积分。



Problem 6 研究不规则球体（可想像为马玲薯），如上图所示，基于一般球坐标系可引入其向量值映照表示：

$$\Phi(r,\theta,\phi):\mathscr{D}_{r\theta\phi}\ni\begin{bmatrix} r\\ \theta\\ \phi\end{bmatrix}\mapsto\Phi(r,\theta,\Phi)\equiv\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix}\triangleq\begin{bmatrix} R(\theta,\phi)\cdot r\sin\theta\cos\phi\\ R(\theta,\phi)\cdot r\sin\theta\sin\phi\\ R(\theta,\phi)\cdot r\cos\theta\end{bmatrix}$$

此处

$$\mathscr{D}_{r\theta\phi}\triangleq\{r\in(0,1),\ \theta\in(0,\pi),\ \phi\in(0,2\pi)\}$$

1. (10%) 证明：

$$\det D\Phi(r,\theta,\phi)=R^3(\theta,\phi)\cdot r^2\sin\theta$$

2. (05%) 导出此不规则球体体积计算式（需说明理由）。

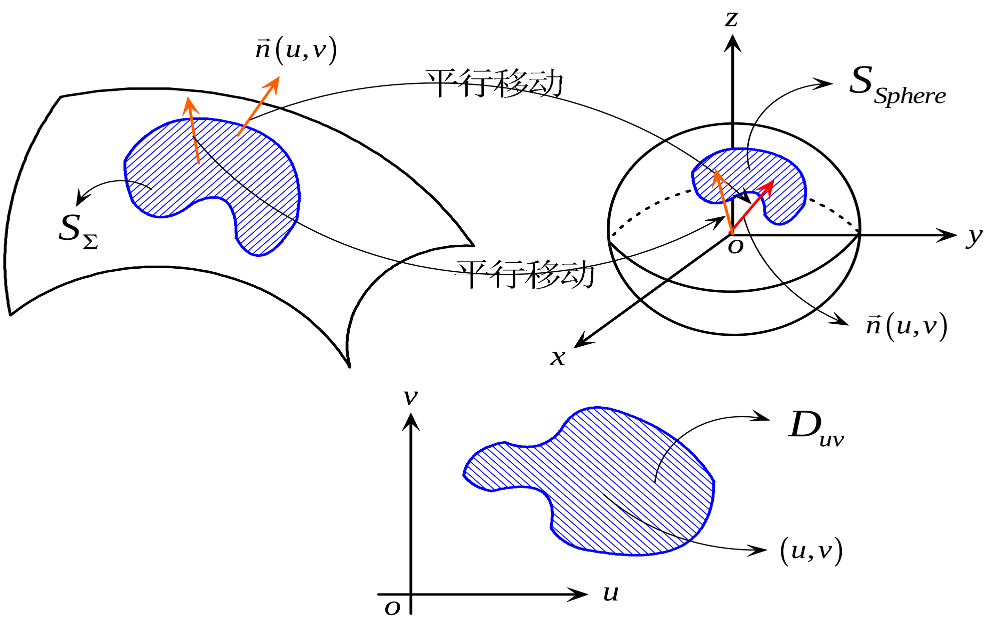
3. (20%) 如有感兴趣的函数 $f(x,y,z)$ 建立在 $\mathscr{D}_{xyz}=\Phi(\mathscr{D}_{r\theta\phi})$ 上且满足偏微分方程：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z)+\cdots=0$$

说明：基于微分同胚将定义在 $\mathscr{D}_{xyz}$ 上的 $f(x,y,z)$ 转化至 $\mathscr{D}_{r\theta\phi}$ 上的 $\hat{f}(r,\theta,\phi)$ 的理论依据，并说明如何获得 $\hat{f}(r,\theta,\phi)$ 的偏微分方程。

4. (10%) 导出此不规则球体表面积的计算式。

注：上述各小题，如某些量的计算较为烦琐，可以仅说明其具体获得步骤。



Problem 7 (*Guass* **映照**) *为了研究曲面的弯曲程度，如上图所示，Guass 发明了以其名字命名的Guass 映照。实际就是基于曲面的一般表达形式*

$$S_\Sigma(u,v):\ \mathscr{D}_{uv}\ni\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\mapsto S_\Sigma(u,v)\equiv\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}(u,v)\in\mathbb{R}^3$$

获得曲面上每点单位法向量场，其向量映照表示为：

$$S_{Sphere}(u,v)=\mathbf{n}(u,v):\ \mathscr{D}_{uv}\ni\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\mapsto\mathbf{n}(u,v)\triangleq\frac{\frac{\partial\Sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\Sigma}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\Sigma}{\partial u}\times\frac{\partial\Sigma}{\partial v}\right|_{\mathbb{R}^3}}(u,v)$$

Gauss 曲率定义为：

$$K(u,v)\triangleq\lim_{|\mathscr{D}_{uv}|\to0}\frac{\int_{S_{Sphere}}d\sigma}{\int_{S_\Sigma}d\sigma}$$

基于上述理论，研究“救生圈”

$$S_\Sigma(\theta,\phi):\ \mathscr{D}_{\theta\phi}\ni\begin{bmatrix}\theta\\\phi\end{bmatrix}\mapsto S_\Sigma(\theta,\phi)\equiv\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}(\theta,\phi)\triangleq\begin{bmatrix}(R+r\cos\theta)\cdot\cos\phi\\(R+r\cos\theta)\cdot\sin\phi\\r\sin\theta\end{bmatrix}(\theta,\phi)\in\mathbb{R}^3$$

的 *Guass* 曲率，此处 $R>r$， $\theta\in[0,2\pi]$, $\phi\in[0,2\pi]$ 。

1. (10%) 获得 $K(\theta,\phi)$ 的表达式。

2. (10%) 找到 *Guass* 曲率取零值、以及极值的点，比较其“当地弯曲”的程度。