

复旦大学 航空航天系

2019 ~ 2020 学年第二学期 期末考试试卷

A 卷 B 卷 C 卷

课程名称: 数学分析 B(II)

课程代码: MATH120016.02-08

开课院系: 航空航天系

考试形式: 线上考试 (开卷)/线上考试 (闭卷)/

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

我已知悉学校与考试相关的纪律以及违反纪律的后果，并将严守纪律，不作弊，不抄袭，独立答题。

学生 (签名):

题号	1/(1)	1/(2)	1/(3)	2/(1)	2/(2)	2/(3)	2/(4)			
得分										
题号	3/(1)	3/(2)	3/(3)	3/(4)						总分
得分										

注: 本卷每题计 10 分, 供 11 题, 总分 110 分, 最终折算成 100 分.

一、高维微分学 (每题 3 分, 共 10 题, 共 30 分)

1. 考虑分片函数

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x + \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. 研究 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的可微性;

2. 研究 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的方向导数.

2. 考虑分片函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x(x^2+y^2)}}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. 获得 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点直到 $o(r^4)$ 的展开式 (设定符合展开的条件), $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2. 求 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点的所有二阶偏导数, 四阶偏导数.

3. 设四元数组 $\{x, y, z, u\}$ 满足关系式 $u = f(x, y, z)$, $g(e^y, z, x^2) = 0$, $y = \cos x$, 式中 f 与 g 均为 C^1 函数.

1. 设想有因果分解: x 为因/自变量, $\{y, z, u\}$ 为果/因变量, 需要什么条件;

2. 计算: y, z, u 各自关于 x 的变化率/导数.

二、高维积分学 (每题 4 分, 共 10 题, 共 40 分)

1. 1. 设 E_{xy} 由直线 $y = 0$, $x = 1$ 和 $y = x$ 所围成的区域, 计算: $\int_{E_{xy}} \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy$.

2. 计算 $x = 0, y = 0, \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, a, b > 0$, 所围区域的面积.

2. 设 Σ 为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, 计算:

$$\int_{\Sigma} \frac{dy dz}{x} + \frac{dz dx}{y} + \frac{dx dy}{z} = \int_{\Sigma} \left(\frac{1}{x} \mathbf{i} + \frac{1}{y} \mathbf{j} + \frac{1}{z} \mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} dS,$$

式中 \mathbf{n} 的指向朝外.

3. 计算曲面积分

$$\int_{\Sigma} \frac{x \mathrm{d}y \mathrm{d}z + y \mathrm{d}z \mathrm{d}x + z \mathrm{d}x \mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\Sigma} \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S,$$

式中 Σ 是曲面 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 - z$ ($z \geq 0$), 且 \mathbf{n} 的指向朝外.

4. 计算曲线积分

$$\int_C [(x+1)y^2 + 1] \mathrm{d}x + 2xy \mathrm{d}y + xy^2 \mathrm{d}z = \int_C \{[(x+1)y^2 + 1]\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j} + xy^2\mathbf{k}\} \cdot \tau \mathrm{d}l,$$

式中 C 是右半柱面 $|x| + |y| = a$ ($y > 0$) 与平面 $y = z$ 的交线上从 $(-a, 0, 0)$ 到 $(a, 0, 0)$ 的部分, $a > 0$; 此处 C 的走向关于 z 轴的正向为右螺旋法则.

三、级数（每题 10 分，共 4 题，共 40 分）

1. 分析级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{[2n + (-1)^n]^\alpha}$ 的敛散性，需明确绝对收敛性，条件收敛性或者发散性对应的 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的范围。
2. 获得函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ 的幂级数的表示，需明确收敛域。

3. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ 的和函数, 需确定收敛域.

4. 判定: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x}{(1+x)^n}$ 在 $[0, +\infty)$ 上的一致收敛性.