

复旦大学技术科学类 2020-2021 学年第一学期

一元微积分阶段性考试

课程名称: 数学分析 B1 课程代码: MATH120016

姓名: _____ 学号: _____ 专业: _____

提示: 请同学们秉持诚实守信宗旨, 谨守考试纪律, 摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为, 学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

(本试卷答卷时间为 180 分钟, 满分 100 分; 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效)

题目	一	二	三	四	合计
得分					

一、 表述与简答题 (每题 5 分, 共 3 题, 共 15 分)

1、 阐述 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 下凸的定义与对应的 Jensen 不等式 (需要证明)

2、阐述 Riemann 可积的 Riemann 判别法；证明连续函数复合 Riemann 可积函数可积

3、阐述 $f(x)$ 在有界或者无界区间 E 上一致连续的定义；证明一致连续性充分必要于： $\{\tilde{x}_n\}, \{\hat{x}_n\} \subset E$ ，满足 $|\tilde{x}_n - \hat{x}_n| \rightarrow 0$ ，则有 $|f(\tilde{x}_n) - f(\hat{x}_n)| \rightarrow 0$

二、判定题（正确判定需要证明；不正确判定需要给出反例）（共 3 题，每题 3 分，共 9 分）

1、 $f(x) \in C[a, b]$ ，如有 $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ ，则有 $f(x) = 0$ ， $\forall x \in [a, b]$

2、有界区间上两个一致连续函数的乘积函数依然一致连续

3、 $f(x) \in C[a, +\infty)$ ，且 $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ ，则有 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界

三、计算题（共 10 题，每题 5 分，共 50 分）

1、若存在极限 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^4+3} - [a+b(x+1)+c(x+1)^2]}{(x+1)\sin(x+1)} = 0$ ，求 a, b, c

2、求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln(1+xt) dx}{\tan x - \sin x}$

3、求参数形式函数 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$ 的导数 $\frac{dy}{dx}(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}(x)$

4、（1）求积分 $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\cos^2 x} dx$ 与 $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx$ ；（2）求极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} dx}{\int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 x} dx}$$

5、求积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{1+x^2}} dx$

6、求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arcsin \left(\sin \frac{1}{2n^2 + 3n^3} \right) \sum_{k=1}^n k^2 e^{\frac{k}{n}}$

7、平面图形由曲线 $y=2-\sqrt{x}$, $x=1$, $y=2$ 所围, 将上述图形绕 $x=1$ 旋转一周得到一个旋成体。求出旋转体的体积与侧面积。

8、研究广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p} e^{\cos x} \sin(\sin x) dx$ ($p \in \mathbb{R}$), 绝对收敛、条件收敛、发散所对应的 p 的范围。

9、求解微分方程 $y'(x) + 2y(x) = xe^x$

10、 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $f(0) = f(1) = 0$, 证明 $\max_{[0,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{4} \int_0^1 |f''(x)| dx$

四、分析与证明题（共 4 题，共 26 分）

1、（6 分）证明：如果 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上二阶可导且有界，则存在 $x_0 \in \mathbb{R}$ ，使得 $f''(x_0) = 0$

2、（6 分）证明：设有 $f(x) \in C[a, b]$ ，且有 $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b xf(x) dx = 0$ ，

那么，则至少存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$ ，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ 。

3、（7 分）研究极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$ ，式中 $f(x) \in C[a,b]$ ：（1）设

$\varphi_n(x) = \frac{n}{1+n^2x^2}$ ，定性绘出其在满足 $[0,1]$ 上的图像；（2）估计极限值

4、（7分）设 $f(x) > 0 (a \leq x < +\infty)$ ，且对任意的 $b: b > a$ ，有 $f(x) \in R[a, b]$ 。

设有对 $\lambda > 1$ ， $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = l$ ，则有 $\int_a^{+\infty} f(x) dx \begin{cases} l < 1/\lambda & \text{收敛} \\ l > 1/\lambda & \text{发散} \end{cases}$

