（装订线内不要答题）

复旦大学 技术科学大类 有关院系

2019~2020 学年第一学期 一元微积分（综合）阶段性考试

课程名称：数学分析 BI 课程代码：MATH120016

开课院系：计算机科学技术、数学、航空航天 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	总分
得分					

（一）概念题（共 3 题，每题 3 分；共 9 分）

1．函数在区间的凹凸性与 Jensen 不等式

2．一致连续性的充分必要条件（从序列角度）

3．积分第二中值定理

（二）判断题（判断命题是否正确，若正确给出证明，若错误则说明原因或者举出反例；共 4 题，每题 5 分；共 20 分）

1. 设$\{x_n\}$单调上升趋于正无穷，若$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}$不存在，则$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{y_n}{x_n}$也不存在。

2. 任意（有限或者无限）区间上的二个一致连续函数的乘积也是一致连续的。

3. 设$f(x)$在有界开区间(a,b)上可导，且有$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$，则有

$\lim\limits_{x\to a+0}f'(x)=\infty$。

4. 假设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛， 则$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$也收敛。

（三）计算题（共 10 题，每题 4 分；共 40 分）

1．计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1}\right)$

（装订线内不要答题）

2．计算：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos(1-\sin x)}{\sin^4(\cos x)}$

3．设可由参数方程 $x=\sqrt{1+t}$，$y=\sqrt{1-t}$ 确定 $y=y(x)$，计算：$y'(x)$

4．设 $f(x)=arctanx$，求：$f^{(n)}(0)$ 的表达式

5．计算$\int\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

（装订线内不要答题）

6．计算：$\int_0^1 x^2 arctanxdx$

7．计算：**心脏线** $r = a(1 - cos\theta)$，$\theta \in [0,2\pi]$ **的弧长**

8．求解：**微分方程** $y'(x) + 2y(x) = xe^x$

9. 求函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的所有不可导点

10. 计算：$\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{x}dx$。注：考虑“相消” $\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_1^{+\infty} f\left(x\right)dx$

（四）证明与分析题（共 5 题；共 31 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上二阶可导，证明：$\exists\xi\in\left(a,b\right)$，满足

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{1}{4}\left(b-a\right)^2 f''\left(\xi\right)$$ （6 分）

（装订线内不要答题）

2. 证明：当 $x>0$ 时，成立 $x^2 \ge (1+x)\ln^2(1+x)$ ．（6 分）

3. 设$f(x)$在$x=0$点二阶可导，且存在 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$， ① 求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$；（4 分）② 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ （4 分）

4. 确定广义积分$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|dx$收敛、发散所对应的 p 与 q 的范围（6分）

5. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$g(x)>0$，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)dx\right\}^{\frac{1}{n}}=\sup_{[a,b]} f(x)$$ （5 分）