（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学类

2016-2017 学年第一学期《数学分析 B》微分学阶段性考试试卷

专业__________________学号______________姓名______________成绩___________

题号	1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	2-4	3-1-1	3-1-2
得分									
题号	3-2	3-3	3-4	3-5-1	3-5-2	3-6	3-7-1	3-7-2	3-8
得分									
题号	3-9	3-10-1	3-10-2	4-1	4-2	5-1	5-2	5-3	总分
得分									

一、严格表述题（每题 3 分，共 3 题 ，共 9 分）注：需给出具体内容，但无需证明

1. 叙述：函数极限的集聚刻画、序列刻画、振幅刻画。

2. 叙述：反函数的存在性（连续性）定理与可导性定理

3. 叙述：序列极限的 Stolz 定理与函数极限的 Bernoulli-L'Hospital 法则。

二、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果正确的，请回答“是”，并给予证明；如果错误的，请回答“否”，并举反例。（每题 3 分，共 4 题，共 12 分）

1. ① 函数在一点连续，则其在该点可导。

   ② 函数在一点可导，则其在该点连续。

2. ① 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，则有 $(f\cdot g)(x)$ 在 (a,b) 上一致连续；

   ② 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续，则有 $(f\cdot g)(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上一致连续。

（装订线内不要答题）

3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调下降，如有 $f([a,b])=[f(b),f(a)]$，则有 $f(x)\in C[a,b]$。

4. 考虑 $E\subset\mathbb{R}$（可以有界或者无界）上任意的二个序列 $\{\tilde{x}_n\}$，$\{\hat{x}_n\}$，当 $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}|\tilde{x}_n-\hat{x}_n|=0$ 时，有 $\exists\lim\limits_{n\to+\infty}|f(\tilde{x}_n)-f(\hat{x}_n)|=0$，则有 $f(x)$ 在 E 上一致连续。

三 计算题及证明题（每题 6 分，共 10 题，共 60 分）

1. 研究函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}, & x\neq 0\\ e, & x=0\end{cases}$ ① $f\left(x\right)$ 在 0 点的连续性；② $f\left(x\right)$ 在 0 点的可导性

2. 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\left(\cos x\right)^{\sin x}}{x^3}$ ；

3. 确定 a 与 b 的值，使得函数 $f\left(x\right)=\cos x-\left(1+ax^2\right)\Big/\left(1+bx^2\right)$ 在 $x\to 0$ 时，主部具有最高的阶次

4. 计算函数 $y=\left[\dfrac{\arcsin\left(\sin^2 x\right)}{\arccos\left(\cos^2 x\right)}\right]^{\arctan^2 x}$ 的一阶函数

（装订线内不要答题）

5. 计算 $f\left(x\right)=\begin{cases} x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ ①在零点的导数；②说明：零点的任意领域都有不可导点

6. 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{a^{n+1}}\left(a+\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}+\cdots+\dfrac{a^n}{n}\right)\ \left(a>1\right)$

（装订线内不要答题）

7. ① 证明：当 $x\ge 0$ 时有 $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}}$，式中 $\theta(x)\in(0,1)$，

② 证明：$\exists\lim\limits_{x\to 0+0}\theta(x)=\dfrac{1}{4}$，$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$

8. 证明：不等式 $\dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$，$x>-1$，$x\neq 0$

9. 证明：不等式

$$\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^p \le \frac{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}{n}\text{，式中 } p>1$$

需说明等号成立的条件。

10. ① 设$\varphi(0)=0$，$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$, 研究$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)\sin x$的存在性

② 研究：$\cos\left(\varphi(x)\sin x\right)$在$\mathbb{R}^+$上的一致连续性

（装订线内不要答题）

四（10 分）函数及其导数界的估计方法

① 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 2 阶连续可微，且 $f(a)=f(b)=0$。证明

$$\max_{[a,b]}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{[a,b]}|f''(x)|$$

② 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 2 阶可导。证明：对于 $\forall c\in(a,b)$，则有 $\exists\xi\in(a,b)$，成立

$$\frac{f''(\xi)}{2}=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}$$

五（9 分）定性研究函数图像 考虑平面曲线 $t \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}(t) \in \mathbb{R}^2$

① 给出局部 Monge 化的充分性条件，并基于 Monge 型化，给出切线的计算式；

② 基于 Monge 型化，给出曲率的定义式；并获得参数情形曲率的计算式；

③ 设定曲线上某点的切线正好是水平线，就此情况说明曲率圆的定位及其意义。