线性代数期末复习

第三章 线性方程组

倪卫明

复旦大学信息学院

2013, June

线性方程组:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵, $\mathbf{x}$ 是 n 阶向量, $\mathbf{b}$ 是 m 阶向量. 令

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$$

则 $\overline{\mathbf{A}}$ 为 $m \times (n+1)$ 阶矩阵, 称为线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的**增广矩阵**.

若方程组(1)中的的向量 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 则称方程组(1)为**非齐次线性方程组**; 若向量 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则称方程组

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

为**齐次线性方程组**.

(a) 非齐次方程组(1)的解理论

线性方程组(1)相容$\Leftrightarrow$ $Rank(\overline{\mathbf{A}}) = Rank(\mathbf{A})$

- 若 $Rank(\overline{\mathbf{A}}) \neq Rank(\mathbf{A})$, 则方程组(1)不相容, 也就是方程组无解;
- 若 $Rank(\overline{\mathbf{A}}) = Rank(\mathbf{A}) = n$, 则方程组(1)有唯一解;
- 若 $Rank(\overline{\mathbf{A}}) = Rank(\mathbf{A}) < n$, 方程组(1) 有无穷多解;

(b) 齐次方程组(2)的解理论

- 因总有 $Rank(\overline{\mathbf{A}}) = Rank(\mathbf{A})$, 所以方程组总是相容的, 其中 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 就是方程组的解, 称为方程组的**零解**.
- 齐次方程组只有零解 $\Leftrightarrow$ $Rank(\mathbf{A}) = n$(n 是向量 $\mathbf{x}$ 的维数);
- 齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $Rank(\mathbf{A}) < n$;

(c) 非齐次方程组(1)的解可以表示成: 非齐次方程组(1)的特解+齐次方程组(2)的通解;
设 $\overline{\mathbf{x}}$ 为方程组(1)的特解, 即满足 $\mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$, 而 $\mathbf{x}^*$ 是方程组(2)的解, 即 $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, 则 $\tilde{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*$ 也是方程组(1)的解.

$$\because \quad \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\left(\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{x}^*\right) = \mathbf{A}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

为了分析方程组(1)或(2)有无穷多解时的具体结构, 引入向量组概念及相关理论. 基本概念:

(a) 定义在数域 P 上的一组 n 元向量 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, 若 $\exists k_1, k_2, \ldots, k_m \in P$ 使

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m \tag{3}$$

则称向量 β 是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 的**线性组合**, 或称 β 可经 向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$**线性表示**.

(b) 若方程组(1)中向量 $\mathbf{b}$ 可由系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的各列向量构成的向量组线性表示, 则方程组(1)相容.

(c) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中的每一个向量 $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ 可由 向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示, 则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 可经 向量组 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 线性表示. 若两个向量组相互可线性表示, 则这两个 **向量组等价**.

(d) 对于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s (s \geq 1)$, 若 $\exists k_1, k_2, \ldots, k_s$ 不全为零, 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0 \tag{4}$$

成立, 则称向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ **线性相关**. 若只有当 $k_1 = \cdots = k_s = 0$ 上式才成立, 则称 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ **线性无关**或**线性独立**.

(e) 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 中的一部分向量组 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$, 满足

- 线性无关;
- 加入原向量组中任意其他一个向量所形成的向量组必线性相关;

则称 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_r}$ 为向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ 的**极大线性无关组**, 极大线性无关组中的向量数r称为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$的**秩**.

向量组的性质:

(a) 若两个向量线性相关 $\Longleftrightarrow$ 两个向量的对应分量成比例;

(b) 若两个向量线性无关 $\Longleftrightarrow$ 两个向量的对应分量不全成比例;

(c) 单个非零向量线性无关;

(d) 单个零向量线性相关;

(e) 包含零向量的向量组必线性相关;

(f) 若向量组中向量个数大于向量维数(向量分量的数量), 则向量组必线性相关;

(g) 若一个向量组中的一部分向量组线性相关,则整个向量组线性相关; 若一个向量组线性无关, 则它的 任意一部分向量组必线性无关.

(h) 若一个向量组仅有零向量, 则其秩为零;

(i) 两个等价的线性无关的向量组的向量个数相同, 即等价的向量组秩相等;

(j) 矩阵的秩等于它的行(列)向量组的秩;

(k) 任何一个向量组与它的极大无关组等价;

(l) 向量组的极大无关组不一定唯一, 但它们彼此等价, 且秩相同;

(m) 若向量组 $\alpha_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \end{bmatrix}, (j = 1, 2, \ldots, m)$ 线性无关, 则向量组 $\beta_j = \left[\begin{array}{c} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{rj} \\ \hline \\ a_{(r+1)j} \\ \vdots \\ a_{(r+s)j} \end{array}\right], (j = 1, 2, \ldots, m)$ 线性无关;

向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关性的判定:

(a) **定义法** 设存在一组数 $k_1, k_2, \ldots, k_m$, 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = \mathbf{0}$$

得到一个含 $k_1, k_2, \ldots, k_m$ 的齐次线性方程组, 可采用初等变换或消元法求解;

- 若齐次方程组有非零解, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性相关;
- 若齐次方程组只有零解, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关;

(b) **求秩法** 将 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 作为列向量构成矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix}$$

对矩阵 $\mathbf{A}$ 实施初等行变换成行阶梯形, 从而得到 $\mathbf{A}$ 的秩 $Rank(\mathbf{A})$.

- 若 $Rank(\mathbf{A}) < m$, 则向量组线性相关;
- 若 $Rank(\mathbf{A}) = m$, 则向量组线性无关;

(c) **行列式法** 当向量个数=向量维数, 将向量组以列向量排列成矩阵 **A** 是方阵,
- 若 $\det(\mathbf{A}) = 0$, 则向量组线性相关.
- 若 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$, 则向量组线性无关.

(d) **利用已知结论法** 如利用向量组性质(a)∼ (h)等

向量组极大线性无关组(秩)的求法:

(a) **定义法**

(b) **初等行变换法**

判断能否线性表示的方法:

(a) 判断 β 能否由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示, 令

$$\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T$$

设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \end{bmatrix}$, 则当 $Rank(\mathbf{A}) = Rank(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vert & \beta \end{bmatrix})$ 时, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性表示; 且
- 当 $Rank(\mathbf{A}) = Rank(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vert & \beta \end{bmatrix}) = m$ 时, 有唯一表示;
- 当 $Rank(\mathbf{A}) = Rank(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \vert & \beta \end{bmatrix}) < m$ 时, 有无穷多表示法;

(a) 齐次线性方程组(2) 的解(方便起见，设 $Rank(\mathbf{A}) = r$,且 $\mathbf{A}$的前 r 列线性独立)，对方程组(2)的系数矩阵 $\mathbf{A}$ 实施初等(行)变换，得到它的阶梯形：

$$\mathbf{A} \xrightarrow{\text{初等变换}} \left[\begin{array}{cccccc} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a'_{rr} & \cdots & a'_{rn} \\ \hline & & & \mathbf{0} & & \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{初等变换}} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{1(r+1)} & \cdots & a^*_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a^*_{r(r+1)} & \cdots & a^*_{rn} \\ \hline & & & & \mathbf{0} & & \end{array}\right]$$

由上述推导得:

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a^*_{1(r+1)} & \cdots & a^*_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a^*_{r(r+1)} & \cdots & a^*_{rn} \\ \hline \multicolumn{7}{c}{\mathbf{0}} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a^*_{1(r+1)} & a^*_{1(r+2)} & \cdots & a^*_{1n} \\ a^*_{2(r+1)} & a^*_{2(r+2)} & \cdots & a^*_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^*_{r(r+1)} & a^*_{r(r+2)} & \cdots & a^*_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

上式中 $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ 取任意值, 不妨设它们取值 $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r} \in P$.

最终方程组(2)的解为:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} -a^*_{1(r+1)} \\ \vdots \\ -a^*_{r(r+1)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -a^*_{1(r+2)} \\ \vdots \\ -a^*_{r(r+2)} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + t_{n-r} \begin{bmatrix} -a^*_{1n} \\ \vdots \\ -a^*_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

其中右端的向量组

$\begin{bmatrix} -a^*_{1(r+1)} & \cdots & -a^*_{r(r+1)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T, \ldots,$

$\begin{bmatrix} -a^*_{1n} & \cdots & -a^*_{rn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ 构成方程的**基础解系**.

例1.求解齐次方程组

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 11x_3 & - & 13x_4 & = & 0 \end{array}$$

解: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -3 & 9 \\ 1 & 5 & -11 & -13 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得 解: $\mathbf{x} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 基 础 解 系: $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$

例2.求解齐次方程组

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & - & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 4x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

解: $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -3 & 5 & -4 \\ 2 & -2 & 3 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得解: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

基础解系: $\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T \right)$.

(b) 非齐次方程组(1)的解(设 $Rank(\mathbf{A}) = Rank(\begin{matrix}\mathbf{A} & \mathbf{b}\end{matrix})$). 通过对方程组(1)的增广矩阵实施初等变换或采用Gauss消元法，可求得方程组(1)的解.

$$\overline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \xrightarrow{\text{行初等变换}}$$

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1,n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2,n} & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{r,n} & b'_r \\ \hline \multicolumn{8}{c}{\mathbf{0}} \end{array}\right]$$

(b) 非齐次方程组(1)的解(续).

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} b_1' \\ \vdots \\ b_r' \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+t_1\begin{bmatrix} -a_{1(r+1)}' \\ \vdots \\ -a_{r(r+1)}' \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix} -a_{1(r+2)}' \\ \vdots \\ -a_{r(r+2)}' \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots+t_{n-r}\begin{bmatrix} -a_{1n}' \\ \vdots \\ -a_{rn}' \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $t_1, t_2, \ldots, t_{n-r} \in P$, 方程解中右端第一个向量 $\begin{bmatrix} b_1' & \cdots & b_r' & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$ 为方程的特解, 而其余的是相应齐次方程组的通解.

例3.求解非齐次方程组

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & - & 11x_3 & - & 13x_4 & = & -3 \end{array}$$

解:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 9 & 7 \\ 1 & 5 & -11 & -13 & -3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

得解: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 其中 $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

在证明矩阵秩的命题中常用的定理与公式.

(a) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 $m \times n$ 矩阵, 则

$$Rank\left(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}\right) \leq Rank\left(\mathbf{A}\right) + Rank\left(\mathbf{B}\right)$$

(b) 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵, 则

$$Rank\left(\mathbf{A}\right)+Rank\left(\mathbf{B}\right)-n \leq Rank\left(\mathbf{AB}\right) \leq \min\left\{Rank\left(\mathbf{A}\right), Rank\left(\mathbf{B}\right)\right\}$$

(c) 设 $\mathbf{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $n \times s$ 矩阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则

$$Rank\left(\mathbf{A}\right) + Rank\left(\mathbf{B}\right) \leq n$$

(d) $Rank\left(\mathbf{A}\right) = Rank\left(k\mathbf{A}\right) = Rank\left(\mathbf{A}^T\right)(k \neq 0,$ 常数$)$.

(e) 设 $\mathbf{A}$ 可逆, 则 $Rank\left(\mathbf{A}\right) = Rank\left(\mathbf{A}^{-1}\right) = n$.

(f) 矩阵初等变换不改变矩阵的秩.

(g) 设 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_m \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_k$ 为

$n_k(k = 1, 2, \ldots, m)$阶方阵, 则 $Rank\,(\mathbf{B}) = \sum_{k=1}^{m} Rank\,(\mathbf{A}_k)$.

(h) 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为矩阵, 则

$$\max\{Rank\,(\mathbf{A})\,, Rank\,(\mathbf{B})\} \le Rank\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) \le Rank\,(\mathbf{A}) + Rank\,(\mathbf{B}$$

$$\max\{Rank\,(\mathbf{A})\,, Rank\,(\mathbf{B})\} \le Rank\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} \mid \mathbf{B} \end{bmatrix}\right) \le Rank\,(\mathbf{A}) + Rank\,($$