

复旦大学数学科学学院

2014~2015 学年第一学期期末考试试卷

A 卷

课程名称: 数学分析 B(I) 课程代码: **MATH120016**

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	总 分
得 分							

注意:

1. 除了特殊说明之外, 答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。
2. 答题过程及结果应写在考卷上, 写在草稿纸上无效。

(以下为试卷正文)

1. 严格表述题 (每题 4 分, 共 3 题, 共 12 分)

1) 子列

2) x 趋向于 x_0 时 $u(x)$ 和 $v(x)$ 是同阶无穷小量。3) 参数方程 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha, \beta]$ 所确定的曲线是光滑曲线。

2. 简答题 (每题 4 分, 共 6 题, 共 24 分。可以直接写出答案, 也可以写出中间过程; 答案正确时, 得满分; 答案错误而存在正确的中间过程时, 得部分分, 否则不得分。)

1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ 。2) 求函数 $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ 的 n 阶导数。

3) 求函数 $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x - 3}$ 的渐近线。

4) 求函数 $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ 在 $x > 0$ 时的最小值。

5) 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导, 设 $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta h)h, (0 < \theta < 1), f''(x_0) \neq 0$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 。

6) 求不定积分 $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$ 。

(装订线内不要答题)

3. 判断简答题 (判断下列命题是否正确, 如果正确的, 请回答“是”, 并给予简要证明; 如果错误的, 请回答“否”, 并举反例并简要说明。) (每题 5 分, 共 3 题, 共 15 分。判断正确得 2 分, 判断正确, 并且证明或举反例正确得满分。判断不正确不得分。)

1) 一个数列 $\{x_n\}$, 如果满足 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+, \forall n > N, \exists m > N: |x_n - x_m| < \varepsilon$, 那么 $\{x_n\}$ 收敛。

2) 任意函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 那么 $f(+\infty), f(-\infty)$ 至少有一个存在。

3) 设函数 $f(x)$ 是 $[-a, a]$ 上连续的奇函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $F(x)$ 必是偶函数。

4. 计算题 (每题 6 分, 共 6 题, 共 36 分)

1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}$ 。

2) 求定积分 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$

3) 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x dx}{(1+x^2)^2}$ 。

4) 求曲线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} t \in [0, 2\pi]$ 与 x 轴所围区域绕 x 轴一周所得的旋转体的体积。

(装订线内不要答题)

5) 求常微分方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + y = xe^x$ 的通解。

6) 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \left| \sin \frac{\pi}{x} \right|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 的所有不可导点

5. 讨论反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln(1+x)}{x^p} dx$ 的敛散性, 包括绝对收敛和条件收敛。(7 分)

(装订线内不要答题)

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $0 < f'(x) < 1, f(0) = 0$, 证明: $(\int_0^x f(t) dt)^2 > \int_0^x f^3(t) dt, x \in (0,1]$ 。
(6 分)