复旦大学力学与工程科学系

2012 ～ 2013 学年第二学期期末考试试卷

❒ A 卷　　❒ B 卷

课程名称：数学分析（II）　　课程代码：MATH120009.09

开课院系：力学与工程科学系　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：____________ 学号：____________ 专业：____________

题 号	1/(1)	1/(2)	2/(1)	2/(2)	3/(1)	3/(2)	3/(3)	4/(1)	4/(2)	4/(3)
得 分										
题 号	4/(4)	5/(1)	5/(2)	6/(1)	6/(2)	7/(1)	7/(2)	8/(1)	8/(2)	
得 分										总 分
题 号										

问题 1 (极限基本概念)**.** 研究二维函数：

$$f(x,y) \triangleq \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

1. 计算：$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$
2. 研究：$f(x,y)$ 在 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ 的可微性

解答 1.

1. 根据偏导数的定义，可有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \triangleq \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \triangleq \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$

2. 估计

$$\frac{\left|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\left|xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\leqslant |y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$$

所以有

$$f(x,y) = f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})$$

亦即 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^2$ 点可微。

问题 2 (Fourier 级数基本概念)**.** 现有区间 $[0,c]$ 上的函数 $f(x)$，其图像如图 1 所示，满足分段可微

1. 按点收敛的意义，将此段函数表示成余弦级数。要求写出此级数的具体表达式（包括系数计算式）

2. 示意性绘出 Fourier 级数对应的和函数（极限函数）的图像

解答 2. 1. 将原函数展开成余弦级数需先做偶延拓，由此可有

$$\begin{aligned}\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\\ &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}\end{aligned}$$

此处 $l=c$。

$$a_n=\frac{1}{c}\int_{-c}^{c}f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^c f(x)\cos\frac{n\pi x}{c}\mathrm{d}x,\quad n=0,1,2,\cdots$$

2. 图略。

问题 3 (场论基本概念)**.** 考虑向量场

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^3},\quad |\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1. 计算：$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的散度

2. 证明：$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 为无旋场，亦即 $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F}(x,y,z)=\boldsymbol{0}$

3. 通过球面上连接曲线，计算：$\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的势场 $U(x,y,z)$，其满足 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\boldsymbol{\nabla}U(x,y,z)$（取参考点为南极）

解答 3. 1. 由于 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=\dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^3}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，所以其散度为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)=\mathrm{div}\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(x,y,z)$$

计算

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^3}\right)(x,y,z)=\frac{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^2-3x^2}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^5}$$

因此有 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的散度为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}(x,y,z)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)(x,y,z)=\frac{3|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^2-3|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^2}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}^5}=0$$

2. 旋度表示为

$$\nabla\times\boldsymbol{F}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}(x,y,z)=\begin{bmatrix}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\end{bmatrix}(x,y,z)$$

分别计算它的三个分量如下

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}}\right)\\&=-3\frac{z}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^4}}\frac{y}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}+3\frac{y}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^4}}\frac{z}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}=0\\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}}\right)\\&=-3\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^4}}\frac{z}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}+3\frac{z}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^4}}\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}=0\\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)(x,y,z)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^3}}\right)\\&=-3\frac{y}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^4}}\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}+3\frac{x}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}^4}}\frac{y}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}=0\end{aligned}$$

综上有 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$。

3. 作大圆连接线

$$\boldsymbol{C}(\tilde{\theta}):\left[-\frac{\pi}{2},\theta\right]\ni\tilde{\theta}\mapsto\boldsymbol{C}(\tilde{\theta})=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}(\tilde{\theta})=\begin{bmatrix}R\cos\tilde{\theta}\sin\phi\\ R\cos\tilde{\theta}\cos\phi\\ R\sin\tilde{\theta}\end{bmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned}U(x,y,z)=\int_C\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{1}{R^3}\begin{bmatrix}R\cos\tilde{\theta}\sin\phi\\ R\cos\tilde{\theta}\cos\phi\\ R\sin\tilde{\theta}\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-R\sin\tilde{\theta}\sin\phi\\ -R\sin\tilde{\theta}\cos\phi\\ R\cos\tilde{\theta}\end{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{\theta}\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{-\cos\tilde{\theta}\sin\tilde{\theta}+\sin\tilde{\theta}\cos\tilde{\theta}}{R}\mathrm{d}\tilde{\theta}=0\end{aligned}$$

故在球面上各处都有相同的位势。（注：这与物理上的认识一致。）

按几何特征，显见有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$，故在球面上有 $U(x,y,z)=\text{const}$。

问题 4 (条件最值问题)**.** 现有体积 $\{\Omega=[x,y,z]^T\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上的目标函数 $\theta(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2xyz$，需研究其在 Ω 上的最值。对此，可分别研究 $\theta(x,y,z)$ 在 Ω 的内部及边界上最值。

1. 研究：$\theta(x,y,z)$ 在 Ω 内部的最值（要求涉及二阶导数的相关计算）
2. 利用 Lagrange 乘子法，研究：$\theta(x,y,z)$ 在 Ω 边界上的最值

3. 利用隐映照定理，研究：$\theta(x,y,z)$ 在 Ω 边界上的最值（需明确利用隐映照定理的相关条件；给出相关临界点控制方程，但无需求解）

4. 利用隐映照定理，研究：球面北极点临近，目标函数的二次曲面逼近（需要获得具体形式）

解答 4. 1. 研究 $\theta(x,y,z)$ 在 Ω 内部的最值，目标函数 $\theta(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-2xyz$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y,z)=3x^2-2yz=0$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y,z)=3y^2-2xz=0$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-2xy=0$$

由此解得 $x=y=z=0$，即 $x=y=z=0$ 为临界点，可有 $\theta(0,0,0)=0$。
进一步计算 Hasse 阵

$$H_\theta(0,0,0)=\begin{bmatrix} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} & \frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z} \\ \frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \end{bmatrix}(0,0,0)=\begin{bmatrix} 6x & -2z & -2y \\ -2z & 6y & -2x \\ -2y & -2x & 6z \end{bmatrix}(0,0,0)=\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

2. 作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=\theta(x,y,z)+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)=x^3+y^3+z^3-2xyz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$$

可有

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,z,\lambda)=3x^2-2yz+2\lambda x=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,z,\lambda)=3y^2-2xz+2\lambda y=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial z}(x,y,z,\lambda)=3z^2-2xy+2\lambda z=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-1=0$$

由此解得 $x=y=z=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\lambda=\mp\dfrac{\sqrt{3}}{6}$。
进一步考虑

$$H_\theta\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\mp\frac{\sqrt{3}}{6}\right)=\begin{bmatrix} 6x+2\lambda & -2z & -2y \\ -2z & 6y+2\lambda & -2x \\ -2y & -2x & 6z+2\lambda \end{bmatrix}\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\pm\frac{\sqrt{3}}{3},\mp\frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$
$$=\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

易见，矩阵 $\begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ 是正定的，因此点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为极小值点，点 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 为极大值点。极值分别为 $\theta\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \pm\frac{\sqrt{3}}{9}$。

3. 考虑约束 $x^2+y^2+z^2=1$，对其上的 $(x_0, y_0, z_0) \in S_1$ 且 $z_0 \neq 0$，考虑方程

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, z\right) = x^2+y^2+z^2-1$$

满足

$$\begin{cases} F\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, z_0\right) = 0 \in \mathbb{R} \\ D_z F\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, z_0\right) = 2z_0 \neq 0 \end{cases}$$

故 $\exists B_\lambda\left(\left[\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right]\right), B_\mu(z_0)$ 以及 $z = z(x,y)$ 满足

$$F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, z(x,y)\right) = 0 \in \mathbb{R}, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in B_\lambda\left(\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right)$$

故 $\theta(x,y,z) = \theta(x,y,z(x,y)) =: \hat{\theta}(x,y)$，由此可有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial \theta}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial \theta}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial \theta}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial \theta}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) \end{aligned}$$

由 $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, z(x,y)\right) = 0$ 可得

$$D_{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]} F + D_z F \cdot \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right](x,y) = 0 \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

式中 $D_{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]} F = [2x, 2y]$, $D_z F = 2z$，故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) &= -\frac{x}{z(x,y)} \\ \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) &= -\frac{y}{z(x,y)} \end{aligned}$$

综上可有

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2yz - \frac{x}{z}(3z^2 - 2xy) &= 0 \\ 3y^2 - 2xz - \frac{y}{z}(3z^2 - 2xy) &= 0 \end{aligned}$$

此处 $z = z(x,y)$ 而且满足 $x^2+y^2+z^2-1=0$。如果引入 $\lambda = -\frac{3z^2-2xy}{2z}$ 则有

$$3x^2 - 2yz + 2\lambda x = 0$$

$$3y^2 - 2xz + 2\lambda y = 0$$

同基于 Lagrange 函数的处理结果一致。

4. 北极点 $(x,y,z)=(0,0,1)$，故局部有 $z=z(x,y)$。由此可有 $\theta(x,y,z)=\theta(x,y,z(x,y))=:\hat{\theta}(x,y)$。因此

$$\hat{\theta}(x,y)=\hat{\theta}(0,0)+\left[\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x},\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial y}\right](0,0)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\frac{1}{2}[x,y]\begin{bmatrix}\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x^2}&\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x\partial y}\\\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial y\partial x}&\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial y^2}\end{bmatrix}(0,0)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+o(x^2+y^2)$$

根据 3 的结果，可有

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)&=-\frac{x}{z(x,y)}\\\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)&=-\frac{y}{z(x,y)}\\\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial\theta}{\partial x}(x,y,z)+\frac{\partial\theta}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\\\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial\theta}{\partial y}(x,y,z)+\frac{\partial\theta}{\partial z}(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x}(0,0)&=3\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)=0\\\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial y}(0,0)&=3\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)=0\end{aligned}$$

进一步可以计算

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x^2}(0,0)&=\left[\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right](0,0)=3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0)\\\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial y^2}(0,0)&=\left[\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right](0,0)=3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0)\\\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x\partial y}(0,0)&=\left[\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right](0,0)\\&=-2+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0)\end{aligned}$$

可有

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x^2}(0,0)&=-3\\\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x^2}(0,0)&=-3\\\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial y\partial x}(0,0)&=\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial x\partial y}(0,0)=-2\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(x,y)&=\hat{\theta}(0,0)+\frac{1}{2}[x,y]\begin{bmatrix}-3&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+o(x^2+y^2)\\&=\theta(0,0,1)+\frac{1}{2}[x,y]\begin{bmatrix}-3&-2\\-2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+o(x^2+y^2)\\&=\frac{1}{2}(-3x^2-4xy-3y^2)+o(x^2+y^2)\end{aligned}$$

问题 5 (计算曲面积分)**.** 考虑曲面积分

$$\int_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \int_\Sigma \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

此处 Σ 为曲面

$$1-\frac{z}{7} = \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} \quad (z \geqslant 0)$$

的上侧。

1. 利用 Gauss-Ostrogradskii 公式，计算上述曲面积分
2. 给出一种 Σ 的向量值映照刻画，并给出上述曲面积分的计算式（无需计算得最终结果）

解答 5. 1. 由 $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}^3}$，其中 $|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，通过简单的计算可知 $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F}(x,y,z) = 0$。

由于在 $z=0$ 平面上，$\boldsymbol{F}$ 在 $(0,0,0)$ 点处有奇异性，故利用 Gauss-Ostrogradskii 公式时，需去除原点，并相应增加半径为 ε 的半球面。记增加的半球面记作 S_2，去除半球面在 $z=0$ 平面上投影之后的底面记作 S_3，则有

$$\oint_{\Sigma+S_2+S_3} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}\tau = 0$$

以及

$$\int_{S_3} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_{S_3} \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}^3}\cdot(-\boldsymbol{k})\mathrm{d}\sigma = 0$$

$$\int_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_{S_2} \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}^3}\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}}\right)\mathrm{d}\sigma = -\int_{S_2} \frac{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}^2}{|\boldsymbol{r}|_{\mathbb{R}}^4}\mathrm{d}\sigma = -\frac{1}{\varepsilon^2}2\pi\varepsilon^2 = -2\pi$$

故有

$$\int_\Sigma \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = 2\pi$$

2. 对曲面 Σ 可直接以 $\{x,y\}$ 为参数，即有

$$\boldsymbol{\Sigma}(x,y) : D_{xy} \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \boldsymbol{\Sigma}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z(x,y) \end{bmatrix}$$

此处 $z(x,y) = 7\left[1-\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y-1)^2}{16}\right]$，$D_{xy} = \left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16} \leqslant 1\right\}$。故有

$$\int_\Sigma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_{D_{xy}} \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial y}\right)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

计算

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & -\frac{14}{25}(x-2) \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8}(y-1) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{25}(x-2) \\ \frac{7}{8}(y-1) \\ 1 \end{bmatrix}$$

故有

$$\int_{D_{xy}} \boldsymbol{F}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial y}\right)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{D_{xy}}\frac{\frac{14}{25}x(x-2)+\frac{7}{8}y(y-1)+z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

此处 $z=7\left[1-\frac{(x-2)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{16}\right]$。

问题 6 (计算曲线积分)**.** 考虑曲线积分

$$\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\oint_C(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l$$

此处 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=1\,(z\geqslant 0)$ 与柱面 $x^2+y^2=x$ 的交线。从 z 轴正向往下看，L 正向取反时针方向。

1. 利用 Stokes 公式，计算上述曲线积分
2. 给出一种 C 的向量值映照刻画，并计算上述曲线积分（仅需计算得参数域上的积分式）

解答 6. 1. 根据 Stokes 公式，可有

$$\oint_C(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l=\int_\Sigma\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ -y&x&0\end{vmatrix}\cdot\mathrm{d}\sigma=\int_\Sigma 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

引入 Σ 的向量值映照刻画

$$\boldsymbol{\Sigma}(x,y):D_{xy}\ni\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\mapsto\boldsymbol{\Sigma}(x,y)=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z(x,y)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

此处 $z(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$。所以

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial y}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ 1&0&-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ 0&1&-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\ 1\end{bmatrix}$$

所以有

$$\begin{aligned}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\int_\Sigma 2\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma&=\int_{D_{xy}}2\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial x}\times\frac{\partial\boldsymbol{\Sigma}}{\partial y}\right)(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &=\int_{D_{xy}}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2|D_{xy}|=2\pi\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

2. 对 ∂D_{xy} 可引入参数 $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，满足

$$\begin{cases}x(\theta)=\cos^2\theta\\ y(\theta)=\cos\theta\sin\theta\end{cases}$$

则有

$$\boldsymbol{C}(\theta):\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\ni\theta\mapsto\boldsymbol{C}(\theta)=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}(\theta)\triangleq\begin{bmatrix}\cos^2\theta\\\cos\theta\sin\theta\\\sqrt{1-\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta}\end{bmatrix}$$

所以

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{C}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)=\begin{bmatrix}-\sin 2\theta\\\cos 2\theta\\\cos\theta\end{bmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x&=\oint_C(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}l\\&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(-\sin\theta\cos\theta\sin 2\theta+\cos^2\theta\cos 2\theta\right)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

问题 7 (幂级数基本分析性质)**.**

1. 基于 Abel 估计，证明：幂级数的收敛半径一定为区间。
2. 基于幂级数的分析性质，获得下述级数的极限函数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$$

   需明确收敛域。

解答 7. 1. 证明：假设幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0,x_0+u]\cup\{b\}$ 收敛，考虑

$$\sum a_n(x-x_0)^n=\sum a_nb^n\left(\frac{x-x_0}{b}\right)^n$$

现有

$$\begin{cases}\sum a_nb^n\text{收敛}\\\left(\dfrac{x-x_0}{b}\right)^n\leqslant 1,\ \forall x\in[x_0,b],\text{且随}n\text{点点单调下降}\end{cases}$$

故有幂级数 $\sum a_n(x-x_0)^n$ 在 $[x_0,b]$ 上收敛，故产生矛盾。

2. 考虑 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)}=1$$

故收敛半径为 1，且在 $x=\pm 1$ 处显然发散，故收敛域为 $(-1,1)$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$，则有

$$\int_0^x S(\xi)\mathrm{d}\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)\xi^n\mathrm{d}\xi=\sum_{n=1}^{\infty} n\xi^{n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1},\quad \forall x\in(-1,1)$$

而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2+\sum_{n=2} nx^{n+1}=x^2+x^2\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}=x^2\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}\right)$$

对 $A(x):=\sum_{n=2}^{\infty} nx^{n-1}, \forall x\in(-1,1)$ 可有

$$\begin{aligned}\int_0^x A(\xi)\mathrm{d}\xi&=\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x n\xi^{n-1}\mathrm{d}\xi=\sum_{n=2}^{\infty} x^n=1+\sum_{n=1}^{\infty} x^n-(1+x)\\&=\frac{1}{x-1}-(1+x),\quad \forall x\in(-1,1)\end{aligned}$$

所以 $A(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x-1}-(1+x)\right)=\dfrac{1}{(1-x)^2}-1$。故有

$$\int_0^x S(\xi)\mathrm{d}\xi=x^2\left(1+\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=\frac{x^2}{(1-x)^2},\quad \forall x\in(-1,1)$$

故

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)=\frac{2x}{(1-x)^3},\quad \forall x\in(-1,1)$$

问题 8 (关于“马铃薯”的研究). 如果一个马铃薯，其表面可由球面坐标刻画

$$\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi):\ D_{\theta\phi}\ni\begin{bmatrix}\theta\\ \phi\end{bmatrix}\mapsto\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}(\theta,\phi)\triangleq\begin{bmatrix}R(\theta,\phi)\cos\theta\cos\phi\\ R(\theta,\phi)\cos\theta\sin\phi\\ R(\theta,\phi)\sin\theta\end{bmatrix}$$

1. 计算上述映照的 Jacobi 矩阵；并给予 Jacobi 矩阵每一列的几何解释（可利用图示）。
2. 给出马铃薯体积的计算式（要求完成相关矩阵行列式的计算）

解答 8. 1. Jacobi 矩阵为

$$\begin{aligned}D\mathbf{\Sigma}(\theta,\phi)&=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\theta}&\frac{\partial x}{\partial\phi}\\ \frac{\partial y}{\partial\theta}&\frac{\partial y}{\partial\phi}\\ \frac{\partial z}{\partial\theta}&\frac{\partial z}{\partial\phi}\end{bmatrix}(\theta,\phi)=\begin{bmatrix}(R_\theta\cos\theta-R\sin\theta)\cos\phi&(R_\phi\cos\phi-R\sin\phi)\cos\theta\\ (R_\theta\cos\theta-R\sin\theta)\sin\phi&(R_\phi\sin\phi+R\cos\phi)\cos\theta\\ R_\theta\sin\theta+R\cos\theta&R_\phi\sin\theta\end{bmatrix}\\&=\left[\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\theta},\frac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\phi}\right](\theta,\phi)\end{aligned}$$

此处 $\dfrac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\theta}(\theta,\phi),\dfrac{\partial\mathbf{\Sigma}}{\partial\phi}(\theta,\phi)$ 分别表示马铃薯表面上 θ 及 ϕ 曲线的切向量。

2. 方法 1：计算体积可引入坐标变换

$$D_{\lambda\theta\phi} \ni \begin{bmatrix} \lambda \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (\lambda,\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \lambda R(\theta,\phi)\cos\theta\cos\phi \\ \lambda R(\theta,\phi)\cos\theta\sin\phi \\ \lambda R(\theta,\phi)\sin\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

此处 $D_{\lambda\theta\phi} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} \lambda \in [0,1] \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$，此变换的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\lambda,\theta,\phi)} = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\phi & \lambda(R_\theta\cos\theta - R\sin\theta)\cos\phi & \lambda(R_\phi\cos\phi - R\sin\phi)\cos\theta \\ R\cos\theta\sin\phi & \lambda(R_\theta\cos\theta - R\sin\theta)\sin\phi & \lambda(R_\phi\sin\phi + R\cos\phi)\cos\theta \\ R\sin\theta & \lambda(R_\theta\sin\theta + R\cos\theta) & \lambda R_\phi\sin\theta \end{bmatrix}$$

其行列式为 $\det\dfrac{D(x,y,z)}{D(\lambda,\theta,\phi)} = \lambda^2 R^3(\theta,\phi)\cos\theta$，故马铃薯的体积可以表示为

$$\begin{aligned} V = \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}\mathrm{d}z &= \int_{D_{\lambda\theta\phi}} \det\frac{D(x,y,z)}{D(\lambda,\theta,\phi)} \mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{D_{\lambda\theta\phi}} \lambda^2 R^3(\theta,\phi)\cos\theta\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \lambda^2 R^3(\theta,\phi)\cos\theta\mathrm{d}\lambda \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3(\theta,\phi)\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

解法 2：考虑（类）球坐标变换

$$D_{r\theta\phi} \ni \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} (r,\theta,\phi) = \begin{bmatrix} r\cos\theta\cos\phi \\ r\cos\theta\sin\phi \\ r\sin\theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

此处 $D_{r\theta\phi} = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} r \in [0, R(\theta,\phi)] \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \phi \in [0, 2\pi] \end{array} \right\}$，故马铃薯的体积可以表示为

$$\begin{aligned} V = \int_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}\mathrm{d}z &= \int_{D_{r\theta\phi}} \det\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\phi)} \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \int_{D_{r\theta\phi}} r^2\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R(\theta,\phi)} r^2\cos\theta\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3(\theta,\phi)\cos\theta\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$