复旦大学技术科学实验班

2019-2020 学年第二学期《数学分析（下）》期末考试试卷

B卷　　共 8 页

课程代码：MATH120016.01-08　　考试形式：☐开卷　☑闭卷　　　　　　2020 年 9 月

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业__________________学号______________姓名______________成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

（装订线内不要答题）

一、严格表述题（16%）

1. 给出n元函数$f(\boldsymbol{x})$在点$\boldsymbol{x}_0$连续的三种等价性叙述（*Cauchy*叙述、*Heine*叙述、*Cauchy*收敛原理）

2. 映照$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\mathbb{R}^n$在$\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^m$点可微

3. 第二类曲面积分与第二类曲线积分

4. 级数的$Abel$ - $Direchlet$判别法

二、简答题（16%）

1. 验证$y = e^{-kn2t}\sin nx$满足$\dfrac{\partial y}{\partial t} = k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$

2. 验证$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$不存在

（装订线内不要答题）

3. 验证泊松积分：$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

4. 验证$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$在$[-e^{-1}, e^{-1})$收敛$\left(注：n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n}\right)$

三、级数题（21%）

1. 判定级数$\dfrac{1}{10} + \dfrac{1\cdot 2}{10^2} + \dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3} + \cdots + \dfrac{n!}{10^n} + \cdots$的收敛性

2. 将函数$f\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2+4x+3}$展开成$\left(x-1\right)$的幂函数

3.将函数$f\left(x\right)=x\left(x\in\left[0,\pi\right]\right)$展开为余弦级数，并计算

$\left(1\right)\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{\left(2k-1\right)^2}$

$\left(2\right)\cos x$的全部零点的倒数的平方和

（装订线内不要答题）

四、多元函数微分题（14%）

1. 求由方程组$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$确定的隐映照其两个分量的偏导数$\dfrac{dx}{dz}$和$\dfrac{dy}{dz}$。

2、通过变量代换$u=x+y, v=\dfrac{y}{x}, w=\dfrac{z}{x}$,变换偏微分方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$,其中$w$是$u, v$的函数。

五、多元积分题（21%）

1. 假设Σ：$z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2\in[4,16]$的下侧，计算如下积分：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left[x\left[f(x)+g(y)\right]+2x-y\right]dydz+\left[y\left[f(x)+g(y)\right]+2y+x\right]dzdx+z\left[f(x)+g(y)+1\right]dxdy$$

2. $\oint\limits_{\gamma}\left(y^2-z^2\right)dx+\left(z^2-x^2\right)dy+\left(x^2-y^2\right)dz$,其中，$\gamma$为平面$x+y+z=1$截立方体$0\le x,y,z\le 1$的交线，从$x$轴正方向看,$\gamma$取逆时针方向。

（装订线内不要答题）

3. 求曲线：$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)^2=xy$所围图形的面积。

六、证明题（12%）

1. 当$x>0$，$y>0, z>0$时，求函数$f\left(x,y,z\right)=\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6R^2$上的最大值。并以此证明：

当a,b,c为正整数时，成立不等式$ab^2c^3\le 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6$。

2. 试证明：对于任意一个包围原点的简单闭合曲线L,

积分$\oint_L \frac{(4x-y)dx+(x+y)dy}{4x^2+y^2}$为定值$\pi$.