

数学分析 B 期中考试

学号 _____ 姓名 _____ 成绩 _____

一 (20 分)、判断下列级数的敛散性:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n})$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cos \frac{n\pi}{3}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{4^n \sin^{2n} x}{n}$$

二 (10 分)、若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 是否收敛?
是请给出证明, 否则举出反例.

三 (10 分)、若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, -\infty < x < 0$, 证明: $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$.

四 (10 分)、判断下面函数项级数的收敛性:

$$1. S_n(x) = \arctan nx, x \in (0, 1)$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}, x \in (-\infty, +\infty)$$

五 (10 分)、设 $S'(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $S_n(x) = n[S(x + \frac{1}{n}) - S(x)]$, 证明: $S_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S'(x)$.

六 (20 分)、求下列级数的和:

$$1. \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4^n(n^2 - 4)}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^{n-1}$$

七 (10 分)、讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{5}{2}} + xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq 0 \\ 0, & (x, y) = 0 \end{cases}$$

在原点的连续性与可微性.

八 (10 分)、验证 $u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ 在满足 $x^2 - y^2 > 0$ 的区域中满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u^3.$$

并写出在代换 $x = r \sec \theta, y = r \tan \theta$ 下, 函数 $u(r, \theta)$ 所满足的对应等式.