复旦大学力学与工程科学系

2007～2008学年第二学期期末考试试卷

□A卷　　　□B卷

课程名称：数学分析（II）　　　　课程代码：MATH120009.09

开课院系：力学与工程科学系　　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：____________ 学号：____________ 专业：____________

题 号	1/(1)	1/(2)	1/(3)	2	3/(1)	3/(2)	4/(1)	4/(2)	
得 分									
题 号	5/(1)	5/(2)	6/(1)	6/(2)	7/(1)	7/(2)	7/(3)	7/(4)	总 分
得 分									

Problem 1 (向量值映照基本概念) *现有向量值映照：*

$$\Phi(x,y):\mathbb{R}^2\ni(x,y)\mapsto\Phi(x,y)\triangleq\begin{bmatrix}f(x,y)\\ g(x,y)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2,$$

其中：

$$f(x,y)\triangleq\begin{cases}xy\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ xy+x+y & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad;\quad g(x,y)\triangleq xy\quad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

1. (05%) *研究：* $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\Phi(x,y)$

2. (10%) *证明：* $\Phi(x,y)\in\mathbb{R}^2$ *在* $(0,0)$ *点可微（要求给出该点Jacobian矩阵）*

3. (10%) *计算：*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{e}}\triangleq\lim_{\lambda\to0\in\mathbb{R}}\frac{\Phi(\mathbf{0}+\lambda\cdot\mathbf{e})-\Phi(\mathbf{0})}{\lambda}$$

此处： $\mathbf{e}=(1,1)/\sqrt{2}\in\mathbb{R}^2$，$\Phi(\mathbf{0})=\Phi(0,0)$。

Problem 2 (幂级数基本性质) (10%) *现有函数：*

$$f(x)=arctan\frac{2x}{1-x^2},\ \forall\,x\in\mathbb{R}/\{\pm1\}$$

试以 $x=0$ *为中心，在合适的区间，将* $f(x)$ *展开成* $Fourier$ *级数形式。*

Problem 3 ($Fourier$ **级数基本概念)** *现有有限区间上定义的分段函数：*

$$f(x) \triangleq \begin{cases} +1 & x \in [1,2) \\ -1 & x \in [2,3] \end{cases}$$

1. (10%) 试将 $f(x),\ x \in [1,3]$ 表示成 $Fourier$ 级数的形式

2. (05%) 示意性绘出 $Fourier$ 级数对应的和函数（极限函数）的图像

Problem 4 (曲面积分计算) *设曲面* S^+ *为* $z - c = \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}$ *的上侧，试计算积分：*

$$I = \iint_{S^+} x\, dydz = \int_{S^+} x\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}\, d\sigma$$

此处： $\mathbf{n}$ *的指向同* $\mathbf{k}$ *的正向一致。*

1. (10%) 基于曲面积分的一般方法计算

2. (10%) 基于 $Gauss - Ostrigradskii$ 公式计算

Problem 5 (曲线积分计算) *球面* $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ *的上半球面（* $z \geq 0$ *）被*

- 外柱面：$(x - a/2)^2 + y^2 = (a/2)^2$

- 内柱面：$(x - a/2)^2 + y^2 = (b/2)^2$

此处 $0 < b < a$ *，分别截得两条曲线，记为：* C_1 *和* C_2 *。试基于* $Stokes$ *公式计算曲线积分：*

$$\int_{C_1+C_2} y^2\, dx + z^2\, dy + x^2\, dz = \int_{C_1+C_2} \left(y^2\,\mathbf{i} + z^2\,\mathbf{j} + x^2\,\mathbf{k}\right)\cdot \tau\, dl$$

此处： τ *在* C_1 *和* C_2 *上的指向相反。*

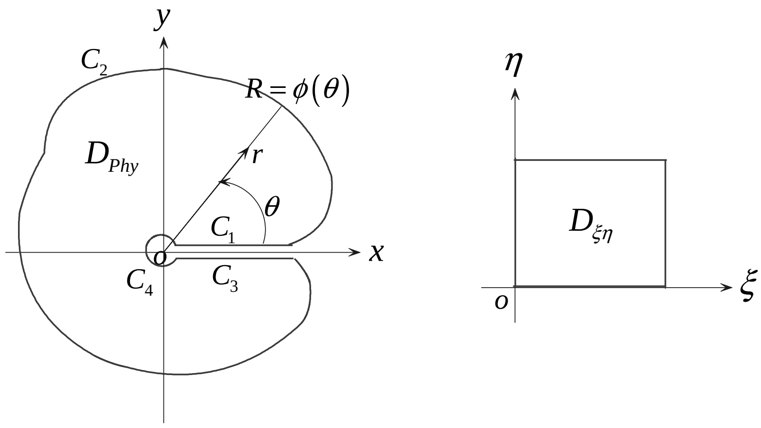
1. (10%) 列出 $Stokes$ 公式的有关计算式（明确写出曲面向量值映照的表示，包括定义域）

2. (10%) 完成相关曲面积分的计算

Problem 6 (条件极值问题) *在椭球面* $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ *的内积长方体中，求体积为最大的那个长方体。*

1. (10%) 按 $Lagrange$ 方法进行有约束目标函数极值点的寻找

2. (05%) 从极值到最值的有关说明（需先计算Hasse矩阵）



Problem 7 (逆映照定理的应用——化“无形”到“有型”) *如上图所示，区域$\mathscr{D}_{Phy}$为光滑曲线$C_1\ \cdots\ C_4$所围成的内部区域。现考虑，将不规则的$\mathscr{D}_{Phy}$ 通过某一双射化成规则的矩形区域。引入平面极坐标，$\mathscr{D}_{Phy}$可表示如下：*

$$\mathscr{D}_{Phy} \triangleq \{(r,\theta)\,|\,r \in (0,\phi(\theta)),\ \theta \in (0,2\pi)\}$$

如引入对应关系：

$$\begin{cases} \xi(r,\theta) = \frac{r}{\phi(\theta)} \\ \eta(r,\theta) = \theta \end{cases}$$

则有：$\mathscr{D}_{Phy}$被映照成：

$$\mathscr{D}_{\xi,\eta} \triangleq \{(\xi,\eta)\,|\,\xi \in (0,1),\ \eta \in (0,2\pi)\}$$

另考虑到：

$$\begin{cases} r = \xi \cdot \phi(\theta) \\ \theta = \eta \end{cases}, \quad \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x(\xi,\eta) = \xi \cdot \phi(\eta)\sin\eta \\ y(\xi,\eta) = \xi \cdot \phi(\eta)\cos\eta \end{cases}$$

以下研究向量值映照：

$$\Phi(\xi,\eta):\ \mathscr{D}_{\xi\eta} \ni (\xi,\eta) \ \mapsto\ \Phi(\xi,\eta) \triangleq \begin{bmatrix} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \cdot \phi(\eta)\sin\eta \\ \xi \cdot \phi(\eta)\cos\eta \end{bmatrix}$$

1. (10%) 证明：$\Phi(\xi,\eta)$为$\mathscr{D}_{\xi\eta}$同$\mathscr{D}_{Phy}$间的双射（一一对应关系）

2. (10%) 证明：$D\Phi(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 非奇异，$\forall\,(\xi,\eta) \in \mathscr{D}_{\xi\eta}$；并求出其逆阵

3. (15%) 设有函数 $f(x,y) \in \mathscr{C}^2(\mathscr{D}_{Phy};\mathbb{R})$，则有：

$$f(x,y) = f(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) =: \hat{f}(\xi,\eta) = \hat{f}(\xi(x,y), \eta(x,y)) = f(x,y)$$

试将：$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ 由 $\hat{f}(\xi,\eta)$ 、 $\phi(\eta)$ 等关于 ξ,η 的函数表示

4. (05%) 基于上述变化，写出：$\int_{\mathscr{D}_{Phy}} f(x,y)\, d\sigma$的计算式

注：尽量详细地给出推理和运算步骤，给分上侧重正确的思想和方法

注：本卷共计 150 分，力求体现微积分基本理论的应用