复旦大学技术科学类

2020-2021 学年第一学期《数学分析 B（I）》一元微分学阶段性考试

共 8 页

课程代码：MATH120016.01-08　　考试形式：□开卷　☑闭卷　　　　2020 年 11 月 15 日

（本试卷答卷时间为 180 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业＿＿＿＿＿＿＿＿学号＿＿＿＿＿＿＿＿＿姓名＿＿＿＿＿＿

（装订线内不要答题）

1-1	1-2	1-3	2-1	2-2	2-3	2-4
3-1	3-2	3-3	3-4	3-5	总分	

一、严格表述题（4*3=12）

1. 基本序列（Cauthy序列）的定义，并说明什么条件下基本序列收敛

2. 闭区间上连续函数的重要性质，只需要说明结论

3. 设$f\left(x\right)\in C\left[a,+\infty\right)$, 且$\exists f\left(+\infty\right)=A\in\mathbb{R}$. 证明：$f\left(x\right)$在$\left[a,+\infty\right)$上有界；
且$\exists \xi\in\left(a,+\infty\right)$, 使得$f'(\xi)=0$.

4.考虑C^1曲线$\begin{cases} x=x\left(t\right) \\ y=y\left(t\right) \end{cases}$，设在$t=t_0$点$y'\left(t_0\right)\neq 0$, 说明参数曲线在 t_0 的一个邻域内可以y作为参数的依据（无需证明）. 计算$\frac{dx}{dy}\left(y\right)$, $\frac{d^2x}{dy^2}\left(y\right)$.

（装订线内不要答题）

二、计算以及计算证明（11*4=44）

1. 计算函数极限

(I) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$,

(II) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}$,且已知：$f\left(0\right)=f'\left(0\right)=0$,并且$f''\left(0\right)=6$

2. 计算如下数列极限

(I) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{a^{a/n}+b^{b/n}+c^{c/n}}{3}\right)^n$ $(a,b,c>0)$

(II) $x_1>0,\ x_{n+1}=\ln(1+x_n)$,并估计 x_n 趋于0的阶数

3.(I) 设 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$，计算 $f^{(n)}(x)$, $\forall n\in\mathbb{N}$

(II) 设$\exists f^{(n)}(x_0)\neq 0, f''(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$

考虑 $f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0+\theta(h)\cdot h)\cdot h,\ \theta(h)\in(0,1)$，求$\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)$

（装订线内不要答题）

4.(I) 当$\{x_n\}$为n个正数集合时，试证明以下不等式 $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\le\left(x_l^{x_1}x_2^{x_2}\cdots x_n^{x_n}\right)^{\frac{1}{x_1+x_2\cdots+x_n}}$

(II) 证明不等式$x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\cos x\ge 1+\dfrac{x^2}{2},\forall x\in(-1,1)$

（装订线内不要答题）

三、证明分析题（10+8+8+10+8=44）

1．设奇函数$f(x)$在$[-1,1]$二阶可导，且有$f(1)=1$,试证：

(I)　$f'(x)$是偶函数；

(II) $\exists\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$;

(III) $\exists\eta\in(0,1)$,使得$f'(\eta)+f''(\eta)=1$

2. $f\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$三阶可导，设有$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)\in\mathbb{R}$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(3)}\left(x\right)=0$,

证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}f'\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}f''\left(x\right)=0$

3. 设$f\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$一致连续，且对$\forall x\in\left[a,a+2\right]$都满足：$\exists\lim\limits_{n\to+\infty}f\left(x+2n\right)=A\in\mathbb{R}$

求证：$\exists\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=A$

4.设$f\left(x\right)$在$x=0$点连续，$\varphi\left(x\right)$是满足某些条件的函数， 且有$\exists\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\varphi\left(x\right)\right)-f\left(x\right)}{\varphi\left(x\right)-x}=A\in\mathbb{R},$

$\left(\mathrm{I}\right)$若要 $\exists f'\left(0\right)\in\mathbb{R},$ 试说明$\varphi\left(x\right)$应该满足什么条件，可图示表达

$\left[\text{提示}\right]$ 可以考虑函数迭代序列$\left\{x_n\right\}$：$x_n=\begin{cases}x & ;n=0\\ \varphi\left(x_{n-1}\right) & ;n\geq 1\end{cases}$

$\left(\mathrm{II}\right)$设$\exists\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\ln\left(x+1\right)\right)-f\left(x\right)}{\ln\left(x+1\right)-x}=A,$ 研究 $f'_{+}\left(0\right)$ 的存在性，如果存在，求出其值

（装订线内不要答题）

5. 设$x_1, x_2 > 0, x_{n+2} = \dfrac{1}{\alpha x_n + \beta x_{n+1}}$;　$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$且$\alpha + \beta = 1$; 说明$\left\{x_n\right\}$的敛散性