

复旦大学信息科学与工程学院

2013–2014学年第一学期《线性代数》期中考试

课程代码:COMP120004 开卷 闭卷 2013年11月7日

(本试卷答题时间90分钟, 答案必须写在试卷上, 做在草稿纸上无效.)

班级: _____ 学号: _____ 姓名: _____ 成绩: _____

一、是非题 (每小题2分, 共20分. 请在每小题前的括号中填上“√”, “×”表示“正确”与“错误”)

- (×) 1. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是 n 阶方阵, 且 $\mathbf{A} = k\mathbf{B}(k \neq 0)$, 则 $\det(\mathbf{AB}) = \frac{1}{k} [\det(\mathbf{A})]^2$.

解答: $\because \det(\mathbf{AB}) = \det\left(\frac{1}{k}\mathbf{AB}\right) = \frac{1}{k^n} [\det(\mathbf{A})]^2$

- (×) 2. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 是 n 阶方阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 则 $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$.

解答: 反例: 若 \mathbf{B} 是零矩阵, \mathbf{A} 是非奇异矩阵, 则 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 但 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

- (√) 3. 分块矩阵 $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B} \end{bmatrix}$, 且 \mathbf{A}, \mathbf{B} 分别为 m 和 n 阶可逆方阵, \mathbf{C} 为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $(\mathbf{X}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}\mathbf{C}^T\mathbf{P} & -\mathbf{Q} \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{P} = (\mathbf{A}^T)^{-1}$, $\mathbf{Q} = (\mathbf{B}^T)^{-1}$.

解答: 利用 $\mathbf{X}^T (\mathbf{X}^T)^{-1}$ 直接验证.

- (×) 4. 若 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ 或 $\mathbf{A} = -\mathbf{I}$. (\mathbf{I} 为单位阵)

解答: 反例: 设 \mathbf{A} 是对角阵, 其对角元部分是 -1 , 其它为 $+1$, 而 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$. 不一定是 \mathbf{I} 或 $-\mathbf{I}$.

- (×) 5. 矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵, 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 则 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$

解答: 只有当 \mathbf{A} 是(列)满秩矩阵时, 才适用消去律. 否则, 若 $\text{rank}(\mathbf{A}) < n$, 设 $\mathbf{B} = \mathbf{D} + \mathbf{X}_1, \mathbf{C} = \mathbf{D} + \mathbf{X}_2$, 其中矩阵 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 中的列向量是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 基础解系的不同线性组合, 此时还是有 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$, 但 \mathbf{B}, \mathbf{C} 未必相等.

- (√) 6. 若 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 可逆.

解答: $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} + 3\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = 2\mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 + 3(\mathbf{A} - \mathbf{I}) = 2\mathbf{I} \Rightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{I}) \left[\frac{1}{2} (\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) \right] = \mathbf{I}$. 因此, $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 可逆.

- (√) 7. 对矩阵实施初等变换不会改变矩阵的秩.

解答: 参见浙大教材p.89 定理2.6

- (√) 8. 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 当 $m < n$ 时, 必有非零阶.

解答: $\because \text{rank}(\mathbf{A}) \leq \min\{m, n\} = m < n$, 再根据齐次方程组有非零解的充要条件(浙大教材p.112定理3.2) 可知, 方程必有非零解.

- (×) 9. 设 \mathbf{A} 为 $m \times n$ 矩阵, 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 满足 $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}|\mathbf{b}]) = m$, 则方程有唯一解.

解答: 当方程相容时, 若 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m < n$ 则方程有无穷多解(浙大教材p.107).

- (×) 10. 向量组(I)可以由向量组(II)线性表示, 则 $\text{rank}(I) = \text{rank}(II)$.

解答: 参见浙大教材p.124 推论1.

二、选择题(每题3分,共30分.请将答案填入每题的括号中.)

(C) 1. 关于齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系,下列哪个命题是错误的:

- (A) 方程组的任意一个解均可由基础解系线性表示.
- (B) 基础解系线性无关.
- (C) 基础解系是唯一的.
- (D) 基础解系是方程组所有解构成向量组的极大线性无关组.

(C) 2. 设向量 $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 均为方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解. 则 \mathbf{A} 可能是下列哪个矩阵:

- (A) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} -5 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(D) 3. 设 \mathbf{A} 是 n 阶方阵, \mathbf{b} 是 n 维列向量, 若 $\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{rank}(\mathbf{A})$, 则

- (A) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 必有无穷多解;
- (B) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 有唯一解;
- (C) $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 只有零解;
- (D) $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{b}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ 有非零解

(C) 4. 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, 则 \mathbf{A}^n ($n \geq 2$ 为正整数) 的值为:

- (A) $\begin{bmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} & \lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & \lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$
- (B) $\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$
- (C) $\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^{n-1} \end{bmatrix}$
- (D) $\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

(A) 5. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{BC} = \mathbf{CA} = \mathbf{I}_n$ (\mathbf{I}_n 为 n 阶单位阵), 则 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}^2 + \mathbf{C}^2$ 等于

- (A) $3\mathbf{I}_n$
- (B) $2\mathbf{I}_n$
- (C) \mathbf{I}_n
- (D) $\mathbf{0}_n$

(B) 6. 设 n 阶矩阵 \mathbf{A} 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^* \neq \mathbf{0}$, 若 $\bar{\mathbf{x}}_1, \bar{\mathbf{x}}_2, \bar{\mathbf{x}}_3, \bar{\mathbf{x}}_4$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的互不相等的解, 则对应的齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系:

- (A) 不存在.
- (B) 仅含一个非零解向量.
- (C) 含有两个线性无关的解向量.
- (D) 含有三个线性无关的解向量.

(A) 7. 设向量组 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ 线性无关, 则下列哪组向量线性相关

- (A) $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1$
- (B) $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$
- (C) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$
- (D) $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3, 3\mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_1$

- (C) 8. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶方阵, 则 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2 = (\mathbf{A} + \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{B})$ 的充要条件是:
(A) $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ (B) $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ (C) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ (D) $\mathbf{A} = \mathbf{B}$
- (D) 9. 若 n 阶方阵 \mathbf{A} 与 \mathbf{B} 等价, 则必有
(A) 若 $\det(\mathbf{A}) = a \neq 0$, 则 $\det(\mathbf{B}) = a$; (B) 若 $\det(\mathbf{A}) = a \neq 0$, 则 $\det(\mathbf{B}) = -a$;
(C) 若 $\det(\mathbf{A}) = 0$, 则 $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$; (D) 若 $\det(\mathbf{A}) = 0$, 则 $\det(\mathbf{B}) = 0$;
- (B) 10. 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 均为 n 阶方阵, 且 $\text{rank}(\mathbf{AB}) = \text{rank}(\mathbf{B})$, 则:
(A) $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$ (B) $\text{rank}(\mathbf{AB}^2) = \text{rank}(\mathbf{B}^2)$
(C) $\text{rank}(\mathbf{AB}^2) < \text{rank}(\mathbf{B}^2)$ (D) 以上三式均不正确.

说明: 因齐次方程组(I): $\mathbf{AB}^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 与 (II): $\mathbf{B}^2 \mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有相同的解系.(自行验证)
所以, $\text{rank}(\mathbf{AB}^2) = \text{rank}(\mathbf{B}^2)$.

三、计算证明题(共50分)

1. (8分)求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

解:令 D_n 为该行列式的值, 按第一行展开得:

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2} \\ \Rightarrow D_n - bD_{n-1} = a(D_{n-1} - bD_{n-2})$$

$$\because D_1 = a+b, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2, \text{ 得 } D_2 - bD_1 = a^2, \text{ 依次类推,}$$

有

$$D_3 - bD_2 = a(D_2 - bD_1) = a^3 \\ D_4 - bD_3 = a^4$$

$$\therefore D_n - bD_{n-1} = a^n$$

另一方面有: $D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$, 同时 $D_2 - aD_1 = b^2$, 依次类推, 有

$$D_3 - aD_2 = b(D_2 - aD_1) = b^3 \\ D_4 - aD_3 = b^4$$

$$\therefore D_n - aD_{n-1} = b^n$$

因此有

$$D_n - bD_{n-1} = a^n \quad (1)$$

$$D_n - aD_{n-1} = b^n \quad (2)$$

利用(1)× a -(2)× b , 得

$$\begin{aligned} (a-b)D_n &= a^{n+1} - b^{n+1} \\ \Rightarrow D_n &= \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} = \sum_{i=0}^n a^{n-i}b^i \end{aligned}$$

2. (8分)设 n 阶矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 的每一行元素之和为 0, 即 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$. 求证: $A_{11} = A_{12} = \dots = A_{1n}$, 其中 A_{1j} 为 $a_{1j}(j = 1, 2, \dots, n)$ 对应的代数余子式.

证明: 利用 \mathbf{A} 的每行元素和为零, 得 $a_{in} = -\sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(i = 1, 2, \dots, n)$, 矩阵 \mathbf{A} 可写成:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \end{bmatrix}$$

而

$$A_{1j} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{2j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{n(n-1)} & -\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$\frac{C_{n-1} + C_1}{C_{n-1} + C_2} = (-1)^{1+j} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & -a_{2j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} & -a_{nj} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{(n-1)(n-2)}}{C_{(n-2)(n-3)}} &= (-1)^j (-1)^{n-j-1} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2(j-1)} & a_{2j} & a_{2(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & a_{nj} & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{2(n-1)} \end{vmatrix} \\ C_{(j+1)(j+2)} &= A_{1n}, \quad (j = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

3. (8分) 设 \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 n 阶方阵, 且满足 $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{AB}$, 证明 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

证明: $\because \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{AB} \Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{AB} = \mathbf{0}$, 等式两端同时减去单位阵 \mathbf{I} , 有

$$\begin{aligned} & \mathbf{A} + \mathbf{B} - \mathbf{AB} - \mathbf{I} = -\mathbf{I} \\ \Rightarrow & (\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \mathbf{I} \end{aligned}$$

因此 $\mathbf{A} - \mathbf{I}$ 与 $\mathbf{B} - \mathbf{I}$ 互为逆阵, 所以

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = (\mathbf{B} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})$$

两边同时展开, 得

$$\mathbf{AB} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{I} = \mathbf{BA} - \mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{I}$$

因此 $\Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

4. (14分) 设四元齐次线性方程组(I) 为: $\begin{cases} x_1 &+ x_3 &= 0 \\ x_2 &- x_4 &= 0 \end{cases}$, 另一个四元齐次方程组(II) 的通解为: $k_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

(a) 求齐次方程组(I)的基础解系.

(b) 线性方程组(I)与(II)是否有非零的公共解? 若有求出其所有非零公共解. 若没有, 请说明理由.

解: (a) 先求(I)的基础解系, 将方程组写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\text{得方程组的基础解系为: } \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(b) 将方程组(II)的通解代入方程组(I), 其中 k_1, k_2 为待定系数, 得到关于 k_1, k_2 的方程组:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 1 \\ k_1 + k_2 &= 1 \end{aligned}$$

由此得当 $k_1 = -k_2 = k$ 时, 方程组(II)的解也是方程组(I)的解, 即它们有非零公共解:

$$k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. (12分) 求下列非齐次线性方程组的特解和通解.

$$\begin{aligned} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 &= 4 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 &= -8 \end{aligned}$$

解:

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccc|c} 9 & -3 & 5 & 6 & 4 \\ 6 & -2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\begin{array}{l} R_{13} \\ R_2 - R_1(2) \\ R_3 - R_1(3) \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -27 & 21 \\ 0 & 0 & -4 & -36 & 28 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{\begin{array}{l} R_2(-1/3) \\ R_3 + R_2(4) \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 3 & 14 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{array}$$

得:

$$\text{特解: } \begin{bmatrix} \frac{13}{3} \\ 0 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{对应齐次方程组的通解: } t_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -\frac{13}{3} \\ 0 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}$$