（装订线内不要答题）

复 旦 大 学 技 术 科 学 试 验 班

2022-2023 第一学期《线性代数》期末考试试卷

A 卷　　　　　　　　2023 年 1 月 5 日

课程名称：《线性代数》　课程代码：COMP120004.01-10

开课院系：计算机科学技术学院、信息科学与工程学院　考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	总分
得分											

五、（12 分）设 V 为 n 维线性空间，$\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 为 V 的一个基，且

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\eta_1+\eta_2+...+\eta_n\\&\alpha_2=\eta_2+\eta_3+...+\eta_n\\&...\\&\alpha_n=\eta_n\end{aligned}$$

(1) 证明 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ 为 V 的一个基；

(2) 求由基 $\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 到基 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ 的过渡矩阵；

(3) 设 a 在基 $\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 下的坐标为 $(a_1,a_2,...,a_n)$，求 a 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n\}$ 下的坐标。

六、（12 分）设 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in\mathrm{R}^n$，证明 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m$ 线性无关的充要条件是行列式

$$\begin{vmatrix}<\alpha_1,\alpha_1> & <\alpha_1,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_1,\alpha_m>\\ <\alpha_2,\alpha_1> & <\alpha_2,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_2,\alpha_m>\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ <\alpha_m,\alpha_1> & <\alpha_m,\alpha_2> & \cdots & <\alpha_m,\alpha_m>\end{vmatrix}\neq 0$$

七、（14 分）设 A 为 n 阶方阵，B 为 m 阶方阵。证明：$\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix}$ 相似于一个对角矩阵当且仅当 A、B 分别相似于一个对角阵。

八、（14 分）设二次型

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2+2bx_1x_3+2x_2x_3$的矩阵 A 有特征值

$\lambda_1=\lambda_2=1$和$\lambda_3=4$。

(1) 求参数a,b的值;

(2) 用正交变换将二次型化为标准型，并写出所用的正交变换