

# 复旦大学数学科学学院

## 2014~2015 学年第一学期期末考试试卷

### B 卷

课程名称: 数学分析 B(I) 课程代码: MATH120016

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: \_\_\_\_\_ 学 号: \_\_\_\_\_ 专 业: \_\_\_\_\_

题 号	1	2	3	4	5	6	总 分
得 分							

注意:

1. 除了特殊说明之外, 答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。
2. 答题过程及结果应写在考卷上, 写在草稿纸上无效。

(以下为试卷正文)

(装订线内不要答题)

## 1. 严格表述题 (每题 4 分, 共 3 题, 共 12 分)

- 1) 一列闭区间  $\{[a_n, b_n]\}$  是一个闭区间套。
- 2)  $x_0$  是函数  $f(x)$  的第三类 (可去) 间断点。
- 3) 函数  $f(x)$  是  $[a, b]$  上的上凸函数。
2. 简答题 (每题 4 分, 共 6 题, 共 24 分。可以直接写出答案, 也可以写出中间过程; 答案正确时, 得满分; 答案错误而存在正确的中间过程时, 得部分分, 否则不得分。)
- 1) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{n^2}$ , 其中  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in R$ 。
- 2) 如果当  $x \rightarrow 0+$  时,  $\ln^\alpha(1+2x)$ ,  $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$  都是  $x$  的高阶无穷小量, 求  $\alpha$  的取值范围。
- 3) 求函数  $y = f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$  的反函数  $x = f^{-1}(y)$  在  $y=0$  处的导数。

4) 设  $f(x)$  任意次可微, 且  $f(x) > 0$ , 求  $(\ln(f(x)))''$ 。

5) 求常微分方程  $(x - 2)\frac{dy}{dx} + y = 2(x - 2)^2$  的通解。

6) 求不定积分  $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ , 其中  $a > b > 0$ 。

(  
装  
订  
线  
内  
不  
要  
答  
题  
)

3. 判断简答题 (判断下列命题是否正确, 如果正确的, 请回答“是”, 并给予简要证明; 如果错误的, 请回答“否”, 并举反例并简要说明。) (每题 5 分, 共 3 题, 共 15 分。判断正确得 2 分, 判断正确, 并且证明或举反例正确得满分。判断不正确不得分。)

1) 设  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内可导, 并且  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$ 。

2) 设  $f(x)$  在  $x_0$  处连续, 并且  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$  存在有限, 则  $f(x)$  在  $x_0$  处可微。

3) 设函数  $f(x)$  是周期为  $T$  的黎曼可积函数,  $\int_0^T f(x)dx = 0$ , 则反常积分  $\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{\ln x} dx$  收敛。

4. 计算题 (每题 6 分, 共 6 题, 共 36 分)

1) 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \ln \frac{1+x}{x} \right)$ 。

2) 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$ 。

3) 求定积分  $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$  (其中  $m, n$  是正整数)。

4) 求反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(1+x^2)(1+x)} dx$ 。

5) 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且满足  $f(1) = 1$  和  $\int_0^x t f(2x-t) dt = \frac{1}{2} \arctan(x^2)$ , 求  $\int_1^2 f(x) dx$ 。

(  
装  
订  
线  
内  
不  
要  
答  
题  
)

6) 求心形线  $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$  ( $a > 0$ ,  $0 \leq t \leq \pi$ ) 绕  $x$  轴一周所得的旋转曲面的面积。

5. 证明不等式  $x^2 \geq (1+x)\ln^2(1+x)$ , ( $x > 0$ )。 (6 分)

6. 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上导数连续, 且  $f(0) = f(1) = 0$ , 证明:  $\int_0^1 f^2(x)dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$ 。 (6 分)