复旦大学 技术科学大类有关院系

2018~2019 学年第一学期期末考试试卷 参考答案

■A 卷 □ B 卷 □ C 卷

课程名称： 数学分析 BI 课程代码： MATH120016

开课院系： 计算机科学技术、数学、航空航天 考试形式：闭卷

姓名：________ 学号：________ 专业：________

提示：请同学们秉持诚实守信宗旨，谨守考试纪律，摒弃考试作弊。学生如有违反学校考试纪律的行为，学校将按《复旦大学学生纪律处分条例》规定予以严肃处理。

题号	1	2	3	4	总分
得分					

（一）概念题（共 3 题，每题 3 分；共 9 分）

1. 函数$f(x)$在集合E上一致连续

   $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0,$ 成立$|f(\tilde{x})-f(\hat{x})|<\varepsilon,\forall\tilde{x},\hat{x}\in E,|\tilde{x}-\hat{x}|<\delta_\varepsilon.$

2. 积分第二中值定理

   $\exists C\in[a,b],$ 满足$\int_a^b f(x)\eta(x)\,dx=\eta(a)\int_a^c f(x)\,dx+\eta(b)\int_c^b f(x)\,dx$

式中$f(x)\in R[a,b]$，$\eta(x)$在$[a,b]$上单调

注：按书中的加强性条件，亦给 3 分。

3. 定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的极限定义（需用 $\varepsilon-\delta$ 语言）

   $\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{|f|\to 0}\sum_{k=1}^N f(\xi_i)\Delta x_i$， 式中$\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，$|P|=\max\limits_{1\le i\le N}\Delta x_i$。（仅写出此表达式，1 分）

   $\varepsilon-\delta$ 语言：$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0$，成立$\left|\sum_{k=1}^N f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$，$\forall|P|<\delta_\varepsilon$（3 分）

   注：仅对分割P的模|P|有限制，对选取不做要求.

（装订线内不要答题）

（二）判断题（判断命题是否正确，若正确给出证明，若错误则说明原因或者举出反例；共 4 题，每题 5 分；共 20 分）

1. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上单调，则函数就此区间中任何一点的单侧极限都存在。

   是。（2 分）

   考虑单调上升，有

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\sup_{[a,x_0)}f(x) \qquad ① \quad （1\text{ 分}）$$

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\inf_{(x_0,b]}f(x) \qquad ② \quad （1\text{ 分}）$$

   证明 ①（证明 1 分）

   按$\sup\limits_{[a,x_0)}f(x)$的定义. $\forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in[a,x_0), s.t. \ \sup\limits_{[a,x_0)}f(x)-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le\sup\limits_{[a,x_0)}f(x)$.

   考虑到f(x)单调上升，则有$\sup\limits_{[a,x_0)}f(x)-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le f(x)\le\sup\limits_{[a,x_0)}f(x),\forall x\in(x_\varepsilon,x_0)$，

   即单侧极限存在。

2. $f(x)=\sqrt{x}\cdot sinx$ 在区间$[0,+\infty)$ 上一致连续。

   否。（2 分）

   可考虑$x_n=2n\pi+\delta_n,\delta_n\to0$，则有

$$f(x_n)=\sqrt{x_n}\sin(x_n)=\sqrt{2n\pi+\delta_n}\sin(2n\pi+\delta_n)=\sqrt{2n\pi+\delta_n}\sin(\delta_n)=$$

$$\sqrt{2n\pi+\delta_n}\big(\delta_n+o(\delta_n)\big)=\sqrt{2n\pi+\delta_n}\cdot\delta_n\big(1+o(1)\big).$$

   考虑$\sqrt{2n\pi+x}\cdot x=\lambda\in\mathbb{R}^+$，亦即$\sqrt{2n\pi+x}=\frac{\lambda}{x}$，按连续函数的介值定理，可有

$$\exists\delta_n>0,s.t.\sqrt{2n\pi+\delta_n}=\frac{\lambda}{\delta_n}，且\delta_n=\frac{\lambda}{\sqrt{2n\pi+\delta_n}}<\frac{\lambda}{\sqrt{2n\pi}}\to0。$$

   可作 $\begin{cases}\widetilde{x_n}=2n\pi+\widetilde{\delta_n},\widetilde{\delta_n}\to0,f(\widetilde{x_n})\to\tilde{\lambda}\in\mathbb{R}^+\\ \widehat{x_n}=2n\pi+\widehat{\delta_n},\widehat{\delta_n}\to0,f(\widehat{x_n})\to\hat{\lambda}\in\mathbb{R}^+\end{cases}$

   而$|\widetilde{x_n}-\widehat{x_n}|\to0,|f(\widetilde{x_n})-f(\widehat{x_n})|\to|\tilde{\lambda}-\hat{\lambda}|\neq0.$

注：合理的构造，计 2 分；利用相关定理判断不一致连续，计 1 分。

3. 设$f(x)$在区间$[a,b]$上可导（端点存在单侧导数），且$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，则有$\xi\in(a,b)$，满足$f'(\xi)=0$。

   是。（2 分）

   本结论为 Darbourx 定理，导数的介值定理。

   设$\begin{cases}f_+{}'(a)\triangleq\lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,有f(x)>f(a),x\in(a,a+\delta_\varepsilon)\\ f_-{}'(b)\triangleq\lim\limits_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,有f(x)>f(b),x\in(b-\delta_\varepsilon,b)\end{cases}$

   故有a,b均不为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值点，亦即最大值在内部（2 分）。

   按 Fermat 引理，该点导数为零。（1 分）

4. 设$f(x)$与$g(x)$在区间$[a,b]$上 Riemann 可积，则$f(x)\cdot g(x)$亦 Riemann 可积。

是。（2 分）

考 虑 到 $|f(\tilde{x})g(\tilde{x})-f(\hat{x})g(\hat{x})|\le|f(\tilde{x})g(\tilde{x})-f(\hat{x})g(\tilde{x})|+|f(\hat{x})g(\tilde{x})-f(\hat{x})g(\hat{x})|\le \sup\limits_{[a,b]}|g(x)|\cdot|f(\tilde{x})-f(\hat{x})|+\sup\limits_{[a,b]}|f(x)|\cdot|g(\tilde{x})-g(\hat{x})|$。（2 分）

由此，则有

$$\Omega(\mathrm{f\cdot g;P})\triangleq\sum_{k=1}^{N}\sup_{[\tilde{x},\hat{x}]}|f(\tilde{x})g(\tilde{x})-f(\hat{x})g(\hat{x})|\Delta x_i$$

$$\le\sup_{[a,b]}|g(x)|\cdot\sum_{k=1}^{N}\sup_{[\tilde{x},\hat{x}]}|f(\tilde{x})-f(\hat{x})|\Delta x_i+\sup_{[a,b]}|f(x)|$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{N}\sup_{[\tilde{x},\hat{x}]}|g(\tilde{x})-g(\hat{x})|\Delta x_i=\sup_{[a,b]}|g(x)|\cdot\Omega(f;P)+\sup_{[a,b]}|f(x)|\cdot\Omega(g;P)$$

由于$\Omega(f;P),\Omega(g;P)\to 0$，故有$\Omega(\mathrm{fg;P})\to 0$ （1 分）

（三）计算题（共 8 题，每题 5 分；共 40 分）

1. 设 $f(x)=arcsinx$，求： $f^{(2019)}(0)$ 注：仅需给出计算式，无需计算至具体值

解: $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-1)^k x^{2k}+o(x^{2k})$

$$f(x)=x+\sum_{k=1}^{n}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}+o(x^{2k+1})=x+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2k+1})$$

（3 分）。取$\mathrm{k}=1009$, 则有 $\frac{f^{(2019)}(0)}{(2019)!}=\binom{-\frac{1}{2}}{1009}\frac{(-1)^{1009}}{2019}$ （2 分）。

可有$f^{(2019)}(0)=(2019)!\frac{(2017)!!}{(2018)!!}\frac{1}{2019}=[(2017)!!]^2$ 注：按二项式定理开展，给予相应得分。

2. 计算：数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$

解:

$$x_n=\frac{1}{n}e^{n\sum_{k=1}^{n}ln(n+k)}=\frac{1}{n}e^{n\sum_{k=1}^{n}\left[ln\,n-ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]}=\frac{1}{n}e^{ln\,n}e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}=e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

$$\to e^{\int_0^1 ln(1+x)dx}$$

（给 3 分）；式中

$$\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\left[\ln(1+x)\cdot x\right]\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\ln 2-\left[1-\ln(1+x)\Big|_0^1\right]$$
$$=\ln 2-[1-\ln 2]=2\ln 2-1$$

故极限为$\frac{4}{e}$ 。（给 2 分）

（装订线内不要答题）

3. 可由参数方程 $x=f'(t)$，$y=tf'(t)-f(t)$ 确定$y=y(x)$，此处$f''(t)\neq 0$，计算：$y''(x)$

解:

$$\frac{dy}{dx}(x)=\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{f'(t)+tf''(t)-f'(t)}{f''(t)}=\frac{tf''(t)}{f''(t)}=t \quad （3 分）$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x)=\frac{dt}{dt}\frac{dt}{dx}(x)=\frac{1}{\dot{x}(t)}=\frac{1}{f''(t)} \qquad （2 分）$$

4. 计算：函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}[cos(xe^x)-ln(1-x)-x]^{\frac{1}{sinx^3}}$

解: $f(x)=e^{\frac{1}{sin\,x^3}ln[cos(xe^x)-ln(1-x)-x]}$ ， 式中$sin\,x^3=x^3+o(x^3)$ （1 分）

$$\begin{aligned}\cos\left(xe^x\right)&=1-\frac{x^2e^{2x}}{2}+o\left(x^3\right)=1-\frac{1}{2}x^2\left(1+2x+o(1)\right)+o\left(x^3\right)\\&=1-\frac{1}{2}x^2-x^3+o\left(x^3\right)\end{aligned} \quad （1 分）$$

$$-ln(1-x)=\int[1+x+x^2+o(x^2)]\,dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3) \quad （1 分）$$

故有 $ln[cos(xe^x)-ln(1-x)-x]=ln\left[1-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right]=-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$ （1 分）

故有 $f(x)=e^{\frac{-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^3+o(x^3)}}=e^{-\frac{2}{3}}$。（1 分）

5. 计算：不定积分 $\int\frac{ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$

解:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\xrightarrow{x=tan\,\theta}\int\frac{sec^2\theta d\theta}{sec^3\theta}=\int cos\,\theta\,d\theta=sin\,\theta=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad （2 分）$$

则有

$$\int ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)d\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{x\,ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$=\frac{x\,ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}-\int\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{x\,ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{1}{2}ln(1+x^2)+C \quad （3 分）$$

（装订线内不要答题）

6. 计算：积分 $\int_0^1 \frac{arcsinx}{x}dx$

解:

$$\int_0^1 \frac{arcsin\,x}{x}dx = \int_0^1 arcsin\,x\,d\,ln\,x = [arcsin\,x \cdot ln\,x]|_0^1 - \int_0^1 \frac{ln\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad （2\,分）$$

$$= -\int_0^1 \frac{ln\,x}{\sqrt{1-x^2}}dx \xrightarrow{x=sin\,\theta} -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{lnsin\,\theta}{cos\,\theta}cos\,\theta\,d\theta = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} lnsin\,\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}ln\,2 \quad （3\,分）$$

注: $\lim\limits_{x\to 0+0} arcsin\,x\,ln\,x = 0, \int_0^{\frac{\pi}{2}} lnsin\,\theta\,d\theta = -\frac{\pi}{2}ln\,2$ 可以直接使用。

7. 计算：轮旋线 $x = a(t - sint)$，$y = a(1 - cost)$，$t \in [0,2\pi]$，绕x轴旋转一周所形成的旋转曲面的面积（旋成体的侧面积）

解:

$$S = 2\pi\int_0^{2\pi} y(t)\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt = 2\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}dt$$
$$= 4\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\sin^2\frac{t}{2}dt = 8\pi a^2\int_0^{2\pi}\sin^3\frac{t}{2}dt = 16\pi a^2\int_0^{\pi}\sin^3 tdt \quad （3\,分）$$

式中 $\int_0^{\pi} sin^3\,t\,dt = -\int_0^{\pi}(1 - cos^2\,t)d\,cos\,t = -\left[cos\,t - \frac{cos^3\,t}{3}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3}$ （2 分）

故有$S = \frac{64}{3}\pi a^2$

8. 求解：微分方程 $y"(x) + y'(x) = 5e^x cosx$

解:

① $\overline{y}''(x) + \overline{y}'(x) = 0.\ r^2 + r = r(r+1) = 0,\ r_1 = 0, r_2 = -1. \overline{y}(x) = A + Be^{-x}$ （2 分）

② $y_*(x) = e^x(E\,cos\,x + F\,sin\,x)$ （2 分）

$$y_*'(x) = e^x(E\cos x - E\sin x + F\sin x + F\cos x)$$
$$= e^x[(E+F)\cos x + (F-E)\sin x]$$
$$y_*''(x) = e^x[(E+F)\cos x - (E+F)\sin x + (F-E)\sin x + (F-E)\cos x]$$
$$= e^x[2F\cos x - 2E\sin x]$$

$$y_*''^{(x)} + y_*'^{(x)} = e^x[(E+F)\,cos\,x + (F-E)\,sin\,x] + e^x[2F\,cos\,x - 2E\,sin\,x] = 5e^x\,cos\,x$$

$E + 3F = 5, F - 3E = 0.\quad E = \frac{1}{2}, F = \frac{3}{2}. y(x) = A + Be^{-x} + e^x\left(\frac{1}{2}cos\,x + \frac{3}{2}sin\,x\right)$ （1 分）

（四）证明与分析题（共 5 题；共 31 分）

1. 证明：积分第一中值定理 （5 分）

证明：

需证

$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx$, $\exists \xi \in [a,b]$,式中$f(x) \in C[a,b]$, $\varphi(x) \in R[a,b]$且不变号。

（叙述正确结果，给 3 分）。不妨设$\varphi(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$，则有

$$\inf_{[a,b]} f(x) \cdot \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq \sup_{[a,b]} f(x) \cdot \int_a^b \varphi(x)dx --(*)$$

则有

$$\frac{\int_a^b f(x)\varphi(x)dx}{\int_a^b \varphi(x)dx} = f(\xi) \in \left[\inf_{[a,b]} f(x), \sup_{[a,b]} f(x)\right], \xi \in [a,b].$$

上式设$\int_a^b \varphi(x)dx > 0$. （给 2 分）

当$\int_a^b \varphi(x)dx = 0$，由$(*)$得$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = 0$，原式自然成立。

2. 证明：$xlnx + ylny + zlnz \geq (x+y+z)ln\frac{x+y+z}{3}$，$x$、$y$、$z > 0$，需说明等号成立的情况（5 分）

证明：

考虑$f(x) = x\ln x, x > 0$，有

$f'(x) = \ln x + 1, f''(x) = \frac{1}{x} > 0$，故$f(x)$在$R^+$严格下凸。（2 分）

按 Jensen 不等式（可以直接使用），有

$$f\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(y) + \frac{1}{3}f(z), \forall x,y,z > 0$$

亦即

$$\frac{x+y+z}{3}\ln\left(\frac{x+y+z}{3}\right) \leq \frac{1}{3}x\ln x + \frac{1}{3}y\ln y + \frac{1}{3}z\ln z.$$ （2 分）

当$x = y = z$时，等号成立. （1 分）

（装订线内不要答题）

3. 设$f(x)$在$[0,a]$上三阶可导，且$f'(0)=f''(0)=0$，$f^{(3)}(x)\neq 0$，则对$x\in(0,a]$等式 $\int_0^x f(t)dt=f\big(\xi(x)\big)\cdot x$ 中的 $\xi(x)$，成立 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\xi(x)}{x}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$。（7 分）

证明：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\int_0^x f(t)dt=f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3+o(x^3)$$

有 $\int_0^x f(t)dt=\ f(0)x+\frac{f^{(3)}(0)}{6}\cdot\frac{x^4}{4}\ +o(x^4)$ （3 分）。另一方面，

$f\big(\xi(x)\big)\cdot x=\left[f(0)+f'(0)\xi(x)+\frac{f''(0)}{2}\big(\xi(x)\big)^2+\frac{f^{(3)}(0)}{6}\big(\xi(x)\big)^3+o\left(\big(\xi(x)\big)^3\right)\right]x=f(0)x+\frac{f^{(3)}(0)}{6}\big(\xi(x)\big)^3x+o\left(x\big(\xi(x)\big)^3\right)$。 （3 分）

综上，有

$\frac{f^{(3)}(0)}{6}\big(\xi(x)\big)^3x=\frac{f^{(3)}(0)}{6}\cdot\frac{x^4}{4}\ +o(x^4)\Rightarrow\big(\xi(x)\big)^3=\frac{x^3}{4}+o(x^3),\frac{\big(\xi(x)\big)^3}{x^3}=\frac{1}{4}+o(1)$，（1 分）

故有$\frac{\xi(x)}{x}\to\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$当$x\to 0+0$.

4. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导，如果存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+xlnx\cdot\frac{df}{dx}(x)\right]=l$，$l$为有限实数。证明：① 存在极限$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$；（4 分）② $f(x)$在中$[a,+\infty)$上一致连续。（3 分）

证明：

① 考虑到

$$f(x)+xlnx\cdot\frac{df}{dx}(x)=(x\ln x)\cdot\left[\frac{df}{dx}(x)+\frac{1}{x\ln x}f(x)\right]\text{（1 分）}$$

$$=(x\ln x)\cdot\frac{\frac{d}{dx}\left[e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}f(x)\right]}{e^{\int\frac{1}{x\ln x}dx}}=(x\ln x)\cdot\frac{\frac{d}{dx}[\ln x\, f(x)]}{\ln x}$$

$$=\frac{\frac{d}{dx}[\ln x\, f(x)]}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln x}\text{（2 分）}\sim\frac{\ln x\, f(x)}{\ln x}=f(x)\text{（1 分）}$$

故按 L'Hospital 法则，有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$

② 现有$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l\in\mathbb{R}$,则有$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_\varepsilon>0$,成立$|\mathrm{f(x)}-\mathrm{l}|<\varepsilon,\forall \mathrm{x}\geq\delta_\varepsilon$. 考虑$[a,+\infty)=[a,\delta_\varepsilon]\cup[\delta_\varepsilon,+\infty)$，由于$f(x)\in[a,\delta_\varepsilon]$，故在其上一致连续（分区间考虑 2 分）。

考虑 $\forall\tilde{x},\hat{x}\in[\delta_\varepsilon,+\infty)$，估计

$$|f(\tilde{x})-f(\hat{x})|<|f(\tilde{x})-l|+|f(\hat{x})-l|<2\varepsilon\quad\text{（1 分）}$$

综上，有$f(x)$在中$[a,+\infty)$上一致连续。

5. 研究反常（广义）积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ 的敛散性，p 为实数。需区分绝对收敛、条件收敛、发散对应的 p 的范围。（7 分）

解：

① $x_*=0.$ 考虑 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ （1 分）

令$\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$，有$\mathrm{y}'(\mathrm{x})=1-\frac{1}{\mathrm{x}^2}<0$，当$\mathrm{x}\in(0,\frac{1}{2}]$；另$\mathrm{y}\in[\frac{5}{2},+\infty)$有$\mathrm{x}=\frac{\mathrm{y}-\sqrt{\mathrm{y}^2-4}}{2}\in(0,\frac{1}{2}]$.

$\mathrm{I}=-\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin y}{\left(\frac{y-\sqrt{y^2-4}}{2}\right)^p}\cdot\frac{1}{2}(1-\frac{y}{\sqrt{y^2-4}})dy\sim\int_{\frac{5}{2}}^{+\infty}\frac{\sin y}{\left(y-\sqrt{y^2-4}\right)^{p-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y^2-4}}dy$ （1 分）

式中

$\frac{\sin y}{y^{p-1}\left(1-\frac{y}{\sqrt{y^2-4}}\right)^{p-1}}\cdot\frac{1}{y\left(1-\frac{4}{y^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sin y}{y^p}\cdot\left(1-1+\frac{2}{y^2}+O\left(\frac{1}{y^4}\right)\right)^{-p+1}\cdot\left(1+O\left(\frac{1}{y^2}\right)\right)\sim\frac{\sin y}{y^{-p+2}}(1+$

$O(\frac{1}{y^2}))$ （1 分），则有$\begin{cases}p<1. & 绝对收敛\\ 1\le p<2. & 条件收敛\\ p\ge 2. & 发散\end{cases}$ （1 分）

或者按以下方式考虑，给予相应的得分：

$$\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}=\frac{\sin(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos(x)}{x^p}=\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{p-1}}\left(1+o(1)\right)+\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^p}\left(1+o(1)\right) \quad （1 分）$$

式中

$$\int_0^1\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{p-1}}dx\overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\int_{+\infty}^1 y^{p-1}\cos y\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y^{-p+3}}dy \ ,$$

$$有\begin{cases}-p+3>1,即p<2. & 绝对收敛\\ 0<-p+3\le 1,即\ 2\le p<3. & 条件收敛\\ -p+3\le 0,即p\ge 3. & 发散\end{cases} \quad （1 分）$$

$$\int_0^1\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}dx\overset{y=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\int_{+\infty}^1 y^p\sin y\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy=\int_1^{+\infty}\frac{\sin y}{y^{-p+2}}dy,$$

$$有\begin{cases}-p+2>1,即p<1. & 绝对收敛\\ 0<-p+2\le 1,即\ 1\le p<2. & 条件收敛\\ -p+2\le 0,即p\ge 2. & 发散\end{cases} \quad （1 分）$$

故有 $\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ ， $\begin{cases}p<1. & 绝对收敛\\ 1\le p<2. & 条件收敛\\ p\ge 2. & 发散\end{cases}$ （1 分）

② $x_* = +\infty$ 考虑

$$\frac{sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}=\frac{sin(x)\,cos\left(\frac{1}{x}\right)+sin\left(\frac{1}{x}\right)cos(x)}{x^p}$$

$$=\frac{\sin x}{x^p}\left(1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)+\frac{\cos x}{x^p}\left(\frac{1}{x}+O\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)=\frac{\sin x}{x^p}+\frac{\cos x}{x^{p+1}}+O\left(\frac{1}{x^{p+2}}\right)$$ （1 分）

故有 $\int_1^{+\infty}\frac{sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$， $\begin{cases} p>1. & 绝对收敛 \\ 0<p\le 1. & 条件收敛 \\ p\le 0. & 发散 \end{cases}$ （1 分）

综上有 $\int_0^{+\infty}\frac{sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$， $\begin{cases} 0<p<2, & 条件收敛 \\ 其它, & 发散 \end{cases}$ （1 分）