线性代数期末复习

第四章 线性空间与欧式空间

倪卫明

复旦大学信息学院

2013, June

线性空间的定义: 设 V 是一非空集合, P 为数域, 在 V 上定义的两种运算(加法、数乘)是封闭的, 即

(1). $\forall \alpha, \beta \in V$, 有 $\alpha + \beta \in V$.

(2). $\forall \alpha \in V, \forall k \in P$, 有 $k\alpha \in V$.

并且这两种运算满足下列8条规律($\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k, l \in P$):

(1). 加法交换律 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$;

(2). 加法结合律 $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$;

(3). $\exists \mathbf{0} \in V$ 称为**零元**, 使得 $\forall \alpha \in V$, 有 $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$;

(4). $\forall \alpha \in V$, $\exists (-\alpha) \in V$ 称为 α 的**负元**, 使得 $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$;

(5). $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$;

(6). $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$;

(7). $k(l\alpha) = (kl)\alpha$

(8). $\exists 1 \in P$, 使得 $1 \cdot \alpha = \alpha$;

线性子空间: 设 W 是数域 P 上线性空间 V 的一个非空子集, 若 W 对于 V 的两种运算 也构成一个线性空间, 则称 W 是 V 的一个线性子空间(简称子空间).

线性空间的性质:

(a) 线性空间中, 零元是唯一的;

(b) 线性空间中, 每一个元素的负元是唯一的;

(c) $\forall \alpha \in V$, 有 $0\alpha = 0$;

(d) $\forall k \in P$, $\mathbf{0} \in V$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$;

(e) $\forall k \in P$, $(-k)\alpha = k(-\alpha) = -(k\alpha)$.

(f) 若 $k\alpha = \mathbf{0}$, 则 $k = 0$ 或 $\alpha = \mathbf{0}$;

(g) 设 W 是数域 P 上线性空间 V 的一个子集, 若满足下列条件

- W 是非空的;
- 若 $\alpha, \beta \in W$, 则 $\alpha + \beta \in W$;
- 若 $\alpha \in W$, $\lambda \in P$, 则 $\lambda\alpha \in W$;

则 W 是 V 的一个子空间;

线性空间的基与维数: 设 V 是数域 P 上的线性空间, 若存在一组向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in V$, 满足

1. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性无关;
2. 若 $\forall \alpha \in V$ 均可由 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 线性表示;

则称此向量组为线性空间 V 的一组**基**, 基中所含向量的个数称为 V 的**维数**, 记为 $\dim V = n$. 亦称 V 为 n 维线性空间.

向量的坐标: 设向量组 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是线性空间 V 的基, 则 V 中任意一个向量 α 可由这组基线性表示为:

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n$$

其中 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为向量 α 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 下 的**坐标**, 记为向量 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$.

任意向量在确定的基下的坐标是唯一的, 线性空间 V 的基的选择往往不唯一, 同一向量在不同的基下的坐标也不同. 但同一向量在不同基下的坐标之间可以相互转换. 例如, 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 和 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 为 n 维线性空间 V 的两组基, 基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 中的向量也可表示为基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 的线性组合:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= m_{11}\eta_1 + m_{21}\eta_2 + \cdots + m_{n1}\eta_n \\
\varepsilon_2 &= m_{12}\eta_1 + m_{22}\eta_2 + \cdots + m_{n2}\eta_n \\
&\vdots \\
\varepsilon_n &= m_{1n}\eta_1 + m_{2n}\eta_2 + \cdots + m_{nn}\eta_n
\end{aligned}$$

将上式写成矩阵形式: $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

将上式写成: $\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \mathbf{M}$, 称其中的矩阵 $\mathbf{M}$ 为由基 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 到基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的**过渡矩阵**.
现设 $\forall \alpha \in V$ 在两组基下的表示为:

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n = y_1\eta_1 + \cdots + y_n\eta_n \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{bmatrix} \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

因 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ 是基, 得坐标直接的转换关系为: $\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x}$

过渡矩阵的性质:

(a) 设 $\mathbf{M}$ 是由基I到基II的过渡矩阵, 则 $\mathbf{M}$ 是非奇异阵, 其逆阵为由基II到基I的过渡矩阵.

(b) 若 $\mathbf{M}$ 是标准正交基 I 到标准正交基 II 的过渡矩阵, 则 $\mathbf{M}$ 是正交矩阵.

求线性空间 V 中两组基之间的过渡矩阵: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 与 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 为两组基, 求从基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ 的过渡矩阵.

(a) 直接法(求解线性方程组)

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \tag{2}$$

方程组的解 $\mathbf{X}$ 即为过渡矩阵, 而且由于系数矩阵 $\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ 中这些列向量构成基, 系数矩阵列满秩, 且根据基的性质, 系数矩阵与增广矩阵的值相等, 所以方程组有唯一解.

(b) 中间基法.
取 V 的自然基, $\mathbf{e}_i(i=1,2,\ldots,n)$, 其中 $\mathbf{e}_i$ 为第i个分量为 1 的单位列向量. 则由自然基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的过渡矩阵为 $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

自然基 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的过渡矩阵 $\mathbf{B}$

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \mathbf{B}$$

则由基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 的过渡矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

而由基 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n$ 到基 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 的过渡矩阵为:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$$

判断集合是否构成线性空间

(a) 首先验证两种运算是否封闭, 接着验证 8 种运算全部成立.

(b) 若要否定一个集合是线性空间, 只需指出运算封闭性、8种运算规律中一条不成立即可.

求线性空间的基

(a) 定义法: 找到一组最简单的元素, 使得线性空间 V 中的任意元素都可用它们线性表示.

(b) 极大无关组法: 先在 V 中寻找一个非零向量, 再找一个与之线性无关的向量, 构成 V 的一个 线性无关组, 再找第三个向量与前两个向量线性无关, 依次类推, 直到线性无关的向量组达到最大.

第4章 线性空间与欧式空间

1. 线性空间概念

一般的向量组、向量(线性)空间、齐次线性方程组解向量直接的比较:

$$
\begin{tikzcd}
\text{一般的向量组} \arrow[d] & \text{向量空间} \arrow[d] & \text{齐次线性方程组解向量} \arrow[d] \\
\text{极大线性无关组} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{基} \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d] & \text{基础解系} \\
\text{向量组的秩} & \text{向量空间的维数} &
\end{tikzcd}
$$

线性空间中只有两种运算, 缺少向量的度量性质, 因此引入向量内积.

欧几里得空间: 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 若 $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 都有一个唯一确定的实数(记为(α, β))与它对应, 且具有下列性质:

(1) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$(对称性).

(2) $(\lambda\alpha, \beta) = \lambda(\alpha, \beta)$.

(3) $(\alpha + \beta, \gamma) = (\alpha, \gamma) + (\beta, \gamma)$.

(4) $(\alpha, \alpha) \geq 0$, $(\alpha, \alpha) = 0 \iff \alpha = \mathbf{0}$.

则称 (α, β) 为 α 和 β 的**内积**, 引入内积后的线性空间称为 **欧几里得空间**, 简称 **欧式空间**.

常用的向量内积定义, 设 $\alpha = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T$, $\beta = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$:

$$(\alpha, \beta) = \alpha^T \beta = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \|\alpha\| \, \|\beta\| \cos\theta$$

欧式空间的性质:

(a) 零向量与任何向量的内积等于零, 即 $(\mathbf{0}, \alpha) = 0$.

(b) 设 α, β, γ 是欧式空间的任意向量, $\forall k \in \mathbb{R}$, 根据欧式空间的定义, 有

$$(\alpha, k\beta) = (k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} l_j\beta_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_i l_j (\alpha_i, \beta_j)$$

(c) 设欧式空间 V 中的向量 $\alpha, \beta \in V$, 若 $(\alpha, \beta) = 0$, 称 α 与 β 相互**正交**或**垂直**, 记为 $\alpha \perp \beta$.

(d) Cauchy-Schwaz 不等式, $\forall \alpha, \beta \in V$ 恒有 $|(\alpha, \beta)| \leq \|\alpha\| \, \|\beta\|$

(e) 三角不等式, $\forall \alpha, \beta \in V$, 则 $\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$

内积的坐标表示, 设 V 是一个 n 维欧式空间, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 是 V 的一组基, $\forall \alpha, \beta \in V$ 有 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i$, $\beta = \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j$, 则 α, β 的内积为:

$$(\alpha, \beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \left(\varepsilon_i, \varepsilon_j \right)$$

令 $\mathbf{A} = [(\varepsilon_i, \varepsilon_j)]_{n \times n}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$, 则上式可表示为

$$(\alpha, \beta) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$$

称矩阵 $\mathbf{A}$ 为基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ 的**度量矩阵**.

欧式空间 V 的一组基, 若它们两两正交, 则称这组基为**正交基**. 且若这组基的每个向量的长度是 1, 则称 这组基为**标准正交基**. 标准正交基的度量矩阵为单位阵 $\mathbf{E}$. 对于 n 维欧式空间 V 的任意一组基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, 可通过 Gram – Schmidt **正交化过程** 化为标准正交基.

(1) $\eta_1 = \dfrac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|}$

(2) 令 $\alpha = \varepsilon_k - \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_j \eta_j$, 其中参数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k-1}$ 可利用 α 与 η_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ 之间的 正交性, 以及 η_j 之间的正交归一性, 求得: $\lambda_j = (\varepsilon_k, \eta_j)$, 最后 $\eta_k = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$

(3) 重复(2)直到 $k = n$ 为止.

设 W_1, W_2 是线性空间 V 的两个子空间, 则

$$W_1 \cap W_2 = \{\alpha | \alpha \in W_1, \alpha \in W_2\}$$

称为子空间 W_1 与 W_2 的**交**.

$$W_1 + W_2 = \{\alpha + \beta | \alpha \in W_1, \beta \in W_2\}$$

称为子空间 W_1 与 W_2 的**和**. 易证 $W_1 \cap W_2$, $W_1 + W_2$ 是 V 的**子空间**, 且成立维数公式:

$$\dim W_1 + \dim W_2 = \dim (W_1 + W_2) + \dim (W_1 \cap W_2)$$

若 $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, $\forall \eta \in W_1 + W_2$, $\eta = \alpha + \beta$, 其中 $\alpha \in W_1$, $\beta \in W_2$, 且这种分解唯一, 称 $W_1 + W_2$ 为子空间 W_1, W_2 的**直和**, 记为 $W_1 \oplus W_2$. 若 $\forall \alpha \in W_1, \beta \in W_2$ 都有 $(\alpha, \beta) = 0$, 称子空间 W_1 与 W_2 正交, 记为 $W_1 \perp W_2$.

设 V 是线性空间, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\in V$, 记

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)=\left\{\alpha\middle|\alpha=\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i,k_j\in\mathbb{R}(j=1,2,\ldots,s)\right\}$$

称 $L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$ 为由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ **张成的子空间**. 若向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 的向量之间成立

$$\alpha_i\perp\beta_j,\quad i=1,2,\ldots,s,j=1,2,\ldots,t$$

则子空间$L(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)\perp L(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_s)$, 且

$$L(\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\ldots,\beta_t)=L(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\oplus L(\beta_1,\ldots,\beta_t)$$

考察 $m \times n$ 阶矩阵 $\mathbf{A}$, $Rank(\mathbf{A}) = r \le \min\{m, n\}$, 定义

$$\begin{aligned}
&Null(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\
&Col(\mathbf{A}) = L(\mathbf{A}\text{的列向量}) = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\
&Null(\mathbf{A}^T) = \{\mathbf{y} | \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{0}\} \\
&Row(\mathbf{A}) = L(\mathbf{A}\text{的行向量}) = \{\mathbf{y} | \mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\}
\end{aligned}$$

称 $Null(\mathbf{A})$ 为 $\mathbf{A}$ 的**零空间**, $Col(\mathbf{A})$ 为 $\mathbf{A}$ 的**列空间**, $Null(\mathbf{A}^T)$ 为 $\mathbf{A}^T$ 的**零空间**, $Row(\mathbf{A})$ 为 $\mathbf{A}$ 的**行空间**, 且

$$\begin{aligned}
&\dim Null(\mathbf{A}) = n - r, \quad \dim Row(\mathbf{A}) = r, \\
&\dim Null(\mathbf{A}^T) = m - r, \quad \dim Col(\mathbf{A}) = r
\end{aligned}$$

$\forall \mathbf{y} \in Row(\mathbf{A})$,则根据定义存在 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ 使得 $\mathbf{y} = \mathbf{A}^T\mathbf{w}$,
$\forall \mathbf{x} \in Null(\mathbf{A})$, 有

$$(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{y}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

所以, $Null(\mathbf{A}) \perp Row(\mathbf{A})$, 且 $Null(\mathbf{A}) \oplus Row(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^m$. 显然, $Null(\mathbf{A})$ 和 $Row(\mathbf{A})$ 互为**正交补**.
同理, $Null\left(\mathbf{A}^T\right) \perp Col(\mathbf{A})$, 且 $Null\left(\mathbf{A}^T\right) \oplus Col(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.