上 海 交 通 大 学 试 卷（B 卷）

（ 2022 至 2023 学年 第 1 学期 ）

班级号____________________ 学号____________________ 姓名 ____________________

课程名称__________ 数学分析（I）__________ 成绩 ____________________

一 **判断题**（每题 5 分，共 20 分）（正确的简要陈述理由，错误的举出反例。）

1. 设函数$f(x)$在$x = x_0$处可导，则$f(x)$在$x = x_0$处可微。

2. 若两个收敛数列$\{a_n\}, \{b_n\}$满足$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$，则必存在$N$使得对于$\forall n > N$均有$a_n < b_n$。

3. 设函数$f(x)$在$[a, b]$上黎曼可积，则函数$|f(x)|$也在$[a, b]$上黎曼可积。

我承诺，我将严格遵守考试纪律。

题号										
得分										
批阅人(流水阅卷教师签名处)										

4. 反常积分$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$收敛，则$\int_a^{+\infty} f^2(x)\,dx$也一定收敛。

二 计算题（每题 6 分，共 24 分）

1. 在$x_0 = 0$展开$\sqrt[3]{2-\cos x}$到x^4项。

2. 计算不定积分$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$。

3. 计算定积分$\int_0^{\pi} x \sin^2 x \, dx$。

4. 计算极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$。

三（10 分）计算心脏线 $r = a(1+\cos\theta)(a>0, 0\le\theta\le 2\pi)$ 的弧长。

四（10 分）证明：$\arctan x$在$(-\infty, \infty)$上一致连续。

五（12 分）判断并证明反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{1+x^6\sin^2 x}$的敛散性。

六（12 分）设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$。证明$A = 0$。

七（12 分） 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有定义，对于区间$[a,b]$做任意分划$\Delta: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，定义$S_{\Delta}(f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|$，则可定义$V_f(a,b)\equiv sup\{S_{\Delta}(f)|\,\Delta$为区间$[\mathrm{a,b}]$的分划$\}$为函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的全变差；若$V_f(a,b)<+\infty$，称函数$f(x)$为区间$[a,b]$上的有界变差函数。证明：

（1）区间$[a,b]$上的单调函数必为$[a,b]$上的有界变差函数；

（2）若$f(x)\in D([a,b])$且$f'(x)\in R([a,b])$，则$f(x)$必为$[a,b]$上的有界变差函数；

（3）区间$[a,b]$上的有界变差函数一定可以写成$[a,b]$上两个单调函数的差。