

# khb 2025 集合与图论期中

一、判断正误，正确的请证明，错误的举出反例或说明理由

1. 集合  $A = \{x^{1965} \mid x \in \mathbb{N}\}$ ,  $B = \{x^{2027} \mid x \in \mathbb{N}\}$ , 则  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \cap B}}$

2. 集合  $A = \{2, 3, 4, 5, 24, 15, 36, 48, 50\}$ , 集合  $B = \{2, 3\}$ , 在  $A$  上定义偏序关系为整除关系, 则  $B$  的上确界为 24

3. 平面上坐标都是有理数的正三角形组成的集合是可列集

需要注意这个集合实际上是空集

4. 集合  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 关系  $R = \{(1, 2), (3, 4)\}$  不具有传递性

二、求 6 个元素的集合上含有 4 个等价类的等价关系的个数

三、证明

(1) 可列个可列集的并是可列集

(2) 若  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 则可列个  $A$  的直积的基数为  $\aleph_0$ , 即  $\overline{\overline{A \times A \times A \times \dots}} = \aleph_0$

四、设  $A, B$  非空集合,  $(B, \leq)$  是偏序集, 令  $B^A$  表示从  $A$  到  $B$  的所有映射的集合, 在  $B^A$  上的二元关系  $R$ :  $fRg$  当且仅当  $f(x) \leq g(x), \forall x \in A$

(1) 证明:  $R$  是  $B^A$  上的偏序关系

(2) 给出  $(B^A, R)$  存在最大元的充要条件, 并求出  $(B^A, R)$  最大元的一般形式

五、由 0, 1, 2, 3, 4, 5 组成  $n$  位数, 其中 1 出现的次数不超过两次, 2 只能出现奇数次, 3 只能出现偶数次, 4、5、0 出现的次数不限, 求满足条件的  $n$  位数的个数 (注意 0 不能出现在首位)

六、方程  $x_1 + x_2 + x_3 = 30$ , 其中  $0 < x_1 \leq 15, 5 \leq x_2 < 20, -6 \leq x_3 < 10$  求方程整数解的个数 (数据范围记不清了, 拿的去年的数据)

**七、在  $3 \times 7$  的正方形组成的矩形中，将正方形涂成红色或者黑色，求证：一定存在非简单子矩形（非  $1 \times k$  和  $k \times 1$ ），它的 4 个角都是同色的**

**八、求下列递推公式的通项公式**

(1)  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$  ( $n \geq 2$ )，其中  $a_0 = 0, a_1 = 1$

(2)  $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} - n + 2^n$  ( $n \geq 2$ )，其中  $a_0 = 0, a_1 = 1$ ，只需写出递推形式，不需求解