

复旦大学数学科学学院
2014~2015 学年第一学期期末考试试卷
B 卷

课程名称: 数学分析 B(I) 课程代码: **MATH120016**

开课院系: 数学科学学院 考试形式: 闭卷

姓 名: _____ 学 号: _____ 专 业: _____

题 号	1	2	3	4	5	6	总 分
得 分							

注意:

1. 除了特殊说明之外, 答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤。
2. 答题过程及结果应写在考卷上, 写在草稿纸上无效。

(以下为试卷正文)

1. 严格表述题 (每题 4 分, 共 3 题, 共 12 分)

1) 一系列闭区间 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一个闭区间套。

2) x_0 是函数 $f(x)$ 的第三类 (可去) 间断点。

3) 函数 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的上凸函数。

2. 简答题 (每题 4 分, 共 6 题, 共 24 分。可以直接写出答案, 也可以写出中间过程; 答案正确时, 得满分; 答案错误而存在正确的中间过程时, 得部分分, 否则不得分。)

1) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$, 其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ 。

2) 如果当 $x \rightarrow 0+$ 时, $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 都是 x 的高阶无穷小量, 求 α 的取值范围。

3) 求函数 $y = f(x) = \int_{-1}^x \sqrt{1-e^t} dt$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在 $y = 0$ 处的导数。

4) 设 $f(x)$ 任意次可微, 且 $f(x) > 0$, 求 $\left(\ln(f(x))\right)''$ 。

5) 求常微分方程 $(x-2)\frac{dy}{dx} + y = 2(x-2)^2$ 的通解。

6) 求不定积分 $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$, 其中 $a > b > 0$ 。

3. 判断简答题 (判断下列命题是否正确, 如果正确的, 请回答“是”, 并给予简要证明; 如果错误的, 请回答“否”, 并举反例并简要说明。) (每题 5 分, 共 3 题, 共 15 分。判断正确得 2 分, 判断正确, 并且证明或举反例正确得满分。判断不正确不得分。)

1) 设 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内可导, 并且 $\lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = \infty$, 则 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$ 。

2) 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 并且 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}$ 存在有限, 则 $f(x)$ 在 x_0 处可微。

3) 设函数 $f(x)$ 是周期为 T 的黎曼可积函数, $\int_0^T f(x)dx = 0$, 则反常积分 $\int_2^{+\infty} \frac{f(x)}{\ln x} dx$ 收敛。

4. 计算题 (每题 6 分, 共 6 题, 共 36 分)

1) 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \frac{1+x}{x} \right)$ 。

2) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{2}{\sqrt{2^2+n^2}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$ 。

3) 求定积分 $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx$ (其中 m, n 是正整数)。

4) 求反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x-1}{(1+x^2)(1+x)} dx$ 。

5) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且满足 $f(1) = 1$ 和 $\int_0^x tf(2x-t)dt = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$, 求 $\int_1^2 f(x)dx$ 。

6) 求心形线 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} (a > 0, 0 \leq t \leq \pi)$ 绕 x 轴一周所得的旋转曲面的面积。

(装订线内不要答题)

5. 证明不等式 $x^2 \geq (1+x)\ln^2(1+x)$, ($x > 0$)。 (6 分)

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上导数连续, 且 $f(0) = f(1) = 0$, 证明: $\int_0^1 f^2(x)dx \leq \frac{1}{8} \int_0^1 (f'(x))^2 dx$ 。 (6 分)