（装订线内不要答题）

复旦大学信息科学与工程学院

《线性代数》期中考试试卷

共 7 页

课程代码：COMP120004.08　　考试形式：□开卷　☑闭卷　　2022 年 11 月

（本试卷答卷时间为 100 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业 [redacted] 学号 [redacted] 姓名 [redacted] 成绩______

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
得分	12	12	12	12	12	16	10	10	96

+4=100

12

1. 若写出矩阵乘法的四种理解方式。（12 分）

设 $A_{m\times n}$, $B_{n\times k}$，记 A, B 中第 i 行第 j 列元素为 a_{ij}, b_{ij}. AB 的第 i 行第 j 列元素为 $(AB)_{ij}$.

1) $(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}$ $(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,k)$

2) $col_j(AB) = A\,col_j(B) = \sum_{l=1}^{n} b_{lj}\,col_l(A)$ $(j=1,2,\cdots,k)$

3) $row_i(AB) = row_i(A)B = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\,row_l(B)$ $(i=1,2,\cdots,m)$

4) $AB = \sum_{i,j} col_i(A)\cdot row_j(B)$ $(i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$

12

2. 讨论以下线性方程组当λ取不同值，解的情况（无解、唯一解、无穷多解），若有解请写出解集。（12 分）

$$\begin{cases}(\lambda-2)x_1+x_2+x_3=1\\ x_1+(\lambda-2)x_2+x_3=1\\ x_1+x_2+(\lambda-2)x_3=1\end{cases}$$

（以下"~"表示行变换）

增广矩阵 $\left[\begin{array}{ccc|c}\lambda-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & \lambda-2 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 1 & \lambda-2 & 1 & 1\\ \lambda-2 & 1 & 1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda & 0\\ 0 & 3-\lambda & -\lambda^2+4\lambda-3 & 3-\lambda\end{array}\right]$

① 若$\lambda=3$，则 $\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，方程组有无穷多解，解集为 $\left\{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+t_2\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\middle| t_2,t_3\in R\right\}$

② 若$\lambda\neq3$，则 $\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & \lambda-1 & 1\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 1\end{array}\right]$

1° 若$\lambda=0$，则 $\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$，方程组无解.

2° 若$\lambda\neq0$且$\lambda\neq3$，则 $\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda}\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & \frac{2}{\lambda}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda}\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\lambda}\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\lambda}\end{array}\right]$

方程组有唯一解 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{\lambda}\\ \frac{1}{\lambda}\end{bmatrix}$

12

3. 对于所有不超过 2 次的多项式构成的线性空间 P^2，

(1) 请证明 $\{1,(1+x),(1+x)^2\}$ 是 P^2 的基；（6 分）

(2) 计算基 $\{1,(1+x),(1+x)^2\}$ 到基 $\{1,\cancel{(1+x)}\,x,\cancel{(1+x)^2}\,x^2\}$ 的过渡矩阵；（4 分）

(3) 计算多项式 $2+4x+6x^2$ 在基 $\{1,(1+x),(1+x)^2\}$ 下的展开系数。（6 分）

1) 考虑 $d_1,d_2,d_3 \in R$ s.t. $d_1\cdot 1+d_2(1+x)+d_3(1+x)^2\equiv 0$

$\Rightarrow d_3x^2+(d_2+2d_3)x+(d_1+d_2+d_3)\equiv 0x^2+0x+0$

$\Rightarrow \begin{cases} d_3=0 \\ d_2+2d_3=0 \\ d_1+d_2+d_3=0 \end{cases} \Rightarrow d_1=d_2=d_3=0$

故 $1, (1+x), (1+x)^2$ 线性无关.

又对 $\forall$ $p(x)\in P^2$, $\exists\, a,b,c \in R$ s.t. $p(x)=a+bx+cx^2$.

则 $(a-b+c)\cdot 1+(b-2c)\cdot(1+x)+c\cdot(1+x)^2=a+bx+cx^2=p(x)$

$\therefore$ P^2 中任一成员均可由 $1,(1+x),(1+x)^2$ 线性表出.

$\therefore \{1,(1+x),(1+x)^2\}$ 是 P^2 的基.

2) 设基 $\{1,(1+x),(1+x)^2\}$ 到基 $\{1,x,x^2\}$ 过渡矩阵为 M.

则 $[1,x,x^2]=[1,(1+x),(1+x)^2]M$.

而 $1=1\cdot 1+(1+x)\cdot 0+(1+x)^2\cdot 0$.

$x=1\cdot(-1)+(1+x)\cdot 1+(1+x)^2\cdot 0$

$x^2=1\cdot 1+(1+x)\cdot(-2)+(1+x)^2\cdot 1$

$\therefore M=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3) 设 $2+4x+6x^2=k_1\cdot 1+k_2\cdot(1+x)+k_3\cdot(1+x)^2$

$\Rightarrow \begin{cases} k_3=6 \\ k_2+2k_3=4 \\ k_1+k_2+k_3=2 \end{cases}$ 解出：$\begin{cases} k_1=4 \\ k_2=-8 \\ k_3=6 \end{cases}$

$\therefore$ $2+4x+6x^2$ 在基 $\{1,(1+x),(1+x)^2\}$ 下展开系数为 $\begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix}$

4. 请计算三维空间空间坐标为 $(1,-1,1)$ 的点 x 到矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的零空间 $N(A)$ 的距离，要求有具体步骤。（12 分）

12

设原点O到点x的向量为 $\alpha=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha$ 在 $N(A)$ 上正交投影为 $\hat{\alpha}$. 则 $\|\alpha-\hat{\alpha}\|$ 即点x到 $N(A)$ 距离.

又 $Ax=0 \Leftrightarrow y=t_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+t_3\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ $(t_2,t_3\in R)$. ~~故~~ 且 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=0$

故 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是 $N(A)$ 的一组正交基. 记 $\beta_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $\beta_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$.

α 在 β_1 上正交投影 $q_1=\frac{\beta_1^T\alpha}{\beta_1^T\beta_1}\beta_1=\frac{-1}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\end{bmatrix}$

α 在 β_2 上正交投影 $q_2=\frac{\beta_2^T\alpha}{\beta_2^T\beta_2}\beta_2=\frac{2}{2}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$

$\therefore \hat{\alpha}=q_1+q_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，故 $\alpha-\hat{\alpha}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

即点x在 $N(A)$ 中，距离为0.

5. $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，求两个左零空间之和 $N(A^T)+N(B^T)$ 的基与维度。（12 分）

12

$A^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$A^Tx=0 \Leftrightarrow x=t\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$N(A^T)$ 基为 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\dim N(A^T)=1$

$B^T=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$B^Ty=0 \Leftrightarrow y=s\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$N(B^T)$ 基为 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，$\dim N(B^T)=1$.

$\therefore N(A^T)+N(B^T)=\mathrm{span}\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}=\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\}$，故 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 为 $N(A^T)+N(B^T)$ 的基

$\dim(N(A^T)+N(B^T))=1$.

16

6. 请证明以下结论

（1）写出三种初等行变换矩阵，并证明其存在逆，且逆与原矩阵乘积可交换 。（6 分）

（2）任何一个可逆阵均可分解为多个初等行变换矩阵的乘积 。（6 分）

（3）利用前两个结论，证明可逆阵的逆与原矩阵乘积可交换 。（4 分）

1) ① 行数乘矩阵 $E_1=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}$ $(k\neq0)$，$\exists E_1'=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&k^{-1}&&\\&&&\ddots&\\&&&&1\end{bmatrix}$ s.t. $E_1E_1'=E_1'E=I$

（k^{-1}与k在同一行）。

故E_1存在逆E_1'（E_1'也为初等行变换矩阵）

② 行倍加矩阵 $E_2=\begin{bmatrix}1&&&\\\vdots&\ddots&&\\k&\cdots&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}$，$\exists E_2'=\begin{bmatrix}1&&&\\\vdots&\ddots&&\\-k&\cdots&\ddots&\\&&&1\end{bmatrix}$ s.t. $E_2E_2'=E_2'E_2=I$.

（$-k$与k在同一行同列），

故E_2存在逆E_2'（E_2'也为初等行变换矩阵）。

③ 行置换矩阵 $E_3=\begin{bmatrix}1&&&&\\&\ddots&&&\\&&0&\cdots&1&&\\&&\vdots&&\vdots&\\&&1&\cdots&0&\\&&&&&\ddots&\\&&&&&&1\end{bmatrix}$，$\exists E_3'=E_3$，s.t. $E_3'E_3=E_3E_3'=E_3^2=I$

故E_3存在逆E_3'。（E_3'也为初等行变换矩阵）。

2) 对于任一个可逆的方阵A，可以将其经一系列初等行变换转变至最简阶梯形U

即 $U=E_kE_{k-1}\cdots E_2E_1A$（$E_1,\cdots,E_k$均为初等行变换矩阵）。

由于A可逆，知A主元满到[illegible]，故U是一个单位阵，（对角线上均为主元，等于1，其上方下方均为0），

又由1)，$E_1\sim E_k$均可逆，故$A=E_1^{-1}E_2^{-1}\cdots E_k^{-1}$，且$E_1^{-1},\cdots,E_k^{-1}$均为初等行变换矩阵，得证。

3) 对$\forall$可逆阵A，$\exists$一系列初等行变换矩阵$E_1,E_2,\cdots,E_k$ s.t. $A=E_1E_2\cdots E_k$.

则 $A^{-1}=(E_1E_2\cdots E_k)^{-1}=E_k^{-1}E_{k-1}^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}$

$\therefore AA^{-1}=(E_1E_2\cdots E_k)(E_k^{-1}E_{k-1}^{-1}\cdots E_1^{-1})=E_1E_2\cdots(E_kE_k^{-1})E_{k-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}=E_1\cdots E_{k-1}E_{k-1}^{-1}\cdots E_1^{-1}=\cdots=E_1E_1^{-1}=I$.

$A^{-1}A=(E_k^{-1}\cdots E_1^{-1})(E_1\cdots E_k)=E_k^{-1}\cdots(E_1^{-1}E_1)\cdots E_k=E_k^{-1}\cdots(E_2^{-1}E_2)\cdots E_k=\cdots=E_k^{-1}E_k=I$.

$\therefore AA^{-1}=A^{-1}A$.

7. 对于矩阵 A，请证明 $rank\left(A^T A\right)=rank\left(AA^T\right)$。（10 分）

10

引理：$N(A^TA)=N(A)$

证明：对 $\forall x\in N(A)$, $Ax=0$. 故 $A^TAx=0 \Rightarrow x\in N(A^TA)$. 故 $N(A)\subseteq N(A^TA)$.

对 $\forall x\in N(A^TA)$, $A^TAx=0 \Rightarrow x^TA^TAx=0 \Rightarrow (Ax)^TAx=0 \Rightarrow \langle Ax,Ax\rangle=0 \Rightarrow Ax=0 \Rightarrow x\in N(A)$. 故 $N(A^TA)\subseteq N(A)$.

$\therefore N(A^TA)=N(A)$ 得证.

由 $N(A^TA)=N(A)$ 知 $\dim N(A^TA)=\dim N(A)$. 而 A^TA 与 A 列数相同, 由秩-零度定理, 知 $\dim R(A^TA)=\dim R(A)$

又 $rank(A^TA)=\dim R(A^TA)$, $rank(A)=\dim R(A)$. 故 $rank(A^TA)=rank(A)$. ---①

由 $N(A^TA)=N(A)$ 知 $N(A^T)=N((A^T)^TA^T)=N(AA^T) \Rightarrow \dim N(AA^T)=\dim N(A^T)$.

而 AA^T 与 A^T 列数相同, 由秩-零度定理 知 $\dim R(AA^T)=\dim R(A^T)$

又 $rank(AA^T)=\dim R(AA^T)$. $rank(A)=rank(A^T)=\dim R(A^T)$. 故 $rank(AA^T)=rank(A)$. ---②

由①.②知 $rank(A^TA)=rank(AA^T)$.

8. 请证明线性映射 $T:V\mapsto W$ 若存在逆映射 T^{-1}，则逆映射 T^{-1} 也为线性映射。（10 分）

10

由 T 存在逆映射, 知 T 为单射.

T^{-1}: range$T\to V$. 对 $\forall \alpha,\beta\in$ range$T$, $k,l\in F$.

由 T 为单射, 知 $\exists! u$, $\exists! v$ s.t. $T(u)=\alpha$, $T(v)=\beta$. 那么 $u=T^{-1}(\alpha)$. $v=T^{-1}(\beta)$.

$\therefore T^{-1}(k\alpha+l\beta)=T^{-1}(kT(u)+lT(v))=T^{-1}(T(ku+lv))=ku+lv=kT^{-1}(\alpha)+lT^{-1}(\beta)$.

$\therefore T^{-1}$ 也为线性映射, 得证.