复旦大学力学与工程科学系

2009～2010学年第二学期期末考试试卷

□A卷　　　□B卷

课程名称：数学分析（II）　　　课程代码：MATH120009.09

开课院系：力学与工程科学系　　　考试形式：开卷/闭卷/课程论文

姓名：________　学号：________　专业：________

题 号	1/(1)	1/(2)	1/(3)	2/(1)	2/(2)	2/(3)	3/(1)	3/(2)	3/(3)	4/(1)
得 分										
题 号	4/(2)	5/(1)	5/(2)	5/(3)	5/(4)	6/(1)	6/(2)	6/(3)		总 分
得 分										

Problem 1 (多元函数极限的基本概念) *现有 $\mathbb{R}^2$ 上的函数：*

$$f(x,y) \triangleq \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\in\mathbb{R}^2 \\ 0 & (x,y)=0\in\mathbb{R}^2 \end{cases}$$

1. (10%) *研究 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的所有一阶偏导数*
2. (05%) *研究 $f(x,y)$ 的所有一阶偏导数在 $(0,0)$ 点的连续性*
3. (05%) *研究 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的可微性*

上述所有研究均需给出必要的过程。

Problem 2 ($Fourier$ 级数基本概念) *现有有限区间上定义的分段函数：*

$$f(x) \triangleq \begin{cases} -1 & x\in[0,1) \\ x^2 & x\in[1,2] \end{cases}$$

1. (10%) *按点收敛的概念，将 $f(x)$, $x\in[0,2]$ 表示成 $Fourier$ 级数的形式。要求写出具体的表达形式（相关系数仅需给出具体计算式）*
2. (05%) *示意性绘出上述 $Fourier$ 级数对应的和函数（极限函数）的图像*
3. (05%) *如果希望，将 $f(x)$, $x\in[0,2]$ 表示成余弦形式的 $Fourier$ 级数，应作怎样的延拓（写出函数表达式或图示说明），并写出此级数的具体表达形式（相关系数仅需给出具体计算式）*

Problem 3 (隐映照定理的基本应用) *现有方程组：*

$$\begin{cases} x \cdot e^{u+v} + 2uv = 1 \\ y \cdot e^{u-v} - \frac{u}{1+v} = 2x \end{cases}$$

易见 $(x, y, u, v) = (1, 2, 0, 0)$ *满足此方程组*

1. (10%) *基于隐映照定理说明，在* $(x, y) = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$ *的某领域可确定映照* $u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$ *（需逐项检验条件）*

2. (05%) *获得所确定映照* $u = u(x, y)$，$v = v(x, y)$ *在* $(1, 2)$ *点的 Jacobian 矩阵*

3. (05%) *获得* $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y)$ *的计算式*

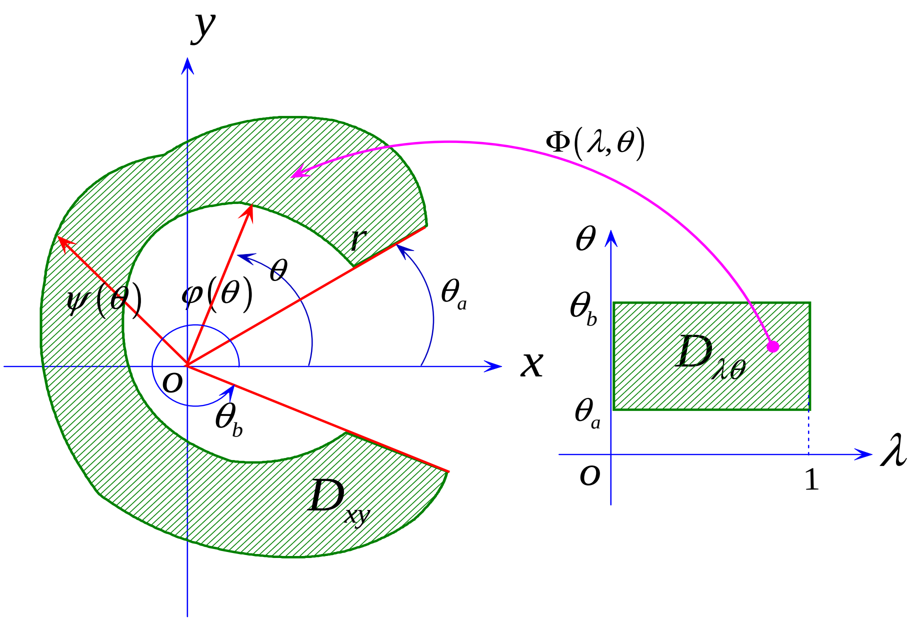
Problem 4 (正项级数判别法的核心思想－“比较观点”) *设有正项级数* $\sum a_n$ *和* $\sum b_n$，*则有如下结论：如有*

$$a_n = b_n + o(b_n)$$

则有： $\sum a_n$ *同* $\sum b_n$ *具有相同的敛散性。*

1. (10%) *证明上述结论*

2. (10%) *基于上述结论，研究* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ *的敛散性*



Problem 5 (微分同胚应用－变换“不规则区域”至“规则区域”) *如上图所示，对于平面上不规则区域* $\mathscr{D}_{xy}$，*可考虑如下映照*

$$\Phi(\lambda, \theta) : \mathscr{D}_{\lambda\theta} \ni \begin{bmatrix} \lambda \\ \theta \end{bmatrix} \mapsto \Phi(\lambda, \theta) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} (\lambda, \theta) \triangleq \begin{bmatrix} [\phi(\theta) + \lambda(\psi(\theta) - \phi(\theta))] \cdot \cos\theta \\ [\phi(\theta) + \lambda(\psi(\theta) - \phi(\theta))] \cdot \sin\theta \end{bmatrix}$$

此处

$$\mathscr{D}_{\lambda\theta} \triangleq \{\lambda \in (0,1),\, \theta \in (\theta_a, \theta_b)\}$$

1. (10%) 利用微分同胚的充分性定理，证明上述$\Phi(\lambda,\theta)$实现$\mathscr{D}_{\lambda\theta}$ 同$\mathscr{D}_{xy} = \Phi(\mathscr{D}_{\lambda\theta})$间的微分同胚，需明确获得$D\Phi(\lambda,\theta)$

2. (10%) 基于向量值映照的可微性定义，说明$D\Phi(\lambda,\theta) =: [\mathbf{g}_\lambda, \mathbf{g}_\theta](\lambda,\theta)$，亦即Jacobian矩阵第一、二列（向量）的几何意义，可以图示说明

3. (10%) 如有感兴趣的函数$f(x,y)$建立在$\mathscr{D}_{xy}$上，且满足偏微分方程：
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) + \cdots = 0$$
则基于微分同胚，可将定义在$\mathscr{D}_{xy}$上的$f(x,y)$转化至定义在$\mathscr{D}_{\lambda\theta}$上的
$$\hat{f}(\lambda,\theta) \triangleq f(x(\lambda,\theta), y(\lambda,\theta))$$
具体说明如何获得$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$经由$\hat{f}(\lambda,\theta)$ 及其偏导数的表达式

4. (10%) 给出$\mathscr{D}_{xy}$上面积分
$$\int_{\mathscr{D}_{xy}} f(x,y)\, d\sigma$$
的计算表达式，亦即参数域上被积函数的表达式

Problem 6 (Stokes公式基本理论及其应用)

1. (10%) 证明一般形式的Stokes公式

2. (10%) 基于Stokes公式计算
$$\oint_{\mathscr{C}} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \equiv \oint_{\mathscr{C}} ((y-z)\mathbf{i} + (z-x)\mathbf{j} + (x-y)\mathbf{k}) \cdot \tau\, dl$$
此处$\mathscr{C}$为柱面$x^2+y^2=a^2$同平面$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1\,(a,h>0)$的截线，且若从$x$轴看去，积分沿此截线依顺时针方向进行。

3. (10%) 按一般曲线积分的理论，计算上述积分，仅需要给出曲线的向量值映照表示以及参数域上被积函数的计算式。

注：尽量详细地给出推理和运算步骤，给分上侧重正确的思想和方法

注：本卷各题计分主要考虑为批阅方便，试题设计力求体现对微积分基本思想及方法的理解与应用