（装订线内不要答题）

复旦大学技术科学实验班2015级

2015-2016 第一学期《线性代数》期中考试试卷

A卷　共 8 页　　　　2015 年 11 月 19 日

课程代码：COMP120004.01-09　　　　考试形式：闭卷

（本试卷答卷时间为 120 分钟，答案必须写在试卷上，做在草稿纸上无效）

专业__________学号__________姓名__________成绩__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										

一、计算n阶行列式

（1）$\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ x_3^{n-1} & x_3^{n-2} & \cdots & x_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 1 \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}$.（5 分）

解： 将行列式的第一列逐列交换至最后一列，再将此时的第一列交换至倒数第二列，⋯，再将此时的第一列交换至倒数第（n-1）列。行列式变为一个范德蒙奇行列式。

共交换了$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$ 次。

$$\therefore \text{原式}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

（2）$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}$.（7 分）

解法一：将第二行的-1 倍加至第一行，第三行的-1 倍加至第二行，…，第 n 行的−1 倍加至第 n−1 行。行列式的值不变。可得：

原式$=|A_n|=\begin{vmatrix} x-b & a-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-b & a-x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-b & a-x \\ b & b & b & \cdots & b & x \end{vmatrix}$

将上式按第一列展开得：

$$|A_n|=(x-b)|A_{n-1}|+(-1)^{n+1}b\cdot(a-x)^{n-1}=(x-b)|A_{n-1}|+b\cdot(x-a)^{n-1}$$

同理可得：$|A_n|=(x-b)|A_{n-1}|+b\cdot(x-a)^{n-1}$

$$(x-b)|A_{n-1}|=(x-b)^2|A_{n-2}|+b(x-b)(x-a)^{n-2}$$

$$(x-b)^2|A_{n-2}|=(x-b)^3|A_{n-3}|+b(x-b)^2(x-a)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$(x-b)^{n-2}|A_2|=(x-b)^{n-2}(x^2-ab)$$

其中$|A_2|=\begin{vmatrix} x-b & a-x \\ b & x \end{vmatrix}=x^2-ab$

累加得：

$$|A_n|=(x-b)^{n-2}(x^2-ab)+b(x-a)^{n-1}+b(x-b)(x-a)^{n-2}+\cdots+(x-b)^{n-3}(x-a)^2$$

若$x=a$　　则有：$|A_n|=(x-b)^{n-2}(x^2-ab)=a(a-b)^{n-1}$

若$x\neq a$且$a\neq b$时，可得：

$$|A_n|=(x-b)^{n-2}(x^2-ab)+b(x-a)^{n-1}\frac{1-\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-2}}{1-\frac{x-b}{x-a}}=\frac{b(x-a)^n-a(x-b)^n}{b-a}$$

若$x\neq a$且$a=b$时，可得：

$$|A_n|=(x-a)^{n-1}(x+a)+(n-2)a(x-a)^{n-1}=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$$

当$a\neq b$时，若$x=a$，有$\dfrac{b(x-a)^n-a(x-b)^n}{b-a}=a(a-b)^{n-1}$

当$a=b$时，若$x=a$，有$(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]=a(a-b)^{n-1}=0$

$\therefore x=a$的情况可以合并入其他两种情况。

综上，若$a\neq b$，则$|A|=\dfrac{b(x-a)^n-a(x-b)^n}{b-a}$；

若$a=b$，则$|A|=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a]$.

解法二：

当$a\neq b$时，记矩阵为A，记β为n维全1列向量，记$f(t)=\det(A+t\beta\beta^T)$.

由行列式具有分列相加性，按列拆分，其中A_{ij}为a_{ij}的代数余子式。

$$f(t)=\begin{vmatrix} x+t & a+t & a+t & \cdots & a+t \\ b+t & x+t & a+t & \cdots & a+t \\ b+t & b+t & x+t & \cdots & a+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b+t & b+t & b+t & \cdots & x+t \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} x & a+t & a+t & \cdots & a+t \\ b & x+t & a+t & \cdots & a+t \\ b & b+t & x+t & \cdots & a+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b+t & b+t & \cdots & x+t \end{vmatrix}+t\begin{vmatrix} 1 & a+t & a+t & \cdots & a+t \\ 1 & x+t & a+t & \cdots & a+t \\ 1 & b+t & x+t & \cdots & a+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b+t & b+t & \cdots & x+t \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} x & a+t & a+t & \cdots & a+t \\ b & x+t & a+t & \cdots & a+t \\ b & b+t & x+t & \cdots & a+t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b+t & b+t & \cdots & x+t \end{vmatrix}+t\bullet\sum_{i=1}^n A_{i1}$$

$$=\cdots=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}+t\bullet\sum_{i,j=1}^n A_{ij}=\det(A)+t\sum_{i,j=1}^n A_{ij}$$

$$f(-a)=(x-a)^n=\det(A)-a\sum A_{ij}$$

$$f(-b)=(x-b)^n=\det(A)-b\sum A_{ij}$$

解得 $\det(A)=\dfrac{b(x-a)^n-a(x-b)^n}{b-a}$.

当$a=b$时，

原式=

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}=\left[x+\left(n-1\right)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=\left[x+\left(n-1\right)a\right]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}=\left[x+\left(n-1\right)a\right]\left(x-a\right)^{n-1}$$

二、Cramer 法则解下列线性方程组.（10 分）

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+4x_3+8x_4=17 \\ x_1+3x_2+9x_3+27x_4=55 \\ x_1+4x_2+16x_3+64x_4=129 \end{cases}$$

解：系数行列式为$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$，为范德蒙奇行列式。

$$\therefore |A|=(2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3)=12\neq 0$$

$$|A_1|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 2 & 4 & 8 \\ 55 & 3 & 9 & 27 \\ 129 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} \xRightarrow{c_1-2c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=|A|$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 17 & 4 & 8 \\ 1 & 55 & 9 & 27 \\ 1 & 129 & 16 & 64 \end{vmatrix} \xRightarrow{c_2-2c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 16 & 64 \end{vmatrix}=0$$

$$|A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 17 & 8 \\ 1 & 3 & 55 & 27 \\ 1 & 4 & 129 & 64 \end{vmatrix} \xRightarrow{c_3-2c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 27 \\ 1 & 4 & 1 & 64 \end{vmatrix}=0$$

$$|A_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 17 \\ 1 & 3 & 9 & 55 \\ 1 & 4 & 16 & 129 \end{vmatrix} \xRightarrow{c_4-c_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 54 \\ 1 & 4 & 16 & 128 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}=2|A|=24$$

∴由 Gramer 定理可得：

$x_1=\dfrac{|A_1|}{|A|}=1$；　$x_2=\dfrac{|A_2|}{|A|}=0$；　$x_3=\dfrac{|A_3|}{|A|}=0$；　$x_4=\dfrac{|A_4|}{|A|}=2$。

（装订线内不要答题）

三、求下列矩阵的逆矩阵.（10 分）

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&2&1\\1&1&1&2&2\\1&1&1&1&1\\2&2&1&1&1\\1&2&1&1&1\end{bmatrix}$$

解法一：$[A\,\vdots\,E]=\begin{bmatrix}1&1&1&2&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&2&2&0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0&1&0&0\\2&2&1&1&1&0&0&0&1&0\\1&2&1&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xRightarrow{R_2-R_1,R_4-R_5R_1-R_3,R_5-R_3}$

$$\begin{bmatrix}1&1&1&2&1&1&0&0&0&0\\1&1&1&2&2&0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1&0&0&1&0&0\\2&2&1&1&1&0&0&0&1&0\\1&2&1&1&1&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\xRightarrow{\text{交换}R_1\text{与}R_4\text{；交换}R_2\text{与}R_5}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&1&-1\\0&1&0&0&0&0&0&-1&0&1\\0&0&1&0&0&0&-1&3&-1&0\\0&0&0&1&0&1&0&-1&0&0\\0&0&0&0&1&-1&1&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&1&-1\\0&0&-1&0&1\\0&-1&3&-1&0\\1&0&-1&0&0\\-1&1&0&0&0\end{bmatrix}$$

解法二：记 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{pmatrix}$。

观察得到

$\alpha_4-\alpha_5=e_1$

$\alpha_5-\alpha_3=e_2$

$3\alpha_3-\alpha_2-\alpha_4=e_3$

$\alpha_1-\alpha_3=e_4$

$\alpha_2-\alpha_1=e_5$

（接第三题解法二）$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5\end{pmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5\end{pmatrix}$

即 $A\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=I_5$，得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$。

（装订线内不要答题）

四、求向量组的极大无关组.（8 分）

$\alpha_1=(1,2,3,1,5)^T$;
$\alpha_2=(2,-3,1,-3,4)^T$;
$\alpha_3=(2,1,3,1,5)^T$;
$\alpha_4=(1,3,2,4,1)^T$;

解：将四个向量并排写为

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&-3&1&3\\3&1&3&2\\1&-3&1&4\\5&4&5&1\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{将第一行的}(-a_{i1})\text{倍加至第}i\text{ 行}}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-7&-3&1\\0&-5&-3&-1\\0&-5&-1&3\\0&-6&-5&-4\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{R_5-R_2,R_4-R_3,R_3-R_2}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&-7&-3&1\\0&2&0&-2\\0&0&2&4\\0&1&-2&-5\end{bmatrix}\xRightarrow{R_2+3R_3+R_5,R_3-2R_5}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&0&-5&-10\\0&0&4&8\\0&0&2&4\\0&1&-2&-5\end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{交换}R_2\text{与}R_5\text{，}R_3/4\text{ 并乘以相应倍数加至}R_4R_5}\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&1&-2&-5\\0&0&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore\alpha_1$，α_2，α_3为极大无关组。其他的任意三个向量组合都是极大无关组。

五、线性方程组$\begin{cases} x_1+5x_3=1 \\ -x_1+4x_2+(\lambda-2)x_3=-1 \\ \lambda x_1-4\lambda x_2=\lambda^2-4\lambda+6 \end{cases}$，讨论$\lambda$的取值对解的影响。（10 分）

解：增广矩阵$\bar{A}$=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda & -4\lambda & 0 & \lambda^2-4\lambda+6 \end{bmatrix} \xRightarrow{R_3+\lambda R_2,\ R_2+R_1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & \lambda+3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-2) & (\lambda-2)(\lambda-3) \end{bmatrix}$$

由以上可知，若$\lambda \neq 2$ 且 $\lambda \neq 0$，则$r_{\bar{A}} = r_A = 3$，方程有唯一解。

若$\lambda = 0$，$r_{\bar{A}} = 3$，$r_A = 2$，$r_{\bar{A}} > r_A$,方程无解。

若$\lambda = 2$，$r_{\bar{A}} = r_A = 2 < 3$,方程有无穷多解。

（装订线内不要答题）

六、设 A,B 是 n 阶实矩阵，证明 $|AB|=|A|\cdot|B|$.（10 分）

证法一：令 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$; $B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

构造分块矩阵 $X=\begin{bmatrix} A & 0 \\ -I & B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$

由拉普拉斯定理可知：$det(X)=|A||B|$

对行列式$|X|$做如下变换，将第i列的b_{ij}倍加至第$n+j$列，$i=1,2\cdots,n;j=1,2\cdots,n$。

经过上述变换后可得，行列式$|X|=\begin{vmatrix} A & C \\ -I & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nn} \\ -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

其中矩阵 C 中的每一项有$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ik}$. $i=1,2\cdots,n;j=1,2\cdots,n$

即$C=AB$.

∴再由拉普拉斯定理可知，$det(X)=|AB|$

综上，$|AB|=|A||B|$ 。

得证。

证法二：构造分块矩阵 $X=\begin{bmatrix} B & -I \\ 0 & A \end{bmatrix}$，由拉普拉斯定理，$\det(X)=\det(A)\det(B)$。

将 X 的第二列右乘 B 加至第一列，再次应用拉普拉斯定理得到

$$\det(X)=\det\begin{bmatrix} 0 & -I \\ AB & A \end{bmatrix}=\det(AB),$$

于是命题得证。

七、设 A,B 是 n 阶实矩阵，证明 $(AB)^* = B^*A^*$.（10 分）

证法一：若B为初等矩阵，记$C = AB$。

若$B = E(i,j)$，由简单的初等变换可知，若交换n阶矩阵X的第i列(行)与第j列(行)得到的矩阵为Y，则交换方阵$(-X^*)$的第i行(列)与第j行(列)得到的矩阵为Y^*。

$\therefore C^* = B^{-1}(-A^*)$，而$B^* = -B^{-1}$, 从而有$(AB)^* = B^*A^*$.

若$B = E(i(k))(k \neq 0)$，由简单的初等变换可知，设用数$k(k \neq 0)$乘以n阶矩阵X的第i列(行)得到的矩阵为Y，则用数k^{-1}乘以方阵kX^*。的第i行(列)得到的矩阵为Y^*.

$\therefore C^* = B^{-1}(kA^*)$, 而$B^* = kB^{-1}$, 从而有$(AB)^* = B^*A^*$。

若$B = E(i,j(k))$，由简单的初等变换可知，若将n阶矩阵X的第j列(行)乘以数k加到第$i(i \neq j)$列(行)得到的矩阵为Y，则将X^*的第i行(列)乘以数$(-k)$加到第j行(列)得到的矩阵为Y^*.

$\therefore C^* = B^{-1}A^*$，而$B^* = B^{-1}$，从而有$(AB)^* = B^*A^*$。

同理可证$(BA)^* = A^*B^*$.

若B不为初等矩阵，

若$r_B = n$, 则存在有限个初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$使$B = P_1, P_2, \cdots, P_s$，反复利用上面$B$为初等矩阵的证明即可证明等式。

若$r_B < n-1$，则$r_{AB} \leq r_B < n-1$，从而$B^* = 0$，$(AB)^* = 0$，等式显然成立。

若$r_B = n-1$，若$r_A \neq n-1$时，则可以由上面的证明类似得证。所以仅需证明$r_A = n-1$时的情况，则有可逆矩阵D, F, G, H使得

$$A = D\begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix}F, B = G\begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix}H.$$

于是

（装订线内不要答题）

$$AB = D\begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix} H$$

其中$P = FG = (P_{ij})_{n\times n}$为可逆矩阵。

由上面的证明可得

$$B^* = H^* \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix}^* G^* = H^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & 1 \end{bmatrix} G^*$$

同理$A^* = F^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & 1 \end{bmatrix} D^*$

则$B^* A^* H^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & 1 \end{bmatrix} G^* F^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & 1 \end{bmatrix} D^* = H^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & 1 \end{bmatrix} P^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & 1 \end{bmatrix} D^*.$

设P_{ij}为P的行列式中元素p_{ij}的代数余子式，易算得

$$B^* A^* = H^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & P_m \end{bmatrix} D^*$$

令$P = \begin{bmatrix} P_{n-1} & \alpha \\ \beta^T & P_m \end{bmatrix}$，$\alpha$，$\beta$为$n-1$维列向量，由上面的结果可得

$$(AB)^* = H^* \left[\begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix} P \begin{bmatrix} E_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix}\right]^* D^* = H^* \begin{bmatrix} P_{n-1} & O \\ O & 0 \end{bmatrix}^* D^* = H^* \begin{bmatrix} O & O \\ O & P_m \end{bmatrix} D^*$$

由此可得：$(AB)^* = B^* A^*$

综上，得证。

证法二：当A, B均可逆时，对等式$(AB)(AB)^* = \det(AB)\cdot I$同时左乘$B^* A^*$并约去$\det(AB)$可得。

不然，存在θ_0，使得当$\theta_1, \theta_2 < \theta_0$时$A+\theta_1 I, B+\theta_2 I$均可逆。

$\left((A+\theta_1 I)(B+\theta_2 I)\right)^* = (B+\theta_2 I)^*(A+\theta_1 I)^*$，等式两边令$\theta_1, \theta_2 \to 0$，由连续性得到

$(AB)^* = B^* A^*$。

（装订线内不要答题）

八、是否存在n阶（$n \geq 3$）矩阵A，A的伴随矩阵A^*的秩是$n-1$?（10 分）

解：①若$r_A = n$，则A可逆，有$A^* = |A|A^{-1}$

$\therefore r_{A^*} = r_{A^{-1}} = r_A = n$

②若$r_A = n-1$，则有$|A| = 0$，$\therefore AA^* = |A|E = 0$

考虑齐次线性方程组$Ax = 0$, 此方程组的基础解系包含$n - r_A = 1$个线性无关的解向量。

又$\because A^*$的每一列都是$Ax = 0$的解。

$\therefore r_{A^*} \leq 1$

$\because r_A = n-1$

$\therefore A$至少有一个$n-1$阶子式不为零，即A^*中至少有一个元素不为零

$\therefore r_{A^*} > 0$

$\therefore r_{A^*} = 1$

③若$r_A < n-1$，则A中所有$n-1$阶子式均为 0，即A^*中所有元素均为 0

$\therefore r_{A^*} = 0$

综上，A的伴随矩阵A^*的秩不可能是$n-1$。

九、设 A 是 n 阶实矩阵.

1、证明 $r(A)=r(A^TA)$（10 分）

2、若 $A^TA=I$，证明 $r(I-A)=r\left((I-A)^2\right)$（10 分）

解：（1）证明：$A^TAx=0$ 和 $Ax=0$ 同解即可。证明如下，若 $Ax=0$，左乘 A^T，得到 $A^TAx=0$，

所以 $Ax=0$ 的解是 $A^TAx=0$ 的解。现设 $A^TAx=0$，左乘 x^T 得到

$x^TA^TAx=(Ax)^TAx=\|Ax\|=0$，从而 $Ax=0$，方程 $A^TAx=0$ 的解也是 $Ax=0$

的解，得证。

（2）证明：$r\left((I-A)^2\right)=r\left((AA^T-A)(I-A)\right)=r\left(A(A^T-I)(A-I)\right)$

注意到 $r(A)=r(A^TA)=r(I)=n$。所以 A 是 n 阶可逆矩阵，所以

$r\left(A(A^T-I)(A-I)\right)=r\left((A^T-I)(A-I)\right)$ (课本定理 2.6 推论 2)

又 $\because (A-I)^T=(A^T-I)$

$\therefore r\left((I-A)^2\right)=r\left((A^T-I)(A-I)\right)=r(I-A)$

得证。