（装 订 线 内 不 要 答 题）

专业：__________ 学号：__________ 姓名：__________ 成绩：__________

题号	一	二	三	四	五	六	总分
得分							

一、严格表述题（每题 3 分，共 3 题，共 9 分）

1. 写出 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 上的点集 S 有界的定义。

解： $\exists M > 0$，对于 $\forall \boldsymbol{x} \in S$，满足

$$|\boldsymbol{x}|_{\mathbb{R}^n} < M$$

2. 给出 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{x}_0$ 连续的三种等价性叙述（Cauchy 叙述、Heine 叙述、Cauchy 收敛原理）。

解： Cauchy 叙述：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_\varepsilon > 0$，使得当 $0 < |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta_\varepsilon$ 时，都有

$$|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$$

Heine 叙述：对 $\forall \{\boldsymbol{x}_n\} \subset D \backslash \{\boldsymbol{x}_0\}$，且满足 $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}_0\ (n \to \infty)$，都有

$$f(\boldsymbol{x}_n) \to f(\boldsymbol{x}_0) \quad (n \to \infty)$$

Cauchy 收敛原理：对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta_\varepsilon > 0$，使得当 $\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'' \in \overset{\circ}{B}_{\delta_\varepsilon}(\boldsymbol{x}_0)$ 时，都有

$$|f(\boldsymbol{x}') - f(\boldsymbol{x}'')| < \varepsilon$$

3. 给出 n 元函数 $f(\boldsymbol{x})$ 极值和极值点的定义。

解： 对定义域中的点 $\boldsymbol{x}_0$，如果 $\exists \delta > 0$，对于 $\forall \boldsymbol{x} \in \overset{\circ}{B}_{\delta}(\boldsymbol{x}_0)$，满足

$$f(\boldsymbol{x}) \leqslant (\geqslant) f(\boldsymbol{x}_0)$$

则 $\boldsymbol{x}_0$ 称为函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的极小（极大）值点，相应地 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 称为极小（极大）值。

二、判断简答题（判断下列命题是否正确，如果是正确的，请回答“是”，并给予简要证明；如果是错误的，请回答“否”，并举反例。答“是或否”2 分，简要证明或举反例 3 分）（每题 5 分，共 3 题，共 15 分）

1. 平面上任意有界区域上的连续函数都有界。

解： 否。反例：函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$，$\forall 0<x^2+y^2\leqslant 1$，$f(x,y)$ 在 $\{(x,y)|0<x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上连续但无界。

2. 如果二元函数 $f(x,y)$ 在某点可微，则该函数的两个偏导数在该点都是连续的。

解： 否。反例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在原点可微，但其偏导函数 $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$ 在原点都不连续。

3. 有界闭集上的连续函数必然一致连续。

解： 是。证明略。

三、计算简答题（每题 4 分，共 6 题，共 24 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+\mathrm{e}^{y^2})}{x^2+y^2}$，如不存在需说明理由。

解： 考虑

$$\begin{aligned}\frac{\ln(x^2+\mathrm{e}^{y^2})}{x^2+y^2}&=\frac{\ln(x^2+1+y^2+o(y^2))}{x^2+y^2}=\frac{x^2+y^2+o(y^2)+o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\\&=1+\frac{o(y^2)}{x^2+y^2}+\frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1+\frac{o(y^2)}{y^2}\frac{y^2}{x^2+y^2}+\frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\end{aligned}$$

由于 $\dfrac{o(y^2)}{y^2}$ 是无穷小量，$\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ 是有界量，因此可有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+\mathrm{e}^{y^2})}{x^2+y^2}=1$$

（装 订 线 内 不 要 答 题）

2. 研究函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性。

解： 首先计算偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

考虑

$$\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-f'_x(0,0)\Delta x-f'_y(0,0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{\Delta x^2\Delta y}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

上式当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时极限不存在，因此函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不可微。

3. 设有函数 $f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$。

解： 根据偏导数定义，可有

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

由此可有函数 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$，即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

即有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x}=1$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}=-1$$

4. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $M(1,-2,1)$ 的切线方程。

解： 以 x 为参数，则方程可确定隐函数 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$。对方程组求 x 的导数有

$$\begin{cases} 2x+2yy'(x)+2zz'(x)=0 \\ 1+y'(x)+z'(x)=0 \end{cases}$$

将 $M(1,-2,1)$ 代入，可解得 $y'(1)=0,\ z'(1)=-1$。因此，该点处的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,0,-1)$，故切线方程可以用参数方程表示为 $\begin{cases} x(t)=1+t \\ y(t)=-2 \\ z(t)=1-t \end{cases}$，或使用一般方程表示为 $\begin{cases} x+z=2 \\ y=-2 \end{cases}$。

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 的平行于平面 $x+4y+6z=0$ 的各切平面。

解： 原曲面可以表示为 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21=0$，则其法向量为

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{\nabla}F(x,y,z)=2x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+6z\boldsymbol{k}$$

平面 $x+4y+6z=0$ 的法向量为 $(1,4,6)$，故切点需满足

$$\frac{2x}{1}=\frac{4y}{4}=\frac{6z}{6}$$

结合 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 可得切点坐标分别为 $(\pm1,\pm2,\pm2)$，因此切平面为

$$\pm2(x\mp1)\pm8(y\mp2)\pm12(z\mp2)=0$$

即

$$x+4y+6z\pm21=0$$

6. 求函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 在 $(0,0)$ 点带 Peano 余项的 Taylor 展开式至 6 阶。

解： 根据

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{k=1}^{p}\binom{\alpha}{k}x^k+o(x^p)$$

可有

$$\begin{aligned}\sqrt{1-x^2-y^2}&=1+\frac{1}{2}(-x^2-y^2)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-x^2-y^2)^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-x^2-y^2)^3\\&\quad+o\left((x^2+y^2)^3\right)\\&=1-\frac{1}{2}(x^2+y^2)-\frac{1}{8}(x^2+y^2)^2-\frac{1}{16}(x^2+y^2)^3+o\left((x^2+y^2)^3\right)\end{aligned}$$

（装 订 线 内 不 要 答 题）

四、计算证明题（每题 6 分，共 6 题，共 36 分）

1. 如果函数 $u=u(x,t)$ 满足热传导方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，证明：函数

$$v(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u\left(\frac{x}{a^2t},-\frac{1}{a^4t}\right)\quad (t>0)$$

也满足该方程。

解： 直接计算 $v(x,t)$ 的偏导数：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t}&=-\frac{1}{2at^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u+\frac{1}{a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\frac{x^2}{4a^2t^2}u+\frac{1}{a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left[u_1\left(-\frac{x}{a^2t^2}\right)+u_2\left(\frac{1}{a^4t}\right)\right]\\
&=-\frac{1}{2t}v+\frac{x^2}{4a^2t^2}v-\frac{x}{a^3t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u_1+\frac{1}{a^5t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u_2\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{1}{a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right)u+\frac{1}{a\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(u_1\frac{1}{a^2t}\right)=-\frac{x}{2a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u+\frac{1}{a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u_1\\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}&=-\frac{1}{2a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u-\frac{x}{2a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right)u-\frac{x}{2a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(u_1\frac{1}{a^2t}\right)+\frac{1}{a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(-\frac{x}{2a^2t}\right)u_1\\
&\quad+\frac{1}{a^3t^{\frac{3}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(u_{11}\frac{1}{a^2t}\right)\\
&=-\frac{1}{2a^2t}v+\frac{x^2}{4a^4t^2}v-\frac{x}{a^5t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u_1+\frac{1}{a^5t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}u_{11}
\end{aligned}$$

因此，有 $\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\dfrac{1}{a^5t^{\frac{5}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\left(u_2-a^2u_{11}\right)$。由于 $u=u(x,t)$ 满足热传导方程，即有 $u_2=a^2u_{11}$，因此有 $\dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0$，即 $v(x,t)$ 也满足热传导方程。

2. 求由方程 $(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2=3$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值（需计算相应的 Hesse 矩阵）。

解： 对该方程两端分别求 x 和 y 的偏导数，有

$$\begin{cases}2(x+y)+2(y+z)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2(z+x)\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+1\right)=0\\ 2(x+y)+2(y+z)\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}+1\right)+2(z+x)\dfrac{\partial z}{\partial y}=0\end{cases}$$

极值点需满足 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，将其代入上面方程组，可得 $\begin{cases}2x+y+z=0\\ x+2y+z=0\end{cases}$，再结合原方程可解得极值点坐标为 $\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$，对应的 $z=\mp\dfrac{3}{2}$。再对上面方程组分别求 x 和 y 的偏导数，可得

$$\begin{cases}2+2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2(y+z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+1\right)^2+2(z+x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0\\ 2+2\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+2(y+z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+2\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}+1\right)+2(z+x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0\\ 2+2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}+1\right)^2+2(y+z)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2(z+x)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\end{cases}$$

将极值点坐标以及 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 代入可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\pm 1$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\pm\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\pm 1$。因此，$\left(\pm\dfrac{1}{2},\pm\dfrac{1}{2}\right)$ 对应的 Hesse 矩阵分别为

$$Hz\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\text{正定},\quad Hz\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}\text{负定}$$

因此，极小值点为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，极小值 $z\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$；极大值点为 $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$，极大值 $z\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$。

3. 设 $x=x(y,z)$, $y=y(x,z)$, $z=z(x,y)$ 为由方程 $F(x,y,z)=0$ 定义的函数。证明：

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

解： 对于函数 $x=x(y,z)$，根据隐函数定理，可有

$$\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_x}$$

同理，对于函数 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$ 有

$$\frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{F'_z}{F'_y},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}$$

所以有

$$\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)=-1$$

4. 设有旋转面 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$，其中函数 $f(u)$ 为可微函数，且 $f'(u)\neq 0$，证明：该旋转面的法线必然与旋转轴（即 z 轴）相交。

解： 该旋转面的法向量为

$$\boldsymbol{n}=-z'_x\boldsymbol{i}-z'_y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})\boldsymbol{i}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'(\sqrt{x^2+y^2})\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

由此，该旋转面在点 $(x_0,y_0,f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})$ 处的法线方程为

$$\frac{x-x_0}{-\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}=\frac{y-y_0}{-\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}=\frac{z-f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}{1}$$

可得该法线与 xOz 平面的交点坐标为 $\left(0,0,f(\sqrt{x_0^2+y_0^2})+\dfrac{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2+y_0^2})}\right)$，即法线必然与 z 轴相交。

5. 证明 Schwartz 定理：如果函数 $z = f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 连续，则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

解： 略。

（装 订 线 内 不 要 答 题）

6. 在自变量代换 $\begin{cases} u = x + 2y + 2 \\ v = x - y - 1 \end{cases}$ 下，变换关于 $z = z(x, y)$ 的偏微分方程

$$2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

解： 该变换的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

故有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v}\left(2\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial y} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}
\end{aligned}$$

带入原方程可得

$$9\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 3\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

即

$$3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

五、（6 分）求平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0$（其中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$）与椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 相交所成截面的面积。

提示：易知截面为中心位于原点的椭圆，椭圆的面积公式为 $S_{\text{ell}}=\pi l_1 l_2$ （l_1, l_2 为椭圆的两个半轴长），因此问题即归结为求函数 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0\end{cases}$ 下的极值，极大值即为 l_1^2，极小值即为 l_2^2。

解： 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)-\mu(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$$

因此，驻点方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x-\dfrac{2\lambda}{a^2}x-\mu\cos\alpha=0 & \text{(1a)}\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y-\dfrac{2\lambda}{b^2}y-\mu\cos\beta=0 & \text{(1b)}\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z-\dfrac{2\lambda}{c^2}z-\mu\cos\gamma=0 & \text{(1c)}\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\right)=0 & \text{(1d)}\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)=0 & \text{(1e)}\end{cases}$$

考虑 $x\dfrac{\partial L}{\partial x}+y\dfrac{\partial L}{\partial y}+z\dfrac{\partial L}{\partial z}=2u(x,y,z)-2\lambda=0$，即有 $u(x,y,z)=\lambda$。再分别将式(1a)、式(1b)、式(1c)乘以 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 然后相加，可得

$$\begin{aligned}\mu&=2\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)x\cos\alpha+2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)y\cos\beta+2\left(1-\frac{\lambda}{c^2}\right)z\cos\gamma\\ &=-2\lambda\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2}+\frac{y\cos\beta}{a^2}+\frac{z\cos\gamma}{a^2}\right) \qquad (2)\end{aligned}$$

由式(1d)可知 x,y,z 均非零，而 λ 显然也非零，故由式(2)可知 μ 非零。因此由式(1a)、式(1b)、式(1c)和式(1e)构成的关于 x,y,z,μ 的线性方程组有非零解，因此需满足

$$\begin{vmatrix}1-\dfrac{\lambda}{a^2} & 0 & 0 & \cos\alpha\\ 0 & 1-\dfrac{\lambda}{b^2} & 0 & \cos\beta\\ 0 & 0 & 1-\dfrac{\lambda}{c^2} & \cos\gamma\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0\end{vmatrix}=0$$

将上式展开整理可得

$$\left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\frac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}\right)\lambda^2-\left[\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cos^2\alpha+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)\cos^2\beta+\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\cos^2\gamma\right]\lambda+1=0$$

l_1^2, l_2^2 即为上面方程的两根，$l_1^2 l_2^2=\dfrac{1}{\dfrac{\cos^2\alpha}{b^2c^2}+\dfrac{\cos^2\beta}{a^2c^2}+\dfrac{\cos^2\gamma}{a^2b^2}}$。因此，截面椭圆的面积为

$$S_{\text{ell}}=\frac{\pi abc}{\sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\cos^2\beta+c^2\cos^2\gamma}}$$

六、（10 分）在自变量代换 $\begin{cases} x = u\mathrm{e}^w \\ y = v\mathrm{e}^w \end{cases}$ 和因变量代换 $z = w\mathrm{e}^w$ 下，变换关于 $z = z(x,y)$ 的偏微分方程

$$\left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}$$

解： 该变换的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^w + u\mathrm{e}^w\dfrac{\partial w}{\partial u} & u\mathrm{e}^w\dfrac{\partial w}{\partial v} \\ v\mathrm{e}^w\dfrac{\partial w}{\partial u} & \mathrm{e}^w + v\mathrm{e}^w\dfrac{\partial w}{\partial v} \end{pmatrix}$$

当

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \mathrm{e}^{2w}\left(1 + u\frac{\partial w}{\partial u} + v\frac{\partial w}{\partial v}\right) \neq 0$$

时，存在反函数，即有 $w = w(u,v) = w(u(x,y), v(x,y))$，此时有

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-w}\left(1 + v\dfrac{\partial w}{\partial v}\right) & -u\mathrm{e}^{-w}\dfrac{\partial w}{\partial v} \\ -v\mathrm{e}^{-w}\dfrac{\partial w}{\partial u} & \mathrm{e}^{-w}\left(1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u}\right) \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= (\mathrm{e}^w + w\mathrm{e}^w)\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\
&= (\mathrm{e}^w + w\mathrm{e}^w)\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\mathrm{e}^{-w}\left(1 + v\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{-v\mathrm{e}^{-w}\dfrac{\partial w}{\partial u}}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\right) \\
&= \frac{1+w}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\frac{\partial w}{\partial u} \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= (\mathrm{e}^w + w\mathrm{e}^w)\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= (\mathrm{e}^w + w\mathrm{e}^w)\left(\frac{\partial w}{\partial u}\frac{-u\mathrm{e}^{-w}\dfrac{\partial w}{\partial v}}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\mathrm{e}^{-w}\left(1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u}\right)}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\right) \\
&= \frac{1+w}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\frac{\partial w}{\partial v}
\end{aligned}$$

代回原方程，可有

$$\begin{aligned}
\text{左端} &= \left(x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(u\mathrm{e}^w\frac{1+w}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v\mathrm{e}^w\frac{1+w}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2w}(1+w)^2}{\left(1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\left[\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2\right]
\end{aligned}$$

$$\text{右端} = z^2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = w^2\mathrm{e}^{2w}\frac{1+w}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\frac{\partial w}{\partial u}\frac{1+w}{1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}}\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\mathrm{e}^{2w}(1+w)^2}{\left(1 + u\dfrac{\partial w}{\partial u} + v\dfrac{\partial w}{\partial v}\right)^2}\left(w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

因此原方程在此变换下变为

$$\left(u\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(v\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = w^2\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}$$