

Interacción gravitacional entre muchos cuerpos

Victor Manuel Minjares Neriz

Una tesis presentada para obtener el título de

Licenciado en Física



**"El saber de mis hijos
hará mi grandeza"**

División de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Universidad de Sonora

Hermosillo, Sonora

Marzo 2023

Dedicatoria

Este trabajo, el cual es la culminación de mi licenciatura, es dedicado a mis padres, quienes desde que tengo consciencia han estado conmigo, apoyándome en las diferentes etapas de mi vida.

Interacción gravitacional entre muchos cuerpos

Victor Manuel Minjares Neriz

Tesis presentada para el título de Licenciado en Física

Marzo 2023

Resumen


En este trabajo construimos un simulador de la interacción gravitacional entre muchos cuerpos. Para aproximar la segunda ley de Newton, el método numérico que utilizamos fue Runge-Kutta de orden 4, el cual implementamos tanto a las posiciones como a las velocidades de todos los cuerpos. El propósito de este trabajo es observar el comportamiento del programa al simular múltiples cuerpos, su convergencia, su eficiencia y su límite.

Para explorar el buen funcionamiento del simulador tomamos grupos de cuerpos aislados del sistema solar, donde solo tomamos en cuenta al Sol, la Luna y los 8 planetas. Empezamos simulando dos cuerpos, Tierra-Luna, después pasamos a tres cuerpos, Sol-Tierra-Luna, y terminamos agregando los demás planetas. También analizamos la perturbación de la órbita de la Luna debida a cada planeta, así como en su conjunto.

Por último para descubrir el límite de nuestro programa, agregamos cuerpos con coordenadas aleatorias para encontrar la ecuación del tiempo de cómputo en términos del número de cuerpos.

Declaración

Este escrito es resultado de un ejercicio de revisión, investigación, resolución y síntesis llevado a cabo en el grupo de Física Fundamental de la Universidad de Sonora. Aunque algunos aspectos del trabajo pudieran haber sido ya presentados en congresos o publicaciones independientes, ninguna parte de este trabajo, en su forma actual, ha sido presentada para la obtención de algún grado en otra institución o con fines no académicos. El trabajo, incluida la redacción del texto, es producto exclusivo de los esfuerzos del autor, excepto cuando se señale explícitamente en el texto alguna cita.

; 2023 por Victor Manuel Minjares Neriz.

“Este documento se libera al público por su autor bajo una licencia *creative commons* Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional (CC BY-SA 4.0). Se puede reproducir en todo o en parte, redistribuir y adaptar por cualquier medio. Lo anterior está condicionado a que cualquiera de sus derivados deberán liberarse bajo las mismas condiciones y que se haga referencia al original (una versión completa de la licencia se puede encontrar en: <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.es>) ”

Agradecimientos

Me gustaría empezar agradeciéndole a mi asesor de tesis, el maestro Carlos Antonio Calcáneo Roldán, quien me estuvo apoyando durante toda la elaboración de este trabajo, no solo en el ámbito académico si no también en el personal. También, quisiera agradecerle al maestro Dupret Alberto Santana Bejarano por ayudarme en la correcta implementación del método numérico a este problema. De igual manera, le agradezco a mi familia por apoyarme a lo largo de mi vida, al igual que a mis amigos, con los que me he divertido en mi formación académica y personal.

Muchas gracias a todos ustedes por todo su apoyo.

Índice general

Resumen	III
Declaración	IV
Agradecimientos	v
Introducción	1
1. Interacción gravitacional	4
1.1. Gravedad	4
1.1.1. Potencial gravitacional	5
1.2. Campo de fuerza central	11
1.2.1. Problema de los dos cuerpos	12
1.2.2. Potencial efectivo	21
1.2.3. Ecuación de la órbita	27
1.2.4. Fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia . .	29
2. Construcción del integrador de N cuerpos	34
2.1. Método numérico Runge-Kutta	34
2.2. Implementación del método a la segunda ley de Newton	38
2.3. Calibración	42
2.3.1. Elección de unidades	43
2.3.2. Convergencia	44
2.3.3. Estabilidad de la órbita	50
2.3.4. Comparación con la teoría	51

3. Resolución de la dinámica del sistema solar	56
3.1. Sistema Sol-Tierra-Luna	56
3.2. Sistema Sol-Tierra-Luna más planetas del sistema solar	60
4. Limitación del simulador	67
4.1. Limitaciones del simulador	67
Conclusiones	70
Bibliografía	72

Índice de figuras

1.1. Interacción gravitacional de un anillo de masa dM a distancia r' de un cascarón de masa M con anchura a-b con un punto P a una distancia x del centro.	8
1.2. Coordenadas del problema de dos cuerpos	13
1.3. El área barrida por el radio vector en un tiempo dt	18
1.4. Potencial efectivo de una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Los valores usados son $l = \mu = 11.5$ y $k = 10$	24
1.5. Potencial efectivo de una fuerza central atractiva inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia. Los valores usados son $l = k = 12$ y $\mu = 3.5$	27
1.6. Potencial efectivo de una fuerza central atractiva proporcional a la distancia. Los valores usados son $l = k = \mu = 2.9$	27
1.7. Componentes de una elipse. r_{min} y r_{max} la estamos tomando con respecto al foco f pero pudimos tomarlos con respecto al foco f'. . . .	32
2.1. $N = 100$, $dt = 0.2732 D$, $t_f = 27.3217 D$	45
2.2. $N = 100$, $dt = 2.7321 D$, $t_f = 273.217 D$	46
2.3. $N = 1000$, $dt = 0.2732 D$, $t_f = 273.217 D$	47
2.4. Velocidades de la Tierra de la figura 2.3	47
2.5. órbita de la figura 2.3 corregida calculando una velocidad inicial de la Tierra.	48
2.6. Zoom a la Tierra de la figura 2.5	48

2.7. órbita de la figura 2.3 corregida colocándonos en el marco de referencia de la Tierra.	49
2.8. Diferencia al comparar órbitas con $N = 16000$ y $N = 32000$	50
2.9. Energía cinética, potencial y mecánica del sistema Tierra-Luna, en nuestras unidades.	55
2.10. Momento angular del sistema Tierra-Luna, en nuestras unidades.	55
3.1. STL con $N = 32\ 000$	58
3.2. Acercamiento de la figura 3.1 al origen de coordenadas, para observar la órbita de la Luna (trayectoria gris) alrededor de la Tierra (azul).	58
3.3. Diferencia al comparar órbitas con $N = 512\ 000$ y $N = 1\ 024\ 000$	59
3.4. órbita de la Luna exagerada.	60
3.5. órbitas del STLM.	61
3.6. Acercamiento a la órbita de la Luna en el sistema STLM.	62
3.7. Diferencia al comparar órbitas con $N = 512\ 000$ y $N = 1\ 024\ 000$ en el sistema STLM.	62
3.8. órbita de la Luna exagerada en el sistema STLM.	63
3.9. diferencia entre la órbita de la Luna entre los sistemas STL y STLM.	63
3.10. Diferencia al comparar órbitas con $N = 512\ 000$ y $N = 1\ 024\ 000$	64
3.11. Diferencia entre la órbita de la Luna con el sistema STL.	65
3.12. Sistema solar (planetas más la Luna). Tiempo total 10 décadas terrestres.	66
4.1. Diferencia al comparar órbitas con $N = 1\ 146\ 880$ y $N = 2\ 293\ 760$	68
4.2. Simulando 5 cuerpos aleatorios.	69
4.3. Tiempo de ejecución de 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50 y 60 cuerpos en horas. Ecuación del ajuste: $y = 0.3154 + 0.0134x^{2.0268}$, x sería el número de cuerpos e y el tiempo en horas.	69

Índice de tablas

1.1. Tipos de órbitas para una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.	26
1.2. Tipo de cónica y energías según la excentricidad para una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.	31
2.1. Error de truncamiento local para diferentes evaluaciones por paso en Runge-Kutta (Burden and Faires, 2010).	35
2.2. CI del sistema Tierra-Luna con la Luna en su apogeo.	42
2.3. Parámetros de la órbita obtenidos de la NASA (Williams, 2021). . .	51
2.4. Comparación de los parámetros orbitales.	52
3.1. CI del STL, Tierra y Luna en sus apogeos.	56
3.2. CI del STL y los planetas del sistema solar (Williams, 2021).	61

Índice de algoritmos

1. Algoritmo para calcular la aceleración debida a la interacción gravitacional entre N cuerpos. tp significa pasos totales de la simulación. . . . 40
2. Runge-Kutta de orden 4 para calcular la posición y velocidad de un sistema de N cuerpos en interacción gravitacional. 41

Introducción

Observar el cielo es una actividad que los humanos hemos hecho desde el inicio de nuestra especie, ver esos cuerpos de diferentes tamaños y colores, siempre en un mismo lugar, o algunos vemos que se mueven, desapareciendo para volver a aparecer otro día, mes, año o simplemente nunca volver, esto nos intriga y despierta nuestra enorme curiosidad. Por lo tanto, no es de extrañarse que muchos pensadores han intentado comprender cómo estos objetos tan distantes se mueven y el por qué de ello.

Una de las primeras teorías formales para explicar este fenómeno fue formulada por Ptolomeo de Alexandria, a partir de observaciones entre los años 127 y 151 de nuestra era. En esta formulación se tomaba a la Tierra como el centro del Universo y en reposo, siendo los demás planetas y cuerpos celestes los que giraban alrededor de ella, este punto de vista es conocido ahora como geocentrismo. Esta teoría tenía una fundamentación muy complicada pero daba resultados comparables con las observaciones en su tiempo, por lo cual sobrevivió por alrededor de 1500 años como la verdad del movimiento celestial. Los primeros registros de una teoría alterna que explicaba la mecánica celeste se dio en Grecia, donde se intentó introducir el heliocentrismo, la cual decía que realmente el centro al cual orbitaban los planetas no era la Tierra, si no el Sol. Pero no tuvo mucho éxito, hasta que la teoría heliocentrista de Nicolaus Copernicus fuera publicada en 1543, el año de su muerte. Aunque de igual manera, al principio no tuvo mucha aceptación, pero con las observaciones de Tycho Brahe, la formulación empírica de las 3 leyes de su alumno Johann Kepler y las aportaciones de Galileo Galilei pudieron avivar la teoría heliocéntrica mostrando la predictibilidad de la misma (Hand and Finch, 1998).

Hasta este momento en general todas las aportaciones para explicar el movimiento de los cuerpos celestes eran de forma empírica sin ninguna fundamentación matemática rigurosa, rigurosa por lo menos para este tiempo. Sin embargo en 1687 en un libro llamado *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, Isaac Newton explicó no solo que los cuerpos celestiales se movían por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, si no que formuló las 3 leyes que rigen el movimiento de cualquier cuerpo en el Universo, bueno por lo menos hasta que Albert Einstein hizo su aparición. A estas 3 leyes se les conoce como leyes del movimiento y a la teoría que explica las órbitas de los planetas, se le conoce como teoría de la gravitación.

Con esta teoría se logró entender perfectamente el movimiento de dos cuerpos orbitándose mutuamente y se demostraron las 3 leyes de Kepler, pero desgraciadamente esta teoría tenía sus dificultades. Contra intuitivamente, uno pensaría que agregar un cuerpo más no debería complicar demasiado el problema, ya que para 2 cuerpos el problema estaba más que resuelto. Sin embargo, muchos científicos de renombre intentaron encontrar una solución para el problema de los 3 cuerpos fallando en el intento, empezando con el mismo Newton. Posterior a Newton estuvieron Poincaré, Lagrange, Euler entre muchos otros, intentando resolver el problema de los 3 cuerpos en interacción gravitacional. Aunque no pudieron resolver el problema de una forma general se encontraron diversos resultados muy interesantes, como los puntos de Lagrange, el descubrimiento de los fenómenos caóticos, además de poder resolver casos particulares del problema de 3 cuerpos; como suponer dos cuerpos orbitando y un tercero de masa mucho menor a los dos primeros. Años después, más precisamente en 1912, Sudman encontró una solución completa al problema de los 3 cuerpos usando series infinitas, el problema con esta solución es la convergencia, la cual es muy lenta y por lo tanto la solución no puede ser usada de forma práctica (Musielak and Quarles, 2015, Saari, 1990). Siguiendo con este método en 1991 Wang Qiu-Dong, extendió esta teoría (casi completamente) para N cuerpos (Senchyna, 2013).

Al no poder obtener una solución analítica práctica, las personas de esa época voltearon a ver al nuevo mejor amigo del humano, las computadoras. Utilizando las teorías de los métodos numéricos, en las cuales también participó Newton, y el hecho que las computadoras son muy buenas haciendo aritmética de una forma extremadamente rápida que ningún humano podría replicar, se dejó de lado el camino analítico para centrarse en el computacional. Con esta nueva forma de abordar el problema se pudo resolver y simular, con bastante precisión, no solo 3 cuerpos en interacción gravitacional si no miles de cuerpos, llegando a sistemas solares, galaxias y hasta el Universo mismo. Aunque claro, todas siendo aproximaciones pero cada vez más apegadas a las observaciones.

En este trabajo abordaremos el problema de N-cuerpos de manera clásica, donde tomaremos únicamente la interacción gravitacional entre los cuerpos. Exploraremos los resultados de simular la interacción utilizando un método numérico muy usado en este tipo de simulaciones, Runge-Kutta de orden 4, centrándonos en la elaboración y efectividad del simulador.

Este trabajo contará con cuatro capítulos. En el primero desarrollaremos el fenómeno de la gravitación desde el punto de vista de la mecánica clásica, el potencial gravitacional, la teoría de fuerza central y las órbitas posibles debidas a una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia. En el segundo abordaremos la construcción del integrador, el método numérico a utilizar, cómo implementarlo en la segunda ley de Newton y la comprobación del mismo. Después, en el tercero resolveremos la dinámica para subsistemas del sistema solar, además veremos cuál es el efecto que tienen los planetas en la órbita de la Luna. Por último, en el cuarto capítulo llevaremos al límite el simulador para encontrar el punto donde se vuelve impráctico su utilización.

Capítulo 1

Interacción gravitacional

En este capítulo se desarrollará la teoría de la interacción gravitacional formulada por Newton y su aplicación al problema del campo central, el cual es el modelo teórico para entender el comportamiento de las órbitas de planetas y estrellas.

1.1. Gravedad

La primera fuerza fundamental, de la cual el humano tuvo consciencia, fue la gravedad, donde diversos pensadores trabajaron a lo largo de la historia para comprenderla, empezando como siempre por los clásicos como Aristóteles, pasando por Galileo Galilei hasta Newton que en 1687 en su más famoso libro *Principia* formuló la ley gravitacional, aunque posteriormente Einstein tuvo que decir algo con respecto a la gravedad pero eso es una plática para otro trabajo ya que con solo la teoría Newtoniana nos basta para describir los sistemas que veremos.

La ley de gravitación universal asegura que todas las partículas con masa en el Universo se atraen mutuamente, con una fuerza proporcional al producto de sus masas y al inverso al cuadrado de la distancia entre ellas. Matemáticamente se expresa con la siguiente ecuación

$$\mathbf{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \quad (1.1.1)$$

Siendo r la distancia entre la masa m y M , $\hat{\mathbf{e}}_r$ es el vector dirección que apunta de la masa M a m . El signo menos es porque las masas se atraen mutuamente,

G es la constante gravitacional y aunque sea la primera constante fundamental que fue medida por el físico inglés Henry Cavendish en 1798, es la menos precisa de todas las constantes fundamentales (Barger and Olsson, 1954). Tenemos más de dos centenarios intentando medirla pero una discrepancia de hasta 0.05 % en experimentos recientes se sugiere que estas mediciones de G pueden tener errores sistemáticos no descubiertos (Li et al., 2018).

La ec. (1.1.1) describe la fuerza gravitacional para masas puntuales, si queremos obtener la fuerza entre cuerpos con extensión finita podemos aprovechar que la ecuación de movimiento que describe a la interacción es lineal, por lo que se permite el principio de superposición para calcular las fuerzas que experimenta un punto debido a todos los puntos de los cuerpos extendidos. Para un cuerpo con una distribución continua de masa esas sumas se transforman en una integral sobre todo el volumen (Thornton and Marion, 2004)

$$\mathbf{F} = -Gm \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r dv' \quad (1.1.2)$$

Donde estamos suponiendo que el cuerpo extendido es M , $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad de masa, dv' es el elemento infinitesimal del volumen que aplica la fuerza a una distancia \mathbf{r}' del origen (arbitrario) dentro de la distribución de masa del volumen V . Si también tomáramos a la masa m como un cuerpo con extensión finita, tendríamos que hacer otra integral sobre ese volumen.

1.1.1. Potencial gravitacional

Esta fuerza de atracción que tienen los cuerpos se puede usar para definir un campo vectorial gravitacional, el cual estará actuando en todo el espacio, independientemente de la masa que está siendo atraída, esto es

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} = -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \quad (1.1.3)$$

Donde sustituimos nuestra ecuación (1.1.1). Si es para una masa extendida

$$\mathbf{g} = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r dv' \quad (1.1.4)$$

Donde usamos ec. (1.1.2). Por lo tanto \mathbf{g} es la aceleración causada por la fuerza ejercida por M en todo el espacio. Este campo tiene unidades de aceleración, si medimos su magnitud en la superficie de la Tierra obtenemos que $|\mathbf{g}| \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ y apunta hacia el centro de la Tierra, una cantidad con la que todos los terrestres estamos familiarizados ya que es la gravedad que sentimos al estar viviendo en el planeta Tierra.

Esta fuerza por unidad de masa es una fuerza conservativa, esto es, el trabajo que realiza el campo para mover una masa m solo depende del punto inicial y el final, es decir, es independiente de la trayectoria que tome. Para cumplir con estas características para el campo, basta con verificar que su rotacional sea igual a cero

$$\nabla \times \mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (1.1.5)$$

Demostración.

Primero aplicamos el rotacional en coordenadas esféricas a \mathbf{g}

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{g} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (g_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial g_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial g_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r g_\varphi) \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r g_\theta) - \frac{\partial g_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Nuestro campo gravitacional solo tiene componente en dirección radial ($\hat{\mathbf{e}}_r$), esto es $g_\theta = 0$ y $g_\varphi = 0$, entonces ec. (1.1.6) se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{g} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial g_r}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial g_r}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\varphi \quad (1.1.7)$$

Por último $\mathbf{g}(r)$ solo depende de la componente r . Por lo tanto las derivadas parciales con respecto a los ángulos $\frac{\partial g_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial g_r}{\partial \theta} = 0$. Obteniendo ec. (1.1.5)

■

Cuando la propiedad ec. (1.1.5) se cumple entonces el campo vectorial \mathbf{g} tiene simetría radial con respecto a un punto, esto se puede entender que el campo vectorial apunta hacia la dirección de máximo cambio, en nuestro caso como la gravedad

es atractiva entonces esta dirección debe ser hacia el punto donde se genera \mathbf{g} . Por lo tanto se puede escribir \mathbf{g} como menos el gradiente de una función escalar

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi \quad (1.1.8)$$

A Φ se le conoce como potencial gravitacional, tiene unidades de energía por unidad de masa.

Si comparamos este resultado con la siguiente relación entre la fuerza y la energía potencial, podemos definir la energía potencial en términos del potencial gravitacional

$$\mathbf{F} = -\nabla U \rightarrow m\mathbf{g} = -\nabla U \rightarrow m[-\nabla\Phi] = -\nabla U \rightarrow \nabla(m\Phi) = \nabla U \quad (1.1.9)$$

Obteniendo que $U = m\Phi$. El punto de referencia, o inicial, del potencial se escoge arbitrariamente, y convenientemente elegimos que esté en infinito, ya que al variar con el inverso del cuadrado de la distancia, el potencial tiende a 0 en el infinito ($1/\infty \rightarrow 0$). Físicamente decimos que la energía potencial gravitacional es el trabajo que se necesita para traer una masa m en un campo gravitacional Φ desde el infinito hasta la posición final de la masa.

Por último, obtenemos la expresión explícita de Φ al sustituir la ec. (1.1.3) para un cuerpo puntual

$$\nabla\Phi = -\left(-G\frac{M}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r\right) \rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial r} = G\frac{M}{r^2} \rightarrow \Phi = -G\frac{M}{r} \quad (1.1.10)$$

Para un potencial debido a un cuerpo extendido el procedimiento es análogo al anterior

$$\Phi = -G \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r} dv' \quad (1.1.11)$$

Newton en su libro *Principia* hizo una aproximación para calcular el movimiento de una manzana cayendo por la gravedad de la Tierra o la órbita de la Luna, donde propuso que la masa de la Tierra está toda contenida en un punto en su centro. Haciendo esta “aproximación” el mismo Newton un año después llegó a que no era

solo una simple aproximación si no el comportamiento en las interacciones gravitacionales en la teoría clásica, a este resultado se le conoce como Teorema de Newton (Schmid, 2012, Barger and Olsson, 1954).

También dedujo que cualquier cuerpo dentro de un cascarón de materia no percibe fuerza gravitacional de este. Formalmente se enuncian:

Primer teorema de Newton.- *Un cuerpo que está dentro de un cascarón esférico de materia experimenta una fuerza gravitacional neta igual a cero debida a ese cascarón.*

Segundo teorema de Newton.- *La fuerza gravitacional en un cuerpo que se encuentra afuera de un cascarón esférico de materia es la misma a la cual sería si toda la materia del cascarón estuviera concentrada en un solo punto en su centro.* (Gilmore, 1989)

Para demostrar estos maravillosos resultados tomaremos un cascarón esférico de masa M uniformemente distribuida y calculamos el potencial gravitacional en un punto a una distancia x del centro. Retomaremos la ecuación del campo gravitacional para cuerpos no puntuales ec.(1.1.4).

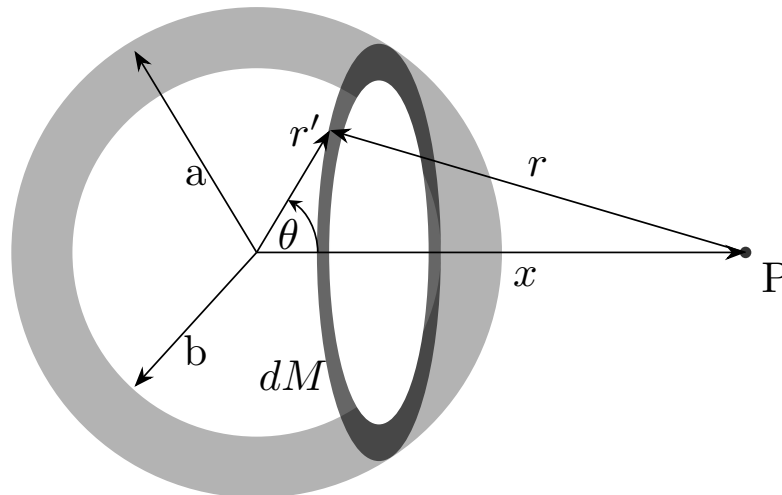


Figura 1.1: Interacción gravitacional de un anillo de masa dM a distancia r' de un cascarón de masa M con anchura a - b con un punto P a una distancia x del centro.

Como tiene una distribución uniforme de masa $\rho(\mathbf{r}') = \rho$ es constante. Calcularemos la interacción ejercida por un anillo dentro del cascarón, como se observa

en la figura 1.1. Para realizar las integrales explotaremos una simetría. La fuerza que percibe el punto P está dentro de un cono, formado por el anillo de anchura dM (la base del cono) y el punto P (la punta del cono), el cual está caracterizado por el radio del anillo r' y su abertura θ , por lo tanto la coordenada φ se integrará directamente.

$$\Phi = -G\rho \int_b^a r'^2 dr' \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{r} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (1.1.12)$$

Donde usamos el diferencial de volumen en coordenadas esféricas $dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.

Ahora para integrar debemos encontrar una relación entre r y las coordenadas r' y θ , la cual podemos encontrar con la ley de los cosenos, entonces

$$r^2 = r'^2 + x^2 - 2r'x \cos \theta \quad (1.1.13)$$

En lugar de solo sustituir (1.1.13) directamente en (1.1.12) podemos encontrar una relación más sencilla al diferenciar (1.1.13). x es una constante, además estamos eligiendo una determinada r' , por lo tanto

$$2r dr = 2r'x \sin \theta d\theta \rightarrow \frac{dr}{r'x} = \frac{\sin \theta}{r} d\theta \quad (1.1.14)$$

Ahora si sustituimos e integramos con respecto a φ en (1.1.12)

$$\Phi = -G\rho \int_b^a r'^2 dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r'x} (2\pi) = -\frac{2\pi G\rho}{x} \int_b^a r' dr' \int_{r_{min}}^{r_{max}} dr \quad (1.1.15)$$

r como se ve en figura 1.1, puede estar dentro o fuera del cascarón, dependiendo de esto los límites de integración cambian. Primero tomaremos el caso afuera del cascarón ($x > a$)

$$\Phi = -\frac{2\pi G\rho}{x} \int_b^a r' dr' \int_{x-r'}^{x+r'} dr \quad (1.1.16)$$

$x - r'$ es el punto más cercano a P y $x + r'$ el más lejano, como se ve en figura 1.1.

Integrando

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{2\pi G\rho}{x} \int_b^a r' dr' (2r') = -\frac{4\pi G\rho}{x} \int_b^a r'^2 dr' \\ &= -\frac{4\pi G\rho}{3x} (a^3 - b^3)\end{aligned}\tag{1.1.17}$$

Podemos notar que en (1.1.17) tenemos el volumen del cascarón $4/3\pi(a^3 - b^3)$ multiplicado por su distribución de masa ρ , lo cual es la masa total M . Por lo tanto encontramos que

$$\Phi(x > a) = -\frac{GM}{x}\tag{1.1.18}$$

Por lo tanto el potencial se comporta como si toda la masa estuviera en el centro del cascarón. Ahora veremos el comportamiento si tomamos el punto P dentro del cascarón ($x < b$). Retomamos (1.1.16) cambiando los límites

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{2\pi G\rho}{x} \int_b^a r' dr' \int_{r'-x}^{r'+x} dr = -\frac{2\pi G\rho}{x} \int_b^a r' dr' (2x) \\ \Phi(x < b) &= -2\pi G\rho(a^2 - b^2)\end{aligned}\tag{1.1.19}$$

Vemos que el potencial dentro del cascarón es constante, no depende de que tan cerca o lejos del centro estemos. Por último calcularemos el potencial dentro del cascarón ($b < x < a$). Para encontrar el potencial dentro del cascarón solo debemos restar el potencial si estuviéramos en la parte exterior e interior del cascarón, para esto solo sustituimos $x = a$ cuando $\Phi(x > a)$ y $x = b$ cuando $\Phi(x < b)$

$$\begin{aligned}\Phi(b < x < a) &= -\frac{4\pi G\rho}{3x} (x^3 - b^3) - (-2\pi G\rho(a^2 - x^2)) \\ &= -4\pi G\rho \left[\frac{x^3 - b^3}{3x} + \frac{a^2 - x^2}{2} \right] = -4\pi G\rho \left[\frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{6} - \frac{b^3}{3x} \right]\end{aligned}\tag{1.1.20}$$

En este caso el potencial sí cambia dependiendo de la posición en la que nos encontremos dentro de él. Si sustituimos los casos límites $x \rightarrow a$ vemos que recobramos (1.1.17) de la misma forma si $x \rightarrow b$ recobramos (1.1.19). Esto demuestra que nuestro potencial gravitacional es continuo, lo cual tenía que pasar para que tuviera realidad

física, de otra forma, si en algún lugar fuera discontinuo el gradiente del potencial, en este caso la fuerza sería infinita en ese punto (Thornton and Marion, 2004). Este resultado son los mismos para cuerpos esféricos sólidos con una distribución de masa uniforme, ya que estos se pueden modelar por muchos cascarones concéntricos. Si la distribución de masa no fuera uniforme simplemente tomaríamos $\rho(r')$ (Feynman et al., 2013).

Por último sustituiremos los potenciales dentro y fuera del cascarón en (1.1.8)

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(r > a) &= -\nabla\left(-\frac{GM}{r}\right) = \frac{GM}{r^2} \\ \mathbf{g}(r < b) &= -\nabla(-2\pi G\rho(a^2 - b^2)) = 0 \end{aligned} \tag{1.1.21}$$

Cambiamos x por r para que sea consistente con nuestra notación anterior. Con esto llegamos a las mismas conclusiones que Newton en sus dos teoremas. Afuera del cascarón la fuerza gravitacional se comporta como si toda la masa estuviera en el centro y dentro del cascarón la fuerza neta es cero.

1.2. Campo de fuerza central

Se conoce como fuerza central, \mathbf{F} , a la interacción que percibe un cuerpo de masa m que solo depende de la distancia entre este y el origen de la fuerza, al cual se le llama centro de fuerza (CF):

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\hat{\mathbf{e}}_r \tag{1.2.1}$$

Este problema es muy importante para toda la física, ya que la gravedad y la fuerza electrostática se comportan como fuerzas centrales. Gracias a esto podemos aproximar enormemente varios movimiento como: como planetas alrededor del Sol, una partículas cargada alrededor de otra, etc. Más recientemente el átomo de hidrógeno de Bohr puede ser analizado usando la teoría de fuerza central (Chow, 2013).

El campo central es un problema que presenta dos características muy especiales, la conservación de energía total y la conservación del momento angular.

Anteriormente demostramos que \mathbf{g} que depende solo de la distancia radial es una fuerza conservativa y si recordamos (1.1.9) tenemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U \quad (1.2.2)$$

La cual también es una fuerza conservativa, por lo tanto la fuerza central es una fuerza conservativa y si una fuerza es conservativa entonces se cumple el principio de la conservación de la energía total, ya que en este tipo de fuerzas solo importa las condiciones iniciales y finales, no la trayectoria. (Hauser, 1969)

Otra constante de movimiento es el momento angular. Para demostrar que el momento angular se conserva simplemente sustituimos (1.2.2) en la definición de la torca en términos de \mathbf{r} y \mathbf{F}

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (f(r)\hat{\mathbf{e}}_r) = 0 \quad (1.2.3)$$

De este resultado y de la definición de la torca en términos de solo \mathbf{L} obtenemos que

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \rightarrow \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \quad (1.2.4)$$

Para que la última igualdad se cumpla, siempre el vector posición debe ser paralelo a la fuerza del campo central. Por lo tanto el momento angular es otra constante de movimiento del campo central. Esto quiere decir que el movimiento en un campo central está constreñido en un plano definido por las condiciones de velocidad y posición, además este es perpendicular al momento angular, por definición del momento angular

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (1.2.5)$$

El producto entre dos vectores, en este caso la posición y la velocidad, dan un tercer vector perpendicular a los dos primeros.

1.2.1. Problema de los dos cuerpos

Con estos resultados podemos intentar resolver problemas de cuerpos orbitando. Ya obtuvimos que la gravedad (y cualquier fuerza que siga la ley de la inversa al cuadrado de la distancia) trata a los cuerpos con una distribución de masa como partículas puntuales, lo cual facilita enormemente el desarrollo. Además sabemos que se conserva la energía y el momento angular. Entonces ¿Ya con esto podemos encontrar las órbitas de N cuerpos ?, la respuesta es no, encontrar las trayectorias de más de dos cuerpos que se orbitan mutuamente complica su resolución analítica varios órdenes de magnitud. En esta sección abordaremos el caso cuando $N = 2$.

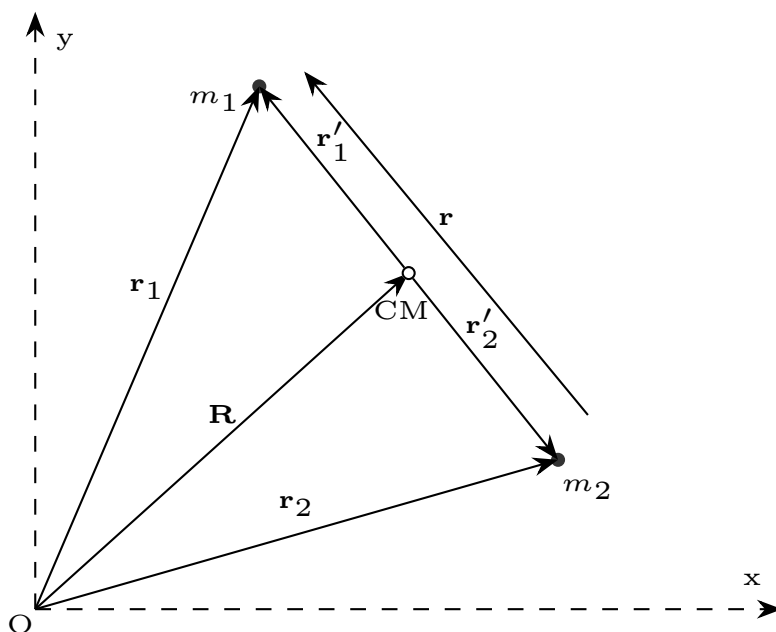


Figura 1.2: Coordenadas del problema de dos cuerpos

Entonces tomaremos dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , los cuales estarán a una distancia \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 respectivamente del centro de coordenadas O . Este sistema cuenta con seis grados de libertad las tres componentes de cada vector de posición de las dos masas. Para trabajar con este problema cambiaremos los grados de libertad para facilitar su resolución, en lugar de usar \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 usaremos \mathbf{R} (vector posición del centro de masa (CM) con respecto al origen de coordenadas) y \mathbf{r} (vector entre m_1 y m_2 esto es $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$), donde \mathbf{r}'_i es el vector posición con respecto al CM, como se ve en la figura 1.2.

Para resolver el problema usaremos la teoría de Lagrange. Entonces primero debemos encontrar el lagrangiano de nuestro problema

$$\mathcal{L}(t, q_i, \dot{q}_i) = T - V \quad (1.2.6)$$

Nuestro potencial es el potencial gravitacional, el cual solo depende de la posición entre los cuerpos

$$V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = V(\mathbf{r}) \quad (1.2.7)$$

Entonces, como se puede ver en la siguiente ecuación \mathcal{L} no depende del tiempo

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.2.8)$$

Ahora como el potencial puede estar en términos de \mathbf{r} como se ve en (1.2.7), también pondremos las velocidades en términos de la velocidad relativa entre los cuerpos. Para esto primero calcularemos la posición del centro de masa que está definida como

$$\mathbf{R} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.2.9)$$

Ahora \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 podemos ponerlos en términos de \mathbf{R} y \mathbf{r}' 's

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1 \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_2 \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Sustituimos (1.2.10) en (1.2.9)

$$\mathbf{R} = \frac{m_1(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_1) + m_2(\mathbf{R} + \mathbf{r}'_2)}{m_1 + m_2} \quad (1.2.11)$$

Si estamos parados en el CM, esto es $\mathbf{R} = 0$ obtenemos una relación entre los vectores posición con respecto al CM

$$0 = \frac{m_1 \mathbf{r}'_1 + m_2 \mathbf{r}'_2}{m_1 + m_2} \rightarrow \mathbf{r}'_1 = -\frac{m_2}{m_1} \mathbf{r}'_2 \quad (1.2.12)$$

Sustituimos esta relación en $\mathbf{r} = \mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2$ para obtener los vectores posiciones con respecto al CM en términos de \mathbf{r}

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1 + m_2}{m_1}\mathbf{r}'_2 \rightarrow \mathbf{r}'_2 = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{r} &= \mathbf{r}'_1 - \left(-\frac{m_1}{m_2}\mathbf{r}'_1\right) = \frac{m_1 + m_2}{m_2}\mathbf{r}'_1 \rightarrow \mathbf{r}'_1 = \frac{m_2}{M}\mathbf{r}\end{aligned}\quad (1.2.13)$$

Donde $M = m_2 + m_1$. Con esto podemos poner \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 en términos de \mathbf{r} sustituyendo estas últimas ecuaciones en (1.2.10)

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_1 = \mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} + \mathbf{r}'_2 = \mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}\end{aligned}\quad (1.2.14)$$

Derivamos con respecto al tiempo

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_1 &= \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}} \\ \dot{\mathbf{r}}_2 &= \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\end{aligned}\quad (1.2.15)$$

Y calculamos el cuadrado de su magnitud por medio del producto escalar.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_1^2 &= \dot{\mathbf{R}}^2 + 2\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 \\ \dot{\mathbf{r}}_2^2 &= \dot{\mathbf{R}}^2 - 2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2\end{aligned}\quad (1.2.16)$$

sustituimos este último resultado en nuestro lagrangiano (1.2.8) para tenerlo en términos de \mathbf{r} y del CM

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}m_1 \left[\dot{\mathbf{R}}^2 + 2\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}m_2 \left[\dot{\mathbf{R}}^2 - 2\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 \right] - V(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (1.2.17)$$

Simplificamos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}\right)^2 - V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{2M} \left[\frac{m_2}{M} + \frac{m_1}{M} \right] \dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r})\end{aligned}\quad (1.2.18)$$

Definimos $\mu = (m_1 m_2)/M$ a esta cantidad se le conoce como masa reducida y alternativamente se define así $1/\mu = 1/m_1 + 1/m_2$. Las coordenadas de \mathbf{R} son cíclicas, esto es, no está explícitamente en la lagrangiana. Lo cual implica que las ecuaciones de movimiento de \mathbf{r} no tendrán términos de \mathbf{R} o $\dot{\mathbf{R}}$. Esto es porque no estamos considerando fuerzas externas, entonces el CM estará ya sea en reposo o en movimiento constante. (Goldstein et al., 2002)

Por lo tanto podemos eliminar de una vez el término del CM y nuestro lagrangiano se reduce solamente a dos términos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - V(\mathbf{r}) \quad (1.2.19)$$

Esta ecuación que nos quedó se puede interpretar como la lagrangiana de un cuerpo de masa μ descrita por un potencial que solo depende de su posición radial. Siempre podemos reducir el problema del movimiento de dos cuerpos a uno equivalente de un solo cuerpo moviéndose alrededor de una fuerza central fija. (Chow, 2013). Cabe también recalcar que si obtenemos $\mathbf{r}(t)$ tendremos las ecuaciones de movimiento de los dos cuerpos, ya que estas son una fracción del movimiento de la masa reducida μ dadas por las ecuaciones en (1.2.13).

Al obtener nuestra lagrangiana que modela el problema solo nos queda obtener las ecuaciones de movimiento, para esto recordamos el vector posición y vector velocidad en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r\hat{\mathbf{e}}_r \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

Calculamos el cuadrado de la magnitud de la velocidad, usando el producto escalar y lo sustituimos en nuestro lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu[\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)] - V(r) \quad (1.2.21)$$

Donde recordamos que nuestro potencial solo depende de la coordenada radial. Del resultado que obtuvimos en (1.2.4), sabemos que el movimiento es en un plano. Por

conveniencia elegiremos que el momento angular esté en la dirección del eje polar, esto dejará constreñido nuestro movimiento en el plano perpendicular al eje polar esto es $\theta = \pi/2$ es un valor constante. Entonces tenemos que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2] - V(r) \quad (1.2.22)$$

Recordando las ecuaciones de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (1.2.23)$$

Empezaremos obteniendo φ la cual se ve desde el lagrangiano que es una coordenada cíclica, ya que no aparece en la lagrangiana.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= \mu r^2 \dot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Por lo tanto

$$\dot{p}_\varphi = \frac{d}{dt} [\mu r^2 \dot{\varphi}] = 0 \quad (1.2.25)$$

Integrando obtenemos el momento de la coordenada φ , que es el momento angular orbital

$$p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} = l \quad (1.2.26)$$

Esto es, la magnitud del momento angular es una constante de movimiento que denotaremos con la letra l . Con este resultado de (1.2.25) se extrae una interpretación geométrica muy interesante.

Como se ve en la siguiente figura, 1.3, el diferencial del área barrida es

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\varphi) = \frac{1}{2}r^2 d\varphi \quad (1.2.27)$$

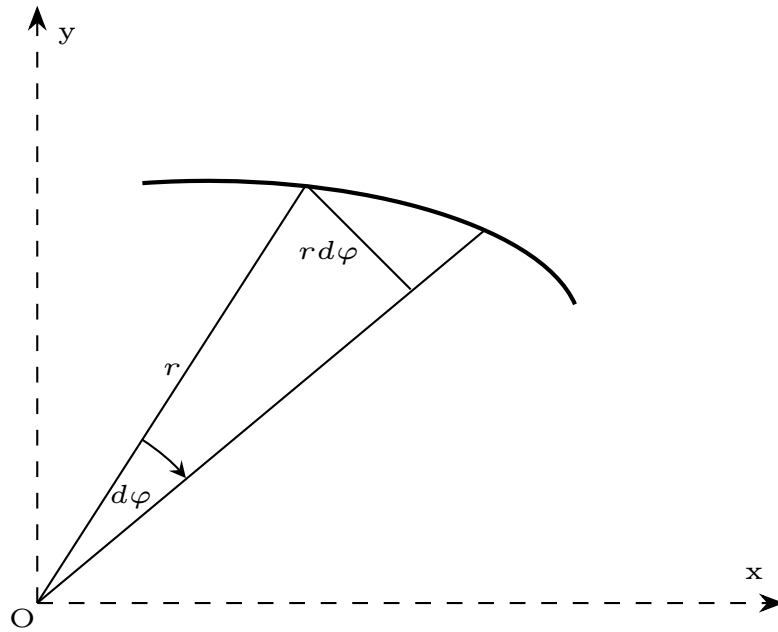


Figura 1.3: El área barrida por el radio vector en un tiempo dt

Usando la regla de la cadena en el término $d\varphi$

$$dA = \frac{1}{2}r(rd\varphi) = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}dt \quad (1.2.28)$$

De (1.2.26) tenemos

$$r^2\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu} \quad (1.2.29)$$

Sustituimos esto en (1.2.28) y obtenemos que la velocidad del área barrida es constante en todo el movimiento.

$$dA = \frac{l}{2\mu}dt \rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{l}{2\mu} \quad (1.2.30)$$

En conclusión la conservación de la magnitud del momento angular conlleva a que la velocidad del área barrida sea constante. Integrando

$$\Delta A = \frac{l}{2\mu}\Delta t \quad (1.2.31)$$

Encontramos que a dos intervalos iguales de tiempo las áreas que recorre el cuerpo en su trayectoria son iguales. Este efecto lo descubrió por primera vez Kepler en

1709 con ayuda de las observaciones que realizó su maestro Tycho Brache a lo largo de su vida, a este resultado se le conoce como la segunda ley de Kepler. La ecuación (1.2.31) para cualquier movimiento en un campo central, no es solo una característica del movimiento planetario bajo una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia.

Físicamente también se puede interpretar que si tenemos dos cuerpos orbitando, cuando se encuentra en sus puntos más cercanos de sus trayectorias sus velocidades son más rápidas que cuando están en sus puntos más lejanos. Copérnico fue el primero que se dio cuenta de este comportamiento con el sistema Sol-Tierra (Chow, 2013).

Retomando las ecuaciones de movimiento ahora le toca a la coordenada r . Resolviendo (1.2.23) con respecto a r

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{r}} \left[\frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r) \right] &= 0 \\ \mu \ddot{r} - \mu r \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.32)$$

Podemos eliminar φ usando (1.2.26)

$$\mu \ddot{r} - \mu r \left(\frac{l}{\mu r^2} \right)^2 + \frac{\partial V(r)}{\partial r} = 0 \rightarrow \mu \ddot{r} - \frac{l^2}{\mu r^3} + \frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad (1.2.33)$$

Aquí podemos identificar la segunda ley de Newton, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, al reescribir la ecuación de la siguiente forma

$$f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu \ddot{r} \quad (1.2.34)$$

Más adelante nos detendremos a analizar ese segundo término de la suma de fuerzas. Como solo tenemos la coordenada r las derivadas parciales las cambiamos por totales. Ahora encontraremos que la energía total del sistema es constante, como ya habíamos dicho porque nuestra fuerza es conservativa. Vamos a multiplicar (1.2.33) por \dot{r}

$$\mu \dot{r} \ddot{r} - \dot{r} \frac{l^2}{\mu r^3} + \dot{r} \frac{dV(r)}{dr} = 0 \quad (1.2.35)$$

Usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 \right] - \frac{d}{dt} \left[-\frac{l^2}{2\mu r^2} \right] + \frac{dV(r)}{dt} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = E = \text{constante} \quad (1.2.37)$$

Encontrando otra constante de movimiento. Hasta ahora hemos reducido nuestro problema bastante, pasando de tener que encontrar 6 coordenadas, 3 de cada cuerpo, a solo tener que encontrar 2, r y φ . A partir de aquí hay varias formas de encontrar la trayectoria, la forma más directa sería integrar (1.2.37)

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} \left[E - V(r) - \frac{l^2}{2\mu r^2} \right]} \quad (1.2.38)$$

De aquí

$$\int_{t_0}^t dt' = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2}]}} \quad (1.2.39)$$

Las primas en esta notación es solo para diferenciar las variables de integración de los límites. Integrando el lado derecho obtenemos $t = t(t_0, r, r_0, l, E)$

$$t = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{2}{\mu} [E - V(r') - \frac{l^2}{2\mu r'^2}]}} \quad (1.2.40)$$

Encontramos la función de t , la cual formalmente la podríamos invertir para encontrar $r = r(t, t_0, r_0, l, E)$ que dependería de t , las condiciones iniciales y de las constantes de movimiento. Al obtener esto encontraríamos φ sustituyendo r en (1.2.26)

$$\begin{aligned} \mu r^2(t, t_0, r_0, l, E) \dot{\varphi} &= l \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{1}{\mu r^2(t, t_0, r_0, l, E)} \\ \int_{t_0}^t \frac{d\varphi}{dt} dt' &= \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\mu r^2(t, t_0, r_0, l, E)} \end{aligned} \quad (1.2.41)$$

Recurriendo a la regla de la cadena para integral el lado derecho

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t \frac{dt'}{\mu r^2(t, t_0, r_0, l, E)} \quad (1.2.42)$$

Encontrando $\varphi = \varphi(t, t_0, r_0, \varphi_0, l, E)$. Las ecuaciones (1.2.40) y (1.2.42) son las únicas integrales que nos quedan, formalmente se clasifica como reducir el problema a cuadraturas, que es hacer que el problema solo sea resolver una o más integrales. Estas integrales tienen 5 constantes de integración $t_0, r_0, \varphi_0, l, E$, aunque no son las únicas, también están \dot{r} y $\dot{\varphi}$ pero estas pueden ser determinadas de las constantes de movimiento E y l .

1.2.2. Potencial efectivo

Resolver las integrales (1.2.39) y (1.2.41) de forma general no es la finalidad de este trabajo, por lo tanto a partir de aquí nos centraremos en casos específicos para encontrar soluciones de problemas de campo central, pero antes de eso veremos qué conclusiones podemos obtener de la ecuación de movimiento (1.2.36) sin necesidad de resolverla.

La energía total en un sistema de masa m , la podemos escribir como energía cinética más energía potencial dada por

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V \quad (1.2.43)$$

Si comparamos la ecuación con (1.2.36) se puede interpretar como un sistema de masa μ que tiene una energía potencial

$$V(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \quad (1.2.44)$$

A esta cantidad la identificaremos como energía potencial efectiva $V_{eff}(r)$. Este segundo término que tenemos se debe a un fenómeno físico muy conocido. Una pista es recordar que nuestro sistema de referencia está en el punto O de la figura 1.3 y la fuerza central que se ejerce en el cuerpo de masa μ apunta radialmente a O y este está rotando entorno a nosotros, el observador.

Entonces si integramos ese término del potencial para obtener la fuerza

$$f_c = -\nabla \left(\frac{l^2}{2\mu r^2} \right) = \frac{l^2}{\mu r^3} \quad (1.2.45)$$

Adelantándome, se adjuntó el subíndice c a esta fuerza, si todavía no es reconocible usaremos, nuestra ya recurrente, ecuación (1.2.26) para sustituir l y reconocer que fuerza física está detrás de este término

$$f_c = \frac{(\mu r^2 \dot{\phi})^2}{\mu r^3} = \mu r \dot{\phi}^2 \quad (1.2.46)$$

Encontrando que el fenómeno del cual hablábamos era la fuerza centrífuga, f_c , una fuerza inercial que se presenta al estar en un marco de referencia que rota. Con estos términos obtenemos la fuerza efectiva

$$f_{eff} = f(r) + f_c(r) \quad (1.2.47)$$

Con esta nueva cantidad que acabamos de introducir reducimos las ecuaciones (1.2.34) y (1.2.37) a

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad f_{eff}(r) = \mu \ddot{r} \quad (1.2.48)$$

Ahora resolveremos para la primera derivada de la posición

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{\mu}(E - V_{eff}) \quad (1.2.49)$$

Físicamente, la velocidad \dot{r} es un número real por lo tanto su cuadrado es siempre positivo, de aquí se sigue

$$0 \leq \frac{2}{\mu}(E - V_{eff}) \quad (1.2.50)$$

Cuando la igualdad de esta ecuación se cumple, esto es $\dot{r} = 0$, se alcanza el punto máximo (apoápside) o el mínimo (periápside). Estos son los puntos de retorno de la órbita. Esto se da cuando el potencial efectivo es igual a la energía. Cuando V_{eff} tiene un valor mínimo o máximo y la energía E es igual a este, entonces durante toda la órbita $\dot{r} = 0$ y tenemos una órbita circular, ya que la velocidad radial es igual a 0 entonces r , que es el radio de la órbita, es un valor constante. Ninguna

trayectoria puede existir si una fuerza \mathbf{F} es menor que la fuerza f_{eff} en su mínimo (Chow, 2013).

Para demostrar esta última afirmación, consideraremos una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \quad k > 0 \quad (1.2.51)$$

El potencial efectivo sería el siguiente

$$\begin{aligned} f_{eff}(r) &= -\frac{k}{r^2} + \frac{l^2}{\mu r^3} \\ V_{eff}(r) &= -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \end{aligned} \quad (1.2.52)$$

Donde usamos el hecho que fuerza es conservativa, entonces en general $f = -\nabla V$

De esta ecuación podemos extraer los siguientes comportamientos:

$$V_{eff}(r) < 0 \quad \text{si } r \text{ es muy grande} \quad (1.2.53)$$

Ya que el término positivo del potencial se comporta como $1/r^2$ y el negativo como $1/r$

$$V_{eff}(r) \rightarrow +\infty \quad \text{si } r \rightarrow 0 \quad (1.2.54)$$

El potencial se va a $+\infty$ porque el segundo término domina para r pequeñas. Por último

$$V_{eff}(r) \rightarrow 0 \quad \text{si } r \rightarrow \infty \quad (1.2.55)$$

En la figura que sigue, 1.4, vemos los diferentes valores que puede tomar la energía con (1.2.51). Vemos 3 curvas, las punteadas representan los potenciales de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, línea punteada (naranja), y la fuerza centrífuga, línea discontinua (azul), siendo la línea continua (verde) la suma de estas dos, el potencial efectivo. Para esta y todas las gráficas de potencial, seleccionamos valores específicos de μ , l y k sin ningún criterio concreto, para resaltar las características que queremos ejemplificar.

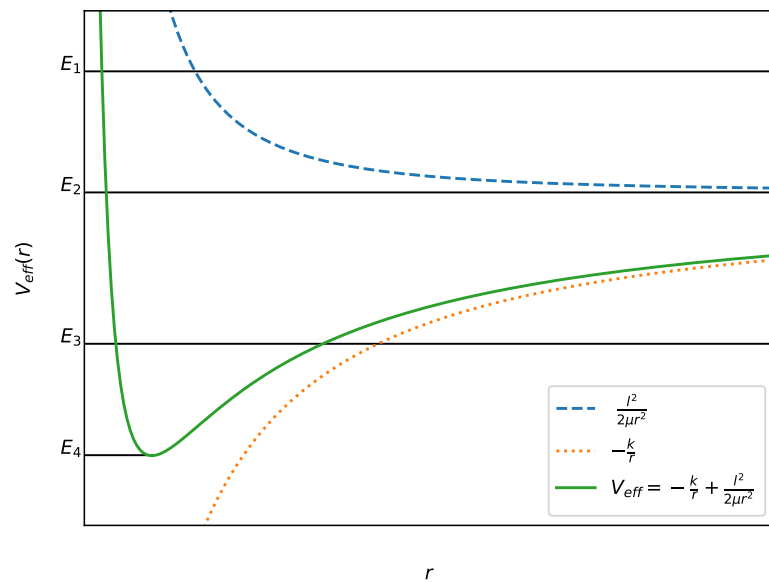


Figura 1.4: Potencial efectivo de una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. Los valores usados son $l = \mu = 11.5$ y $k = 10$.

Cuando la energía toma valores positivos $E_1 > 0$ la órbita que se genera solo presenta un límite inferior, es una órbita no ligada, los dos cuerpos no pueden estar más cerca de una r_{\min} . Esto es, los cuerpos se acercan desde el infinito hasta que son repelidos por el potencial a una distancia r_{\min} después se vuelven a alejar hacia el infinito.

Para energías iguales a 0, $E_2 = 0$ el comportamiento es igual a E_1 , los cuerpos se pueden acercar hasta una cierta r pero el comportamiento cambia cuando la energía toma valores negativos.

Para $E_3 < 0$ aparece otro límite en la órbita, en este caso superior. Esto restringe el movimiento de los cuerpos entre dos r 's, las cuales caracterizan dos órbitas circulares con energías iguales a los valores donde la línea E_3 corta la curva del potencial efectivo, obteniendo una órbita ligada. Aquí nos encontramos con órbitas limitadas, las cuales no significan que sean cerradas, siendo una órbita cerrada una que se repite exactamente tanto en posición como en velocidad después de un periodo.

Por último, el caso cuando la energía es igual al valor mínimo del potencial $E_4 = V_{min}$. En este caso los dos círculos donde está constreñido el movimiento con energía E_3 se vuelven solo un círculo con energía E_4 desapareciendo el apoápside y el periápside. Este valor se obtiene rápidamente recordando que la derivada de la función de una curva nos modela la pendiente en cada punto y que cuando la pendiente vale 0 nos encontramos en un máximo o un mínimo. Después para saber si estamos en un punto de inflexión debemos evaluar el punto en la segunda derivada y ver si el resultado es mayor o menor a cero pero al ver la gráfica sabemos que solamente tiene un mínimo.

Entonces derivaremos el potencial efectivo

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = \frac{k}{r^2} - \frac{l^2}{\mu r^3} \quad (1.2.56)$$

Igualemos a 0 y despejamos r

$$\frac{k}{r^2} - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0 \rightarrow r = \frac{l^2}{\mu k} \quad (1.2.57)$$

Al obtener el radio de la órbita circular, lo sustituimos en el potencial efectivo

$$V_{eff}(r) = -\frac{k}{\left(\frac{l^2}{\mu k}\right)} + \frac{l^2}{2\mu\left(\frac{l^2}{\mu k}\right)^2} = -\frac{k^2\mu}{l^2} + \frac{k^2\mu}{2l^2} = -\frac{k^2\mu}{2l^2} \quad (1.2.58)$$

Por lo tanto

$$E_4 = -\frac{\mu k^2}{2l^2} \quad (1.2.59)$$

Para valores de energía menores a E_4 las órbitas son imposibles, si tuviéramos estas energías por (1.2.49) tendríamos velocidades imaginarias.

En conclusión, el comportamiento es

Energía	límites	tipo de órbita
$E_1 > 0$	$r_{min} < r$	abierta
$E_2 = 0$	$r_{min} < r$	abierta
$E_3 < 0$	$r_{min} < r < r_{max}$	ligada
$E_4 = -\frac{\mu k^2}{2l^2}$	$r = \frac{l^2}{\mu k}$	circular

Tabla 1.1: Tipos de órbitas para una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Más adelante se demostrará el tipo de órbita para cada energía cuando obtengamos la ecuación de la órbita para este potencial. Cabe destacar que dependiendo del valor que tome el momento angular la curva del potencial efectivo cambiará pero no cambia la clasificación general de las órbitas.

Estas clasificaciones de órbita abierta, ligada y circular serán verdaderas para cualquier potencial atractivo que cumpla con las siguientes dos características

- Desciende más lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow \infty$
- Se acerca a infinito más lentamente que $1/r^2$ cuando $r \rightarrow 0$

Estas condiciones nos dicen que para r 's grandes la fuerza $1/r$ es más importante que la fuerza centrífuga y en el segundo caso cuando r es pequeña la que predomina es la centrífuga (Goldstein et al., 2002).

Otros ejemplos de gráficas de potenciales atractivos serían los siguientes:

La figura 1.5 está modelando el potencial de la siguiente fuerza atractiva

$$f(r) = -\frac{3k}{r^4} \quad f(r) = -\frac{k}{r^3} \quad (1.2.60)$$

y la figura 1.6 por la siguiente

$$f(r) = -kr \quad f(r) = \frac{1}{2}kr^2 \quad (1.2.61)$$

La cual es la fuerza que modela un oscilador armónico isotrópico.

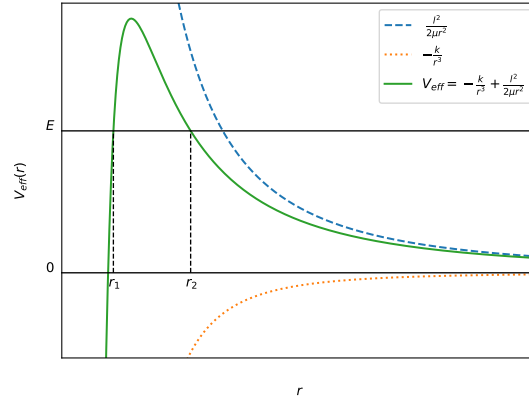


Figura 1.5: Potencial efectivo de una fuerza central atractiva inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia. Los valores usados son $l = k = 12$ y $\mu = 3.5$.

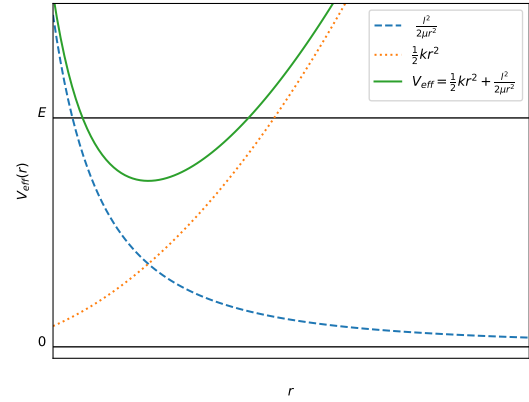


Figura 1.6: Potencial efectivo de una fuerza central atractiva proporcional a la distancia. Los valores usados son $l = k = \mu = 2.9$.

1.2.3. Ecuación de la órbita

Si recordamos las ecuaciones (1.2.40) y (1.2.42), solo debemos realizar las integrales para obtener r y φ en términos del tiempo, momento angular, energía y las posiciones iniciales pero generalmente lo que se busca es $\varphi(r)$, a esta ecuación se le conoce como ecuación de la órbita. Esta ecuación se obtiene fácilmente usando la regla de la cadena en $\dot{\varphi}$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{dt} \rightarrow \dot{\varphi} = \dot{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad (1.2.62)$$

Sustituimos la velocidad de r y de φ con las ecuaciones (1.2.49) y (1.2.26) respectivamente

$$\frac{l}{\mu r^2} = \left[\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})} \right] \frac{d\varphi}{dr} \quad (1.2.63)$$

Ahora separamos variables e integramos

$$d\varphi = \frac{\frac{l}{\mu r^2}}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_{eff})}} dr \rightarrow \varphi = \varphi_0 + l \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{r'^2} dr'}{\sqrt{2\mu(E - V_{eff})}} \quad (1.2.64)$$

Hacemos un cambio de variable $u = 1/r$, lo diferenciamos

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{r^2} \rightarrow du = -\frac{dr}{r^2} \quad (1.2.65)$$

Por lo tanto (1.2.64) queda

$$\varphi(u) = \varphi_0 - l \int_{\frac{1}{u_0}}^{\frac{1}{u}} \frac{du'}{\sqrt{2\mu[E - V_{eff}(\frac{1}{u'})]}} \quad (1.2.66)$$

Encontrando la ecuación de la órbita. Nota: recordar que la notación de las primas es simplemente para diferenciar estas variables de integración (mudas) de las reales, los límites.

Otra forma de representar esta ecuación es en su forma diferencial, la cual en algunos análisis es más fácil de manejar que su contraparte integral (1.2.64). Partiremos de la segunda ley de Newton dada por (1.2.34)

$$f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu \ddot{r} \quad (1.2.67)$$

Usamos otra vez la regla de la cadena pero esta vez en la velocidad de r

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{\mu r^2} \quad (1.2.68)$$

Donde sustituimos (1.2.26). Ahora hacemos lo mismo pero con la segunda derivada

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \rightarrow \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \frac{l}{\mu r^2} \quad (1.2.69)$$

Sustituimos (1.2.68) para desaparecer la variable t

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \frac{l}{\mu r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{l}{\mu r^2} \right) \rightarrow \ddot{r} = \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right) \\ \ddot{r} &= \frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{d(\frac{1}{r})}{d\varphi} \right) = -\frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2}\end{aligned}\tag{1.2.70}$$

En el segundo renglón volvimos a usar nuestra famosa regla de la cadena. Sustituimos este resultado en (1.2.67)

$$f(r) + \frac{l^2}{\mu r^3} = \mu \left[-\frac{l^2}{\mu^2 r^2} \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2} \right] \rightarrow f\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{l^2}{\mu} u^3 = -\frac{l^2}{\mu} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} u^2\tag{1.2.71}$$

Donde volvimos a usar el cambio de variable $u = 1/r$. Reordenamos la ecuación

$$\frac{l^2}{\mu} u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u \right) = -f\left(\frac{1}{u}\right)\tag{1.2.72}$$

A esta ecuación se le conoce como ecuación diferencial de la órbita (Gutierrez Lopez, 2019).

1.2.4. Fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia

De las fuerzas centrales la más importantes de todas es la fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia, es el tipo de fuerza que rige la interacción gravitacional y eléctrica en nuestro Universo, por eso se prestó énfasis al potencial debido a esta fuerza en la sección 1.2.2. Entonces tenemos la fuerza y su potencial dados por

$$f(r) = -\frac{k}{r^2} \quad V(r) = -\frac{k}{r} \quad k > 0\tag{1.2.73}$$

Sustituimos el potencial en la ecuación de la órbita (1.2.66)

$$\varphi(u) = \varphi_0 - l \int_{\frac{1}{u_0}}^{\frac{1}{u}} \frac{du'}{\sqrt{2\mu(E - (-ku' + \frac{l^2}{2\mu}u'^2))}}\tag{1.2.74}$$

Reacomodamos los términos

$$\varphi(u) = \varphi_0 - \int_{\frac{1}{u_0}}^{\frac{1}{u}} \frac{du'}{\sqrt{\frac{2\mu E}{l^2} + \frac{2\mu k}{l^2}u' - u'^2}} \quad (1.2.75)$$

Para resolver esta integral nos percatamos que tiene la forma de una integral ya resuelta (Goldstein et al., 2002).

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-c}} \arccos\left(-\frac{b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right) \quad (1.2.76)$$

Esta integral estándar es una integral indefinida, la nuestra es definida pero simplemente la constante de integración que sale de la integral definida hacemos que la absorba la otra constante de integración φ_0 , por lo tanto quitamos los límites de (1.2.75) y aplicamos 1.2.76 con

$$a = \frac{2\mu E}{l^2} \quad b = \frac{2\mu k}{l^2} \quad c = -1 \quad (1.2.77)$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \varphi_0 - \frac{1}{\sqrt{-(-1)}} \arccos\left(-\frac{(\frac{2\mu k}{l^2}) + 2(-1)u}{\sqrt{(\frac{2\mu k}{l^2})^2 - 4(\frac{2\mu E}{l^2})(-1)}}\right) \\ &= \varphi_0 - \arccos\left(\frac{2u - \frac{2\mu k}{l^2}}{\sqrt{(\frac{2\mu k}{l^2})^2 + \frac{8\mu E}{l^2}}}\right) = \varphi_0 - \arccos\left(\frac{\frac{2\mu k}{l^2}(\frac{l^2}{\mu k}u - 1)}{\frac{2\mu k}{l^2}\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}\right) \\ &= \varphi_0 - \arccos\left(\frac{\frac{l^2}{\mu k}u - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}}}\right) \end{aligned} \quad (1.2.78)$$

Despejamos u

$$u = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \quad (1.2.79)$$

Un negativo se eliminó en el despeje debido a que la función coseno es par, esto es $\cos(-x) = \cos x$. Por último regresamos a la variable r

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) \right] \quad (1.2.80)$$

Si comparamos (1.2.80) con la ecuación de las secciones cónicas con el origen en uno de los focos

$$\frac{1}{r} = C[1 + e \cos(\theta - \theta_0)] \quad (1.2.81)$$

Vemos que son idénticas y podemos identificar la excentricidad e como

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \quad (1.2.82)$$

Dependiendo del valor que tome la excentricidad será la forma de la órbita, como se ve en la tabla 1.2.

Excentricidad	Energía	tipo de cónica
$e > 1$	$E > 0$	hiperbólica
$e = 1$	$E = 0$	parabólica
$0 < e < 1$	$-\frac{\mu k^2}{2l^2} < E < 0$	elíptica
$e = 0$	$E = -\frac{\mu k^2}{2l^2}$	circular

Tabla 1.2: Tipo de cónica y energías según la excentricidad para una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Obteniendo el tipo de cónica de las órbitas de la tabla 1.1 y las energías son las observadas en la figura 1.4. Estos resultados son en el caso atractivo, donde $k > 0$, por otro lado si $k < 0$ estaríamos en el caso repulsivo. Entonces de (1.2.80) tenemos

$$0 > 1 + e \cos(\varphi - \varphi_0) \rightarrow e > 1 \quad (1.2.83)$$

Al tener que la excentricidad es siempre mayor a 1, tenemos que las trayectorias son hiperbólicas, ya que está es una característica de estas secciones cónicas. Además solo se admitirían energías positivas, como se ve si sustituimos esta condición en (1.2.82)

$$1 < \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \rightarrow 0 < \frac{2El^2}{\mu k^2} \rightarrow 0 < E \quad (1.2.84)$$

Concordando con la tabla 1.2 (Gutierrez Lopez, 2019) .

Por otro lado retomaremos (1.2.80) para obtener los términos a , b y τ , los cuales son el semieje mayor, semieje menor y el período de la órbita, respectivamente, en términos de las constantes físicas.

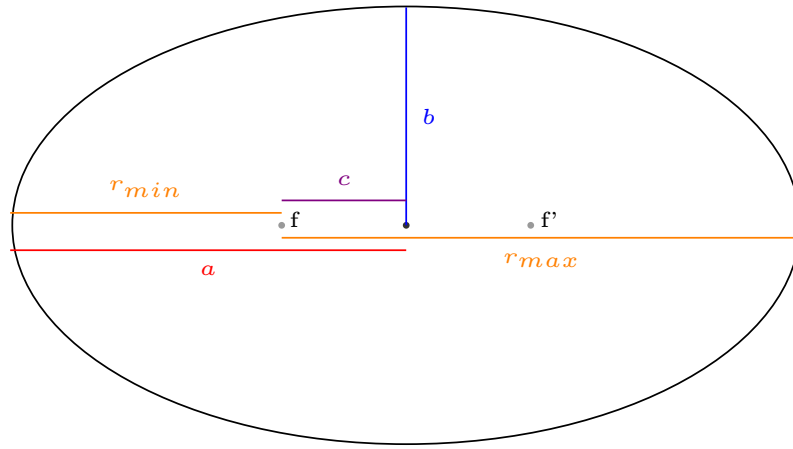


Figura 1.7: Componentes de una elipse. r_{min} y r_{max} la estamos tomando con respecto al foco f pero pudimos tomarlos con respecto al foco f' .

De la figura 1.7 vemos que

$$2a = r_{min} + r_{max} \quad (1.2.85)$$

Además en estos puntos extremos el coseno en (1.2.80) toma los valores de 1 y -1 , entonces

$$r_{min} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1+e} \quad r_{max} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1-e} \quad (1.2.86)$$

Se eligieron así los signos, ya que r_{min} debe ser menor a r_{max} . Sustituimos (1.2.86) en (1.2.85)

$$2a = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1+e} + \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1-e} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{2}{1-e^2} \rightarrow a = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1-e^2} \quad (1.2.87)$$

Ahora usamos las siguientes relaciones conocidas de la elipse $c^2 = a^2 - b^2$ y $e = c/a$ obteniendo el semieje menor, entonces

$$b^2 = a^2 - (ea)^2 = a^2(1 - e^2) \quad (1.2.88)$$

Sustituimos (1.2.87)

$$b^2 = \left[\frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1 - e^2} \right]^2 (1 - e^2) = \left(\frac{l^2}{\mu k} \right)^2 \frac{1}{1 - e^2} \rightarrow b = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (1.2.89)$$

Además sabemos cuanto vale la excentricidad (1.2.82), sustituimos esto en (1.2.87) y (1.2.89)

$$a = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{1 - \left(\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right)^2} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{\frac{2El^2}{\mu k^2}} = -\frac{k}{2E} \quad (1.2.90)$$

$$b = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}} \right)^2}} = \frac{l^2}{\mu k} \frac{1}{\sqrt{\frac{2El^2}{\mu k^2}}} = \frac{l}{\sqrt{-2\mu E}} \quad (1.2.91)$$

Por último, para el período retomamos (1.2.31). Por definición el período es el tiempo que le toma a un cuerpo realizar una órbita completa. Si tomamos $\Delta t = \tau$, donde τ es el período, entonces el área total que recorre será el área de toda la elipse, $\Delta A = \pi ab$. Donde a es el semieje mayor y b el menor. Por lo tanto

$$\pi ab = \frac{l}{2\mu} \tau \rightarrow \tau = \frac{2\pi\mu}{l} ab \quad (1.2.92)$$

Sustituyendo (1.2.90) y (1.2.91) obtenemos el período en término de la energía

$$\tau = \frac{2\pi\mu}{l} \left(-\frac{k}{2E} \right) \left(\frac{l}{\sqrt{-2\mu E}} \right) = -\frac{\pi\mu k}{E\sqrt{-2\mu E}} \quad (1.2.93)$$

Como estamos hablando de elipse la energía E es siempre negativa (tabla 1.2), entonces el término $-1/E$ podemos meterlo a la raíz tomando el valor absoluto de la energía

$$\tau = \frac{\pi\mu k}{\sqrt{2\mu|E|^3}} \quad (1.2.94)$$

Como observamos el período depende proporcionalmente de la raíz cuadrada de la masa μ , de k e inversamente proporcionalmente de la energía E a la $3/2$.

Capítulo 2

Construcción del integrador de N cuerpos

En este capítulo explicaremos cómo resolver la segunda ley de Newton para N cuerpos en interacción gravitacional de manera discreta, el método numérico que usaremos será Runge-Kutta de orden 4.

2.1. Método numérico Runge-Kutta

Uno de los métodos numéricos más utilizados, por su relación tiempo de cómputo-precisión, para resolver problemas de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias es Runge-Kutta, que es muy similar al tipo de problema que resolveremos aquí. Runge-Kutta tiene muchas variaciones, Runge-Kutta de orden 2, 3, 4, Runge-Kutta mejorado, Runge-kutta acelerado, entre muchos otros (Faranak et al., 2013). Cada una tiene sus particularidades que dependiendo del problema a abordar y las limitaciones técnicas se escogerá uno u otro. En este trabajo usaremos el clásico Runge-Kutta de orden 4, el cual hace 4 evaluaciones por paso, siendo las evaluaciones el número de pendientes que se utilizan para calcular el siguiente valor (las k 's). Por ejemplo para un Runge-kutta de orden 2 se hacen 2 evaluaciones por paso

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf_r(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf_r(t_n, y_n + k_1) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)
\end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Y como habíamos dicho para Runge-Kutta de orden 4 son 4 evaluaciones por paso

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(t_n, y_n) \\
k_2 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf(t_n, y_n + k_3) \\
y_{n+1} &= y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

(Burden and Faires, 2010, Epperson, 2013, Gautschi, 2011). La siguiente tabla describe el error de truncamiento local dependiendo de cuántas evaluaciones por paso se hacen

Evaluaciones por paso	2	3	4	$5 \leq n \leq 7$	$8 \leq n \leq 9$	$10 \leq n$
Error de truncamiento	$O(h^2)$	$O(h^3)$	$O(h^4)$	$O(h^{n-1})$	$O(h^{n-2})$	$O(h^{n-3})$

Tabla 2.1: Error de truncamiento local para diferentes evaluaciones por paso en Runge-Kutta (Burden and Faires, 2010).

Se ve en la tabla 2.1 que después de 4 evaluaciones por paso este error de truncamiento local ya no es lineal en el exponente y cada evaluación por paso es más tiempo de cómputo, por lo tanto opté por elegir Runge-Kutta de orden 4 (Burden and Faires, 2010).

Las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.2) sirven solo para ecuaciones ordinarias de primer orden con una sola variable dependiente y , siendo t la independiente

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{2.1.3}$$

Pero nosotros necesitamos aplicar este método para 3 variables dependientes $(x(t), y(t), z(t))$ y para una ecuación de segundo orden (1.1.1). Por fortuna, este

problema ya ha sido resuelto y generalizaron el método de Runge-kutta para un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden. Si tenemos el siguiente sistema de m ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_m) \\ &\vdots \\ \frac{dy_m}{dt} &= f_m(t, y_1, y_2, \dots, y_m)\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

Siendo t la variable independiente que va de $a \leq t \leq b$, e $y_i = y_i(t)$ son las variables dependientes con condiciones iniciales

$$y_1(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_m(a) = \alpha_m\tag{2.1.5}$$

Donde a, b, α_m son números reales. Pueden ser y 's las coordenadas (x, y, z) . Para el método clásico de Runge-kutta de orden 4, si partimos el intervalo de t , $[a, b]$ de la siguiente manera

$$t_j = a + jh \quad j = 1, 2, \dots, N\tag{2.1.6}$$

Donde $N > 0$ y $h = (b - a)/N$. Denotaremos las $y_{m,j}$ como la variable a aproximar m en el tiempo j .

$$y_{1,0}(a) = \alpha_1, \quad y_{2,0}(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_{m,0}(a) = \alpha_m\tag{2.1.7}$$

Entonces para calcular cada $y_{i,j+1}$, donde $i = 1, 2, \dots, m$, tenemos

$$\begin{aligned}k_{1,i} &= hf_i(t_j, y_{1,j}, y_{2,j}, \dots, y_{m,j}) \\ k_{2,i} &= hf_i(t_j + \frac{h}{2}, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m}) \\ k_{3,i} &= hf_i(t_j + \frac{h}{2}, y_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, y_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \dots, y_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m}) \\ k_{4,i} &= hf_i(t_j + h, y_{1,j} + k_{3,1}, y_{2,j} + k_{3,2}, \dots, y_{m,j} + k_{3,m})\end{aligned}\tag{2.1.8}$$

Por último

$$y_{i,j+1} = y_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}) \quad (2.1.9)$$

Para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Ahora para ecuaciones ordinarias de orden superior

$$y^{(m)}(t) = f(t, y(t), y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \quad (2.1.10)$$

Donde, de igual manera, $a \leq t \leq b$ y condiciones iniciales

$$y(a) = \alpha_1, \quad y^{(1)}(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \quad (2.1.11)$$

Podemos pasar de esta ecuación a un sistema de ecuaciones ordinarias de primer orden. Hacemos $y_1(t) = y(t)$, $y_2(t) = y^{(1)}(t)$, \dots , $y_m(t) = y^{(m-1)}(t)$. Derivamos estas igualdades

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= \frac{dy}{dt} = y^2 \\ \frac{dy_2}{dt} &= \frac{dy^{(1)}}{dt} = y^3 \\ &\vdots \\ \frac{dy_{m-1}}{dt} &= \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = y_m \\ &y \\ \frac{dy_m}{dt} &= \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Donde $y^{(m)} = f(t, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(m-1)}(t)) \rightarrow dy_m/dt = f(t, y_1, y_2, \dots, y_m)$, con condiciones iniciales

$$y_1(a) = y(a) = \alpha_1, \quad y_2(a) = y^{(1)}(a) = \alpha_2, \quad \dots, \quad y_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m \quad (2.1.13)$$

Retomando las ecuaciones y condiciones iniciales de (2.1.4), por lo tanto podemos aplicar el método anterior (Burden and Faires, 2010).

2.2. Implementación del método a la segunda ley de Newton

Para simular nuestra interacción gravitacional usaremos 2 Runge-kutta's, uno para aproximar la posición y otro para la velocidad, los cuales estarán acoplados, como se mostró en la sección anterior. En primera instancia tenemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}}{dt} &= f_r(\dot{\mathbf{r}}) \\ \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} &= f_v(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{2.2.14}$$

Donde \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ son y en su respectivo Runge-Kutta si los comparamos con (2.1.4). Ahora las funciones f 's para los métodos son las siguientes

$$f_r(\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}} \quad f_v(\mathbf{r}) = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_{ij}|^3} \mathbf{r}_{ij}\tag{2.2.15}$$

A partir de aquí abusaremos de la notación que usamos para representar una cantidad vectorial (\mathbf{w} por ejemplo), ahora \mathbf{w} significará un arreglo de $1 \times (3N)$ el cual contiene la información de las tres componentes de los N cuerpos. Por consiguiente \mathbf{r}_{ij} ahora es \mathbf{r} ya que los vectores posición de los N cuerpos están en \mathbf{r} . Además f_v es el vector aceleración de los N cuerpos debido a la interacción gravitacional entre ellos.

Como habíamos mencionado anteriormente estas funciones están acopladas. Para resolver este problema vamos a suponer que las dos funciones dependen de las tres variables $(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, entonces las k 's de (2.1.8) quedarían de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{1r} &= hf_r(t_n, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n) \\ \mathbf{k}_{2r} &= hf_r\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{1r}}{2}, \dot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mathbf{k}_{1v}}{2}\right) \\ \mathbf{k}_{3r} &= hf_r\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{2r}}{2}, \dot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mathbf{k}_{2v}}{2}\right) \\ \mathbf{k}_{4r} &= hf_r(t_n, \mathbf{r}_n + \mathbf{k}_{3r}, \dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{k}_{3v})\end{aligned}\tag{2.2.16}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{1v} &= hf_v(t_n, \mathbf{r}_n, \dot{\mathbf{r}}_n) \\
\mathbf{k}_{2v} &= hf_v\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{1r}}{2}, \dot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mathbf{k}_{1v}}{2}\right) \\
\mathbf{k}_{3v} &= hf_v\left(t_n + \frac{h}{2}, \mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{2r}}{2}, \dot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mathbf{k}_{2v}}{2}\right) \\
\mathbf{k}_{4v} &= hf_v(t_n, \mathbf{r}_n + \mathbf{k}_{3r}, \dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{k}_{3v})
\end{aligned} \tag{2.2.17}$$

Ya teniendo las \mathbf{k} 's, actualizamos la posición y velocidad

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_{n+1} &= \mathbf{r}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_{1r} + 2\mathbf{k}_{2r} + 2\mathbf{k}_{3r} + \mathbf{k}_{4r}) \\
\dot{\mathbf{r}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{r}}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_{1v} + 2\mathbf{k}_{2v} + 2\mathbf{k}_{3v} + \mathbf{k}_{4v})
\end{aligned} \tag{2.2.18}$$

Sustituyendo las funciones de (2.2.15) en nuestras \mathbf{k} 's obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{1v} &= h \left[-G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_n|^3} \mathbf{r}_n \right] \\
\mathbf{k}_{2v} &= h \left[-G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{1r}}{2}|^3} \left(\mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{1r}}{2} \right) \right] \\
\mathbf{k}_{3v} &= h \left[-G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{2r}}{2}|^3} \left(\mathbf{r}_n + \frac{\mathbf{k}_{2r}}{2} \right) \right] \\
\mathbf{k}_{4v} &= h \left[-G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|\mathbf{r}_n + \mathbf{k}_{3r}|^3} (\mathbf{r}_n + \mathbf{k}_{3r}) \right]
\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_{1r} &= h \dot{\mathbf{r}}_n \\
\mathbf{k}_{2r} &= h \left(\dot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mathbf{k}_{1v}}{2} \right) \\
\mathbf{k}_{3r} &= h \left(\dot{\mathbf{r}}_n + \frac{\mathbf{k}_{2v}}{2} \right) \\
\mathbf{k}_{4r} &= h (\dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{k}_{3v})
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

Ninguna de las \mathbf{k} 's es dependiente del tiempo, \mathbf{k}_{ir} solo es la velocidad evaluada en cada aproximación. Cabe notar que al implementarlo en el código se deben de calcular las \mathbf{k}_1 's, después \mathbf{k}_2 's y así sucesivamente y no primero solo \mathbf{k}_r después \mathbf{k}_v o viceversa. Esto se debe al acoplamiento de las funciones f 's y en el algoritmo que sigue se ejemplifica esto.

inicio

Inicializamos \mathbf{r}, \mathbf{v} y t ;

para $i = 0$ **hasta** $i = tp$ **incrementando en 1 hacer**

Escribimos en un archivo \mathbf{r} ;

$\mathbf{k}_{1v} = dt * aceleraciones(\mathbf{r})$;

$\mathbf{k}_{1r} = dt * v$;

$\mathbf{k}_{2v} = dt * aceleraciones(\mathbf{r} + \mathbf{k}_{1r}/2)$;

$\mathbf{k}_{2r} = dt * (v + \mathbf{k}_{1v}/2)$;

$\mathbf{k}_{3v} = dt * aceleraciones(\mathbf{r} + \mathbf{k}_{2r}/2)$;

$\mathbf{k}_{3r} = dt * (v + \mathbf{k}_{2v}/2)$;

$\mathbf{k}_{4v} = dt * aceleraciones(\mathbf{r} + \mathbf{k}_{3r})$;

$\mathbf{k}_{4r} = dt * (v + \mathbf{k}_{3v})$;

$\mathbf{r} += (\mathbf{k}_{1r} + 2 * \mathbf{k}_{2r} + 2 * \mathbf{k}_{3r} + \mathbf{k}_{4r})/6$;

$\mathbf{v} += (\mathbf{k}_{1v} + 2 * \mathbf{k}_{2v} + 2 * \mathbf{k}_{3v} + \mathbf{k}_{4v})/6$;

$t += dt$;

fin

fin

Algoritmo 1: Algoritmo para calcular la aceleración debida a la interacción gravitacional entre N cuerpos. tp significa pasos totales de la simulación.

Donde *aceleraciones* es la función de interacción f_v , que solo depende de las posiciones \mathbf{r} . Ya que tenemos implementado el método numérico, lo siguiente es implementar las funciones que usarán estos métodos. Para f_r es trivial, ya que solo es el vector velocidad, para f_v es un poco más complicado. El siguiente algoritmo, 2, muestra como fue su implementación para este trabajo.

Para calcular la aceleración del cuerpo i debido a la interacción con los cuerpos j 's

(esto sería f_v), se usaron dos ciclos i y j , el ciclo i representa el cuerpo al cual se le está calculando la aceleración, el ciclo j calcula la interacción que tiene el cuerpo i con todos los j 's.

$$f_v = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} \quad (2.2.21)$$

Después tenemos una condición, la primera parte rompe los ciclos si ya se calcularon todas las interacciones con los cuerpos j para todos los i y la segunda evita que se calcule una interacción del cuerpo i consigo mismo. Por último se van sumando todas las aceleraciones debido a la interacción del cuerpo i con los j 's.

inicio

Inicializamos \mathbf{a} , $i = 0$, $j = 0$;

mientras $i < N$ **hacer**

mientras $j < N$ **hacer**

si $i = N$ **y** $i = j$ **entonces**

break ;

fin

si no, **si** $i = j$ **entonces**

$j += 1$;

$\mathbf{a}[3 * i : 3 * i + 3] += -G m_j \frac{\mathbf{r}[3 * i : 3 * i + 3] - \mathbf{r}[3 * j : 3 * j + 3]}{|\mathbf{r}[3 * i : 3 * i + 3] - \mathbf{r}[3 * j : 3 * j + 3]|^3}$;

$j += 1$;

fin

$i += 1$;

$j = 0$;

fin

fin

Algoritmo 2: Runge-Kutta de orden 4 para calcular la posición y velocidad de un sistema de N cuerpos en interacción gravitacional.

En cada iteración se calcula la aceleración del cuerpo i -ésimo en las 3 coordenadas. Por ejemplo, $\mathbf{a}[3 * 0 : 3 * 0 + 3] = \mathbf{a}[0 : 3]$ son las aceleraciones de las coordenadas

$x = \mathbf{a}[0]$, $y = \mathbf{a}[1]$, $z = \mathbf{a}[2]$ del primer cuerpo, donde la notación $[a : b]$ indica que se tomarán los elementos del arreglo del a hasta el $b - 1$. Las aceleraciones del segundo cuerpos serían $\mathbf{a}[3 * 1 : 3 * 1 + 3] = \mathbf{a}[3 : 6]$ y así sucesivamente. Con \mathbf{r} es el mismo funcionamiento solo que en este caso son las posiciones de las coordenadas y no las aceleraciones.

Este algoritmo se repiten N veces para el ciclo i y $N - 1$ para el j , a su vez esto se repite cuatro veces, una por cada vez que se llama la función *aceleraciones*, para finalizar se repite tp veces, donde tp es el número totales de pasos de la simulación. Por lo tanto hay $N * (N - 1) * 4 * tp$ iteraciones para calcular las posiciones (el arreglo \mathbf{r}) de los N cuerpos.

2.3. Calibración

Ya que tenemos nuestro simulador lo calibraremos, comprobando la convergencia, la estabilidad de la órbita, y compararemos los resultados con la teoría desarrollada en el capítulo 1. Para esto usaremos dos cuerpos, como vimos en el capítulo 1, el problema de dos cuerpos ya está resuelto analíticamente, además los datos de la Tierra y la Luna los podemos encontrar fácilmente en internet, en particular en la base de datos de la NASA. Por lo tanto simularemos la Tierra y la Luna usando los datos proporcionados por la NASA (Williams, 2021). Es importante notar que nos limitamos al número de cifras significativas reportadas en la referencia que consultamos.

Como condiciones iniciales (CI) pondremos a la Tierra en el origen de coordenadas sin velocidad y a la Luna en su apogeo, como se ve en la tabla 2.2.

Cuerpos	masa (kg)	Posición (m)	Velocidad ($\frac{m}{s}$)
Tierra	5.9722×10^{24}	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
Luna	0.07346×10^{24}	$(0.4055 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 970, 0)

Tabla 2.2: CI del sistema Tierra-Luna con la Luna en su apogeo.

Cabe aclarar que estamos suponiendo que la Tierra está en reposo cuando la Luna está en su apogeo.

No necesariamente debemos usar datos reales, se puede hacer con cualesquiera dos cuerpos que generen una órbita. Usaremos estos datos para corroborar que los resultados obtenidos son coherentes con el fenómeno físico observado.

2.3.1. Elección de unidades

Ahora que tenemos todas nuestras CI, debemos profundizar en nuestras unidades. Las unidades son parte importante para las simulaciones, y se eligen unidades que ayuden tanto a la interpretación de los resultados así como a la mejora de su desempeño, ya que dependiendo de cuáles sean estas, los valores numéricos de las posiciones, las velocidades y del tiempo serán grandes o pequeños. Lo más óptimo es no tener valores ni muy grandes, para evitar el overflow, ni muy pequeños, evitando el underflow (Van Elteren et al., 2014).

En la rama de la astrofísica comúnmente se escala la constante gravitacional G a uno y se adimensiona (Aarseth, 2003). Partiendo de ahí las unidades se deciden. Se usa esta constante y no otra porque es la constante que modela la interacción gravitacional, la cual es la única en nuestras simulación. Entonces

$$G [=] g \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad (2.3.22)$$

Donde $g = 6.6743 \times 10^{-11}$ en el sistema internacional (SI).

Las unidades cambian dependiendo del problema o sistema que se esté abordando, nuestra constante a escalar G tiene unidades de masa, distancia y tiempo. Para convertir $G = 1$, elegimos nuevas unidades para estas tres cantidades físicas.

Para este sistema lo principal son las posiciones de los cuerpos, distancia, y el tiempo de evolución del sistema, quedando la masa en un segundo plano ya que es un valor constante, por lo tanto no nos preocupa que unidades tome la masa después de nuestros cambios de unidades en las otras variables.

En este sistema tomaremos como criterio para el cambio de unidades:

- La distancia media del ecuador de la Tierra a la Luna para las distancias.
- El día terrestre para el tiempo.

Elegimos la distancia media del ecuador de la Tierra a la Luna ya que es fácil de interpretar la escala en las gráficas, además las distancias tendrán valores cercanos a la unidad, esto es, las gráficas que obtendremos irán de -1 a 1 tanto en el eje x como en el y . Para el tiempo, de igual manera, elegimos días por su fácil interpretación en la simulación, con esto $dt = 1$ sería un día, entonces un $dt = 0.0001$ son 0.144 minutos. Estos números en cálculos numéricos son números pequeños, pero no tan pequeños como para acercarse al cero de la máquina. Ahora sí, transformamos nuestra constante G con esas unidades.

Distancia media del ecuador a la Luna: $1 M_l = 0.378 \times 10^9$ m.

Tiempo en días: $1 D = 86400$ s

$$G [=] g \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} = g \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \left(\frac{1 M_l}{0.378 \times 10^9 \text{ m}} \right)^3 \left(\frac{86400 \text{ s}}{1 D} \right)^2 = h \frac{M_l^3}{\text{kg D}^2} \quad (2.3.23)$$

Donde $h \approx 9.22482 \times 10^{-27}$.

Por último para obtener las unidades de la masa igualamos G a un uno adimensional, obteniendo nuestras nuevas unidades de la masa

$$1 [=] h \frac{M_l^3}{\text{kg D}^2} \rightarrow 1 \text{ kg} [=] h \frac{M_l^3}{D^2} \quad (2.3.24)$$

Definiremos $ks = M_l^3 / D^2$. Además pondremos el tamaño de paso (dt) en función del número de pasos (N) y el tiempo total (t_f), esto es

$$dt(t_f, N) = \frac{t_f - t_0}{N} \quad (2.3.25)$$

Donde tomaremos $t_0 = 0$ e iremos variando N para obtener un dt que nos de convergencia en un t_f dado.

2.3.2. Convergencia

Con nuestras unidades bien definidas nos toca elegir, o mejor dicho encontrar, el tamaño de paso óptimo para nuestra simulación. Entonces t es el tiempo de la simulación, el cual está fijo, por lo tanto nos centraremos en el número de pasos N . Primero correremos la simulación por 27.3217 días, que es una revolución de la Luna alrededor de la Tierra (Williams, 2021). El primer valor de N que tomaremos

es de 100. Este valor es una suposición o propuesta inicial, elegimos este valor porque el tamaño de paso que obtenemos es de 0.2732, y suponiendo que el error de truncamiento local es exactamente h^4 , como sugiere la tabla 2.1. Entonces el valor del error de truncamiento local sería aproximadamente 0.0055 al calcular nuestras posiciones y velocidades.

Vemos en la gráfica 2.1 que la órbita de la Luna se cierra aproximadamente en 27 días, lo cual es lo esperado. También observamos como la Tierra siente la interacción de la Luna, moviéndose una cantidad no despreciable, esto es por la similitud entre sus masas, ya que la Tierra solo tiene 10 veces más masa que la Luna (tabla 2.2). A simple vista la órbita parece muy circular, lo cual las observaciones nos han dicho que lo es, pero también el graficador que se está utilizando tiende a hacer las elipses más circulares. Antes de comprobar si realmente la energía, momento angular y la excentricidad son correctas, simularemos 10 revoluciones de la Luna y con este número de vueltas trabajemos en lo que queda de la sección, para obtener convergencia por lo menos en este intervalo de tiempo. En la figura 2.2 se ve que ahora con $N = 100$ obtenemos un resultado totalmente erróneo, donde la Luna sale disparada de su órbita.

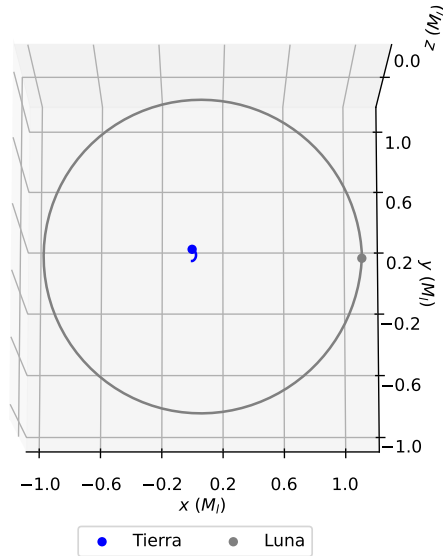


Figura 2.1: $N = 100$, $dt = 0.2732 D$, $t_f = 27.3217 D$

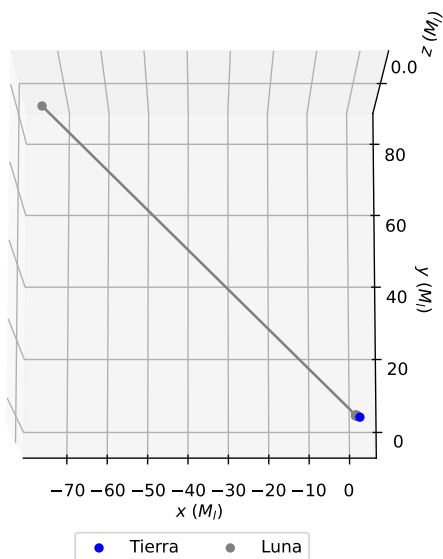


Figura 2.2: $N = 100$, $dt = 2.7321 D$, $t_f = 273.217 D$

Aumentando el número de pasos a $N = 1000$, vemos un fenómeno que a primera instancia no se esperaría, figura 2.3. Se espera que la Tierra sí sienta el efecto gravitacional de la Luna, como comentamos antes, pero el comportamiento que esperábamos era ver a la Tierra haciendo una pequeña órbita con respecto al centro de masa, el cual en la vida real se encuentra dentro de la Tierra pero como estamos tomando masas puntuales parece que está afuera. Pero lo que obtuvimos fue a la Tierra desplazándose hacia el eje y positivo. Para descartar que el comportamiento fuera exclusivo de este simulador se simuló el mismo sistema con las mismas CI en el simulador usado en este artículo (Stadel, 2001). Al simularlo se obtuvo el mismo resultado, por lo tanto las probabilidades de un error en la programación disminuyen. Como comentamos al inicio de la sección supusimos que la Tierra tiene velocidad 0 cuando la Luna está en su apogeo, lo cual no era necesariamente cierto, además estamos simulando un sistema aislado Tierra-Luna, los efectos de los otros objetos del sistema solar no se están tomando en cuenta. La dirección del desplazamiento en el eje y positivo no es general, está en esta dirección porque la velocidad inicial de la Luna apunta en la misma dirección, si cambiamos la velocidad, ya sea, negativa o en dirección del eje x o z , el desplazamiento se hará acorde a la dirección de la velocidad inicial.

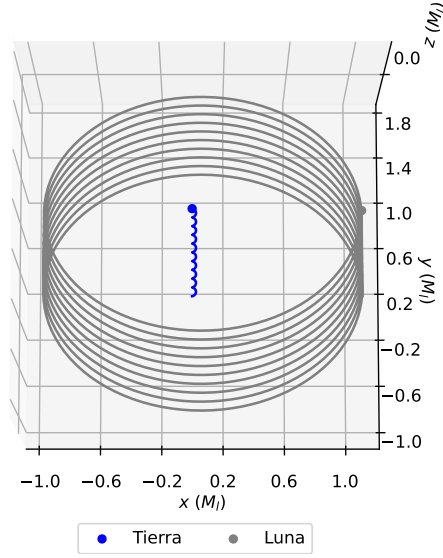


Figura 2.3: $N = 1000$, $dt = 0.2732 D$, $t_f = 273.217 D$

Corregiremos este impulso inicial generado en la Tierra al tomar el sistema aislado Tierra-Luna. El primer método que exploraremos es encontrar la velocidad inicial de la Tierra que compense el impulso. Graficando las velocidades de la Tierra en función del tiempo, fig 2.4. Observamos que $v_z = 0$ lo cual es correcto, el plano de la órbita está sobre el plano x-y. La velocidad en x está oscilando alrededor del 0, por esta razón en la figura 2.3 la Tierra hace medios círculos en su desplazamiento. Por último, la velocidad en y también oscila pero alrededor de un valor positivo. De aquí podemos obtener el promedio de $v_y \approx 0.0027 \frac{M_l}{D}$. En el SI sería $v_y \approx 11.778 \frac{m}{s}$, entonces si la Tierra tiene $v_y \approx -11.7777 \frac{m}{s}$, nos deshacemos de su desplazamiento como se ve en la figura 2.5.

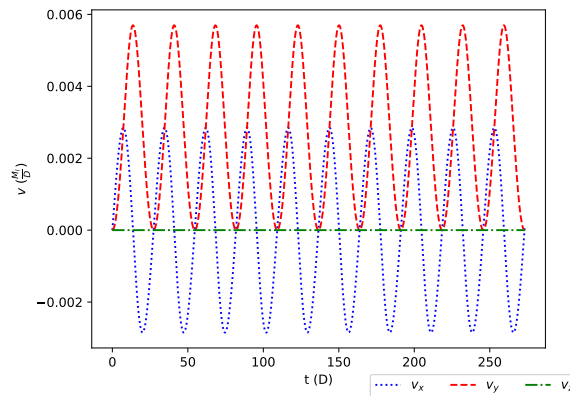


Figura 2.4: Velocidades de la Tierra de la figura 2.3

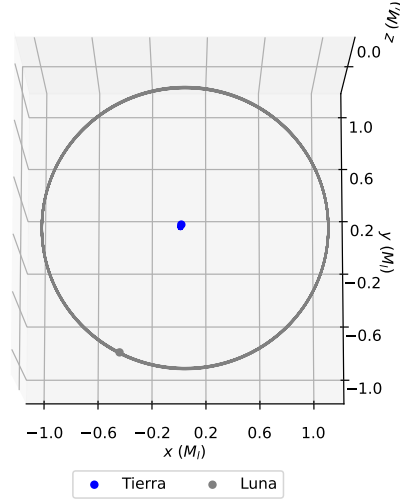


Figura 2.5: órbita de la figura 2.3 corregida calculando una velocidad inicial de la Tierra.

Si comparamos la figura 2.1 con la figura 2.5, vemos que la luna, círculo gris, no terminan donde mismo; esto es porque modificamos el período. Si lo calculamos usando (1.2.94), obtenemos que $\tau \approx 28.224$ días, aproximadamente un día más que el período reportado por la NASA (Williams, 2021). Esto se puede deber al calentamiento del error numérico y a la imprecisión al calcular la velocidad de corrección. En la figura 2.6 podemos ver cómo no eliminamos el impulso completamente.

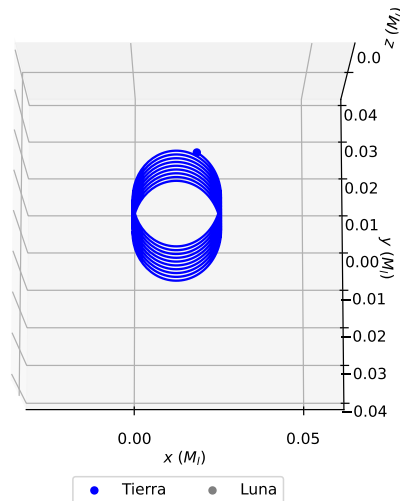


Figura 2.6: Zoom a la Tierra de la figura 2.5

La otra forma es, en lugar de ver la evolución del sistema desde una tercera vista, lo veamos desde la Tierra. Para esto nos posicionamos en la Tierra restando su posición en cada momento tanto a la Luna como a la Tierra misma, obteniendo la figura 2.7

Como vemos el período de la órbita no cambia haciendo esto, además el impulso desaparece completamente ya que estamos dejando a la Tierra en el origen. Cabe aclarar que la desventaja de esta solución es que solo funciona cuando hay un cuerpo central y los otros cuerpos orbitan alrededor de este.

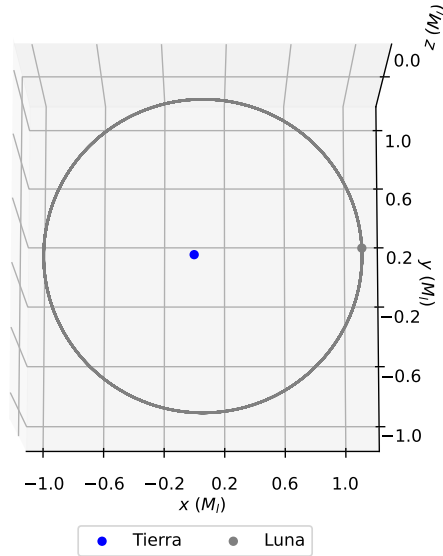


Figura 2.7: órbita de la figura 2.3 corregida colocándonos en el marco de referencia de la Tierra.

Ahora encontraremos un número N que al seguirlo aumentando no hay una diferencia significativa entre las órbitas. El método que usaremos es aumentar nuestra $N = 1000$ actual por potencias de 2 y comparar $N = 1000 * 2^i$ con $N = 1000 * 2^{i+1}$, donde $i = 0, 1, 2, \dots$. La finalidad es poder comparar las posiciones en tiempos iguales. Esta diferencia en las posiciones es el error que buscamos minimizar. Por ejemplo si $i = 0$ e $i = 1$, cada dos mediciones de tiempo en $i = 1$ tendremos el mismo tiempo en $i = 0$ y podremos comparar la posición de la Luna, y/o de la Tierra, pero nos centraremos solo en la Luna. Usando este método, encontramos que para $i = 4$ e $i = 5$ la diferencia máxima entre las trayectorias de la Luna es de $\Delta_{max} \approx 4.472 \times 10^{-10}$, y la raíz del error cuadrático medio (RMSE) es $RMSE \approx 1.917 \times 10^{-10}$.

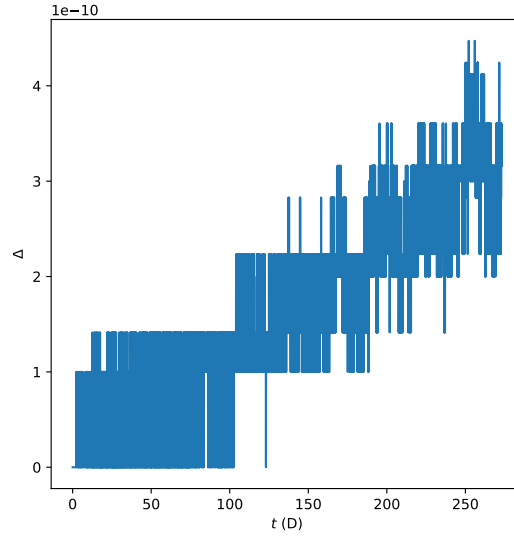


Figura 2.8: Diferencia al comparar órbitas con $N = 16000$ y $N = 32000$

Con un número de pasos de $N = 32000$, obtenemos $dt = 0.0085$ y un error de 5.22×10^{-9} , continuando con la suposición que el error es exactamente h^4 (ver tabla 2.1). Por ello, elegimos este valor de N para la integración. En la figura 2.8 graficamos la diferencia entre las dos N 's, podemos ver que tiende a aumentar la diferencia entre más tiempo de simulación pasa.

2.3.3. Estabilidad de la órbita

Nuestro simulador ya convergió en el lapso de tiempo elegido, ahora veremos la estabilidad de la órbita. Al tener un sistema aislado de dos cuerpos la órbita no precipita, esto da como resultado que en cada vuelta de la Luna alrededor de la Tierra, la Luna pasa exactamente por los mismos puntos. Para esto, nos centraremos en el apogeo y perigeo de la órbita. Calcularemos el error relativo porcentual promedio comparando el primer valor del apogeo con cada uno de los nueve siguientes, son nueve porque estamos dando 10 revoluciones, y por último promediaremos los 10 errores. Haremos lo mismo con el perigeo. Recordamos que el apogeo es una CI, ver tabla 2.2. Entonces el apogeo y perigeo iniciales son los siguientes

$$r_{peri} = 0.3636 \times 10^9 \text{ m} \quad r_{apo} = 0.4055 \times 10^9 \text{ m}$$

En unidades del SI. El error relativo porcentual se calcula de la siguiente manera

$$\varepsilon = \frac{|V_r - V_a|}{V_r} \times 100 \quad (2.3.26)$$

Donde V_r es el valor de referencia y V_a el valor aproximado a comparar con V_r .

Calculamos los errores relativos porcentuales promedios para el apogeo y perigeo

$$\varepsilon_{apo} \approx 0.0341 \% \quad \varepsilon_{peri} \approx 0.0518 \% \quad (2.3.27)$$

Con estos errores tan pequeños podemos considerar que nuestro simulador es estable.

2.3.4. Comparación con la teoría

Lo que queda comprobar en nuestro simulador es ver si los valores de la órbita, según nuestras condiciones iniciales, realmente son los correctos. Con las CI que tenemos, debemos obtener los valores de la tabla 2.3

Parámetros de la órbita	V_r
Excentricidad	0.0549
Semieje mayor	0.3844×10^9 m
Perigeo	0.3633×10^9 m

Tabla 2.3: Parámetros de la órbita obtenidos de la NASA (Williams, 2021).

Para calcular estos valores retomaremos lo visto en la última parte de la subsección 1.2.4. De la figura 1.7 y (1.2.85), obtenemos el semieje mayor

$$a = \frac{r_{peri} + r_{apo}}{2} \approx 0.3845 \times 10^9 \text{ m} \quad (2.3.28)$$

Para obtener la excentricidad volveremos a utilizar la relación con la cual obtuvimos (1.2.88). Además si observamos la figura 1.7 obtenemos una relación entre c , a y r_{peri} , entonces

$$e = \frac{a - r_{peri}}{a} = 1 - \frac{r_{peri}}{a} \approx 0.0544 \quad (2.3.29)$$

Y nuestro perigeo es aproximadamente 0.3636×10^9 m. Por lo tanto nuestro error relativo porcentual queda

Parámetros de la órbita	V_r	V_a	ε
Excentricidad	0.0549	0.0544	0.8183 %
Semieje mayor	0.3844×10^9 m	0.3845×10^9 m	0.0417 %
Perigeo	0.3633×10^9 m	0.3636×10^9 m	0.0883 %

Tabla 2.4: Comparación de los parámetros orbitales.

Por último calcularemos la energía y el momento angular iniciales y los compararemos con la energía y momento angular promedio de nuestra simulación.

Teóricamente de la tabla 1.2 y de (1.2.82), sabemos que para las elipses cumplen con lo siguiente

$$-\frac{\mu(GmM)^2}{2l^2} < E < 0 \quad e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu(GmM)^2}} \quad (2.3.30)$$

Donde sustituimos $k = GmM$, m es la masa de la Luna y M de la Tierra. Por otro lado, tenemos que la energía es

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{GmM}{|\mathbf{r}|} \quad (2.3.31)$$

Recordando la ecuación de la masa reducida $1/\mu = 1/m + 1/M$. Además, si volvemos a ver el diagrama 1.2, \mathbf{r} es el vector entre las dos masas, como CI pusimos la Tierra en reposo en el origen, entonces \mathbf{r} y $\dot{\mathbf{r}}$ son la posición y velocidad de la Luna respectivamente.

En cuanto al momento angular l , de la teoría tenemos que

$$r^2\dot{\phi}\mu = l \quad (2.3.32)$$

Donde usamos las coordenadas esféricas. Pero nuestras CI están en cartesianas, \mathbf{r} es fácil de obtener, usando las transformaciones de coordenadas cartesianas a esféricas

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\
\varphi &= \arctan \frac{y}{x}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi
\end{aligned} \tag{2.3.33}$$

Para \mathbf{v} desarrollaremos una relación entre las velocidades en coordenadas cartesianas y las coordenadas esféricas. La relación entre los vectores base es

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_i + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_j + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_k \\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_i + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_j - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_k \\
\hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_i + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_j
\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

El vector velocidad en coordenadas esféricas

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r(\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\varphi) \tag{2.3.35}$$

Sustituimos (2.3.34) en (2.3.35)

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= \dot{r}(\sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_i + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_j + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_k) + r(\dot{\theta}(\cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_i \\
&\quad + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_j - \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_k) + \dot{\varphi} \sin \theta (-\sin \varphi \hat{\mathbf{e}}_i + \cos \varphi \hat{\mathbf{e}}_j))
\end{aligned} \tag{2.3.36}$$

Separamos por componentes

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}} &= (\dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi) \hat{\mathbf{e}}_i \\
&\quad + (\dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi) \hat{\mathbf{e}}_j \\
&\quad + (\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \hat{\mathbf{e}}_k
\end{aligned} \tag{2.3.37}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi \\
\dot{y} &= \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi \\
\dot{z} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta
\end{aligned} \tag{2.3.38}$$

De la tabla 2.2 y de (2.3.33) obtenemos las posiciones en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0.4055 \times 10^9 \\ \theta &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} = \arctan 0 = 0 \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Como θ se mantiene constante, ya que el momento angular se conserva, entonces $\dot{\theta} = 0 \text{ rad/s}$. Por último sustituimos todos los valores en (2.3.38)

$$\begin{aligned} 0 &= \dot{r} + 0 + 0 \\ 970 &= 0 + 0 + (0.4055 \times 10^9) \dot{\varphi} \\ 0 &= 0 - 0 \end{aligned} \quad (2.3.40)$$

Entonces $\dot{r} = 0 \text{ m/s}$ y $\dot{\varphi} \approx 0.2392 \times 10^{-5} \text{ m/s}$. Con esto ya tenemos todo lo necesario para calcular la excentricidad. Usando (2.3.31) y (2.3.32) calculamos la energía y el momento angular respectivamente

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \mu |\dot{\mathbf{r}}|^2 - \frac{GmM}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{2} \mu (r \dot{\varphi} \sin \theta)^2 - \frac{GmM}{r} \\ &\approx -3.8074 \times 10^{28} \text{ J} \end{aligned} \quad (2.3.41)$$

y

$$l = r^2 \dot{\varphi} \mu \approx 2.8542 \times 10^{34} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \quad (2.3.42)$$

En las siguientes gráficas podemos ver las energías y momento angular de nuestro sistema. En cada una de ellas graficamos el valor de la variable mecánica correspondiente para cada paso en la integración.

Calculando el promedio y pasando el resulta a SI, tenemos que

$$E \approx -3.8071 \times 10^{28} \text{ J} \quad l \approx 2.8543 \times 10^{34} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \quad (2.3.43)$$

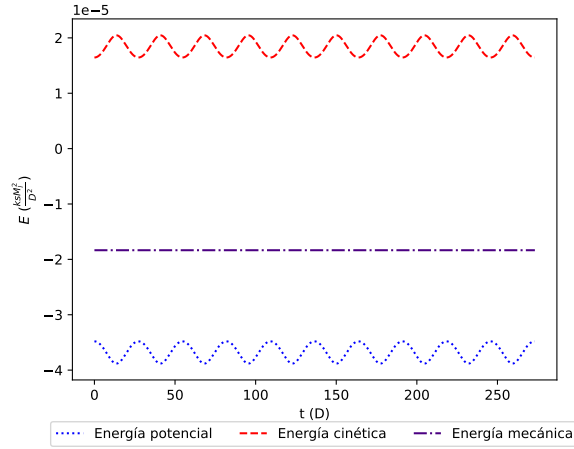


Figura 2.9: Energía cinética, potencial y mecánica del sistema Tierra-Luna, en nuestras unidades.

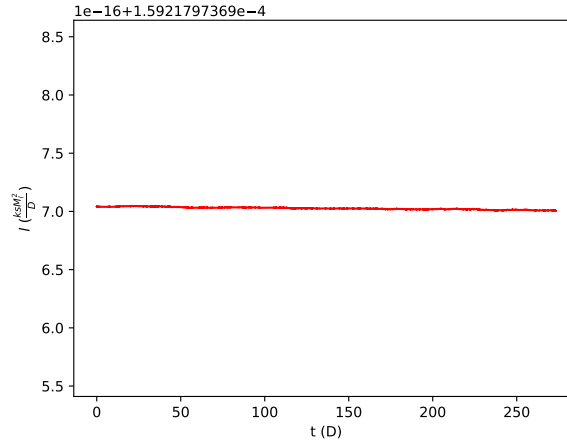


Figura 2.10: Momento angular del sistema Tierra-Luna, en nuestras unidades.

Entonces obtenemos un error relativo porcentual de

$$\varepsilon_E \approx 0.0081 \% \quad \varepsilon_l \approx 0.0045 \% \quad (2.3.44)$$

Donde los subíndices nos dicen cuál es el error de la energía (E) y del momento angular (l). De las figuras 2.9 y 2.10 observamos comportamientos esperados de estas cantidades físicas. La energía mecánica tiene un valor negativo y constante, las energías potenciales y cinéticas son oscilantes desfasadas $\pi/2$ una con respecto a la otra. Por otro lado el momento angular tiene un valor constante positivo y solo en el eje z.

Capítulo 3

Resolución de la dinámica del sistema solar

Con nuestro simulador ya construido y calibrado, al menos con el problema de dos cuerpos el cual se puede resolver analíticamente, simularemos un aproximado del sistema solar. Empezaremos por el sistema Sol-Tierra-Luna y posteriormente agregaremos los planetas restantes, también nos detendremos a ver qué tanto afectan los demás planetas a la órbita de la Luna.

3.1. Sistema Sol-Tierra-Luna

De igual manera que con las CI del sistema Tierra-Luna, supondremos que cada cuerpo está en su apogeo excepto el cuerpo con más masa, el Sol en este caso, el cual iniciará en el origen y sin velocidad. Los valores de las CI las obtendremos de la misma página de la NASA (Williams, 2021). Usaremos el acrónimo STL para referirnos al sistema Sol-Tierra-Luna.

Cuerpos	masa (kg)	Posición (m)	Velocidad ($\frac{m}{s}$)
Sol	1988500×10^{24}	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
Tierra	5.9722×10^{24}	$(152.1 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 29290, 0)
Luna	0.07346×10^{24}	$(152.5055 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 30260, 0)

Tabla 3.1: CI del STL, Tierra y Luna en sus apogeos.

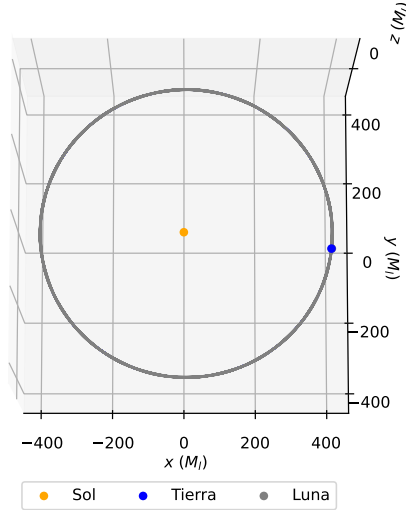
La velocidad y distancia de la Luna con respecto al Sol la obtuvimos usando la relatividad de Galileo superponiendo la velocidad y distancia Tierra-Sol y Luna-Tierra. Como se puede observar en la tabla 3.1 estamos suponiendo que los apogeos de los planetas estarán alineados en el eje x , lo cual no necesariamente se observa en la realidad pero nos dará una buena aproximación. Además el arreglo inicial del sistema será el siguiente.

- El sistema se iniciará en el plano xy , $z = 0$.
- Sus velocidades apuntarán al eje y positivo.

A lo largo de este trabajo seguiremos usando estas suposiciones para simular los sistemas. Ya que tenemos las CI de los cuerpos solo queda definir los parámetros de la simulación. Para este sistema también simularemos por una década. De igual manera no tomaremos en cuenta los años bisiestos, cada año tendrá 365 días.

Para este sistema volveremos a usar las unidades definidas en la sección 2.3.1. Para encontrar el tamaño de paso procederemos como en la sección 2.3.2. Como estamos tratando con un cuerpo más y por la misma cantidad de tiempo, por lo menos necesitaremos el mismo tamaño de paso que obtuvimos para dos cuerpos. Por lo tanto como primera aproximación utilizaremos $N = 32000$.

Al simular el sistema con esta N obtenemos la figura 3.1. En primera instancia observamos que la Luna y la Tierra orbitan al Sol en una órbita prácticamente circular, lo cual es lo esperado. El inconveniente se presenta en la invisible órbita de la Luna entorno a la Tierra, esto se debe a la diferencia de escalas, nuestras unidades dictan que 1 unidad es una distancia media del ecuador de la Tierra a la Luna, y la órbita de la Tierra alrededor del Sol es 400 veces más grande. Por eso las órbitas de la Tierra y la Luna aparentan ser una. Sin embargo, si nos acercamos a alguna región vemos como la Luna si tiene una órbita diferente a la de la Tierra, como se ve en la figura 3.2. Además podemos observar que la órbita no termina exactamente donde comienza, ya que el tiempo por vuelta es de 365 días, lo cual no es el período real.

Figura 3.1: STL con $N = 32\,000$.

Como esperábamos vemos como la Tierra (trayectoria azul) solo pasa por una misma curva al pasar los 10 años y la Luna (trayectoria gris) presenta diferentes trayectos en los 10 años. El impulso que vimos con el sistema Tierra-Luna también está presente en este sistema, solo que en este caso es muy pequeño, se empieza a ver si hacemos un acercamiento a las décimas de nuestras unidades.

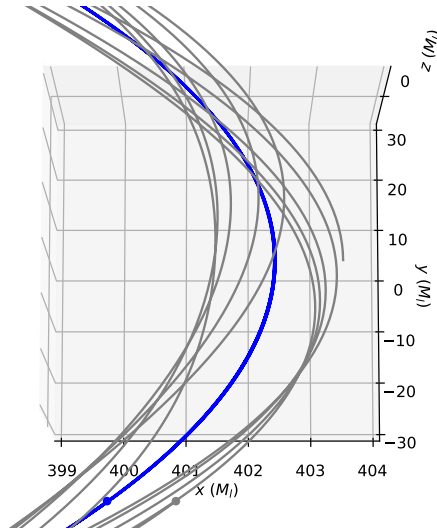


Figura 3.2: Acercamiento de la figura 3.1 al origen de coordenadas, para observar la órbita de la Luna (trayectoria gris) alrededor de la Tierra (azul).

Una pregunta que emerge al ver esto es, ¿Cómo sabemos que la Luna realmente está orbitando como sabemos y no está haciendo una trayectoria rara? Como vimos en la sección 2.3 el simulador recrea correctamente la órbita de la Luna cuando encontramos el valor de N adecuado donde las trayectorias convergen, usaremos el mismo método. Explorando, encontramos que para $N = 512000$ y $N = 1024000$, obtenemos $\Delta_{max} \approx 4.2777 \times 10^{-8}$, y el $RMSE \approx 1.9886 \times 10^{-8}$. Por lo tanto nos quedaremos con $N = 512000$, esto nos da un $dt \approx 0.0071$ y un error aproximado de 2.5828×10^{-9} (ver tabla 2.1).

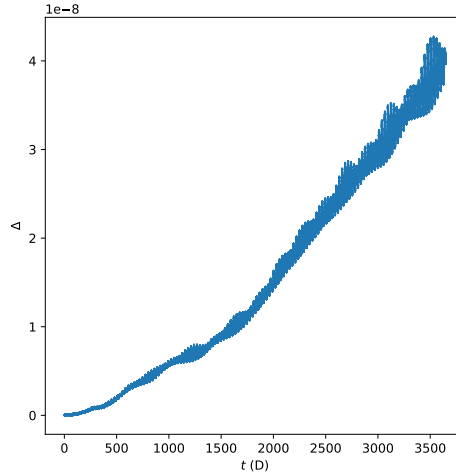


Figura 3.3: Diferencia al comparar órbitas con $N = 512\,000$ y $N = 1\,024\,000$.

Para poder observar la órbita de la Luna alrededor de la Tierra exageraremos la diferencia entre ellas, esto lo hicimos restando la posición de la Tierra a la de la Luna

$$\Delta = r_{Luna} - r_{Tierra} \quad (3.1.1)$$

Esta diferencia la multiplicamos por un número mayor a 1, si la multiplicamos por un número menor a 1 las órbitas se acercarían más. Entonces

$$r_{Luna} = r_{Tierra} + a * \Delta \quad (3.1.2)$$

Esta sería la nueva posición. En este caso, el mejor valor que encontré es $a = 50$, dándonos la figura 3.4. También, solo graficamos por un cuarto de año para una mejor visualización, de lo contrario las trayectorias se solapan bastante. Con

este tratamiento se puede observar perfectamente como la Luna sí está orbitando alrededor de la Tierra.

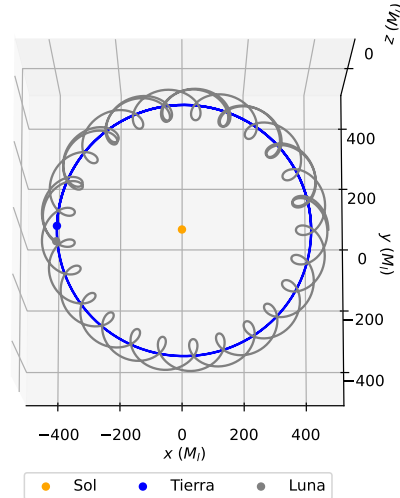


Figura 3.4: órbita de la Luna exagerada.

3.2. Sistema Sol-Tierra-Luna más planetas del sistema solar

Para esta sección seguiremos usando el mismo sistema de unidades y consideraciones anteriores. Tiempo total de 10 años terrestres sin contar los bisiestos, todos los planetas se inicializarán en su apogeo y en el plano xy , sus velocidades apuntarán al eje y positivo, todos los datos se obtuvieron de la página de la NASA. Además la elección de N , el tratamiento del error y la exageración de la órbita de la Luna entorno a la Tierra se harán de igual manera que en la sección anterior.

Empezaremos agregando el planeta más cercano al sol, Mercurio, a nuestro actual sistema STL y veremos que tanto perturba este nuevo cuerpo a la órbita de la Luna. Nombraremos al sistema STL más Mercurio como STLM.

En la figura 3.5 podemos ver que la órbita de Mercurio no es tan circular, aunque por como funciona el graficador no se percibe bien la elipse pero en la órbita de Mercurio se observa que el Sol no está en el centro de ella. De igual manera que en el sistema STL no se aprecia la órbita de la Luna alrededor de la Tierra, si nos acercamos de

Cuerpos	masa (kg)	Posición (m)	Velocidad ($\frac{m}{s}$)
Sol	1988500×10^{24}	(0, 0, 0)	(0, 0, 0)
Mercurio	0.3301×10^{24}	$(69.818 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 38860, 0)
Venus	4.8673×10^{24}	$(108.941 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 34790, 0)
Tierra	5.9722×10^{24}	$(152.1 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 29290, 0)
Luna	0.07346×10^{24}	$(152.5055 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 30260, 0)
Marte	0.64169×10^{24}	$(249.261 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 21970, 0)
Júpiter	1898.13×10^{24}	$(816.363 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 12440, 0)
Saturno	568.32×10^{24}	$(1506.527 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 9090, 0)
Urano	86.811×10^{24}	$(3001.39 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 6490, 0)
Neptuno	102.409×10^{24}	$(4558.857 \times 10^9, 0, 0)$	(0, 5370, 0)

Tabla 3.2: CI del STL y los planetas del sistema solar (Williams, 2021).

la misma manera que en la sección pasada la podemos observar, figura 3.6. Si la comparamos con la figura 3.2 vemos que son prácticamente la misma gráfica.

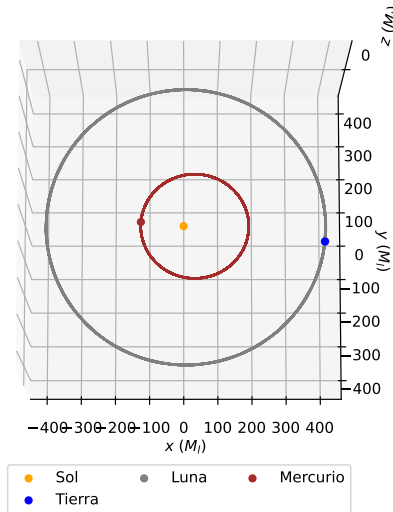


Figura 3.5: órbitas del STLM.

Antes de comparar la órbita de la Luna entre el sistema STL y STLM, primero veremos la convergencia de las órbitas del sistema STLM, como lo hemos estado haciendo vamos a enfocarnos en la trayectoria de la Luna para hacer la comparación.

Aplicando el mismo método del error obtenemos la figuras 3.7. Si la comparamos con la figura 3.3, vemos que el comportamiento es el mismo, aumenta el error conforme pasa el tiempo y es del orden de 10^{-8} .

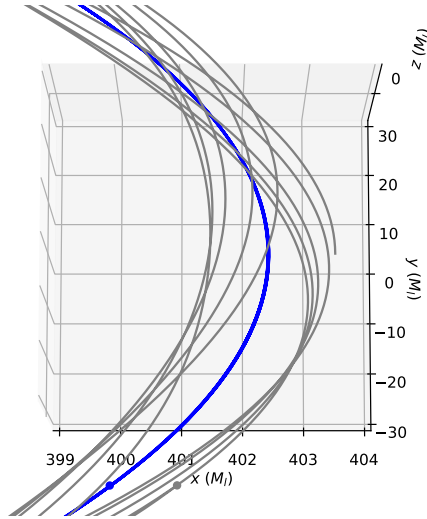


Figura 3.6: Acercamiento a la órbita de la Luna en el sistema STLM.

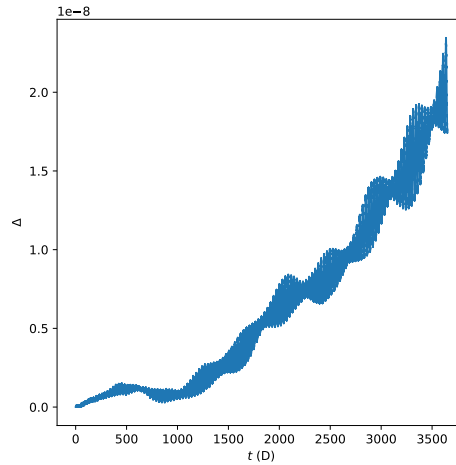


Figura 3.7: Diferencia al comparar órbitas con $N = 512\,000$ y $N = 1\,024\,000$ en el sistema STLM.

Ahora si exageramos la trayectoria de la Luna, usando el mismo método que en la sección 3.1, donde obtenemos la diferencia entre Luna y Tierra, esta diferencia la multiplicamos por un número mayor a 1 y se lo sumamos a la posición de la Tierra para obtener la nueva órbita de la Luna. Al comparar 3.8 con 3.4 no encontramos distinción.

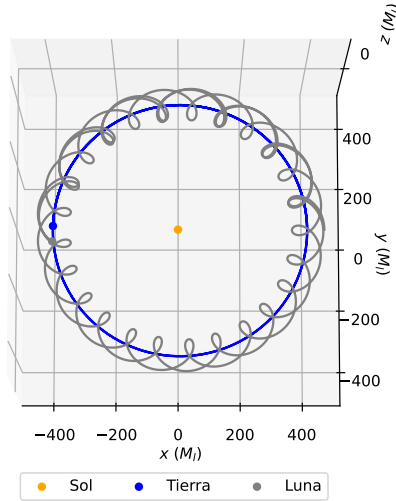


Figura 3.8: órbita de la Luna exagerada en el sistema STLM.

Ya estamos en condiciones de comparar la órbita de la Luna entre los sistemas, para ver el efecto que tiene Mercurio en la órbita de la Luna. Como se ve en la figura 3.9 el efecto es pequeño, más no despreciable. Aunque hay calentamiento numérico en la simulación, la diferencia no es tan pequeña, por lo tanto podemos inferir que entre más pasa el tiempo más es el efecto de Mercurio sobre la Luna.

Para los demás planetas haremos exactamente lo mismo, de igual manera lo correremos con todos los planetas. solo mostraremos el error entre $N = 520000$ y $N = 1024000$, además de la comparación de la órbita de la Luna, ya que lo demás es prácticamente lo mismo que con Mercurio.

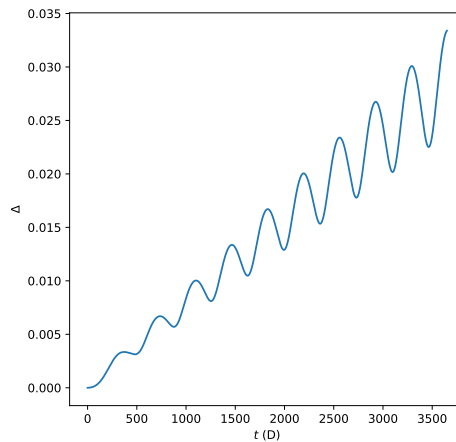
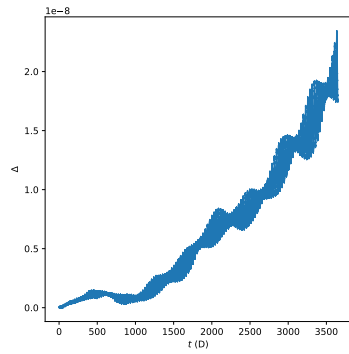
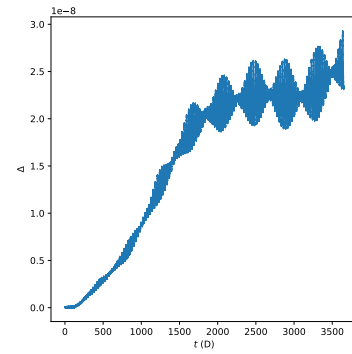


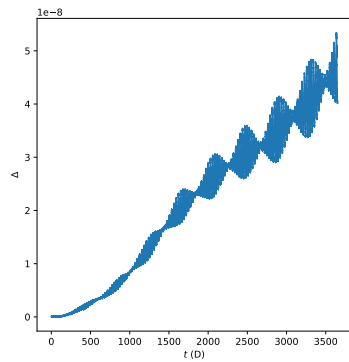
Figura 3.9: diferencia entre la órbita de la Luna entre los sistemas STL y STLM.



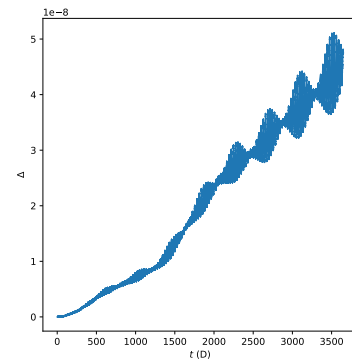
(a) STL más Mercurio.



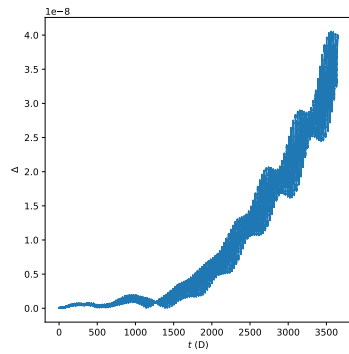
(b) STL más Venus.



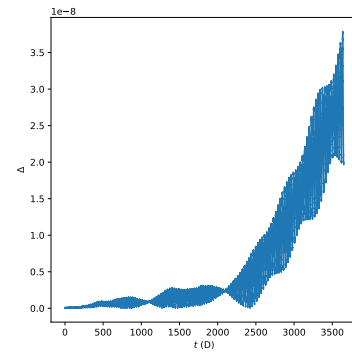
(c) STL más Marte.



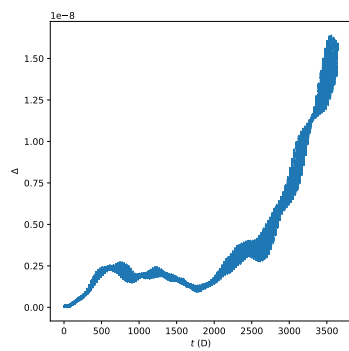
(d) STL más Júpiter.



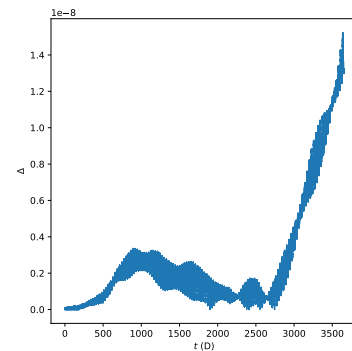
(e) STL más Saturno.



(f) STL más Urano.

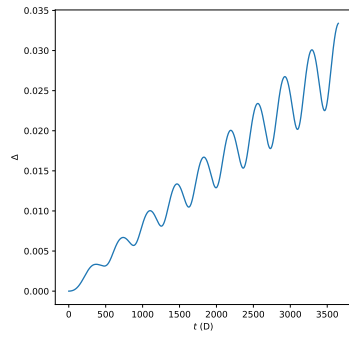


(g) STL más Neptuno.

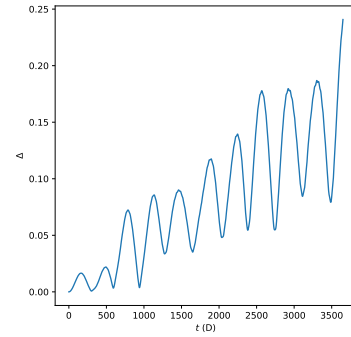


(h) STL más planetas del sistema solar.

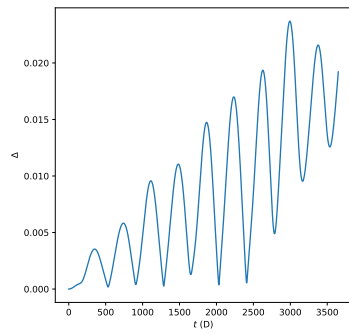
Figura 3.10: Diferencia al comparar órbitas con $N = 512\,000$ y $N = 1\,024\,000$.



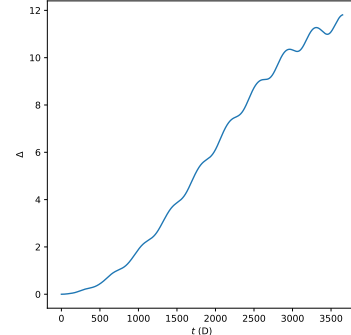
(a) STL más Mercurio.



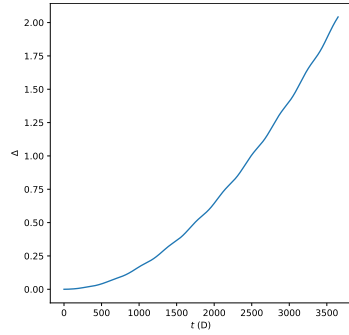
(b) STL más Venus.



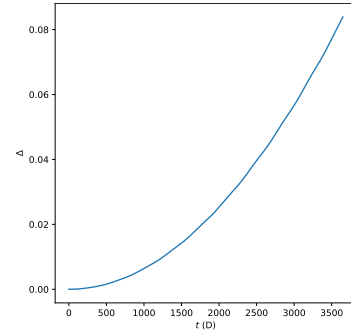
(c) STL más Marte.



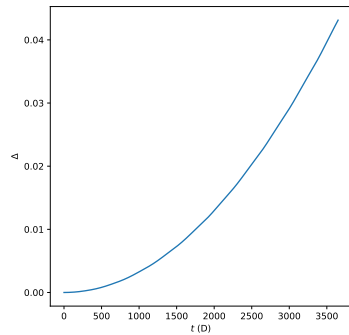
(d) STL más Júpiter.



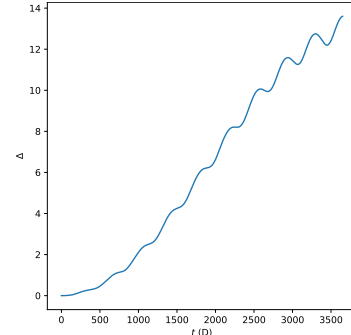
(e) STL más Saturno.



(f) STL más Urano.



(g) STL más Neptuno.



(h) STL más planetas del sistema solar.

Figura 3.11: Diferencia entre la órbita de la Luna con el sistema STL.

En la figura 3.10 vemos que la convergencia tiene la misma forma que en el sistema STL y STLM, del orden de 10^{-8} y va aumentando con el tiempo. En la figura 3.11 observamos como afecta cada planeta a la órbita de la Luna, siendo Júpiter el planeta que más afecta a la Luna, por algunos órdenes de magnitud en comparación con la mayoría de los planetas. Además parece que entre más lejos esté un planeta la curva se suaviza.

De igual manera, se puede deber a que los planetas gaseosos (Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno) no completan, ni cerca, una órbita en una década terrestre, como se ve en la siguiente figura

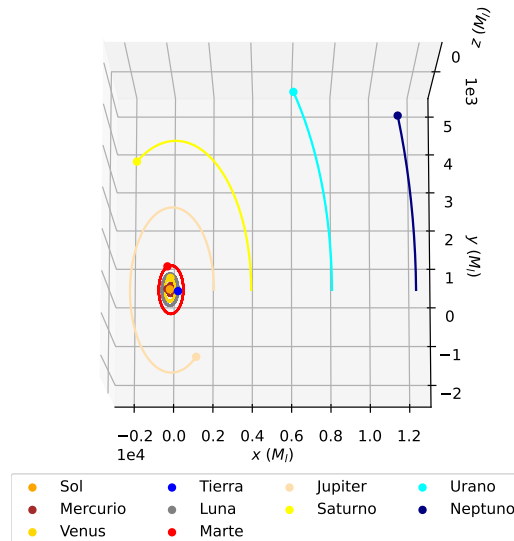


Figura 3.12: Sistema solar (planetas más la Luna). Tiempo total 10 décadas terrestres.

Capítulo 4

Limitación del simulador

En este último capítulo exploraremos el límite computacional de nuestro simulador. Veremos cuántas interacciones puede soportar en una corrida antes de que el tiempo de cómputo se vuelva impráctico. En ese momento se necesitaría encontrar una solución más escalable, la cual permitiera estudiar sistemas con más cuerpos sin utilizar un tiempo de cómputo descomunal.

4.1. Limitaciones del simulador

Hasta ahora hemos agregado los cuerpos a la simulación especificando sus masas, posiciones y velocidades pero esto era posible ya que eran unos pocos cuerpos y la especificación de las cantidades de los cuerpos se debía a que eran parte de un sistema real a simular. En este capítulo no queremos explorar un sistema real. Además, la cantidad de cuerpos puede llegar a un número grande para ir agregándolos uno por uno, por lo tanto, abordaremos este problema con cuerpos de masas iguales, con posiciones y velocidades aleatorias.

Las consideraciones que se tomarán serán que las posiciones estén entre -1 y 1 , con unidades M_l y una unidad de tiempo como tiempo total, esto es, $t = 1 D$. Como se ve seguiremos utilizando las unidades de los capítulos anteriores.

La creación de un sistema estable de varios cuerpos no es un problema trivial, además crearlo no es el objetivo que nos compete, por lo tanto para la elección de velocidades y de la masa lo haremos totalmente de forma empírica, buscando un valor de la

masa y un intervalo para las velocidades. Por otro lado, para la elección del tamaño de paso tomaremos de referencia el del capítulo 3, que para todos los planetas fue de $dt \approx 0.007$, en este caso con $t = 1 D$ y de (2.3.25), donde $t = t_f$ y $t_0 = 0$, tenemos $N \approx 140$. Para verificar la convergencia utilizaremos el mismo método que en la subsección 2.3.2. La trayectoria del cuerpo a comparar puede ser cualquiera de los cinco cuerpos, cabe aclarar que cuando comparamos corridas con diferentes N 's, las CI aleatorias que elegimos no cambian en estas comparaciones.

Con todo lo anterior dicho y empezando con 5 cuerpos, elegimos: masa de cada cuerpo; $m = 5 ks$, recordando que ks son las unidades de la masa que obtuvimos en la subsección 2.3.1, el intervalo de velocidades; $[-0.1, 0.1]$.

Para obtener N haremos lo mismo que en las secciones pasadas. Si queremos conseguir el mismo orden de magnitud del error que los vistos en el capítulo 3 ($N = 520000$), encontramos que necesitamos alrededor del doble de pasos ($N = 1146880$). También el tamaño de paso disminuye en 4 órdenes de magnitud, ya que nuestro tiempo total solo es 1 día. En la figura 4.2 tenemos el error al comparar $N = 1146880$ y $N = 2293760$, donde $RMSE \approx 3.489 \times 10^{-9}$ y $\Delta_{max} \approx 1.26 \times 10^{-8}$.

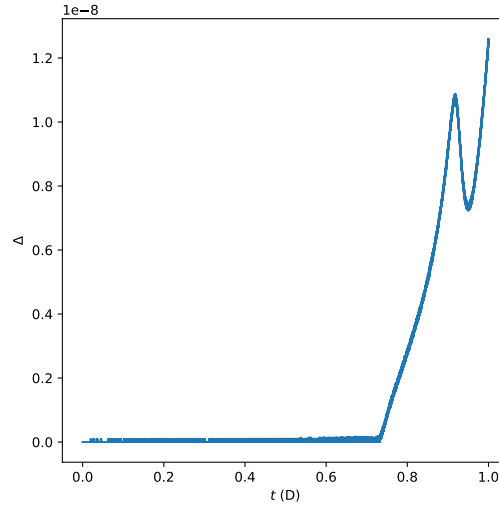


Figura 4.1: Diferencia al comparar órbitas con $N = 1\,146\,880$ y $N = 2\,293\,760$.

Para obtener trayectorias interesantes es complicado, ya que las CI son aleatorios pero corriéndolo varias veces se pueden encontrar simulaciones interesantes, como en la siguiente figura

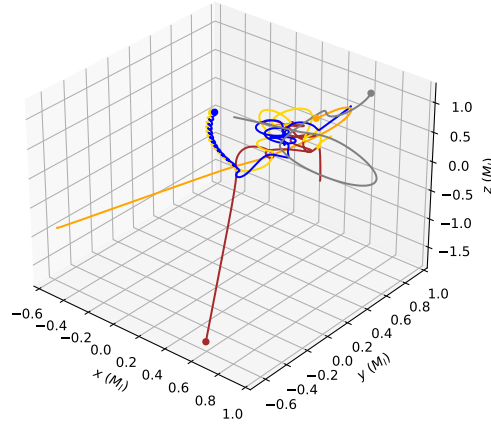


Figura 4.2: Simulando 5 cuerpos aleatorios.

El tiempo de cómputo con $N = 1146880$ rondó los 20 minutos y con $N = 2293760$ los 40 minutos. Pasaba lo mismo con N 's menores, con el doble de pasos, más o menos, es el doble de tiempo. En las simulaciones del capítulo 3 se encontraba la misma situación, si doblábamos N el tiempo de cómputo también lo hacía en general. Ahora empezaremos agregando cuerpos para ver la tendencia, el tamaño de paso de aquí en adelante será el mismo ($N = 1146880$).

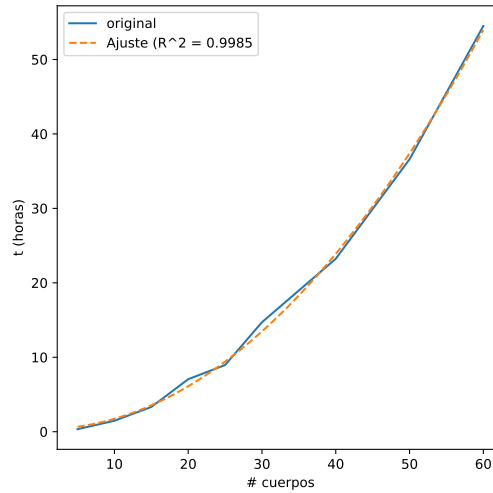


Figura 4.3: Tiempo de ejecución de 5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 50 y 60 cuerpos en horas. Ecuación del ajuste: $y = 0.3154 + 0.0134x^{2.0268}$, x sería el número de cuerpos e y el tiempo en horas.

Como podemos ver en la figura 4.3 nuestro simulador tiene un tiempo de ejecución que aumenta aproximadamente con $O(N^2)$, donde N es el número de cuerpos.

Conclusiones

En este trabajo construimos y exploramos un simulador de muchos cuerpos en interacción gravitacional, aproximando la ecuación de la segunda ley de Newton utilizando el método numérico Runge-Kutta de orden 4. Tomando el sistema solar y subsistemas del mismo para probar la simulación, encontrando que da resultados parecidos a los reportados por las observaciones, más no iguales ya que nuestros sistemas están idealizados y solo son aproximaciones. Finalizamos, llevando al límite nuestro simulador para ver con cuántos cuerpos se vuelve impráctico su uso.

En la realización de este trabajo nos dimos cuenta de la robustez del método Runge-Kutta de orden 4. Inicialmente su implementación fue errónea pero nos daba resultados buenos cuando trabajábamos con 2 cuerpos y con números de pasos pequeños, sin embargo, al agregar un tercero la convergencia no se alcanzaba ni con números de pasos del orden de 10^7 . Al corregir la implementación del método redujimos el orden en 2 unidades, obteniendo convergencias alrededor de los 500 000 pasos, reduciendo el tiempo de cómputo enormemente, de aproximadamente 2 días a alrededor de 10 minutos.

Al estudiar los subsistemas solares aislados observamos como el cuerpo orbitado, la Tierra en el sistema Tierra-Luna y el Sol en los demás, se desplazaba en trayectorias de medios círculos, en la dirección de la velocidad inicial de los cuerpos que orbitan, lo cual es inherente al sistema idealizado que tomamos. Así mismo, nos percatamos que Júpiter es el planeta que más perturba la órbita de la Luna, donde uno podría pensar que sería Venus ya que es el planeta más cercano a la Luna, pero como vimos, la masa es el factor decisivo en las interacciones gravitacionales.

Por último, nuestro simulador tiene una complejidad temporal de $O(N^2)$ (con N el número de cuerpos) aproximadamente, la complejidad temporal en un algoritmo es la cantidad de tiempo que necesita un algoritmo para ejecutarse. Esto es muy poco escalable para un número muy grande de cuerpos, si usamos la ecuación del pie de página de la figura 4.3, vemos que para 100 cuerpos tardaría alrededor de 6.3 días, haciendo imposible simular galaxias. Además estamos suponiendo que la precisión se conserva, pero al aumentar los cuerpos la precisión baja, por lo tanto tendríamos que aumentar el número de pasos y entonces el tiempo base aumentaría.

Algunas mejoras, para eficientar este simulador, dependen del cálculo de la aceleración. Recordemos que está se calcula mediante la suma directa de la interacción de cada una de las partículas, lo cual implica muchas evaluaciones de la fuerza. Por esa razón las técnicas más comunes para disminuir el tiempo de corrida se centran en alternativas para el cálculo de la aceleración (Springel et al., 2021), o la construcción de herramientas computacionales especializadas para calcula la interacción gravitacional (Kawai et al., 2000). También ayuda enormemente paralelizar el programa y usar un lenguaje de programación más rápido.

Bibliografía

- Aarseth, S. J. (2003). *Gravitational N-Body Simulations*. Cambridge University Press. 43
- Barger, V. and Olsson, M. (1954). *CLASSICAL MECHANICS : A Modern Perspective Second Edition*. 5, 8
- Burden, R. L. and Faires, J. D. (2010). *Numerical Analysis*. Cengage Learning. 35, 37
- Chow, T. L. (2013). *Classical Mechanics, Second Edition*. Taylor & Francis. 11, 16, 19, 23
- Epperson, J. F. (2013). *An Introduction to Numerical Methods and Analysis*. Wiley. 35
- Faranak, R., Fudziah, I., and Mohamed, S. (2013). Improved Runge-Kutta methods for solving ordinary differential equations. *Sains Malaysiana*, 42(11):1679–1687. 34
- Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. (2013). The Feynman Lectures on Physics. *Choice Reviews Online*, 50(12):13–4. 11
- Gautschi, W. (2011). *Numerical Analysis*. SpringerLink : Bücher. Birkhäuser Boston. 35
- Gilmore, G. (1989). Galactic dynamics. *Contemporary Physics*, 30(1):60–61. 8
- Goldstein, H., Poole, C. P., and Safko, J. L. (2002). *Classical Mechanics*. Addison Wesley. 16, 26, 30

- Gutierrez Lopez, S. (2019). Campo central (Notas de clase). 29, 32
- Hand, L. N. and Finch, J. D. (1998). *Analytical Mechanics*. Cambridge University Press. 1
- Hauser, W. (1969). *Introducción a los principios de Mecánica*. URACCA, México. 12
- Kawai, A., Fukushige, T., Makino, J., and Taiji, M. (2000). GRAPE-5: A Special-Purpose Computer for N-Body Simulations. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 52(4):659–676. 71
- Li, Q., Xue, C., Liu, J. P., Wu, J. F., Yang, S. Q., Shao, C. G., Quan, L. D., Tan, W. H., Tu, L. C., Liu, Q., Xu, H., Liu, L. X., Wang, Q. L., Hu, Z. K., Zhou, Z. B., Luo, P. S., Wu, S. C., Milyukov, V., and Luo, J. (2018). Measurements of the gravitational constant using two independent methods. *Nature*, 560(7720):582–588. 5
- Musielak, Z. E. and Quarles, B. (2015). The three-body problem. 2
- Saari, D. G. (1990). A Visit to the Newtonian N-body Problem via Elementary Complex Variables. 2
- Schmid, C. (2012). Newton’s superb theorem: An elementary geometric proof. Technical report. 8
- Senchyna, P. (2013). A (Less than Practical) Solution to the N-body Problem. 2
- Springel, V., Pakmor, R., Zier, O., and Reinecke, M. (2021). Simulating cosmic structure formation with the GADGET-4 code. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 506(2):2871–2949. 71
- Stadel, J. G. (2001). *Cosmological N-body simulations and their analysis*. PhD thesis, UNIVERSITY OF WASHINGTON. 46
- Thornton, S. T. and Marion, J. B. (2004). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Brooks/Cole. 5, 11

- Van Elteren, A., Pelupessy, I., and Zwart, S. P. (2014). Multi-scale and multi-domain computational astrophysics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 372(2021). 43
- Williams, D. (2021). Planetary Fact Sheet - Metric. 42, 44, 48, 51, 56, 61