



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CAMPUS FLORIANÓPOLIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Victor Hugo Rocha de Oliveira

**Trabalho de Processamento Digital de Sinais:** Projeto de Filtros Digitais a partir de  
um Filtro Analógico Intermediário

Florianópolis - SC  
2020

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gabarito . . . . .	7
Figura 2 – Função $ H_c(j\Omega) ^2$ para o filtro de Butterworth contínuo . . . . .	9
Figura 3 – Relação de valores de ordem N para o filtro de Butterworth . . . . .	10
Figura 4 – Atenuação dos filtros de Butterworth em diferentes ordens . . . . .	10
Figura 5 – Atraso dos filtros de Butterworth em diferentes ordens . . . . .	11
Figura 6 – Aproximação equiripple na banda de passagem e na banda de rejeição. . . . .	12
Figura 7 – Atenuação dos filtros elípticos para ordens diferentes . . . . .	13
Figura 8 – Atenuação na banda de passagem para filtros elípticos de ordens diferentes . . . . .	13
Figura 9 – Atenuação na banda de passagem para filtros elípticos de ordens diferentes . . . . .	14
Figura 10 – Mapeamento da resposta em magnitude . . . . .	16
Figura 11 – Processo de conversão - Transformação Bilinear . . . . .	17
Figura 12 – Deformação da frequência inerente à transformação bilinear de um filtro passa-baixas de tempo contínuo em um filtro passa-baixas de tempo discreto . . . . .	17
Figura 13 – Resposta em frequência da resposta de um filtro analógico e do filtro pelo método da invariância ao degrau . . . . .	20
Figura 14 – Resposta em frequência do filtro passa-baixa de segunda ordem e do método da invariância ao degrau . . . . .	20
Figura 15 – Resposta em frequência da resposta de um filtro analógico e do filtro pelo método da invariância ao degrau . . . . .	21
Figura 16 – Respostas de frequência de um circuito analógico ressonante . . . . .	23
Figura 17 – Respostas de frequência dos filtros passa-baixa de segunda ordem . . . . .	23
Figura 18 – Respostas de frequência dos filtros passa-alta de primeira ordem . . . . .	23
Figura 19 – Representação da frequência central do zero . . . . .	25
Figura 20 – Modelo de um ADC . . . . .	26
Figura 21 – Arredondamento - Rounding . . . . .	27
Figura 22 – Truncamento - Truncation . . . . .	28
Figura 23 – Representação de erros para ponto fixo . . . . .	28
Figura 24 – Representação de erros para ponto flutuante . . . . .	29
Figura 25 – a) Plano-s, b) Diferença backward, c) Diferença Forward . . . . .	30
Figura 26 – Aproximações por integração numérica . . . . .	31
Figura 27 – Definição dos parâmetros iniciais . . . . .	32
Figura 28 – Polos do filtro analógico . . . . .	34
Figura 29 – Vetor de valores complexos . . . . .	34
Figura 30 – Resposta em Magnitude e Fase do Filtro Analógico . . . . .	35

Figura 31 – Diagrama de Bode do Filtro Analógico . . . . .	36
Figura 32 – Função de Transferência após a Transformação Bilinear . . . . .	36
Figura 33 – Diagrama de Bode do Filtro Analógico x Transformação Bilinear [Butterworth] . . . . .	37
Figura 34 – Degrau unitário - Filtro analógico x Transformação Bilinear [Butterworth] . . . . .	37
Figura 35 – Função de Transferência - Invariância ao Degrau . . . . .	38
Figura 36 – Diagrama de Bode - Invariância ao Degrau - Butterworth . . . . .	38
Figura 37 – Função de Transferência para a Matched Z . . . . .	39
Figura 38 – Diagrama de Bode - Matched Z x Filtro Analógico [Butterworth] . . . . .	39
Figura 39 – Degrau unitário - Filtro Analógico x Matched Z [Butterworth] . . . . .	40
Figura 40 – Definição dos parâmetros iniciais - Filtro Elíptico . . . . .	41
Figura 41 – Função de transferência do filtro analógico . . . . .	42
Figura 42 – Resposta em Magnitude do Filtro Analógico - Elíptico . . . . .	42
Figura 43 – Função de Transferência após a Transformação Bilinear - Filtro Elíptico . . . . .	43
Figura 44 – Diagrama de bode da Transformação Bilinear x Filtro Analógico [Elíptico] . . . . .	43
Figura 45 – Degrau unitário - Bilinear x Filtro Analógico [Elíptico] . . . . .	44
Figura 46 – Função de Transferência para a Matched Z . . . . .	44
Figura 47 – Diagrama de Bode - Matched Z x Filtro Analógico [Elíptico] . . . . .	44
Figura 48 – Degrau unitário - Bilinear x Filtro Analógico [Elíptico] . . . . .	45
Figura 49 – Função de Transferência para a Invariância ao Degrau . . . . .	45
Figura 50 – Diagrama de Bode - Invariância ao Degrau x Filtro Analógico [Elíptico] . . . . .	46

## LISTA DE TABELAS

## SUMÁRIO

1	RESUMO . . . . .	6
2	INTRODUÇÃO . . . . .	7
3	FILTRO DE BUTTERWORTH . . . . .	9
4	FILTRO ELÍPTICO (CAUER) . . . . .	12
5	TRANSFORMAÇÃO BILINEAR . . . . .	15
5.0.1	Síntese de filtros passa-baixa . . . . .	17
6	INVARIÂNCIA AO DEGRAU . . . . .	19
7	INVARIÂNCIA A RAMPA . . . . .	22
8	TRANSFORMADA-Z CASADA . . . . .	24
9	ESTUDO DOS ERROS DE QUANTIZAÇÃO . . . . .	26
9.1	CONVERSOR ANALÓGICO-DIGITAL . . . . .	26
9.2	QUANTIZAÇÃO . . . . .	26
9.2.1	Erros em Ponto Fixo . . . . .	27
9.2.1.1	Arredondamento (Rouding) . . . . .	27
9.2.1.2	Truncamento (Truncation) . . . . .	27
9.2.2	Erros em Ponto Flutuante . . . . .	28
10	TRANSFORMAÇÃO EQUIVALÊNCIA DA DERIVADA PARA DIFE- RENÇA FORWARD . . . . .	30
11	PROJETO DO FILTRO DE BUTTERWORTH . . . . .	32
11.1	PROJETO DO FILTRO ANALÓGICO . . . . .	32
11.1.1	Especificação das propriedades desejadas do sistema . . . . .	32
11.1.2	Cálculo da ordem e da Frequência de Corte . . . . .	32
11.1.3	Função de Transferência do Filto Analógico . . . . .	33
11.1.4	Gráficos do Filtro Analógico . . . . .	35
11.2	PROJETO DA TRANSFORMAÇÃO BILINEAR . . . . .	36
11.2.1	Transformação bilinear . . . . .	36
11.2.2	Gráficos da Transformação Bilinear . . . . .	37
11.2.3	Gráficos do método de invariância ao Degrau . . . . .	38
11.2.4	Método da Transformada Z casada . . . . .	39
12	PROJETO DO FILTRO ELÍPTICO . . . . .	41
12.1	PROJETO DO FILTRO ANALÓGICO . . . . .	41
12.1.1	Especificação das propriedades desejadas do sistema . . . . .	41
12.1.2	Cálculo da ordem e da Frequência de Corte - Filtro Elíptico . . . . .	41
12.1.3	Função de Transferência do Filto Analógico - Filtro Elíptico . . . . .	41
12.1.4	Gráficos do Filtro Analógico - Filtro Elíptico . . . . .	42
12.2	PROJETO DA TRANSFORMAÇÃO BILINEAR . . . . .	42
12.2.1	Função bilinear - Filtro Elíptico . . . . .	42

12.2.2	Gráficos da Transformação Bilinear . . . . .	43
12.2.3	Método da Transformada Z casada . . . . .	44
12.2.4	Método da Invariância ao Degrau . . . . .	45
	REFERÊNCIAS . . . . .	47

## 1 RESUMO

Visando desenvolver um estudo relacionado ao projeto de filtros digitais a partir de um filtro analógico intermediário, foi desenvolvido revisões teóricas e estudos referente a análise de filtros. As aplicações para projetos de filtros envolvem os estágios de especificação das propriedades desejadas do sistema; aproximação das especificações usando um sistema de tempo discreto causal e realização do sistema. Ao longo deste trabalho faz-se o uso de dois tipos de aproximação, o Butterworth - que são usados principalmente devido a facilidade de sintetizar - e o Cauer (Elíptico) que exibem comportamento equiripple na faixa de passagem e também na faixa de parada. Este trabalho utilizou-se dos métodos de Invariância ao degrau (ID), Transformada Z casada (TZC) e Transformação bilinear (TB).

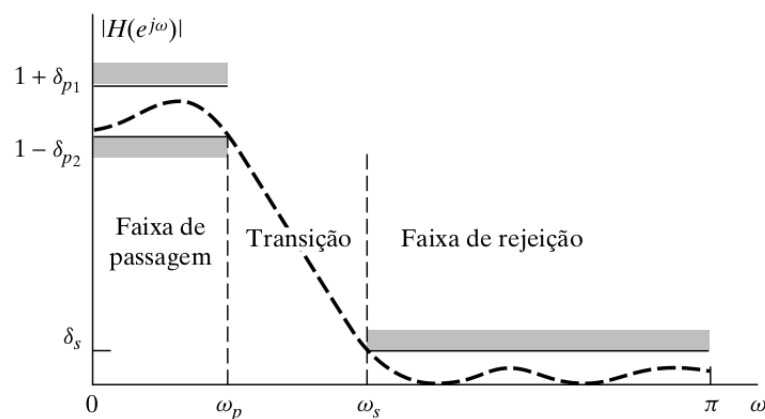
## 2 INTRODUÇÃO

Filtros são uma classe particularmente importante de sistemas Lineares Invariantes no Tempo. O termo filtro seletivo em frequência é definido por um sistema que passa certos componentes de frequência de um sinal de entrada e rejeita todos os outros, entretanto, em um contexto mais amplo, qualquer sistema que modifica certas frequências em relação a outras é também chamado de filtro. O projeto de filtros de tempo discreto corresponde à determinação dos parâmetros de uma função de transferência ou de uma equação de diferenças que aproxima uma resposta ao impulso ou uma resposta em frequência dentro de tolerâncias especificadas. (OPPENHEIM *et al.*, 1999).

De acordo com (LAGES, s.d.) todos os filtros lineares são sistemas que agem para produzir alguma modificação espectral desejada. No entanto, esses sistemas diferem na maneira como alcançam essa remodelagem espectral. Os sistemas de filtragem podem ser classificados em dois grupos, dependendo de suas características de resposta ao impulso: aqueles que têm respostas de impulso curtas e bem definidas e aqueles que produzem respostas de impulso que teoricamente duram para sempre. Os primeiros são denominados filtros de resposta a impulsos finitos (FIR), enquanto os últimos são denominados filtros de resposta a impulsos infinitos (IIR).

As especificações de um filtro são usualmente dadas no domínio da frequência. As características ideais em frequências para os filtros praticamente realizáveis podem ser obtidas apenas de maneira aproximada. É por isso que geralmente um filtro digital será definido por um gabarito (as especificações são dadas com certa tolerância) (SEARA, s.d.). Podemos analisar a partir da Figura 1.

Figura 1 – Gabarito



O projeto de filtros envolve os seguintes estágios:

1. Especificação das propriedades desejadas do sistema;
2. Aproximação das especificações usando um sistema de tempo discreto causal;



### 3. Realização do sistema.

No decorrer deste trabalho há uma bagagem teórica para desenvolvimento de projeto de filtros IIR, contendo algumas considerações relevantes que levam a boas condições práticas. Por fim, informações relacionadas ao projeto de filtros digitais a partir de um filtro analógico intermediário.

### 3 FILTRO DE BUTTERWORTH

Conforme (OPPENHEIM *et al.*, 1999), filtros passa-baixas de Butterworth apresentam a propriedade de que sua resposta em magnitude é maximamente plana na banda de passagem. Para um filtro passa-baixas de N-ésima ordem, isso significa que as primeiras  $(2N-1)$  derivadas da função da magnitude quadrática são nulas em  $\Omega = 0$ . Outra propriedade é que a resposta em magnitude é monotônica na banda de passagem e na banda de rejeição. A função da magnitude quadrática para um filtro passa-baixas de Butterworth de tempo contínuo tem a forma da equação 1 e pode ser visualizada por meio da figura 2.

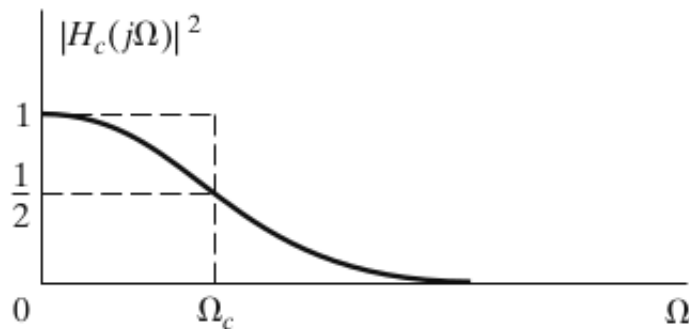
$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (j\Omega/j\Omega_c)^{2N}} \quad (1)$$

$$H(s)H(-s) = |H_c(j\Omega)|^2 \quad \text{para} \quad s = j\Omega \quad (2)$$

Onde,

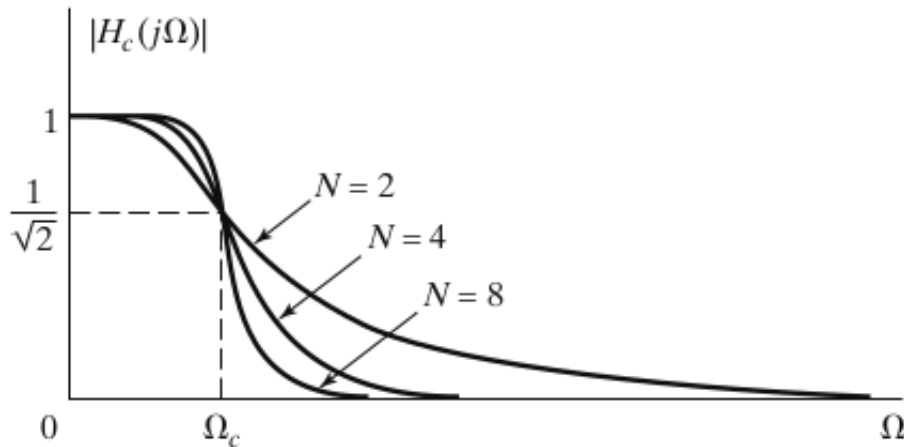
- $N$  é a ordem do filtro;
- $\Omega_c$  é a frequência de corte (-3db);

Figura 2 – Função  $|H_c(j\Omega)|^2$  para o filtro de Butterworth contínuo



Uma análise importante é feita quando relacionamos o parâmetro  $N$  na equação 1. Percebe-se na figura que se  $N$  aumenta, as características do filtro vão se tornando mais abruptas, permanecendo próximas da unidade ao longo da banda de passagem e se tornam próximas de zero mais rapidamente na banda de rejeição, conforme a figura 3.

Figura 3 – Relação de valores de ordem N para o filtro de Butterworth



Os filtros Butterworth são usados principalmente porque são fáceis de sintetizar e não porque têm propriedades particularmente boas. De volta a questão do relacionamento das ordens do filtro em relação a seu comportamento, a figura 4 demonstra a atenuação para filtros Butterworth de diferentes ordens e a figura 5 mostra os atrasos de grupo correspondentes. A tolerância permitida na banda passante é, neste caso,  $A_{max} = 1,25\text{dB}$ , que é obtida na borda da banda passante  $\omega_c = 1\text{rad/s}$ , conforme (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020).

Figura 4 – Atenuação dos filtros de Butterworth em diferentes ordens

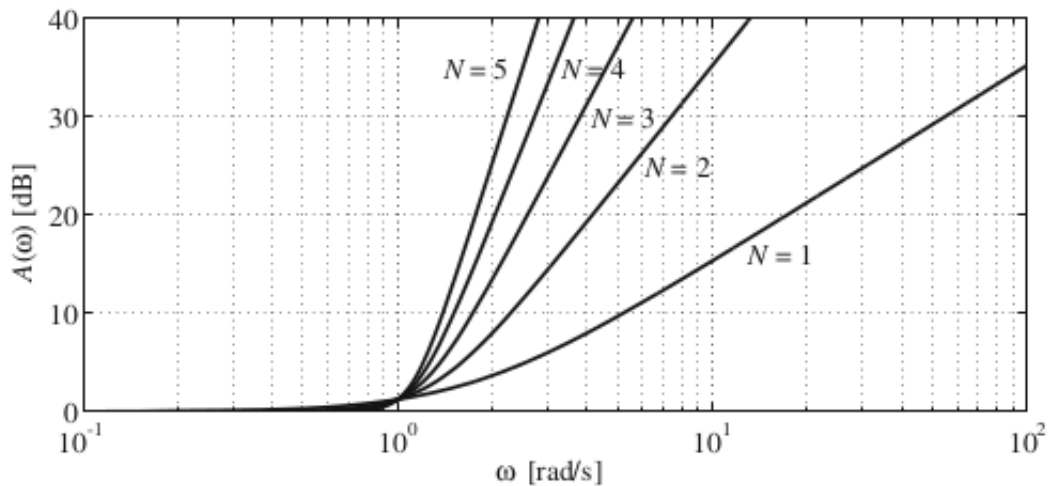
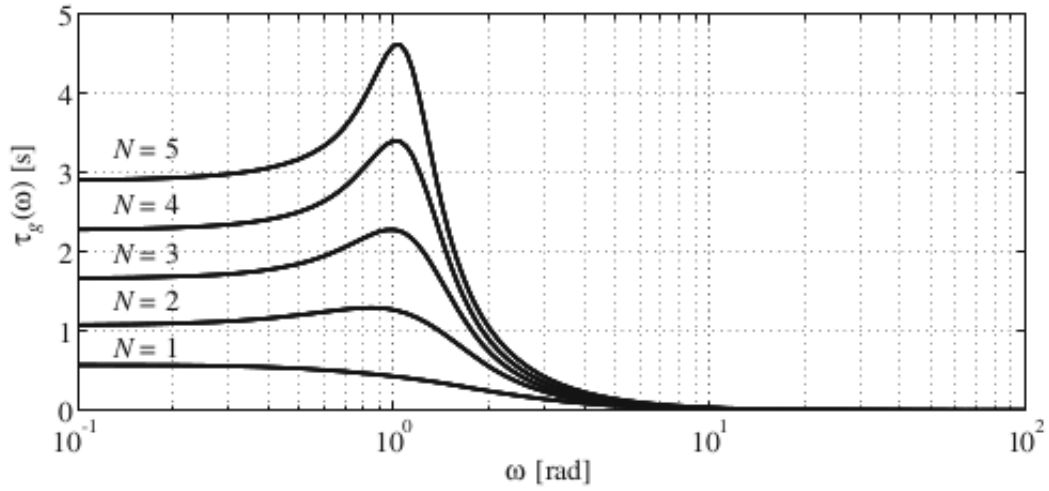


Figura 5 – Atraso dos filtros de Butterworth em diferentes ordens



Conforme (ACHARYA *et al.*, 2014) a ordem do filtro e a frequência de corte podem ser calculadas por meio das seguintes equações:

$$N = \frac{\log \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s-1}}{10^{0.1\alpha_p-1}}}}{\log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \quad (3)$$

$$\Omega_c = \frac{\Omega_s}{(10^{0.1\alpha_s-1})^{\frac{1}{2N}}} \quad (4)$$

Pode-se deduzir que o valor de N nem sempre pode assumir valores inteiros. Na maioria dos casos, é mais provável que haja valores fracionários. Portanto, em projetos reais, pode-se arredondar certos valores para a próxima casa decimal (ACHARYA *et al.*, 2014). De acordo com (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020), pode-se manipular a equação 3 para:

$$N \geq \frac{\log \sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s-1}}{10^{0.1\alpha_p-1}}}}{\log \frac{\Omega_s}{\Omega_p}} \quad (5)$$

Em relação aos polos da função da magnitude quadrática, substituindo  $j\Omega = s$ , pode-se obter a seguinte equação:

$$H_c(s)H_c(-s) = \frac{1}{1 + (\frac{s}{j\Omega_c})^{2N}} \quad (6)$$

Para localizar os polos da função da magnitude quadrática, basta definir valores de  $s$  que satisfazem  $1 + (s/(j\Omega_c))^{2N} = 0$ , segundo (OPPENHEIM *et al.*, 1999) pode-se chegar a seguinte forma:

$$S_k = (-1)^{1/2N} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}, \quad (7)$$

$$k = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (8)$$

#### 4 FILTRO ELÍPTICO (CAUER)

Os filtros Elípticos exibem comportamento equiripple na faixa de passagem e também na faixa de parada. Eles são semelhantes em características de resposta de magnitude aos filtros FIR. Portanto, os filtros elípticos são filtros ideais porque alcançam a ordem  $N$  mínima para as especificações fornecidas. Esses filtros, por razões óbvias, são muito difíceis de analisar e, portanto, de projetar. Não é possível projetá-los usando ferramentas simples e, muitas vezes, são necessários programas ou tabelas para projetá-los, conforme (INGLE; PROAKIS, c2017) Essa classe de aproximações tem a seguinte forma:

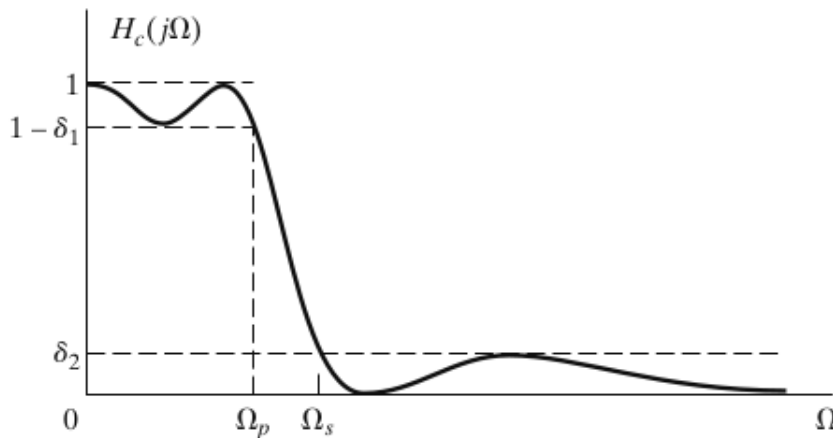
$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 U_N^2(\Omega)} \quad (9)$$

Onde,

- $U_N^2(\Omega)$  é considerado como uma função elíptica jacobiana de  $N$ th ordem;
- $N$  é a ordem do filtro;
- $\epsilon$  é o ripple na banda passante ( $R_p$ ).

Para obter o erro equiripple na banda de passagem e na banda de rejeição, os filtros elípticos devem ter polos e zeros. Esse filtro terá zeros no eixo  $j\Omega$  do plano  $s$ , como podemos notar por meio da figura, conforme informa (OPPENHEIM *et al.*, 1999).

Figura 6 – Aproximação equiripple na banda de passagem e na banda de rejeição.



A equação para cálculo de ordem é dada por (INGLE; PROAKIS, c2017):

$$N = \frac{K(k)K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)K(\sqrt{1-k^2})} \quad (10)$$

Onde,

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}, \quad (11)$$

$$k_1^2 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} \quad (12)$$

$$k(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2 \theta}} \quad (13)$$

As funções de atenuação para alguns filtros elípticos podem ser vistas por meio das figuras a seguir. A figura 7 refere-se a aproximações de Cauer com coeficientes da função de atenuação dados por  $A_{max} = 1.25dB$ ,  $A_{min} = 40dB$  e  $w_c = 1 rad/s$  retiradas da bibliografia de (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020):

Figura 7 – Atenuação dos filtros elípticos para ordens diferentes

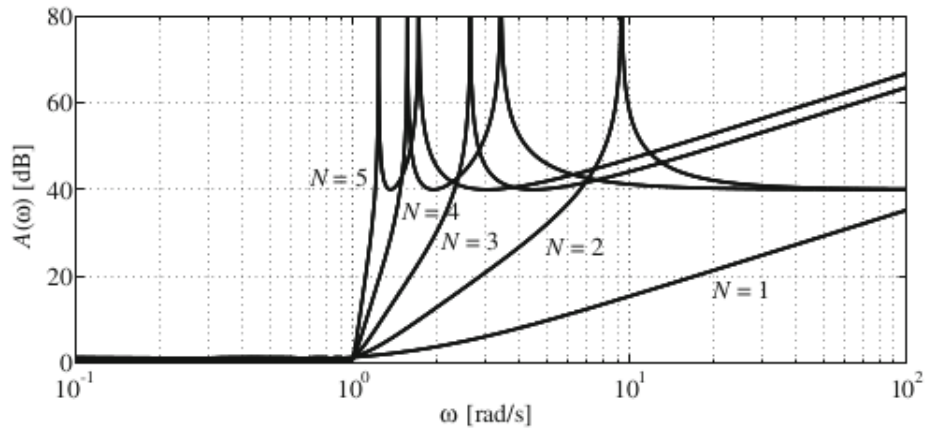


Figura 8 – Atenuação na banda de passagem para filtros elípticos de ordens diferentes

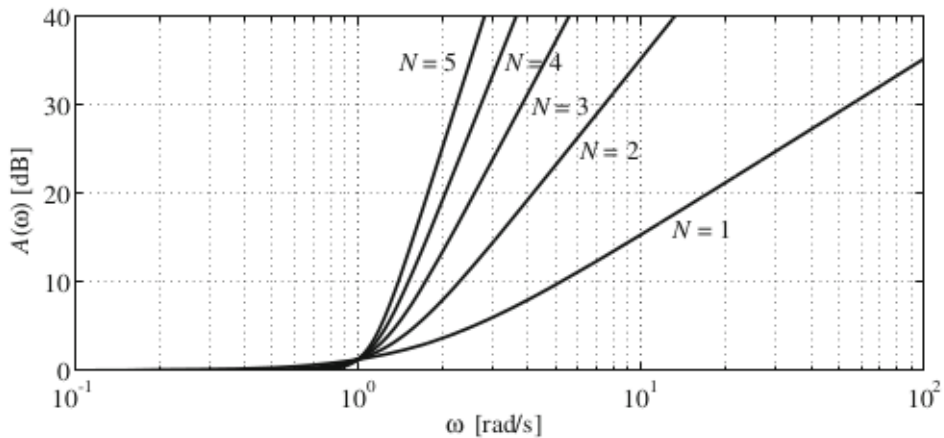
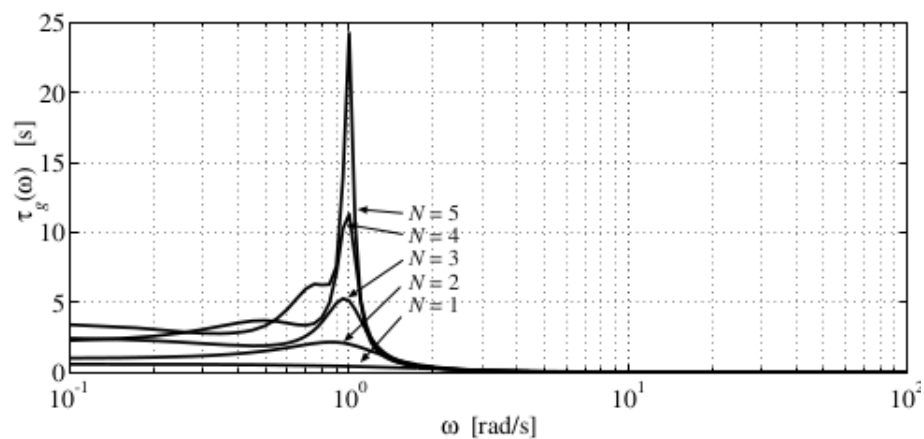


Figura 9 – Atenuação na banda de passagem para filtros elípticos de ordens diferentes



É notável um comentário interessante em relação a resposta do filtro sobre ordens ímpares e ordens pares, pode-se observar que a atenuação vai para o infinito para filtros de ordem ímpar e para  $A_{min}$  para filtros de ordem par.

## 5 TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

A transformada Bilinear descreve um mapeamento do plano  $j$  para o plano  $z$ , chamado de transformação bilinear. Este método é um mapeamento que transforma o eixo  $j\Omega$  dentro do círculo unitário no plano  $z$  apenas uma vez, evitando assim o *aliasing* dos componentes de frequência, segundo (PROAKIS; MANOLAKIS, s.d.). Com essa técnica,  $-\infty \leq \Omega \leq \infty$  é mapeado em  $-\pi \leq \omega \leq \pi$ . Logo, a transformação entre as variáveis de frequência de tempo contínuo e tempo discreto é necessariamente não linear. Portanto, sua utilização é restrita a situações em que a deformação não linear correspondente do eixo das frequências é aceitável, de acordo com (OPPENHEIM *et al.*, 1999).

Considerando:

- $H_c(s)$  denotando a função de sistema de tempo contínuo;
- $H(z)$ , a função de sistema de tempo discreto.

A transformação bilinear corresponde a substituir  $s$  por:

$$s = \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (14)$$

$$H(z) = H_c \left( \frac{2}{T_d} \left( \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \right) \quad (15)$$

Onde Considerando as observações de (OPPENHEIM *et al.*, 1999),  $T_d$  é um parâmetro de amostragem, representando o tamanho do passo da integração numérica ao realizar a regra de integração trapezoidal à equação diferencial correspondente a  $H_c(s)$ . Entretanto, para projeto de filtros, utiliza-se a transformação bilinear nos parâmetros da equação algébrica da função (equação 15). Todavia, o parâmetro  $T_d$  torna-se inutilizável para esta aplicação, pois as considerações de projeto sempre começam com especificações do filtro de tempo discreto  $H(e^{j\omega})$ . Quando essas especificações são mapeadas em especificações de tempo contínuo, e o filtro de tempo contínuo é então mapeado de volta em um filtro de tempo discreto, o efeito de  $T_d$  é cancelado (OPPENHEIM *et al.*, 1999).

Isolando  $z$  e substituindo  $s = \sigma + j\Omega$  pode-se encontrar

$$z = \frac{1 + (T_d/2)s}{1 - (T_d/2)s} \quad (16)$$

$$z = \frac{1 + \sigma T_d/2 + j\Omega T_d/2}{1 - \sigma T_d/2 - j\Omega T_d/2} \quad (17)$$

A partir desta equação, podemos fazer as seguintes considerações:



1. Para  $\sigma < 0$  temos  $|z| < 1$  para qualquer valor de  $\Omega$
2. Para  $\sigma > 0$  temos  $|z| > 1$  para qualquer valor de  $\Omega$
3. Se um polo de  $H_c(s)$  estiver no semiplano esquerdo do plano  $s$ , sua imagem no plano  $z$  estará no interior do círculo unitário. Portanto, os filtros de tempo contínuo estáveis e causais são mapeados em filtros de tempo discreto estáveis e causais, segundo (OPPENHEIM *et al.*, 1999).

Substituindo  $s = j\Omega$  temos:

$$z = \frac{1 + j\Omega T_d/2}{1 - j\Omega T_d/2} \quad (18)$$

Pode-se fazer uma segunda consideração a partir desta equação, a qual podemos dizer que  $|z| = 1$  para qualquer valor de  $j\Omega$ . Conforme (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020), a partir da dedução proposta, pode-se considerar  $z$  como  $e^{j\omega}$ , pois o eixo  $zj\Omega$  é mapeado na circunferência unitária. Enfim, chega-se a seguinte dedução para a equação 15:

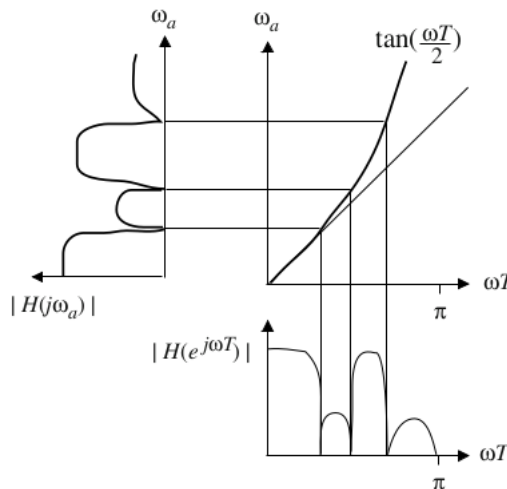
$$s = \frac{2e^{j\omega T} - 1}{Te^{j\omega T} + 1} = \frac{2e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{Te^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}} = j \frac{2}{T} \frac{2\sin\frac{-j\omega T}{2}}{T\cos\frac{-j\omega T}{2}} \quad (19)$$

Portanto, o eixo  $j\omega_a$  é mapeado no círculo unitário:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (20)$$

A faixa de frequência analógica de  $-\infty$  a  $\infty$  é comprimida para a faixa de  $-\pi$  a  $\pi$  devido a  $\tan(\frac{\omega T}{2})$ . Desta forma, um filtro analógico é convertido em um filtro digital com requisito de magnitude constante aproximadamente por partes, mas o comprimento das bandas é distorcido, conforme mostrado (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020).

Figura 10 – Mapeamento da resposta em magnitude



### 5.0.1 Síntese de filtros passa-baixa

O primeiro passo para conversão de um filtro analógico em um filtro digital passa-baixa é mapear as bordas de banda conforme demonstrado na equação 20, seu comportamento pode ser identificado nas figura 11 e 12, de (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020) e (OPPENHEIM *et al.*, 1999):

Figura 11 – Processo de conversão - Transformação Bilinear

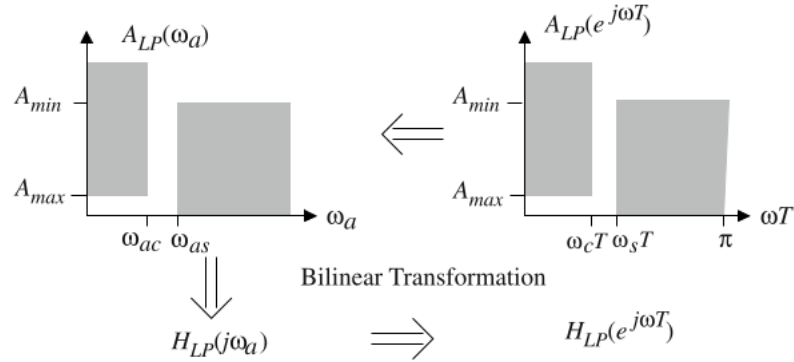
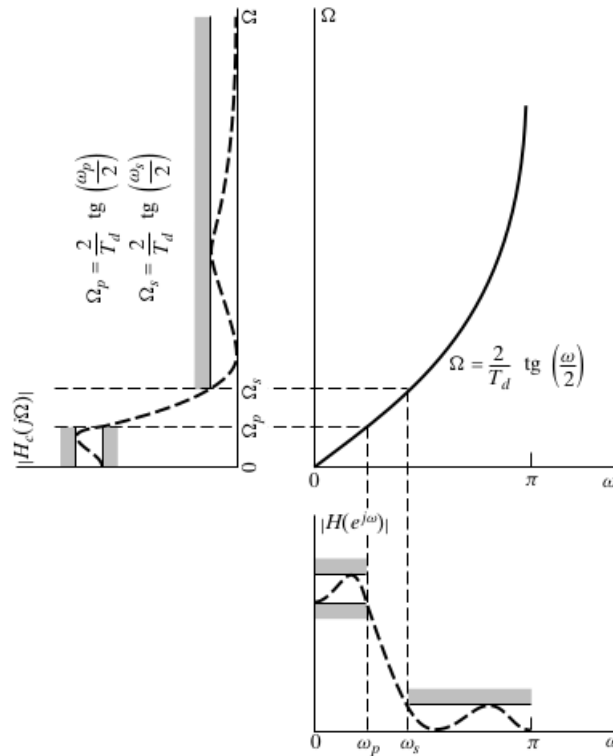


Figura 12 – Deformação da frequência inerente à transformação bilinear de um filtro passa-baixas de tempo contínuo em um filtro passa-baixas de tempo discreto



Por meio da função de transferência  $H(s)$  do filtro analógico, o próximo passo será mapear os pólos e zeros do filtro passa-baixas ao domínio digital. Por fim, podemos

realizar esta operação seguindo a documentação do (MATWORKS..., s.d.), que apresenta um mapeamento de acordo com a equação a seguir:

$$z = \frac{1 + sT/2}{1 - sT/2} \quad (21)$$

Essa abordagem resolve o problema de encontrar uma função de transferência  $H(z)$  que satisfaça uma especificação de magnitude constante por partes, conforme explica (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020).

## 6 INVARIÂNCIA AO DEGRAU

Neste método, é projetado um filtro de tempo discreto, de tal forma que sua resposta de degrau unitário corresponda exatamente à resposta em degrau do filtro de referência analógico em seus instantes de amostragem. As equações deste capítulo são desenvolvidas baseando na bibliografia de (SCHLICHTHÄRLE, 2000).

$$ar(n) = a_a n(n) \quad (22)$$

$$h(n) = a(n) - a(n-1) \quad (23)$$

$$a_a(t) = \int_0^t h_a(\tau) d\tau \quad (24)$$

A seguinte relação entre as respostas de frequência dos filtros analógicos e de tempo discreto pode ser expressada:

$$H(e^{j\omega t}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\omega + jk2\pi/T) e^{-j(\omega T/2 + k\pi)} \frac{\sin(\omega T/2 + k\pi)}{\omega T/2 + k\pi} \quad (25)$$

Conforme (SCHLICHTHÄRLE, 2000), a ponderação passa-baixa da função de transferência tem o efeito colateral vantajoso de que o *aliasing* é fortemente reduzido quando a resposta de frequência é contínua periodicamente. Como consequência, os filtros passa-alta, *all-pass* e *bandstop* agora também podem ser tratados com esse método, uma vez que a equação 25 garante que converge em qualquer caso, desde que  $H_a(j\omega)$  seja finito.

Afim de converter a função de transferência do filtro analógico na função de transferência do filtro de tempo discreto, pode-se tomar estratégias de derivação, tomando como ponto de partida a forma geral da resposta ao impulso de um sistema de enésima ordem, da seguinte forma: (SCHLICHTHÄRLE, 2000)

$$h_a(t) = K\delta(t) + \sum_{k=1}^N C_k e^{p_{\infty k} t} u(t) \quad (26)$$

Levando em consideração a equação 24, ao integrar o impulso unitário, podemos fazer manipulações algébricas e trabalhar em forma de degrau unitário. Ao utilizarmos a equação 22 podemos converter para tempo discreto.

$$a_a(t) = K u(t) + \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{p_{\infty k}} (e^{p_{\infty k} t} - 1) u(t) \quad (27)$$

$$a_a(n) = K u(n) + \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{p_{\infty k}} (e^{p_{\infty k} T n} - 1) u(n) \quad (28)$$

A utilizar a transformada-z podemos reproduzir a resposta de degrau unitário no domínio da frequência:

$$A(z) = k \frac{z}{z-1} + \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{p_{\infty k}} \left( \frac{z}{z - e^{p_{\infty k} T}} - \frac{z}{z-1} \right) \quad (29)$$

$$A(z) = H(z)U(z) \quad (30)$$

$$U(z) = H(z) = \frac{z}{z-1} \quad (31)$$

$$H(z) = k + \sum_{k=1}^N \frac{C_k(e^{p_{\infty k} T} - 1)}{p_{\infty k}} \frac{1}{z - e^{p_{\infty k} T}} \quad (32)$$

A seguir, algumas representações gráficas são apresentadas para melhor esclarecimento sobre a atuação da invariância ao degrau.

Figura 13 – Resposta em frequência da resposta de um filtro analógico e do filtro pelo método da invariância ao degrau

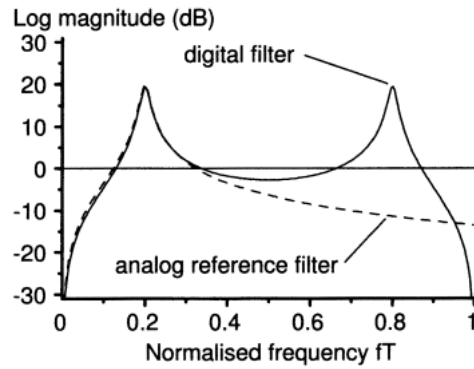


Figura 14 – Resposta em frequência do filtro passa-baixa de segunda ordem e do método da invariância ao degrau

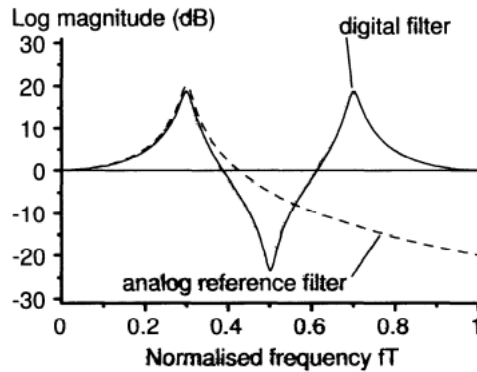
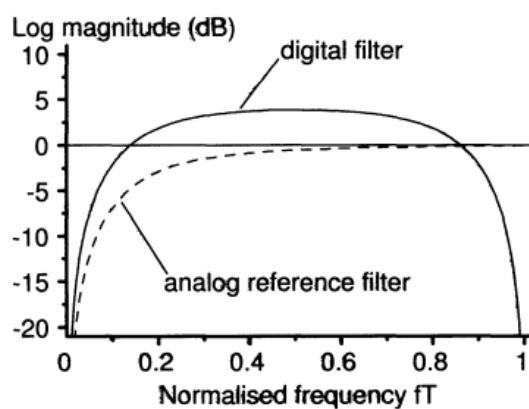


Figura 15 – Resposta em frequência da resposta de um filtro analógico e do filtro pelo método da invariância ao degrau



## 7 INVARIÂNCIA A RAMPA

A transformada  $z$  desta técnica pode ser derivada da transformada de Laplace aplicando as mesmas operações que produzem a transformada  $z$  da invariância ao degrau, a única diferença sendo que o filtro analógico no tempo  $t_n$  é excitado por uma rampa, de acordo com (MORIN; LABBÉ; VALCARTIER, 1984).

Por este método, um filtro de tempo discreto é projetado de tal forma que sua resposta à função rampa é:

$$r(n) = n u(n) \quad (33)$$

Nos instantes de amostragem. O ponto de partida para a derivação da regra de projeto é a função de transferência do filtro analógico na representação de frações parciais, conforme explica (SCHLICHTHÄRLE, 2000)

$$H(p) = K + \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{p - p_{\infty k}} \quad (34)$$

Onde podemos definir,

- $C_k = k_{th}$  coeficiente das frações parciais do filtro analógico
- $p_{\infty k} = k_{th}$  polo do filtro projetado

O resultado direto da forma da função de transferência correspondente do filtro de tempo discreto invariante em rampa é definido por

$$H(z) = K + \sum_{k=1}^N \frac{C_k}{p_{\infty k}} \left( \frac{e^{p_{\infty k}^T} - 1}{p_{\infty k}^T} \frac{z - 1}{z - e^{p_{\infty k}^T}} - 1 \right) \quad (35)$$

As imagens a seguir mostram as aplicações do método de invariância a rampa, conforme (SCHLICHTHÄRLE, 2000).

Figura 16 – Respostas de frequência de um circuito analógico ressonante

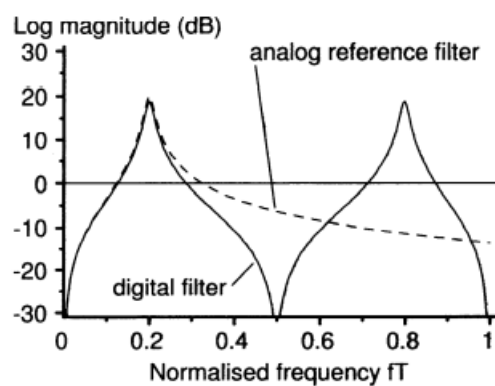


Figura 17 – Respostas de frequência dos filtros passa-baixa de segunda ordem

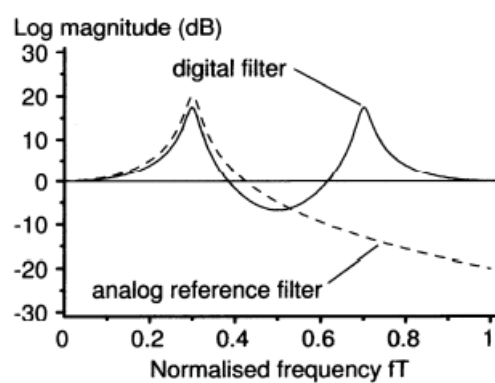
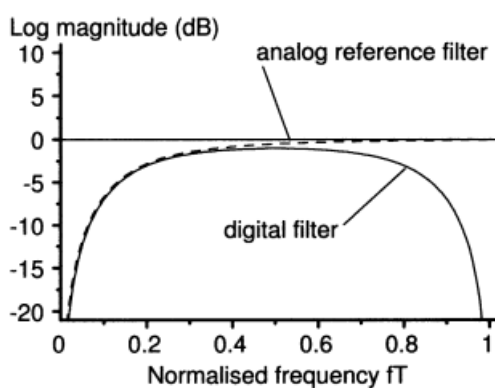


Figura 18 – Respostas de frequência dos filtros passa-alta de primeira ordem





## 8 TRANSFORMADA-Z CASADA

A transformada-z casada é um método de converter um filtro analógico em um equivalente digital, mapeando os polos e os zeros de  $H(s)$  diretamente em polos e zeros no plano  $z$ , segundo (PROAKIS; MANOLAKIS, s.d.).

Suponha que a função do sistema do filtro analógico e do sistema digital sejam expressas na forma fatorada das seguintes equações:

$$H(s) = \frac{\prod_{k=1}^M (s - z_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (36)$$

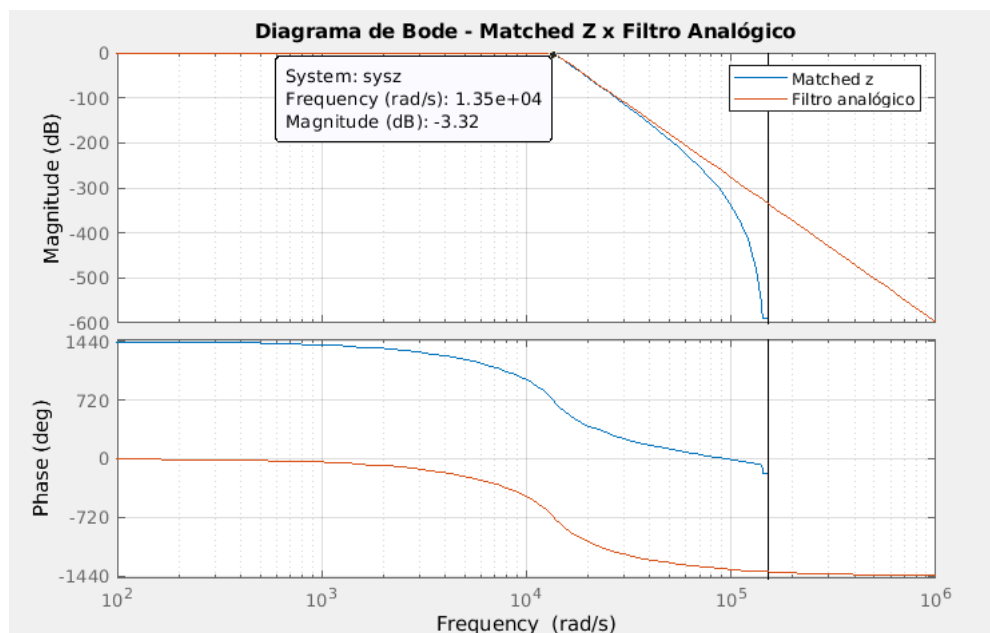
$$H(z) = \frac{\prod_{k=1}^M (1 - e^{z_k T} z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - e^{p_k T} z^{-1})} \quad (37)$$

Estas manipulações podem ser chamadas de transformada-z casada, onde as seguintes considerações podem ser feitas:

- $T$  é o intervalo de amostragem;
- Cada fator na forma de  $(s - a)$  em  $H(s)$  é incorporado no fator  $(1 - e^{aT} z^{-1})$ .

Como a transformação é realizada através dos pólos e zeros, é necessário que a função de transferência analógica  $H(s)$  se apresente na forma fatorada para ser aplicada a Transformação Z Casada. Encontra-se um grande problema na utilização desta transformação, pois em casos de um filtro analógico ter o valor de zeros com frequência central maior do que  $\frac{1}{2\Delta t} = fs/2$ , suas localizações no plano  $z$  podem ser degradadas em relação às localizações do filtro analógico, resultando em um efeito semelhante ao recobrimento de espectros, alterando significativamente a resposta em frequência do filtro digital, conforme explica (SEARA, s.d.). Pode-se analisar a figura 38, contendo uma explicação ilustrativa deste fenômeno, proposta no material disciplinar do autor.

Figura 19 – Representação da frequência central do zero



Segundo (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020), essa abordagem sofre de problemas de aliasing e, portanto, não é recomendada para o projeto de filtros seletivos de frequência.

Outra problemática citada por (SEARA, s.d.) é o de quando a função de transferência do filtro analógico tem somente pólos, deixando de representar adequadamente o sistema analógico, reportando problemas similares aos do método de invariância ao impulso.

## 9 ESTUDO DOS ERROS DE QUANTIZAÇÃO

### 9.1 CONVERSOR ANALÓGICO-DIGITAL

Normalmente, uma amostra é obtida medindo um sinal de tempo contínuo (analógico) em intervalos de tempo uniformemente espaçados  $T$ . Um conversor analógico-digital (ADC) pode ser modelado por um processo de duas etapas, conforme (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020), estas etapas são:

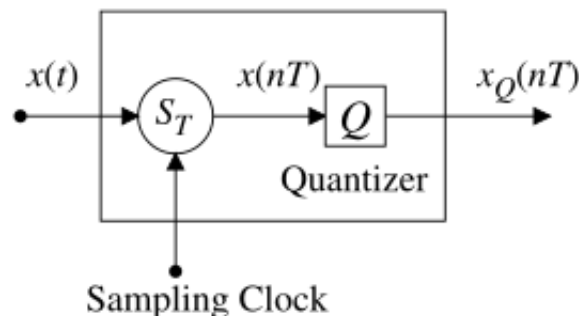
- Na primeira etapa, o sinal analógico  $x(t)$  é medido em instâncias de tempo  $t = nT$  em que a sequência  $x(nT)$  é obtida;
- Na segunda etapa, os valores da sequência são quantizados para que um sinal digital  $x_Q(nT)$  seja obtido.

O erro de quantização é:

$$\epsilon(nT) = x_Q(nT) - x(nT) \quad (38)$$

Uma ponderação importante é de que na prática, um conversor analógico-digital

Figura 20 – Modelo de um ADC



é considerado um dispositivo não ideal, com várias imperfeições que resultam em desvios da reconstrução perfeita do sinal original. Segundo (PROAKIS; MANOLAKIS, s.d.) O ruído de quantização é bem caracterizado estatisticamente pela função de densidade de probabilidade uniforme.

### 9.2 QUANTIZAÇÃO

Com o embasamento teórico de (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020), algumas definições serão apresentadas nesta seção.

Para quantizar um número pode-se dividir todo o intervalo de números em um conjunto de segmentos finitos e alocar o mesmo valor a todos os números em cada segmento. O intervalo de números é limitado a um número finito de valores. Números fora da faixa de números produzem erros muito grandes e, portanto, são frequentemente limitados

ao maior (menor) valor, também conhecido como aritmética de saturação, segundo explica (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020). Alguns erros são citados a seguir.

### 9.2.1 Erros em Ponto Fixo

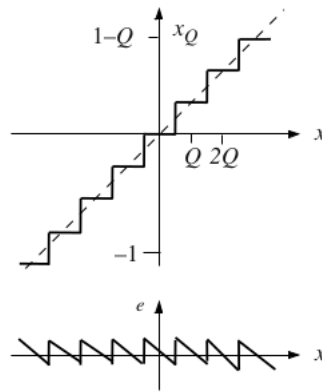
#### 9.2.1.1 Arredondamento (Rounding)

O erro de quantização devido a *rounding* apresenta a seguinte forma:

$$e = x_Q - x \quad \leftrightarrow \quad x_Q = x + e \quad (39)$$

A Figura 21 mostra a relação entre  $x$  e  $x_Q$  para arredondar números de ponto fixo binários em complemento de dois ou representação da magnitude de sinal. O erro é independente da representação do número para arredondamento.

Figura 21 – Arredondamento - Rounding



Podemos dizer que para números dentro do intervalo de número válido, o erro máximo é igual a  $Q/2$ .

#### 9.2.1.2 Truncamento (Truncation)

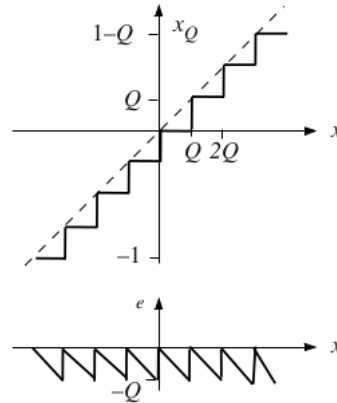
Outro tipo de erro, que pode ser denominado erro de truncamento, surge quando apenas um número finito de termos é usado. Este erro é dado por:

$$ET(x) = Q(x) - x \quad (40)$$

onde,

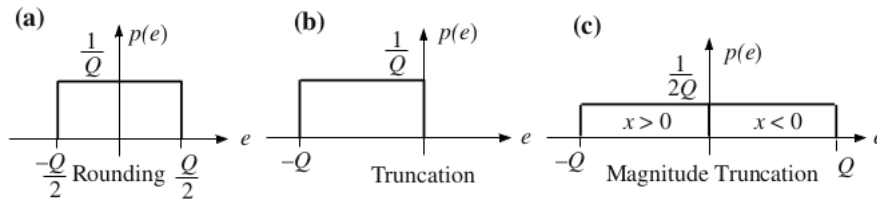
1.  $Q(x)$  é múltiplo inteiro do passo de quantização;
2. O menor valor do passo é  $2Q$  para uma palavra de  $b+1$  bits.

Figura 22 – Truncamento - Truncation



A figura 23 demonstra o comportamento em relação a magnitude:

Figura 23 – Representação de erros para ponto fixo



### 9.2.2 Erros em Ponto Flutuante

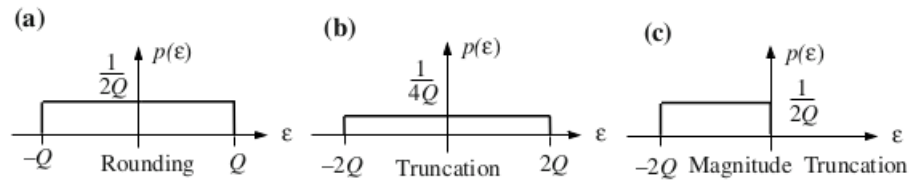
Para lidar com pontos flutuantes, é necessário quantizar após as multiplicações e adições. Antes da adição, a mantissa do menor número da soma é deslocado para a direita até que o expoente de ambos os números seja o mesmo; por este fator, a utiliza-se a quantização de adição. Como o valor da mantissa de soma acaba sendo muito longo, necessita-se de ser quantizada, conforme (OPPENHEIM *et al.*, 1999).

O arredondamento e o truncamento de um número de ponto flutuante são feitos em uma mantissa normalizada semelhante à representação de ponto fixo. Um erro relativo é mais útil na representação de ponto flutuante. A mantissa é tipicamente normalizada em  $|m| \leq 1$ .

$$\epsilon = \frac{\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}}{\mathbf{x}} \leftrightarrow \mathbf{x}_Q = (1 + \epsilon)\mathbf{x} \quad (41)$$

Pode-se perceber ao analisar a figura 24 que se os valores da amostra variam irregularmente, os erros de quantização obtidos se aproximam de uma distribuição retangular.

Figura 24 – Representação de erros para ponto flutuante



Para arredondamento e ponto flutuante, temos, para:  $\mathbf{x}_Q - \mathbf{x}$

$$-2^E \frac{2^{-t_L}}{2} \leq \mathbf{x}_Q - \mathbf{x} \leq 2^E \frac{2^{-t_L}}{2} \quad (42)$$

onde,

- $E$  é o expoente;
- $t_L$  é o último bit significativo da mantissa

Logo,

$$2^{E-1} \leq |\mathbf{x}| \leq 2^E \quad (43)$$

$$-2^{-t_L} \leq \epsilon \leq 2^{-t_L} \quad (44)$$

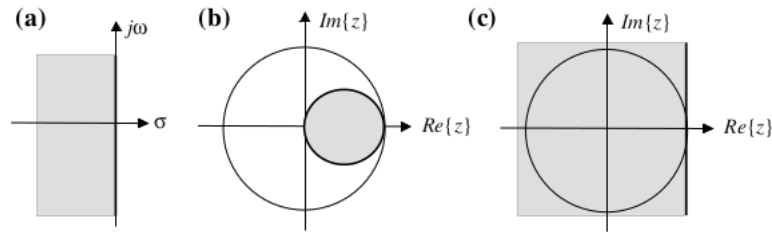
Portanto,  $-Q \leq \epsilon \leq 0$

## 10 TRANSFORMAÇÃO EQUIVALÊNCIA DA DERIVADA PARA DIFERENÇA FORWARD

De acordo com (WANHAMMAR; SARAMÄKI, 2020) o operador de diferença para forward mapeia a metade esquerda do plano  $s$  para o plano  $z$ . O eixo  $j\omega$  é mapeado para uma linha vertical  $Re\{z\} = 1$ . Portanto, se o filtro analógico não tiver uma largura de banda muito estreita, alguns pOlos podem ser mapeados fora do círculo unitário. Esses métodos são rudes e, portanto, não são recomendados para filtros seletivos de frequência. É definido por:

$$S = \frac{z-1}{T} \quad (45)$$

Figura 25 – a) Plano- $s$ , b) Diferença backward, c) Diferença Forward



Podemos considerar as deduções de (WYNN, 1956) até chegar nesta conclusão: A derivada é aproximada por

$$\dot{y}(kT) = \frac{y(k+1) - y(k)}{T} \quad (46)$$

Considerando o sistema de primeira ordem

$$\dot{y}(t) + ay(t) = au(t) \quad (47)$$

portanto, tem-se que:

$$sY(s) + aY(s) = aU(s) \quad (48)$$

Logo,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{a}{s+a} \quad (49)$$

A partir deste momento, podemos considerar a utilização da aproximação discreta, manipulando as equações e chegando a seguinte conclusão:

$$\begin{aligned} \frac{y(k+1) - y(k)}{T} + ay(k) &= au(k) \\ zY(z) - Y(z) + aTY(z) &= aTU(z) \end{aligned} \quad (50)$$

Por fim,

$$\begin{aligned} Gf(z) &= \frac{y(z)}{U(z)} = \frac{aT}{z-1+aT} \\ Gf(z) &= \frac{a}{\frac{z-1}{T} + a} \end{aligned} \quad (51)$$

Para obter  $G(z)$  a partir de  $G(s)$ , basta fazer a substituição de variáveis.

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (52)$$

Utilizando a transformação  $z = 1 + Ts$ , o limite de estabilidade  $s = j\omega$  mapeia-se em  $z = 1 + jT\omega$ . Portanto, sistemas estáveis no plano  $s$  podem tornarem-se instáveis quando mapeados para  $z$  por esse método, (WYNN, 1956).

Pode-se analisar as aproximações por integração numérica por meio da seguinte tabela:

Figura 26 – Aproximações por integração numérica

Tabela 1: Aproximações por integração numérica.		
Aproximação	$s \rightarrow z$	$z \rightarrow s$
Forward differences (Euler)	$s = \frac{z-1}{T}$	$z = 1 + Ts$
Backward differences	$s = \frac{z-1}{Tz}$	$z = \frac{1}{1-Ts}$
Aproximação trapezoidal (Tustin, bilinear)	$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$	$z = \frac{1+\frac{T}{2}s}{1-\frac{T}{2}s}$



## 11 PROJETO DO FILTRO DE BUTTERWORTH

### 11.1 PROJETO DO FILTRO ANALÓGICO

#### 11.1.1 Especificação das propriedades desejadas do sistema

Visando projetar o filtro passa-baixas proposto, com frequência de amostragem  $f_s = 48\text{kHz}$ , o seguinte algoritmo foi criado:

Figura 27 – Definição dos parâmetros iniciais

```
% Parâmetros iniciais
fsample = 48000;           % fa > 2*fn

fp = 2000;                 % frequência de passagem
fs = 3000;                 % frequência de corte

% Região de transição da frequência
wp = (2*pi*fp)/fsample;
ws = (2*pi*fs)/fsample;

T = 1/fsample
%pre warping
%wp/fs
pre_wp = (2/T)*tan(wp/2)
pre_ws = (2/T)*tan(ws/2)

% Limites de tolerância
ap = 0.5;                 % tolerância na faixa de passagem
as = 45;                  % tolerância na faixa de rejeição
```

#### 11.1.2 Cálculo da ordem e da Frequência de Corte

Para o filtro analógico, utilizando o seguinte comando (MATHEWORKS..., s.d.) podemos encontrar a ordem desejada do filtro:

$$[n, \omega_n] = \text{buttord}(wp, ws, ap, as, 's')$$

Neste caso, o algoritmo retorna a ordem  $[n]$  a frequência de corte  $[\omega_n]$  para um filtro analógico  $['s']$ .

Ao utilizar estes recursos computacionais, chegou-se nos valores de:

- $N = 16$
- $\omega_n = 1.3636e+04 \text{ rad/s}$

Por meio de cálculo, pode-se provar as equações 3 e 4 da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{\log\left(\sqrt{\frac{10^{0.1\alpha_s}-1}{10^{0.1\alpha_p}-1}}\right)}{\log\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \\
 &= \frac{\log\left(\sqrt{\frac{10^{0.1\cdot45}-1}{10^{0.1\cdot0.5}-1}}\right)}{\log\left(\frac{2\pi\cdot3000}{2\pi\cdot2000}\right)} \\
 &= \frac{\log_{10}\left(\sqrt{\frac{10^{4.5}-1}{10^{0.05}-1}}\right)}{\log_{10}\left(\frac{6000\pi}{4000\pi}\right)} \\
 &= 15.37146...
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Omega_c &= \frac{\Omega_s}{(10^{0.1\alpha_s}-1)^{\frac{1}{2N}}} \\
 &= \frac{2\cdot\pi\cdot3000}{(10^{0.1\cdot45}-1)^{\frac{1}{(2\cdot16)}}} \\
 &= \frac{6000\pi}{31621.77660\dots^{\frac{1}{32}}} \\
 &= 13635.67219...
 \end{aligned}$$

Logo, pode-se atribuir o **valor da ordem do filtro** para  $N = 16$  e o **valor da frequência de corte** para  $\omega_n = 13636 \text{ rad/s}$ .

### 11.1.3 Função de Transferência do Filtro Analógico

Por meio da utilização de algoritmos, fica elucidativo encontrar a função de transferência de um sistema de ordem 16. Utilizando o comando a seguir, chegaremos nos valores de pólo, zeros e ganho do filtro analógico (MATHEWORKS..., s.d.).

$$[\mathbf{zs}, \mathbf{ps}, \mathbf{ks}] = \text{butter}(n, \omega_n, 's')$$

Onde,

- $\mathbf{zs}$  são os zeros da função;
- $\mathbf{ps}$  são os polos da função;
- $\mathbf{ks}$  é o valor do ganho.

As figuras 28 e 29 permitem analisar o valor dos polos e uma interpretação gráfica. Após encontrar os valores de polos, zeros e ganho, as variáveis para determinar a função de transferência do sistema estão completas. A partir da seguinte linha de comando, pode-se encontrar o valor desejado (MATHEWORKS..., s.d.):

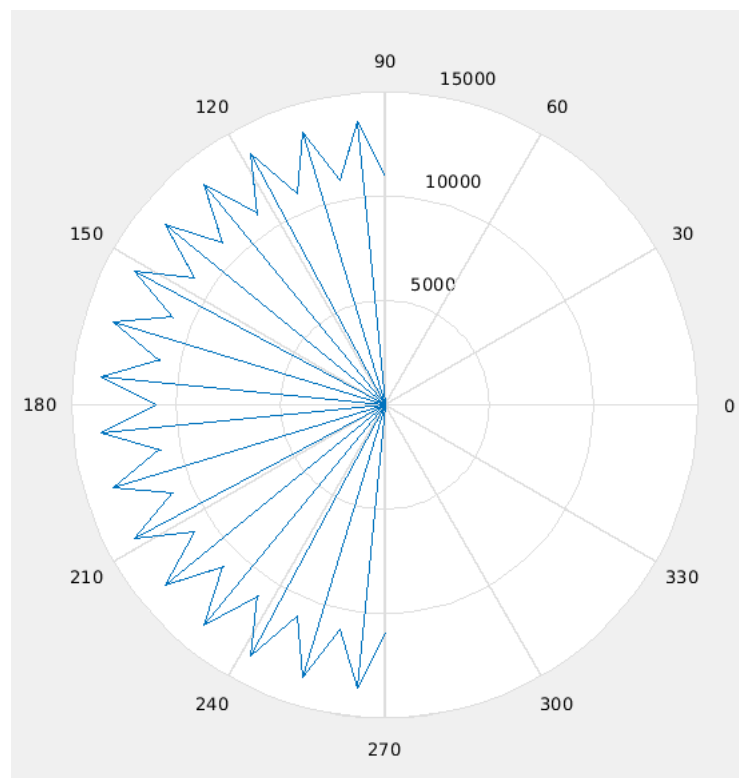
Figura 28 – Polos do filtro analógico

```

-1.3747 + 0.1354i
-1.3747 - 0.1354i
-1.3219 + 0.4010i
-1.3219 - 0.4010i
-1.2183 + 0.6512i
-1.2183 - 0.6512i
-1.0678 + 0.8763i
-1.0678 - 0.8763i
-0.8763 + 1.0678i
-0.8763 - 1.0678i
-0.6512 + 1.2183i
-0.6512 - 1.2183i
-0.4010 + 1.3219i
-0.4010 - 1.3219i
-0.1354 + 1.3747i
-0.1354 - 1.3747i

```

Figura 29 – Vetor de valores complexos



$$[\mathbf{bs}, \mathbf{as}] = \text{zp2tf}(\mathbf{zs}, \mathbf{ps}, \mathbf{ks})$$

$$\mathbf{sys} = \text{tf}(\mathbf{bs}, \mathbf{as})$$

Onde,

- **zp2tf** converte z,p,k para a forma de função de transferência;
- **bs** e **as**, são os valores de numerador e denominador da função;

- **"sys"** recebe os valores de numerador e denominador e retornam a função de transferência.

Por conseguinte, chega-se às seguintes representações:

**Função de Transferência:**

$$H(s) = \frac{1.428e^{66}}{s^{16} + 1.391e^5 s^{15} + 9.677e^9 s^{14} + 4.458e^{14} s^{13} + 1.52e^{19} s^{12} + 4.062e^{23} s^{11} + 8.793e^{27} s^{10} + 1.571e^{32} s^9 + 2.343e^{36} s^8 + 2.922e^{40} s^7 + 3.04e^{44} s^6 + 2.611e^{48} s^5 + 1.817e^{52} s^4 + 9.906e^{55} s^3 + 3.998e^{59} s^2 + 1.069e^{63} s + 1.428e^{66}}$$

to

(54)

#### 11.1.4 Gráficos do Filtro Analógico

A partir desta seção, podemos analisar os gráficos com a resposta do filtro analógico projetado.

Figura 30 – Resposta em Magnitude e Fase do Filtro Analógico

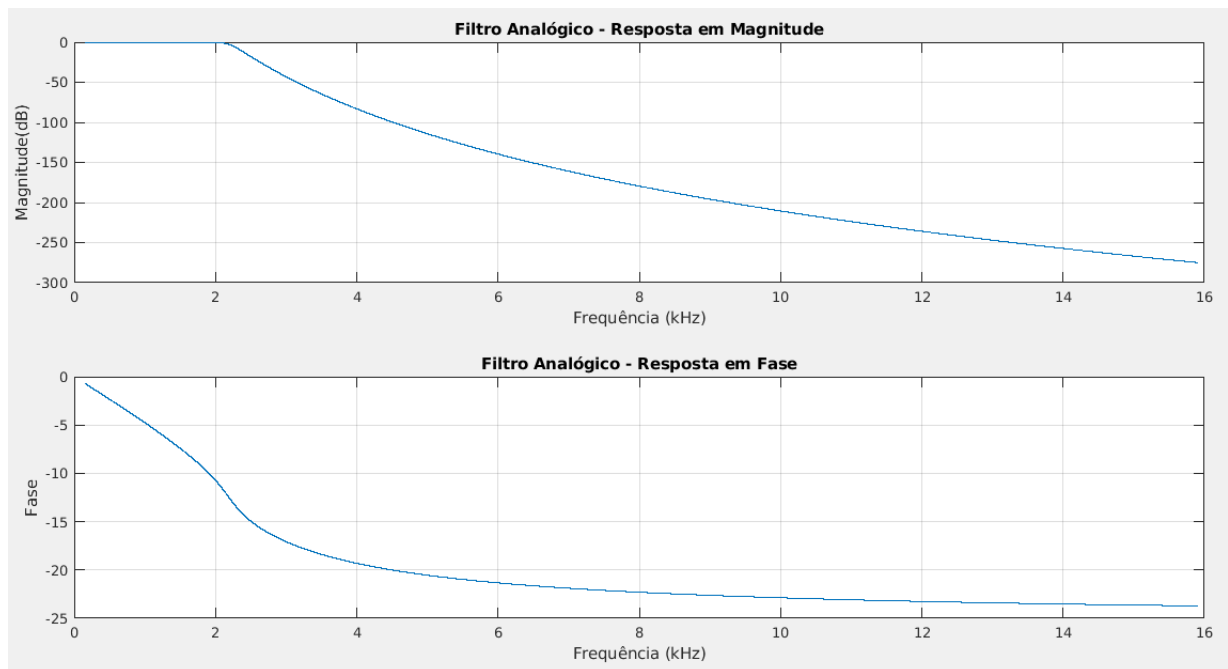
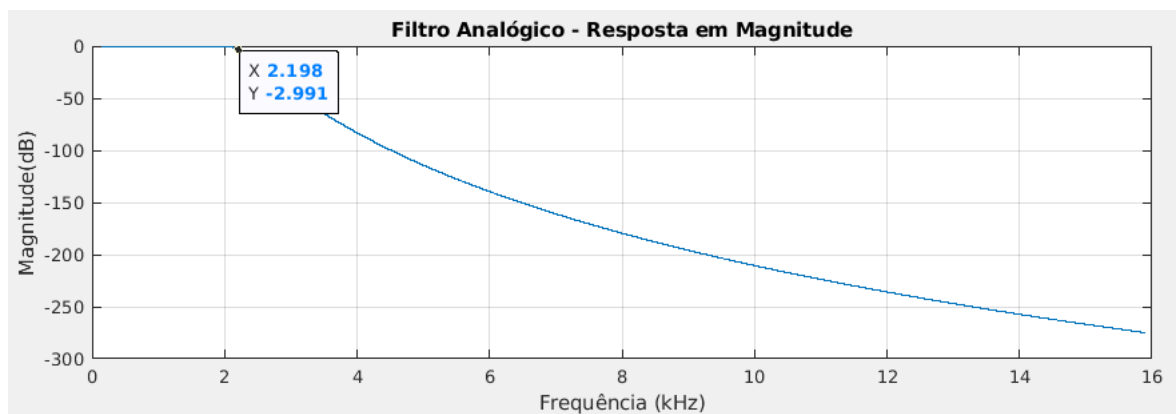


Figura 31 – Diagrama de Bode do Filtro Analógico



## 11.2 PROJETO DA TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

### 11.2.1 Transformação bilinear

A estratégia desenvolvida para projetar este filtro foi utilizando a função de transferência do filtro analógico para discretizá-lo e aplicar a transformação bilinear. Ao utilizar essa função, podemos adquirir a função de transferência do novo modelo, esta que pode ser visualizada a seguir:

Figura 32 – Função de Transferência após a Transformação Bilinear

$$\begin{aligned}
 &7.808e-15 \, z^{16} + 1.249e-13 \, z^{15} + 9.369e-13 \, z^{14} + 4.372e-12 \, z^{13} + 1.421e-11 \, z^{12} + 3.41e-11 \, z^{11} \\
 &+ 6.252e-11 \, z^{10} + 8.932e-11 \, z^9 + 1.005e-10 \, z^8 + 8.932e-11 \, z^7 + 6.252e-11 \, z^6 + 3.41e-11 \, z^5 \\
 &+ 1.421e-11 \, z^4 + 4.372e-12 \, z^3 + 9.369e-13 \, z^2 + 1.249e-13 \, z + 7.808e-15 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &z^{16} - 13.08 \, z^{15} + 80.47 \, z^{14} - 308.8 \, z^{13} + 827.4 \, z^{12} - 1641 \, z^{11} + 2493 \, z^{10} - 2958 \, z^9 + 2770 \, z^8 \\
 &- 2054 \, z^7 + 1202 \, z^6 - 549.2 \, z^5 + 192.1 \, z^4 - 49.72 \, z^3 + 8.979 \, z^2 - 1.011 \, z + 0.05344
 \end{aligned}$$

### 11.2.2 Gráficos da Transformação Bilinear

A partir desta seção, podemos analisar os gráficos com a resposta da transformação bilinear.

Figura 33 – Diagrama de Bode do Filtro Analógico x Transformação Bilinear [Butterworth]

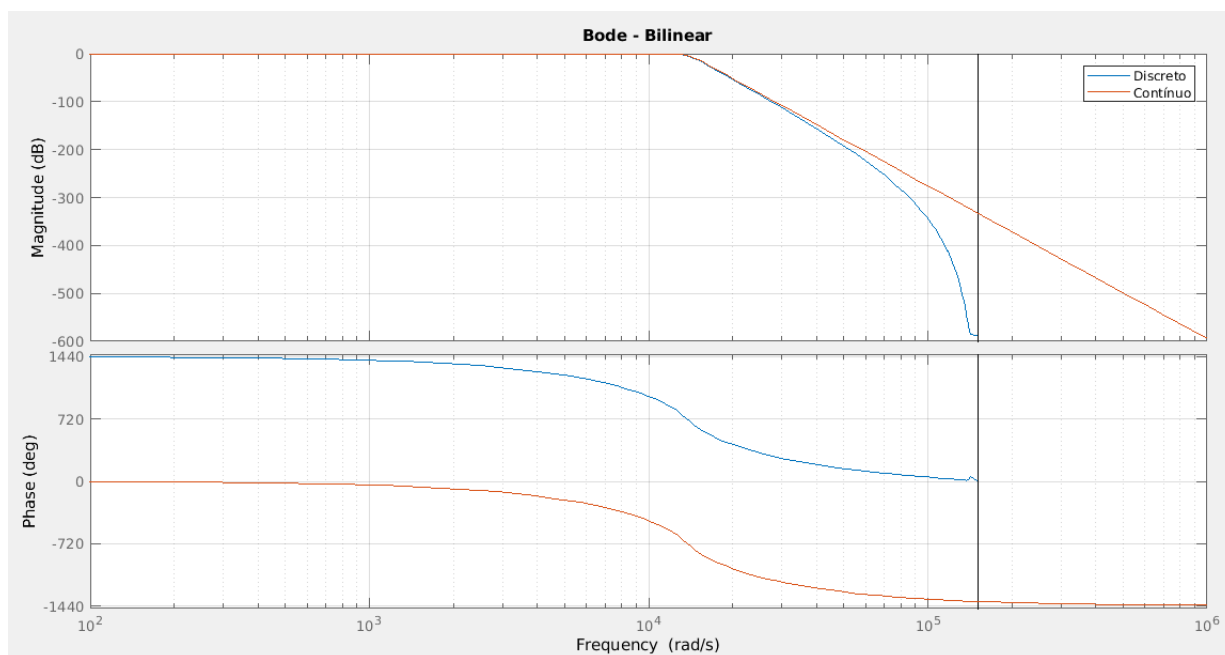


Figura 34 – Degrau unitário - Filtro analógico x Transformação Bilinear [Butteworth]

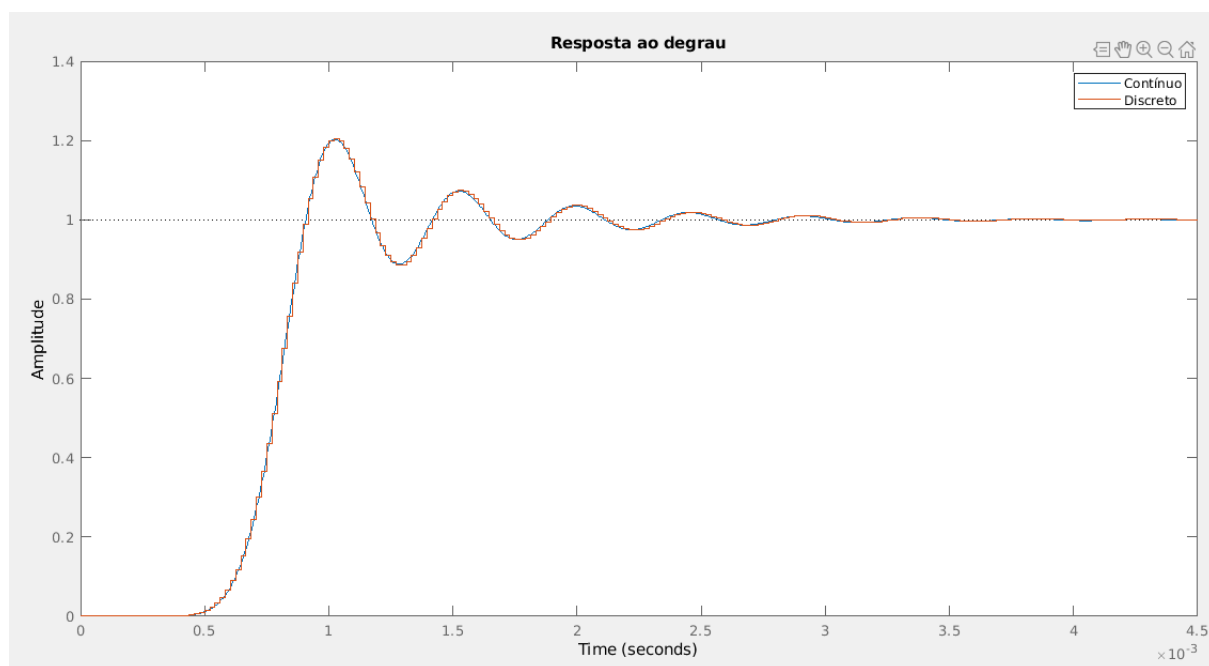
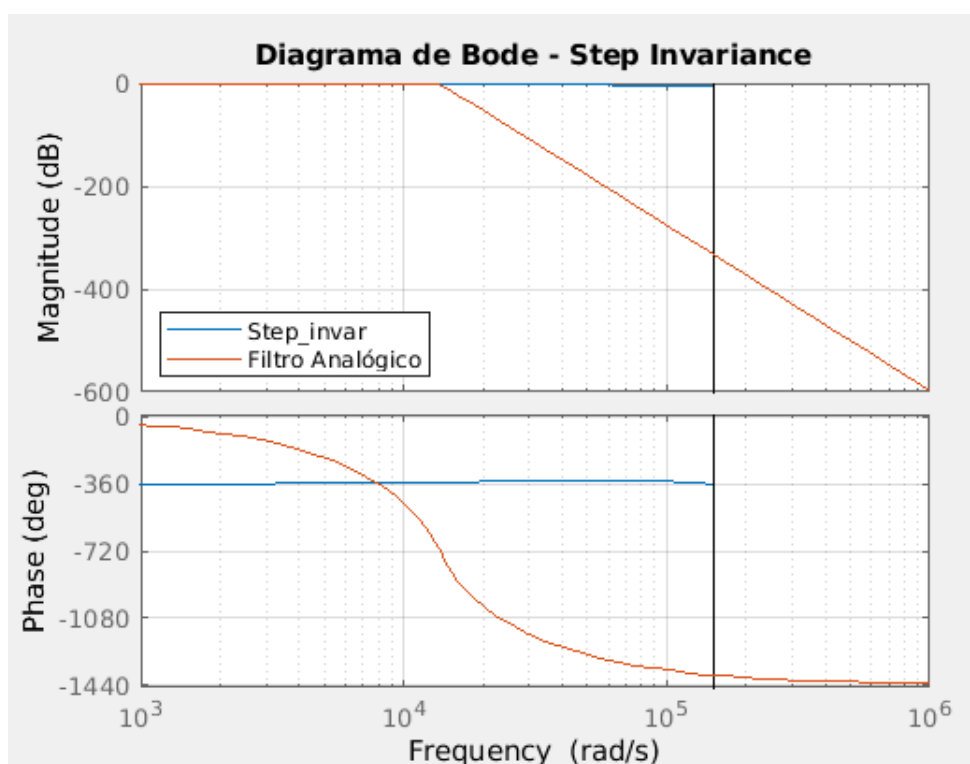


Figura 35 – Função de Transferência - Invariância ao Degrau

$$\begin{aligned}
 & -(1.817+3.237e-09i) z^{15} + (73.94+1.32e-07i) z^{14} - (1404+2.512e-06i) z^{13} + (1.65e04+2.96e-05i) z^{12} \\
 & - (1.343e05+0.0002414i) z^{11} + (8.014e05+0.001444i) z^{10} - (3.623e06+0.006543i) z^9 + (1.264e07 \\
 & +0.02287i) z^8 - (3.428e07+0.06218i) z^7 + (7.231e07+0.1315i) z^6 - (1.177e08+0.2145i) z^5 \\
 & + (1.451e08+0.2651i) z^4 - (1.312e08+0.2402i) z^3 + (8.212e07+0.1507i) z^2 - (3.182e07 \\
 & +0.05854i) z + (5.754e06+0.01061i) \\
 & \dots \\
 & z^{16} - 43.5 z^{15} + (887-8.674e-19i) z^{14} - 1.125e04 z^{13} + 9.945e04 z^{12} - (6.489e05+1.776e-15i) z^{11} \\
 & + (3.235e06+7.105e-15i) z^{10} - (1.256e07-2.842e-14i) z^9 + (3.843e07-1.137e-13i) z^8 - (9.286e07 \\
 & -6.821e-13i) z^7 + (1.767e08-1.364e-12i) z^6 - (2.621e08-1.364e-12i) z^5 + (2.969e08-2.728e-12i) z^4 \\
 & - (2.484e08+4.547e-13i) z^3 + (1.447e08-1.705e-12i) z^2 - (5.246e07-4.547e-13i) z + (8.914e06 \\
 & -5.684e-14i)
 \end{aligned}$$

### 11.2.3 Gráficos do método de invariância ao Degrau

Figura 36 – Diagrama de Bode - Invariância ao Degrau - Butterworth



### 11.2.4 Método da Transformada Z casada

Figura 37 – Função de Transferência para a Matched Z

$$\begin{aligned}
 &1.289\text{e-}14 \, z^{15} + 1.933\text{e-}13 \, z^{14} + 1.353\text{e-}12 \, z^{13} + 5.864\text{e-}12 \, z^{12} + 1.759\text{e-}11 \, z^{11} + 3.87\text{e-}11 \, z^{10} \\
 &+ 6.45\text{e-}11 \, z^9 + 8.293\text{e-}11 \, z^8 + 8.293\text{e-}11 \, z^7 + 6.45\text{e-}11 \, z^6 + 3.87\text{e-}11 \, z^5 + 1.759\text{e-}11 \, z^4 \\
 &+ 5.864\text{e-}12 \, z^3 + 1.353\text{e-}12 \, z^2 + 1.933\text{e-}13 \, z + 1.289\text{e-}14 \\
 &\dots\dots\dots \\
 &z^{16} - 13.11 \, z^{15} + 80.85 \, z^{14} - 310.9 \, z^{13} + 834.9 \, z^{12} - 1660 \, z^{11} + 2526 \, z^{10} - 3003 \, z^9 + 2817 \, z^8 \\
 &- 2093 \, z^7 + 1227 \, z^6 - 561.8 \, z^5 + 196.8 \, z^4 - 51.03 \, z^3 + 9.231 \, z^2 - 1.041 \, z + 0.05512
 \end{aligned}$$

Figura 38 – Diagrama de Bode - Matched Z x Filtro Analógico [Butterworth]

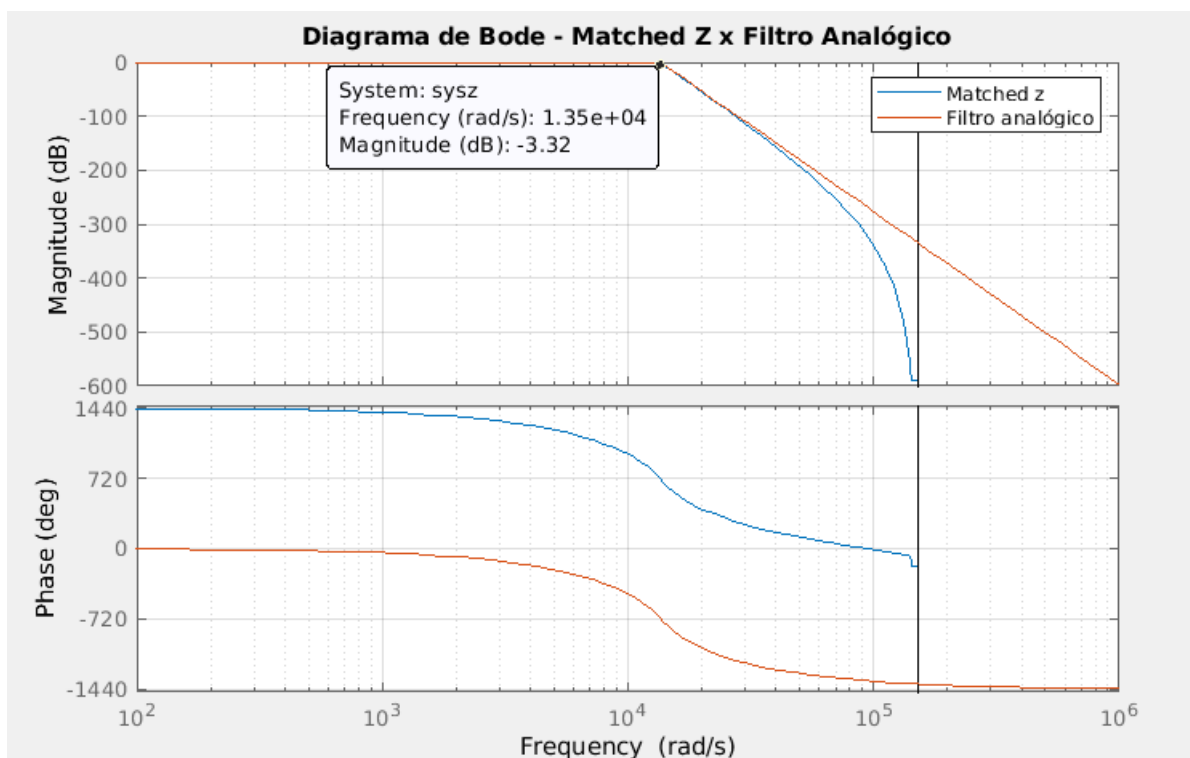
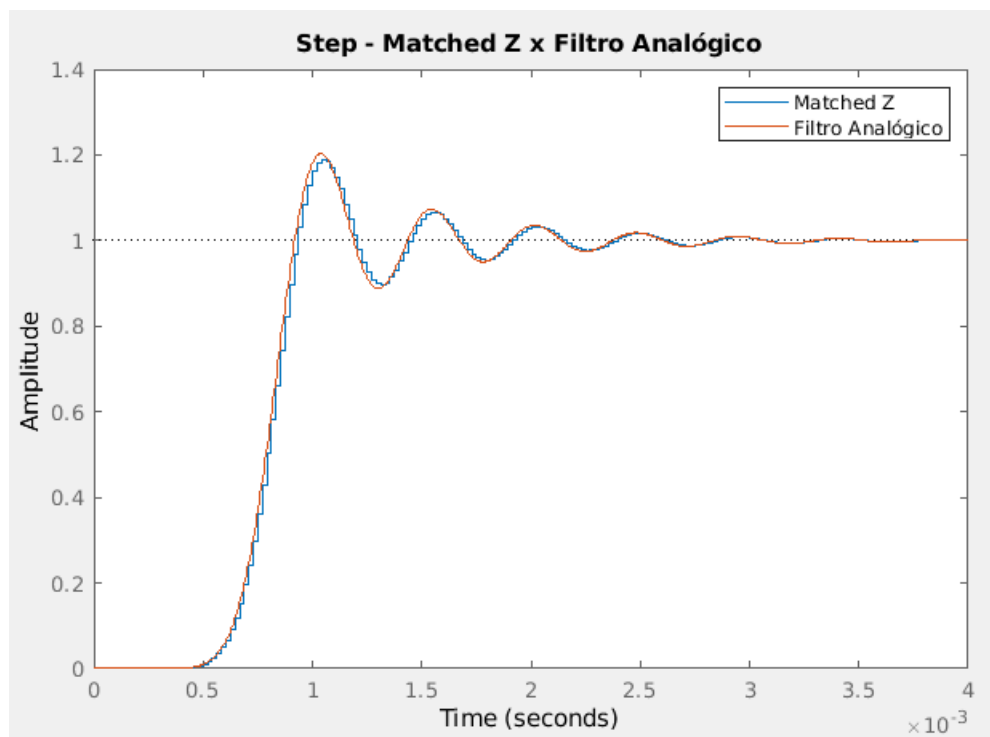




Figura 39 – Degrau unitário - Filtro Analógico x Matched Z [Butterworth]



## 12 PROJETO DO FILTRO ELÍPTICO

### 12.1 PROJETO DO FILTRO ANALÓGICO

#### 12.1.1 Especificação das propriedades desejadas do sistema

Visando projetar o filtro passa-baixas proposto, com frequência de amostragem  $f_s = 48\text{kHz}$ , o seguinte algoritmo foi criado:

Figura 40 – Definição dos parâmetros iniciais - Filtro Elíptico

```
% Parâmetros iniciais
fsample = 48000;

fp = 2000;           % frequência de passagem
fs = 3000;           % frequência de corte

% Região de transição da frequência
wp = (2*pi*fp)/fsample; % warping
ws = (2*pi*fs)/fsample; % warping

T = 1/fsample

pre_wp = (2/T)*tan(wp/2)
pre_ws = (2/T)*tan(ws/2)

% Limites de tolerância
ap = 0.5;           % tolerância na faixa de passagem
as = 45;            % tolerância na faixa de rejeição
```

#### 12.1.2 Cálculo da ordem e da Frequência de Corte - Filtro Elíptico

Para o filtro analógico, utilizando o seguinte comando (MATHWORKS..., s.d.) podemos encontrar a ordem desejada do filtro:

**[n,wn] = ellipord(pre\_wp,pre\_ws,ap,as,'s')**

Neste caso, o algoritmo retorna a ordem  $n$  a frequência de corte  $wn$  para um filtro analógico 's'.

Ao utilizar estes recursos computacionais, chegou-se nos valores de:

- $N = 5$
- $\omega_n = 1.2639e+04 \text{ rad/s}$

#### 12.1.3 Função de Transferência do Filtro Analógico - Filtro Elíptico

Por meio da utilização de algoritmos, fica elucidativo encontrar a função de transferência de um sistema de ordem 5. Utilizando o comando a seguir, chegaremos nos valores de pólo, zeros e ganho do filtro analógico (MATHWORKS..., s.d.).

```
[bs,as] = ellip(n, ap, as, wn,'s');
[sys] = tf(bs,as);
```

Onde,

- bs é o numerador da função;
- as é o denominador da função;
- sys recebe a função de transferência do sistema.

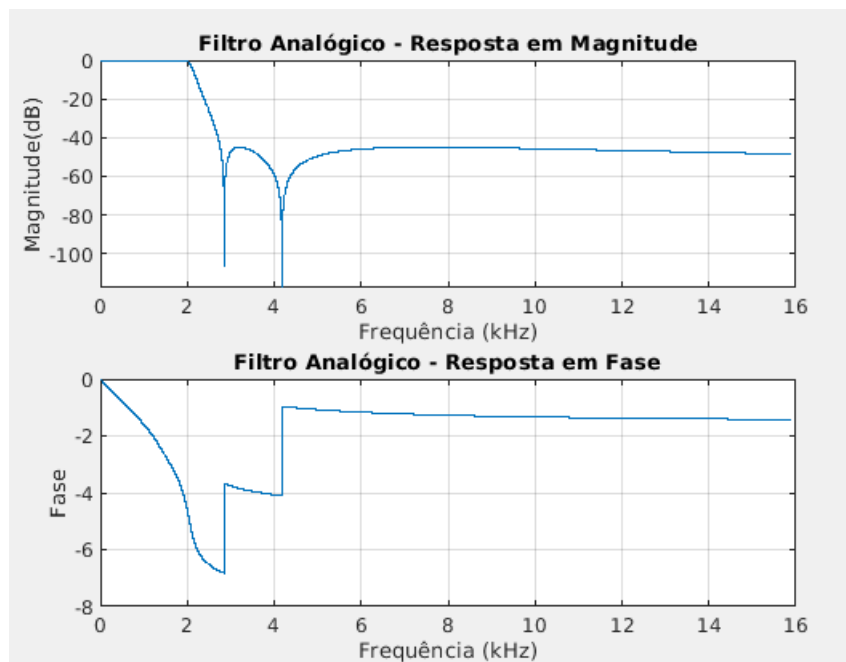
Figura 41 – Função de transferência do filtro analógico

$$\frac{405.9 s^4 - 9.229e-11 s^3 + 4.101e11 s^2 - 0.06363 s + 8.98e19}{s^5 + 1.462e04 s^4 + 3.253e08 s^3 + 2.9e12 s^2 + 2.354e16 s + 8.98e19}$$

### 12.1.4 Gráficos do Filtro Analógico - Filtro Elíptico

A partir desta seção, podemos analisar os gráficos com a resposta do filtro analógico projetado

Figura 42 – Resposta em Magnitude do Filtro Analógico - Elíptico



## 12.2 PROJETO DA TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

### 12.2.1 Função bilinear - Filtro Elíptico

Figura 43 – Função de Transferência após a Transformação Bilinear - Filtro Elíptico

$$\frac{0.003948 z^5 - 0.01021 z^4 + 0.006414 z^3 + 0.006414 z^2 - 0.01021 z + 0.003948}{z^5 - 4.607 z^4 + 8.587 z^3 - 8.086 z^2 + 3.846 z - 0.7388}$$

### 12.2.2 Gráficos da Transformação Bilinear

A partir desta seção, podemos analisar os gráficos com a resposta da transformação bilinear.

Figura 44 – Diagrama de bode da Transformação Bilinear x Filtro Analógico [Elíptico]

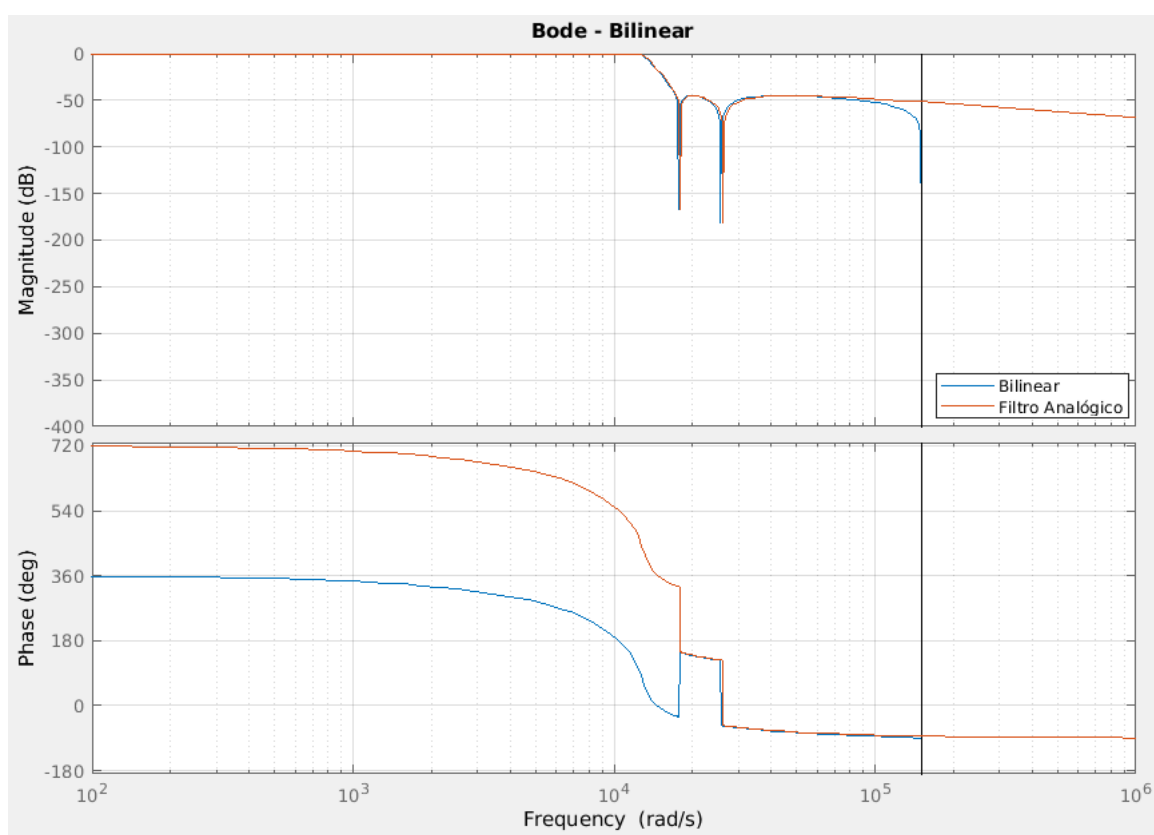
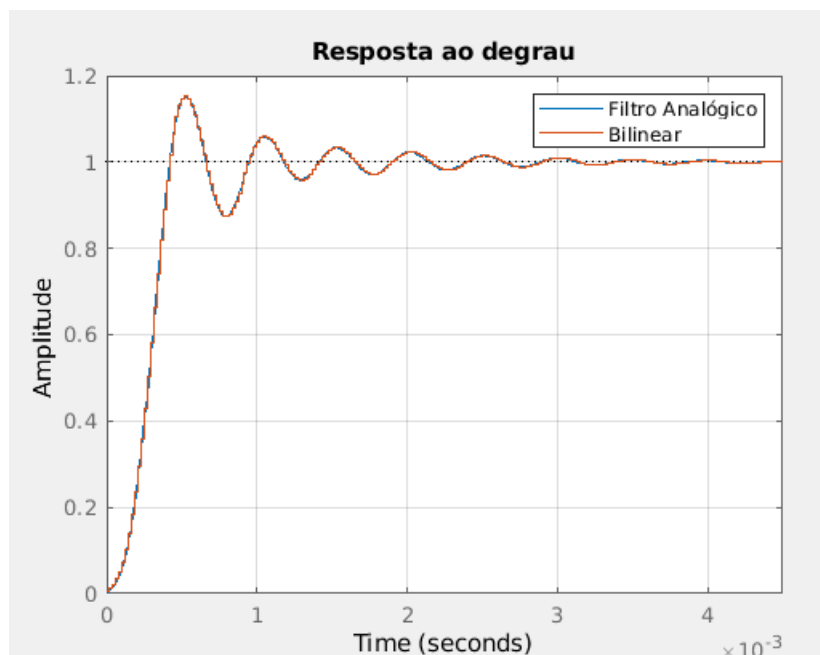


Figura 45 – Degrau unitário - Bilinear x Filtro Analógico [Elíptico]



### 12.2.3 Método da Transformada Z casada

Figura 46 – Função de Transferência para a Matched Z

$$\frac{0.007435 z^4 - 0.02658 z^3 + 0.03859 z^2 - 0.02658 z + 0.007435}{z^5 - 4.607 z^4 + 8.587 z^3 - 8.086 z^2 + 3.846 z - 0.7387}$$

Figura 47 – Diagrama de Bode - Matched Z x Filtro Analógico [Elíptico]

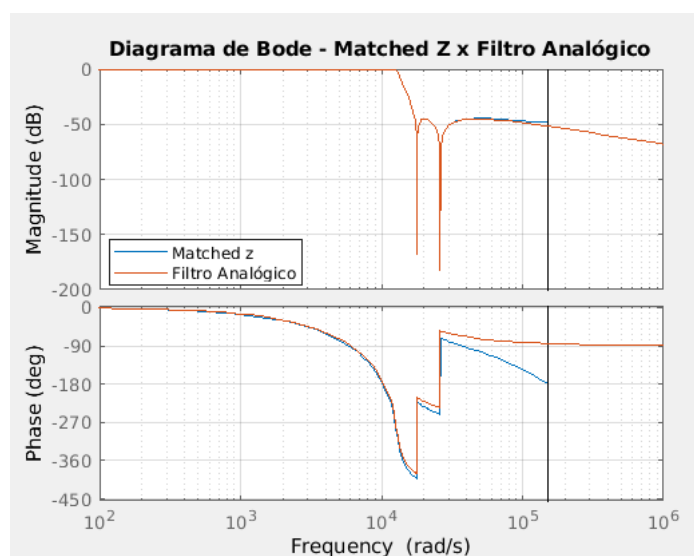
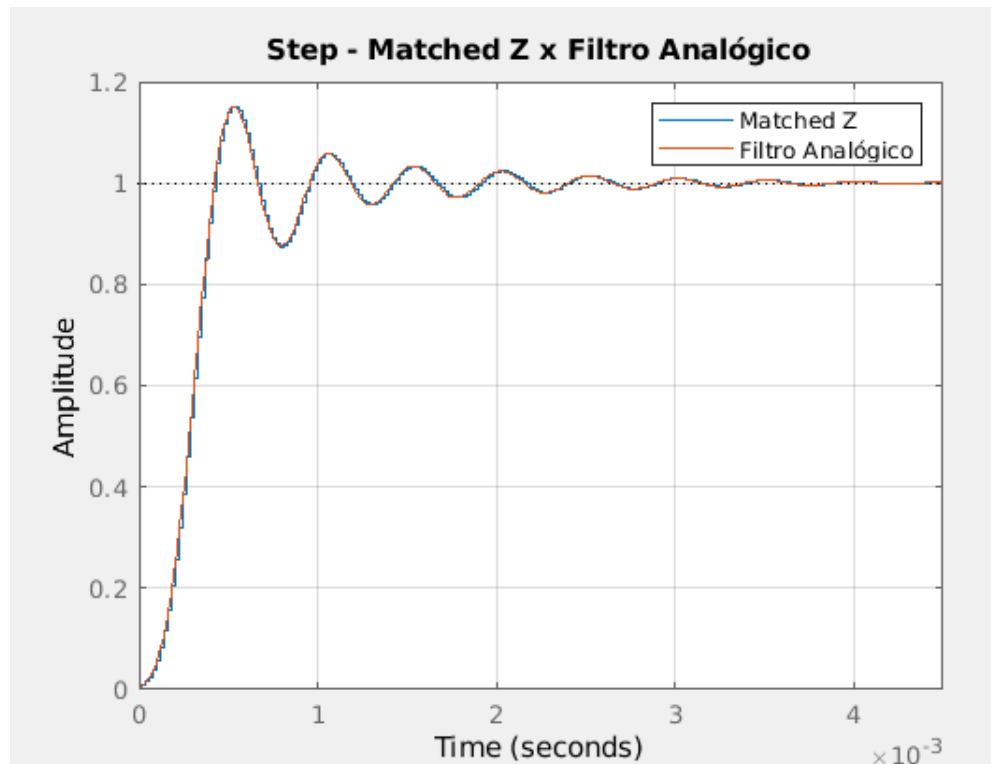


Figura 48 – Degrau unitário - Bilinear x Filtro Analógico [Elíptico]

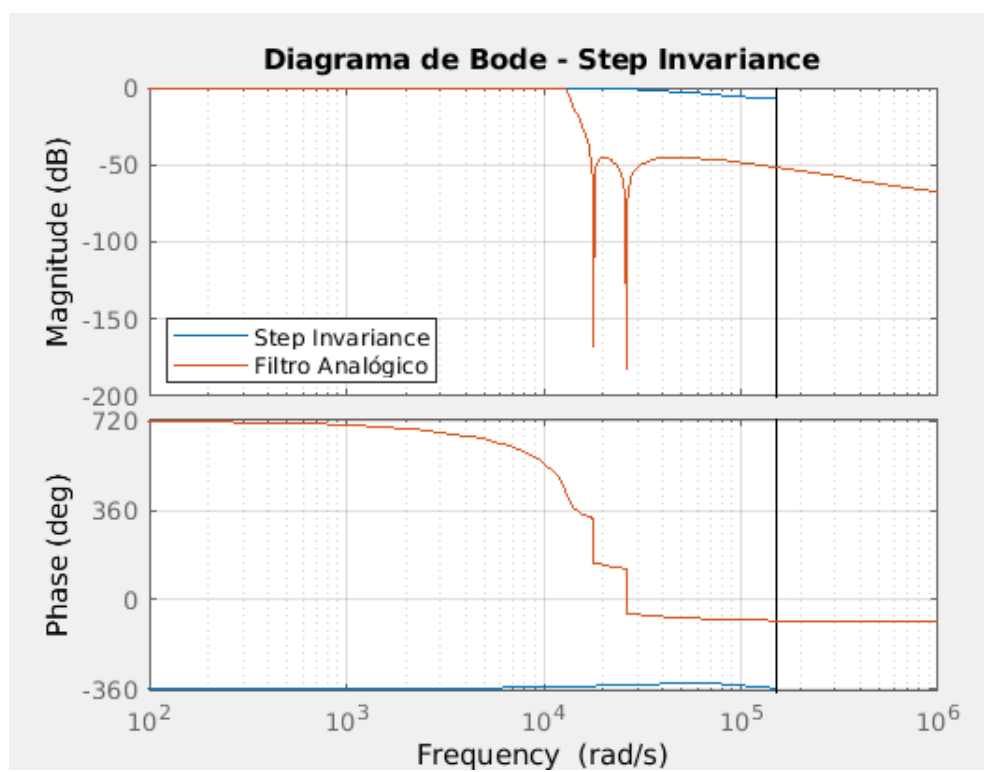


#### 12.2.4 Método da Invariância ao Degrau

Figura 49 – Função de Transferência para a Invariância ao Degrau

$$\frac{-(1.719+0.0001982i)z^4 + (18.69+0.002121i)z^3 - (76.23+0.008507i)z^2 + (138.2+0.01516i)z - (93.92+0.01013i)}{z^5 - (13.59+0.000178i)z^4 + (73.92+0.001936i)z^3 - (201+0.007893i)z^2 + (273.2+0.01431i)z - (148.6+0.009725i)}$$

Figura 50 – Diagrama de Bode - Invariância ao Degrau x Filtro Analógico [Elíptico]



## REFERÊNCIAS

ACHARYA, Anish *et al.* Extending the Concept of Analog Butterworth Filter for Fractional Order Systems. **Signal Processing**, v. 94, p. 409–420, jan. 2014. arXiv: 1210.8194. ISSN 01651684. DOI: 10.1016/j.sigpro.2013.07.012. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/1210.8194>. Acesso em: 29 nov. 2020.

INGLE, Vinay K.; PROAKIS, John G. **Digital signal processing using MATLAB** /. 3rd ed. Stamford, Conn. : Cengage Learning, c2017.

LAGES, Walter Fetter. Universidade Federal do Rio Grande do Sul Escola de Engenharia Departamento de Engenharia Elétrica ENG04037 Sistemas de Controle Digitais. pt, p. 14.

MATHWORKS. **MathWorks - Butterworth filter design**. [S.l.: s.n.]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/signal/ref/butter.html>.

MORIN, A.; LABBÉ, P.; VALCARTIER, Defence Research Establishment. **Derivation of Recursive Digital Filters by the Step-Invariant and the Ramp-Invariant Transformations**. [S.l.]: Defense Technical Information Center, 1984. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=UJS4twAACAAJ>.

OPPENHEIM, A.V. *et al.* **Discrete-time Signal Processing**. [S.l.]: Prentice Hall, 1999. (Prentice Hall international editions). ISBN 978-0-13-754920-7.

PROAKIS, John G; MANOLAKIS, Dimitris G. DIGITAL SIGNAL PROCESSING. en, p. 1033.

SCHLICHTHÄRLE, D. **Digital Filters: Basics and Design**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2000. (Single processing). ISBN 9783540668411. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=08F8XSuz8D4C>.

SEARA, Rui. Processamento Digital de Sinais. **Universidade Federal de Santa Catarina**, Florianópolis, p. 147.

WANHAMMAR, L.; SARAMÄKI, T. **Digital Filters Using MATLAB**. [S.l.]: Springer International Publishing, 2020. ISBN 9783030240639. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=MHfRDwAAQBAJ>.

WYNN, P. CENTRAL DIFFERENCE AND OTHER FORMS OF THE EULER TRANSFORMATION. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, v. 9, n. 2, p. 249–256, jan. 1956. ISSN 0033-5614. DOI: 10.1093/qjmam/9.2.249. eprint: <https://academic.oup.com/qjmam/article-pdf/9/2/249/5423063/9-2-249.pdf>. Disponível em: <https://doi.org/10.1093/qjmam/9.2.249>.