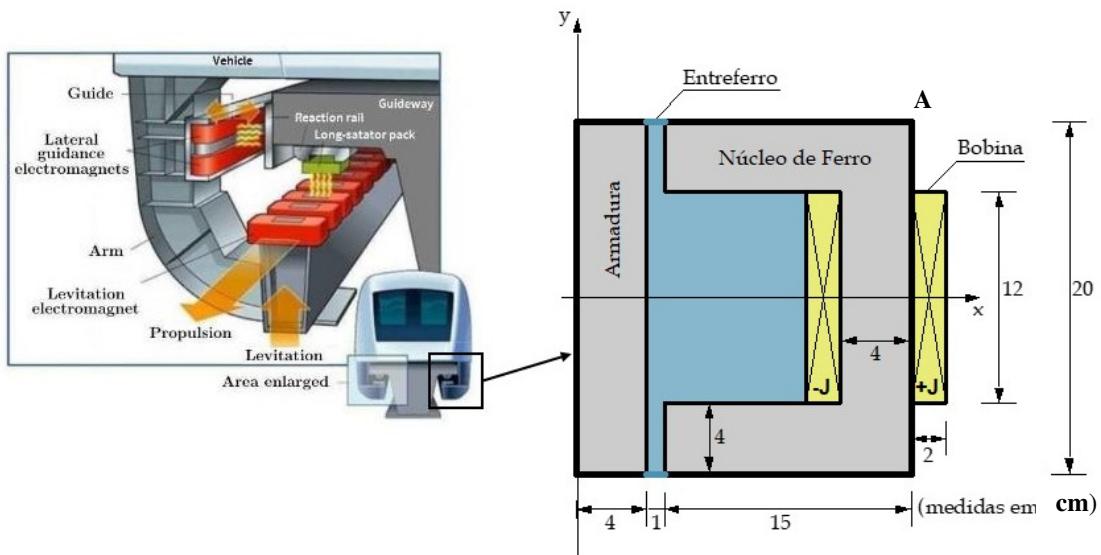


2º Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: 17/06/2021 (até às 11:59h)

Método de Diferenças Finitas (MDF)

O trem de levitação magnética mostrado na figura abaixo, possui o sistema de levitação magnética baseado em vários eletroímãs, como mostrado na figura. Cada um dos eletroímãs é constituído por uma bobina enrolada num núcleo de ferro (forma de “ferradura”) e uma armadura que está a uma pequena distância do núcleo (“entreferro”). O meio entre o núcleo de ferro e a armadura é preenchido por ar. Quando uma corrente elétrica é aplicada na bobina, a armadura é atraída em direção a “ferradura” por uma força eletromagnética. O material do núcleo de ferro e da armadura tem permeabilidade magnética relativa ($\mu_r F$) igual a 2500, o material da bobina e do ar tem permeabilidade magnética relativa (μ_{AR}) igual a 1. As dimensões do eletroímã estão indicadas na figura em mm, sendo que a profundidade do dispositivo é igual a $8 \cdot 10^{-2} m$. O eletroímã está sujeito a uma corrente elétrica distribuída na bobina $J_z = 2 \cdot 10^6 \cos\left(\frac{\pi y}{12 \cdot 10^{-2}}\right) + 8 \cdot 10^5 A/m^2$, somente na região da bobina -- que resulta na geração de um fluxo magnético no núcleo de ferro, que por sua vez gera uma força eletromagnética que atrai a armadura.



Em regime estacionário, o fenômeno eletromagnético em duas dimensões e em meios contínuos é regido pelas seguintes equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Lei de Gauss}) \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{Lei de Ampere}) \quad (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (3)$$

sendo \mathbf{B} , o vetor de densidade superficial de fluxo magnético (*Tesla* ou Vs/m^2), \mathbf{H} o vetor de intensidade de campo magnético (A/m) e \mathbf{J} o vetor de densidade superficial de corrente elétrica (A/m^2). μ é a permeabilidade magnética do material (*Henry/m*) que é dada por:

$$\mu = \mu_r \mu_0$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética no vácuo (próxima do valor no ar) que vale $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} (Henry/m)$ e μ_r é denominada de permeabilidade magnética relativa do meio.

Para resolver esse sistema de equações, podemos definir um vetor $\mathbf{A} = A_z \mathbf{e}_z$, tal que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (4)$$

Uma vez que o gradiente do rotacional é sempre zero. Portanto, substituindo (4) em (3) e em (2):

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (5)$$

Assim resolvendo-se \mathbf{A} encontra-se \mathbf{B} através da equação (4) e \mathbf{H} através da equação (3). No caso de um problema 2D, $\mathbf{J} = \pm J_z \mathbf{e}_z$ (*somente* na região da bobina, ou seja, $J_z=0$ para demais regiões) e portanto:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} = -\mu J_z \quad (6)$$

A força eletromagnética na armadura (\mathbf{F}_{ela}) é calculada pelo método de tensor de Maxwell. Nesse método, as componentes dessa força (F_{elax} e F_{elay}) são dadas por:

$$F_{ela_x} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\Gamma_{armadura}} [(B_x^2 - B_y^2)n_x + 2B_x B_y n_y] dl \quad (7)$$

$$F_{ela_y} = \frac{1}{2\mu_0} \oint_{\Gamma_{armadura}} [2B_x B_y n_x + (B_y^2 - B_x^2)n_y] dl \quad (8)$$

onde $\Gamma_{armadura}$ corresponde ao contorno externo da armadura e n_x, n_y são as componentes do vetor normal a superfície da armadura. Note que o eletroimã é *simétrico*. O problema acima está sujeito às seguintes condições de contorno:

- nos pontos situados no contorno *externo* da figura $B_n = \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = 0$ e $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$ e $A_z = 0$ no ponto A;
- nos pontos situados na fronteira entre dois meios (por exemplo, ar/ferro, bobina/ferro) a condição é $B_{n1} = B_{n2}$ e $\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$, uma vez que não há corrente superficial nas interfaces (veja ideia na pág. 51 da apostila);

Considere as constantes dadas, e resolva a equação (6) no domínio da figura utilizando o método de diferenças finitas (MDF) com malha quadrada ($\Delta x = \Delta y$):

- Implemente o método de “sobrerrelaxação” para a solução do sistema linear de equações resultante da aplicação do MDF (utilize $\lambda=1,75$ e tolerância de 0,0001 para a convergência). Verifique a influência da discretização ($\Delta x = \Delta y$) sobre a solução – considere **três** valores de Δx (pequeno, médio e grande). Explique como chegou no valor de Δx utilizado;
- Plote a distribuição de $A(x,y)$ no eletroimã;
- Plote o **vetor** de densidade superficial de fluxo magnético $\mathbf{B}(x,y)$ e o vetor de intensidade de campo magnético $\mathbf{H}(x,y)$ (use o **comando apropriado** no SCILAB ou MATLAB);
- Calcule as componentes x e y da força eletromagnética \mathbf{F}_{ela} ;
- Considere agora a equação (6) na sua forma genérica, que inclui agora o termo transiente:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) = \sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} + M \quad (9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 \\ 0 & \mu_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = (\mu_x H_x, \mu_y H_y) \quad (10)$$

sendo $A_z(x,y,t)$. No eletroimã do trem de uma empresa alemã, o núcleo de ferro e a armadura são formados agora por um material com permeabilidades magnéticas relativas diferentes nas direções x e y , dadas por $\mu_{r_x}(x,y)=1200$ e $\mu_{r_y}(x,y)=2500$, onde μ_{r_x} e μ_{r_y} são as permeabilidades magnéticas relativas nas direções x e y , respectivamente. σ é a condutividade elétrica definida *somente* na região

da bobina e é igual a 4.10^6 ($\Omega \cdot m$) $^{-1}$. Supõe-se que o núcleo de ferro e a armadura são formados por placas finas coladas e portanto, não haverá corrente de fuga. M representa a excitação elétrica na bobina, dada por $M = -J_z \cos \omega t$ e J_z foi definido acima.

e.1) Resolva os itens b), c) e d) novamente, considerando a equação (9) e **apenas um Δx** apropriado (não precisa discutir Δx) com $\frac{\partial A_z}{\partial t} = 0$ e $\omega = 0$ Hz (ou seja, $M = -J_z$);

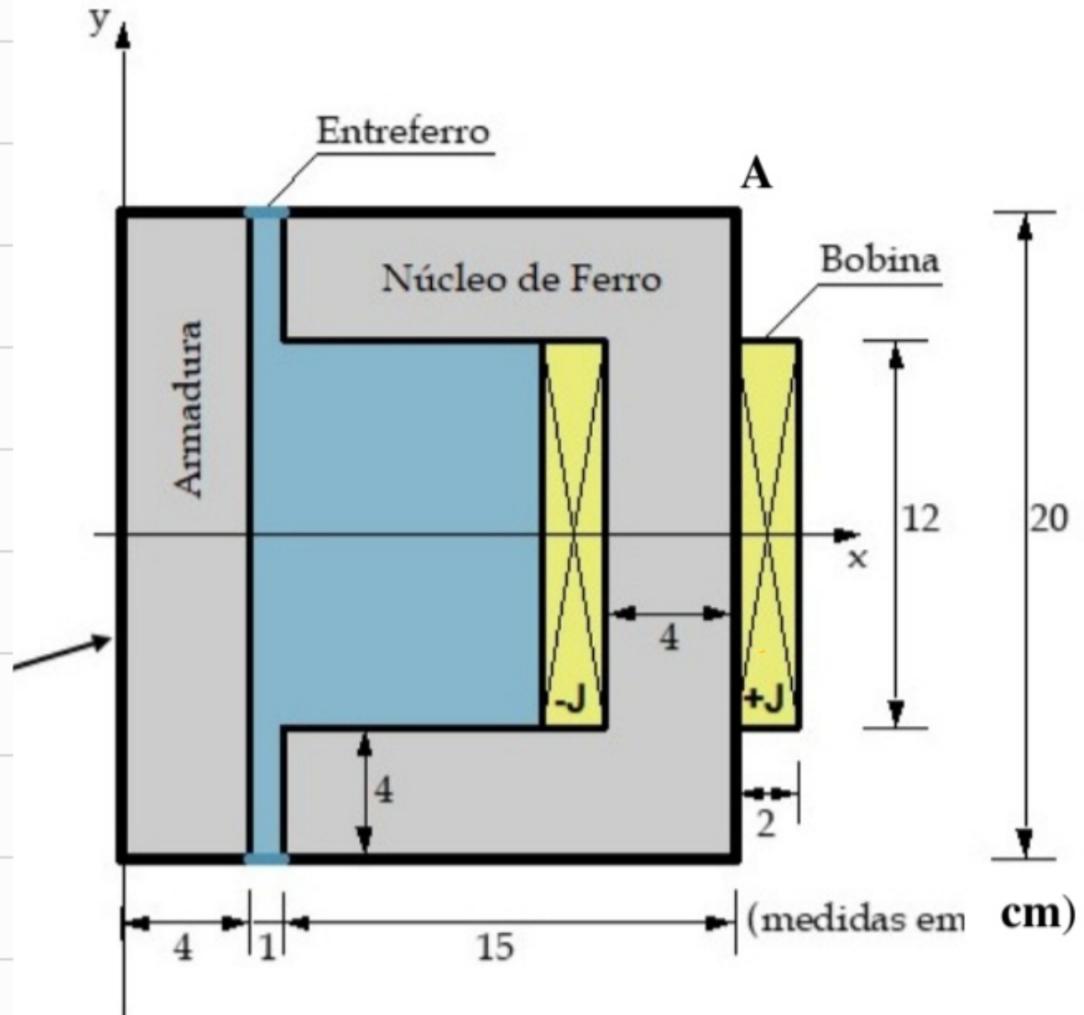
e.2) Suponha agora que o eletroímã esteja inicialmente desligado, ou seja, $A_z(x,y,0)=0$. Ao ligá-lo, $M = -J_z \cos \omega t$ para $t > 0$ e $\omega = 60$ Hz. As demais condições de contorno permanecem como descritas anteriormente. Pede-se:

- Resolva a equação (9) utilizando o **método explícito** (veja pág. 47 da apostila) com uma discretização apropriada no espaço ($\Delta x = \Delta y$) e no tempo (Δt);
- Plote a distribuição dos vetores $B(x,y,t)$ e $H(x,y,t)$ para os tempos $t=10\Delta t$, $100\Delta t$, e $500\Delta t$ s.
- Plote a componente F_{ela_x} entre 0 e $500\Delta t$.

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os trabalhos podem ser feitos em grupos de dois alunos. Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

- a) Inicialmente apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no Python, SCILAB ou MATLAB;
- b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do SCILAB (ou MATLAB) para a solução da equação de derivadas parciais acima;
- c) Todos os resultados do tipo $f(x,y)$ devem ser plotados utilizando-se funções do SCILAB (ou MATLAB) como *mesh*, *contour*, *surf*, etc... (escolha uma) (coloque título e legenda nos gráficos). Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura). NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores da função nos nós da malha;
- d) NÃO utilize os comandos de **manipulação simbólica** do SCILAB (ou MATLAB);
- e) Entregue as listagens dos arquivos *.py, *.sci ou *.m) os quais devem estar decentemente comentados;
- f) O relatório (pdf) contendo a listagem do algoritmo (pdf) deve ser entregue na forma digital no moodle. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve incluir uma conclusão;
- g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões;
- h) Para cada dia de atraso serão descontados 2,0 pontos na nota do EP.



Nas armaduras, núcleos e entrefeuros (elétricos):

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} = 0$$

Nas bobinas:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} = -\mu_0 \cdot 2 \cdot 10^6 \cos\left(\frac{\pi y}{12 \cdot 10^{-2}}\right) + 8 \cdot 10^5$$

Fora dos contornos:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} = \frac{A_{i+1,j} - 2A_{i,j} + A_{i-1,j}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} = \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2}$$

No contorno exterior:

$$B_n = B \cdot n = 0 \Rightarrow B^H \text{ sem componente normal}$$

$$n \times H = 0 \Rightarrow H^H B \text{ sem componentes nos eixos ortogonais à normal}$$

$$\rightarrow (A_x, A_y, A_z) = (0, 0, A_z)$$

$$B = \nabla \times A \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0$$

Como A_z é 0 em A,
 A_z é 0 em todos os
contornos

Na fronteira entre dois meios:

$$1) \cdot B_{n1} = B_{n2}$$

$$2) n \times (H_2 - H_1) = 0$$

A normal na fronteira pode ser em vez disso x (fronteira vertical) ou em vez de y (fronteira horizontal).

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{1x} \\ B_{1y} \\ B_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1z}}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial A_{1z}} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{2x} \\ B_{2y} \\ B_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{2z}}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial A_{2z}} \\ \frac{\partial z}{\partial x} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \mu_1 H_1 \Rightarrow H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} \quad e \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_0}$$

Para frontera vertical:

$$B_{1n} = B_{1x} = \frac{\partial A_{1z}}{\partial y} = B_{an} = B_{2x} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial A_{1z}}{\partial y} = \frac{\partial A_{2z}}{\partial y}$$

$n \times (H_2 - H_1) = 0 \Rightarrow H_2 - H_1$ não possui componente normal (em x)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_{2z}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{2z}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\mu_2} - \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{1z}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{1z}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\mu_1} = \begin{bmatrix} X \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\frac{\partial A_{2z}}{\partial x} \cdot 1}{\mu_2} = \frac{\frac{\partial A_{1z}}{\partial x} \cdot 1}{\mu_1} \quad // \quad \leftarrow$$

Taylor na elredukcií × položmej 1:

$$A_{i-1,j} = A_{i,j} - \Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^1 + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^1$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^1 = \frac{2}{\Delta x^2} \left(A_{i-1,j} - A_{i,j} + \Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^1 \right)$$

Nev funček:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{2}{\Delta x^2} \left(A_{i-1,j} - A_{i,j} + \Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^1 \right) + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^1 = - \frac{\Delta x^2}{2} \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2} - A_{i-1,j} + A_{i,j}$$

Pela regras 2:

$$A_{i+1,j} = A_{i,j} + \Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^2 + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^2$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \Big|_{i,j}^2 = \frac{2}{\Delta x^2} \left(A_{i+1,j} - A_{i,j} - \Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^2 \right)$$

Nova função:

$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{2}{\Delta x^2} \left(A_{i+1,j} - A_{i,j} - \Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^2 \right) + \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta x} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{i,j}^2 = \frac{\Delta x^2}{\Delta y^2} \cdot \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2} + A_{i+1,j} - A_{i,j}$$

$$\frac{\partial A_{22}}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu_2} = \frac{\partial A_{12}}{\partial x} \cdot \frac{1}{\mu_1}$$

$$\left(\frac{\Delta x^2}{2} \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1}}{\Delta y^2} + A_{i+1,j} - A_{i,j} \right) \frac{1}{\mu_2} =$$

$$\left(-\frac{\Delta x^2}{2} \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1} - A_{i-1,j} + A_{i,j}}{\Delta y^2} \right) \frac{1}{\mu_1}$$

$$\left(\frac{\Delta x^2}{2} \frac{A_{i,j+1} - 2A_{i,j} + A_{i,j-1} - A_{i,j}}{\Delta y^2} \right) \left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) + \frac{A_{i+1,j}}{\mu_2} + \frac{A_{i-1,j}}{\mu_1} = 0$$

$$\left(\frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_1} \right) \frac{\Delta x^2}{2\Delta y^2} \left(A_{i,j+1} - (2 + \Delta_y)A_{i,j} + A_{i,j-1} \right) + \frac{A_{i+1,j}}{\mu_2} + \frac{A_{i-1,j}}{\mu_1} = 0$$

Tara fronteira horizontal:

$$B_{1n} = B_{1y} = -\frac{\partial A_{12}}{\partial x} = B_{2n} = B_{2y} = -\frac{\partial A_{22}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A_{12}}{\partial x} = \frac{\partial A_{22}}{\partial x}$$

$n \times (H_2 - H_1) = 0 \Rightarrow H_2 - H_1$ não possui componente normal (em y)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A_{22}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{22}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\mu_2} - \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{12}}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\mu_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\frac{\partial A_{22}}{\partial y} \cdot 1}{\mu_2} = \frac{\frac{\partial A_{12}}{\partial y} \cdot 1}{\mu_1} // \quad \leftarrow$$