Aula 10 – Caracterização Adicional das Variáveis Aleatórias

Luciana Rocha Pedro

GCC 1518 – Estatística e Probabilidade – CEFET Maracanã

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer

Introdução

Considere a relação determinística $ax + by = 0$. Nós a reconhecemos como uma relação linear entre x e y.

As constantes a e b são os **parâmetros** dessa relação, no sentido de que, para qualquer escolha particular de a e b, obtemos uma função linear específica.

Em outros casos, um ou mais parâmetros podem catacterizar a relação em estudo. Por exemplo, se $y = ax^2 + bx + c$, três parâmetros são necessários. Se $y = e^{-kz}$, um parâmetro é suficiente.

Introdução

Não somente uma particular relação é caracterizada pelos parâmetros, mas, inversamente, a partir de uma certa relação, podemos definir diferentes parâmetros pertinentes.

Por exemplo, se $ay + bx = 0$, então $m = -\dfrac{b}{a}$ representa a inclinação da reta.

Também, se $y = ax^2 + bx + c$, então $-\dfrac{b}{2a}$ representa o valor para o qual ocorre um máximo relativo ou um mínimo relativo.

Introdução

Nos modelos matemáticos não-determinísticos ou aleatórios que temos considerado, os parâmetros podem, também, ser empregados para caracterizar a **distribuição de probabilidade**.

A cada distribuição de probabilidade podemos associar certos parâmetros, os quais fornecem informação valiosa sobre a distribuição.

Exemplo

Admita que peças sejam produzidas indefinidamente em uma linha de montagem. A probabilidade de uma peça ser defeituosa é p e este valor é o mesmo para todas as peças.

Suponha, também, que as sucessivas peças sejam defeituosas (D) ou não-defeituosas (N), independentemente umas das outras.

Seja a variável aleatória X o número de peças inspecionadas até que a primeira peça defeituosa seja encontrada.

Exemplo

Assim, um resultado típico do experimento seria da forma NNNND. Logo, $X(\text{NNNND}) = 5$.

Os valores possíveis de X são: $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Como $X = k$ se, e somente se, as primeiras $(k-1)$ peças forem não-defeituosas e a k-ésima peça for defeituosa, atribuiremos a seguinte probabilidade ao evento $\{\text{X} = \text{k}\}$:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots.$$

Exemplo

Para verificarmos que esta é uma legítima distribuição de probabilidade, observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} &= p[1+(1-p)+(1-p)^2+\ldots] \\ &= p\left(\frac{1}{1-(1-p)}\right) = 1, \qquad \text{se } 0 < |p| < 1.\end{aligned}$$

Por isso, o parâmetro p pode ser qualquer número satisfazendo

$$0 < p < 1.$$

Exemplo

Uma máquina de cortar arame corta o arame conforme um comprimento especificado.

Em virtude de certas imprecisões do mecanismo de corte, o comprimento do arame cortado (em polegadas), X, pode ser considerado como uma variável aleatória uniformemente distribuída sobre $[11.5, 12.5]$.

O comprimento especificado é 12 polegadas.

Exemplo

Se $11.7 \leq X < 12.2$, o arame pode ser vendido com um lucro de R$ 0.25.

Se $X \geq 12.2$, o arame pode ser recortado e um lucro eventual de R$ 0.10 é obtido.

E se $X < 11.7$, o arame é refugado com uma perda de R$ 0.02.

Um cálculo simples mostra que $P(X \geq 12.2) =$, $P(11.7 \leq X < 12.2) =$ e $P(X < 11.7) =$.

Exemplo

Se $11.7 \leq X < 12.2$, o arame pode ser vendido com um lucro de R$ 0.25.

Se $X \geq 12.2$, o arame pode ser recortado e um lucro eventual de R$ 0.10 é obtido.

E se $X < 11.7$, o arame é refugado com uma perda de R$ 0.02.

Um cálculo simples mostra que $P(X \geq 12.2) = 0.3$, $P(11.7 \leq X < 12.2) =$ e $P(X < 11.7) =$.

Exemplo

Se $11.7 \leq X < 12.2$, o arame pode ser vendido com um lucro de R$ 0.25.

Se $X \geq 12.2$, o arame pode ser recortado e um lucro eventual de R$ 0.10 é obtido.

E se $X < 11.7$, o arame é refugado com uma perda de R$ 0.02.

Um cálculo simples mostra que $P(X \geq 12.2) = 0.3$, $P(11.7 \leq X < 12.2) = 0.5$ e $P(X < 11.7) =$.

Exemplo

Se $11.7 \leq X < 12.2$, o arame pode ser vendido com um lucro de R\$ 0.25.

Se $X \geq 12.2$, o arame pode ser recortado e um lucro eventual de R\$ 0.10 é obtido.

E se $X < 11.7$, o arame é refugado com uma perda de R\$ 0.02.

Um cálculo simples mostra que $P(X \geq 12.2) = 0.3$, $P(11.7 \leq X < 12.2) = 0.5$ e $P(X < 11.7) = 0.2$.

Exemplo

Suponha que um grande número de pedaços de arame tenham sido cortados, digamos N.

Sejam

- N_S o número de pedaços para os quais $X < 11.7$,
- N_R o número de pedaços para os quais $11.7 \leq X < 12.2$, e
- N_L o número de pedaços para os quais $X \geq 12.2$.

Portanto, o lucro total obtido da produção de N pedaços é igual a

$$T = N_S(-0.02) + N_R(0.25) + N_L(0.10).$$

Exemplo

O lucro total par pedaço de arame cortado, digamos W, é igual a

$$W = (N_S/N)(-0.02) + (N_R/N)(0.25) + (N_L/N)(0.10).$$

Observe que W é uma variável aleatória, porque N_S, N_R e N_L são variáveis aleatórias.

Exemplo

Já mencionamos que a freqüência relativa de um evento é próxima da probabilidade desse evento se o número de repetições for grande.

Portanto, se N for grande, poderemos esperar que N_S/N seja próximo de 0.2, N_R/N seja próximo de 0.5 e N_L/N seja próximo de 0.3.

Logo, para N grande, W pode ser calculada aproximadamente como:

$$W \approx (0.2)(-0.02) + (0.5)(0.25) + (0.3)(0.10) = R\$ \ 0.151.$$

Exemplo

Deste modo, se um grande número de pedaços de arame for produzido, esperaremos conseguir um lucro de R$ 0.151 por pedaço de arame.

O número 0.151 é denominado **valor esperado** da variável aleatória W.

Valor Esperado de uma Variável Aleatória Discreta

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, \ldots, x_n, \ldots$.

Seja $p(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Então, o **valor esperado** de X (ou esperança matemática de X), denotado por $E(X)$, é definido como

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i),$$

se a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$ convergir absolutamente ($\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| p(x_i) < \infty$).

Valor Esperado e a Média Ponderada

Se X tomar apenas um número finito de valores, a expressão anterior se torna

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)x_i.$$

Este valor pode ser considerado como **média ponderada** dos valores possíveis $x_1, \ldots, x_n$.

Se todos esses valores possíveis forem igualmente prováveis,

$$E(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

representa a média aritmética simples ou usual dos valores possíveis.

Exemplo

Se um dado equilibrado for jogado e a variável aleatória X designar o número de pontos obtidos, então

$$E(X) = \left(\frac{1}{6}\right)(1+2+3+4+5+6) = \frac{7}{2}.$$

Este exemplo simples ilustra, nitidamente, que $E(X)$ não é o resultado que podemos esperar quando X for observado uma única vez.

De fato, na situação anterior $E(X) = \dfrac{7}{2}$ nem mesmo é um valor possível de X!

Exemplo

Fica evidente, porém, que se obtivermos um grande número de observações independentes de X, digamos $x_1, \ldots, x_n$, e calcularmos a média aritmética desses resultados, então, sob condições bastante gerais, a média aritmética será próxima de $E(X)$, em um sentido probabilístico.

Por exemplo, na situação acima, se jogássemos o dado um grande número de vezes e depois calculássemos a média aritmética dos vários resultados, esperaríamos que essa média ficasse tanto mais próxima de $\frac{7}{2}$ quanto maior o número de vezes o dado fosse jogado.

Valor Esperado e a Média Ponderada

Muito embora exista uma forte semelhança entre a média ponderada e a definição de $E(X)$, é importante compreender que a última é um número (parâmetro) associado a uma distribuição de probabilidade teórica, enquanto a primeira é simplesmente o resultado da combinação de um conjunto de números em uma forma particular.

Contudo, existe mais do que apenas uma semelhança superficial.

Valor Esperado e a Média Aritmética

Considere uma variável aleatória X e sejam $x_1, \ldots, x_n$ os valores obtidos quando o experimento que origina X for realizado n vezes, independentemente.

Seja $\bar{x}$ a média aritmética desses n números.

Então, se n for suficientemente grande, $\bar{x}$ será **próxima** de $E(X)$, em certo sentido.

Este resultado está bastante relacionado à idéia de que a freqüência relativa f_A associada a n repetições de um experimento será próxima da probabilidade $P(A)$, se f_A for baseada em um grande número de repetições de E.

Exemplo

Um fabricante produz peças tais que 10% delas são defeituosas e 90% são não-defeituosas.

Se uma peça defeituosa for produzida, o fabricante perde R$ 1.00, enquanto uma peça não-defeituosa lhe dá um lucro de R$ 5.00.

Se X for o lucro líquido por peça, então X será uma variável aleatória cujo valor esperado é calculado como

$$E(X) = -1 \times (0.1) + 5 \times (0.9) = R\$ \ 4.40.$$

Exemplo

Suponha que um grande número de tais peças seja produzido.

Nesse caso, quando o fabricante perder R$ 1.00 cerca de 10% das vezes e ganhar R$ 5.00 cerca de 90% das vezes, ele esperará ganhar cerca de R$ 4.40 por peça, a longo prazo.

Valor Esperado de uma Variável Binomial

Teorema

Seja X uma variável aleatória distribuída binomialmente, com parâmetro p, baseada em n repetições de um experimento.

Então,

$$E(X) = np.$$

Exemplo

Uma máquina impressora tem uma probabilidade constante de 0.05 de entrar em pane, em um dia qualquer.

Se a máquina não apresentar panes durante a semana, um lucro S será obtido.

Se 1 ou 2 panes ocorrerem, um lucro R será alcançado $(R < S)$.

Se 3 ou mais panes ocorrerem, um lucro $-L$ será obtido.

Exemplo

Seja X o lucro obtido por semana de cinco dias úteis.

Os valores possíveis de X são R, S e $-L$.

Seja B o número de panes por semana. Teremos

$$P(B = k) =$$

Exemplo

Seja X o lucro obtido por semana de cinco dias úteis.

Os valores possíveis de X são R, S e $-L$.

Seja B o número de panes por semana. Teremos

$$P(B = k) = \binom{5}{k}(0.05)^k(0.95)^{5-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 5.$$

Exemplo

Como $X = S$ se, e somente se, $B = 0$, $X = R$ se, e somente se, $B = 1$ ou 2, e $X = -L$ se, e somente se $B = 3$, 4 ou 5, verificamos que

$$E(X) \quad =$$

Exemplo

Como $X = S$ se, e somente se, $B = 0$, $X = R$ se, e somente se, $B = 1$ ou 2, e $X = -L$ se, e somente se $B = 3$, 4 ou 5, verificamos que

$$E(X) \quad = \quad S[P(B=0)] + R[P(B=1 \text{ ou } 2)] + (-L)[P(B=3,4 \text{ ou } 5)]$$

Exemplo

Como $X = S$ se, e somente se, $B = 0$, $X = R$ se, e somente se, $B = 1$ ou 2, e $X = -L$ se, e somente se $B = 3$, 4 ou 5, verificamos que

$$
\begin{aligned}
E(X) &= S[P(B=0)] + R[P(B=1 \text{ ou } 2)] + (-L)[P(B=3,4 \text{ ou } 5)] \\
&= S(0.95)^5 + R[5(0.05)(0.95)^4 + 10(0.05)^2(0.95)^3] \\
&+ (-L)[10(0.05)^3(0.95)^2 + 5(0.05)^4(0.95) + (0.05)^5].
\end{aligned}
$$

Valor Esperado de uma Variável Aleatória Contínua

Definição

Seja X uma variável aleatória contínua com fdp f.

O **valor esperado** de X é definido como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \ f(x) \ dx$$

se, e somente se,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \ f(x) \ dx$$

existir.

Exemplo

Suponha que X seja o tempo (em minutos) durante o qual um equipamento elétrico seja utilizado em máxima carga, em um certo período de tempo especificado.

Suponha que X seja uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1500^2}\, x, & 0 \leq x \leq 1500, \\[2ex] -\dfrac{1}{1500^2}\,(x - 3000), & 1500 \leq x \leq 3000, \\[2ex] 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Exemplo

Portanto,

$$E(X) =$$

Exemplo

Portanto,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

Exemplo

Portanto,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx \\
&= \frac{1}{(1500)^2}\left[\int_0^{1500} x^2\; dx - \int_{1500}^{3000} x(x-3000)\; dx\right]
\end{aligned}
$$

Exemplo

Portanto,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\ f(x)\ dx \\
&= \frac{1}{(1500)^2}\left[\int_0^{1500} x^2\ dx - \int_{1500}^{3000} x(x-3000)\ dx\right] \\
&= \frac{1}{(1500)^2}\left[\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{1500} - \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3000x^2}{2}\right)\right|_{1500}^{3000}\right] \\
&= \frac{1}{(1500)^2}\left[\frac{1500^3}{3} - \left(\frac{3000^3}{3} - \frac{3000 \times 3000^2}{2}\right) + \left(\frac{1500^3}{3} - \frac{3000 \times 1500^2}{2}\right)\right] \\
&= 1500 \text{ minutos.}
\end{aligned}$$

Exemplo

O conteúdo de cinzas (em porcentagem) no carvão, digamos X, pode ser considerado como uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{1}{4.875}\,x^2, \qquad 10 \leq x \leq 25.$$

Portanto,

$$E(x) =$$

Portanto, o conteúdo de cinzas esperado no particular espécime de carvão que está sendo estudado é de 19.5%.

Exemplo

O conteúdo de cinzas (em porcentagem) no carvão, digamos X, pode ser considerado como uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{1}{4.875}\, x^2, \qquad 10 \leq x \leq 25.$$

Portanto,

$$E(x) = \frac{1}{4.875} \int_{10}^{25} x^3\, dx$$

Portanto, o conteúdo de cinzas esperado no particular espécime de carvão que está sendo estudado é de 19.5%.

Exemplo

O conteúdo de cinzas (em porcentagem) no carvão, digamos X, pode ser considerado como uma variável aleatória contínua com a seguinte fdp:

$$f(x) = \frac{1}{4.875}\, x^2, \qquad 10 \leq x \leq 25.$$

Portanto,

$$E(x) = \frac{1}{4.875} \int_{10}^{25} x^3 \, dx = \frac{1}{4.875} \left(\left. \frac{x^4}{4} \right|_{10}^{25} \right) = 19.5.$$

Portanto, o conteúdo de cinzas esperado no particular espécime de carvão que está sendo estudado é de 19.5%.

Valor Esperado de uma Variável Aleatória Uniformemente Distribuída

Teorema

Seja X uniformemente distribuída sobre o intervalo $[a, b]$. Nesse caso,

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Observe que este valor representa o ponto médio do intervalo $[a, b]$, como era de se esperar intuitivamente.

Propriedades do Valor Esperado

1. Se $X = C$, em que C é uma constante. Então,

$$E(X) = C.$$

2. Suponha que C seja uma constante e X seja uma variável aleatória. Então,

$$E(CX) = CE(X)$$

Propriedades do Valor Esperado

3. Sejam X e Y duas variáveis aleatóris quaisquer. Então,

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y).$$

4. Sejam n variáveis aleatórias $X_1, \ldots, X_n$. Então,

$$E(X_1 + \ldots + X_n) = E(X_1) + \ldots + E(X_n).$$

Introdução

Suponhamos que, para uma variável aleatória X, verificamos que

$$E(X) = 2.$$

Qual é o significado disto? É importante que não atribuamos a essa informação mais significado do que é autorizado.

Isso simplesmente significa que, se considerarmos um grande número de determinações de X, digamos $X_1, \ldots, X_n$ e calcularmos a média desses valores de X, esta média estaria próxima de 2, se n fosse grande.

No entanto, é verdadeiramente crucial não atribur demasiado significado a um valor esperado.

Introdução

Suponhamos que X represente a duração da vida de lâmpadas que estejam sendo recebidas de um fabricante e que $E(X) = 1000$ horas. Isto poderia significar uma dentre muitas coisas.

Poderia significar que a maioria das lâmpadas deveria durar um período compreendido entre 900 horas e 1100 horas.

Poderia, também, significar que as lâmpadas fornecidas são formadas de dois tipos de lâmpadas, inteiramente diferentes: cerca de metade são de muito boa qualidade e durarão aproximadamente 1300 horas, enquanto a outra metade são de muito má qualidade e durarão aproximadamente 700 horas.

Introdução

Existe uma necessidade óbvia de introduzir uma medida quantitativa que venha a distinguir entre essas duas situações.

Várias medidas são, por si mesmas, muito sugestivas, mas a seguinte é a quantidade mais comumente empregada.

Variância de uma Variável Aleatória

Definição

Seja X uma variável aleatória. Definimos a **variância** de X, denotada por $V(X)$, da maneira seguinte:

$$V(X) = E[X - E(X)]^2$$

A raiz quadrada positiva de $V(X)$ é denominada o **desvio-padrão** de X e é denotada por σ_X.

Variância de uma Variável Aleatória

Teorema

$$V(x) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Demonstração

Desenvolvendo $E[X - E(X)]^2$ e empregando as propriedades já estabelecidas para o valor esperado, obteremos:

Variância de uma Variável Aleatória

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E[X - E(X)]^2 \\
&= E\left[X^2 - 2X\ E(X) + (E(X))^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - E\left[2X\ E(X)\right] + E\left[(E(X))^2\right] \\
&= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2.
\end{aligned}
$$

Exemplo

O serviço de meteorologia classifica o tipo de céu que é visível, em termos de graus de nebulosidade.

Uma escala de 11 categorias é empregada: $0, 1, 2, \ldots, 10$, em que 0 representa um céu perfeitamente claro, 10 representa um céu completamente encoberto, enquanto os outros valores representam as diferentes condições intermediárias.

Exemplo

Suponha que tal classificação seja feita em uma determinada estação meteorológica, em um determinado dia e hora.

Seja X a variável aleatória que pode tomar um dos 11 valores acima.

Admita que a distribuição de probabilidade de X seja

$$p_0 = p_{10} = 0.05; \qquad p_1 = p_2 = p_8 = p_9 = 0.15;$$
$$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 0.06.$$

Exemplo

Portanto,

$$E(X) \quad =$$

Exemplo

Portanto,

$$\begin{aligned} E(X) &= 1(0.15) + 2(0.15) + 3(0.06) + 4(0.06) + 5(0.06) + \\ &+ 6(0.06) + 7(0.06) + 8(0.15) + 9(0.15) + \\ &+ 10(0.05) \\ &= 5.0. \end{aligned}$$

Exemplo

Para calcularmos $V(X)$, necessitamos calcular $E(X^2)$.

$$E(X^2) \quad =$$

Portanto,

$$V(X) =$$

e o desvio padrão é $\sigma =$.

Exemplo

Para calcularmos $V(X)$, necessitamos calcular $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1(0.15) + 4(0.15) + 9(0.06) + 16(0.06) + 25(0.06) + \\ &+ 36(0.06) + 49(0.06) + 64(0.15) + 81(0.15) + \\ &+ 100(0.05) \\ &= 35.6. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V(X) =$$

e o desvio padrão é $\sigma =$.

Exemplo

Para calcularmos $V(X)$, necessitamos calcular $E(X^2)$.

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= 1(0.15) + 4(0.15) + 9(0.06) + 16(0.06) + 25(0.06) + \\
&+ 36(0.06) + 49(0.06) + 64(0.15) + 81(0.15) + \\
&+ 100(0.05) \\
&= 35.6.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 35.6 - 25 = 10.6$$

e o desvio padrão é $\sigma =$.

Exemplo

Para calcularmos $V(X)$, necessitamos calcular $E(X^2)$.

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1(0.15) + 4(0.15) + 9(0.06) + 16(0.06) + 25(0.06) + \\ &+ 36(0.06) + 49(0.06) + 64(0.15) + 81(0.15) + \\ &+ 100(0.05) \\ &= 35.6. \end{aligned}$$

Portanto,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 35.6 - 25 = 10.6$$

e o desvio padrão é $\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{10.6} = 3.25$.

Exemplo

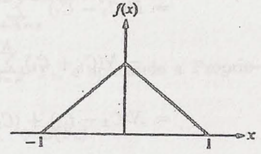
Suponhamos que X seja uma variável aleatória contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Exemplo

Suponhamos que X seja uma variável aleatória contínua com fdp

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Exemplo

Em virtude da simetria da fdp, $E(X) = \quad .$

Além disso,

$$E(X^2) \quad =$$

Portanto, $V(X) =$

Exemplo

Em virtude da simetria da fdp, $E(X) = 0$.

Além disso,

$$E(X^2) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x) \, dx$$

Portanto, $V(X) =$

Exemplo

Em virtude da simetria da fdp, $E(X) = 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, f(x) \, dx \\ &= \int_{-1}^{0} x^2(1+x) \, dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x) \, dx \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, $V(X) =$

Exemplo

Em virtude da simetria da fdp, $E(X) = 0$.

Além disso,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \; f(x) \; dx \\ &= \int_{-1}^{0} x^2(1+x) \; dx + \int_{0}^{1} x^2(1-x) \; dx \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Portanto, $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \dfrac{1}{6}$.

Propriedades da Variância

1. Se C for uma constante,

$$V(X + C) = V(X).$$

2. Se C for uma constante,

$$V(CX) = C^2 \ V(X).$$

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$, n variáveis aleatórias independentes. Então,

$$V(X_1 + \ldots + X_n) = V(X_1) + \ldots + V(X_n).$$

Exemplo

Suponhamos que a variável aleatória X seja uniformemente distribuída em $[a, b]$. Como já calculamos anteriormente,

$$E(X) = \frac{a+b}{2}.$$

Para calcularmos $V(X)$, vamos calcular $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.$$

Logo,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_a^b x^2 \left(\frac{1}{b-a}\right) dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 \, dx \\
&= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}\right) \\
&= \left(\frac{1}{b-a}\right)\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{(b-a)(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} \\
&= \frac{(b^2+ab+a^2)}{3} - \frac{(a^2+2ab+b^2)}{4} \\
&= \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(a^2+2ab+b^2)}{12} \\
&= \frac{4b^2+4ab+4a^2-3a^2-6ab-3b^2)}{12} \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}
$$