Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Quinta Aula de Cálculo Numérico

Métodos Iterativos

Professor da Disciplina

Wagner Pimentel

Métodos Iterativos

Sabemos que existem duas classes de métodos de resolução de sistemas lineares: a classe dos métodos diretos, já estudados, e a classe dos métodos iterativos. Os métodos iterativos produzem uma solução aproximada do sistema linear, após k passos do processo iterativo, desde que um critério de convergência associado a matriz de coeficientes do referido sistema linear seja satisfeito. Esses métodos não mais resolvem o sistema exatamente, mas sim, a partir de uma solução inicial constróem uma sequência de aproximações que converge para a solução do sistema.

Estudaremos dois tipos de métodos iterativos: o método de Gauss-Jacobi e o método de Gauss-Seidel.

Método de Gauss-Jacobi (GJ)

Considere o sistema linear $Ax = b$, ou ainda, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onde $[a_{ij}]_{nXn}$, $[x_j]_{nX1}$ e $[b_i]_{nX1}$.

Considere, ainda, que $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, então podemos reescrever o sistema linear na forma:

$x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right]$, $i = 1, 2, \ldots, n$; ou ainda,

$$\begin{cases} x_1 = (1/a_{11}) \left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n \right] \\ x_2 = (1/a_{22}) \left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n \right] \\ \vdots \\ x_{(n-1)} = (1/a_{(n-1)(n-1)}) \left[b_{(n-1)} - a_{(n-1)1}x_1 - a_{(n-1)2}x_2 - \ldots - a_{(n-1)n}x_n \right] \\ x_n = (1/a_{nn}) \left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n(n-1)}x_{(n-1)} \right] \end{cases}$$

O método de GJ utiliza essa forma de representação sistêmica para propor um processo iterativo que dado um $x^{(0)} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$, solução inicial, e considerando $k = 1, 2, \ldots,$ podemos gerar uma sequência de aproximações que, a cada passo k do processo iterativo, atualiza as componentes $x_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, da solução aproximada do sistema:

$$
\left\{\begin{array}{lllllllllll}
x_1^{(k)} & = & (1/a_{11}) & [& b_1 & - & a_{12}x_2^{(k-1)} & - & a_{13}x_3^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{1n}x_n^{(k-1)} &] \\
x_2^{(k)} & = & (1/a_{22}) & [& b_2 & - & a_{21}x_1^{(k-1)} & - & a_{23}x_3^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{2n}x_n^{(k-1)} &] \\
\vdots \\
x_{(n-1)}^{(k)} & = & (1/a_{(n-1)(n-1)}) & [& b_{(n-1)} & - & a_{(n-1)1}x_1^{(k-1)} & - & a_{(n-1)2}x_2^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{(n-1)n}x_n^{(k-1)} &] \\
x_n^{(k)} & = & (1/a_{nn}) & [& b_n & - & a_{n1}x_1^{(k-1)} & - & a_{n2}x_2^{(k-1)} & - & \dots & - & a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k-1)} &]
\end{array}\right.
$$

assim,

$$
x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right],
$$

$$
i = 1, 2, \dots, n
$$

$$
k = 1, 2, \dots
$$

Aplicação de GJ

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de GJ, com $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ e 3 iterações do método.

$$
\left\{\begin{array}{rcrcrcr}
10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\
x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6
\end{array}\right.
$$

Solução:

$$
\left\{\begin{array}{lcrcrcrcrc}
x_1^{(k)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2x_2^{(k-1)} & - & 1x_3^{(k-1)} &] \\
x_2^{(k)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1x_1^{(k-1)} & - & 1x_3^{(k-1)} &] \\
x_3^{(k)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2x_1^{(k-1)} & - & 3x_2^{(k-1)} &]
\end{array}\right.
$$

Primeiro passo (k=1), objetivo: determinar $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^t$ com $x^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$
\left\{\begin{array}{lcrcrcrcrccr}
x_1^{(1)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2(0) & - & 1(0) &] & = & 0.7000 \\
x_2^{(1)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1(0) & - & 1(0) &] & = & -1.6000 \\
x_3^{(1)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2(0) & - & 3(0) &] & = & 0.6000
\end{array}\right.
$$

Segundo passo (k=2), objetivo: determinar $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^t$ com $x^{(1)} = (0.7000, -1.6000, 0.6000)^t$

$$
\left\{\begin{array}{lcrcrcrcrccr}
x_1^{(2)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2(-1.6000) & - & 1(0.6000) &] & = & 0.9600 \\
x_2^{(2)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1(0.7000) & - & 1(0.6000) &] & = & -1.8600 \\
x_3^{(2)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2(0.7000) & - & 3(-1.6000) &] & = & 0.9400
\end{array}\right.
$$

Terceiro passo (k=3), objetivo: determinar $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})^t$ com $x^{(2)} = (0.9600, -1.8600, 0.9400)^t$

$$\left\{\begin{array}{lccrcrcrccr} x_1^{(3)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2(-1.8600) & - & 1(0.9400) &] & = & 0.9780 \\ x_2^{(3)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1(0.9600) & - & 1(0.9400) &] & = & -1.9800 \\ x_3^{(3)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2(0.9600) & - & 3(-1.8600) &] & = & 0.9660 \end{array}\right.$$

Portanto, a solução aproximada do sistema após 3 iteração do método de GJ é $x^{(3)} = (0.9780, -1.9800, 0.9660)^t$. $x^{(3)}$ aproxima a solução do sistema linear, $x = (1, -2, 1)^t$

Método de Gauss-Seidel (GS)

O método de GS é um melhoramento do método de GJ no sentido de convergir em menos passos do processo iterativo para a solução de um sistema linear. No processo iterativo de GS ao calcular a componente $x_i^{(k)}$ utilizamos todas as componentes $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$, já calculadas e as componentes $x_{i+1}^{(k-1)}, x_{i+2}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}$, do passo anterior.

Considere o sistema linear $Ax = b$, ou ainda, $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onde $[a_{ij}]_{nXn}$, $[x_j]_{nX1}$ e $[b_i]_{nX1}$.

Considere, ainda, que $a_{ii} \neq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, n$, então o método de GS é representado por:

$$\left\{\begin{array}{lcllllllllll} x_1^{(k)} & = & (1/a_{11}) & [& b_1 & - & a_{12}x_2^{(k-1)} & - & a_{13}x_3^{(k-1)} & - \ \ldots \ - & a_{1n}x_n^{(k-1)} &] \\ x_2^{(k)} & = & (1/a_{22}) & [& b_2 & - & a_{21}x_1^{(k)} & - & a_{23}x_3^{(k-1)} & - \ \ldots \ - & a_{2n}x_n^{(k-1)} &] \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ x_{(n-1)}^{(k)} & = & (1/a_{(n-1)(n-1)}) & [& b_{(n-1)} & - & a_{(n-1)1}x_1^{(k)} & - & a_{(n-1)2}x_2^{(k)} & - \ \ldots \ - & a_{(n-1)n}x_n^{(k-1)} &] \\ x_n^{(k)} & = & (1/a_{nn}) & [& b_n & - & a_{n1}x_1^{(k)} & - & a_{n2}x_2^{(k)} & - \ \ldots \ - & a_{n(n-1)}x_{(n-1)}^{(k)} &] \end{array}\right.$$

assim,

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right],$$
$$i = 1, 2, \ldots, n$$
$$k = 1, 2, \ldots$$

OBS: Temos que, para $x_1^{(k)}$, o termo $\sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)}$ inexiste e para $x_n^{(k)}$, o termo $\sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}$ inexiste.

Aplicação de GS

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método de GS, com $x^{(0)} = (0,0,0)^t$ e 3 iterações do método.

$$\begin{cases} 10x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 7 \\ x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & -8 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 10x_3 & = & 6 \end{cases}$$

Solução:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2x_2^{(k-1)} & - & 1x_3^{(k-1)} &] \\ x_2^{(k)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1x_1^{(k)} & - & 1x_3^{(k-1)} &] \\ x_3^{(k)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2x_1^{(k)} & - & 3x_2^{(k)} &] \end{cases}$$

Primeiro passo (k=1), objetivo: determinar $x^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)})^t$ com $x^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2(0) & - & 1(0) &] & = & 0.7000 \\ x_2^{(1)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1(0.7000) & - & 1(0) &] & = & -1.7400 \\ x_3^{(1)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2(0.7000) & - & 3(-1.7400) &] & = & 0.9820 \end{cases}$$

Segundo passo (k=2), objetivo: determinar $x^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)})^t$ com $x^{(1)} = (0.7000, -1.7400, 0.9820)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2(-1.7400) & - & 1(0.9820) &] & = & 0.9498 \\ x_2^{(2)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1(0.9498) & - & 1(0.9820) &] & = & -1.9864 \\ x_3^{(2)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2(0.9498) & - & 3(-1.9864) &] & = & 1.0060 \end{cases}$$

Terceiro passo (k=3), objetivo: determinar $x^{(3)} = (x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, x_3^{(3)})^t$ com $x^{(2)} = (0.9498, -1.9864, 1.0060)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(3)} & = & (1/10) & [& 7 & - & 2(-1.9864) & - & 1(1.0060) &] & = & 0.9967 \\ x_2^{(3)} & = & (1/5) & [& (-8) & - & 1(0.9967) & - & 1(1.0060) &] & = & -2.0005 \\ x_3^{(3)} & = & (1/10) & [& 6 & - & 2(0.9967) & - & 3(-2.0005) &] & = & 1.0008 \end{cases}$$

Portanto, a solução aproximada do sistema após 3 iteração do método de GS é $x^{(3)} = (0.9967, -2.0005, 1.0008)^t$. $x^{(3)}$ aproxima a solução do sistema linear, $x = (1, -2, 1)^t$

OBS: Verifique que $x^{(5)} = (1.0000, -2.0000, 1.0000)^t$

Critérios de Parada

Existem duas formas de determinar o fim dos métodos iterativos:

- Pelo número máximo de iterações: neste critério, após um certo número de iterações pré-definido o processo iterativo é finalizado;

- Por precisão: o processo iterativo é repetido até que a solução $x^{(k)}$ esteja suficientemente próxima da solução $x^{(k-1)}$. Para tal, defina

$$d^{(k)} = \max\{|x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|\}, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim, dada uma precisão $\epsilon \approx 0$, a solução $x^{(k)}$ será escolhida como a solução aproximada, $\bar{x}$, da solução do sistema,x, se $d^{(k)} \leq \epsilon$.

Considerando $x^{(2)} = (0.9498, -1.9864, 1.0060)^t$ e $x^{(3)} = (0.9967, -2.0005, 1.0008)^t$ e $\epsilon = 10^{-1} = 0.1$, temos que: $d^{(3)} = \max\{|0.9967 - 0.9498|, |-2.0005 - (-1.9864)|, |1.0008 - 1.0060|\} = 0.0469 \leq \epsilon$.

Podemos, também, definir o erro relativo associado como: $E_{Rel.} = \dfrac{d^{(k)}}{\max\{|x_i^{(k)}|\}}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Considerando $x^{(2)} = (0.9498, -1.9864, 1.0060)^t$ e $x^{(3)} = (0.9967, -2.0005, 1.0008)^t$, temos que:
$E_{Rel.} = \dfrac{d^{(3)}}{\max\{|0.9967|, |-2.0005)|, |1.0008|\}} = \dfrac{0.0469}{2.0005} = 2.34\%$

Critérios de Convergência

Existem dois possíveis critérios aplicáveis aos métodos iterativos: o critério das linhas e o critério de Sassenfeld.

Critérios das linhas

Seja o sistema linear $Ax = b$ e seja $\alpha_i = \dfrac{\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Se $\alpha = \max\{\alpha_i\} < 1$, então o método iterativo gera uma sequência $x^{(k)}$ convergente para a solução do sistema linear, independente da escolha da estimativa inicial, $x^{(0)}$.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

utilizando o CL:

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{2+1}{10} = 0.3,$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1| + |1|}{|5|} = \frac{1+1}{5} = 0.4,$$

$$\alpha_3 = \frac{|a_{31}| + |a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{|2| + |3|}{|10|} = \frac{2+3}{10} = 0.5,$$

então $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} = 0.5 < 1$ e pelo CL o método iterativo converge.

Critérios de Sassenfeld (CS)

Seja o sistema linear $Ax = b$, seja $\beta_1 = \dfrac{\sum_{j=2}^{n} |a_{1j}|}{|a_{11}|}$ e $\beta_i = \dfrac{\sum_{j=1}^{i-1} \beta_j |a_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}$, $i = 2, \ldots, n$. Se $\beta = \max\{\beta_i\} < 1$, então o método iterativo gera uma sequência $x^{(k)}$ convergente para a solução do sistema linear, independente da escolha da estimativa inicial, $x^{(0)}$.

OBS: Temos que, em $\beta_i = \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}|$ inexiste, para $i = n$.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

utilizando o CS:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{2+1}{10} = 0.3,$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{0.3|1| + |1|}{|5|} = \frac{0.3+1}{5} = 0.26,$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1|a_{31}| + \beta_2|a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{0.3|2| + 0.26|3|}{|10|} = \frac{0.6+0.78}{10} = 0.14,$$

então $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = 0.3 < 1$ e pelo CS o método iterativo converge.

OBS: O critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não seja.

Aplicação

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

temos que, utilizando o CL:

$$\alpha_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|0| + |1|}{|3|} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = \frac{|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{|1| + |0|}{|-1|} = \frac{1+0}{1} = 1, \text{ então o } CL \text{ não é satisfeito.}$$

Por outro lado, utilizando o CS:

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}|}{|a_{11}|} = \frac{|0| + |1|}{|3|} = \frac{0+1}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_2 = \frac{\beta_1|a_{21}| + |a_{23}|}{|a_{22}|} = \frac{\frac{1}{3}|1| + |0|}{|-1|} = \frac{\frac{1}{3}+0}{1} = \frac{1}{3},$$

$$\beta_3 = \frac{\beta_1|a_{31}| + \beta_2|a_{32}|}{|a_{33}|} = \frac{\frac{1}{3}|3| + \frac{1}{3}|1|}{|2|} = \frac{\frac{3}{3}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$

então $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} = \dfrac{2}{3} < 1$ e pelo CS o método iterativo converge.