Centro Federal de Educação Tecnológica - CEFET-RJ
Segunda Aula de Cálculo Numérico
Aproximação de Função por Série de Taylor
Professor da Disciplina
Wagner Pimentel

Nesta aula trataremos de aproximação local de função por série de Taylor, com o objetivo de determinar um polinômio de Taylor. Um polinômio de Taylor aproxima uma determinada função na vizinhança ou na proximidade de um ponto do seu domínio, denominado centro da série de Taylor.
Seja $f : \Re \to \Re$ uma função contínua e infinitamente diferenciável, então $f = f(x)$ pode ser representada por uma série de potência na vizinhança de um ponto $a \in D(f)$, da seguinte forma:

$f(x)$, pode ser representada por, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$, e mais,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} = \frac{f^0(a)(x-a)^0}{0!} + \frac{f^1(a)(x-a)^1}{1!} + \frac{f^2(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} = f^0(a) + f^1(a)(x-a) + \frac{f^2(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots, \text{ então,}$$

$$f(x) = f^0(a) + f^1(a)(x-a) + \frac{f^2(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

Esta série é denominada série de Taylor da função f em torno do ponto $x = a$, onde $a \in D(f)$ é o centro da série de potência. E ainda, $f^0(a) = f(a)$, $f^1(a) = f^{'}(a)$, e $f^n(a)$ é a derivada de ordem n da função f no ponto $x = a$. Assim, a função f pode ser melhor representada como:

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

São exemplos de funções contínuas e infinitamente diferenciáveis: as funções exponenciais, as funções trigonométricas, as funções logarítmicas, dentre outras.

Se $a = 0$, a série será denominada de MacLaurin.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!}$$

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + \ldots$$

Obs: A questão associada à aproximação de função por série de Taylor ocorre quando somente $(k+1)$ termos da série de potência são considerados, $k \in N$. Neste caso, a função f será aproximada por um polinômio de grau k denominado polinômio de Taylor, como a seguir:

$$f(x) \approx f(a) + f^{'}(a)(x-a) + \frac{f^{''}(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^k(a)(x-a)^k}{k!}$$

Quanto maior for o valor de k, maior será o grau do polinômio de Taylor e mais precisa será a aproximação da função. E mais, isto só é válido para pontos na vizinhança de $a \in D(f)$, onde se tem garantia de convergência da série de Taylor.

Aplicação 1:

a) Desenvolva a série de Taylor da função $f(x) = e^{2x}$ em torno do ponto x=0.

Solução:
Temos que $a = 0$ então a série é uma MacLaurin, e mais:
$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f(a) = f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f'(a) = f'(0) = 2e^0 = 2$
$f''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow f''(a) = f''(0) = 4e^0 = 4$
$f'''(x) = 8e^{2x} \Rightarrow f'''(a) = f'''(0) = 8e^0 = 8$
$f''''(x) = 16e^{2x} \Rightarrow f''''(a) = f''''(0) = 16e^0 = 16$
....
$f^n(x) = 2^n e^{2x} \Rightarrow f^n(a) = f^n(0) = 2^n e^0 = 2^n$
Assim,

$$f(x) = f(0) + f^{'}(0)x + \frac{f^{''}(0)x^2}{2!} + \frac{f^{'''}(0)x^3}{3!} + \frac{f^{''''}(0)x^4}{4!} + \cdots + \frac{f^n(0)x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + \cdots + \frac{2^n x^n}{n!} + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$$

b) Aproxime $f(-\frac{1}{2})$ utilizando um polinômio de grau 1, grau 2, grau 3 e grau 4, da série acima.

Solução:
Sabemos que $f(-\frac{1}{2}) = e^{2(-\frac{1}{2})} = e^{-1} = 1/e = 0.3679$

Polinômio de grau 1:
$f(x) \approx P_1(x) = 1 + 2x \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) \approx P_1(-\frac{1}{2}) = 1 + 2(-\frac{1}{2}) = 0$

Polinômio de grau 2:

$$f(x) \approx P_2(x) = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} \Rightarrow f(-\tfrac{1}{2}) \approx P_2(-\tfrac{1}{2}) = 1 + 2(-\tfrac{1}{2}) + \frac{4(-\frac{1}{2})^2}{2!} = 0.5$$

Polinômio de grau 3:

$f(x) \approx P_3(x) = 1 + 2x + \dfrac{4x^2}{2!} + \dfrac{8x^3}{3!} \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) \approx P_3(-\frac{1}{2}) = 1 + 2(-\frac{1}{2}) + \dfrac{4(-\frac{1}{2})^2}{2!} + \dfrac{8(-\frac{1}{2})^3}{3!} = 0.3333$

Polinômio de grau 4:

$f(x) \approx P_4(x) = 1+2x+\dfrac{4x^2}{2!}+\dfrac{8x^3}{3!}+\dfrac{16x^4}{4!} \Rightarrow f(-\frac{1}{2}) \approx P_4(-\frac{1}{2}) = 1+2(-\frac{1}{2})+\dfrac{4(-\frac{1}{2})^2}{2!}+\dfrac{8(-\frac{1}{2})^3}{3!}+\dfrac{16(-\frac{1}{2})^4}{4!} =$ 0.3750

c) Determine o erro relativo associado ao polinômio de grau 4.

Solução:

$E_{Rel.} = \dfrac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \dfrac{|0.3679 - 0.3750|}{0.3679} = 0.0193 = 1.93\%$

Aplicação 2:

a) Desenvolva a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ em torno do ponto x=1.

Solução:

Como $a = 1$ temos que:

$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f(a) = f(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2} \Rightarrow f'(a) = f'(1) = \dfrac{-1}{1^2} = -1$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^3} \Rightarrow f''(a) = f''(1) = \dfrac{2}{1^3} = 2$

$f'''(x) = \dfrac{-6}{x^4} \Rightarrow f'''(a) = f'''(1) = \dfrac{-6}{1^4} = -6$

$f''''(x) = \dfrac{24}{x^5} \Rightarrow f''''(a) = f''''(1) = \dfrac{24}{1^5} = 24$

....

$f^n(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^n} \Rightarrow f^n(a) = f^n(1) = \dfrac{(-1)^n n!}{1^n} = (-1)^n n!$

Assim,

$f(x) = f(1) + f^{'}(1)(x-1) + \dfrac{f^{''}(1)(x-1)^2}{2!} + \dfrac{f^{'''}(1)(x-1)^3}{3!} + \dfrac{f^{''''}(1)(x-1)^4}{4!} + \cdots + \dfrac{f^n(1)(x-1)^n}{n!} + \ldots$

$f(x) = 1 - (x-1) + \dfrac{2(x-1)^2}{2!} - \dfrac{6(x-1)^3}{3!} + \dfrac{24(x-1)^4}{4!} - \cdots - \dfrac{(-1)^n n!(x-1)^n}{n!} + \ldots$

$f(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - \cdots - (x-1)^n + \ldots$, n impar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$$

b) Aproxime $f(\frac{1}{2})$ utilizando um polinômio de grau 4.

Solução:

Sabemos que $f(\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{(\frac{1}{2})} = 2$

Polinômio de grau 4:

$f(x) \approx P_4(x) = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 \Rightarrow$

$f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 - (\frac{1}{2} - 1) + (\frac{1}{2} - 1)^2 - (\frac{1}{2} - 1)^3 + (\frac{1}{2} - 1)^4 \Rightarrow$

$f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 - (-\frac{1}{2}) + (-\frac{1}{2})^2 - (-\frac{1}{2})^3 + (-\frac{1}{2})^4 \Rightarrow$

$f(\frac{1}{2}) \approx P_4(\frac{1}{2}) = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} = 1.9375$

c) Determine o erro relativo associado à aproximação acima.

Solução:

$E_{Rel.} = \dfrac{|x - \bar{x}|}{|x|} = \dfrac{|2 - 1.9375|}{2} = 0.0313 = 3.13\%$