Aula 08 – Probabilidade Condicionada e Independência

Luciana Rocha Pedro

GCC 1518 – Estatística e Probabilidade – CEFET Maracanã

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer

Introdução

Vamos reexaminar a diferença entre extrair uma peça de um lote, ao acaso, com ou sem reposição. O lote estudado tinha a seguinte composição: 80 não-defeituosas e 20 defeituosas.

Suponha que escolhemos duas peças desse lote:

1. com reposição;
2. sem reposição.

Definamos os dois eventos seguintes:

$$A = \{\text{a primeira peça é defeituosa}\};$$

$$B = \{\text{a segunda peça é defeituosa}\}.$$

Introdução

Se estivermos extraindo **com reposição**, $P(A) = P(B) = 20/100 = 1/5$, porque cada vez que extrairmos do lote, existirão 20 peças defeituosas no total de 100.

No entanto, se estivermos extraindo **sem reposição**, os resultados não serão tão imediatos.

É ainda verdade, naturalmente, que $P(A) = 1/5$. Mas e $P(B)$?

É evidente que, para calcularmos $P(B)$, deveremos conhecer a composição do lote no momento de se extrair a segunda peça. Isto é, deveremos saber se A ocorreu ou não.

Probabilidade Condicionada

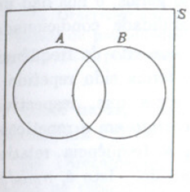
Sejam A e B dois eventos associados ao experimento S. Denotaremos por $P(B|A)$ a **probabilidade condicionada** do evento B, quando A tiver ocorrido.

No exemplo acima, $P(B|A) = 19/99$, porque se A tiver ocorrido, então para a segunda extração restarão somente 99 peças, das quais 19 delas serão defeituosas.

Sempre que calcularmos $P(B|A)$, estaremos essencialmente calculando $P(B)$ em relação ao espaço amostral reduzido A, em lugar de fazê-lo em relação ao espaço amostral original S.

Probabilidade Condicionada

Consideremos o seguinte Diagrama de Venn.



Quando calcularmos $P(B)$, estaremos nos perguntando quão provável será estarmos em B, sabendo que devemos estar em S.

Quando calcularmos $P(B|A)$, estaremos perguntando quão provável será estarmos em B, sabendo que devemos estar em A. (Isto é, o espaço amostral ficou reduzido de S para A.)

Exemplo

Dois dados equilibrados são lançados, registrando-se o resultado como (x_1, x_2), em que x_i é o resultado do i-ésimo dado, $i = 1, 2$.

Assim, o espaço amostral S pode ser representado pela seguinte lista de 36 resultados igualmente prováveis.

$$S = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \dots & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & \dots & (2,6) \\ \vdots & & & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & \dots & (6,6) \end{array} \right\}$$

Exemplo

Consideremos os dois eventos a seguir:

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}.$$

Portanto, e .

Portanto, e .

Exemplo

Consideremos os dois eventos a seguir:

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}.$$

Portanto, $A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\}$ e .

Portanto, e .

Exemplo

Consideremos os dois eventos a seguir:

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}.$$

Portanto, $A = \{(5,5),(4,6),(6,4)\}$ e $B = \{(2,1),(3,1),(3,2),\dots,(6,5)\}$.

Portanto, e .

Exemplo

Consideremos os dois eventos a seguir:

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}.$$

Portanto, $A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\}$ e $B = \{(2,1), (3,1), (3,2), \ldots, (6,5)\}$.

Portanto, $P(A) = \dfrac{3}{36}$ e .

Exemplo

Consideremos os dois eventos a seguir:

$$A = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 = 10\}, \qquad B = \{(x_1, x_2) | x_1 > x_2\}.$$

Portanto, $A = \{(5,5), (4,6), (6,4)\}$ e $B = \{(2,1), (3,1), (3,2), \ldots, (6,5)\}$.

Portanto, $P(A) = \dfrac{3}{36}$ e $P(B) = \dfrac{15}{36}$.

Exemplo

Logo, $P(B|A) =$, uma vez que o espaço amostral é, agora, formado por A (isto é, três resultados) e somente um desses três resultados é coerente com o evento B.

De modo semelhante, poderemos calcular $P(A|B) =$.

Exemplo

Logo, $P(B|A) = \frac{1}{3}$, uma vez que o espaço amostral é, agora, formado por A (isto é, três resultados) e somente um desses três resultados é coerente com o evento B.

De modo semelhante, poderemos calcular $P(A|B) =$.

Exemplo

Logo, $P(B|A) = \dfrac{1}{3}$, uma vez que o espaço amostral é, agora, formado por A (isto é, três resultados) e somente um desses três resultados é coerente com o evento B.

De modo semelhante, poderemos calcular $P(A|B) = \dfrac{1}{15}$.

Exemplo

Finalmente, vamos calcular $P(A \cap B)$.

O evento $A \cap B$ ocorre se, e somente se, a soma dos dois dados for 10 e se o primeiro dado tiver apresentado um valor maior que o segundo dado.

Existe apenas um desses resultados e, por isso, $P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$.

Se fizermos um exame cuidadoso dos vários números já calculados, concluiremos que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad \text{e} \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Probabilidade Condicionada

Essas relações não surgiram apenas do particular exemplo que consideramos. Ao contrário, elas são bastante gerais e nos dão um caminho para definir rigorosamente a **probabilidade condicionada**.

Para sugerir essa definição, voltemos ao conceito de freqüência relativa. Admitamos que um experimento E tenha sido repetido n vezes.

Sejam n_A, n_B e $n_{A \cap B}$ o número de vezes que, respectivamente, os eventos A, B e $A \cap B$ tenham ocorrido em n repetições.

Qual o significado de $\dfrac{n_{A \cap B}}{n_A}$?

Probabilidade Condicionada

O valor $\dfrac{n_{A\cap B}}{n_A}$ representa a freqüência relativa de B naqueles resultados em que A tenha ocorrido.

Isto é, $\dfrac{n_{A\cap B}}{n_A}$ é a freqüêncja relativa de B, condicionada a que A tenha ocorrido.

Probabilidade Condicionada

Poderemos escrever $\frac{n_{A\cap B}}{n_A}$ da seguinte forma:

$$\frac{n_{A\cap B}}{n_A} = \frac{n_{A\cap B}/n}{n_A/n} = \frac{f_{A\cap B}}{f_A},$$

em que $f_{A\cap B}$ e f_A são as freqüências relativas dos eventos $A \cap B$ e A, respectivamente.

Probabilidade Condicionada

Se o número de repetições for grande, $f_{A\cap B}$ será próxima de $P(A\cap B)$ e f_A será próxima de $P(A)$.

Conseqüentemente, a relação anterior sugere que $\dfrac{n_{A\cap B}}{n_A}$ será próxima de $P(B|A)$.

Probabilidade Condicionada

Definição

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

desde que $P(A) > 0$.

Probabilidade Condicionada

Deste modo, temos duas maneiras de calcular a probabilidade condicionada $P(B|A)$:

1. Diretamente, pela consideração da probabilidade de B em relação ao espaço amostral reduzido A.
2. Empregando a definição acima, em que $P(A \cap B)$ e $P(A)$ são calculados em relação ao espaço amostral original S.

Exemplo

Suponha que um escritório possua 100 máquinas de calcular. Algumas dessas máquinas são elétricas (E), enquanto outras são manuais (M); algumas são novas (N), enquanto outras são muito usadas (U). A tabela a seguir fornece o número de máquinas de cada categoria.

Uma pessoa entra no escritório, pega uma máquina ao acaso e descobre que é nova. Qual será a probabilidade de que seja elétrica?

	E	M	Total
N	40	30	70
U	20	10	30
Total	60	40	100

Exemplo

Em termos da notação introduzida, desejamos calcular $P(E|N)$.

Considerando somente o espaço amostral reduzido (isto é, as 70 máquinas novas), temos

$$P(E|N) = \qquad .$$

Exemplo

Em termos da notação introduzida, desejamos calcular $P(E|N)$.

Considerando somente o espaço amostral reduzido (isto é, as 70 máquinas novas), temos

$$P(E|N) = \frac{40}{70} = \frac{4}{7}.$$

Teorema da Multiplicação de Probabilidades

A mais importante conseqüência da definição de probabilidane condicionada é obtida ao se escrever:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A),$$

ou, equivalentemente,

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

Isto é, algumas vezes, mencionado como o **teorema da multiplicação de probabilidades**.

Podemos aplicar esse teorema para calcular a probabilidade da ocorrência conjunta dos eventos A e B.

Exemplo

Consideremos, novamente, o lote formado de 20 peças defeituosas e 80 não-defeituosas.

Se escolhermos, ao acaso, duas peças, sem reposição, qual será a probabilidade de que ambas as peças sejam defeituosas?

Exemplo

Como anteriormente, definamos os eventos A e B, na seguinte forma.

$$A = \{\text{a primeira peça extraída é defeituosa}\},$$

$$B = \{\text{a segunda peça extraída é defeituosa}\}.$$

Conseqüentemente, pediremos $P(A \cap B)$, que poderemos calcular, de acordo com a fórmula acima, como $P(B|A)P(A)$.

Exemplo

Mas $P(B|A) = \dfrac{19}{99}$, enquanto $P(A) = \dfrac{1}{5}$.

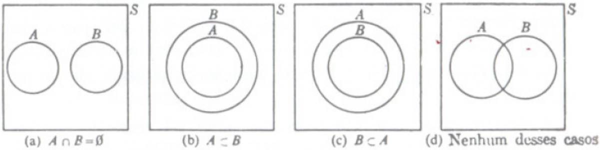
Portanto,

$$P(A \cap B) = \frac{19}{495}.$$

Comparando $P(A|B)$ e $P(A)$

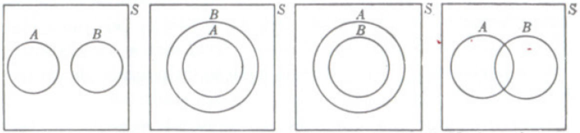
Examinemos, agora, rapidamente, se poderemos fazer uma afirmação geral sobre a grandeza relativa de $P(A|B)$ e $P(A)$.

Consideraremos quatro casos, que estão ilustrados pelos Diagramas de Venn na figura a seguir.



Comparando $P(A|B)$ e $P(A)$

1. $P(A|B) = 0 \leq P(A)$, porque A não poderá ocorrer se B tiver ocorrido.
2. $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = [P(A)/P(B)] \geq P(A)$, já que $0 \leq P(B) \leq 1$.
3. $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = P(B)/P(B) = 1 \geq P(A)$.
4. Neste caso, nada poderemos afirmar sobre a grandeza relativa de $P(A|B)$ e $P(A)$.



(a) $A \cap B = \emptyset$ (b) $A \subset B$ (c) $B \subset A$ (d) Nenhum desses casos

Comparando $P(A|B)$ e $P(A)$

Observe que em dois dos casos acima $P(A) \leq P(A|B)$, em um caso $P(A) \geq P(A|B)$ e no quarto caso não podemos fazer qualquer comparação.

Até aqui, empregamos o conceito de probabilidade condicionada para avaliar a probabilidade de ocorrência conjunta de dois eventos.

Poderemos aplicar esse conceito em outra maneira de calcular a probabilidade de um evento simples A.

Partição do Espaço Amostral

Definição

Dizemos que os eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$ representam uma **partição do espaço amostral** S quando

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.
2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$.
3. $P(B_i) > 0$, para todo i.

Partição do Espaço Amostral

Em uma partição, quando o experimento E é realizado, um, e somente um, dos eventos B_i ocorre.

Por exemplo: na jogada de um dado,

$$B_1 = \{1, 2\}, B_2 = \{3, 4, 5\} \text{ e } B_3 = \{6\}$$

representariam uma particão do espaço amostral, enquanto

$$C_1 = \{1, 2, 3, 4\} \text{ e } C_2 = \{4, 5, 6\}$$

não representariam.

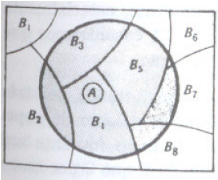
Partição do Espaço Amostral

Consideremos A um evento qualquer referente a S e $B_1, B_2, \ldots, B_k$ uma partição de S.

O Diagrama de Venn na figura a seguir ilustra esta situação para $k = 8$.

Portanto, poderemos escrever

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_k).$$



Partição do Espaço Amostral

Naturalmente, alguns dos conjuntos $A \cap B_j$ poderão ser vazios, mas isso não invalida essa decomposição de A.

O ponto importante é que todos os eventos $A \cap B_1, \ldots, A \cap B_k$ são, dois a dois, mutualmente excludentes.

Por isso, poderemos aplicar a propriedade da adição de eventos mutuamente excludentes e podemos escrever

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_k).$$

Teorema da Probabilidade Total

Contudo, cada termo $P(A \cap B_j)$ pode ser expresso na forma $P(A|B_j)P(B_j)$.

Portanto, obteremos o que se denomina o **teorema da probabilidade total**:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_k)P(B_k).$$

Teorema da Probabilidade Total

Este resultado representa uma relação extremamente útil porque, freqüentemente, quando $P(A)$ é pedida, pode ser dificil calculá-la diretamente.

No entanto, com a informação adicional de que B_j tenha ocorrido, seremos capazes de calcular $P(A|B_j)$ e, em seguida, empregar a fórmula acima.

Exemplo

Consideremos novamente o lote de 20 peças defeituosas e 80 não-defeituosas, do qual extrairemos duas peças, sem reposição.

Novamente, definindo A e B como

$$A = \{\text{a primeira peça extraída é defeituosa}\},$$

$$B = \{\text{a segunda peça extraída é defeituosa}\},$$

poderemos, agora, calcular $P(B)$.

Assim,

$$P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}).$$

Exemplo

Encontramos que

$$P(B) = \frac{19}{99} \times \frac{1}{5} + \frac{20}{99} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$

Este resultado pode ser um tanto surpreendente, especialmente se o leitor se recordar que encontramos que $P(B) = \frac{1}{5}$ quando extraímos as peças **com reposição**.

Exemplo

Uma determinada peça é manufaturada por três fábricas, digamos 1, 2 e 3.

Sabemos que 1 produz o dobro de peças que 2, e 2 e 3 produziram o mesmo número de peças durante um período de produção especificado.

Sabemos também que 2% das peças produzidas por 1 e por 2 são defeituosas, enquanto 4% daquelas produzidas por 3 são defeituosas.

Todas as peças produzidas são colocadas em um depósito e depois uma peça é extraída ao acaso.

Qual é a probabilidade de que essa peça seja defeituosa?

Exemplo

Vamos introduzir os seguintes eventos:

$$A = \{\text{a peça é defeituosa}\},$$

$$B_1 = \{\text{a peça provém de 1}\},$$

$$B_2 = \{\text{a peça provém de 2}\},$$

$$B_3 = \{\text{a peça provém de 3}\}.$$

Queremos encontrar $P(A)$.

Exemplo

Utilizando as definições dadas, poderemos escrever:

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3).$$

Ora, $P(B_1) = \frac{1}{2}$, enquanto $P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4}$.

Também, $P(A|B_1) = P(A|B_2) = 0.02$, enquanto $P(A|B_3) = 0.04$.

Substituindo esses valores na expressão acima, encontraremos

$$P(A) = 0.025.$$

Introdução

Poderemos empregar o exemplo das peças para sugerir outro importante resultado.

Suponha que uma peça seja retirada do depósito e se verifique ser ela defeituosa. Qual é a probabilidade de que tenha sido produzida na fábrica 1?

Empregando a notação já introduzida, queremos encontrar .

Introdução

Poderemos empregar o exemplo das peças para sugerir outro importante resultado.

Suponha que uma peça seja retirada do depósito e se verifique ser ela defeituosa. Qual é a probabilidade de que tenha sido produzida na fábrica 1?

Empregando a notação já introduzida, queremos encontrar $P(B_1|A)$.

Introdução

Poderemos calcular $P(B_1|A)$ como uma conseqüência da seguinte exposição.

Seja $B_1, B_2, \ldots, B_k$ uma partição do espaço amostral S e seja A um evento associado a S.

Aplicando a definição de probabilidade condicionada, poderemos escrever

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)}, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Teorema de Bayes

Este resultado é conhecido como **Teorema de Bayes**.

É também denominado fórmula da **probabilidade das causas** (ou dos **antecedentes**).

Desde que os B_i constituam uma partição do espaço amostral, um, e somente um, dos eventos B_i ocorrerá.

Portanto, a expressão acima nos fornece a probabilidade de um particular B_i (isto é, uma "causa"), dado que o evento A tenha ocorrido.

Teorema de Bayes

Para aplicar esse teorema, deveremos conhecer os valores $P(B_i)$. Muito freqüentemente, esses valores são desconhecidos e isso limita a aplicabilidade do teorema.

Tem havido considerável controvérsia sobre o Teorema de Bayes. Ele é perfeitamente correto matematicamente. Somente a escolha imprópria dos $P(B_i)$ pode tornar o resultado discutível.

Exemplo

Voltando ao problema proposto acima, obtemos:

$$
\begin{aligned}
P(B_1|A) &= \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)} \\
&= \frac{(0.02) \times (1/2)}{(0.02) \times (1/2) + (0.02) \times (1/4) + (0.04) \times (1/4)} \\
&= 0.40.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Suponha que um grande número de caixas de bombons sejam compostas de dois tipos, A e B.

O tipo A contém 70 por cento de bombons doces e 30 por cento de bombons amargos, enquanto no tipo B essas porcentagens de sabor são inversas.

Além disso, suponha que 60 por cento de todas as caixas de bombons sejam do tipo A, enquanto as restantes sejam do tipo B.

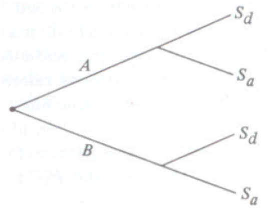
Exemplo

Você, agora, se defronta com o seguinte problema de decisão: uma caixa do tipo desconhecido lhe é oferecida.

Você terá permissão para tirar uma amostra de bombom e, com esta informação, você deve decidir se adivinha se a caixa que lhe foi oferecida é do tipo A ou se do tipo B.

Exemplo

O seguinte **diagrama de árvore** nos ajudará a analisar o problema. S_d e S_a correspondem, respectivamente, a escolher um bombom de sabor doce ou um bombom de sabor amargo.



Exemplo

Façamos alguns cálculos:

$$\begin{array}{lll} P(A) = \quad, & P(B) = \quad, & P(S_d|A) = \quad, \\ P(S_a|A) = \quad, & P(S_d|B) = \quad, & P(S_a|B) = \quad. \end{array}$$

Desejamos realmente saber $P(A|S_d)$, $P(A|S_a)$, $P(B|S_d)$ e $P(B|S_a)$.

Suponha que realmente retiremos um bombom de sabor doce.

Qual decisão seríamos mais tentados a tomar? Vamos comparar $P(A|S_d)$ e $P(B|S_d)$.

Exemplo

Façamos alguns cálculos:

$$\begin{array}{lll} P(A) = 0.6, & P(B) = 0.4, & P(S_d|A) = 0.7, \\ P(S_a|A) = 0.3, & P(S_d|B) = 0.3, & P(S_a|B) = 0.7. \end{array}$$

Desejamos realmente saber $P(A|S_d)$, $P(A|S_a)$, $P(B|S_d)$ e $P(B|S_a)$.

Suponha que realmente retiremos um bombom de sabor doce.

Qual decisão seríamos mais tentados a tomar? Vamos comparar $P(A|S_d)$ e $P(B|S_d)$.

Exemplo

Empregando a fórmula de Bayes, teremos

$$\begin{aligned} P(A|S_d) &= \frac{P(S_d|A)P(A)}{P(S_d|A)P(A) + P(S_d|B)P(B)} \\ &= \frac{(0.7) \times (0.6)}{(0.7) \times (0.6) + (0.3) \times (0.4)} \\ &= \frac{7}{9}. \end{aligned}$$

Um cálculo semelhante dará $P(B|S_d) = \dfrac{2}{9}$.

Exemplo

Dessa maneira, baseados na evidência que tivemos (isto é, a retirada de um bombom de sabor doce), é 2.5 vezes mais provável que nós estejamos diante de uma caixa do tipo A, em vez de uma do tipo B.

Conseqüentemente, poderíamos, presumivelmente, decidir que uma caixa do tipo A foi apresentada.

Naturalmente, nós poderíamos estar errados.

A sugestão desta análise é que estaremos escolhendo a alternativa mais provável, com base na evidência limitada que tivemos.

Diagrama de Árvore

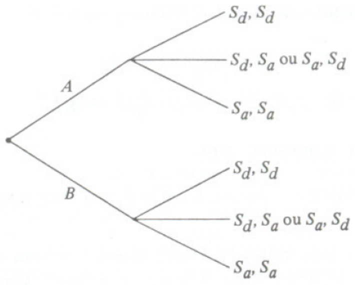
Em termos do diagrama da árvore, o que era realmente necessário (e foi feito) foi uma análise para o passado.

Assim, dado o que foi observado, S_d, neste caso qual a probabilidade de que o tipo A seja o envolvido?

Diagrama de Árvore

Uma situação mais interessante surge se nos for permitido tirar **dois** bombons antes de decidir se se trata do tipo A ou do tipo B.

Neste caso, o diagrama de árvore aparece assim:



Eventos Independentes

Já consideramos eventos A e B que não podem ocorrer conjuntamente, isto é, $A \cap B = \emptyset$.

Tais eventos são denominados **mutuamente excludentes**, ou eventos incompatíveis.

Observamos, anteriormente, que se A e B forem mutuamente excludentes, então $P(A|B) = 0$, porque a ocorrência dada de B impede a ocorrência de A.

No outro extremo, temos a situação já estudada, na qual $A \subset B$ e, conseqüentemente, $P(B|A) = 1$.

Eventos Independentes

Em cada uma das situações mencionadas, saber que B já ocorreu nos dá uma informação bastante definida referente à probabilidade de ocorrência de A.

Existem, porém, muitas situações nas quais saber que algum evento B ocorreu não tem qualquer interesse quanto à ocorrência ou não ocorrência de A.

Exemplo

Suponhamos que um dado equilibrado seja jogado duas vezes.

Definamos os eventos A e B da seguinte forma:

$$A = \{\text{0 primeiro dado mostra um número par}\},$$

$$B = \{\text{0 segundo dado mostra 5 ou 6}\}.$$

Exemplo

É intuitivamente compreensível que os eventos A e B são inteiramente não relacionados.

Saber que B ocorreu não fornece qualquer informação sobre a ocorrência de A.

De fato, o seguinte cálculo mostra isso.

Exemplo

Tomando como nosso espaço amostral os 36 resultados igualmente prováveis, encontraremos que

$$P(A) = \qquad \text{e} \qquad P(B) = \qquad ,$$

enquanto que

$$P(A \cap B) = \qquad .$$

Conseqüentemente,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \qquad .$$

Exemplo

Tomando como nosso espaço amostral os 36 resultados igualmente prováveis, encontraremos que

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad P(B) = \qquad ,$$

enquanto que

$$P(A \cap B) = \qquad .$$

Conseqüentemente,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \qquad .$$

Exemplo

Tomando como nosso espaço amostral os 36 resultados igualmente prováveis, encontraremos que

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

enquanto que

$$P(A \cap B) = \qquad\qquad .$$

Conseqüentemente,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \qquad\qquad\qquad .$$

Exemplo

Tomando como nosso espaço amostral os 36 resultados igualmente prováveis, encontraremos que

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

enquanto que

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Conseqüentemente,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \qquad\qquad .$$

Exemplo

Tomando como nosso espaço amostral os 36 resultados igualmente prováveis, encontraremos que

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3},$$

enquanto que

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Conseqüentemente,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = P(A).$$

Exemplo

Deste modo, encontramos, como seria de se esperar, que a probabilidade absoluta (ou não condicionada) é igual à probabilidade condicionada $P(A|B)$.

De forma semelhante,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(B).$$

Eventos Independentes

Considere $P(A \cap B)$ e suponha que as probabilidades condicionadas sejam iguais às correspondentes probabilidades absolutas.

Portanto, teremos:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = P(B)P(A).$$

Desse modo, verificamos que as probabilidades absolutas serão iguais às probabilidades condicionadas se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Definição

A e B serão **eventos independentes** se, e somente se,

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Exemplo

Consideremos, novamente, o exemplo das máquinas.

Inicialmente, examinaremos apenas a tabela abaixo, em que são fornecidos somente os **valores marginais**. Isto é, existem 60 máquinas elétricas e 40 manuais, e delas 70 são novas enquanto que 30 são usadas.

	E	M	
N			70
U			30
	60	40	100

Exemplo

Existem muitas maneiras de preencher as casas da tabela, concordantes com os totais marginais dados.

A seguir, apresentaremos algumas destas possibilidades.

	E	M	
N	60	10	70
U	0	30	30
	60	40	100

(a)

	E	M	
N	30	40	70
U	30	0	30
	60	40	100

(b)

	E	M	
N	42	28	70
U	18	12	30
	60	40	100

(c)

Exemplo

Consideremos a opção (a). Aqui, todas as máquinas elétricas são novas e todas as máquinas usadas são manuais. Desse modo, existe uma conexão óbvia (não necessariamente causal) entre a característica de ser elétrica e a de ser nova.

De forma semelhante, na opção (b) todas as máquinas manuais são novas e todas as máquinas usadas são elétricas. Também, uma conexão definida existe entre essas características.

No entanto, quando chegamos à opção (c), a situação fica bem diferente: aqui, nenhuma relação evidente existe.

Exemplo

Por exemplo, 60 por cento de todas as máquinas são elétricas e exatamente 60 por cento das máquinas usadas são elétricas.

De forma semelhante, 70 por cento de todas as máquinas são novas, enquanto que exatamente 70 por cento das máquinas manuais são novas, etc.

Portanto, nenhuma indicação está evidente de que a característica de *ser nova* e de *ser elétrica* tenham qualquer conexão uma com a outra.

Naturalmente, esta tabela foi construída justamente de modo a apresentar essa propriedade.

Exemplo

Como foram obtidos os valores das casas da tabela? Apenas com o emprego da equação $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Como $P(E) = 60/100$ e $P(N) = 70/100$, deveremos ter, para independência, $P(E \cap N) = P(E)P(N) = 42/100$.

Portanto, a casa na tabela que indique o número de máquinas elétricas novas deverá conter o número 42. As outras casas foram obtidas de maneira análoga.

Independência de Eventos

Na maioria das aplicações, teremos que adotar a **hipótese de independência de dois eventos** A e B e depois empregar essa suposição para calcular $P(A \cap B)$ como $P(A)P(B)$.

Geralmente, condições físicas sob as quais o experimento seja realizado tornarão possível decidir se tal suposição será justificada ou, pelo menos, aproximadamente justificada.

Exemplo

Consideremos um lote grande de peças, digamos 10.000. Admitamos que 10 por cento dessas peças sejam defeituosas e 90 por cento perfeitas. Duas peças são extraídas. Qual é a probabilidade de que ambas sejam perfeitas?

Definamos os eventos A e B, assim:

$$A = \{\text{a primeira peça é perfeita}\},$$

$$B = \{\text{a segunda peça é perfeita}\}.$$

Exemplo

Se admitirmos que a primeira peça seja reposta, antes que a segunda seja escolhida, então os eventos A e B podem ser considerados independentes e, portanto, $P(A \cap B) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$.

Na prática, contudo, a segunda peça é escolhida sem a reposição da primeira peça. Neste caso,

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \frac{8999}{9999} \times 0.9$$

que é aproximadamente igual a 0.81.

Assim, muito embora A e B não sejam independentes no segundo caso, a hipótese de independência (que simplifica consideravelmente os cálculos) acarreta apenas um erro desprezível.

Independência de Eventos

Se existissem somente poucas peças no lote, digamos 30, a hipótese de independência teria acarretado um erro grande.

Por isso, torna-se importante verificar cuidadosamente as condições sob as quais o experimento é realizado, para estabelecer a validade de uma suposição de independência entre os vários eventos.

Exemplo

Admitamos que um mecanismo seja constituído por dois componentes montados em série, como indicado na figura a seguir.

Cada componente tem uma probabilidade p de não funcionar. Qual será a probabilidade de que o mecanismo funcione?

É evidente que o mecanismo funcionará se, e somente se, ambos os componentes estiverem funcionando. Por isso,

$$\text{Prob (o mecanismo funcione)} = \text{Prob } (C_1 \text{ funcione e } C_2 \text{ funcione}).$$

Exemplo

A informação fornecida não nos permite continuar sem que se saiba (ou se suponha) que os dois mecanismos trabalhem independentemente um do outro.

Isto pode, ou não, ser uma suposição realista, dependendo de como as duas partes sejam engatadas.

Se admitirmos que as duas partes trabalhem independentemente, obteremos para a probabilidade pedida o valor $(1 - p)^2$.

Independência de Eventos

Será importante estendermos a noção de independência para mais de dois eventos.

Consideremos, inicialmente, três eventos associados a um experimento, digamos A, B e C.

Se A e B, A e C, B e C forem independentes dois a dois (no sentido acima), então não se concluirá, em geral, que não exista dependência entre os três eventos.

Exemplo

Suponha que joguemos dois dados.

Defina os eventos A, B e C da seguinte forma:

$$A = \{\text{0 primeiro dado mostra um número par}\},$$

$$B = \{\text{0 segundo dado mostra um número ímpar}\},$$

$$C = \{\text{Ambos os dados mostram números ímpares ou ambos mostram números pares}\}.$$

Exemplo

Temos

$$P(A) = P(B) = P(C) = \quad .$$

Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \quad .$$

Portanto, os três eventos são todos independentes dois a dois.

Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C).$$

Exemplo

Temos

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \quad .$$

Portanto, os três eventos são todos independentes dois a dois.

Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C).$$

Exemplo

Temos

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

Além disso,

$$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}.$$

Portanto, os três eventos são todos independentes dois a dois.

Contudo,

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C).$$

Eventos Independentes

Definição

Diremos que três eventos A, B e C são **mutuamente independentes** se, e somente se, todas as condições seguintes forem válidas:

1. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$,
2. $P(B \cap C) = P(B)P(C)$,
3. $P(A \cap C) = P(A)P(C)$,
4. $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Eventos Independentes

Definição

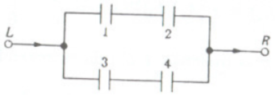
Os n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ serão **mutuamente independentes** se, e somente se, tivermos para $k = 2, 3, \ldots, n$:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k}).$$

Exemplo

A probabilidade de fechamento de cada interruptor do circuito apresentado na figura a seguir é dada por p.

Se todos os interruptores funcionarem independentemente, qual será a probabilidade de que haja corrente entre os terminais L e R?



Exemplo

Represente por A_i o evento $\{$0 interruptor i está fechado$\}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Represente por E o evento $\{$a corrente passa de L para $R\}$.

Como conseqüência, $E = (A_1 \cap A_2) \cup (A_3 \cap A_4)$.

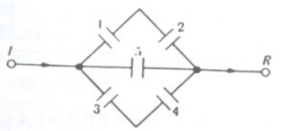
Portanto,

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= p^2 + p^2 - p^4 \\ &= 2p^2 - p^4. \end{aligned}$$

Exemplo

Suponhamos, novamente, que, para o circuito da figura a seguir, a probabilidade de que cada interruptor esteja fechado seja p e que todos os interruptores funcionem independentemente.

Qual será a probabilidade de que exista corrente entre os terminais L e R?



Exemplo

Teremos

$$\begin{aligned} P(E) &= P(A_1 \cap A_2) + P(A_5) + P(A_3 \cap A_4) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_5) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - P(A_5 \cap A_3 \cap A_4) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\ &= p^2 + p + p^2 - p^3 - p^4 - p^3 + p^5 \\ &= p + 2p^2 - 2p^3 - p^4 + p^5. \end{aligned}$$

Exemplo

Admita que dentre seis parafusos, dois sejam menores do que um comprimento especificado.

Se dois dos parafusos forem escolhidos ao acaso, qual será a probabilidade de que os dois parafusos mais curtos sejam extraídos?

Exemplo

Seja A_i o evento $\{$o i-ésimo parafuso escolhido é curto$\}$, $i = 1, 2$.

Portanto, desejamos calcular $P(A_1 \cap A_2)$.

A solução correta é obtida, naturalmente, escrevendo

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{15}.$$

A solução comum, mas incorreta, é obtida escrevendo

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_2)P(A_1) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{15}.$$

Exemplo

Naturalmente, o importante é que, muito embora a resposta esteja numericamente correta, a identificação de $1/5$ com $P(A_2)$ é incorreta; $1/5$ representa $P(A_2|A_1)$.

Para calcular $P(A_2)$ corretamente, escreveremos

$$P(A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) + P(A_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{1}{5} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{1}{3}.$$