Aula 09 – Variáveis Aleatórias Unidimensionais

Luciana Rocha Pedro

GCC 1518 – Estatística e Probabilidade – CEFET Maracanã

Probabilidade – Aplicações à Estatística

Paul L. Meyer

Noção Geral de Variável Aleatória

Ao descrever o espaço amostral de um experimento, não especificamos que um resultado individual necessariamente seja um número.

De fato, apresentamos alguns exemplos nos quais os resultados do experimento não eram uma quantidade numérica.

Por exemplo, ao descrever uma peça manufaturada, podemos empregar apenas as categorias "defeituosa" e "não defeituosa".

Também, ao observar a temperatura durante o período de 24 horas, podemos simplesmente registrar a curva traçada pelo termógrafo.

Noção Geral de Variável Aleatória

Contudo, em muitas situações experimentais, estaremos interessados na mensuração de alguma coisa e no seu registro como um número.

Mesmo nos casos mencionados, poderemos atribuir um número a cada resultado (não numérico) do experimento.

Por exemplo, poderemos atribuir o valor **um** às peças perfeitas e o valor **zero** às defeituosas.

Poderemos registrar a temperatura máxima do dia, ou a temperatura mínima, ou a média das temperaturas máxima e mínima.

Noção Geral de Variável Aleatória

Os exemplos anteriores são bastante típicos de uma classe muito geral de problemas.

Em muitas situações experimentais, desejamos atribuir um número real x a todo elemento s do espaço amostral S.

Isto é, $x = X(s)$ é o valor de uma **função** X do espaço amostral no espaço dos números reais.

Variável Aleatória

Definição

Sejam E um experimento e S um espaço amostral associado ao experimento E.

Uma função X, que associe a cada elemento $s \in S$ um número real, $X(s)$, é denominada **variável aleatória**.

Exemplo

Suponha que atiremos duas moedas e consideremos o espaço amostral associado a este experimento. Isto é,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Podemos definir a variável aleatória da seguinte maneira:

X é o número de caras (H) obtidas nas duas moedas.

Logo,

$$X(HH) = 2, X(HT) = X(TH) = 1 \text{ e } X(TT) = 0.$$

Espaço Amostral Associado à Variável Aleatória

O espaço R_x, conjunto de todos os valores possíveis de X, é denominado **contradomínio**.

De certo modo, poderemos considerar R_x como um outro espaço amostral.

O espaço amostral (original) S corresponde ao resultado (possivelmente não-numérico) do experimento, enquanto R_x é o espaço amostral associado à variável aleatória X, representando a característica numérica que nos poderá interessar.

Exemplo

Suponha que uma lâmpada tenha sido posta em um soquete. O experimento será considerado terminado quando a lâmpada se queimar. Qual será um possível resultado, s?

Uma das maneiras de descrever s seria apenas registrar o dia e a hora em que a lâmpada se queimou, por exemplo: 19 de maio, 16h e 32 minutos.

Como conseqüência, o espaço amostral poderia ser representado por

$$S = \{(d, t) | d = \text{dia}, t = \text{momento do dia}\}.$$

Exemplo

Neste caso, a variável aleatória que interessa é X, a duração até a lâmpada queimar.

Observe que, uma vez que $s = (d, t)$ tenha sido observado, o cálculo de $X(s)$ não inclui qualquer aleatoriedade.

Quando s é especificado, $X(s)$ fica completamente determinado.

Eventos Equivalentes

Definição

Sejam um experimento E e seu espaço amostral S.

Seja X uma variável aleatória definida em S e seja R_x seu contra-domínio.

Seja B um evento definido em relação a R_x, isto é, $B \subset R_x$.

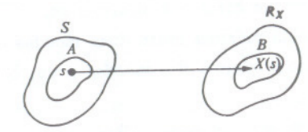
Então, A será definido assim:

$$A = \{s \in S | X(s) \in B\}.$$

Eventos Equivalentes

A será constituído por todos os resultados em S para os quais $X(s) \in B$.

Neste caso, diremos que A e B são **eventos equivalentes**.



É importante ressaltar que, em eventos equivalentes, A e B são associados a espaços amostrais diferentes.

Exemplo

Considere a jogada de duas moedas.

Logo,

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}.$$

Seja X o número de caras obtido. Portanto, $R_x = \{0, 1, 2\}$.

Seja $B = \{1\}$. Como $X(HT) = X(TH) = 1$ se, e somente se, $X(s) = 1$, temos que $A = \{HT, TH\}$ é equivalente a $B = \{1\}$.

Probabilidade de Eventos Equivalentes

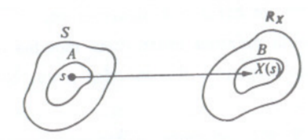
Definição

Seja B um evento no contradomínio R_x. Nesse caso, definimos $P(B)$ da seguinte maneira

$$P(B) = P(A),$$

em que

$$A = \{s \in S | X(s) \in B\}.$$



Definimos $P(B)$ igual à probabilidade do evento $A \subset S$, o qual é equivalente a B.

Exemplo

Se as moedas consideradas no exemplo anterior forem equilibradas, teremos $P(HT) = P(TH) = \frac{1}{4}$.

Portanto, $P(HT, TH) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Como o evento $\{X = 1\}$ é equivalente ao evento $\{HT, TH\}$, teremos que

$$P(X = 1) = P(HT, TH) = \frac{1}{2}.$$

Eventos Equivalentes

A partir deste ponto, escreveremos (como fizemos no exemplo anterior)

$$P(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

O que se quer dizer é que, um certo evento no espaço amostral S, $\{HT, TH\} = \{s|X(s) = 1\}$, ocorre com probabilidade $\dfrac{1}{2}$.

Logo, atribuímos essa mesma probabilidade ao evento $\{X = 1\}$ no contradomínio.

Continuaremos a escrever expressões semelhantes a $P(X = 1)$, $P(X \leq 5)$, etc. É muito importante compreender o que essas expressões realmente representam.

Eventos Equivalentes

Uma vez que as probabilidades associadas aos vários resultados (ou eventos) no contradomínio R_x tenham sido determinadas, freqüentemente ignoraremos o espaço amostral original S, que deu origem a essas probabilidades.

Assim, no exemplo anterior, simplesmente estaremos interessados em $R_x = \{0, 1, 2\}$ e as probabilidades associadas $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

Variável Aleatória Discreta

Definição

Seja X uma variável aleatória.

Se o número de valores possíveis de X (isto é, R_x, o contradomínio) for **finito** ou **infinito enumerável**, denominaremos X de **variável aleatória discreta**.

Isto é, os valores possíveis de X podem ser postos em lista como $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

No caso finito, a lista acaba, e no caso infinito enumerável, a lista continua indefinidamente.

Exemplo

Uma fonte radioativa está emitindo partículas α.

A emissão dessas partículas é observada em um dispositivo contador, durante um período de tempo especificado.

A variável aleatória seguinte é a que interessa:

$$X = \textit{número de partículas observadas.}$$

Quais são os valores possíveis de X?

Exemplo

Admitiremos que esses valores são todos os inteiros não-negativos, isto é, $R_x = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$

Porém, podemos argumentar que, durante um especificado intervalo (finito) de tempo, é impossível observar mais do que, digamos N partículas, com N um inteiro positivo muito grande.

Conseqüentemente, os valores possíveis para X realmente seriam: 0, 1, 2, ..., N.

Contudo, torna-se matematicamente mais simples considerar a descrição idealizada feita anteriormente.

Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta

Definição

Seja X uma variável aleatória discreta.

Portando, R_x, o contradomínio de X, será formado por, no máximo, um número infinito enumerável de valores $x_1, x_2, \ldots$.

A cada possível resultado x_i associaremos um número

$$p(x_i) = P(X = x_i),$$

denominado **probabilidade de** x_i.

Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta

Os números $p(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$, devem satisfazer às seguintes condições:

1. $p(x_i) \geq 0$, para todo i,
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$.

A função p é denominada **função de probabilidade** da variável aleatória X.

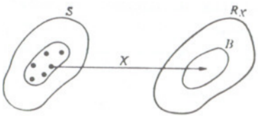
A coleção de pares $[x_i, p(x_i)]$, $i = 1, 2, \ldots$, é algumas vezes denominada **distribuição de probabilidade** de X.

Probabilidade de uma Variável Aleatória Discreta

Seja B um evento associado à variável aleatória X, isto é, $B \subset R_x$. Suponha, especificamente, que $B = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$. Logo,

$$\begin{aligned} P(B) &= P[s|X(s) \in B] \quad \text{(porque esses eventos são equivalentes)} \\ &= P[s|X(s) = x_{i_j}, j = 1, 2, \ldots] \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} p(x_{i_j}). \end{aligned}$$

A probabilidade de um evento B é igual à soma das probabilidades dos resultados individuais associados a B.



Observações

Suponha que a variável aleatória discreta X possa tomar somente um número finito de valores, $x_1, \ldots, x_N$.

Se os resultados forem igualmente prováveis, então teremos, obviamente,

$$p(x_1) = \ldots = p(x_N) = \frac{1}{N}.$$

Se X tomar um número infinito enumerável de valores, então é impossível ter todos os valores igualmente prováveis, porque não poderemos satisfazer à condição $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} p(x_i) = 1$ se tivermos $p(x_i) = c$, para todo i.

Exemplo

Suponhamos que uma válvula eletrônica seja posta em um soquete e ensaiada.

Admitamos que a probabilidade de que o teste seja positivo seja $\dfrac{3}{4}$. Logo, a probabilidade de que seja negativo é igual a $\dfrac{1}{4}$.

Admitamos, também, que estejamos ensaiando um lote grande dessas válvulas.

Os ensaios continuam até que a primeira válvula positiva apareça.

Exemplo

Definamos a variável aleatória assim:

X *é o número de testes necessários para concluir o experimento.*

O espaço amostral associado a este experimento é:

$$S = \{+, -+, --+, ---+, \dots\}.$$

Exemplo

Para determinarmos a distribuição de probabilidade de X, raciocinaremos da seguinte forma: os valores possíveis de X são $1, 2, \ldots, n, \ldots$.

Teremos $X = n$ se, e somente se, as primeiras $(n-1)$ válvulas forem negativas e a n-ésima válvula for positiva.

Se aceitarmos que a condição de uma válvula não influencie na condição de outra, poderemos escrever

$$p(n) = P(X = n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Exemplo

Para verificarmos que esses valores de $p(n)$ satisfazem à definição de probabilidade, observaremos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p(n) &= \frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\dots\right)\\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Estamos empregando, aqui, o resultado de que a série geométrica $1 + r + r^2 + \dots$ converge para $\frac{1}{1-r}$, sempre que $|r| < 1$.

Exemplo

Suponha que desejemos calcular $P(A)$, em que A é definido como:

O experimento termina depois de um número par de repetições.

Logo, temos

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(2n) \\ &= \frac{3}{16} + \frac{3}{256} + \dots \\ &= \frac{3}{16}\left(1 + \frac{1}{16} + \dots\right) \\ &= \frac{3}{16}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\right) = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Introdução

Suponha que peças saiam de uma linha de produção e sejam classificadas como defeituosas (D) ou como não-defeituosas (N), isto é, perfeitas.

Admita que três dessas peças, da produção de um dia, sejam escolhidas ao acaso e classificadas de acordo com esse esquema.

O espaço amostral para esse experimento, S, pode ser assim apresentado:

$$S = \{DDD, DDN, DND, NDD, NND, NDN, DNN, NNN\}.$$

Introdução

Outra maneira de descrever S é como

$$S = S_1 \times S_2 \times S_3,$$

o produto cartesiano de S_1, S_2 e S_3, em que cada $S_i = \{D, N\}$.

Suponhamos que seja 0.2 a probabilidade de uma peça ser defeituosa e 0.8 a de ser não-defeituosa.

Admitamos que essas probabilidades sejam as mesmas para cada peça, ao menos enquanto durar o nosso estudo.

Introdução

Finalmente, admita que a classificação de qualquer peça em particular seja independente da classificação de qualquer outra peça.

Empregando essas suposições, segue-se que as probabilidades associadas aos vários resultados do espaço amostral S são:

$$\begin{array}{llll} (0.2)^3 & (0.8)(0.2)^2 & (0.8)(0.2)^2 & (0.8)(0.2)^2 \\ (0.2)(0.8)^2 & (0.2)(0.8)^2 & (0.2)(0.8)^2 & (0.8)^3 \end{array}$$

Introdução

Geralmente, nosso interesse não está dirigido para os resultados individuais de S.

Ao contrário, desejamos apenas conhecer quantas peças defeituosas seriam encontradas, não interessando a ordem em que tenham ocorrido.

Isto é, desejamos estudar a variável aleatória X, a qual atribui a cada resultado $s \in S$ o número de peças defeituosas encontradas em s.

Conseqüentemente, o conjunto dos valores possíveis de X é $\{0, 1, 2, 3\}$.

Introdução

Poderemos obter a distribuição de probabilidade de X,

$$p(x_i) = P(X = x_i),$$

da seguinte maneira:

$X = 0$ se, e somente se, ocorrer NNN;

$X = 1$ se, e somente se, ocorrer DNN, NDN, ou NND;

$X = 2$ se, e somente se, ocorrer DDN, DND, ou NDD;

$X = 3$ se, e somente se, ocorrer DDD.

Introdução

Então,

$$p(0) = P(X = 0) = (0,8)^3,$$

$$p(1) = P(X = 1) = 3(0,2)(0,8)^2,$$

$$p(2) = P(X = 2) = 3(0,2)^2(0,8),$$

$$p(3) = P(X = 3) = (0,2)^3.$$

Observe que a soma dessas probabilidades é igual a 1, porque a soma pode ser escrita como $(0,8 + 0,2)^3$.

Variável Aleatória Binomial

Definição

Consideremos um experimento E e seja A algum evento associado a S. Admita que $P(A) = p$ e, conseqüentemente, $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Considere n repetições de S. Logo, o espaço amostral será formado por todas as seqüências possíveis

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

em que cada a_i é ou A ou $\bar{A}$, dependendo de que tenha ocorrido A ou $\bar{A}$ na i-ésima repetição de E.

Além disso, suponha que $P(A) = p$ permaneça a mesma para todas as repetições.

Variável Aleatória Binomial

Definição

A variável aleatória X será assim definida:

$$X = \textit{número de vezes que o evento } A \textit{ tenha ocorrido.}$$

Denominaremos X de **variável aleatória binomial**, com parâmetros n e p.

Seus valores possíveis são, evidentemente, $0, 1, 2, \ldots, n$.

De maneira equivalente, diremos que X tem uma **distribuição binomial**.

As repetições individuais de E serão denominadas **provas de Bernoulli**.

Variável Aleatória Binomial

Teorema

Seja X uma variável binomial, baseada em n repetições.

Então,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,\ldots,n.$$

Variável Aleatória Binomial

Demonstração

Considere um elemento particular do espaço amostral de S satisfazendo à condição $X = k$.

Um resultado como esse poderia surgir, por exemplo, se nas primeiras k repetições de E ocorresse A, enquanto nas últimas $n - k$ repetições ocorresse $\bar{A}$, isto é,

$$\underbrace{AAA\cdots A}_{k}\ \underbrace{\bar{A}\bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}}_{n-k}.$$

Variável Aleatória Binomial

Demonstração

Como todas as repetições são independentes, a probabilidade desta seqüência particular seria $p^k(1-p)^{n-k}$.

Mas exatamente essa mesma probabilidade seria associada a qualquer outro resultado para o qual $X = k$.

O número total de tais resultados é igual a $\binom{n}{k}$, porque deveremos escolher exatamente k posições (dentre n) para o evento A.

Ora, isso dá o resultado que encontramos, porque esses k resultados são todos mutuamente excludentes.

Distribuição Binomial

Como as probabilidades

$$p^k(1-p)^{1-k}$$

são obtidas pelo desenvolvimento da expressão binomial $[p+(1-p)]^n$, ela recebe a denominação de **distribuição binomial**.

Sempre que realizarmos repetições independentes de um experimento e estivermos interessados somente em uma **dicotomia**, estaremos virtualmente tratando de um espaço amostral no qual podemos definir uma **variável aleatória binomial**.

Exemplo

Suponha que uma válvula eletrônica, instalada em um determinado circuito, tenha probabilidade 0.2 de funcionar mais do que 500 horas.

Se ensaiarmos 20 válvulas, qual será a probabilidade de que delas, exatamente k funcionem mais que 500 horas, $k = 0, 1, 2, \ldots, 20$?

Exemplo

Seja X o número de válvulas que funcionam mais de 500 horas e admita que X tenha uma distribuição binomial.

Então,

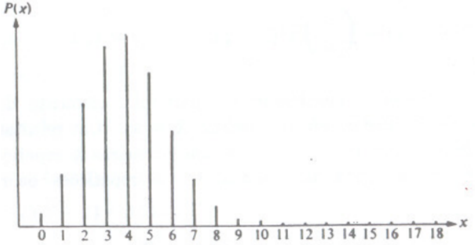
$$P(X = k) = \binom{20}{k}(0.2)^k(0.8)^{20-k}.$$

$P(X = 0) = 0{,}012$	$P(X = 4) = 0{,}218$	$P(X = 8) = 0{,}022$
$P(X = 1) = 0{,}058$	$P(X = 5) = 0{,}175$	$P(X = 9) = 0{,}007$
$P(X = 2) = 0{,}137$	$P(X = 6) = 0{,}109$	$P(X = 10) = 0{,}002$
$P(X = 3) = 0{,}205$	$P(X = 7) = 0{,}055$	$P(X = k) = 0^+$ para $k \geq 11$

(As probabilidades restantes são menores do que 0,001.)

Exemplo

Se marcarmos os valores dessa distribuição, obteremos o gráfico a seguir.



A configuração que observamos aqui é bastante geral. As probabilidades binomiais crescem monotonicamente, até que atingem um valor máximo e, depois, decrescem monotonicamente.

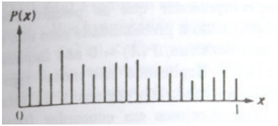
Introdução

Suponha que o contradomínio de X seja formado por um número finito muito grande de valores, digamos todos os valores x no intervalo $0 \leq x \leq 1$ da forma: $0, 0.01, 0.02, \ldots, 0.98, 0.99, 1.00$.

A cada um desses valores está associado um número não-negativo

$$p(x_i) = P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots,$$

cuja soma é igual a 1.



Introdução

Já salientamos, anteriormente, que poderia ser matematicamente mais fácil idealizar a apresentação probabilística de X pela suposição de que X pudesse tomar todos os valores possíveis, $0 \leq x \leq 1$.

Se fizermos isso, o que acontecerá às probabilidades $p(x_i)$?

Introdução

Como os valores possíveis de X não são enumeráveis, não podemos realmente falar do i-ésimo valor de X e, por isso, $p(x_i)$ se torna sem sentido.

O que faremos é substituir a função P, definida somente para $x_1, x_2, \ldots$, por uma função f, definida (neste contexto) para todos os valores de x, $0 \leq x \leq 1$.

As propriedades da definição de probabilidade serão substituídas por

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \int_0^1 f(x)\ dx = 1.$$

Variável Aleatória Contínua

Definição

Dizemos que X é uma **variável aleatória contínua** se existir uma função f, denominada **função densidade de probabilidade (fdp)** de X, que satisfaça às seguintes condições:

1. $f(x) \geq 0$, para todo x,
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,
3. Para quaisquer a, b, com $-\infty < a < b < \infty$, teremos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, dx.$$

Variável Aleatória Contínua

Uma conseqüência da descrição probabilística de X é que, para qualquer valor especificado de X, digamos x_0, teremos $P(X = x_0) = 0$, porque $P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)\ dx = 0$.

Este resultado pode parecer muito contrário à nossa intuição.

Contudo, devemos compreender que, se permitirmos que X tome todos os valores em algum intervalo, então a probabilidade zero não é equivalente à impossibilidade.

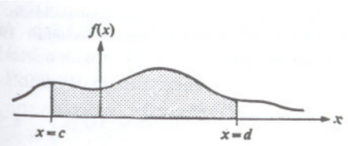
Por isso, no caso contínuo, $P(A) = 0$ não implica em $A = \emptyset$, o conjunto vazio.

Variável Aleatória Contínua

Tendo em vista essas observações, as seguintes probabilidades serão todas iguais, se X for uma variável aleatória contínua:

$$P(c \leq X \leq d), P(c \leq X < d), P(c < X \leq d), P(c < X < d).$$

A função f não representa a probabilidade de coisa alguma! Somente quando a função for integrada entre dois limites ela produzirá uma probabilidade. $P(c < X < d)$ representa a área sob a curva no gráfico da fdp f entre $x = c$ e $x = d$.

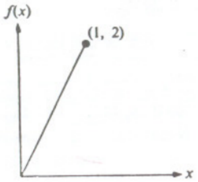


Exemplo

Suponhamos que a variável aleatória X seja contínua.

Seja a fdp f dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$



Exemplo

Evidentemente, $f(x) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \int_0^1 2x\ dx = 1.$

Para calcular $P\left(X \leq \frac{1}{2}\right)$, devemos apenas calcular a integral

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 2x\ dx = x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Probabilidade Condicionada

O conceito de **probabilidade condicionada** pode ser significativamente aplicado a variáveis aleatórias.

Assim, no exemplo anterior, podemos calcular $P\left(X \leq \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$.

Aplicando diretamente a definição de probabilidade condicionada, teremos:

Probabilidade Condicionada

$$P\left(X \leq \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right) = \frac{P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)}{P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)} = \frac{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 2x \; dx}{\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} 2x \; dx}$$

$$= \frac{x^2\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}}{x^2\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{9}}{\frac{4}{9} - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{9-4}{36}}{\frac{3}{9}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{3}} = \frac{5}{12}.$$

Variável Aleatória Uniformemente Distribuída

Definição

Suponha que X seja uma variável aleatória contínua, que tome todos os valores no intervalo $[a, b]$, no qual a e b sejam ambos finitos.

Se a fdp de X for dada por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{para quaisquer outros valores,} \end{cases}$$

diremos que X é **uniformemente distribuída** sobre o intervalo $[a, b]$.

Exemplo

Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0, 2]$.

Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e $\dfrac{3}{2}$?

Fazendo X representar a coordenada do ponto escolhido, nós temos que a fdp de X é dada por $f(x) = \quad$, $0 < x < 2$ e, portanto,

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) =$$

Exemplo

Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0, 2]$.

Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e $\frac{3}{2}$?

Fazendo X representar a coordenada do ponto escolhido, nós temos que a fdp de X é dada por $f(x) = \frac{1}{2}$, $0 < x < 2$ e, portanto,

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) =$$

Exemplo

Um ponto é escolhido ao acaso no segmento de reta $[0, 2]$.

Qual será a probabilidade de que o ponto escolhido esteja entre 1 e $\frac{3}{2}$?

Fazendo X representar a coordenada do ponto escolhido, nós temos que a fdp de X é dada por $f(x) = \frac{1}{2}$, $0 < x < 2$ e, portanto,

$$P\left(1 \leq X \leq \frac{3}{2}\right) = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\, dx = \left.\frac{x}{2}\right|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Função de Distribuição Acumulada

Definição

Seja X uma variável aleatória, discreta ou contínua.

Definimos a função F como a **função de distribuição acumulada** da variável aleatória X (abreviadamente indicada fd) como

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Função de Distribuição Acumulada

Teorema

Se X for uma variável aleatória discreta

$$F(x) = \sum_{j} p(x_j),$$

em que o somatório é estendido a todos os índices j que satisfaçam à condição $x_j \leq x$.

Se X for uma variável aleatória contínua, com fdp f,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\; ds.$$

Exemplo

Suponha que a variável aleatória X possua três valores 0, 1 e 2, com probabilidades $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$, respectivamente. Então,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0, \\ \frac{1}{3}, & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } 1 \leq x < 2, \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo

Suponha que X seja uma variável contínua com fdp

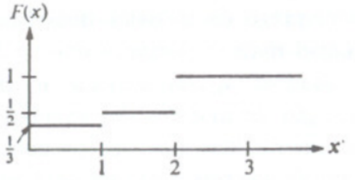
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{para quaisquer outros valores.} \end{cases}$$

Portanto, a fd F é dada por

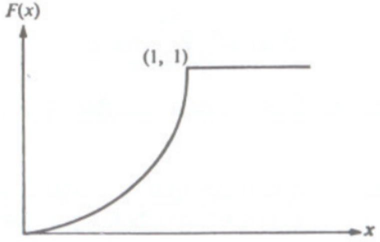
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ \displaystyle\int_0^x 2s\ ds = x^2 & \text{se } 0 < x < 1, \\ 1, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Gráfico da Função de Distribuição Acumulada

Variável Aleatória Discreta



Variável Aleatória Contínua



Função de Distribuição Acumulada

A função de distribuição acumulada é importante por muitas razões.

Isto é particularmente verdadeiro quando tratarmos com uma variável aleatória contínua, porque nesse caso não poderemos estudar o comportamento probabilístico de X através do cálculo de $P(X = x)$.

Esta probabilidade é sempre igual a zero no caso contínuo. Contudo, poderemos indagar de $P(X \leq x)$ e, como demonstra o teorema seguinte, obter a fdp de X.

Função de Distribuição Acumulada

Teorema

Seja F a fd de uma variável aleatória contínua, com fdp f. Então,

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x),$$

para todo x no qual F seja derivável.

Função de Distribuição Acumulada

Teorema

Seja X uma variável aleatória discreta, com valores possíveis $x_1, x_2, \ldots$ e suponha que esses valores tenham sido indexados de modo que $x_1 < x_2 < \ldots$.

Seja F a fd de X. Então,

$$p(x_j) = P(X = x_j) = F(x_j) - F(x_{j-1})$$